

وزارة التعليم و البحث العلمي

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

20x

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

D'ELECTRONIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE COMPARATIVE DES
METHODES DE TRAITEMENT
NUMERIQUE DE L'E.E.G

Proposé par :

D.E AZOUZ

Etudié par :

D.AIT BOUDAUD

Dirigé par :

D.E AZOUZ

A.AGGOUN

PROMOTION :

JUIN 1986

وزارة التعليم والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT **D'ELECTRONIQUE**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**ETUDE COMPARATIVE DES
METHODES DE TRAITEMENT
NUMERIQUE DE L'E.E.G**

Proposé par :

D.E AZOUZ

Etudié par :

D. AIT BOUDAUD

A. AGGOUN

Dirigé par :

D.E AZOUZ

PROMOTION :

JUIN 1986

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A mes parents

A mes frères et ma soeur

A mes grands parents

A mes oncles

A ma famille

A tous ceux que j'aime

Djamel

A mon père

A ma mère

A tous mes frères

A tous mes amis sincères

A toute ma famille

Amar

REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Nous tenons à exprimer notre profonde reconnaissance et nos vifs remerciements à notre promoteur D.E AZOUZ maitre assistant à l'ENP pour sa gentillesse, sa compétence et son orientation et l'aide constante qu'il nous a prodigué tout au long de ce travail

Que tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire de prés ou de loin trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

Nous tenons à exprimer notre sincère reconnaissance envers tout le corp enseignant qui a contribué à notre formation d'ingénieur.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	
CHAPITRE 1 : Caractéristiques du signal EEG	3
CHAPITRE 2 : Théorie du traitement du signal	9
- Filtrage numérique	9
- Transformée de FOURIER discrète (TFD)	18
- Transformée de FOURIER rapide (FFT)	23
- Analyse spectrale	28
CHAPITRE 3 : Choix des méthodes de traitement	37
- Analyse spectrale par filtrage numérique	37
- Analyse spectrale par FFT	54
CHAPITRE 4 : Simulation du signal EEG	60
CHAPITRE 5 : Résultats et leurs interprétation	63
CONCLUSION	
ANNEXES	
BIBLIOGRAPHIE	

INTRODUCTION

L'electroencéphalographie est une discipline médicale qui est d'une aide considérable pour le neurologue, elle lui permet de faire une approche sur l'état du patient, et de déceler certaines maladies. Dans une grande partie des examens neurologiques l'observation clinique serait insuffisante et les médecins ont toujours recours à l'interprétation de L'EEG, précisément à une reconnaissance des formes des signaux, c'est ainsi qu'est venu l'idée de les traiter par des méthodes numériques qui sont susceptibles de diminuer et de simplifier la tâche du spécialiste et lui permet d'obtenir les résultats avec une bonne précision et lui enlève toute sorte de doute qui pourrait survenir lorsqu'il fait l'interprétation par les méthodes classiques.

Notre travail consiste à traiter des signaux de l'EEG simulés, par différentes méthodes d'analyse spectrale, de faire une comparaison entre celles-ci, et de ressortir la méthode la plus appropriée et la plus efficace pour le traitement du signal EEG. POUR faire cette étude, nous avons abordé notre travail par un chapitre consacré à décrire les fondements physiologiques du signal EEG il en sera dégagé les caractéristiques essentielles nécessaire à l'analyse spectrale, il sera suivi d'un deuxième chapitre où l'on expose la théorie nécessaire pour le traitement du signal, nous énoncerons essentiellement la théorie du filtrage numérique, la transformée de FOURIER discrète et rapide (FFT) et la théorie de l'analyse spectrale par filtrage numérique et l'analyse spectrale par FFT. Dans le chapitre 3 seront décrites les méthodes retenues pour le traitement du signal EEG. Le chapitre 4 sera consacré à la simulation de l'EEG sur ordinateur où nous aurons à générer un modèle mathématique qui sera une bonne approche du signal réel. Enfin, nous terminerons notre étude par donner une

interprétation des résultats et de faire une comparaison des différentes méthodes utilisées, ainsi, nous aurons à comparer les algorithmes FFT réalisés, et comparer les méthodes d'analyse spectrale par filtrage numérique et par FFT.

CHAPITRE : 1

Caractéristiques du signal EEG

CHAPITRE I

CARACTERISTIQUE DU SIGNAL E.E.G

I-1: INTRODUCTION

L'activité des neurones du cortex cérébral est ordonnée de telle sorte qu'elle entraîne des variations du champs électrique enregistrable au niveau du scalp. Cette constatation de H. BERGER (1924) est à l'origine de l'électroencéphalographie (E.E.G): enregistrement des variations de potentiel recueillis par les électrodes répartis sur l'ensemble du scalp.

I-2: ELECTROGENESE CEREBRALE:

Dans certaines conditions, une cellule nerveuse est susceptible d'émettre soit spontanément, soit à la suite d'une excitation incidente, un signal électrique appelé onde d'influx nerveux

Cette onde d'influx nerveux se propage le long des fibres nerveuses et pourra stimuler les cellules voisines, ce qui crée un processus électrique dynamique caractérisé par une propagation des signaux électriques.

Une cellule nerveuse oscille constamment en fonction de son chimisme propre, et des diverses stimulations électriques qu'elle reçoit de l'extérieur, entre deux états extrêmes.

Ces états sont caractérisés par le degré de polarisation de la cellule, c'est à dire par la valeur de sa charge électrique de surface: à une surpolarisation correspond un état d'inhibition, à une dépolarisation correspond un état d'excitation (état dans lequel la cellule est apte à émettre des ondes d'influx nerveux). [16]

I-3: L'ELECTROENCEPHALOGRAPHIE:

A partir des électrodes placées sur le scalp, on recueille un potentiel électrique appelé électroencéphalogramme. Il représente la somme des activités unitaires qui se déroulent au sein d'une population considérable de neurones sous-jacents à l'électrode. La constatation de l'E.E.G. de rythmes ou de figures démontre que l'activité de ces neurones ne se produit pas de façon anarchique mais qu'ils sont soumis à des mécanismes assurant une coordination ou une synchronisation.

I-4: TECHNIQUE D'ENREGISTREMENT:

L'ordre de grandeur des phénomènes enregistrés est de l'ordre de 10 à 100 μ V. Le développement de l'électroencéphalographe a nécessité la mise au point de méthodes d'amplification appropriées et de procédés d'enregistrement adaptés au rythme de variations des potentiels. La méthode d'exploration est standardisée: 20 à 30 capteurs sont disposés symétriquement sur le scalp. Un système de commande permet de sélectionner divers types de dérivations entre les électrodes. L'emplacement des électrodes sur le scalp se fait suivant plusieurs techniques, parmi elles, celles qui sont présentées par la figure (I-1).

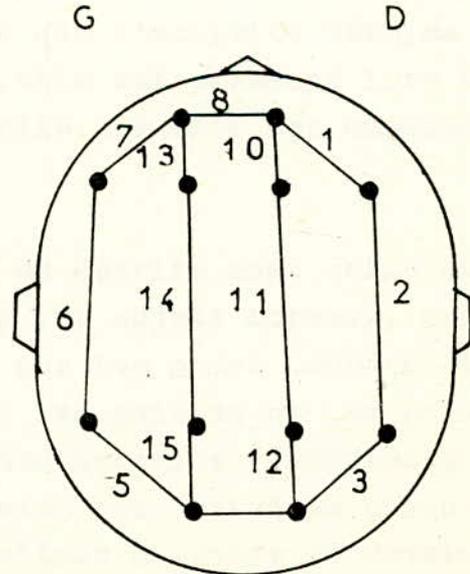
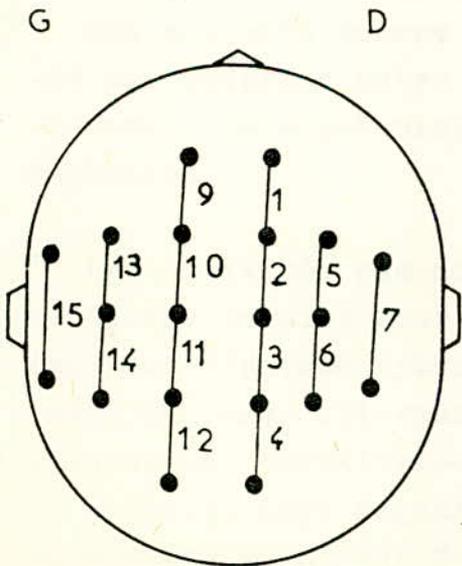
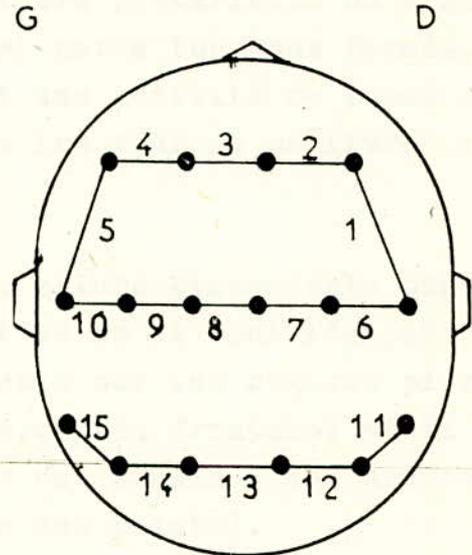
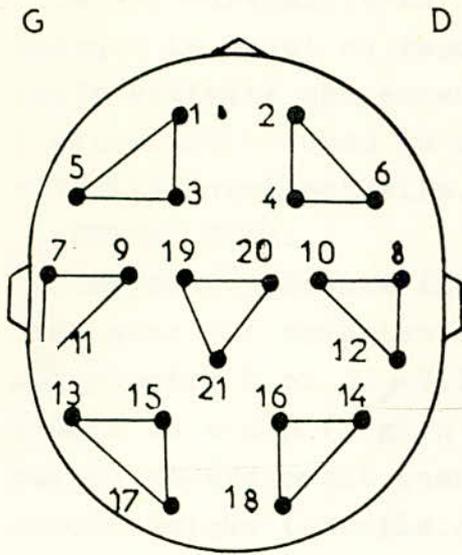
I-5: LES RYTHMES CEREBRAUX:

L'enregistrement de l'E.E.G. fait apparaître des variations périodiques des potentiels enregistrés qui sont mieux caractérisées par leur fréquence que par leur amplitude, ce sont les rythmes cérébraux. Les rythmes les plus fréquemment rencontrés sont les suivants: [1]

-RYTHME ALPHA:

Cette activité, très courante chez les sujets adultes, présente

FIG. I: MONTAGES BECKMAN



nouveau-né l'activité EEG est ample, lente, instable. Durant la première enfance jusqu'à deux ou trois ans, l'EEG s'accélère et tend à s'organiser sous la forme d'un rythme de 4 à 5 Hz. Le rythme ALPHA apparaît vers l'âge de 5 ans, puis l'évolution se poursuit jusqu'à l'âge adulte. [2]

I-6: INTERPRETATION CLASSIQUE DE L'EEG:

On ne peut jamais faire un diagnostic suivant le tracé de l'E.E.G sans connaître l'état clinique du patient.

Les méthodes d'analyse et d'interprétation les plus utilisées actuellement consistent à effectuer manuellement un certain nombre de mesure ou de comptages directement sur le tracé. on peut ainsi estimer l'amplitude d'un rythme, sa fréquence, en comptant le nombre de maximas présentés durant une seconde.

On confronte la lecture de l'electroencéphalogramme à l'état clinique du malade pour arriver à faire un diagnostic sur le malade, et ainsi on pourra détecter un assez bon nombre de maladies.

En général, l'interprétation en fonction de la clinique se fait en appréciant:

1-L'activité de fond (détection des rythmes).

2-Symétrie et assymétrie des relevés provenant des régions symétriques.

3-Réactivité à l'ouverture des yeux et à d'autre stimulations.

I-7: NECESSITE D'UNE ANALYSE SPECTRALE DE L'EEG:

La visualisation d'un tracé EEG, nous montre qu'il est très difficile de faire une lecture rapide et d'apprécier le type d'onde existant dans une région, et il le sera plus difficile encore si le tracé présente une superposition d'ondes, donc la nécessité d'effectuer une analyse spectrale nous paraît plus

qu'important, ceci dans le but d'augmenter la précision des interprétations donc d'éviter au médecin de commettre des erreurs qui pourront poser des problèmes au patient, autre avantage de l'analyse spectrale est le gain de temps considérable, qui permettra au médecin de se consacrer entièrement à l'interprétation des résultats.

CHAPITRE : 2

Theorie du traitement du signal

CHAPITRE II

II-I FILTRAGE NUMERIQUE

II-I-I: INTRODUCTION:

Lors de l'opération de mesure, on se trouve toujours confronté à des problèmes de bruit et pour extraire le signal utile des valeurs mesurées, on utilise des filtres qui sont de deux types, analogiques et numériques.

Les filtres numériques sont plus intéressants que les filtres analogiques de nos jours, du fait qu'ils présentent des avantages appréciables tels que: la précision, la fiabilité, la facilité de commande ainsi que la possibilité de multiplexage (traitement de plusieurs signaux simultanément) en plus, absence de problème de réalisation technologiques.

De façon générale, il n'existe pas de méthode de filtrage qui soit adaptée pour tous les cas et pour toutes les contraintes possibles, mais au contraire, il existe une multitude de variantes de méthodes de filtrage.

II-I-2: DEFINITION D'UN FILTRE NUMERIQUE:

Un filtre numérique est un algorithme de calcul par lequel une séquence de nombre $x(n)$ dite séquence d'entrée est transformée en une autre séquence de nombre $y(n)$ dite séquence de sortie, autrement dit, les filtres numériques sont seulement des méthodes de calcul permettant une bonne exploitation des signaux traduits sous la forme numérique.

Deux manières de réaliser les filtres numériques:

- I-En utilisant des circuits logiques permettant d'avoir un équipement ayant pour seule fonction le filtrage numérique

2-Simulation de circuit par programme et de cette façon, de réaliser n'importe quel filtre en changeant seulement un algorithme de calcul, et cette méthode a comme principaux avantages: la précision et la souplesse.

Les opérateurs utilisés pour la réalisation des filtres numériques sont:

- Les additionneurs.
- Les multiplicateurs.
- Les éléments de retard.

II-I-3: CLASSIFICATION DES FILTRES NUMERIQUES:

L'équation de convolution régissant un système ayant $g(k)$ comme réponse impulsionnelle est:

$$y(k) = \sum_{l=0}^{\infty} g(k-l) \cdot x(l) \quad (1)$$

où $x(k)$ et $y(k)$ sont respectivement les échantillons d'entrées et de sorties.

La transformée en Z de la relation (1) donne :

$$Y(z) = P(z) \cdot X(z) \quad (2)$$

$p(z)$ étant un polynôme de degré infini, dont les coefficients sont $g(l)$. Ce polynôme peut se mettre sous la forme du quotient de deux polynômes en Z de degré M et N, ce qui conduit à une relation récursive:

$$\sum_{n=0}^N a_n \cdot y(k-n) = \sum_{m=0}^M b_m \cdot x(k-m) \quad (3)$$

La mise en oeuvre de la relation (1) nécessite une infinité de coefficients $g(l)$ caractérisant le système, on a recours alors à la relation (3).

Donc l'importance de la durée de la réponse impulsionnelle nous amène aux deux classes de filtres:

I-Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII):

Dont les échantillons $g(k)$ sont non nuls sur un intervalle de durée infinie:

$$k_0 \leq k < +\infty$$

2-Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF):

Dont les échantillons $g(k)$ sont non nuls sur un \neq intervalle de durée finie L

$$k_0 \leq k \leq k_0 + L - 1$$

II-I-4: CLASSIFICATION DES REALISATIONS/

La réalisation d'un filtre numérique s'effectue selon trois types de réalisation:

I-Réalisation non récursive: sa fonction de transfert est:

$$y(k) = \sum_{l=0}^{L-1} g(l) \cdot x(k-l)$$

ainsi le signal de sortie $y(k)$ dépend seulement de la valeur présente et des valeurs précédentes du signal d'entrée.

2-Réalisation récursive: dont la fonction de transfert est une fonction rationnelle en Z , et leurs conception se fait suivant les structures analogiques connues, soit:

$$y(k) = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_0} x(k-m) - \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{a_0} y(k-n)$$

le signal de sortie dépend à la fois du signal d'entrée et des valeurs précédentes du signal de sortie.

3-Réalisation par les techniques de fourier:

Si $x(k)$ est le signal d'entrée numérisée, on lui applique la transformée de FOURIER discrète, ensuite on multiplie le résultat par les coefficients de la réponse fréquentielle $g(n)$ du filtre utilisé, et enfin on applique la transformée de fourier inverse pour obtenir le signal numérique $y(k)$ filtré, la formulation de ce dernier, en fonction des échantillons à filtre est la suivante:

$$y(k) = D.F.T^{-1} \left[G(n) \cdot D.F.T \left(x(k) \right) \right]$$

II-I-4-2: TABLEAU DE COMPARAISON DES DIFFERENTES REALISATIONS:

TYPE	AVANTAGES	INCONVENIENTS
-non récursifs	<ul style="list-style-type: none"> -La fonction de transfert en Z n'a pas de pôles donc les filtres sont toujours stables -La formulation est simple. -Les erreurs de calcul ne se cumulent pas. 	<ul style="list-style-type: none"> -nécessitent un grand nombre de mémoires. -utilisent un grand nombre d'opérations donc le temps de calcul est assez grand.
-récursifs	<ul style="list-style-type: none"> -nécessitent une capacité mémoire faible. -les calculs sont simple. 	<ul style="list-style-type: none"> -stabilité dépend de la position des pôles. -les erreurs de calcul se cumulent lors des étapes de calcul.
-technique de FOURIER	<ul style="list-style-type: none"> -travaille en passant dans le domaine fréquentiel. -ne présente pas de problème de stabilité. 	<ul style="list-style-type: none"> -traitement d'un nombre fini de valeurs.

