

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Nationale Polytechnique
Département de Génie Mécanique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Mémoire de Master en Génie Mécanique

Option :

Mécanique de Solide

Thème :

**Torsion axisymétrique d'un milieu élastique
par une paire de disques rigides adhésifs.**

Proposé et dirigé par :

M^r. KEBLI Belkacem

Présenté par :

M^r.CHERIFI Djamel

Promotion : Octobre 2014

Ecole Nationale Polytechnique-10 Avenue Hassen Badi B.P.182- El Harrach- 16200 Alger,
Algerie. Tél : +213 52 53 01/03. Fax : +213 21 52 29 73

ملخص:

نعرض في هذه المذكرة دراسة مسألة الالتواء المحوري التناظري لفضاء مرن ومتجانس مع اثنين من الأقراص الصلبة المحورية مع أنصاف أقطار مختلفة بعيدة عن مسافة معروفة .

لحل هذه المسألة وذلك من أجل تحديد حقل التشوه والاجهاد في مختلف المناطق نستعمل تحويل التكاملية له نكل بعد بتطبيق الشروط الحدية لهذه المسألة، نحصل جملة معادلات فريدهولم التكاملية. ولحل هذه الأخيرة نستعمل سلسلة كثير حدود جاكوبي لنتحصل في الاخير على جملة معادلات جبرية، وهكذا تمكنا من الحصول الى مختلف الحلول المتعلقة بالانتقال والتشوه والاجهاد لهذا الجسم.

كلمات مفتاحية: التواء محوري تناظري، فضاء مرن، معادلات فريدهولم التكاملية، معادلات التكاملية مزدوجة.

Résumé :

Dans ce travail, nous allons étudier le problème de la torsion axisymétrique d'un milieu élastique par deux disques rigides adhésifs coaxiaux ayant des rayons différents qui sont éloigné d'une distance connue. Ce problème doublement mixte aux limites est transformé à un système d'équations intégrales duales par la méthode de la transformation intégrale de Hankel. En utilisant des développements en série des polynômes de Jacobi, la solution des équations intégrales de Fredholm correspondante s'obtient par la résolution d'un système algébrique. Les résultats de ce dernier système sont calculés numériquement ainsi que l'interprétation graphique des champs de déplacement, les champs de contrainte.

Mots clés : Torsion axisymétrique, Couche élastique, Équations intégrales duales, contrainte

Abstract :

In this work, we study the problem of axisymmetric torsion of an elastic medium with two adhesive coaxial rigid disks with different radii that are remote from a known distance. This doubling mixed boundary value problem is transformed to a system of dual integral equations by the method of integral Hankel transformation. Using series expansions of Jacobi polynomials, the solution of integral equations corresponding Fredholm is obtained by solving an algebraic system. The results of the latter system are calculated numerically and the graphical interpretation of the displacement fields, stress fields.

Keywords: Axisymmetric torsion elastic layer, Boundary element dual, stress.

Dédicaces

C'est avec toute mon affection que Je dédie ce modeste travail :

- ✓ *A celui qui m'a donné la vie et qui m'a apporté sans cesse son amour, mon père.*
- ✓ *A Ma très chère mère qui m'a apporté sans cesse Amour, Soutien et Encouragement...*
- ✓ *A mes frères et sœurs.*
- ✓ *A tous les membres de ma famille.*
- ✓ *A mes très chers amis.*

REMERCIEMENTS

Louange à Allah, Dieu Unique, que Sa paix et Sa bénédiction soient sur le dernier des prophètes, Muhammad, sur sa famille et sur tous ses compagnons.

Je tiens à remercier en premier lieu mon enseignant et promoteur, Monsieur Belkacem KEBLI, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique, pour sa disponibilité, son aide, ainsi que pour toutes les réponses qu'il a su me donner quand je rencontrais des soucis, et je lui sais gré de son soutien et ses précieux conseils.

Je remercie Le Professeur Mohamed BOUAZIZ, qui a bien voulu présider mon jury, ainsi que Monsieur AMICHE, d'avoir accepté d'examiner et d'évaluer mon modeste travail.

Je remercie également, tous les enseignants qui ont contribué à ma formation tout au long de mon cursus.

Je remercie enfin tous mes amis de promotion ainsi que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce projet.

Table des matières

Introduction Générale	1
Chapitre I : Rappels mathématiques	4
I.1- Introduction	4
I.2- Equations intégrales	4
I.2.1- Equation de Fredholm	4
I.2.2- Equation de Volterra	5
I.2.3- Équation intégrale d'Abel	5
I.2.4- Équation de Bessel	6
I.2.5- Transformée de Hankel	9
I.3- Polynômes de Jacobi	9
I.4- Méthodes d'intégration numérique	10
I.4.1- Méthode des trapèzes	10
I.4.2- Méthode de Simpson	11
Chapitre II : Rappels et généralistes sur l'élasticité	12
II.1- Introduction	12
II.2- Quelques définitions	13
II.2.1 L'élasticité classique	13
II.2.2 Elasticité axisymétrique	13
II.3- Les modules élastiques	13
II.3.1- Module d'Young	13
II.3.2- Coefficient de Poisson	13
II.3.3- Module de Coulomb	14
II.3.4- Relations entre les modules	14
II.4- Rappel d'élasticité	14
II.4.1 Contraintes	14
II.4.2- Déplacements - Déformations	18
II.4.3- Glissement	19

II.4.5- Loi de comportement	19
II.4.6- Critères de limite élastique	20
II.5- Équations d'élasticité	21
II.5.1- Loi de comportement - Loi de Hooke	21
II.5.2- Équations supplémentaires	22
Chapitre III : Formulation et résolution de problème	23
III.1- Introduction :	23
Equation d'équilibre :	24
Conditions aux limites du problème :.....	25
Déplacements et les contraintes pour les trois domaines :	25
Équations intégrales duales en $J1$	25
Résultats numériques et discussion	31
Valeurs de α_n et β_n pour $H = 0.5$	32
Valeurs de α_n et β_n pour $H = 1$	32
Valeurs de α_n et β_n pour $H = 1.5$	33
Valeurs de α_n et β_n pour $c = 1.5$	33
Expressions des déplacements et des contraintes	34
Présentation des résultats	35
Interprétation :	43
Conclusion générale et perspectives	44
BIBLIOGRAPHIE	45

TABLE DES FIGURES

Figure 1	:	Problème de Dhawan.....	2
Figure 2	:	Problème de Singh	2
Figure 3	:	Problème de Pak.....	3
Figure 4	:	Problème de Bacci	3
Figure I-1	:	Graphe de la fonction de Bessel de première espèce	6
Figure I-2	:	Graphe de la fonction de Bessel de seconde espèce	7
Figure I-3	:	Graphes de deux fonctions de Bessel premier et seconde espèce....	8
Figure I-4	:	Méthode des trapèzes.....	10
Figure I-5	:	Méthode de Simpson	11
Figure II-1		Contraintes autour du point A	14
Figure II-2		Contrainte normale σ et tangentielle τ en un point A.....	15
Figure II-3	:	Déformation au voisinage d'un point A.....	19
Figure II-4	:	Diagramme déformation contrainte	21
Figure III-1	:	Schéma représentant le problème.....	23
Figure III-1	:	Champ de déplacement $\frac{U_{\theta}^1(\rho,\zeta)}{a \omega_1}$, H = 1, c=1.....	36
Figure III-2	:	Champ de contrainte $\frac{\tau_{\theta z}^1(\rho,\zeta)}{G \cdot a \omega_1}$, H = 1, c = 1.....	36
Figure III-3	:	Figure III-4 : Champ de déplacement $\frac{U_{\theta}^2(\rho,\zeta)}{a \omega_1}$, H = 1, c=1.....	37
Figure III-4	:	Figure III-5 : Champ de contrainte $\frac{\tau_{\theta z}^2(\rho,\zeta)}{G \cdot a \omega_1}$, H = 1, c = 1.....	37
Figure III-5	:	Figure III-6 : Champ de déplacement $\frac{U_{\theta}^3(\rho,\zeta)}{a \omega_1}$, H = 1, c = 1.....	38
Figure III-6	:	Champ de contrainte $\frac{\tau_{\theta z}^3(\rho,\zeta)}{G \cdot a \omega_1}$, H = 1, c=1.....	38

Nomenclature

a	:	Rayon de premier disque	$[m]$
b	:	Rayon de deuxième disque	$[m]$
c	:	Rapport $\frac{b}{a}$	-
S	:	Surface	$[m^2]$
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$:	Contraints normales	$[Pa]$
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yz}$:	Contraints tangentiels	$[Pa]$
$\varepsilon_i, \gamma_{ij}$:	Taux de déformation	-
u_{ij}	:	Vecteur de déplacement	$[m]$
E	:	Module de Young	$[Pa]$
μ, G	:	Module de cisaillement	$[Pa]$
ν	:	Coefficient de Poisson	
$J_\nu(x)$:	Fonction de Bessel 1 ^{ère} espèce	-
$Y_\nu(x)$:	Fonction de Bessel 2 ^{ème} espèce	-
δ_{ij}	:	Delta de Kronecker	

Introduction Générale

Depuis des siècles Les physiciens tentent de mettre en équations le comportement de la matière. Plus ou moins générales, précises ou robustes, ces modélisations s'appuient sur la représentation du phénomène de déformation à l'aide de champs vectoriels et de tenseurs. Ceux-ci décrivent en particulier la déformation de l'objet ainsi que les contraintes internes qu'il subit. Des lois de comportement viennent ensuite lier les contraintes et la déformation qui en résulte.

Le problème de déformation dans un milieu élastique est un sujet d'intérêt considérable pour les mathématiques et la mécanique appliquée. Des défauts se présentent sous forme des fissures et d'inclusions peuvent être rencontrées ou produites en de tels matériaux. L'approche numérique aussi est à l'origine de très nombreuses études mathématiques dans le domaine de l'élasticité (en particulier, cas des déformations).

Les problèmes de torsion des milieux élastiques apparaissent dans différents domaines d'ingénierie telle que la mécanique des solides et des sols. Plusieurs travaux ont été consacrés pour ce type de problèmes. Généralement, les déformations de ces milieux sont dues à la torsion d'un disque rigide (Tamate et Saito [6]et Erguven[7]) ou bien à des contraintes de torsion pour le cas de domaines élastiques assurés (Sih et Chen[8]).

Dans les travaux précédents, la méthode de la transformation intégrale de Hankel a été utilisée. Ces problèmes aux conditions limites mixtes sont réduits à un système d'équations intégrales duales. Ce qui ramène aussi les problèmes étudiées à des équations intégrales de Fredholm. Généralement, des solutions approximatives par la méthode itérative des séries entières sont obtenues pour ces dernières équations.

Dans le cadre de notre projet, nous nous proposons d'étudier et chercher une solution analytique pour le problème de torsion axisymétrique par deux disques rigides ayants des rayons différents dans un milieu élastique divisé en trois domaines d'étude. Nous présentons ensuite sous forme des courbes les champs des déplacements et des contraintes. Le chapitre I sera consacré à quelques rappels mathématiques. Le rappel sur l'élasticité fera l'objet du chapitre II, tandis que la formulation et la résolution de problème se fera au chapitre III, qui commencera par une description plus détaillée du problème, et Nous finirons par une conclusion générale de cette modeste contribution.

Pour avoir une meilleure idée sur le problème étudié, nous préférons donner quelques descriptions de quelques travaux déjà publiés et qu'ils ont une certaine similarité avec notre étude :

- **Dhawan 1974**

Il a considéré un demi-espace élastique occupant la région $z \geq -h$, dont la limite $z = -h$ est n'est pas chargée, à l'exception de la partie circulaire $0 \leq r < b$ dans laquelle un arbre circulaire rigide de rayon b est fixé. En plus d'une fissure qui se présente dans la région $0 \leq r \leq a$, $z = 0$, $z = 0$ dont les lèvres sont supposées non chargées. Un moment de torsion de grandeur M est appliqué à l'arbre tournant d'un angle α [1].

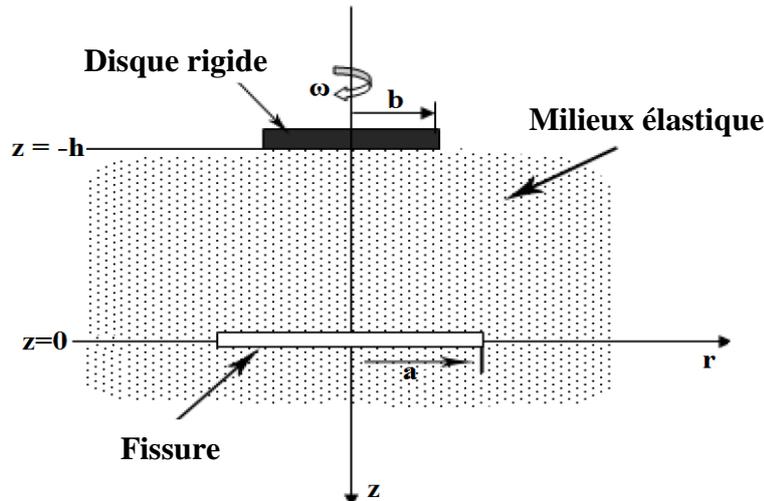


Figure 1 : Problème de

- **Singh 1977**

Singh a considéré une couche élastique isotrope infini, et homogène, limitée par les plans $z = 0$ et $z = h$ avec deux disques rigides de rayons a et b fixés sur les surfaces $z = 0$ et $z = h$ respectivement de telle sorte que l'axe joignant les centres des disques est l'axe z . Les deux disques de rayons a et b sont en rotation avec des différents angles α et β respectivement, et le reste des surfaces $z = 0, h$ est supposé non chargé [2].

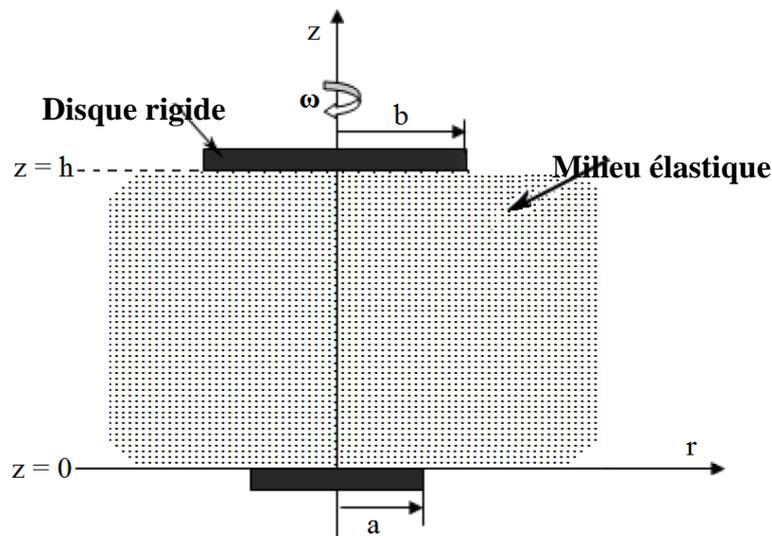


Figure 2 – Problème de Singh

- Pak 1991

Le travail de Pak consiste à étudier le problème de torsion axisymétrique d'un disque rigide de rayon a qui est noyé à une profondeur $d > 0$ dans un demi-espace homogène, isotrope et linéairement élastique. Le disque est supposé être soumis à une rotation autour de l'axe z d'un angle Θ . [3]

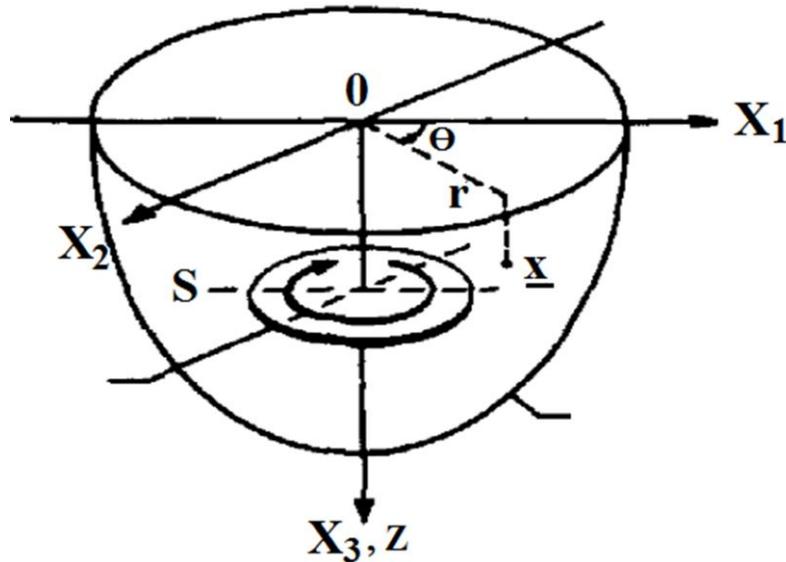


Figure 3 – Problème de Pak

- Bacci 1996

Bacci a été intéressé par le phénomène de deux disques rigides coaxiaux de rayon adhésifs dans une couche isotrope et linéairement élastique non bornée. La distance entre les deux disques est H_0 , et T est la rotation appliquée sur les disques autour de l'axe de ces derniers. [4]

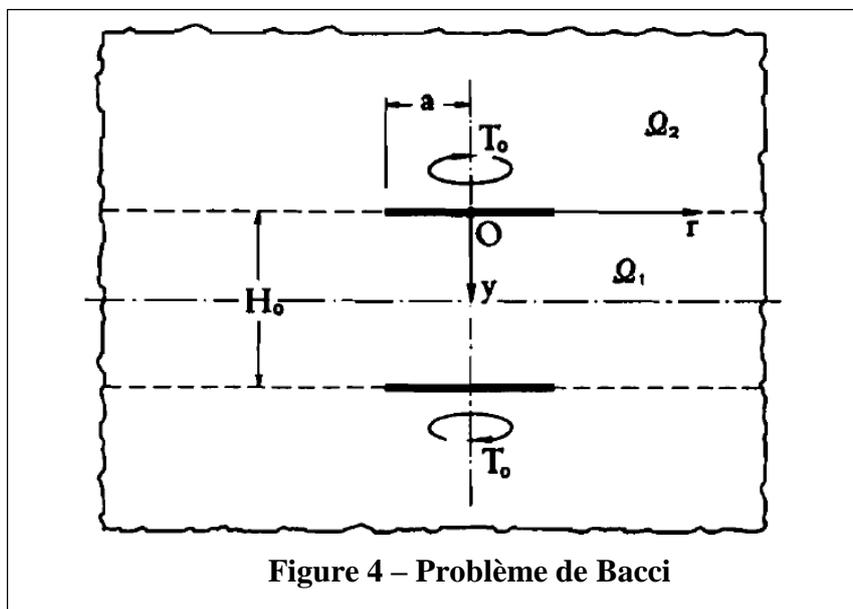


Figure 4 – Problème de Bacci

Chapitre I

Rappels Mathématiques

Chapitre I : Rappels mathématiques

I.1- Introduction

La solution mathématique exacte pour les problèmes liés à l'élasticité dont la géométrie est relativement régulière (rectangulaire, cylindrique, sphérique...), s'obtient par l'application des méthodes analytiques, telles les transformations intégrales, la séparation des variables, etc. Dans ce chapitre, nous allons donner quelques rappels mathématiques sur les équations intégrales et les méthodes d'intégrations numériques utilisés pour la résolution de problème de torsion axisymétrique étudié dans le chapitre III.