II-I-6: SYNTHÈSE DES FILTRES NUMÉRIQUES:

a- Les filtres récurrents:

La synthèse des filtres numériques se déduit de son homologue analogique par transformation du plan P dans le plan Z par l'une des trois méthodes suivantes:

I- Transformation standard:

Appelé méthode de l'invariance impulsionnelle, elle est exprimée par la relation:

$$H(p) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{p - p_i} \quad , \quad H(z) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{1 - \exp(p_i T) z^{-1}}$$

Elle présente d'excellents résultats pour les filtres passe-bas et les filtres passe-bande lorsque la fréquence de coupure est inférieure à $1/2T$ avec T période d'échantillonnage du signal. [12]

2- Transformation bilinéaire:

Par cette transformation $H(z)$ est déduit de $H(p)$ en substituant à p , dans $H(p)$, l'expression:

$$\frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

On peut l'appliquer pour tous les filtres sauf pour le cas où on ne peut pas limiter les distorsions à l'échelle des fréquences. [12]

3- Transformation adaptée:

Dans le cas de cette transformation on obtient $H(z)$ à partir de $H(p)$ en substituant à $(p - p_i)$ dans $H(p)$, l'expression suivante:

$$(P - P_i) \longrightarrow 1 - z^{-1} \exp(P_i T)$$

Cette méthode donne un filtre numérique ayant les mêmes zéros et les mêmes pôles que ceux du filtre analogique; cela signifie que les deux filtres auront la même réponse en fréquence. Cette méthode donne de bons résultats dans le cas des filtres passe-bande ou passe bas. [12]

b-Les filtres non récurrents:

Nous donnerons dans cette partie, deux méthodes de synthèse des filtres non récurrents: [13]

I-Méthode des fenêtres:

A partir de la réponse impulsionnelle désirée, il convient de définir une troncature qui annule ses valeurs à l'extérieur d'une ouverture appelée fenêtre. La méthode des fenêtres ramène donc, une sommation infinie à une sommation finie.

Les fenêtres les plus utilisées sont:

a-Rectangulaire:

$$W(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \quad W(f) = T_0 \left(\frac{\sin \pi f T_0}{1 - (2fT_0)^2} \right)$$

Ses caractéristiques sont les suivantes:

- 1-Déformation des oscillations au voisinage de la discontinuité.
- 2-La période des oscillations est inversement proportionnelle à la largeur de la fenêtre.
- 3-Elle présente d'importantes résonances négatives.

b-Triangulaire:

$$W(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T_0/2} & |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$

$$W(f) = \frac{T_0}{2} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} f \cdot T_0}{\frac{\pi}{2} \cdot f \cdot T_0} \right)^2$$

La caractéristique principale de cette fenêtre est qu'elle fait disparaître les résonances négatives.

c-Fenêtre de HANING:

$$W(t) = \begin{cases} \cos^2 \frac{\pi t}{T_0} & |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$W(f) = \frac{T_0}{2} \cdot \frac{\sin \pi f \cdot T_0}{(\pi f T_0)(1 - (f T_0)^2)}$$

Ces principales caractéristiques sont:

-Elle maintient la région du zéro plate.

-Elle présente un lobe secondaire négatif assez important mais les autres lobes s'atténuent rapidement.

d-Fenêtre de HAMMING:

$$W(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi t}{T_0} & |t| \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$W(f) = \frac{(0.54\pi^2 - 0.08(\pi f T_0)^2) \sin \pi f T_0}{\pi f T_0 (\pi^2 - (\pi f T_0)^2)}$$

Son avantage par rapport à celle de HANING est le fait que son lobe secondaire s'atténue tandis que les autres lobes suivants s'atténuent lentement.

2-Méthode d'échantillonnage en fréquence:

Dans cette méthode, on choisit N points équidistants sur l'axe des fréquences dans l'intervalle $[-\frac{F_c}{2}, \frac{F_c}{2}]$ de façon à ce que ces points nous donnent une bonne approximation du filtre désiré. Cette méthode remédie bien au problème que pose la méthode des fenêtres, à savoir, importante ondulation dans la bande passante et atténuée et création d'une zone de transition c'est à dire que la pente n'est pas raide.

II-1-7 :STRUCTURES DES FILTRES NUMERIQUES:

A l'heure actuelle, on ne dispose pas d'une théorie générale qui permette, dans chaque cas particulier, d'établir une hiérarchie entre les diverses structures, et par là, de choisir la structure optimale.

nous sommes donc amenés, avant de choisir une structure, de considérer plusieurs points et contraintes que nous aurons à vérifier; en général le choix de la structure est basé sur:

- le type du signal à filtrer.
- le type de modification à apporter en cas de nécessité.
- le temps de calcul.
- la place mémoire.
- la précision des calculs.
- la stabilité.
- la facilité de mise en oeuvre.

Ainsi, nous remarquons que l'on a plusieurs paramètres sur lesquels nous devons se baser pour choisir la structure, et le meilleur moyen de vérifier la validité de notre structure, est de simuler la structure sur ordinateur et de faire des essais, avant de passer à la réalisation.

Les différentes structures qu'on utilise sont: [13]

a-La forme directe: cette forme nécessite un grand nombre d'éléments retard par conséquent, elle occupe un nombre d'espace mémoire important.

b-La forme canonique: la forme directe que nous venons de voir utilise plus d'éléments retards qu'il n'est nécessaire. On lui préfère la forme canonique, plus compacte, qui diminue le nombre d'informations à garder en mémoire.

c-La forme cascade: cette forme est générale si l'ordre est pair et si l'ordre du numérateur et du dénominateur sont égaux. Nous pouvons quand même utiliser cette formulation dans tous les cas en annulant un certain nombre de coefficients.

d-La forme parallèle:en général,elle est utilisé lorsque ,la fonction de transfert a son degré du numérateur supérieur au degré du dénominateur.

e-La forme couplée:elle se présente comme une combinaison des deux formes cascades et parallèle.

II-2: LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

II-2-1: Transformée de Fourier:

Le développement en série de Fourier d'un signal $x(t)$ périodique, de période T est:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \cdot \exp(-2\pi j n t / T) \quad (1)$$

avec:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot \exp(-j 2\pi n t / T) dt \quad (2)$$

Dans le cas des signaux non périodique, on parle de transformée de Fourier qui est définie par:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j 2\pi f t) df \quad (3)$$

avec:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j 2\pi f t) dt \quad (4)$$

II-2-2: Existence de la transformée de Fourier:

La transformée de Fourier $x(f)$ existe si l'intégrale de la relation (4) converge c'est à dire que:

$$|X(f)| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| |\exp(-j 2\pi f t)| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \quad (5)$$

Les signaux qui satisfont la condition (5) sont les signaux à énergie finie. [5]

Tout les signaux physiquement réalisable sont à énergie finie.

II-2-3: Relation de définition de la TFD:

Soient deux suites de nombres complexes $x(k)$ et $x(n)$ périodique de période N , les TFD directe et inverse sont définies par:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N}\right) \quad n=0, \dots, N-1 \quad (6)$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \cdot \exp\left(j2\pi \frac{nk}{N}\right) \quad k=0, \dots, N-1 \quad (7)$$

Nous posons: $W_N = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)$

Alors nous pouvons écrire:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{nk} \quad (8)$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{-nk} \quad (9)$$

II-2-4: Propriété de la TFD:

I-La linéarité:

Si l'on note par $x(k)$ et $y(k)$ deux suites de même période et par $X(n)$ et $Y(n)$ leur transformée respective, alors la TFD du signal:

$$z(k) = x(k) + \lambda y(k)$$

est donnée par:

$$Z(n) = X(n) + \lambda Y(n) \quad (10)$$

λ étant un scalaire.

2-Le décalage cyclique:

Le décalage de la suite périodique $x(k)$ de k_0 entraîne sur sa transformée $X(n)$ une rotation de phase d'un angle égal

à: $\left(2\pi \frac{nk_0}{N}\right)$

En effet la TFD de la suite $x(k-k_0)$ est donnée par:

$$X_{k_0}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k-k_0) \cdot \exp\left(-j2\pi \frac{kn}{N}\right)$$

$$X_{k_0}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k-k_0) \cdot \exp\left(-j2\pi \frac{(k-k_0)n}{N}\right) \cdot \exp\left(-j2\pi \frac{k_0n}{N}\right)$$

or
$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k-k_0) \cdot \exp\left(-j2\pi \frac{(k-k_0)n}{N}\right)$$

d'où:

$$X_{k_0}(n) = X(n) \cdot W_N^{k_0n} \quad (11)$$

3-La convolution circulaire:

Le produit de convolution de deux signaux périodiques réels $x(k)$ et $y(k)$ de période N est donnée par:

$$z(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cdot y(k-m). \quad (12)$$

La TFD de la relation (12) conduit à l'expression suivante:

$$Z(n) = X(n) \cdot Y(n) \quad (13)$$

Donc, la TFD d'un produit de convolution est égale au produit des TFD.

4-La corrélation:

En traitement des signaux, il est souvent nécessaire de comparer deux signaux. Ceci peut se faire de plusieurs manières. Une méthode possible, dont on fait grand usage, est de décaler l'un des signaux par rapport à l'autre, et de mesurer leur similitude en fonction du décalage.

La fonction d'intercorrélation de $x(k)$ et $y(k)$ est donnée par:

$$\varphi_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cdot y(m+k). \quad (14)$$

La TFD de la relation (14) est donnée par:

$$\Phi_{xy}(n) = \frac{1}{N} \cdot X^*(n) \cdot Y(n). \quad (15)$$

5-Propriété de W_N :

-séparabilité: $W_N^{k+1} = W_N^k \cdot W_N^1$

-périodicité: $W_N^{k+1N} = W_N^k$

-Pour tout entier l nous avons:

$$W_N^{lN} = -W_N^{lN/2} = 1$$

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

$$W_N^2 = W_{N/2}$$

Nous pouvons détailler la relation (8) sous une forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) \\ \mathbf{X}(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{X}(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & & W \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & W & & W \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x(k-1) \end{bmatrix}$$

Soit $\vec{X}(n) = [W_N] \cdot \vec{x}(k)$ où $[W_N]$ est une matrice carrée d'ordre N qui présente des particularités très importantes permettant une décomposition en sous matrice, ce qui conduit à des algorithmes de calcul rapide, l'ensemble de ces algorithmes est appelé FFT en terme anglais : Fast Fourier Transform

II-2-5: Couplage de deux TFD:

Si l'on note par $x(k)$ et $y(k)$ deux suites périodiques réelles, de même période N et par $X(n)$ et $Y(n)$ leur TFD respectives, alors nous avons : [6]

$$X(n) = A_x(n) + j B_x(n)$$

$$Y(n) = A_y(n) + j B_y(n)$$

nous posons:
$$z(k) = x(k) + j y(k)$$

Cette suite complexe étant périodique et ayant pour TFD $Z(n)$ telle que:

$$Z(n) = A(n) + j B(n)$$

$$Z(n) = X(n) + j Y(n)$$

$$Z(n) = A_x(n) + j B_x(n) + j(A_y(n) + j B_y(n))$$

d'où

$$A(n) = A_x(n) - B_y(n)$$

$$B(n) = A_y(n) + B_x(n)$$

Nous remplaçons n par $N-n$ et vu la propriété de symétrie de la TFD nous obtenons:

$$A(N-n) = A_x(n) + B_y(n)$$

$$B(N-n) = A_y(n) - B_x(n)$$

En combinant les 4 relations (18)-(21), nous obtenons les TFD

des deux suites réelles $x(k)$ et $y(k)$:

$$A_x(n) = \frac{1}{2} (A(n) + A(N-n))$$

$$A_y(n) = \frac{1}{2} (B(n) + B(N-n))$$

$$B_x(n) = \frac{1}{2} (B(n) - B(N-n))$$

$$B_y(n) = \frac{1}{2} (A(N-n) - A(n))$$

Nous signalons que cette méthode a été utilisée pour l'élaboration du programme de ~~X~~ l'analyse spectrale par FFT couplée.

II-3: TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE (FFT)

II-3-1: Introduction:

La plupart des applications de traitement numérique du signal conduisent à des charges de calcul importante, particulièrement en ce qui concerne l'analyse spectrale et l'évaluation de processus de filtrage, convolution et corrélation. Un effort important a donc été entrepris au cours de ces dernières années pour réduire la complexité du calcul des TFD en vue de réduire le coût de l'analyse numérique et de simplifier le calcul des convolutions et corrélations.

La FFT est un ensemble de méthodes (algorithmes) permettant d'accélérer le calcul de N coefficients complexes de FOURIER à partir de N échantillons équidistants d'une fonction du temps périodique; si la fonction n'est pas périodique, nous la rendons périodique, en lui donnant une période devant l'intervalle de temps où elle prend des valeurs d'amplitude non négligeables.

Le choix du nombre d'échantillons N comme étant une puissance d'une base B ($N=B^n$), réduit considérablement le nombre d'opérations et le cas le plus intéressant est celui où N est une puissance de deux (2) c'est à dire $N=2^n$ car il conduit à des algorithmes particulièrement simple à programmer, ces algorithmes sont basés sur une décomposition de la suite à transformer en sous suites entrelacées. En général, il existe deux manières de formuler la FFT :

- soit une FFT avec entrelacement temporel.
- soit une FFT avec entrelacement fréquentiel.

II-3-2: FFT avec entrelacement temporel:

On décompose la suite $x(k)$ à transformer en deux suites entrelacées, celles des éléments d'indice paire et celle des éléments d'indice impaire. l'expression mathématiques de la TFD s'écrit:

$$X(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) W_N^{2in} + \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) W_N^{(2i+1)n} \quad (26)$$

avec : $n=0, \dots, N-1$

en utilisant la propriété: $W_N^2 = W_{N/2}$ nous aurons:

$$X(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) \cdot W_{N/2}^{in} + W_N^{+n} \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) \cdot W_{N/2}^{in} \quad (27)$$

Chacune des sommes est une TFD d'ordre $N/2$, donc périodique de ce fait il apparaît que le calcul $x(n)$ et $x(n+N/2)$ pour $0 \leq n \leq N/2-1$ met en oeuvre le même calcul avec seulement un changement de signe.

posons:

$$X_1(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) W_{N/2}^{in} ; \quad X_2(n) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) W_{N/2}^{in}$$

nous aurons:

$$X(n) = X_1(n) + W_N^{+n} \cdot X_2(n) \quad (28)$$

$$X(n + \frac{N}{2}) = X_1(n) - W_N^{+n} X_2(n) \quad (29)$$

avec: $n=0, \dots, N/2-1$

d'où le diagramme de fluence correspondant, fig (II-3-1)

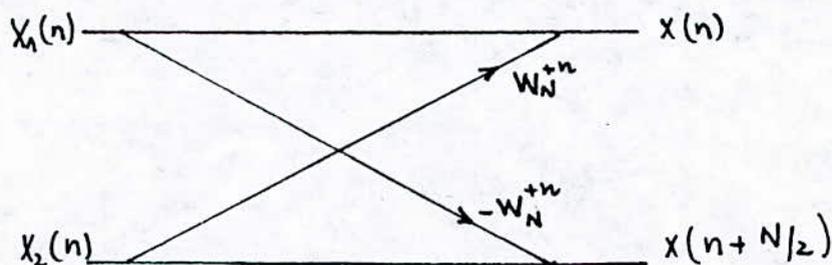


figure (II-3-1): Diagramme de fluence

Puisque N est une puissance de 2, nous pouvons continuer la décomposition des TFD obtenues par une décomposition précédente jusqu'à ce que l'on obtienne des TFD d'ordre 2.