I.2- Equations intégrales

Une équation intégrale est une équation dont la fonction inconnue est sous le signe intégrale. Elles sont importantes dans plusieurs domaines physiques. Les équations de Fredholm et Volterra, etc. sont probablement leurs plus célèbres représentants. Elles apparaissent dans des problèmes de transfert d'énergie et des problèmes d'oscillations. Les problèmes d'oscillations peuvent aussi être résolus à l'aide d'équations différentielles. Les équations intégrales sont a priori moins simples à résoudre que les équations algébriques ou les équations différentielles. Nous allons voir dans ce chapitre que pour des équations intégrales linéaires, une fois réalisée la discrétisation de ces équations, on se ramène au problème de la recherche de solutions d'un système algébrique [9].

I.2.1- Equation de Fredholm

a. Equation de Fredholm de première espèce

On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce l'équation donnée par la relation suivante [9] :

$$h(t) = \int_a^b K(t,s) f(s) ds \quad (1.1)$$

où f est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer ; h est le terme de source, alors que K représente le noyau de l'équation. Les limites d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équation de Fredholm.

b. Equation de Fredholm de deuxième espèce

Si la fonction inconnue apparaît à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale, l'équation intégrale de Fredholm est de deuxième espèce, définie par la relation suivante [9]:

$$f(t) = h(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) f(s) ds \quad (1.2)$$

où le paramètre λ est un facteur inconnu, qui joue le même rôle que la valeur propre en algèbre linéaire.

I.2.2- Equation de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau K est tel que :

$$K(t, s) = 0 \quad s > t \quad (1.3)$$

Si l'une des limites d'intégration est variable, il s'agit d'une équation intégrale de Volterra. Des équations du premier et du second type de Volterra pourraient être :

$$h(t) = \int_a^t K(t, s) f(s) ds \quad (1.4)$$

$$f(t) = h(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(s) ds \quad (1.5)$$

Si la fonction connue g est identiquement nulle, l'équation intégrale est alors appelée équation intégrale homogène.

Si elle est différente de zéro, elle est appelée équation intégrale non-homogène.

I.2.3- Équation intégrale d'Abel

L'équation intégrale d'Abel a eu lieu comme l'une des premières équations intégrales de l'histoire des mathématiques, nous pouvons écrire sa forme générale d'après l'équation de Volterra suivante [9] :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{[h(x)-h(t)]^\alpha} dt = g(x) \quad ; \quad 0 < x < b \quad (1.6)$$

Si nous posons $h(\tau) = \tau$, dans nous obtenons :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{[x^2-t^2]^\alpha} dt = g(x) \quad 0 < \alpha < 1 ; 0 < x < b \quad (1.7)$$

Que l'on appelle l'équation intégrale d'Abel, dont la solution est de la forme :

$$f(t) = \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_a^x \frac{\tau g(\tau)}{[t^2-\tau^2]^{1-\alpha}} d\tau \right] \quad ; \quad a < t < b \quad (1.8)$$

Les équations ensemble sont connus par la transformation d'Abel intérieure. Dans un autre cas, l'équation :

$$\int_a^b \frac{f(t)}{[t^2-x^2]^\alpha} dt = g(x) \quad 0 < \alpha < 1 ; 0 < x < b \quad (1.9)$$

Et sa solution :

$$f(t) = \frac{2 \sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_a^x \frac{\tau g(\tau)}{[t^2-\tau^2]^{1-\alpha}} d\tau \right] \quad ; \quad a < t < b \quad (1.10)$$

Sont connus par la transformation d'Abel extérieure.

I.2.4- Équation de Bessel

L'équation différentielle de second ordre donnée par :

$$r^2 \frac{d^2y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (r^2 - n^2) y = 0 \quad (1.11)$$

est connu comme l'équation de Bessel, et la solution de cette équation donne les fonctions de Bessel de première et seconde espèce, comme suit [10] :

$$y(r) = C_1 J_n(r) + C_2 Y_n(r) \quad (1.12)$$

où :

C_1 et C_2 , sont des constantes arbitraires.

$J_n(r)$ et $Y_n(r)$, sont les fonctions de Bessel d'ordre n de première et seconde espèce respectivement.

a- Fonction de Bessel de première espèce

La fonction de Bessel de première espèce d'ordre n peut être déterminée en utilisant un développement en série de puissance de la façon suivante

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} = \left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)}\right) + \left(-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1! \Gamma(n+2)}\right) + \left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2! \Gamma(n+3)}\right) + \dots \quad (1.13)$$

Notons que $\Gamma(n+k+1) = (n+k)!$ Nous pouvons écrire :

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! (n+k)!} \quad (1.14)$$

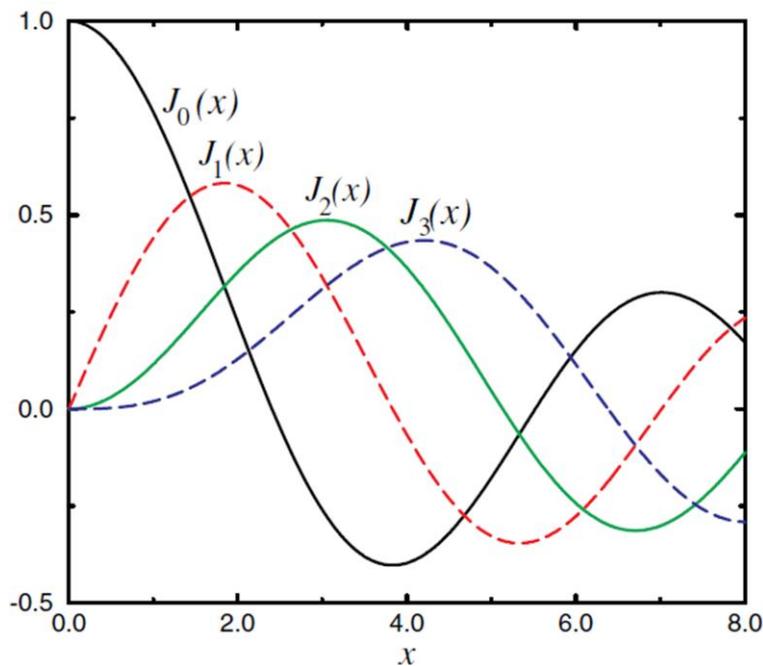


Figure I-1 – Graphe de la fonction de Bessel de première espèce

- **Quelques propriétés de la fonction de Bessel de première espèce**

- 1) $J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z)$, $n = 1, 2, 3 \dots$
- 2) $J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z)$, $n = 1, 2, 3 \dots$
- 3) $\frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^n J_{n-1}(z)$, $n = 1, 2, 3 \dots$
- 4) $\frac{d}{dz} [z^{-n} J_n(z)] = -z^{-n} J_{n+1}(z)$, $n = 1, 2, 3 \dots$

b- Fonction de Bessel de seconde espèce

La fonction de Bessel de seconde espèce $Y_n(x)$ et parfois dit la fonction de Weber ou la fonction de Neumann (notée $N_n(x)$) est liée à la fonction de Bessel de première espèce par la relation [10].

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} \quad (1.15)$$

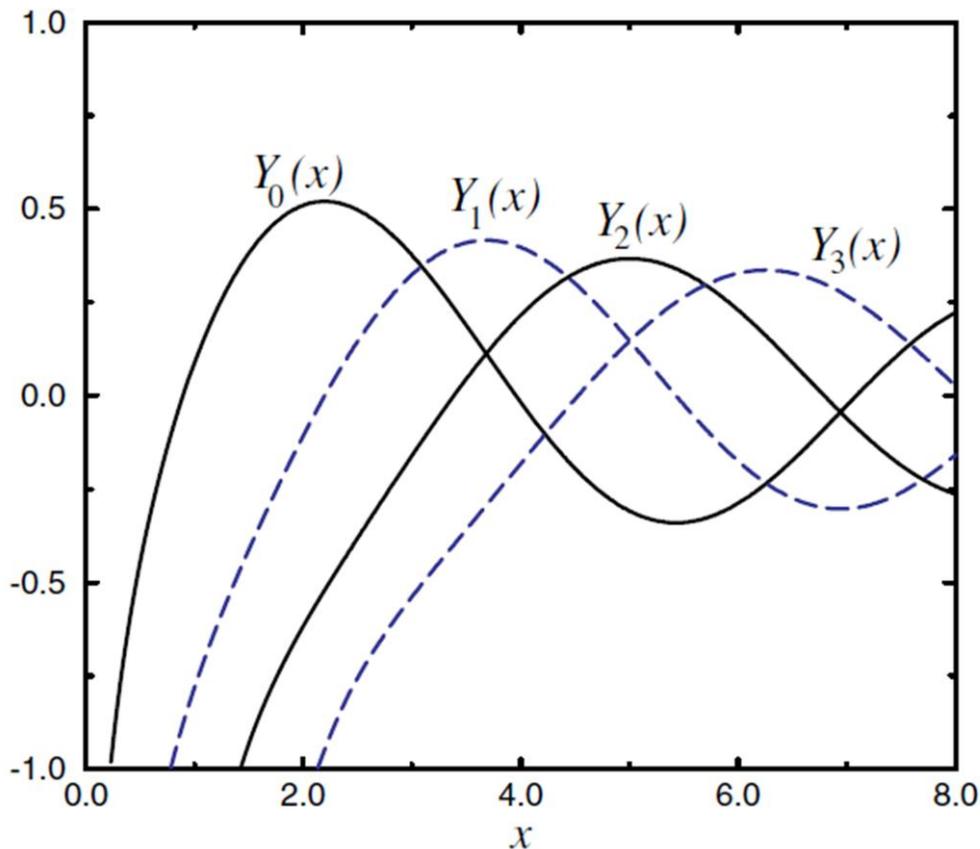


Figure I-2 : Graphe de la fonction de Bessel de seconde espèce

- **Quelques propriétés de la fonction de Bessel de seconde espèce**

- 1) $Y_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} Y_n(z) - Y_{n-1}(z)$, $n = 1, 2, 3 \dots$
- 2) $Y'_{n+1}(z) = \frac{1}{2} [Y_n(z) - Y_{n-1}(z)]$, $n = 1, 2, 3 \dots$
- 3) $Y'_n(z) = Y_{n-1}(z) - \frac{n}{z} Y_n(z)$, $n = 1, 2, 3 \dots$
- 4) $Y'_n(z) = \frac{n}{z} Y_n(z) - Y_{n+1}(z)$, $n = 1, 2, 3 \dots$

c- Développements asymptotiques des fonctions de Bessel :

Les développements en série qui ont été donnés pour représenter les fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(x)$, ne permettent pas de connaître facilement l'allure de ces fonctions pour les grandes valeurs de la variable et la même remarque vaut pour les fonctions de Bessel de seconde espèce $Y_\nu(x)$ [9].

Signalons que l'on a pu donner des expressions asymptotiques de ces fonctions pour les grandes valeurs de x ; on a :

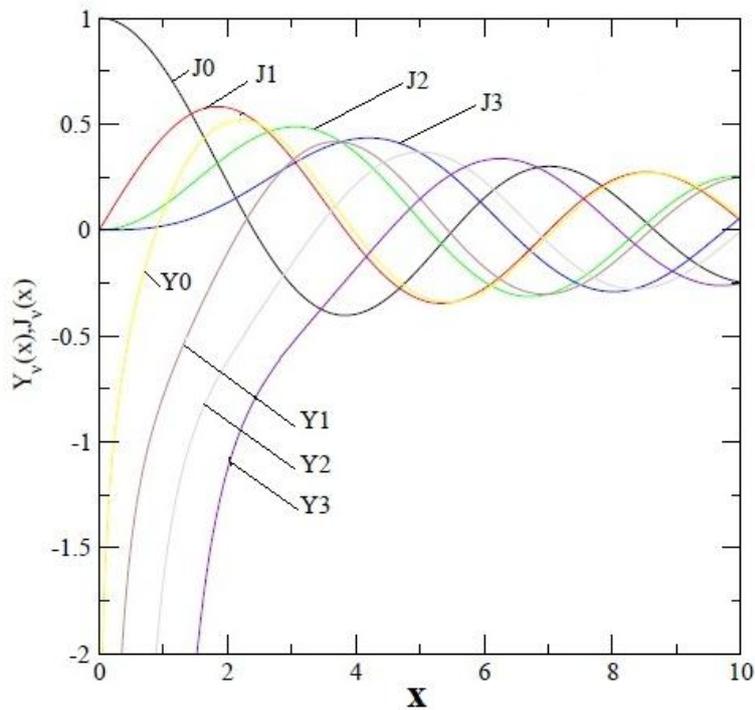


Figure I-3 : Graphes de deux fonctions de Bessel premier et seconde espèce

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \cos\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) \quad (1.16)$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{x\pi}} \sin\left(x - (2\nu + 1)\frac{\pi}{4}\right) \quad (1.17)$$

I.2.5- Transformée de Hankel

La transformée de Hankel est une transformation intégrale, qui a été développée par le mathématicien *Hermann Hankel*, elle est aussi connue par la transformée de *Fourier-Bessel* car cette transformation se base sur la transformation bidimensionnelle de Fourier.

La transformée de Hankel exprime une fonction donnée $f(z)$ comme la somme pondérée d'un nombre infini de fonctions de Bessel $J_\nu(kz)$ de première espèce, elle est donnée par [11]:

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty f(z) J_\nu(kz) z dz \quad (1.18)$$

où F_ν est la fonction transformée et $J_\nu(kz)$ la fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν avec $\nu \geq -\frac{1}{2}$.

Ainsi, la transformée inverse de *Hankel* $F_\nu(k)$ est bien définie comme suite :

$$F(k) = \int_0^\infty F_\nu(k) J_\nu(kz) k dk \quad (1.19)$$

qui peut être facilement vérifié en utilisant la relation d'orthogonalité.

I.3- Polynômes de Jacobi

On appelle polynôme de Jacobi un polynôme de la forme $P_n^{\alpha,\beta}(x)$, définit par la relation suivante :

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}] \quad (1.20)$$

Dans le cas où $\alpha = \beta = 0$, le polynôme de Jacobi se confond avec celui de Legendre défini par :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x)^{2n} \quad (1.21)$$

Le rapport d'orthogonalité des polynômes de Jacobi est donné par :

$$\int_0^1 \frac{P_n^{\alpha,\beta}(1-2x^2) P_m^{\alpha,\beta}(1-2x^2)}{2^{-2-\alpha-\beta} x^{-1-2\alpha} (1-x^2)^{-\beta}} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1) (\alpha+\beta+2n+1)} \delta_{mm} \quad (1.22)$$

Où δ_{mm} est le coefficient de Kronecker.

I.4- Méthodes d'intégration numérique

L'intégration numérique est de Calculer l'intégrale de $f(x)$ sans calculer la primitive de $f(x)$. on suppose que $f(x)$ est soit connue analytiquement ou en un ensemble de points dans l'intervalle $[a, b]$ tel que : $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

D'une manière générale l'intégration numérique est un calcul numérique pour déterminer, le mieux possible, une valeur approchée d'une intégrale au sens de Riemann.

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (1.23)$$

Où : a et b sont des réels

Il existe des méthodes où : (a et b) finis et (a et b) infinis.

- Cas : a et b finis
 - Méthode des Trapèzes
 - Méthodes de Simpson
 - Méthodes des Rectangles

- Cas : a et b infinis
 - Méthode de Gauss Legendre

I.4.1- Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à diviser l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales et à approximer la surface de chaque "tranche" par un trapèze construit à partir des valeurs de la fonction aux bornes de chaque sous-intervalle. La fonction est donc remplacée par une droite sur chaque sous-intervalle.