Les graphes de fluence, pour $N=8$ correspondant aux relations (28) et (29) réalisés par FFT à entrelacement temporel sont donnés par la figure (II-3-2)

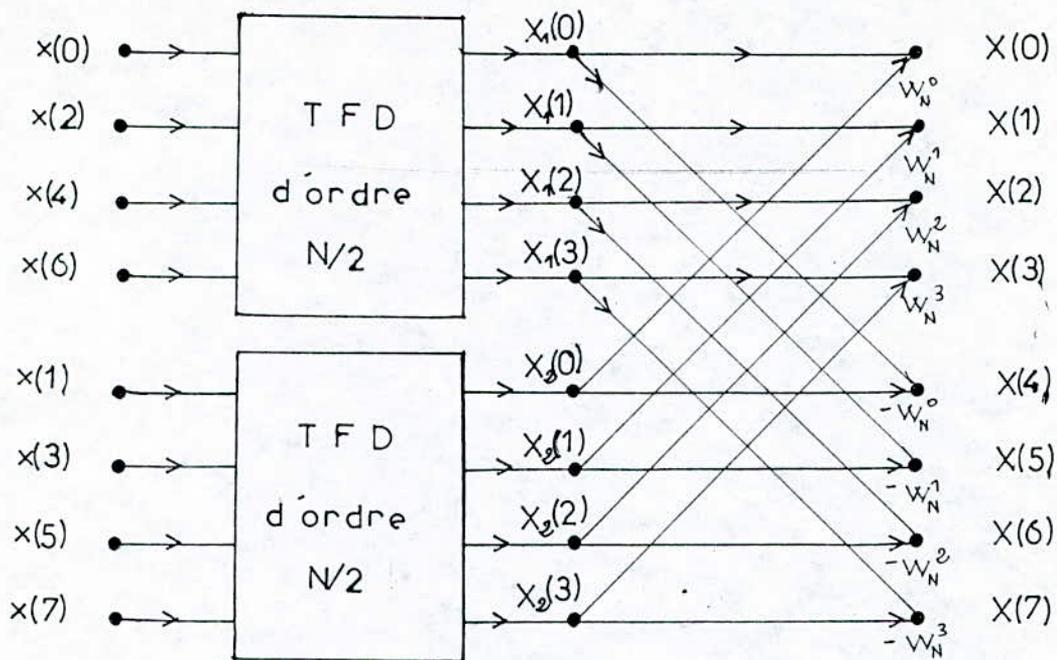


Fig. II.3.2. graphe de fluence partiel

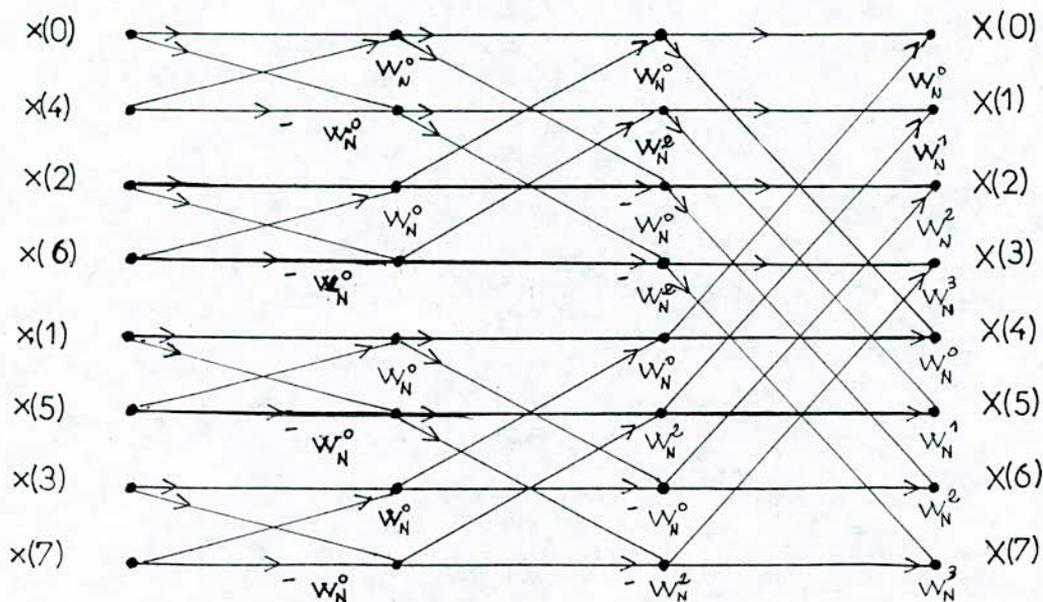


Fig. II.3.3. graphe de fluence complet

D'après la figure (II.3.3), nous remarquons que les coefficients de la transformée de Fourier $X(n)$ sont obtenus dans l'ordre naturel si les échantillons d'entrées $x(k)$ sont permutés. Cette permutation correspond à une inversion des nombres $0, 1, \dots, N$ écrit en binaire: par exemple à 6 (110) correspond 3 (011), cette permutation est désignée par inversion binaire.

II-3-3: FFT avec entrelacement fréquentiel:

Nous décomposons la suite $X(n)$ en deux suites entrelacées celle d'indice paire et celle d'indice impaire, alors nous pouvons écrire:

$$X(2i) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot W_N^{2ik} \quad (30)$$

$$X(2i+1) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot W_N^{(2i+1)k} \quad (31)$$

avec: $i=0, \dots, N/2-1$

en utilisant les propriétés de W_N , nous aurons:

$$X(2i) = \sum_{k=0}^{N/2-1} \left(x(k) + x\left(k + \frac{N}{2}\right) \right) W_{N/2}^{ik} \quad (32)$$

$$X(2i+1) = \sum_{k=0}^{N/2-1} \left(\left(x(k) - x\left(k + \frac{N}{2}\right) \right) W_N^{+k} \right) W_{N/2}^{ik} \quad (33)$$

avec: $i=0, \dots, N/2-1$

posons:
$$x_1(k) = x(k) + x\left(k + \frac{N}{2}\right) \quad (34)$$

$$x_2(k) = \left(x(k) - x\left(k + \frac{N}{2}\right) \right) W_N^k \quad (35)$$

pour:

Le graphe de fluence correspondant aux relations (34) et (35) est présenté par la figure (II.3.4).

Comme pour la FFT à entrelacement temporel, en continuant la décomposition, nous aboutissons à des TFD d'ordre deux.

Le graphe de fluence correspondant aux relations (32) et (33) est donné par la figure (II.3.5) pour $N=8$.

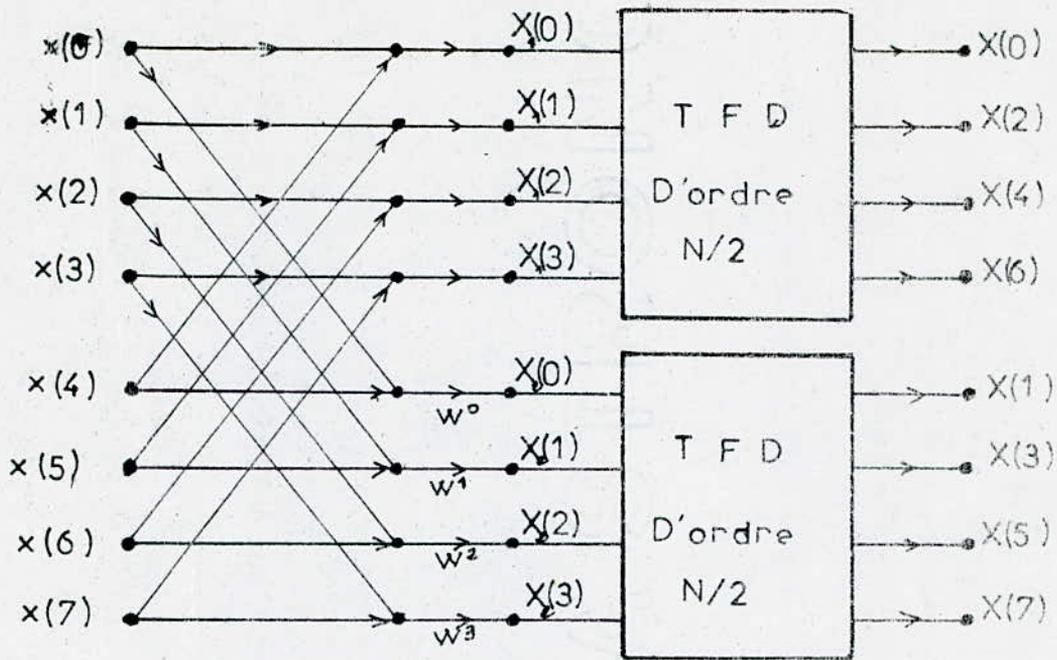


Fig. II.34. graphe de fluence partiel

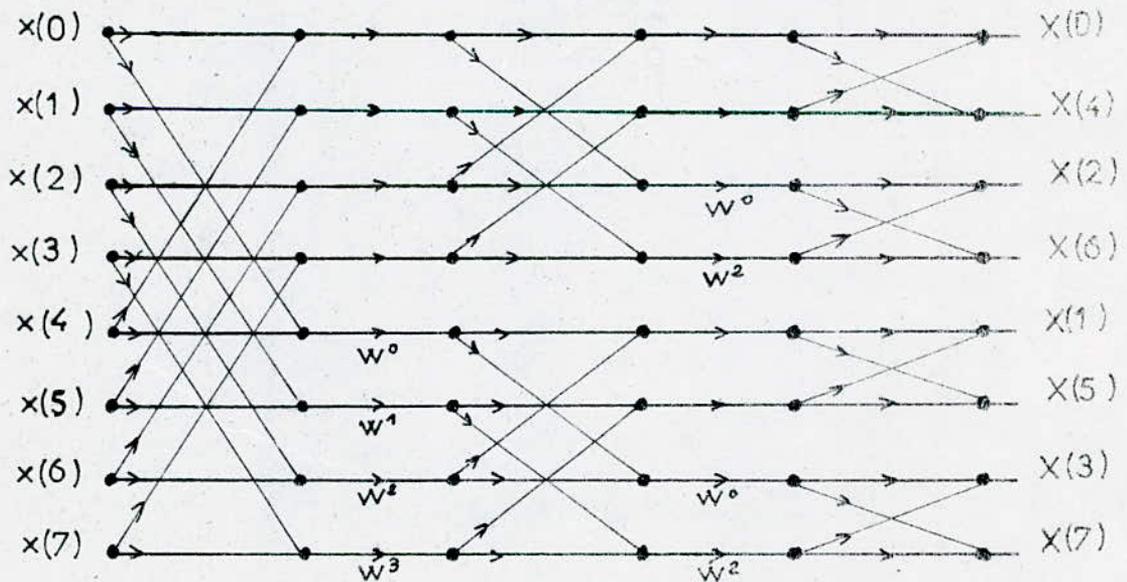


Fig. II.35. graphe de fluence global

II-3: ANALYSE SPECTRALE

II-3-1: Introduction:

Le signal EEG est considéré comme étant un signal aléatoire c'est ce qui a amené les spécialistes à appliquer à ce signal les méthodes d'analyse spectrale des signaux aléatoires, qui est avant tout, un problème d'estimation.

Les méthodes classiques d'estimation de la densité spectrale sont:

-le filtrage.

-La transformée de FOURIER directe.

-La transformée de FOURIER de la fonction de corrélation .

Les procédés de corrélation ont été très utilisés, pour mettre en évidence les activités périodique du signal EEG, soit directement, soit par transformation de FOURIER de la fonction d'autocorrélation; on utilise aussi la fonction d'intercorrélation entre différents relevés d'EEG relatifs à différentes parties du cerveau pour en tirer les renseignements sur l'organisation interne du cerveau. [7]

Il faut aussi noter l'importance accordée aux fonctions de cohérence et de déphasage recueillis par les différentes paires d'électrodes.

II-3-2: Analyse spectrale par FFT:

1-Fonction d'autocorrélation:

La fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire stationnaire est définie par l'espérance mathématique suivante:

$$\varphi_x(k) = E [x(1) \cdot x(k+1)]$$

pour un signal aléatoire stationnaire et ergodique, nous avons:

$$\varphi_x(k) = \overline{x(1) \cdot x(k+1)}$$

2-Fonction d'intercorrélation:

La fonction d'intercorrélation de deux signaux aléatoire $x(k)$ et $y(k)$ est définie par :

$$\varphi_{xy}(k) = E [x(l).y(l+k)] = \overline{x(l).y(l+k)} \quad (3)$$

3-Eléments de la théorie de l'estimation:

La théorie de l'estimation est la base de l'analyse spectrale numérique des signaux aléatoires, pour cela il nous semble très important de donner quelques définitions de base sur les estimateur

Pour pouvoir comparer deux estimateurs ,on utilise souvent deux grandeurs:le biais et la variance.

a-Biais d'un estimateur:

C'est la différence entre son espérance mathématique et la vraie valeur cherchée:

$$B_{\hat{\alpha}} = E [\hat{\alpha}] - \alpha$$

où $\hat{\alpha}$ est l'estimateur d'un parametre α d'un processus aléatoire. Si le biais est nul, l'estimateur est dit non biaisé.

b-Variance d'un estimateur:

C'est une mesure de l'étendue de la densité de probabilité de l'estimation .Elle est définie par:

$$\text{Var} [\hat{\alpha}] = E [(\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha}))^2] = \sigma_{\hat{\alpha}}^2$$

Un estimateur satisfaisant doit posséder un biais et une variance aussi petit que possible.

4-Estimateur de la fonction de corrélation:

L'estimateur que l'on utilise très souvent est donné par:

$$C_x(k) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-|k|-1} x(l).x(l+k) \quad (4)$$

où k représente le nombre d'échantillons $x(k)$

Nous pouvons montrer que le biais et la variance de cet estimateur tend vers zéro quand k tend vers l'infini, donc cet estimateur est consistant. [5]

5-Densité spectrale de puissance:

D'après le théorème de WIENER-KINCHINE, la densité spectrale est définie comme étant la transformée de FOURIER de la fonction d'autocorrélation:

$$S_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_x(k) \exp(-j2\pi f \cdot k) \quad (5)$$

La densité interspectrale est donnée par:

$$S_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{xy}(k) \cdot \exp(-j2\pi f \cdot k) \quad (6)$$

6-Les estimateurs spectraux:

a-L'estimateur simple:

C'est la transformée de fourier de l'estimateur de la fonction de corrélation:

$$S_x(f) = \sum_{k=-(k-1)}^{k-1} C_x(k) \cdot \exp(-j2\pi f \cdot k)$$

où encore:
$$S_x(f) = \frac{1}{k} \left| \sum_{k=0}^{k-1} x(k) \cdot \exp(-j2\pi f \cdot k) \right|^2$$

Nous pouvons montrer que la variance de cet estimateur ne dépend pas de la durée d'observation k , donc il n'est pas consistant; c'est pour cela qu'il a fallu établir d'autres estimateurs.

b-L'estimateur moyenné:

Dans ce cas nous calculons une moyenne sur plusieurs estimateurs indépendants.

Nous divisons la durée d'observation k en l sections $x_l(k)$ de durée M :

$$S_{x_l}(f) = \frac{1}{M} \left| \sum_{k=0}^{M-1} x_l(k) \cdot \exp(-j2\pi f k) \right|^2 \quad (8)$$

avec : $l=1, \dots, L$

L'estimateur moyenné sera alors:

$$\overline{S_x}(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L S_{x_l}(f) \quad (9)$$

c-L'estimateur adouci:

Il s'agit de réaliser un filtrage fréquentiel, c'est à dire que le signal $S_x(f)$ obtenu par la relation (7) est filtré par un filtre dont la réponse impulsionnelle est $W(f)$:

$$\overline{S_x}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(g) \cdot W(f-g) dg$$

L'estimateur adouci est considéré comme étant la transformée de fourier du produit de l'estimateur $C_x(k)$ par une fenêtre $W(k)$ de durée finie $2M-1$. Nous aurons:

$$\widetilde{S_x}(f) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} W(k) \cdot C_x(k) \cdot \exp(-j2\pi f k).$$

d-L'estimateur modifié:

C'est la combinaison des deux estimateurs précédent. Nous divisons la durée d'observation k en L section de durée M et nous multiplions chaque section par une fenêtre $W(k)$ puis nous calculons l'estimateur simple pour chaque section qui est donné par:

$$S_{x_l}(f) = \frac{1}{M \cdot P} \left| \sum_{k=0}^{M-1} x_l(k) \cdot W(k) \cdot \exp(-j2\pi f k) \right|^2$$

avec $l=1, \dots, L$ et $P = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W^2(k)$

P est appelé facteur de normalisation.

L'estimateur s'exprime par:

$$\overline{S_x}(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L S_{x_l}(f).$$

7-L'estimateur de la densité interspectrale:

Nous allons donner dans cette partie les différents estimateurs interspectraux:

a-L'estimateur simple:

C'est la transformée de fourier de l'estimateur $C_{xy}(k)$ de l'intercorrélacion:

$$S_{xy}(f) = \sum_{k=-(K-1)}^{K-1} C_{xy}(k) \cdot \exp(-j2\pi f \cdot k)$$

b-L'estimateur interspectrale moyenné est:

$$\bar{S}_{xy}(f) = \sum_{k=-(K-1)}^{K-1} C_{xy}(k) \exp(-j2\pi f \cdot k)$$

c-L'estimateur interspectral adouci est:

$$S_{xy}(f) = \sum_{k=-(K-1)}^{K-1} W(k) \cdot C_{xy}(k) \exp(-j2\pi f \cdot k)$$

d-L'estimateur interspectral modifié est:

$$S_{xy_e}(f) = \frac{1}{MP} \left(\sum_{k=0}^{M-1} x_e(k) \cdot W(k) \exp(2\pi j f \cdot k) \right) \left(\sum_{k=0}^{M-1} y_e(k) \cdot W(k) \cdot \exp(2\pi j f k) \right)$$

$$P = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W^2(k)$$

$$S_{xy}(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L S_{xy_e}(f)$$

8-Fonction de cohérence:

La fonction de cohérence entre deux signaux $x(k)$ et $y(k)$ est définie par:

$$\Gamma_{xy}(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_x(f) \cdot S_y(f)}$$

La fonction de cohérence permet de définir la bande de fréquence dans laquelle les phénomènes que représentent $x(k)$ et $y(k)$ échangent de l'information.

9-Le déphasage:

La fonction de déphasage $\phi_{xy}(f)$ est définie comme étant la phase de la densité interspectrale:

$$\phi_{xy}(f) = \text{Arg} (S_{xy}(f))$$

II-3-3 : Analyse spectrale par filtrage

1-Principe de mesure de la densité spectrale:

Considérant un filtre passe bande H (supposé idéal) centré sur la fréquence f_0 et de largeur de bande Δf , et notons par $x_H(k)$ la sortie de ce filtre.

La puissance moyenne de $x_H(k)$ sera:

$$P_{\text{moy}} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=-\frac{K}{2}}^{+\frac{K}{2}} |x_H(k)|^2 \quad (1)$$

où K est la durée d'observation du signal d'entrée $x(k)$.

Si l'on note par $S_x(f)$ la puissance du signal $x(k)$ en fonction de la fréquence, l'énergie dans la bande Δf autour de f_0 est:

$$E(f, \Delta f) = \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_x(f) \cdot df \quad (2)$$

Les quantités définies en (1) et (2) exprime la puissance d'un même signal, donc:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=-\frac{K}{2}}^{+\frac{K}{2}} |x_H(k)|^2 = \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_x(f) df \quad (3)$$

Nous pouvons montrer que la quantité $S_x(f)$ définit bien la densité spectrale, c'est à dire la transformée de Fourier de la fonction de corrélation.

La densité spectrale étant définie comme la puissance dans une bande $\pm \frac{\Delta f}{2}$ autour de f_0 en faisant tendre Δf vers zéro, mais cette quantité n'est pas accessible.

Mais nous pouvons mesurer la puissance d'un signal transmis par un filtre de largeur spectrale Δf .

$$S_x(f_0, \Delta f) = \frac{1}{\Delta f} \int_{f_0 - \frac{\Delta f}{2}}^{f_0 + \frac{\Delta f}{2}} S_x(f) \cdot df. \quad (4)$$

Nous obtenons ainsi une estimation de la densité spectrale, et la relation (4) montre qu'il y a un biais, car $S_x(f_0, \Delta f)$ ne serait égale à $S_x(f)$ que pour Δf infiniment petit.