- **Principe de calcul :**

On considère une fonction $f(x)$ connue en n points $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \dots, n-1$

Les abscisses x_i sont équidistants de pas h constant tel que : $\begin{cases} x_i = x_0 + ih \\ i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] + h \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) \quad (1.24)$$

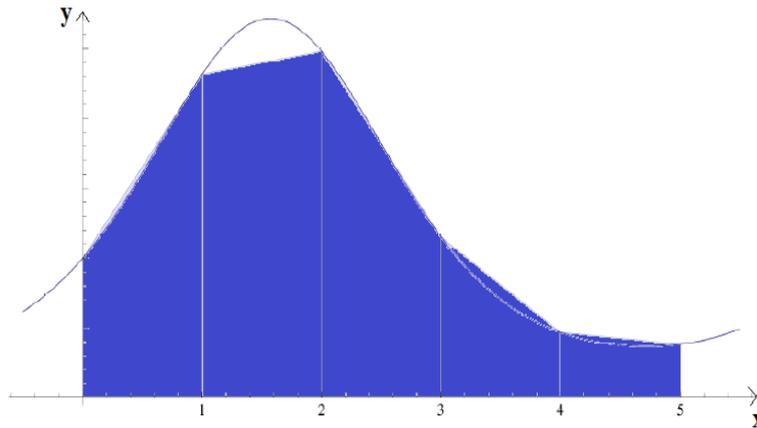


Figure I-4 : Méthode des trapèzes

I.4.2- Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à diviser l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales et à approximer la fonction sur chaque "tranche" par une parabole construite à partir des points de la fonction aux bornes et au milieu de chaque sous intervalle.

- **Principe :**

- On considère une fonction $f(x)$ connue en n points $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $y_i = f(x_i)$
- Les abscisses x_i sont équidistants de pas h constant tel que : $\begin{cases} x_i = x_0 + ih \\ i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$
- n impair

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + y_n + 2 \sum_{i=2, pas=2}^{i=n-2} y_i + 4 \sum_{i=1, pas=2}^{i=n-1} y_i) \quad (1.25)$$

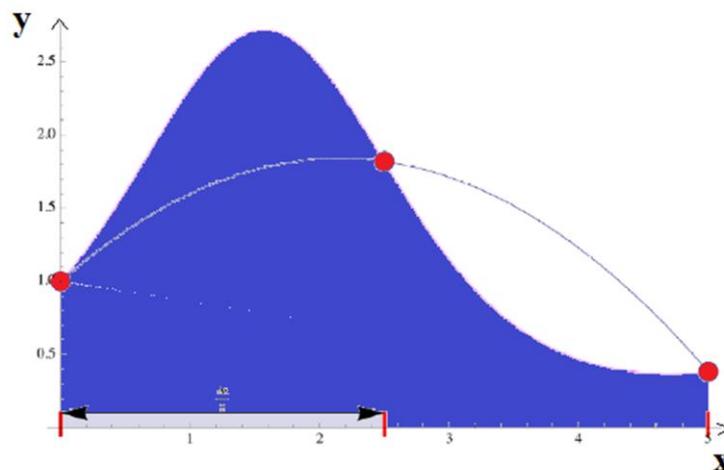


Figure I-5 – Méthode de Simpson

Chapitre II

Rappels sur l'élasticité

Chapitre II : Rappels et généralistes sur l'élasticité

II.1- Introduction

Dans une multitude de procédés industriels, comme dans notre environnement quotidien direct, nous sommes amenés à rencontrer des structures mécaniques. Tous les éléments appartenant à ces structures possèdent des propriétés physiques qui permettent à distinguer leur milieu (plastique ou élastique). Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude des milieux élastiques en utilisant les lois de mécanique des milieux continus et de la résistance des matériaux pour bien définir les lois d'élasticité.

L'élasticité est l'étude du comportement des solides déformables élastiques, isotropes, en petites déformations, avec une loi de comportement linéaire. Cette discipline connue avec l'apparition du macaque appliqué, possède aujourd'hui une base mathématique bien établie. Des considérations purement mécaniques sont d'abord développées pour définir et préciser autant que possible les lois d'élasticité. La notion d'hyper-élasticité apparaît ensuite lorsque ces lois sont passées au crible de la mécanique des milieux continus dont la conséquence majeure est l'existence des déformations élastiques et le potentiel d'élasticité.

Lorsqu'un corps solide est soumis à des contraintes extérieures, il se déforme. Si la déformation est réversible on dit qu'elle est élastique, sinon elle est plastique. On considère habituellement trois types de déformation élastique : la déformation uni-axiale, le cisaillement simple et la compression.

Les principes fondamentaux qui président à l'écriture des lois de comportement élastique des matériaux présentés et illustrés dans ce chapitre pour décrire la classe des lois de comportement élastique. La loi de comportement que nous venons de définir admet malheureusement des limites, dans pratiquement toutes les expériences, on constate en effet que, lorsque les efforts appliqués sont trop grands, le matériau perd ses qualités d'élasticité et qu'il subsiste des déformations permanentes appelées déformations plastiques. L'ingénieur est alors soumis à deux contradictions : assurer un prix de revient minimal, c'est à dire employer le moins de matière possible, et définir une structure performante et résistante, c'est à dire utilisant beaucoup de matière. Il est donc nécessaire pour lui de se trouver constamment à la frontière entre ces deux contraintes et pour cela il lui faut donc avoir les éléments qui définissent cette frontière. La connaissance d'un état limite se détermine par les essais effectués en laboratoire. Il est logique de penser que cet état limite est lié au tenseur des contraintes car c'est l'expression tensorielle qui traduit la répartition des efforts à l'intérieur de la matière. En vertu de l'hypothèse d'isotropie du matériau, il est logique de penser que la limite élastique sera reliée aux valeurs propres de l'état de contrainte, c'est-à-dire aux contraintes principales. De plus il faut pouvoir tenir compte des différents résultats obtenus lors des essais expérimentaux.

III.2- Quelques définitions

III.2.1 L'élasticité classique

C'est l'étude du comportement des solides déformables, élastiques, isotropes, en petites déformations, avec une loi de comportement linéaire. On y ajoute une hypothèse simplificatrice supplémentaire : les déplacements sont petits. Le couple d'hypothèse petits déplacements et petites déformations est souvent appelé : Hypothèse des petites perturbations. Ces hypothèses ont pour conséquence de rendre linéaire les équations différentielles de l'élasticité.

II.2.2 Elasticité axisymétrique

On dit qu'un problème est axisymétrique si la forme du corps élastique est symétrique de révolution autour d'un axe, et si le chargement et les conditions aux limites sont aussi de révolution autour de cet axe.

Dans ce cas, la solution est aussi axisymétrique. Si on utilise un système de coordonnées cylindriques ou sphérique autour de l'axe d'asymétrie, les dérivées des composantes sur la base naturelle par rapport à θ sont nulles. On est donc ramène à un problème à deux variables (θ, z).

Il convient de bien noter que bien que le problème soit à deux variables, ce n'est pas un problème d'élasticité plane, car ni le tenseur des contraintes, ni le tenseur des déformations ne sont des plans en générale.

II.3- Les modules élastiques

II.3.1- Module d'Young

Vers 1800, Young s'intéresse à l'élasticité linéaire. En procédant à des essais de traction uni-axiale, il constate que la déformation ε selon l'axe de traction est proportionnelle à la contrainte appliquée. Il définit le coefficient de proportionnalité par la relation suivante [12].

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (2.1)$$

II.3.2- Coefficient de Poisson

Poisson complète l'analyse en constatant que l'allongement ε_I dans la direction de l'axe de traction s'accompagne d'un raccourcissement ε_{II} plus faible proportionnel dans les directions perpendiculaires. Il définit le coefficient positif de proportionnalité par [12]:

$$\nu = \frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_I} \quad (2.2)$$

II.3.3- Module de Coulomb

Coulomb procède à des essais de torsion (cisaillement pur) et constate que le glissement γ est proportionnel au cisaillement appliqué. Il définit le coefficient de proportionnalité par la relation suivante [12]:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (2.3)$$

Le module de Coulomb G a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa. Il représente le cisaillement qu'il faudrait appliquer pour obtenir un glissement d'un radian.

Pour un matériau isotrope on peut définir le module de cisaillement μ en fonction de E et ν par la relation suivante :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4)$$

II.3.4- Relations entre les modules [12]

Module	Symbole	Équivalence
Coefficient de Lamé ou module de Coulomb	μ, G	$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
Deuxième coefficient de Lamé	λ	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
Coefficient de Poisson	ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$
Module de Young	E	$\frac{\nu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \nu}$

II.4- Rappel d'élasticité

II.4.1 Contraintes

II.4.1.1 Etat des contraintes en un point

On donne quelques définitions d'élasticités que, compte tenu des hypothèses physiques, l'état de contrainte en un point A (figure II-1) est caractérisé par le tenseur des contraintes. C'est un tenseur du second ordre symétrique. Dans une base orthonormée il est représenté par la matrice des contraintes qui s'écrit [13] :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

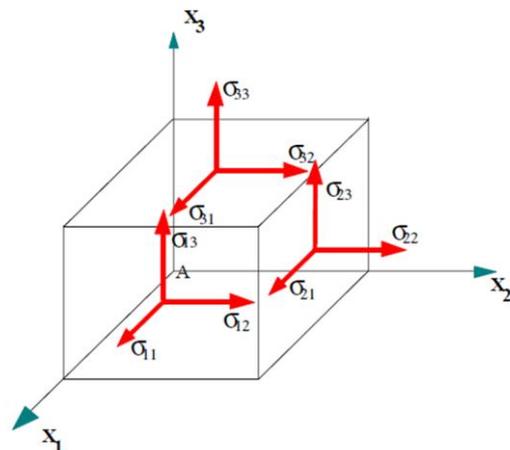


Figure II-1 : Contraintes autour du point A

Dans cette notation du tenseur des contraintes, le premier indice indique la direction de la normale à la facette, le deuxième : la direction de la contrainte.

II.4.1.2- Vecteur contrainte en un point pour une direction \vec{n}

Soit un point A d'un solide, et une direction repérée par un vecteur \vec{n} (normale extérieure à la matière). Et soit une facette infiniment petite d'aire dS de normale \vec{n} . Le vecteur contrainte au point A pour la direction \vec{n} s'écrit [13] :

$$\vec{T}(A, \vec{n}) = \bar{\sigma}(A) \vec{n} \quad (2.5)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \sigma_{11} & n_2 \sigma_{12} & n_3 \sigma_{13} \\ n_1 \sigma_{12} & n_2 \sigma_{22} & n_3 \sigma_{23} \\ n_1 \sigma_{13} & n_2 \sigma_{23} & n_3 \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

II.4.1.3- Contrainte normale et tangentielle

Le vecteur de contrainte en un point A et pour la direction \vec{n} (figure II-2) peut être projeté :

➤ sur la normale, on obtient la **contrainte normale** :

$$\sigma = \vec{T}(A, \vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{n}^t \bar{\sigma}(A) \vec{n} \quad (2.7)$$

$$\sigma = [n_1 \ n_2 \ n_3] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1(n_1 \sigma_{11} & n_2 \sigma_{12} & n_3 \sigma_{13}) \\ n_2(n_1 \sigma_{12} & n_2 \sigma_{22} & n_3 \sigma_{23}) \\ n_3(n_1 \sigma_{13} & n_2 \sigma_{23} & n_3 \sigma_{33}) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

➤ sur le plan tangent, on obtient la contrainte tangentielle τ telle que :

$$\tau^2 = |T(A, n)|^2 - \sigma^2 \quad (2.9)$$

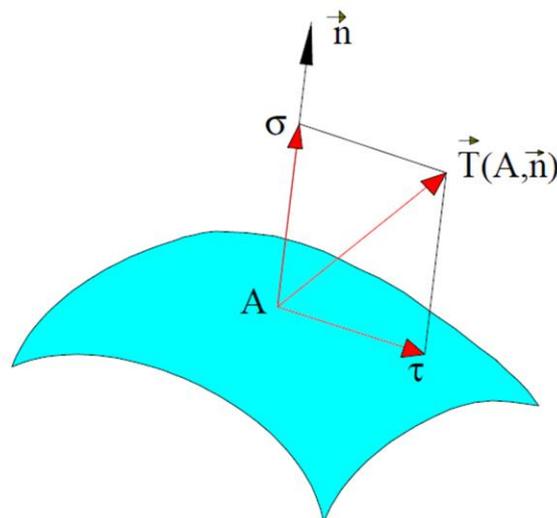


Figure II-2 : Contrainte normale σ et tangentielle τ en un point A

II.4.1.4- Etats de contraintes particuliers

a) Etat de contrainte uni-axial

Dans le repère principal, le tenseur des contraintes se réduit à :

$$\bar{\bar{\sigma}}(A) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} \quad (2.10)$$

Traction simple si $\sigma_1 > 0$, compression simple si $\sigma_1 < 0$.

b) Etat de cisaillement simple

Soit un repère orthonormé $(A; \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$, l'état de contraintes en A est un état de cisaillement simple par rapport aux directions \vec{X}_1 et \vec{X}_2 si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$\bar{\bar{\sigma}}(A) = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} \quad (2.11)$$

Les contraintes principales sont égales à :

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = -\tau; \quad \sigma_3 = 0$$

Dans le repère principal, le tenseur des contraintes admet la forme suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}}(A) = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} \quad (2.12)$$

c) Etat de contraintes planes

On a affaire à un état plan de contraintes parallèlement au plan (\vec{X}_1, \vec{X}_2) si :

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(X_1, X_2); \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(X_1, X_2); \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(X_1, X_2)$$

C'est le cas des plaques planes chargées dans leur plan.

Le tenseur des contraintes s'écrit alors dans une base quelconque :

$$\bar{\bar{\sigma}}(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} \quad (2.13)$$

L'axe \vec{x}_3 est donc direction principale et la contrainte principale correspondante est nulle.

Dans la base principale :

$$\bar{\bar{\sigma}}(A) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} \quad (2.14)$$

d) Etat de contrainte dans une section droite de poutre

En tout point A d'une section droite, l'état de contrainte peut se représenter dans la base locale classique de la théorie des poutres $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

- \vec{x}_1 tangent à la ligne moyenne.
- \vec{x}_2 et \vec{x}_3 dans le plan de section droite et axes principaux de la section.

$$\bar{\bar{\sigma}}(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} \quad (2.15)$$

Traction (compression) simple :

$$\bar{\bar{\sigma}}(A) = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} \quad (2.16)$$

Flexion pure :

$$\bar{\bar{\sigma}}(A) = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} \quad (2.17)$$

Flexion simple :

$$\bar{\bar{\sigma}}(A) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} \quad (2.18)$$

Torsion avec sections circulaires :

$$\bar{\bar{\sigma}}(A) = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} \quad (2.19)$$

II.4.2- Déplacements - Déformations

II.4.2.1 Champ des déplacements

Sous l'effet des efforts, la structure se déforme. Un point M de coordonnées (x_1, x_2, x_3) appartenant à la structure se déplace sous le chargement. Son déplacement est caractérisé par le vecteur déplacement [13] :

$$\vec{U}(M) = u_1(x_1, x_2, x_3) \vec{x}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3) \vec{x}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3) \vec{x}_3 \quad (2.20)$$

Comme on est en théorie des petites perturbations, les composantes u_1 , u_2 et u_3 sont "petites".

II.4.2.2 Etat des déformations au voisinage d'un point

Dans ce cas les déformations sont petites et on démontre que **l'état de déformation** au voisinage d'un point A est caractérisé par le tenseur des déformations. C'est un tenseur du second ordre symétrique qui se déduit du champ des déplacements par la relation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.21)$$

Dans une base orthonormée il s'écrit en A :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(A) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

II.4.2.3- Allongement unitaire en A et pour une direction \vec{q}

Après déformation, la longueur dS_1 du vecteur $\overline{AA_1}$ de direction \vec{q}_1 est devenue dS'_1 . On peut alors définir l'allongement relatif en A et pour la direction \vec{q} :

C'est la quantité :

$$e(A, \vec{q}_1) = \frac{dS_1 - dS'_1}{dS_1} \quad (2.23)$$

dS'_1 et dS_1 sont des longueurs infiniment petites.

On peut montrer que cette quantité s'exprime à partir du tenseur des déformations par :

$$e(A, \vec{q}_1) = \vec{q}_1^t \bar{\bar{\varepsilon}}(A) \vec{q}_1 \quad (2.24)$$

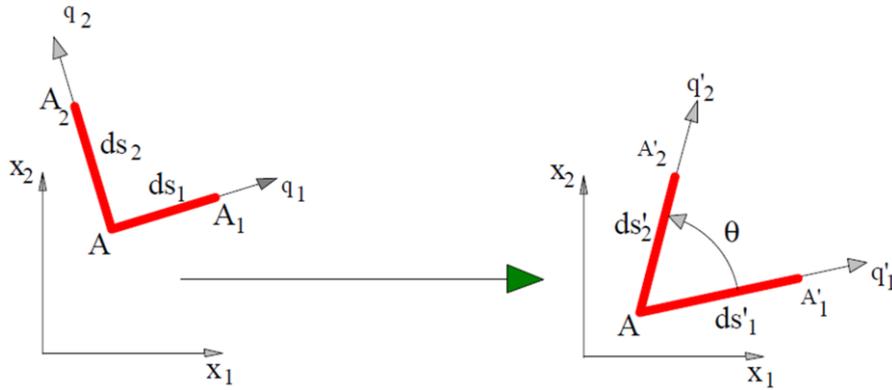


Figure II-3 : Déformation au voisinage d'un point A

II.4.3- Glissement

Après déformation, l'angle droit A_1AA_2 (figure précédente) est devenu $A'_1A'A'_2$. Cette variation d'angle droit s'appelle le **glissement** ou la **distorsion**. On peut montrer que le glissement $g(A, \vec{q}_1, \vec{q}_2)$ se calcule par [13]:

$$g(A, \vec{q}_1, \vec{q}_2) = -2 \vec{q}_1^t \bar{\bar{\varepsilon}} \vec{q}_2 \quad (2.25)$$

- **Déformations principales et directions principales**

De même que pour le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations étant réel symétrique, il est diagonalisable, c'est à dire qu'il existe un réel ε_i et une direction \vec{X}_i telle que :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(A) \vec{X}_i = \varepsilon_i \vec{X}_i \quad (2.26)$$

Ainsi dans une telle direction \vec{X}_i il n'y a pas de glissement mais seulement un allongement.