En répétant cette opération de filtrage et en mesurant la puissance pour différentes valeurs de la fréquence centrale du filtre $f_1, \dots, f_k, \dots, f_N$ nous obtiendrons N points de la densité spectrale. En fait tout se passe comme si $S_x(f)$ était échantillonnés.

2- Analyse spectrale par filtrage:

Elle apparait comme la plus naturelle, la plus intuitive mais laisse apparaitre des difficultés.

Soit un signal $x(k)$ filtré par un filtre de réponse impulsionnelle $h(k)$ et de gain complexe $H(f)$.

Soit $x_H(k)$ la sortie de ce filtre:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} |x_H(k)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \cdot |H(f)|^2 df.$$

Du fait que $h(k)$ est réelle, $H(f)$ sera à symétrie hermitique c'est à dire :

$$|H(f)| = |H(-f)|$$

$$\varphi(f) = -\varphi(-f)$$

ou $\varphi(f)$ est la phase de $H(f)$.

Si l'on suppose que le filtre est centrée sur f_i et de largeur Δf alors $|H(f)|$ sera:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & -f_i - \frac{\Delta f}{2} \leq f \leq -f_i + \frac{\Delta f}{2} \text{ et } f_i - \frac{\Delta f}{2} \leq f \leq f_i + \frac{\Delta f}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

donc:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) \cdot |H(f)|^2 df = \int_{-f_i - \frac{\Delta f}{2}}^{f_i + \frac{\Delta f}{2}} S_x(f) df + \int_{f_i - \frac{\Delta f}{2}}^{f_i + \frac{\Delta f}{2}} S_x(f) df.$$

or $S_x(f)$ est la densité, c'est à dire la transformée de Fourier de la fonction de corrélation qui est, elle, réelle (puisque le signal $x(k)$ est réel) donc $S_x(f)$ est pair, nous aurons:

$$\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} |x_H(k)|^2 = 2 \int_{f_i - \frac{\Delta f}{2}}^{f_i + \frac{\Delta f}{2}} S_x(f) \cdot df = 2 S_x(f_i, \Delta f)$$

Nous obtenons donc bien, en faisant la moyenne des carrés du signal de sortie du filtre, l'énergie totale dans la bande $f_i \pm \frac{\Delta f}{2}$. Le schéma synoptique est représenté par la figure (II.3.6).

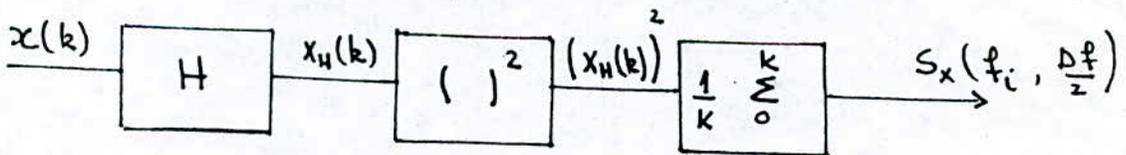


figure (II-3-6): schéma synoptique

Si nous voulons avoir N points sur le spectre $S_x(f)$ qui est obtenu sous la forme échantillonné, il suffit de réaliser N filtre adjacents de largeur Δf rigoureusement égales et de fréquences centrales f_1, \dots, f_N , les gains de tous ces filtres sont égaux.

3-Mesure de l'interspectre:

Ce dispositif à filtrage présente de très gros inconvénients dès lors que l'on veut mesurer des interspectres car il est alors nécessaire de doubler une importante partie de ce dispositif.

La densité interspectrale est généralement complexe donc il faut mesurer la partie réelle, puis la partie imaginaire, ceci devient très compliqué. Nous présenterons la méthode de mesure de l'interspectre en annexe A .

CHAPITRE : 3

Choix des méthodes de traitement

III-1: ANALYSE SPECTRALE PAR FILTRAGE NUMERIQUE:

A l'instar des signaux analogiques, les signaux numériques sont décrit soit dans le domaine temporel, soit dans celui des fréquences, ainsi, l'étude d'un système ne sera complète que si nous avons sa description temporelle et fréquentielle, dont chacune d'elle nous permet d'obtenir des renseignements différents de l'autre. L'analyse spectrale d'un signal est un moyen d'effectuer ce passage; plusieurs techniques sont mises à notre disposition pour pouvoir obtenir le spectre fréquentiel, mais chaque technique a ses avantages comme elle a ses inconvénients, et la première méthode que nous allons traiter est basée essentiellement sur les filtres numériques.

III-1-1: Description de la méthode:

Fréquemment, il est difficile de réaliser un analyseur de spectre directement par FFT à cause de la limitation des cases mémoires; dans plusieurs cas, elle peut être réalisée par filtrage numérique par la sélection de bande de fréquence. Dans cette section, nous considérons un analyseur de spectre qui peut être réalisé par assemblage de plusieurs filtres identiques passe bande, ces filtres sont du type récursifs réalisés à partir des filtres de Butterworth à 4 pôles qui sont une bonne approximation des filtres idéaux, leurs caractéristiques d'amplitude en fréquence sont très plates dans la bande passante. Leur structure peut être soit sous la forme cascade ou, parallèle, que nous obtenons à partir des équations linéaires aux différences. Le schéma bloc de cet analyseur de spectre est donné par la figure (III-1.1)

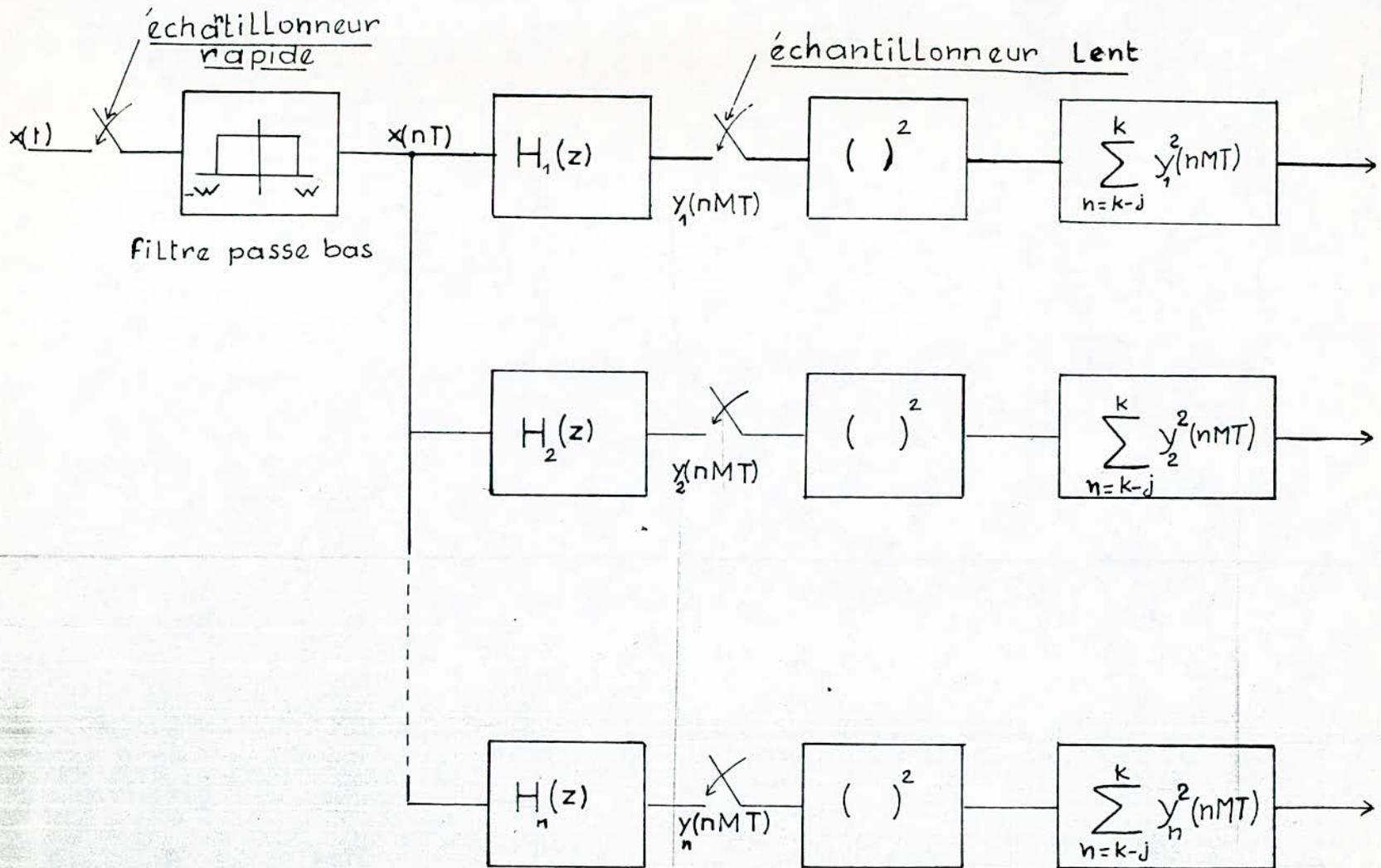


Fig.III.1.1. Synoptique d'un analyseur de spectre par filtrage numérique

L'échantillonneur rapide nous permet de faire une conversion en digital et d'opérer à raison de $2W$ ou plus échantillons par seconde (théorème de Shanon et Nyquist). L'échantillonneur lent peut être toléré à cause de la réduction de la bande de fréquence des filtres passe bande.

Il apparait que la somme est directement proportionnelle à la valeur du spectre dans la bande de fréquence qui passe dans chaque filtre à bande réduite correspondante. Ainsi, la sortie finale de chaque étage de l'analyseur de spectre est une estimation du spectre de fréquence localisé à la fréquence centrale du filtre à bande étroite. [7]

Le i^{eme} filtre laisse passer une bande de fréquence comprise entre $\frac{W}{M}(i-1)$ et $\frac{W}{M}i$ Hertz ($i=1,2,\dots,M$) ou W est la bande totale de l'analyseur de spectre numérique et M le nombre de filtres utilisés. Pour des raisons de simplicité, nous utilisons les filtres de Butterworth à 4 pôles; ces filtres sont relativement insensible aux imprécisions des coefficients, surtout s'ils sont réalisés par la mise en cascade de 2 filtres du 2^{eme} ordre bien que la réalisation parallèle est aussi possible. [8]

III-1-2: Localisation des pôles dans le plan S et le plan Z :

Partant de la fonction de transfert analogique du filtre de Butterworth d'ordre 2, nous allons déterminer les expressions permettant de localiser les pôles des filtres passe bandes.

Démonstration analytique:

La bande passante de chaque filtre passe bande étant W/M , les fréquences de coupures hautes et basses sont respectivement (f_H et f_B); pour le i^{eme} filtre nous avons:

$$w_H = \frac{W \cdot i}{M} \quad , \quad w_B = \frac{W \cdot (i-1)}{M}$$

La fréquence centrale du i^{eme} filtre est donnée par:

$$\beta_i = \frac{W(2i-1)}{2M}$$

Le filtre analogique correspondant à pour fréquence de coupure:

$$W_{HA} = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{W_{HT}}{2} \right) = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{W \cdot T i}{2M} \right)$$

Si nous prenons $T = \frac{1}{4 \cdot W}$, nous aurons:

$$W_{HA} = 8W \operatorname{tg} \left(\frac{i}{8M} \right) \quad ; \quad W_{BA} = 8W \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{i-1}{8M} \right)$$

La fonction de transfert analogique du filtre passe bas de Butterworth d'ordre 2 est exprimée par:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2 \cos \frac{\pi}{4} s + 1}$$

Le passage à un passe bande s'effectue en substituant à s dans $H(s)$, l'expression:

$$\frac{s^2 + W_{HA} \cdot W_{BA}}{s(W_{HA} - W_{BA})}$$

Calcul des pôles du filtre passe bas analogique:

$$s^2 + 2 \cos \frac{\pi}{4} s + 1 = 0$$

$$\Delta' = \cos^2 \frac{\pi}{4} - 1 = -\sin^2 \frac{\pi}{4}$$

d'où: $s_i = -\cos \frac{\pi}{4} \mp j \sin \frac{\pi}{4}$ avec $i=1,2$

Les pôles correspondant à un filtre passe bande:

$$s_1 = -\cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4}$$

$$s^2 + W_H W_B = (-W_H - W_B) \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$s^2 + (W_H - W_B) \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) s + W_H W_B = 0$$

$$\Delta = - (W_H - W_B)^2 - 4 (W_H W_B)^2 = - (W_H + W_B)^2$$

$$s_{1,2} = - \left(\frac{W_H - W_B}{2} \right) \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) \mp j \left(\frac{W_H + W_B}{2} \right)$$

$$s_{1,2} = - \left(\frac{W_H - W_B}{2} \right) \cos \frac{\pi}{4} + j \left[- \left(\frac{W_H - W_B}{2} \right) \sin \frac{\pi}{4} \mp \frac{W_H + W_B}{2} \right]$$

d'où:
$$s_{1,2} = - \left(\frac{W_H - W_B}{2} \right) \cos \frac{\pi}{4} - j \left(\frac{W_H - W_B}{2} \right) \sin \frac{\pi}{4} \mp j \frac{W_H + W_B}{2}$$

posons :
$$\alpha = \frac{W_H - W_B}{2}$$

et
$$\beta_i = \frac{W_H + W_B}{2}$$

Ainsi, nous obtenons l'expression des pôles pour les différents filtres passe bande:

$$s_{1i} = -\alpha \cos 45^\circ + j (\beta_i + \alpha \sin 45^\circ)$$

$$s_{2i} = -\alpha \cos 45^\circ + j (\beta_i - \alpha \sin 45^\circ)$$

ou α représente la moitié de la bande passante à 3dB, et β_i représente la fréquence centrale du filtre.

En remplaçant α et β_i par leurs expressions nous aboutissons à:

$$s_{1i} = -\frac{2\pi W}{2M} \cos 45^\circ + j \left[\frac{2\pi W}{M} (i-1/2) + \frac{2\pi W}{2M} \sin 45^\circ \right]$$

$$s_{2i} = -\frac{2\pi W}{2M} \cos 45^\circ + j \left[\frac{2\pi W}{M} (i-1/2) - \frac{2\pi W}{2M} \sin 45^\circ \right]$$

avec: $i=2,3,\dots,M$

Pour passer du plan S au plan Z, nous appliquons la transformation directe :

$$z_{ji} = \exp(s_{ij} \cdot T)$$

avec $j=1,2$

$i=2,\dots,M$

D'une façon analogue, nous pouvons localiser les zéros et nous remarquons qu'ils sont indépendant de i , c'est à dire que tout les filtres passe bande ont les mêmes zéros; d'où l'expression de la fonction de transfert dans le plan Z:

$$H_i(z) = b_{0i} \frac{z^2 (z-1)(z+1)}{(z-z_{1i})(z-z_{1i}^*)(z-z_{2i})(z-z_{2i}^*)}$$

$$H_i(z) = b_{0i} \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1+b_{1i}z^{-1}+b_{2i}z^{-2})(1+b_{3i}z^{-1}+b_{4i}z^{-2})}$$

avec

$$b_{1i} = -(z_{1i} + z_{1i}^*)$$

$$b_{2i} = |z_{1i}|^2$$

$$b_{3i} = -(z_{2i} + z_{2i}^*)$$

$$b_{4i} = |z_{2i}|^2$$

$$b_{0i} = \frac{1}{|H(z)| \Big|_{z=e^{j\beta_i T}}}$$

En utilisant la structure cascade, figure (III.1.2), nous aboutissons aux équations aux différences suivantes:

$$f_1(nT) = x(nT) - x(nT - 2T)$$

$$f_{2i}(nT) = f_1(nT) - b_{1i} f_{2i}(nT - T) + b_{2i} f_{2i}(nT - 2T)$$

$$f_{3i}(nT) = f_{2i}(nT) - b_{3i} f_{3i}(nT - T) - b_{4i} f_{3i}(nT - 2T)$$

$$y(nT) = b_{0i} \cdot f_{3i}(nT)$$

avec $i=2, \dots, M$

Toute l'étude que nous venons de faire faisait varier i de 2 à M et ceci, parce que le premier filtre correspondant à $i=1$ est pris non pas comme un filtre passe bande, mais un filtre passe bas; et nous pouvons le montrer comme pour les autres filtres passe bande que la position des pôles dans le plan S est donnée par:

$$s_{11} = - \frac{2\pi W}{M} \cos 67.5^\circ + j \frac{2\pi W}{M} \sin 67.5^\circ$$

$$s_{21} = - \frac{2\pi W}{M} \cos 22.5^\circ + j \frac{2\pi W}{M} \sin 22.5^\circ$$

Leur positions dans le plan Z est obtenue par la transformation

$$z_{j1} = \exp(s_{j1}T) \quad \text{avec } j=1, 2$$

la fonction de transfert correspondante s'exprime par :

$$H_1(z) = b_{0i} \frac{z^2}{(z - z_{11})(z - z_{11}^*)(z - z_{21})(z - z_{21}^*)}$$

$$H_1(z) = b_{0i} \frac{z^{-2}}{(1 - b_{11}z^{-1} + b_{21}z^{-2})(1 + b_{31}z^{-1} + b_{41}z^{-2})}$$

avec :

$$b_{01} = \frac{1}{|H(z)|_{z=1}}$$

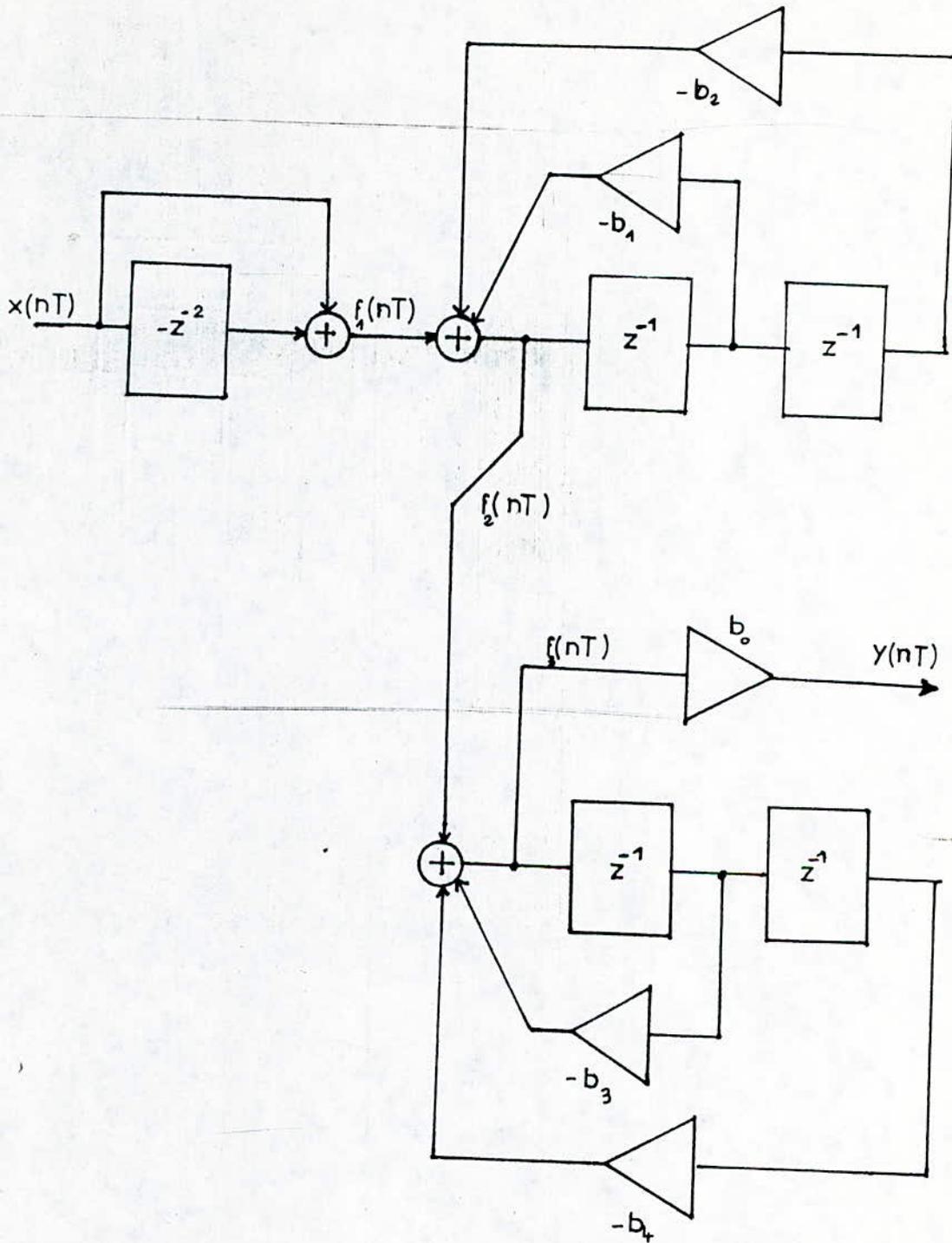


Fig.III.12. Réalisation cascade d'un filtre passe bande de Butterworth à 4 poles

Les autres b_{ij} s'expriment de la même façon que pour les filtres passe bande.

Les équations aux différences déduites de la fonction de transfert sont données par:

$$f_{21}(nT) = x(nT) - b_{11} f_{21}(nT - T) - b_{21} f_{21}(nT - 2T)$$

$$f_{31}(nT) = f_{21}(nT) - b_{31} f_{31}(nT - T) - b_{41} f_{31}(nT - 2T)$$

$$y(nT) = b_{01} \cdot f_{31}(nT)$$

III-1-3/ Choix du nombre de filtre passe bande:

La largeur de la bande du signal EEG que nous aurons à analyser est de 75 Hz, nous devons choisir un nombre de filtres selectifs, suffisant pour couvrir toute la gamme de fréquence du signal, ce choix ne se fait pas d'une manière aléatoire mais doit être choisit de façon à réaliser un compromis qui se présente comme suit:

1-Si le nombre de filtre est grand, nous aurons une meilleur estimation de la densité spectrale, mais du fait que les filtres utilisés ne sont pas idéaux, il y'aura un dédoublement de raies provoqué par la détection de la même fréquence par deux filtres adjacents; et de plus le temps de calcul devient important.

2-Si nous avons un nombre de filtres réduit, la largeur de chaque filtre selectif sera grande, et comme nous avons fait l'estimation que la densité spectrale du signal recueillis à la sortie de chaque filtre est centré au milieu de sa bande passante, ceci aura pour effet d'introduire des erreurs d'estimation donc le spectre obtenu ne sera pas conforme au spectre réel.

EN tenant compte de ces deux contraintes, et en se basant sur notre application qui consiste à detecter les raies du signal

EEG dont chaque rythme a une fréquence variable sur un intervalle d'au moins égale à 3 Hz, nous avons choisis un nombre de filtre $M=30$, qui fera correspondre à chacun de ces filtres une bande passante de 2.5 Hz.

III-1-4/ Choix du filtre passe bas:

Pour ne laisser passer que la bande du signal désirée, avec le minimum d'ondulation dans la bande passante et la bande atténuée et une bonne raideur au niveau de la transition, nous avons placé un filtre passe bas à l'entrée du système qui ne laisse passer que la gamme de fréquence du signal à analyser.

Différentes méthodes existent pour synthétiser un filtre passe bas (chapitre II-1), ainsi nous pouvons le réaliser soit à l'aide des filtres récursifs ou non récursifs, mais le problème que pose les réalisations récursives réside dans le fait que leur stabilité est affectée et la linéarité de la phase n'est pas assurée; un problème qui ne se pose pas pour les réalisations non récursives que nous avons adopté pour la conception du filtre en question.

1-Spécifications du filtre passe bas:

Le filtre que nous allons synthétiser doit avoir une bande passante de 75 Hz pour le signal que nous avons à traiter, avec une fréquence de coupure de 75 Hz. Les ondulations permises dans la bande passante et atténuée doivent être inférieure ou égale à 0.05 (normaliser), et la raideur de la pente soit de l'ordre de 30 dB/octave.

2-Description de la méthode:

La méthode d'échantillonnage en fréquence consiste à fixer le nombre de points N , et à préciser pour chaque point sa

fréquence et la valeur associée du module de la fonction de transfert.

Pour des raisons de commodité, nous choisissons N points répartis de façon équidistance en fréquence sur l'intervalle $[-\frac{F_c}{2}, +\frac{F_c}{2}]$ donc d'abscisse $n \cdot F_c/N$, n variant de $-(\frac{N-1}{2})$ à $(\frac{N-1}{2})$. N constitue l'ordre du filtre, F_c la fréquence d'échantillonnage.

L'algorithme de calcul étant :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \cdot x(n-k)$$

avec $h(k)$ la réponse impulsionnelle du filtre.

3-Calcul de la réponse impulsionnelle du filtre:

Nous avons la fonction de transfert isochrone du filtre donnée par:

$$H(j\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \cdot \exp(-j k 2\pi \frac{f}{F_c}) \quad (1)$$

Pour un échantillon d'abscisse $f = n F_c/N$ la fonction de transfert devient:

$$H(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \cdot \exp(-j k \cdot 2\pi \frac{n}{N}) \quad (2)$$

La solution fournie par l'emploi de la transformée de Fourier discrète donne:

$$h(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} H(n) \cdot \exp(j 2\pi k \cdot \frac{n}{N}) \quad (3)$$

Sur la courbe de réponse du filtre passe bas idéal, nous choisissons N échantillons, tels que: [14]

$$H(n) = \begin{cases} 1 & -N \frac{f_c}{F_e} \leq n \leq N \frac{f_c}{F_e} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où f_c est la fréquence de coupure.

Soit n_0 le dernier échantillon tel que $n_0 \leq N \frac{f_c}{F_e}$, alors:

$$H(0) = 1$$

$$H(-1) = H(1) = 1$$

$$\begin{aligned} & \cdot \quad ; \\ & \cdot \quad ? \cdot \\ & \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

$$H(-n_0) = H(n_0) = 1$$

$$H(-(n_0+1)) = H(n_0+1) = 0$$

$$\begin{aligned} & \cdot \quad \cdot \\ & \cdot \quad \cdot \\ & \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

$$H\left(-\frac{N-1}{2}\right) = H\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

nous en déduisons:

$$n.h(k) = H(0) + H(1) \exp\left(jk \cdot \frac{2\pi}{N}\right) + H(-1) \exp\left(-jk \cdot \frac{2\pi}{N}\right) + \dots$$

$$\begin{aligned} n.h(k) &= H(0) + 2H(1) \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{N}\right) + 2H(2) \cos\left(k \cdot \frac{4\pi}{N}\right) + \dots \\ &\quad \dots + 2H(n_0) \cos\left(k \cdot \frac{2\pi n_0}{N}\right) \end{aligned}$$

donc

$$N.h(k) = H(0) + 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} H(n) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi n}{N}\right) \quad (4)$$

Nous remarquons que la réponse impulsionnelle $h(k)$ est paire ($h(-k)=h(k)$). Un décalage vers la droite de $\frac{N-1}{2}$ périodes d'échantillonnage rendra cette séquence causale et entrainera un terme de phase variant linéairement avec la fréquence.

Donc nous calculerons $h(k)$ pour $k=0, \dots, \frac{N-1}{2}$ à partir de (4) puis nous tiendrons compte de la parité de $h(k)$ pour calculer les $\frac{N-1}{2}$ autres termes.

Pour obtenir la courbe de réponse calculée, nous utiliserons l'expression de la fonction de transfert isochrone.

D'après la courbe obtenue, figure (III-13), nous remarquons que les ondulations dépassent le gabarit au niveau de la transition, nous avons remédié à ce problème par l'application de la fonction d'interpolation suivante:

$$I\left(\frac{f}{f_c}, n\right) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin N\pi \left(\frac{f}{f_c} - \frac{n}{N}\right)}{\sin \pi \left(\frac{f}{f_c} - \frac{n}{N}\right)}$$

Cette méthode fait une sorte d'optimisation de la fonction de transfert au niveau de la transition, et se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires.

Les résultats obtenus sont donnés par la figure (III-14), ainsi nous remarquons que le filtre réalisé répond bien aux exigences imposées par les contraintes.

Nous avons vérifié l'efficacité de ce filtre en faisant introduire deux signaux ayant pour fréquences 20 Hz et 80 Hz figure (III-15); les résultats obtenus montre bien que le signal de fréquence 80 Hz ~~est/été~~ a été filtré.

III-1-5: CHOIX DE LA FREQUENCE D'ECHANTILLONNAGE:

Le signal EEG est un signal aléatoire, donc il nous sera difficile de fixer la fréquence d'échantillonnage du signal sachant que celle ci doit être supérieur ou égale à deux fois la plus haute fréquence contenue dans le spectre -théorème de Shannon et Nyquist-, donc à priori il nous faudra connaître la plus haute

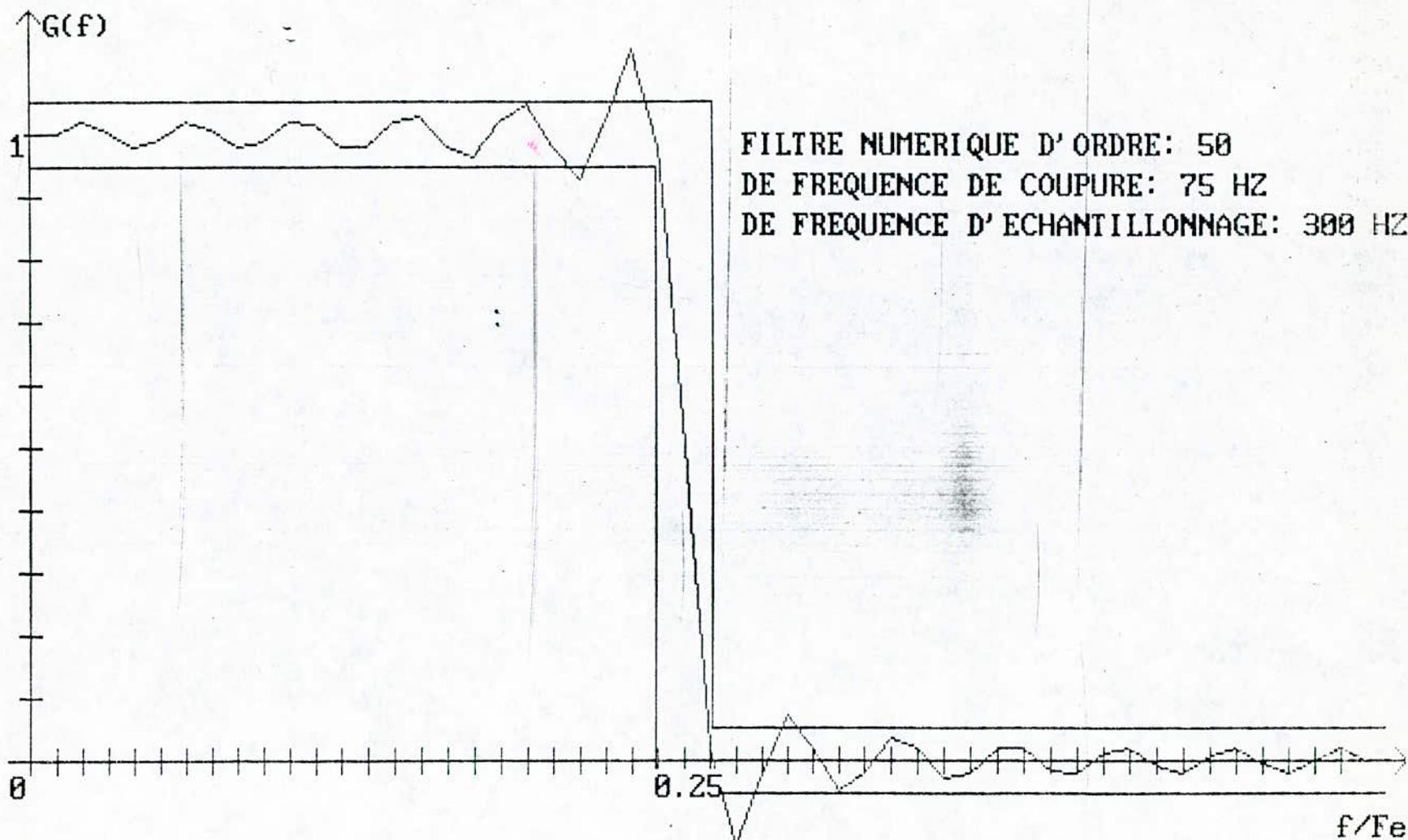
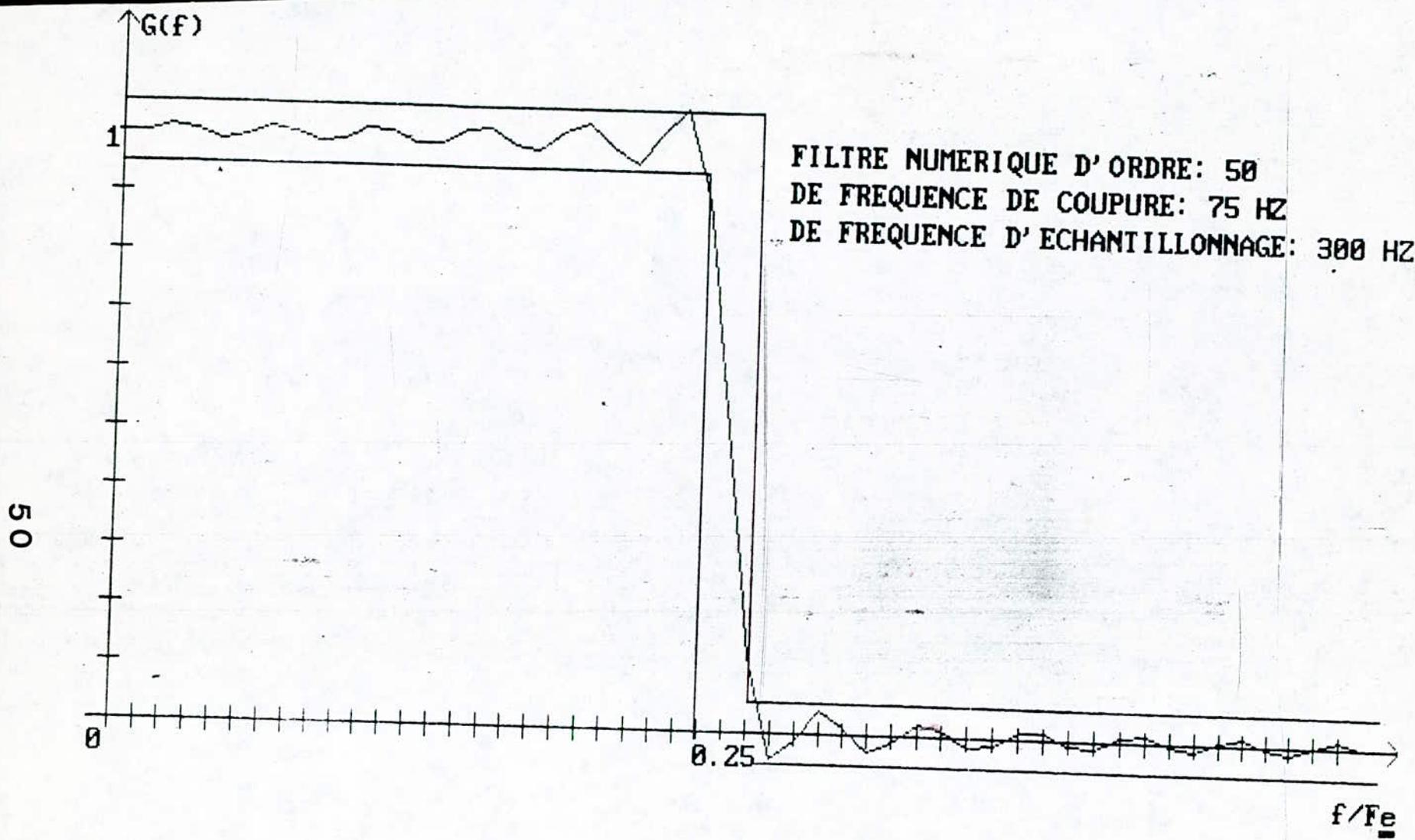