Dans le repère principal en A, la matrice des déformations s'écrit alors :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(A) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)} \quad (2.27)$$

II.4.5- Loi de comportement

La linéarité de la loi de comportement de l'élasticité se traduit par la linéarité de la loi qui relie tenseur des contraintes et tenseur des déformations.

Soit en notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (2.28)$$

Dans cette relation : δ_{ij} est le tenseur de Kronecker $\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

λ et G (ou μ) sont les coefficients de Lamé, constants pour un matériau donné.

$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ est le premier invariant du tenseur des déformations.

Inversement, on peut exprimer le tenseur des déformations à partir de celui des contraintes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.29)$$

Dans cette relation :

E est le module de Young et ν le coefficient de Poisson, constants pour un matériau donné.

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (2.30)$$

Les relations entre les différents coefficients d'élasticité sont les suivantes :

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

G est le module de Coulomb.

En décomposant sur les axes on obtient :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} \\ \varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{2G} \\ \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G} \end{cases}$$

II.4.6- Critères de limite élastique

On supposera dans la suite que la limite élastique en traction simple est égale à la limite élastique en compression simple (matériaux ductiles). Soit σ_e cette limite. On connaît bien le comportement d'un matériau dans le cas d'une sollicitation de traction simple. Cette connaissance est liée à l'essai de traction simple statique.

Soit un état de contrainte complexe caractérisé en un point A par les trois contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 .

Il n'y a pas unicité du critère de limite élastique. Au cours de l'histoire de la mécanique des milieux continus déformables, plusieurs critères ont été proposés. Certains sont plus ou moins bien vérifiés en fonction du type de matériau sollicité et du type de sollicitation.

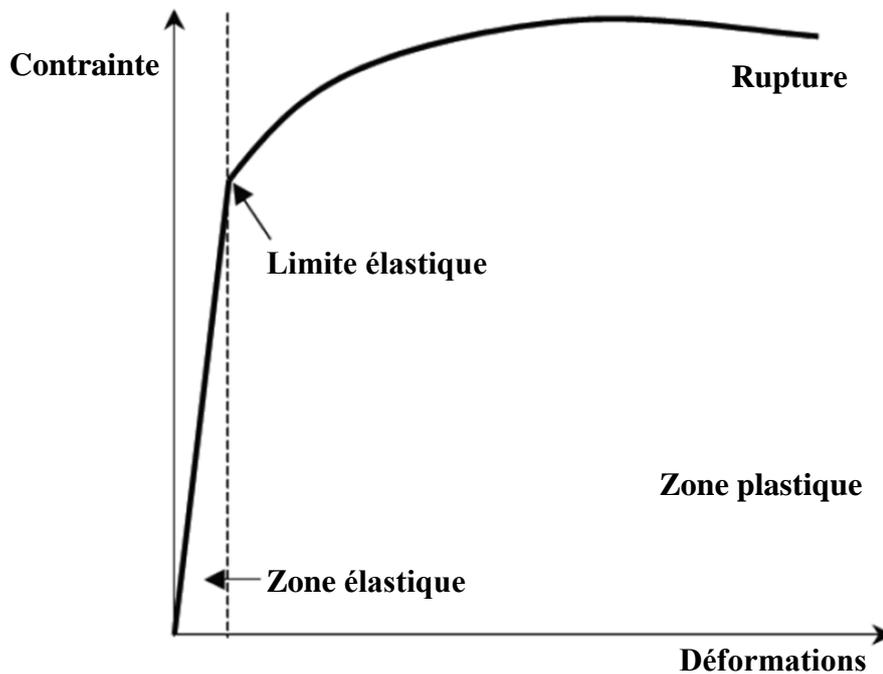


Figure II-4 : Diagramme déformation contrainte

II.5- Équations d'élasticité

II.5.1- Loi de comportement - Loi de Hooke

La loi de comportement relie le tenseur des déformations au tenseur des contraintes. A chaque catégorie de matériau correspond un type de loi. Nous allons intéresser seulement aux matériaux isotropes, c'est à dire que la formulation de cette loi de comportement doit être identique quel que soit le référentiel utilisé. La loi de comportement peut s'écrire [14]

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\varepsilon} + \lambda \text{Trace}(\bar{\varepsilon}) I \quad (2.31)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} + \frac{\nu}{E} \text{Trace}(\bar{\sigma}) I \quad (2.32)$$

Avec :

$$\mu = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = G \quad : \text{Premier coefficient de Lamé ou Module de cisaillement}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad : \text{Deuxième coefficient de Lamé}$$

$$E = \frac{\nu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\nu} \quad : \text{Module de Young}$$

$$\nu \quad : \text{Coefficient de poisson}$$

II.5.2- Équations supplémentaires

Grâce à la loi de Hook, nous aurons suffisamment d'équations pour pouvoir traiter un problème d'élasticité mais il peut être utile d'employer des équations supplémentaires qui traduisent, sous une autre forme, les lois de la physique. Parmi ces équations nous trouvons l'équation de Navier et l'équation de Beltrami.

- **Équations de Navier**

Ces dernières ne sont en fait que la traduction des équations d'équilibre en termes de déplacement. Pour cela on utilise à la fois la loi de comportement et les relations déformations-déplacements.

$$\mu \Delta(\vec{\mu}) + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div}(\vec{\mu})) + \vec{f} = \vec{0} \quad (2.33)$$

$$(2\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div}(\vec{\mu})) - \mu \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{\mu})) + \vec{f} = \vec{0} \quad (2.34)$$

- **Équations de Beltrami**

Lorsque l'on désire résoudre le problème en contrainte, sans vouloir à priori définir les champs de déplacement et de déformation, on utilise une méthode dite « inverse ». Il convient alors, en plus de la vérification des équations d'équilibre, de s'assurer que l'état de contrainte conduit, par l'intermédiaire de la loi de comportement, à un état de déformation compatible avec un champ de déplacement.

$$\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk} = 0 \quad (2.35)$$

Cette équation est appelée équation de Beltrami simplifiée, elle traduit les équations de compatibilité pour les contraintes dans le cas où les forces de volume sont nulles.

Conclusion

On a présenté dans ce chapitre les notions de base et les lois de la mécanique d'élasticité, qui vont être utilisés dans la résolution de notre problème. Grâce aux équations de Navier et la loi de comportement nous pouvons donner les relations entre les déplacements et les contraintes.

Chapitre III

Formulation et résolution de problème

Chapitre III : Formulation et résolution de problème

III.1- Introduction :

Nous considérons la torsion axisymétrique dans un milieu élastique avec deux disques rigides adhésifs de rayons a et b , fixés aux surfaces où $z = 0$ et $z = h$ respectivement, Sous un moment de torsion, les deux disques de rayon a et b peuvent tourner d'un angle ω_1 et ω_2 respectivement avec sens inverse autour de l'axe z qui passe par leurs centres.

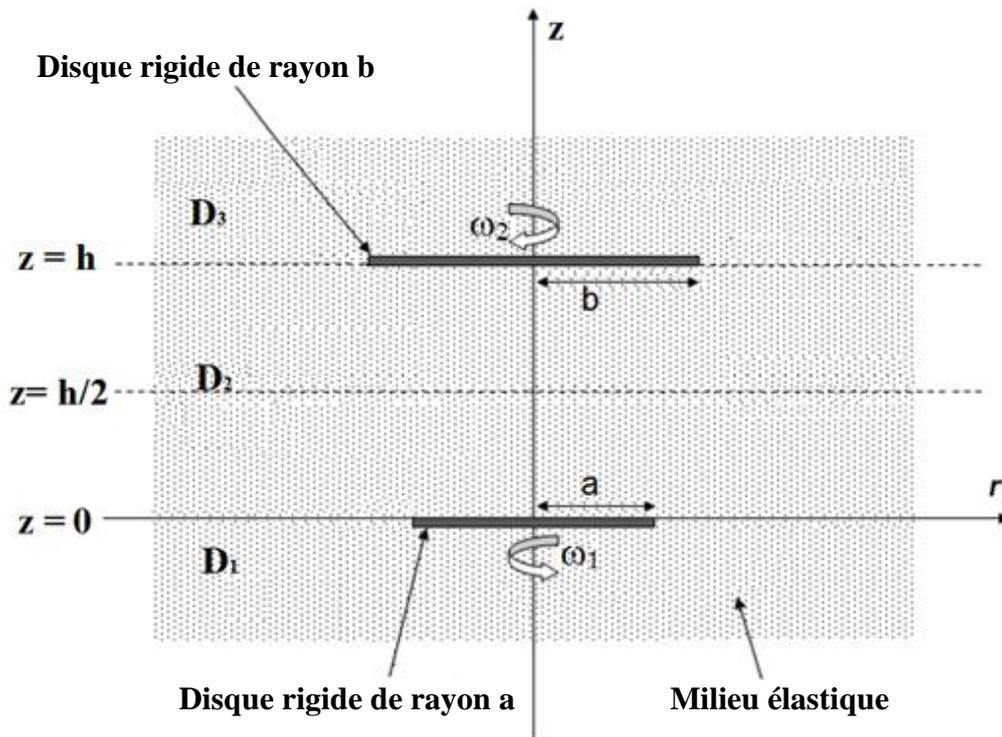


Figure III-1 : Schéma représentant le problème.

• **Equation d'équilibre :**

Dans un repère cylindrique (r, θ, z) Les composantes du déplacement $u_r(r, z)$ et $u_z(r, z)$ sont nulles, ce qui ramène l'équation d'équilibre en fonction de $u_\theta(r, z)$ seulement pour les trois milieux élastiques.

$$\frac{\partial^2 U_\theta^k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta^k}{\partial r} - \frac{U_\theta^k}{r^2} + \frac{\partial^2 U_\theta^k}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

Les contraintes en fonction des déplacements angulaires :

$$\tau_{\theta z}^k = G \frac{\partial U_\theta^k}{\partial z} \quad (3.2)$$

Avec $k = 1, 2, 3$ les indices correspondant, respectivement, aux régions $]-\infty, 0]$, $[0, h]$, $]0, +\infty[$ et G est le module de cisaillement du matériau.

En appliquant la méthode basée sur la transformée intégrale de Hankel on peut obtenir la forme générale de la solution de l'équation (3.1), nous obtenons :

- Dans le domaine $D_1 =]-\infty, 0]$:

$$U_\theta^1(r, z) = \int_0^{+\infty} A(\lambda) e^{\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.3)$$

En injectant (3.3) dans (3.1) où $k=1$, on obtient la forme des contraintes dans le domaine D_1

$$\tau_{\theta z}^1(r, z) = G \int_0^{+\infty} \lambda A(\lambda) e^{\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.4)$$

- Dans le domaine $D_2 = [0, h]$:

$$U_\theta^2(r, z) = \int_0^{+\infty} [B(\lambda) e^{-\lambda z} + C(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.5)$$

En injectant (3.5) dans (3.1) où $k=2$, on obtient la forme des contraintes dans le domaine D_2

$$\tau_{\theta z}^2(r, z) = G \int_0^{+\infty} \lambda [-B(\lambda) e^{-\lambda z} + C(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.6)$$

Dans le domaine $D_3 = [h, +\infty[$:

$$U_\theta^3(r, z) = \int_0^{+\infty} D(\lambda) e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.7)$$

En injectant (3.7) dans (3.1) où $k=3$, on obtient la forme des contraintes dans le domaine D_3

$$\tau_{\theta z}^3(r, z) = -G \int_0^{+\infty} \lambda D(\lambda) e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3.8)$$

Avec J_1 représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1, et A, B, C et D sont des fonctions à déterminer.

- **Conditions aux limites du problème :**

Les conditions de continuité et aux limites du notre système sont données par :

➤ **Pour $z = 0$**

$$(a) \quad U_{\theta}^1(r, z)|_{z=0^-} = U_{\theta}^2(r, z)|_{z=0^+} = \omega_1 r \quad r < a$$

$$(b) \quad [\tau_{z\theta}(r, z)]|_{z=0} = \tau_{\theta z}^2(r, z)|_{z=0^+} - \tau_{\theta z}^1(r, z)|_{z=0^-} = 0 \quad r > a$$

$$(c) \quad [U_{\theta}(r, z)] = U_{\theta}^2(r, 0^+) - U_{\theta}^1(r, 0^-) = 0 \quad r \geq 0$$

➤ **Pour $z = h$**

$$(d) \quad U_{\theta}^2(r, z)|_{z=h-0} = U_{\theta}^3(r, z)|_{z=h+0} = \omega_2 r \quad r < b$$

$$(e) \quad [\tau_{z\theta}(r, z)]|_{z=h} = \tau_{\theta z}^3(r, z)|_{z=h+0} - \tau_{\theta z}^2(r, z)|_{z=h-0} = 0 \quad r > b$$

$$(f) \quad [U_{\theta}(r, z)] = U_{\theta}^3(r, h+0) - U_{\theta}^2(r, h-0) = 0 \quad r \geq 0$$

- **Déplacements et les contraintes pour les trois domaines :**

Les déplacements et contraintes dans les 3 régions sont donnés par les expressions suivantes :

$$\text{Pour : } -\infty < z < 0 \quad \begin{cases} U_{\theta}^1(r, z) = \int_0^{+\infty} A(\lambda) e^{\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \\ \tau_{\theta z}^1(r, z) = G \int_0^{+\infty} \lambda A(\lambda) e^{\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\text{Pour : } 0 < z < h \quad \begin{cases} U_{\theta}^2(r, z) = \int_0^{+\infty} [B(\lambda) e^{-\lambda z} + C(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda \\ \tau_{\theta z}^2(r, z) = G \int_0^{+\infty} \lambda [-B(\lambda) e^{-\lambda z} + C(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\text{Pour : } h < z < +\infty \quad \begin{cases} U_{\theta}^3(r, z) = \int_0^{+\infty} D(\lambda) e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \\ \tau_{\theta z}^3(r, z) = -G \int_0^{+\infty} \lambda D(\lambda) e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \end{cases} \quad (3.11)$$

- **Équations intégrales duales en J_1**

D'après la condition aux limites (a) :

$$U_{\theta}^1(r, z)|_{z=0^-} = U_{\theta}^2(r, z)|_{z=0^+} \quad r \geq 0$$

En utilisant cette condition, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} A(\lambda) e^{\lambda \cdot 0} J_1(\lambda r) d\lambda &= \int_0^{+\infty} [B(\lambda) e^{-\lambda \cdot 0} + C(\lambda) e^{\lambda \cdot 0}] J_1(\lambda r) d\lambda \quad r \geq 0 \\ \Rightarrow A(\lambda) &= B(\lambda) + C(\lambda) \end{aligned}$$

Donc :

$$C(\lambda) = A(\lambda) - B(\lambda)$$

Et d'après la condition aux limites (c) :

$$U_{\theta}^2(r, z)|_{z=h-0} = U_{\theta}^3(r, z)|_{z=h+0} \quad r \geq 0$$

En utilisant cette condition, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} [B(\lambda) e^{-\lambda h} + C(\lambda) e^{\lambda h}] J_1(\lambda r) d\lambda = \int_0^{+\infty} D(\lambda) e^{-\lambda h} J_1(\lambda r) d\lambda$$

$$\Rightarrow B(\lambda) e^{-\lambda h} + C(\lambda) e^{\lambda h} = D(\lambda) e^{-\lambda h}$$

$$D(\lambda) = B(\lambda) + C(\lambda) e^{2\lambda h}$$

En remplaçant $C(\lambda)$ par leur expression en fonction de $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$, on obtient :

$$D(\lambda) = B(\lambda) + [A(\lambda) - B(\lambda)] e^{2\lambda h}$$

$$\Rightarrow D(\lambda) = A(\lambda) e^{2\lambda h} + B(\lambda)(1 - e^{2\lambda h})$$

Ce qui nous permet d'exprimer les fonctions $C(\lambda)$ et $D(\lambda)$ en fonction de $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ comme suit :

$$C(\lambda) = A(\lambda) - B(\lambda) \quad (3.12)$$

$$D(\lambda) = A(\lambda) e^{2\lambda h} + B(\lambda)(1 - e^{2\lambda h}) \quad (3.13)$$