Fig (III - 1 - 3) : Réponse du filtre avant
L'interpolation



Fig(III.1.4) : Réponse du filtre après interpolation

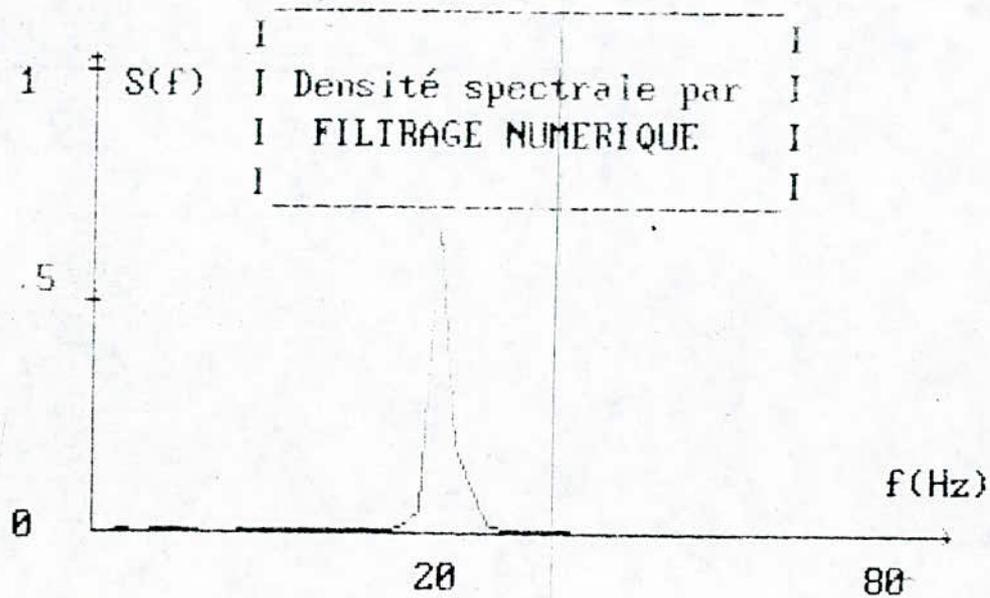
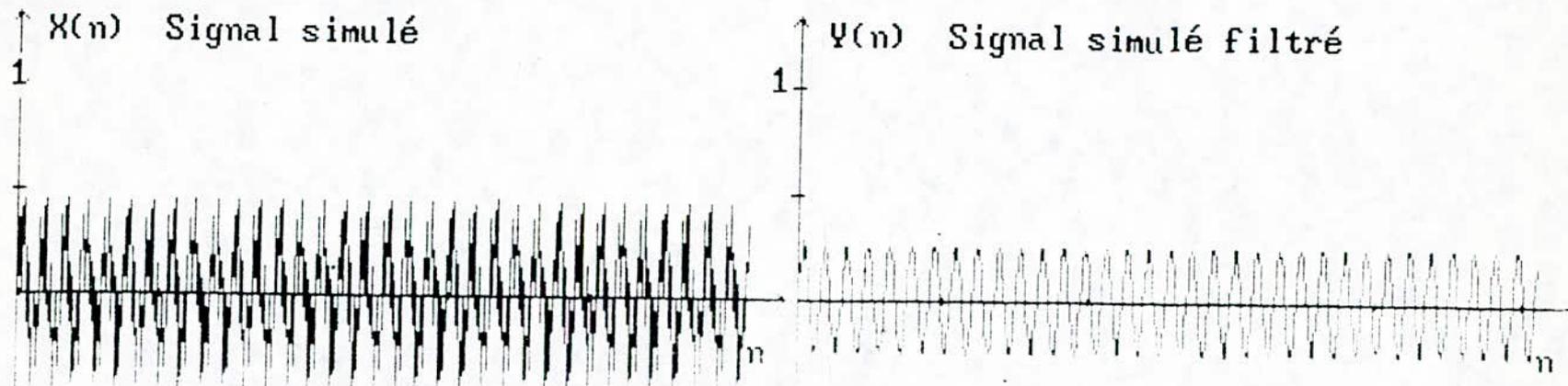


Fig (III - 2 - 5)

fréquence du signal EEG, or si on le savait le signal serait déterministe et non aléatoire.

D'après les spécialistes, le signal EEG contient le maximum d'information dans la bande 0 - 75 Hz, donc durant toute l'étude que nous avons entreprise, la fréquence d'échantillonnage était fixé à 4 fois la plus haute fréquence de la bande, soit $F_e = 300$ Hz.

Nb: Le programme correspondant à cette méthode d'analyse spectrale par filtrage numérique est donné en ANNEXE c.

III-2: ANALYSE SPECTRALE PAR FFT/ -----

Après avoir exposé la théorie nécessaire pour l'analyse spectrale, l'objet de cette partie est de décrire brièvement les 3 algorithmes FFT utilisés dans le programme d'analyse spectrale par FFT, à savoir, les algorithmes de SANDER, de FORMAN et celui de COOLEY TUKEY, par la suite, nous aurons à choisir la fenêtre de pondération et l'estimateur, et enfin nous terminerons par donner la description du programme.

III-2-1: Principe des algorithmes FFT:

Nous avons à calculer N coefficients à partir de la relation de définition de la TFD:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot W^{nk} \quad \text{avec } N=2^r$$

Exprimons n et k suivant les puissances de 2:

$$n = n_{r-1} \cdot 2^{r-1} + n_{r-2} \cdot 2^{r-2} + \dots + n_0 \cdot 2^0$$

$$k = k_{r-1} \cdot 2^{r-1} + k_{r-2} \cdot 2^{r-2} + \dots + k_0 \cdot 2^0$$

DE ce fait, le produit n.k peut se développer de deux façons:

1-le développement selon n est appelé décimation fréquentielle de nk qui constitue l'algorithme de SANDER;

2-le développement selon k est appelé décimation temporelle de nk qui constitue l'algorithme de COOLEY TUKEY. [6]

III-2-1-1: Algorithme de COOLEY TUKEY: figure (III-2-1)

Cet algorithme est inspiré de la FFT à entrelacement temporel, il nécessite une inversion binaire.

Les calculs peuvent se faire en utilisant un seul tableau de N positions mémoires (doubles car les nombres sont complexes); en effet, il suffit de faire les calculs sur des couples de nombres pour pouvoir ranger les nouveaux nombres dans les positions occupées par les anciennes valeurs.

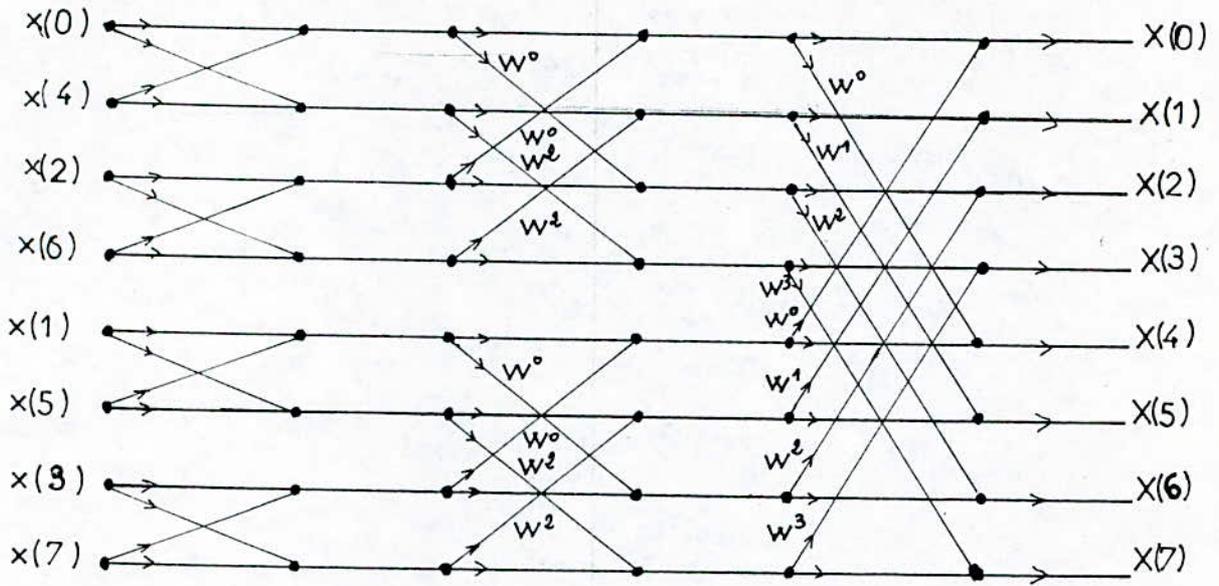


Fig.III.21. graphe associé à l'algorithme de COOLEY-TUKEY

III-2-1-2: Algorithme de SANDE: figure (III-2-2)

De même que pour l'algorithme de COOLEY TUKEY, les coefficients $x(n)$ sont obtenus dans l'ordre embrouillé quand on prend les échantillons $x(k)$ dans l'ordre.

Cet algorithme nécessite un seul tableau, comme ça a été le cas pour l'algorithme précédent, on en conclut qu'il y a une ~~gr~~ grande ressemblance entre les deux algorithmes, la seule différence réside dans le fait que l'un se développe selon n et l'autre selon k .

III-2-1-3: Algorithme de FORMAN: figure (III-2-3)

Contrairement à l'algorithme de COOLEY TUKEY, nous remarquons que les coefficients $X(n)$ sont obtenus dans l'ordre naturel quand on prend les échantillons $x(k)$ dans l'ordre naturel, donc, cet algorithme ne nécessite pas d'inversion binaire, par contre il utilise deux tableaux de N positions mémoires pour les nombres complexes.

Les opérations qu'effectue le programme associé à cet algorithme sont les suivantes:

- calcul des exponentielles complexes.
- calcul des coefficients suivant l'algorithme de FORMAN.

III-2-2: CHOIX DE LA FENETRE: -----

Avant d'évaluer les TFD de l'estimateur modifié, il est nécessaire de multiplier chaque section du signal à analyser, par une fenêtre temporelle. Parmi les fenêtres étudiées au chapitre (II-I) nous avons choisis celle de HAMMING, qui donne de bons résultats mais qui n'est pas la plus performante. Elle permet de réduire le phénomène de GIBBS, et 99.96% de son énergie est localisée dans le lobe principale, c'est à partir de ces critères que nous avons opté pour cette fenêtre.

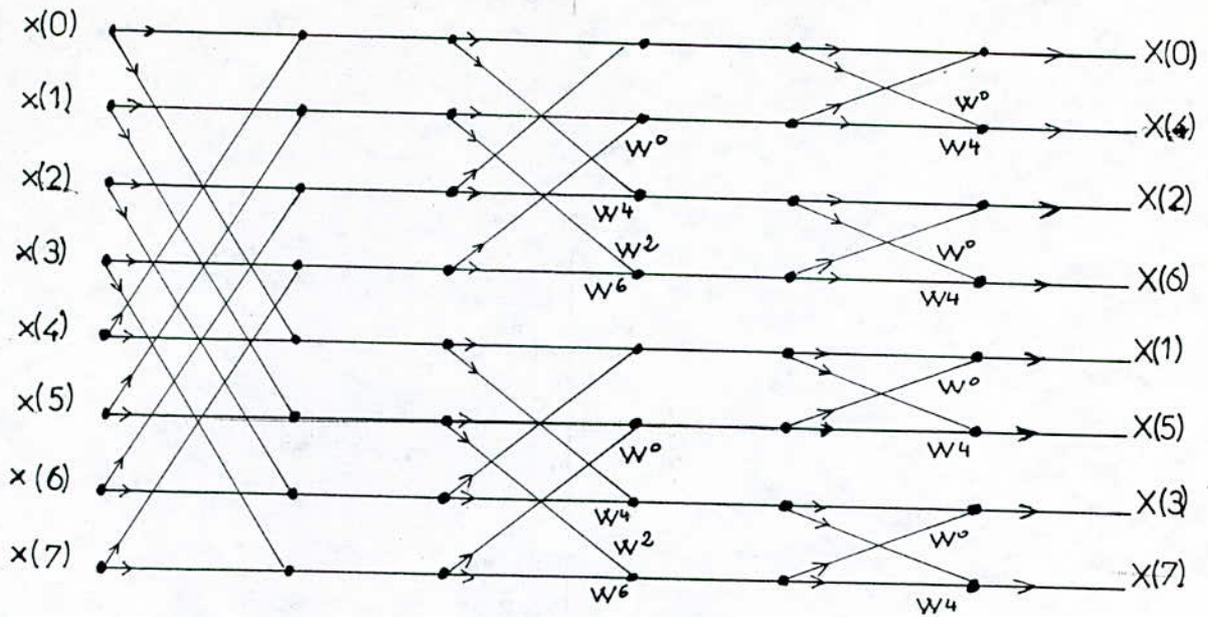


Fig. III.2.2. graphe associé à l'algorithme de SANDER

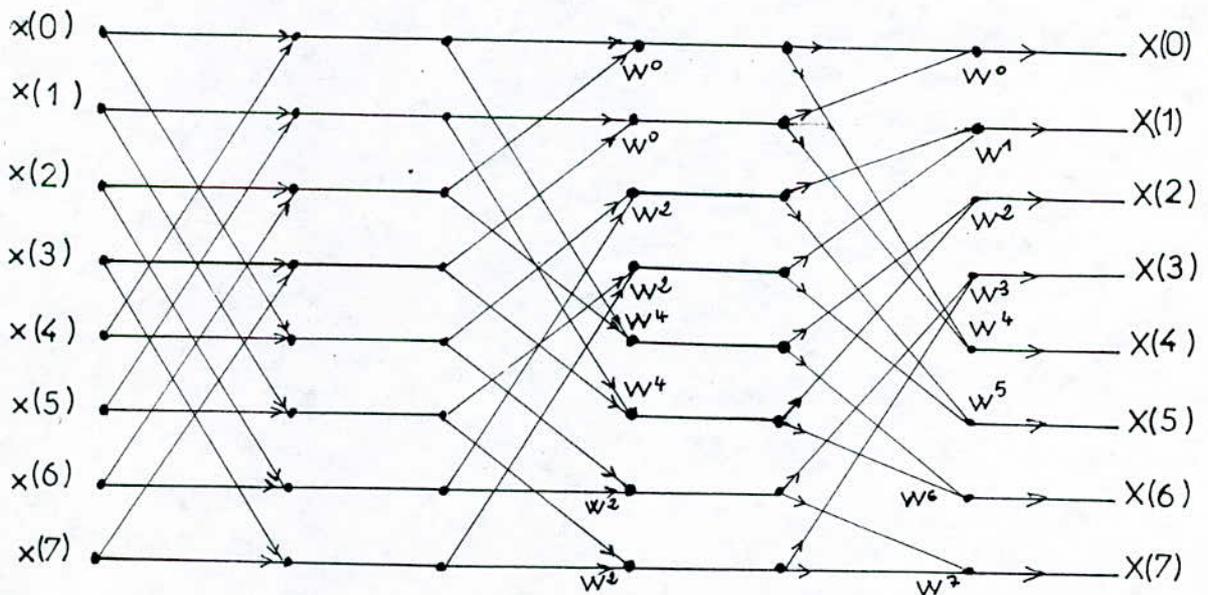


Fig. III.2.3. graphe associé à l'algorithme de FORMAN

Il est à noter aussi, la facilité de sa programmation du fait de la simplicité de son expression qui est donnée par:

$$W(k) = 0.54 + 0.46 \cos \left(\frac{2 \pi (k-M/2)}{M} \right)$$

III-2-3: CHOIX DE L'ESTIMATEUR SPECTRALE:

L'analyse spectrale des signaux aléatoires est un problème d'estimation, dès lors, nous devons faire un choix parmi tout les estimateurs énoncés qui permet d'obtenir des résultats satisfaisant. Notre choix s'est porté sur l'estimateur modifié qui remédie au problème des deux autres estimateurs moyenné et adouci pour le premier la réduction de la variance entraine une augmentation sensible du biais, tandis que le second, il a une mauvaise résolution dynamique. [5]

L'estimateur modifié est celui qui permet la meilleur résolution dynamique. Mais, à durée égale d'observation totale, sa résolution fréquentielle est inférieur à celle des deux autres estimateurs, toutefois, nous pouvons améliorer cette dernière en augmentant le nombre d'échantillons par section.

Nous remarquons aussi, que l'estimateur modifié peut être évalué d'une manière assez simple, en utilisant la transformée de FOURIER rapide, ce qui a été adopté pour notre application.

Description du programme d'analyse spectrale par FFT:

- 1-Introduction des échantillons de x et de y
- 2-Calcul des coefficients de la fenêtre de Hamming
- 3-Lecture des données par bloc de M correspondant aux échantillons du signal x.
- 4-Pondération des échantillons de x
- 5-Calcul FFT pour les échantillons de x
- 6-Lecture des données par bloc de M correspondant aux échantillons du signal y
- 7-Pondération des échantillons de y
- 8-Calcul FFT pour les échantillons y
- 9-Estimation de la densité spectrale ainsi que l'interspectre des signaux x et y
- 10-Calcul du spectre de cohérence
- 11-calcul du spectre de phase
- 12-Tracé de courbes

-Le listing du programme est donné en annexe B

CHAPITRE : 4

Simulation du signal EEG

CHAPITRE IV

SIMULATION DU SIGNAL EEG

Une onde électroencéphalographique est constituée par un grand nombre d'activités élémentaires. Ce qui intéresse au plus haut point les spécialistes, c'est de détecter des trains d'oscillations dont les fréquences sont caractéristiques des activités cérébrales (rythmes $\alpha, \beta, \delta, \theta$).