Ce qui nous permet d'obtenir les expressions des déplacements et de contraintes en fonction de $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ pour les trois régions

$$D_1 =]-\infty, 0] \quad \begin{cases} U_{\theta}^1(r, z) = \int_0^{+\infty} A(\lambda) e^{\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \\ \tau_{\theta z}^1(r, z) = G \int_0^{+\infty} \lambda A(\lambda) e^{\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \end{cases} \quad (3.14)$$

$$D_2 = [0, h] \quad \begin{cases} U_{\theta}^2(r, z) = \int_0^{+\infty} [B(\lambda)(e^{-\lambda z} - e^{\lambda z}) + A(\lambda) e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda \\ \tau_{\theta z}^2(r, z) = G \int_0^{+\infty} \lambda [A(\lambda) e^{\lambda z} - B(\lambda)(e^{-\lambda z} + e^{\lambda z})] J_1(\lambda r) d\lambda \end{cases} \quad (3.15)$$

$$D_3 = [h, \infty] \quad \begin{cases} U_{\theta}^3(r, z) = \int_0^{+\infty} [A(\lambda) e^{\lambda h} + B(\lambda)(e^{-\lambda z} - e^{\lambda h})] J_1(\lambda r) d\lambda \\ \tau_{\theta z}^3(r, z) = -G \int_0^{+\infty} \lambda [A(\lambda) e^{\lambda h} + B(\lambda)(e^{-\lambda z} - e^{\lambda h})] J_1(\lambda r) d\lambda \end{cases} \quad (3.16)$$

Utilisant les autres conditions aux limites, on trouve les 4 équations intégrales duales suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & \int_0^{+\infty} A(\lambda) e^{\lambda \cdot 0} J_1(\lambda r) d\lambda = \omega_1 r & r < a \\
 \text{ii)} \quad & \int_0^{+\infty} [A(\lambda) e^{\lambda h} + B(\lambda)(e^{-\lambda h} - e^{\lambda h})] J_1(\lambda r) d\lambda = \omega_2 r & r < b \\
 \text{iii)} \quad & \int_0^{+\infty} \lambda B(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0 & r > a \\
 \text{iv)} \quad & \int_0^{+\infty} \lambda [A(\lambda) - B(\lambda)] e^{\lambda \cdot h} J_1(\lambda r) d\lambda = 0 & r > b
 \end{aligned}$$

Les équations homogènes (iii) et (iv) sont satisfait si :

$$B(\lambda) = \int_0^a \varphi(t) \sin(\lambda t) dt \quad (3.17)$$

$$\text{et} \quad [A(\lambda) - B(\lambda)] e^{\lambda \cdot h} = \int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt \quad (3.18)$$

Donc :

$$A(\lambda) = \int_0^a \varphi(t) \sin(\lambda t) dt + e^{-\lambda \cdot h} \int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt \quad (3.19)$$

En remplaçant les expressions de $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ dans les équations (i) et (ii) et on trouve :

$$\int_0^a \varphi(t) dt \int_0^{+\infty} J_1(\lambda r) \sin(\lambda t) d\lambda + \int_0^b \psi(t) dt \int_0^{+\infty} (e^{-\lambda \cdot h} \sin(\lambda t)) J_1(\lambda r) d\lambda = \omega_1 r$$

$$r < a \quad (3.20)$$

$$\int_0^a \varphi(t) dt \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \cdot h} J_1(\lambda r) \sin(\lambda t) d\lambda + \int_0^b \psi(t) dt \int_0^{+\infty} J_1(\lambda r) \sin(\lambda t) d\lambda = \omega_2 r$$

$$r < b \quad (3.21)$$

En tenant compte de la relation intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} J_1(\lambda r) \sin(\lambda t) d\lambda = \begin{cases} \frac{t}{r} \frac{1}{\sqrt{(r^2 - t^2)}} & t < r \\ 0 & t > r \end{cases}$$

On trouve :

$$\frac{1}{r} \int_0^r \frac{t \varphi(t)}{(\sqrt{r^2 - t^2})} dt + \int_0^b \psi(t) dt \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \cdot h} \sin(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda = \omega_1 r \quad r < a \quad (3.21)$$

$$\frac{1}{r} \int_0^r \frac{t \psi(t)}{(\sqrt{r^2 - t^2})} dt + \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^{+\infty} e^{-\lambda \cdot h} \sin(\lambda t) J_1(\lambda r) d\lambda = \omega_2 r \quad r < b \quad (3.22)$$

Les deux équations intégrales (3.21) et (3.22) sont de types d'Abel, dont les solutions sont :

$$t \varphi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^2}{(\sqrt{t^2-r^2})} \left[\omega_1 r - \int_0^b \psi(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-\lambda.h} \sin(\lambda\xi) J_1(\lambda r) d\lambda \right] dr \quad t < a \quad (3.23)$$

$$t \psi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^2}{(\sqrt{t^2-r^2})} \left[\omega_2 r - \int_0^a \varphi(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-\lambda.h} \sin(\lambda\xi) J_1(\lambda r) d\lambda \right] dr \quad t < b \quad (3.24)$$

Ensuite on a :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^3}{(\sqrt{t^2-r^2})} dr = 2t^2 \\ et \\ \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{r^2 J_1(\lambda r)}{(\sqrt{t^2-r^2})} dr = t \sin(\lambda t) \end{cases}$$

Ainsi, on obtient le système d'équations intégrales de FREDHOLM :

$$\begin{cases} \varphi(t) + \int_0^b \psi(\xi) K(t, \xi) d\xi = \frac{4}{\pi} \omega_1 t & t < a \\ \psi(t) + \int_0^a \varphi(\xi) K(t, \xi) d\xi = \frac{4}{\pi} \omega_2 t & t < b \end{cases} \quad (3.25)$$

Où :

$$K(t, \xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda.h} \sin(\lambda t) \sin(\lambda \xi) d\lambda \quad (3.26)$$

On peut écrire l'équation (3.26) sous la forme suivante :

$$K(t, \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda.h} \cos \lambda (t - \xi) d\lambda - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda.h} \cos \lambda (t + \xi) d\lambda \quad (3.27)$$

L'intégrale (3.26) peut se calculer analytiquement en utilisant l'intégrale par partie et on trouve :

$$K(t, \xi) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2 h^2 z}{(2h^2 - 2hz + z^2)(2h^2 + 2hz + z^2)} \right) \quad (2.28)$$

Pour récrire le système (3.25) en fonction de la fonction Bessel, on utilise la formule suivante:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x) \quad (3.29)$$

Ce qui nous permet d'obtenir :

$$K(t, \xi) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda.h} \sqrt{t\xi} J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda \xi) d\lambda \quad (3.30)$$

On cherche à trouver la solution de système d'équations (3.25) sous la forme d'un développement en série de polynômes de Jacobi, et pour que le système accepte une solution

sous cette forme on doit changer les bornes des intégrales entre 0 et 1 et cela est effectué par le changement de variables suivant :

$s = \frac{t}{a}$ et $\delta = \frac{z}{b}$ pour la première équation de système (3.25), alors que dans la seconde équation on pose $s = \frac{t}{b}$ et $\delta = \frac{z}{a}$.

En introduisant ces nouvelles variables dans le système (3.25) on trouve :

$$\begin{cases} \Phi(s) + \int_0^1 \Psi(\delta) L_1(s, \delta) d\delta = \frac{4}{\pi} \omega_1 a s & s < 1 \\ \Psi(s) + \int_0^1 \Phi(\delta) L_2(s, \delta) d\delta = \frac{4}{\pi} \omega_2 b s & s < 1 \end{cases} \quad (3.31)$$

Avec :

$$\begin{cases} L_1(s, \delta) = \sqrt{a b^3} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda h} \sqrt{s \delta} J_{\frac{1}{2}}(\lambda a s) J_{\frac{1}{2}}(\lambda b \delta) d\lambda \\ L_2(s, \delta) = \sqrt{a^3 b} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda h} \sqrt{s \delta} J_{\frac{1}{2}}(\lambda b s) J_{\frac{1}{2}}(\lambda a \delta) d\lambda \end{cases} \quad (3.32)$$

On multiplie le système l'équation (3.31) par $\frac{1}{a \omega_1}$ et on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\Phi(s)}{a \omega_1} + \int_0^1 \frac{\Psi(\delta)}{a \omega_1} L_1(s, \delta) d\delta = \frac{4}{\pi} s & s < 1 \\ \frac{\Psi(s)}{a \omega_1} + \int_0^1 \frac{\Phi(\delta)}{a \omega_1} L_2(s, \delta) d\delta = \frac{4}{\pi} \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{b}{a} s & s < 1 \end{cases} \quad (3.33)$$

La solution de système d'équations (3.32) sous la forme de série de polynômes de Jacobi est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \Phi(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2x^2) \\ \Psi(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2x^2) \end{cases} \quad (3.34)$$

Telle que : $\alpha_n = \frac{a_n}{a \omega_1}$ et $\beta_n = \frac{b_n}{a \omega_1}$

Où : a_n et b_n sont des inconnus.

$P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2x^2)$ est le polynôme de Jacobi

En les remplaçant dans le système d'équations (3.33) et on trouve :

$$\begin{cases} s \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2s^2) + \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^1 \delta P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2\delta^2) L_1(s, \delta) d\delta = \frac{4}{\pi} s & s < 1 \\ s \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2s^2) + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^1 \delta P_n^{\frac{1}{2},0}(1-2\delta^2) L_2(s, \delta) d\delta = \frac{4}{\pi} C R_{\omega} s & s < 1 \end{cases} \quad (3.35)$$

Telle que : $c = \frac{b}{a}$ et $R_\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ sont des rapports adimensionnels.

Pour satisfaire la condition d'orthogonalité de polynôme de Jacobi, on multiplie le système par $s P_m^{\frac{1}{2},0} (1 - 2s^2)$ et on intègre le résultat selon la variable x de 0 à 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^1 s^2 P_n^{\frac{1}{2},0} (1 - 2s^2) P_m^{\frac{1}{2},0} (1 - 2s^2) ds \\ \quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^1 ds \int_0^1 s \delta P_n^{\frac{1}{2},0} (1 - 2\delta^2) P_m^{\frac{1}{2},0} (1 - 2s^2) L_1(s, \delta) d\delta \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{4}{\pi} \int_0^1 s^2 P_m^{\frac{1}{2},0} (1 - 2s^2) ds \qquad s < 1 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^1 s^2 P_n^{\frac{1}{2},0} (1 - 2s^2) P_m^{\frac{1}{2},0} (1 - 2s^2) ds \\ \quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^1 ds \int_0^1 s \delta P_n^{\frac{1}{2},0} (1 - 2\delta^2) P_m^{\frac{1}{2},0} (1 - 2s^2) L_2(s, \delta) d\delta \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{4}{\pi} R_\omega c \int_0^1 s^2 P_m^{\frac{1}{2},0} (1 - 2s^2) ds \qquad s < 1 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Condition d'orthogonalité des polynômes de Jacobi :

$$\int_0^1 x^2 P_n^{\frac{1}{2},0} (1 - 2x^2) P_m^{\frac{1}{2},0} (1 - 2x^2) dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{1}{3+4m} & n = m \end{cases} \quad (3.37)$$

Et la relation suivante :

$$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} P_n^{\frac{1}{2},0} (1 - 2x^2) J_{\frac{1}{2}}(xy) dx = \frac{1}{y} J_{\frac{3}{2}+2n}(y) \quad (3.38)$$

Tenant compte de la condition d'orthogonalité du polynôme de Jacobi, nous pouvons réduire le système à un système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{cases} \frac{\alpha_m}{3+4m} + \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n W_{nm}^1 = Q_m^1 \\ \frac{\beta_m}{3+4m} + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n W_{nm}^2 = Q_m^2 \end{cases} \quad (3.39)$$

Où :

$$Q_m^1 = \begin{cases} \frac{4}{\pi} & \text{pour } m = 0 \\ 0 & \text{pour } m > 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

$$Q_m^2 = \begin{cases} \frac{4}{\pi} CR_\omega & \text{pour } m = 0 \\ 0 & \text{pour } m > 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

et :

$$\begin{cases} W_{nm}^1 = \sqrt{c} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda h} J_{\frac{3}{2}+2m}(\lambda a) J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda b) d\lambda \\ W_{nm}^2 = \sqrt{\frac{1}{c}} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda h} J_{\frac{3}{2}+2m}(\lambda b) J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda a) d\lambda \end{cases} \quad (3.42)$$

▪ Résultats numériques et discussion

Afin de déterminer les coefficients a_n et b_n , il faut la résolution du système algébrique qui se réduit à la résolution du système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_m^1 \\ Q_m^2 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Telle que : $A = D = \frac{1}{3+4m}$, $B = \sum_{n=0}^{+\infty} W_{nm}^1$, $C = \sum_{n=0}^{+\infty} W_{nm}^2$

Les intégrales W_{nm}^1 et W_{nm}^2 se calcule numériquement à l'aide de la formule de Simpson en choisissant $\lambda_0 = 1500$.

On fait un changement de variable pour rendre les intégrales W_{nm}^1 et W_{nm}^2 sous forme adimensionnel.

$$H = \frac{h}{a}, \quad \tau = \lambda a, \quad c = \frac{b}{a}$$

$$\begin{cases} W_{nm}^1 = \sqrt{c} \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau} e^{-\tau H} J_{\frac{3}{2}+2m}(\tau) J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau c) d\tau \\ W_{nm}^2 = \sqrt{\frac{1}{c}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau} e^{-\tau H} J_{\frac{3}{2}+2m}(\tau c) J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau) d\tau \end{cases} \quad (3.44)$$

La résolution du système permet d'obtenir les valeurs des coefficients α_n et β_n données dans les tables ci-dessous pour différents valeurs de c.

Les tables (III-1), (III-2), (III-3) et (III-4) donnent les résultats de calcul numérique des coefficients du système algébrique, Nous remarquons que la convergence des suites α_n et β_n devient plus rapide lorsque la valeur du rapport de H augmente et celle de c diminue.

- Valeurs de α_n et β_n pour $H = 0.5$, $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -1$

n	c = 0.5		c = 1	
	α_n	β_n	α_n	β_n
1	3.829617777719096	-1.948971228391255	3.966981929902147	-3.966981929902147
2	0.017862154536684	-0.003400474669567	0.090040442005927	-0.090040442005927
3	0.014455696320284	0.000001465989815	0.011720553587114	-0.011720553587114
4	0.007589507540117	0.000002698696669	-0.001874323797917	0.001874323797917
5	0.002790417364778	-0.000000193707396	-0.000295609741863	0.000295609741863
6	0.000661992578981	-0.000000001956722	0.000093119202402	-0.000093119202402
7	0.000037127329350	0.000000000309308	0.000005959173816	-0.000005959173816
8	-0.000049806603532	-0.000000000020710	-0.000004617867099	0.000004617867099
9	-0.000025906520644	0.000000010910615	0.000000099740975	-0.000000099740975
10	-0.000006094737110	-0.000000000224296	0.000000207258747	-0.000000207258747
11	0.000000125467946	-0.000000000243863	-0.000000022655445	0.000000022655445
12	0.000000714234901	-0.000000000047245	-0.000000007919658	0.000000007919658
13	0.000000293331943	-0.000000000004997	0.000000001792603	-0.000000001792603
14	0.000000046982479	0.000000000000085	0.000000000219932	-0.000000000219932
15	-0.000000012454857	0.000000000000203	-0.000000000084465	0.000000000084465
.
.
.
34	0.000000000000000	0.000000000000000	-0.000000000000003	0.000000000000003
35	0.000000000000000	0.000000000000000	-0.000000000000001	0.000000000000001
36	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

Table III-1 : Valeurs de α_n et β_n pour $H = 0.5$

- Valeurs de α_n et β_n pour $H = 1$, $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -1$

n	c = 0.5		c = 1	
	α_n	β_n	α_n	β_n
1	3.821086795056923	-1.915318860308318	3.842112143715326	-3.842112143715327
2	0.001106253437776	-0.000527247291625	0.009897062363943	-0.009897062363943
3	0.000443053172946	-0.000017961089261	0.001728133656940	-0.001728133656940
4	0.000125302720345	-0.000000126138444	0.000132548696893	-0.000132548696893
5	0.000027833973144	0.000000008746382	-0.000003516248598	0.000003516248598
6	0.000005034243851	-0.000000000220347	-0.000001619734523	0.000001619734523
7	0.000000736013394	0.000000000099329	-0.000000074061642	0.000000074061642
8	0.000000080602104	0.000000000011306	0.000000014025768	-0.000000014025768
9	0.000000004354028	0.0000000000000814	0.000000001826687	-0.000000001826687
10	-0.000000001066095	0.000000000000047	-0.0000000005126996	0.0000000005126996
.
.
.
18	0.000000000000000	0.000000000000000	-0.000000000000002	0.000000000000002
19	0.000000000000000	0.000000000000000	-0.000000000000000	0.000000000000000

Table III-2 : Valeurs de α_n et β_n pour $H = 1$

- Valeurs de α_n et β_n pour $H = 1.5, \frac{\omega_2}{\omega_1} = -1$

n	c = 0.5		c = 1	
	α_n	β_n	α_n	β_n
1	3.819951381908888	-1.910789915124868	3.824252272725417	-3.824252272725417
2	0.000103832124080	-0.000069442659609	0.001387689523020	-0.001387689523020
3	0.000023984665723	-0.000002341257462	0.000196168021806	-0.000196168021806
4	0.000004059467889	-0.000000046138493	0.000017252264387	-0.000017252264387
5	0.000000562078779	-0.000000000633517	0.000000922059345	-0.000000922059345
6	0.000000066849478	-0.000000000013491	0.000000012929597	-0.000000012929597
7	0.000000006627803	-0.000000000000348	0.000000003960219	-0.000000003960219
8	0.000000000645683	-0.000000000000007	0.000000000417773	-0.000000000417773
9	0.000000000056827	-0.000000000000000	0.000000000035793	-0.000000000035793
10	0.000000000004022	0.000000000000000	0.000000000001693	-0.000000000001693
11	0.000000000000186	0.000000000000000	-0.000000000000098	0.000000000000098
12	-0.000000000000001	0.000000000000000	-0.000000000000035	0.000000000000035
13	-0.000000000000001	0.000000000000000	-0.000000000000005	0.000000000000005
14	-0.000000000000000	0.000000000000000	-0.000000000000001	0.000000000000001
15	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

Table III-3 : Valeurs de α_n et β_n pour $H = 1.5$

- Valeurs de α_n et β_n pour $c = 1.5, \frac{\omega_2}{\omega_1} = -1$

n	H = 0.5		H = 1.5	
	α_n	β_n	α_n	β_n
1	4.060929255600308	-5.837558111323260	3.836058879844283	-5.736860517389181
2	0.038664466091665	-0.202733766293638	0.002929994159163	-0.005007837587283
3	-0.000234461284001	-0.137827234389332	0.000192177984657	-0.001622233904585
4	0.000080101305353	-0.039140950874767	0.000003619888165	-0.000345888830429
5	0.000013214921976	0.004963990920492	-0.000000249899318	-0.000051661526915
6	-0.000003400865279	0.007219577435374	-0.000000013067907	-0.000004875757683
7	0.000000039295220	0.001143076165708	-0.000000006261680	-0.000000351303452
8	0.000000020345412	-0.000894443296502	-0.000000000827050	0.000000073356381
9	-0.000000000660322	-0.000410073628577	-0.000000000083337	-0.000000014494397
10	0.000000000225515	0.000056033919954	-0.000000000006356	-0.000000003049077
11	-0.000000000046155	0.000084279534398	-0.000000000000323	-0.000000000491740
12	-0.000000000032935	0.000009457744866	-0.000000000000002	-0.000000000047076
13	0.000000000035365	-0.000012797523046	0.000000000000002	0.000000000002721
14	0.000000000019760	-0.000004561062140	0.000000000000000	0.0000000000002531
15	-0.000000177338205	0.000001282771331	0.000000000000000	0.0000000000000720
.
.
.
48	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000
49	0.000000000000000	0.000000000000001	0.000000000000000	0.000000000000000
50	0.000000000000000	-0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

Table III-4 : Valeurs de α_n et β_n pour $c = 1.5$

- **Expressions des déplacements et des contraintes**

En utilisant les équations (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), (3.19), (3.30), (3.34) et (3.38) les déplacements et les contraintes pour les trois domaines peuvent être exprimés comme suit :

➤ **Déplacement et contrainte pour $D_1 =] -\infty, 0]$**

Formule numérique de déplacement dans le domaine D_1 :

$$\begin{aligned} \frac{U_\theta^1(r,z)}{a \omega_1} = & \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} e^{\lambda z} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\ & + \sqrt{\frac{\pi b}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{\lambda(z-h)} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda b) J_1(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \quad (3.46)$$

Formule numérique de contrainte dans le domaine $D_1 =] -\infty, 0]$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\theta z}^1(r,z)}{a \omega_1} = G \frac{\partial U_\theta^1}{\partial z} = G \left[\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \sqrt{\lambda} e^{\lambda z} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\pi b}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^{+\infty} \sqrt{\lambda} e^{\lambda(z-h)} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda b) J_1(\lambda r) d\lambda \right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

➤ **Déplacement et contrainte pour $D_2 = [0, h]$**

$$\begin{aligned} \frac{U_\theta^2(r,z)}{a \omega_1} = & \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (e^{-\lambda z} + e^{\lambda(z-h)}) J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\ & + \sqrt{\frac{\pi b}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (e^{\lambda z} + e^{\lambda(z-h)}) J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda b) J_1(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\theta z}^2(r,z)}{a \omega_1} = \frac{G}{a \omega_1} \frac{\partial U_\theta^2}{\partial z} = G \left[\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \sqrt{\lambda} (e^{\lambda(z-h)} - e^{-\lambda z}) J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\pi b}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^{+\infty} \sqrt{\lambda} (e^{\lambda z} + e^{\lambda(z-h)}) J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda b) J_1(\lambda r) d\lambda \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$

➤ **Déplacement et contrainte pour $D_3 = [h, +\infty [$**

$$\begin{aligned} \frac{U_\theta^3(r,z)}{a \omega_1} = & \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} e^{-\lambda z} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \\ & + \sqrt{\frac{\pi b}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda b) J_1(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}^3(r,z)}{a \omega_1} = \frac{G}{a \omega_1} \frac{\partial U_\theta^3}{\partial z} = -G \left[\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \sqrt{\lambda} e^{-\lambda z} J_{\frac{3}{2}+2n}(\lambda a) J_1(\lambda r) d\lambda \right] \quad (3.51)$$

Pour tracer les courbes, il faut réécrire formules numériques de déplacements et de contraintes sous forme adimensionnelle, et pour cela nous posons les changements de variables suivants :

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{a}, \quad H = \frac{h}{a}, \quad \tau = \lambda a$$

Alors les expressions de déplacements et de contraintes deviennent :

- **Déplacement et contrainte pour $D_1 =]-\infty, 0]$**

$$\begin{aligned} \frac{U_{\theta}^1(\rho, \zeta)}{a \omega_1} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\tau \zeta} J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau) J_1(\tau \rho) d\tau \\ &+ \sqrt{\frac{\pi C}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{\tau(\zeta-H)} J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau C) J_1(\tau \rho) d\tau \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\theta z}^1(\rho, \zeta)}{G a \omega_1} &= \frac{1}{a \omega_1} \frac{\partial U_{\theta}^1(\rho, \zeta)}{\partial z} = G \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \sqrt{\tau} e^{\tau \zeta} J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau) J_1(\tau \rho) d\tau \right. \\ &\left. + \sqrt{\frac{\pi C}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^{+\infty} \sqrt{\tau} e^{\tau(\zeta-H)} J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau C) J_1(\tau \rho) d\tau \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

- **Déplacement et contrainte pour $D_2 = [0, h]$**

$$\begin{aligned} \frac{U_{\theta}^2(\rho, \zeta)}{a \omega_1} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} (e^{-\tau \zeta} + e^{\tau(\zeta-H)}) J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau) J_1(\tau \rho) d\tau \\ &+ \sqrt{\frac{\pi C}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} (e^{\tau \zeta} + e^{\tau(\zeta-H)}) J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau C) J_1(\tau \rho) d\tau \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\theta z}^2(\rho, \zeta)}{G a \omega_1} &= \frac{1}{a \omega_1} \frac{\partial U_{\theta}^2(\rho, \zeta)}{\partial \zeta} = G \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \sqrt{\tau} (e^{\tau(\zeta-H)} - e^{-\tau \zeta}) J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau) J_1(\tau \rho) d\tau \right. \\ &\left. + \sqrt{\frac{\pi C}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^{+\infty} \sqrt{\tau} (e^{\tau \zeta} + e^{\tau(\zeta-H)}) J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau C) J_1(\tau \rho) d\tau \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

- **Déplacement et contrainte pour $D_3 = [h, +\infty [$**

$$\begin{aligned} \frac{U_{\theta}^3(\rho, Z)}{a \omega_1} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau Z} J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau) J_1(\tau \rho) d\tau \\ &+ \sqrt{\frac{\pi C}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau C) J_1(\tau \rho) d\tau \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\frac{\tau_{\theta z}^3(\rho, \zeta)}{G a \omega_1} = \frac{1}{a \omega_1} \frac{\partial U_{\theta}^3(\rho, \zeta)}{\partial \zeta} = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^{+\infty} \sqrt{\tau} e^{-\tau \zeta} J_{\frac{3}{2}+2n}(\tau) J_1(\tau \rho) d\tau \quad (3.57)$$

❖ Présentation des résultats

Les principaux résultats de la simulation sont présentés par les courbes des figures (III-2) à (III-16) ci-après. Qui montrent le comportement des déplacements et la répartition des contraintes à travers le milieu élastique en fonction de ρ et pour des différentes valeurs de H , ζ et de c .

On a choisi quelques valeurs de ζ en fonction de H pour tracer les courbes comme de suite :

$$\zeta = \frac{1}{2} H = 0.5 H$$

$$\zeta = \frac{1}{2} H + \frac{1}{8} H = 0.625 H$$

$$\zeta = \frac{1}{2} H + \frac{1}{4} H = 0.75 H$$

$$\zeta = \frac{1}{2} H + \frac{3}{8} H = 0.875 H$$

$$\zeta = \frac{1}{2} H - \frac{1}{8} H = 0.375 H$$

$$\zeta = \frac{1}{2} H - \frac{1}{4} H = 0.25 H$$

$$\zeta = \frac{1}{2} H - \frac{3}{8} H = 0.125 H$$

- Graphes des champs de déplacement et de contrainte pour le domaine D_1 pour $H = 1$, $c = 1$ et $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -1$

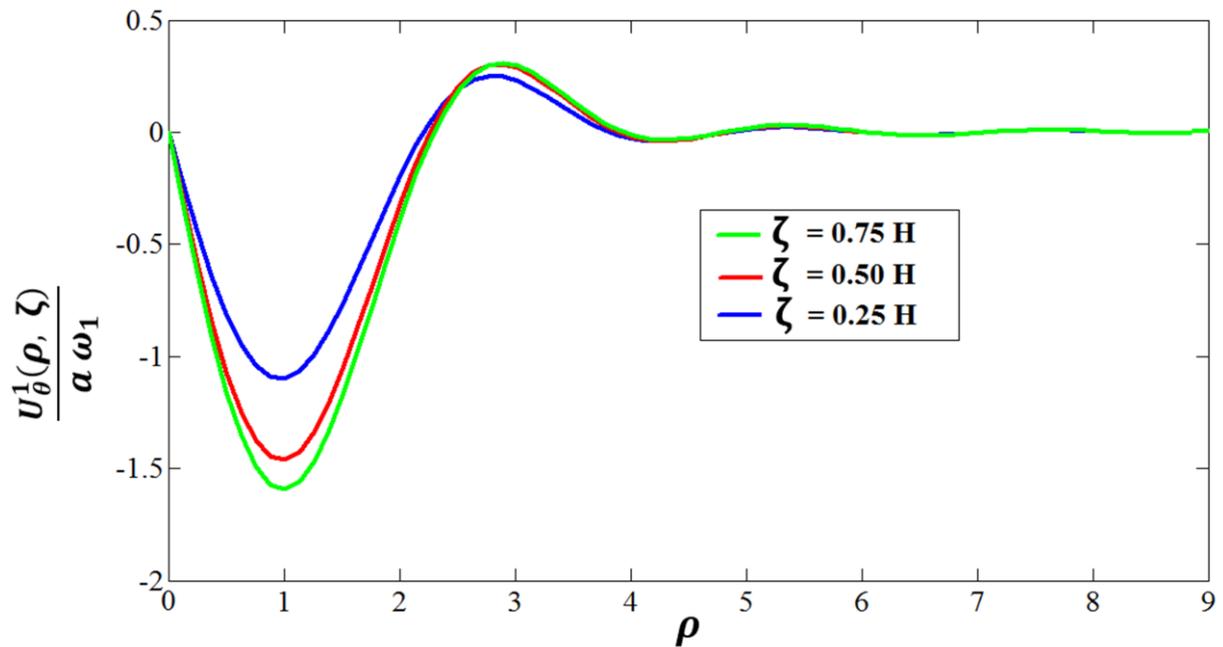


Figure III-2 : Champ de déplacement $\frac{U_{\theta}^1(\rho, \zeta)}{a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1$

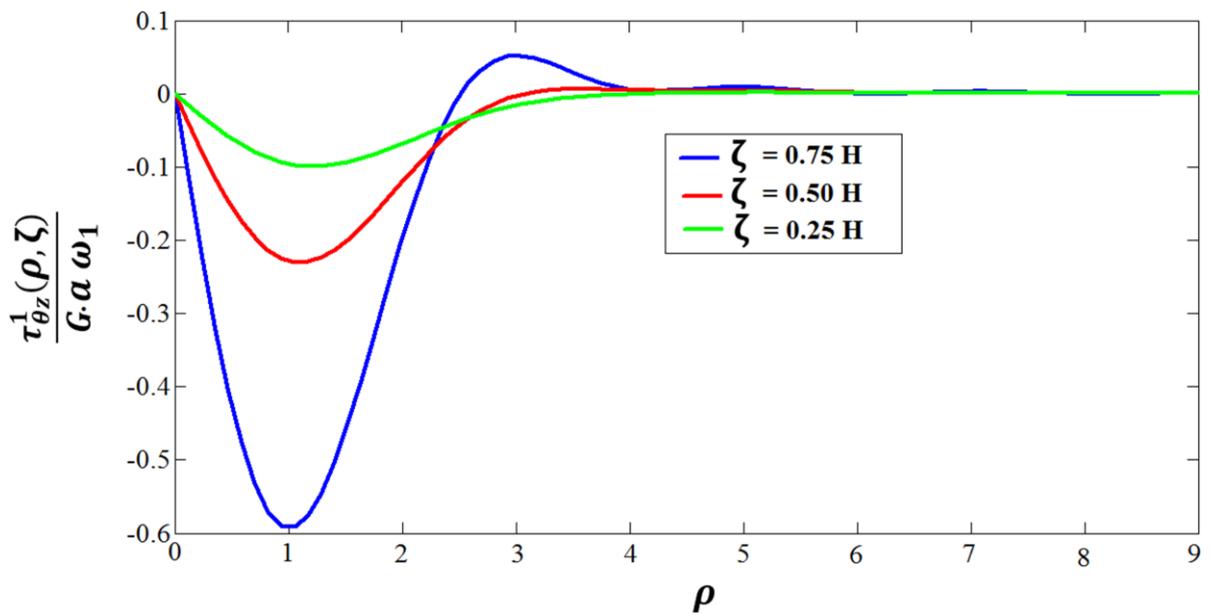


Figure III-3 : Champ de contrainte $\frac{\tau_{\theta z}^1(\rho, \zeta)}{G \cdot a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1$

- Graphes des champs de déplacement et de contrainte pour le domaine D_2 pour $H = 1$, $c = 1$ et $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -1$

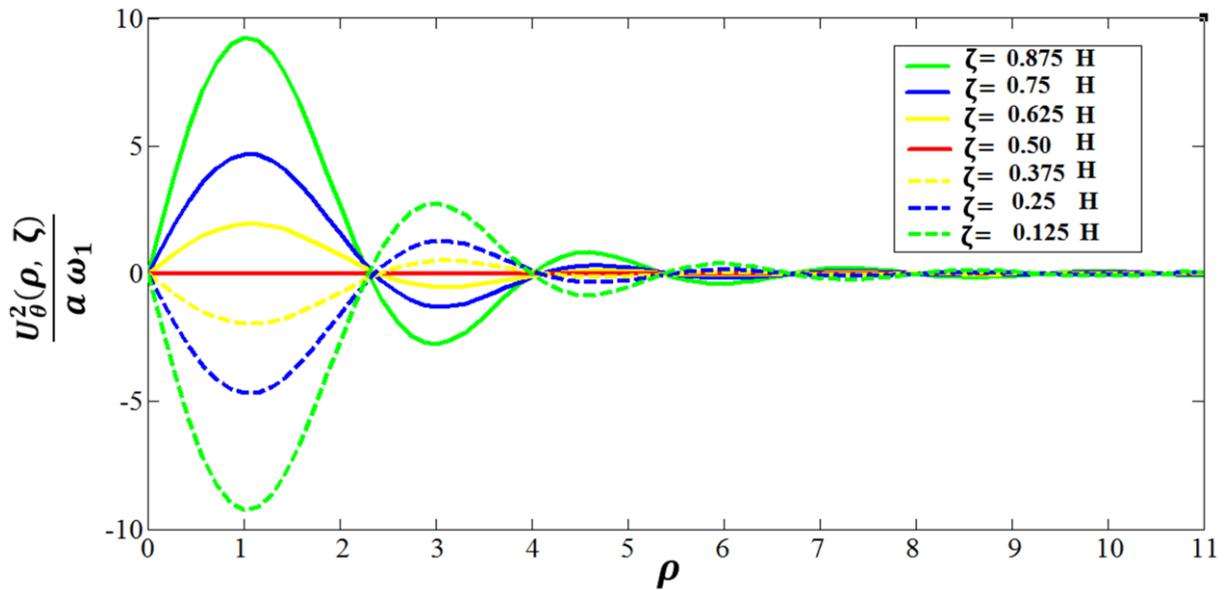


Figure III-4 : Champ de déplacement $\frac{U_{\theta}^2(\rho, \zeta)}{a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1$