Les fréquences recherchées sont noyées dans un bruit important dû à ce que les variations du potentiel des activités des neurones doivent parcourir un chemin non négligeable pour atteindre les électrodes placées sur la peau, chemin parsemé de nombreux générateurs parasites.

Donc, nous pouvons supposer que le signal EEG peut être simulé par une somme de sinusoides, dont la fréquence de chacune d'elles caractérise l'une des activités cérébrales ($\alpha, \beta, \delta, \theta$), auxquelles nous ajoutons un bruit blanc. Le schéma synoptique est donné par la figure (IV-1.).

IV-1: GENERATION DU BRUIT BLANC:

Le bruit blanc est simulé par une séquence de nombre suivant une loi de probabilité Gaussienne.

Nous pouvons générer un signal pseudo-aléatoire à distribution gaussienne en utilisant la relation suivante:

$$Z(k) = Y(k) \cdot \cos(2\pi \cdot x(k+1)) \cdot \sigma + m$$

avec:

σ : écart type et m : la moyenne.

$Y(k)$ est un signal pseudo-aléatoire ayant une distribution de RAYLEIGH qui peut être générée en utilisant la relation suivante:

Dans le programme de simulation nous avons généré une somme de deux sinusoides ayant pour fréquence $f_1=12$ Hz et $f_2=22$ Hz caractérisant respectivement les activités α et δ , d'amplitude respective $R_1 = R_2 = 1$, la fréquence d'échantillonnage F_e étant égale à 300 Hz.

Pour ce qui est du bruit blanc, la puissance de ce bruit est égale à la variance (l'écart type au carré). Pour que les sinusoides du modèle soient détectables dans le spectre, il faut que la puissance du bruit soit très faible devant celle des sinusoides. C'est pour cela que nous avons considéré un bruit blanc ayant pour moyenne nulle et pour écart type 0.01.

Pour la simulation des signaux à parametre uniforme nous avons considéré les parametres suivant:

$$A=899= 8 \times 112 + 3$$

et

$N=16$ (car nous avons travaillé sur un calculateur à 16 bits)

Le signal simulé possède la forme:

$$x(k) = R_1 \text{ SIN} \left(2\pi f_1 \frac{k}{F_e} \right) + R_2 \text{ SIN} \left(2\pi f_2 \frac{k}{F_e} \right) + Z(k)$$

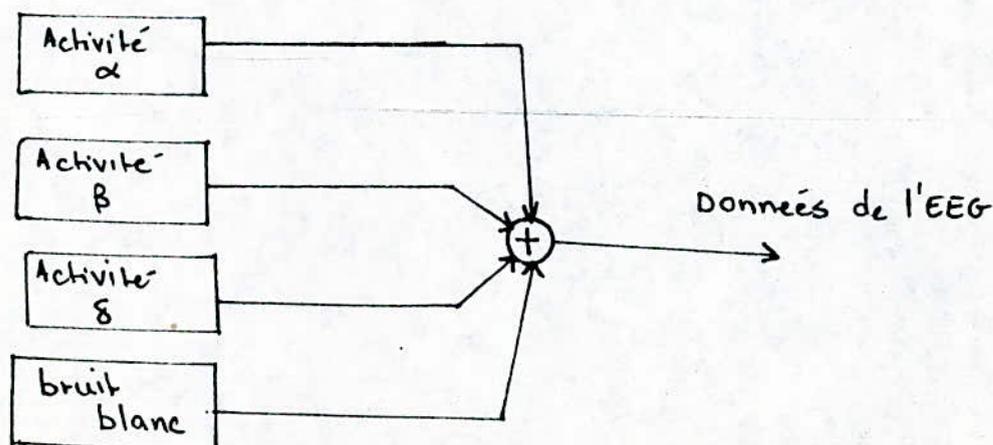


figure (IV-1):schéma synoptique de la simulation.

$$y(k) = \sqrt{2\sigma^2 \log\left(\frac{1}{x(k)}\right)}$$

$x(k)$ étant un signal pseudo-aléatoire à distribution uniforme.

IV-2: GENERATION DES SIGNAUX A DISTRIBUTION UNIFORME:

La relation de récurrence est de la forme suivante:

$$x(k+1) = [A \cdot x(k)] \text{ Mod } 2^{N-1}$$

où A est un nombre entier et N représente le nombre de bits du mot binaire du calculateur.

A doit être choisit de l'ordre de $2^{\frac{N-1}{2}}$, et sous la forme suivante:

$$A = 8m \mp 3$$

avec m entier.

Le signal ainsi obtenu est périodique de période $2^{\frac{N-1}{2}} - 1$, en divisant chaque nombre par $2^{\frac{N-1}{2}}$, nous obtenons un signal pseudo-aléatoire à densité de probabilité uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

IV-3: CHOIX DES PARAMETRES DE SIMULATION/

Le calcul d'une TFD sur une durée très longue pose certains problèmes. C'est pourquoi on divise le signal, simulé, sur une durée K en plusieurs sections.

Dans notre cas, nous avons divisé la durée totale d'observation K en L sections de durée M ; avec:

$$L=4 \quad \text{et} \quad M=512$$

d'où $k=2048$

CHAPITRE : 5

Résultats et leurs interprétations

CHAPITRE V

RESULTATS ET LEURS INTERPRETATION

Les programmes décrits précédemment ont été appliqués sur le signal EEG simulé, nous allons essayer d'interpréter les résultats obtenus par ces différents programmes. Nous commencerons par donner les résultats qu'on devrait obtenir pour les signaux des deux voies simulés, ensuite nous aurons à comparer les algorithmes de la FFT utilisés dans le programme d'analyse spectrale, par la suite, nous comparerons les deux méthodes adoptées pour l'analyse spectrale par FFT, on entend par là, l'utilisation de la FFT couplée, et l'utilisation d'une FFT pour chacun des deux signaux simulés. En dernier lieu, nous comparerons les deux programmes d'analyse spectrale, l'un réalisé par filtrage numérique, l'autre par FFT.

V-1: Les résultats attendus du traitement des deux signaux issus des régions symétriques:

Nous avons simulé deux signaux provenant des deux voies symétriques, pour un cas normal, donc on devrait aboutir à des densités spectrales identiques pour les deux voies, la cohérence doit être égale à 1 puisque les deux signaux auront les mêmes fréquences, et la phase doit être égale à zéro, sachant que nous n'avons pas introduit de déphasage lors de la simulation.

V-2: comparaison des différents algorithmes utilisés dans le programme d'analyse spectrale par FFT:

Pour pouvoir vérifier l'efficacité du programme d'analyse spectrale par FFT, nous avons relevé les réponses obtenues par les trois algorithmes utilisés dans le but de les comparer, en se basant sur des critères, parmi lesquels, nous citons:

1-Temps d'exécution:

Sur les 3 algorithmes utilisés, nous avons constaté que l'algorithme de FORMAN était plus rapide que celui de SANDER et de COOLEY-TUKEY. Ces résultats étaient attendus du fait que l'algorithme

de FORMAN n'utilise pas l'inversion binaire, alors que les deux autres l'utilisent. Mais, il faut tenir compte du fait que les programmes réalisés ne sont pas optimisés, c'est à dire que la rapidité d'exécution dépend en premier lieu de la manière de programmer l'algorithme.

2-Occupation mémoire:

En ce qui concerne la mémoire utilisée pour établir les différents algorithmes, nous remarquons que seul celui de FORMAN utilise deux tableaux, alors que ceux de SANDE et COOLEY TUKEY n'en utilise qu'un seul, donc la capacité mémoire nécessaire pour l'algorithme de FORMAN est plus grande; ce qui présente un inconvénient surtout si on traite un nombre d'échantillons important par contre la mémoire nécessaire pour les deux autres algorithmes se réduit de moitié de celle de FORMAN.

3-Précision des résultats:

Pour ce qui est de la précision des résultats, nous avons tenu compte du fait que nous avons utilisé deux méthodes d'évaluation des TFD des deux signaux, une fois en appliquant la FFT couplée, et une fois en appliquant la FFT séparément à chacun des deux signaux:

3-1: Comparaison des réponses obtenues par l'utilisation de la FFT couplée:

Pour l'application utilisée, c'est à dire, pour le signal EEG simulé, nous avons constaté, la similitude des réponses des densités spectrales des deux signaux obtenues par les deux algorithmes de FORMAN et de COOLEY TUKEY, alors que celui de SANDE n'était pas aussi précis que les deux autres. Le spectre de cohérence est, pour sa part, le même pour les trois algorithmes, ce qui signifie qu'on détecte bien les mêmes fréquences, alors que le spectre de phase ne concorde pas avec la réponse à laquelle on devrait aboutir figure (V.1, V.2), du fait que nous avons obtenu des déphasages important qui peuvent atteindre $\pm \frac{\pi}{2}$.

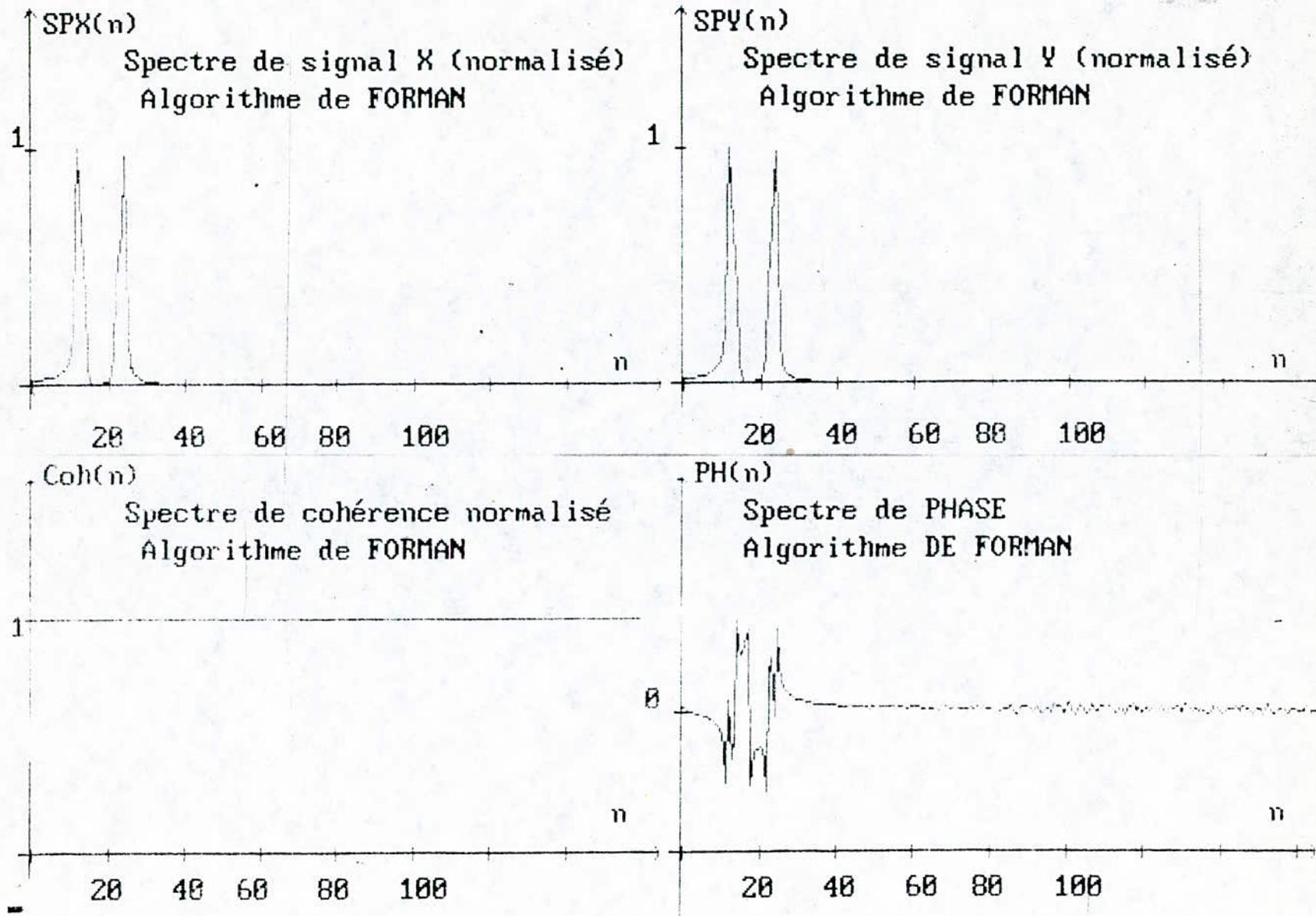


Fig (II-2) : FFT COUPLEE

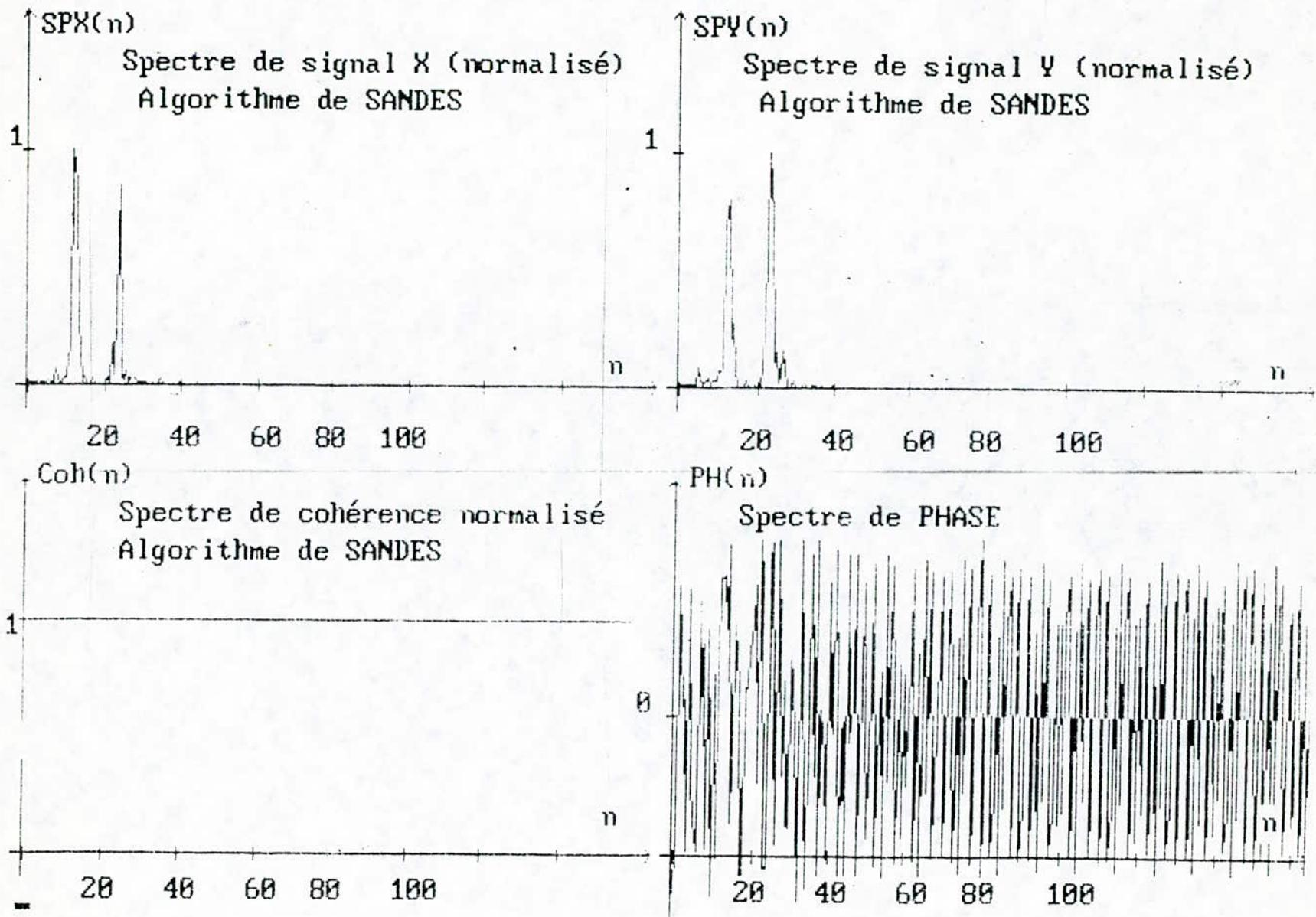


Fig (V-1) : FFT COUPLEE

99

3-2: comparaison des réponses obtenues par l'utilisation d'une double FFT:

Vue le problème de phase cité précédemment, on a eu recours à l'utilisation d'une double FFT, c'est à dire, qu'on applique la FFT séparément a chacun des deux signaux. Nous avons remarqué que cette méthode nous permet d'obtenir les réponses voulues; on entend par là que le spectre de cohérence est égal à 1 et le spectre de phase égale à zéro; figure (V.3), (V.4), (V.5).

3-3: comparaison entre l'analyse spectrale par filtrage numérique et par FFT:

Le programme d'analyse spectrale par filtrage numérique ne permet d'obtenir que les densités spectrales des signaux et ceci est dû à la difficulté d'obtenir des densités interspectrales entre deux signaux, ce qui nous amène à faire une comparaison uniquement sur la densité spectrale de puissance.

L'avantage de faire l'analyse spectrale par filtrage numérique est essentiellement la réduction de l'espace mémoire occupée par rapport à l'utilisation de la FFT; la réalisation d'un analyseur de spectre par filtrage numérique nous permet en particulier de travailler en temps réel, ce que nous n'avons pas pu le vérifier du fait que nous avons simplement simulé cet analyseur.