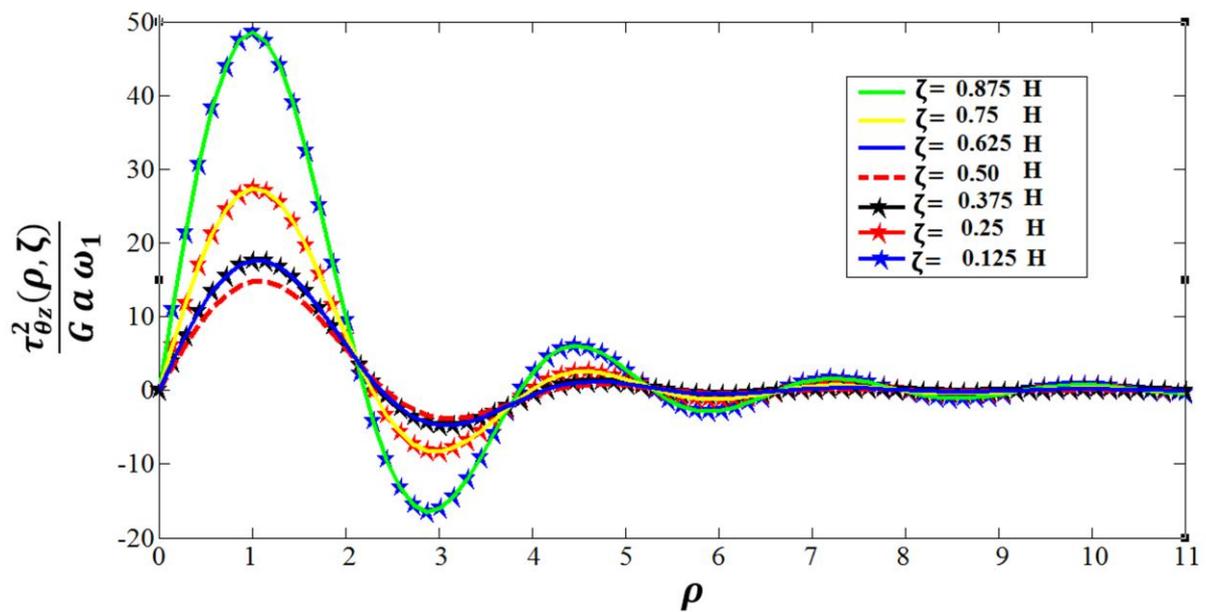


Figure III-5 : Champ de contrainte $\frac{\tau_{\theta z}^2(\rho, \zeta)}{G \cdot a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1$

- Graphes des champs de déplacement et de contrainte pour le domaine D_3 pour $H = 1$, $c = 1$ et $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -1$

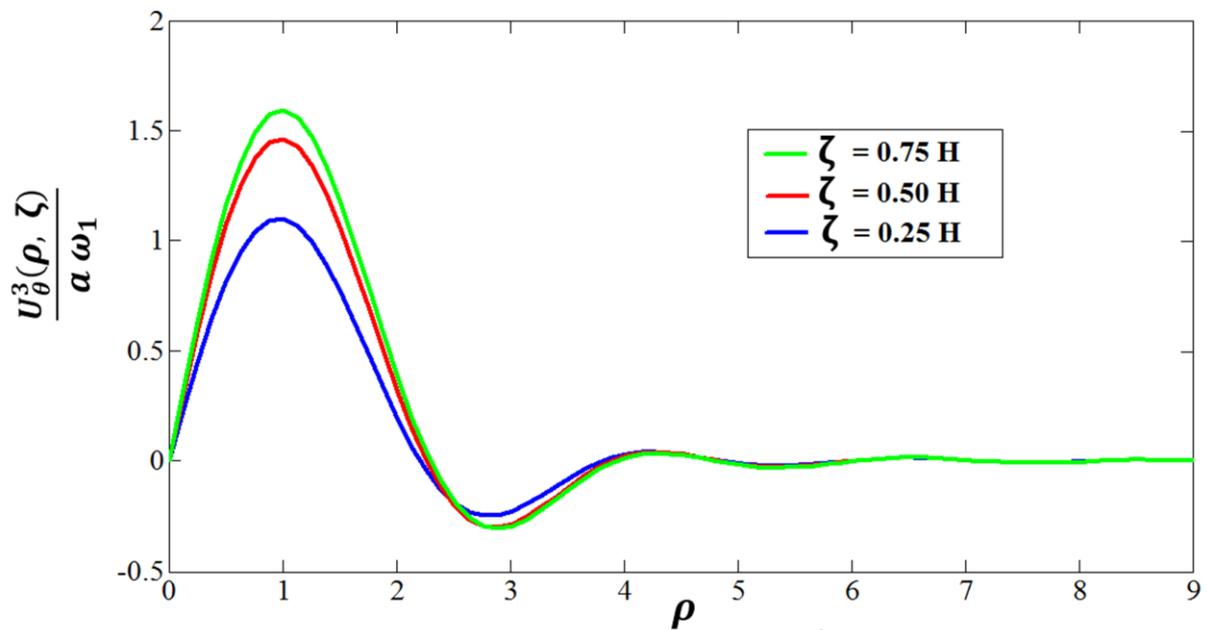


Figure III-6 : Champ de déplacement $\frac{U_{\theta}^3(\rho, \zeta)}{a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1$

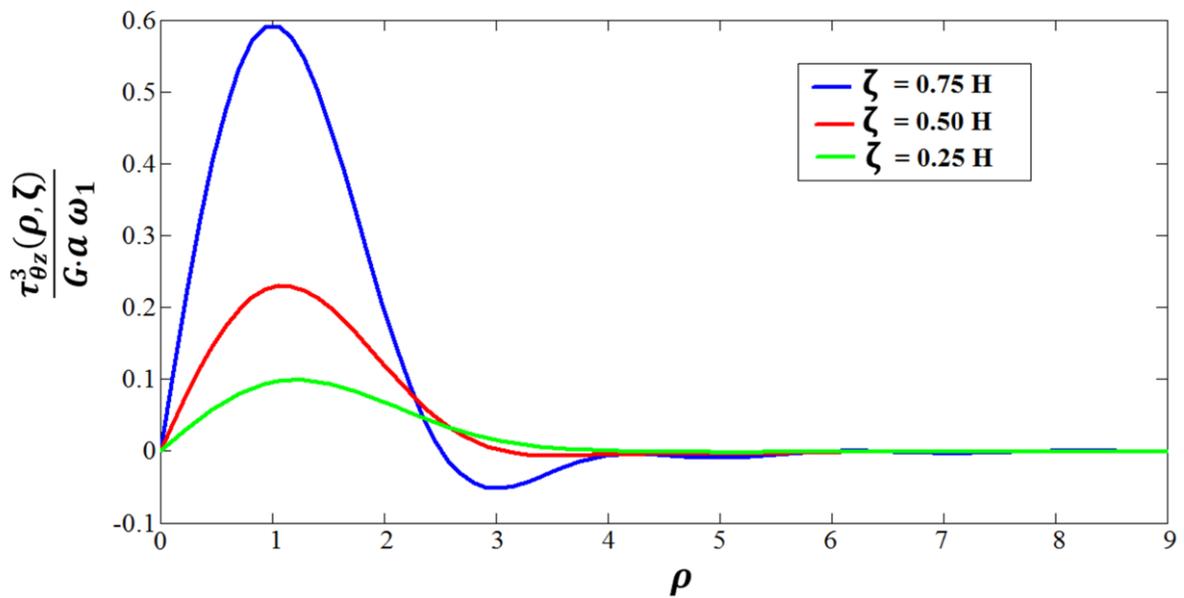


Figure III-7 : Champ de contrainte $\frac{\tau_{\theta z}^3(\rho, \zeta)}{G \cdot a \omega_1}$, $H = 1$, $c=1$

- Graphes des champs de déplacement et de contrainte pour les deux domaines D_1 et D_3 pour $H = 1$, $c = 1$ et $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -1$

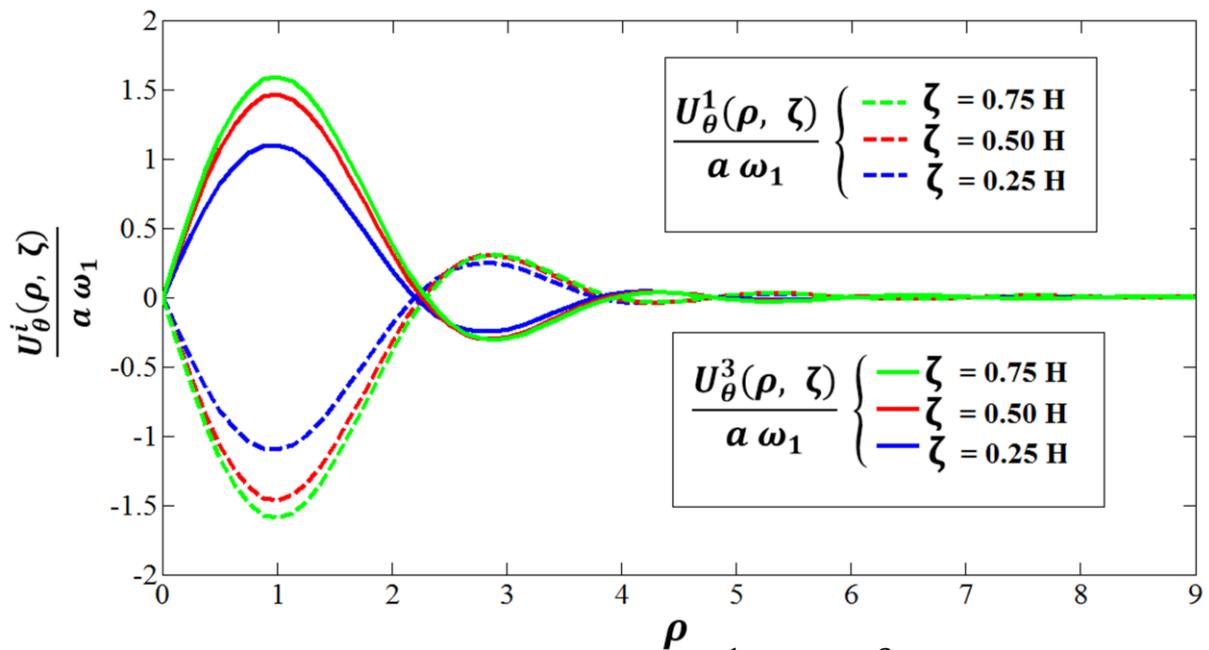


Figure III-8 : Champs des déplacements $\frac{U_{\theta}^1(\rho, \zeta)}{a \omega_1}$ et $\frac{U_{\theta}^3(\rho, \zeta)}{a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1$

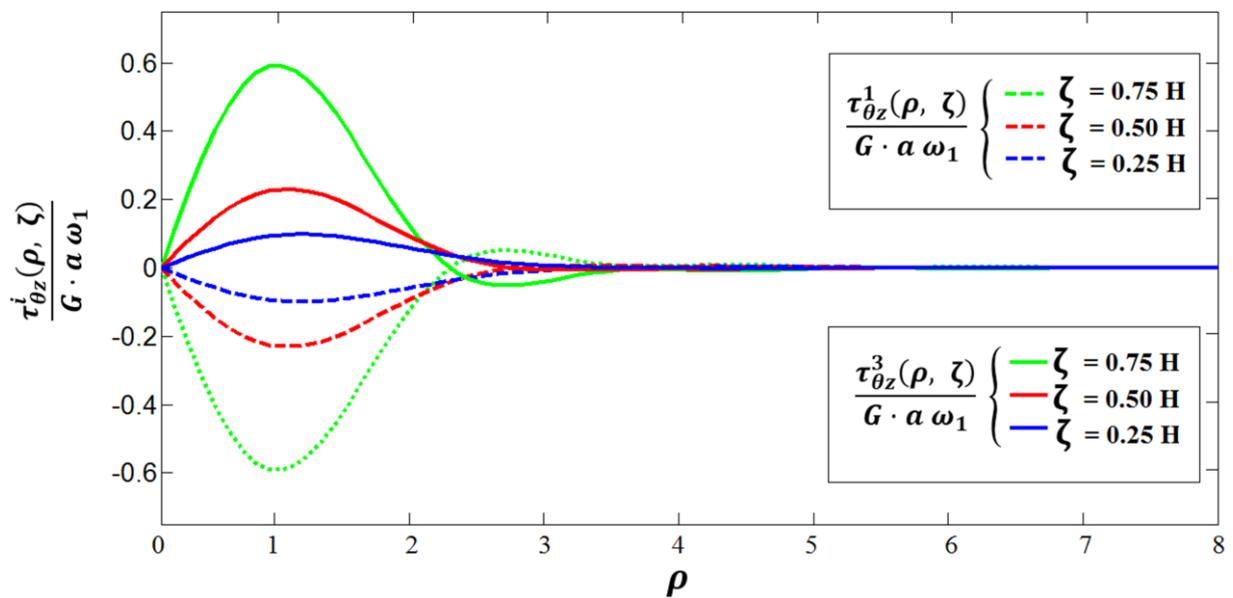


Figure III-9 : Champs des contraintes $\frac{\tau_{\theta z}^1(\rho, \zeta)}{G \cdot a \omega_1}$ et $\frac{\tau_{\theta z}^3(\rho, \zeta)}{G \cdot a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1$

- Graphes des champs de déplacement et de contrainte pour le domaine D_2 pour $H = 1$, $c = 1.5$ et $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -1$

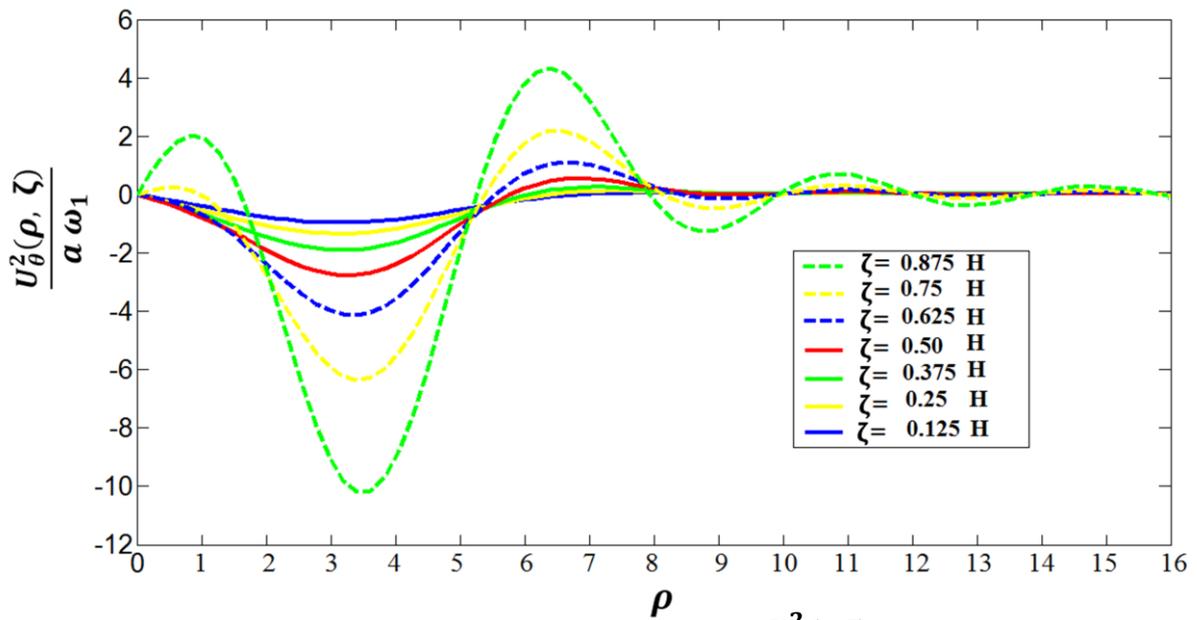


Figure III-10 : Champ de déplacement $\frac{U_{\theta}^2(\rho, \zeta)}{a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1.5$

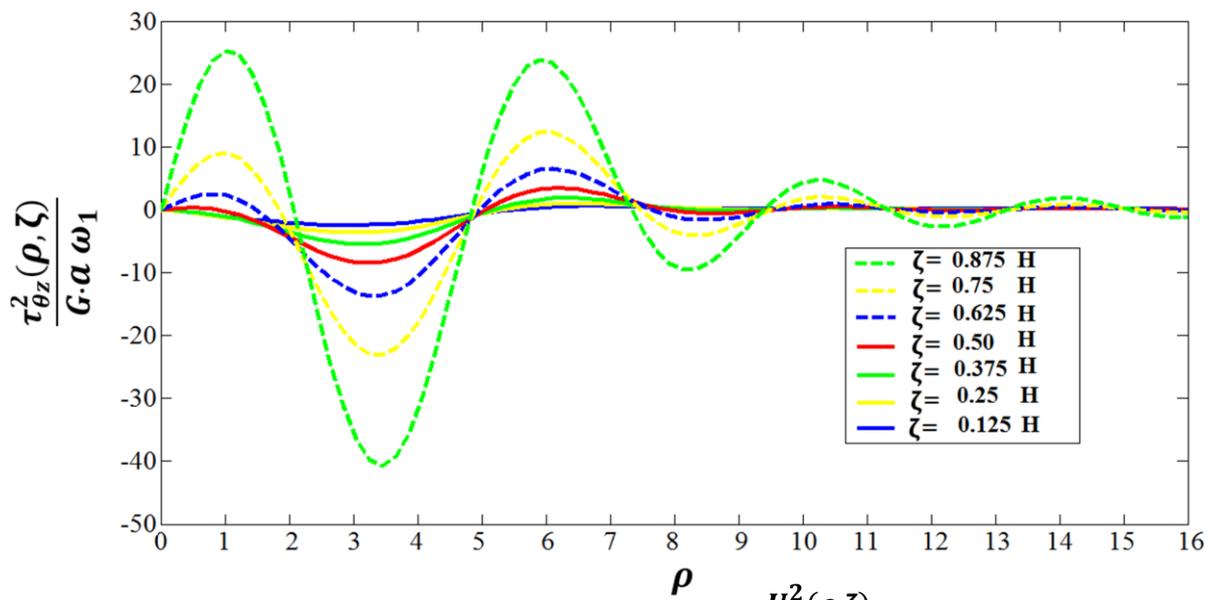


Figure III-11 : Champs de contrainte $\frac{\tau_{\theta z}^2(\rho, \zeta)}{G \cdot a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1.5$

- Graphes des champs de déplacement et de contrainte pour les deux domaines D_1 et D_3 pour $H = 1$, $c = 1.5$ et $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -1$

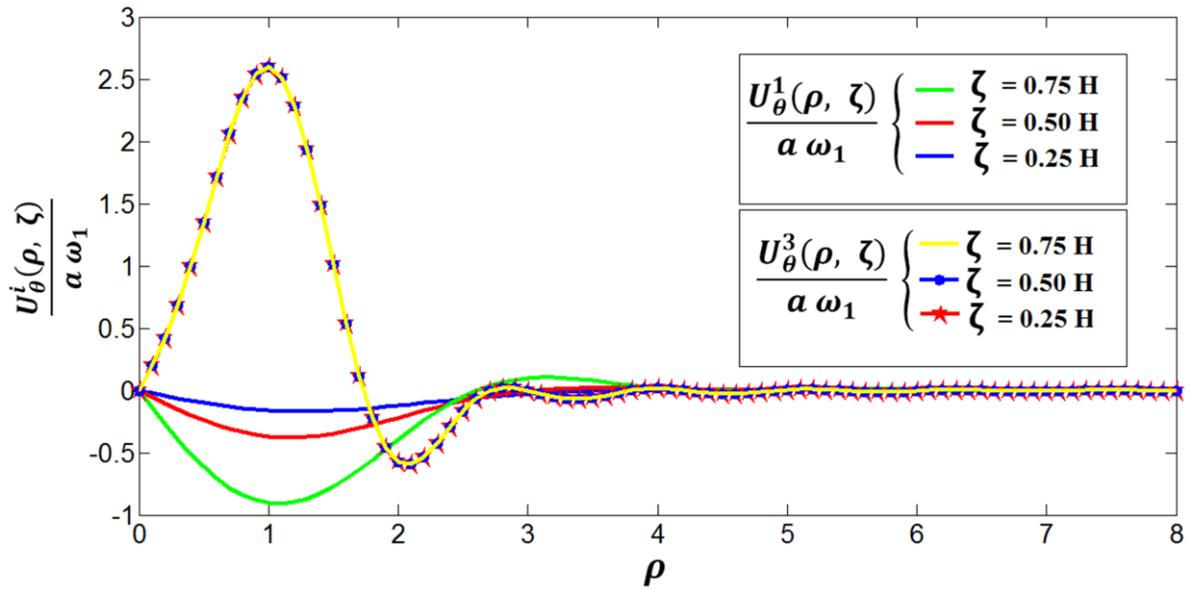


Figure III-12 : Champs des déplacements $\frac{U_{\theta}^1(\rho, \zeta)}{a \omega_1}$ et $\frac{U_{\theta}^3(\rho, \zeta)}{a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1.5$

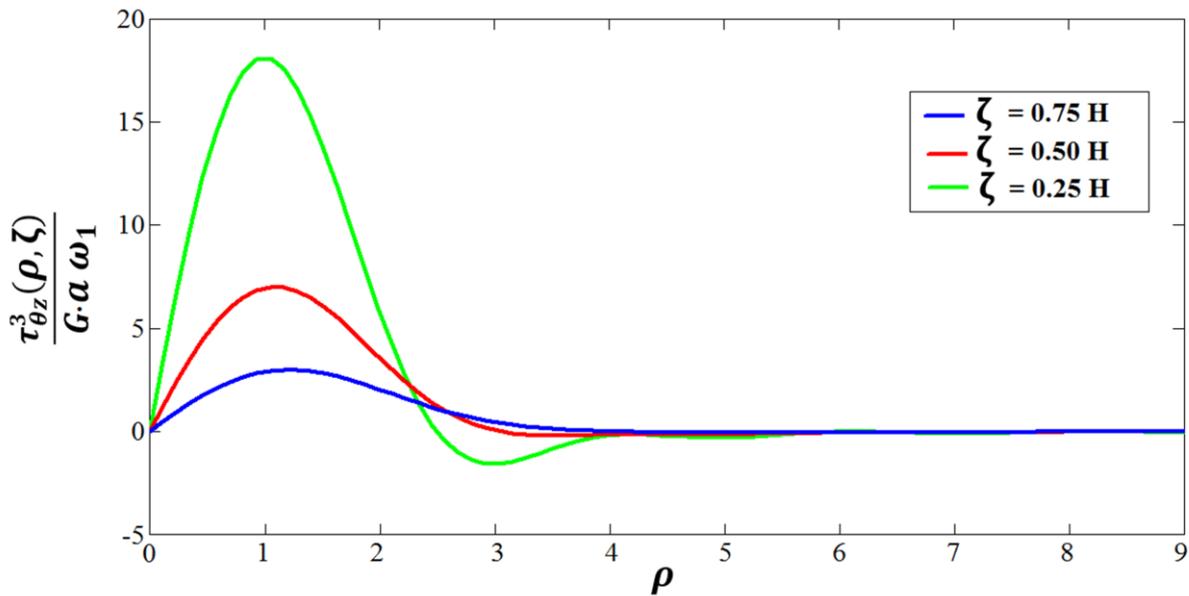


Figure III-13 : Champ de contrainte $\frac{\tau_{\theta z}^3(\rho, \zeta)}{G \cdot a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1.5$

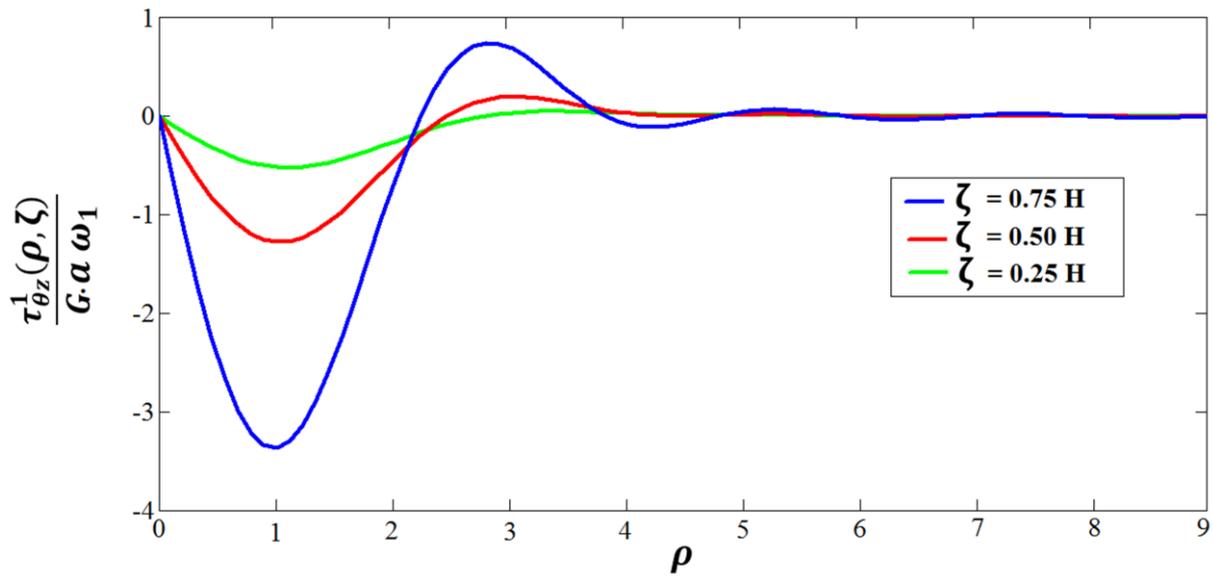


Figure III-14 : Champ de contrainte $\frac{\tau_{\theta z}^1(\rho, \zeta)}{G \cdot a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1.5$

- Graphes des champs de déplacement et de contrainte pour le domaine D_2 pour $H = 1$, $c = 1$ et $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1$

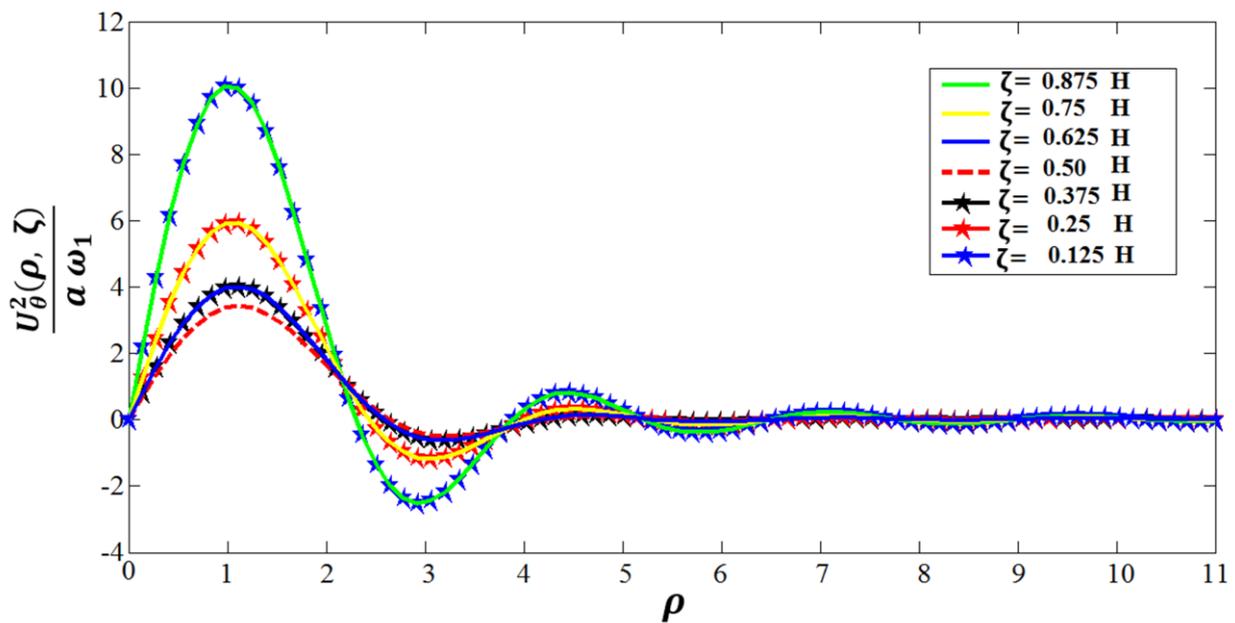


Figure III-15 : Champ de Déplacements $\frac{U_{\theta}^2(\rho, \zeta)}{a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1$

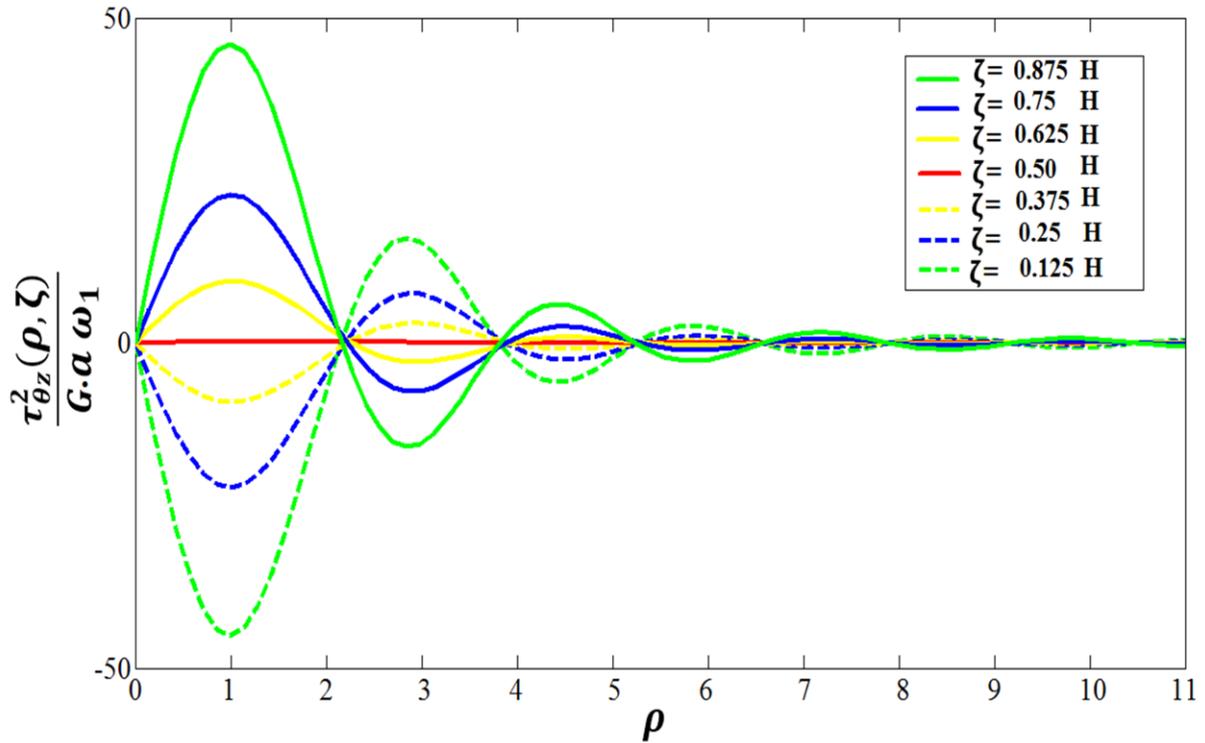


Figure III-16 : Champ de contrainte $\frac{\tau_{\theta z}^2(\rho, \zeta)}{G \cdot a \omega_1}$, $H = 1$, $c = 1.5$

- **Interprétation :**

- **Cas où le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1} = -1$**

Nous pouvons constater que les déformations et les contraintes sont inversement proportionnelles avec le rapport des rayons des deux disques c dans les deux domaines (\mathbf{D}_2) et (\mathbf{D}_1 ou \mathbf{D}_3 : Domaine où se trouve le disque de petit rayon). Par contre les déformations sont proportionnelles avec le rapport c dans le domaine où se trouve le disque de grand rayon.

- **Cas où le rapport $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1$**

Dans ce cas les déplacements sont proportionnelles avec le rapport c , avec un signe positifs (qui correspondant au sens trigonométriques) dans les trois domaines, même chose pour les contraintes sauf que dans le domaine \mathbf{D}_2 , sont pas tous avec un signe positifs.

Conclusion générale et perspectives

Nous avons étudié dans le cadre de ce mémoire de master, le problème d'une torsion axisymétrique d'un milieu élastique pour une paire de disques rigides adhésifs coaxiaux ayant des rayons différents.

La solution générale du problème a été obtenue à partir de l'équation différentielle d'équilibre à l'aide de la transformation de Hankel et son inverse, par la suite on applique les conditions aux limites, pour avoir les équations intégrales duales. En utilisant les relations mathématiques définies dans le chapitre II, les équations duales peuvent se transformer aux équations de Fredholm, et en utilisant des développements en séries des polynômes de Jacobi, les solutions s'obtiennent par la résolution de deux systèmes algébriques.

Par la résolution de système algébrique on peut déterminer les coefficients α_n et β_n donnés dans les tables (III-1) à (III-4) qui nous permettent de tracer sous forme des courbes les champs des déplacements et des contraintes dans les trois régions. Alors nous remarquons que :

- La convergence des coefficients α_n et β_n avec la croissance de H .
- Dans le cas où $(\omega_2/\omega_1) = -1$ Les déplacements et les contraintes sont inversement proportionnelles au rapport des rayons des deux disques c dans les deux domaines (\mathbf{D}_2) et (\mathbf{D}_1 ou \mathbf{D}_3 : Domaine où se trouve le disque de petit rayon). Par contre sont proportionnelles avec le rapport c des dans le domaine où se trouve le disque de grand rayon.
- Dans le cas où $(\omega_2/\omega_1) = 1$ les déplacements sont proportionnelles avec le rapport c , avec un signe positifs (qui correspondent au sens trigonométriques) dans les trois domaines, même chose pour les contraintes sauf que dans le domaine \mathbf{D}_2 sont pas tous avec un signe positifs.

Concernant les perspectives des résultats obtenus, nous envisageons d'appliquer l'outil analytique développé dans ce mémoire pour la résolution des problèmes de torsion axisymétrique par deux disques rigides dans un milieu bicouche élastique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G.K. Dhawan. The torsion of elastic half-space with penny-shaped crack. Def. Sci. J. Vol.24, 1974.
- [2] B. Singh et R. Dhaliwal. An approximate explicit solution for the local torsion of an elastic layer. Int. J. Engng Sci. Vol.15, 1977.
- [3] R. Pak et J. Saphores. Torsion of a rigid disc in a half-space. Int. J. Engng Sci. Vol.29, 1991.
- [4] A. Bacci et S. Bennati. An approximate explicit solution for the local torsion of an elastic layer. Mech. Struct. Mach, 1996.
- [5] M. Rahman. Integral equations and their applications. WIT press, 2007.
- [6] O. Tamate and T. Saito. On the twisting of two elastic layers bonded to a rigid foundation. Trans. of the Japan Soc. of Mechanical Engineers, 1975.
- [7] M. E. Erguven. Torsion of two bonded layers by a rigid disk. Meccanica, 1991.
- [8] G. C. Sih and E. P. Chen. Torsion of a laminar composite debonded over a penny-shaped area. J. Franklin, 1971.
- [9] Dean G. Duffy. Mixed boundary value problems. Chapman Hall/CRC, 2008.
- [10] F. Bowman. Introduction to Bessel function. Doverpublication Inc, 1985.
- [11] L.T. Rachdi et A. Rouz. Fourier Hankel Transform and the Riemannian Spaces in the Half Space. Int. J. Math. Analysis Sci. Vol.22, 2008.
- [12] J.C. Charmet. Mécanique de solide et des matériaux. Dunod, 2004.
- [13] M.Amestoy et S.Forest. Mécanique des milieux continus. Cours de l'école des mines de Paris, 2005.
- [14] I. Mandel. Cours de mécanique des milieux continus. Jacques Gabay, 1994.