La simulation de l'analyseur de spectre par filtrage numérique nous a renseigné sur différents points, tels que la précision des résultats qui dépend du nombre d'échantillons pris, du type de filtre et de son ordre; l'occupation mémoire est minimale, et le temps de calcul que nous ne pouvons pas jugé réellement, car en simulant, nous avons remarqué que le temps d'exécution était plus long que l'analyse spectrale par FFT. figure (V-6)

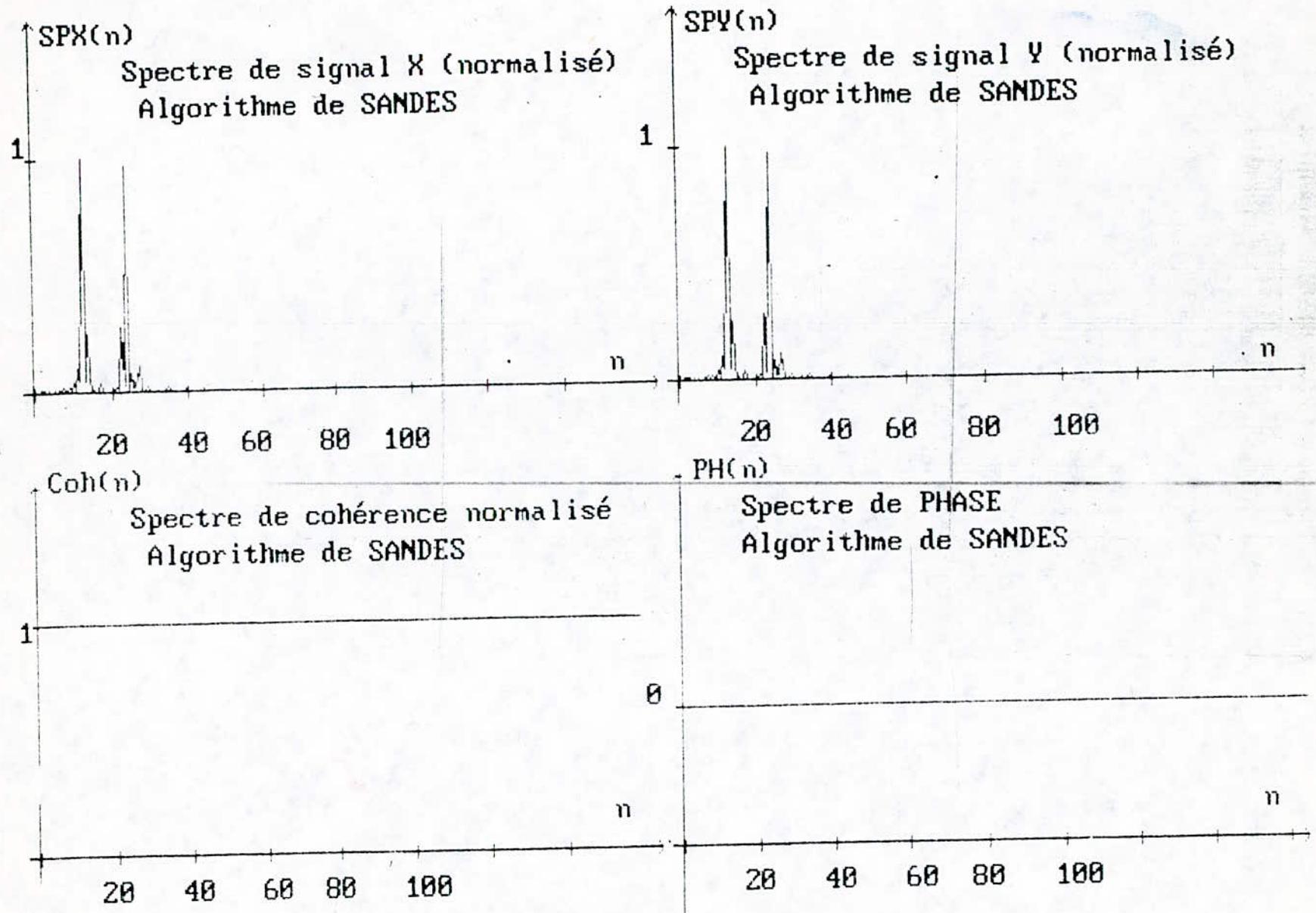


Fig (V.3) : DOUBLE FFT

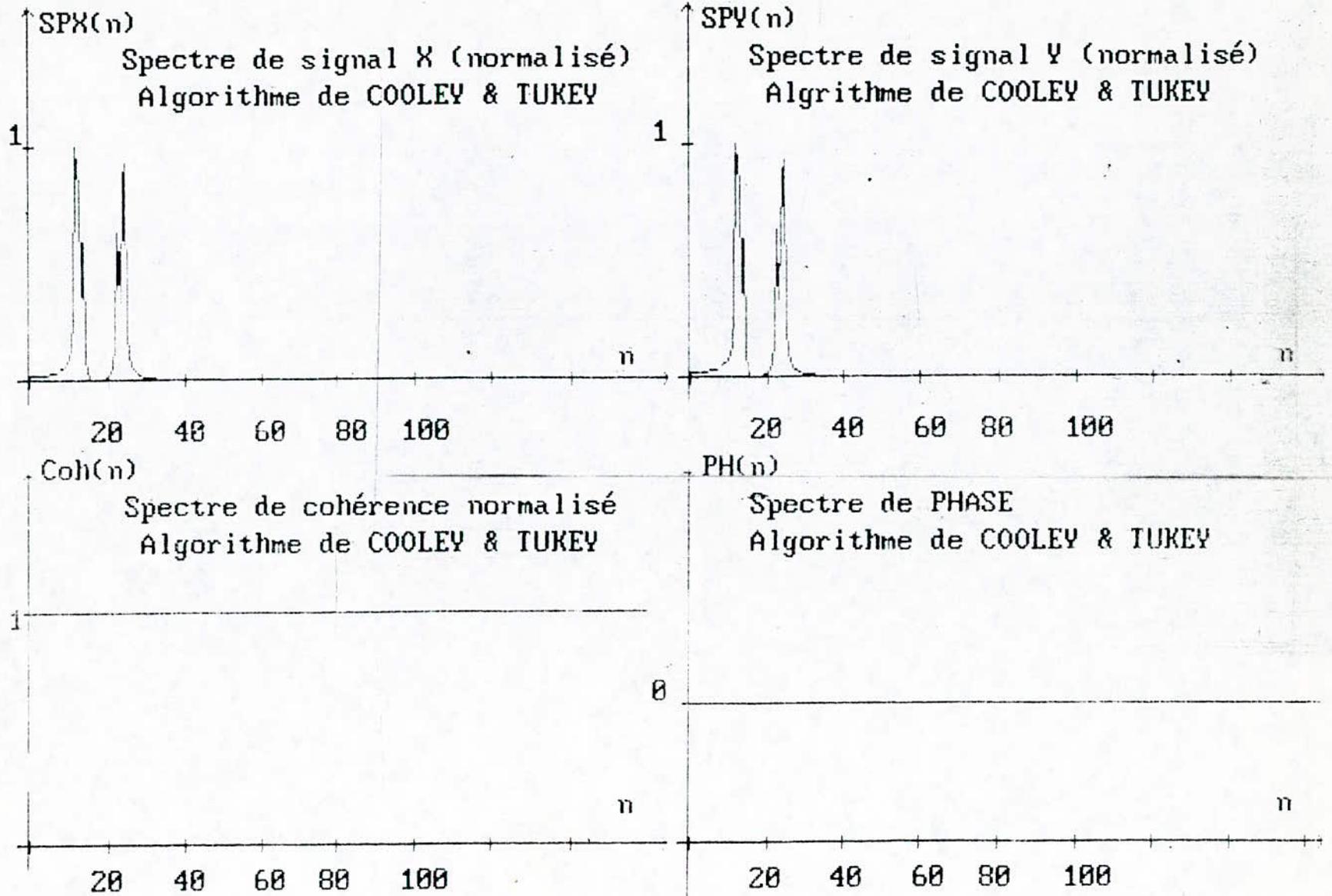
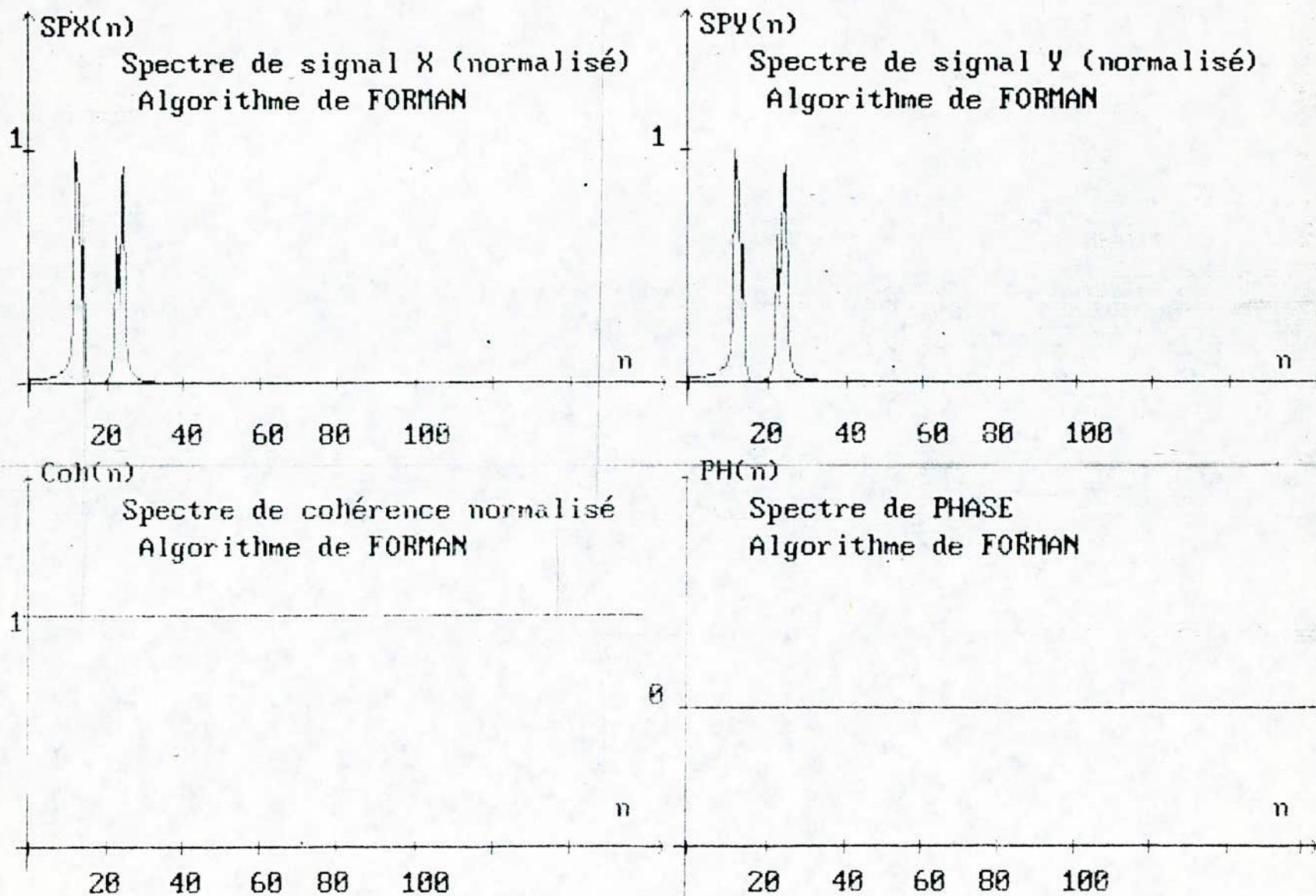


Fig (V-4) : DOUBLE FFT



Fig(I.5) : DOUBLE FFT

71

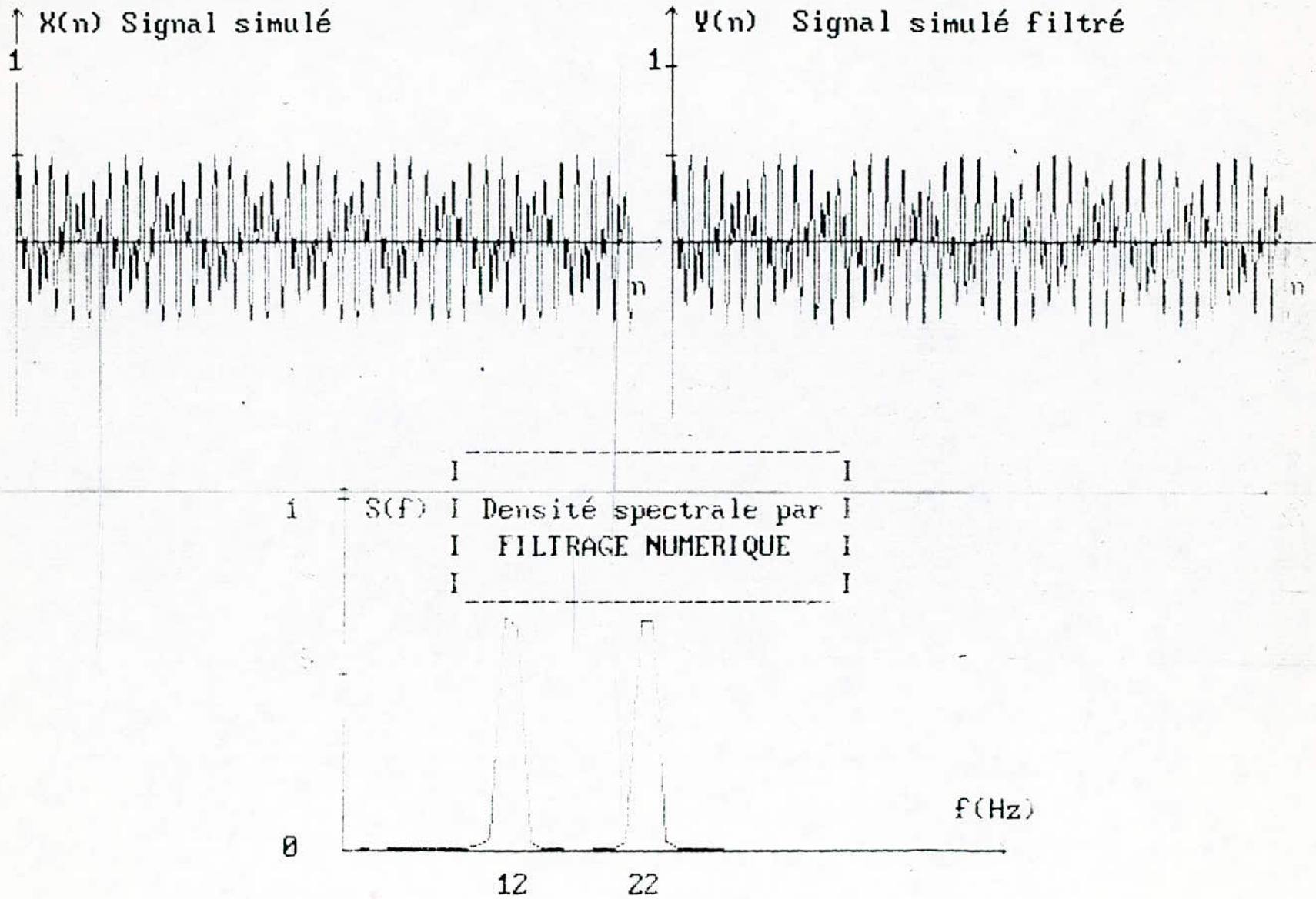


Fig (V-6).

CONCLUSION

L'objectif fixé, lorsque nous avons entamé notre étude, a été atteint, ainsi nous avons pu mettre au point, deux programmes nous permettant de traiter le signal EEG, le premier conçu à partir des filtres numériques et le second par la transformée de Fourier rapide (FFT).

La comparaison de ces deux méthodes de traitement numérique nous a amené à tirer quelques remarques qui nous semblent assez importantes. En effet, nous avons constaté que malgré le gain de temps et d'espace mémoire obtenu en utilisant la FFT couplée, cette méthode présente une imperfection pour le résultat de la phase, c'est ainsi que l'utilisation d'une double FFT s'est avérée nécessaire pour l'exactitude des résultats; de plus le traitement effectué par les filtres numériques ne nous permet pas de faire une étude complète de l'EEG, à cause de la difficulté de réaliser l'analyse interspectrale, et par là, l'obtention des spectres de cohérence et de phase serait très difficile.

Il serait très intéressant de réaliser l'analyseur de spectre par des filtres numériques pour obtenir des résultats de la densité spectrale, du fait que cette réalisation nous permet de travailler en temps réel.

Pour notre application, nous pouvons dire que le traitement par la transformée de Fourier rapide serait le plus intéressant, il nous permet de faire une étude complète du signal EEG.

Nous avons voulu appliquer les deux programmes sur des signaux réels, ou sur des signaux simulés avec des données plus précises (sujet qui fera l'objet d'une prochaine étude), pour avoir une meilleure idée sur l'efficacité de ces deux programmes, nous recommandons pour ceci de réaliser une interface entre l'électro-encéphalographe et l'unité de traitement (micro ordinateur), afin d'augmenter la précision des données des signaux à traiter.

ANNEXE : A

MESURE DE L'INTERSPECTRE PAR FILTRAGE

L'interspectre des deux signaux réels $x(k)$ et $y(k)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélation $\varphi_{xy}(k)$

$$S_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{xy}(k) \cdot \exp(-j2\pi f \cdot k).$$

$\varphi_{xy}(k)$ est une grandeur complexe, donc:

$$S_{xy}(f) = \text{Re}(S_{xy}(f)) + j \text{Im}(S_{xy}(f))$$

1-Calcul de la partie réelle:

Pour obtenir la partie réelle de l'interspectre, il suffit de filtrer les deux signaux $x(k)$ et $y(k)$, de faire le produit $x_H(k)$ et $y_H(k)$ obtenus à la sortie de chaque filtre, puis de prendre la moyenne figure (A-1)

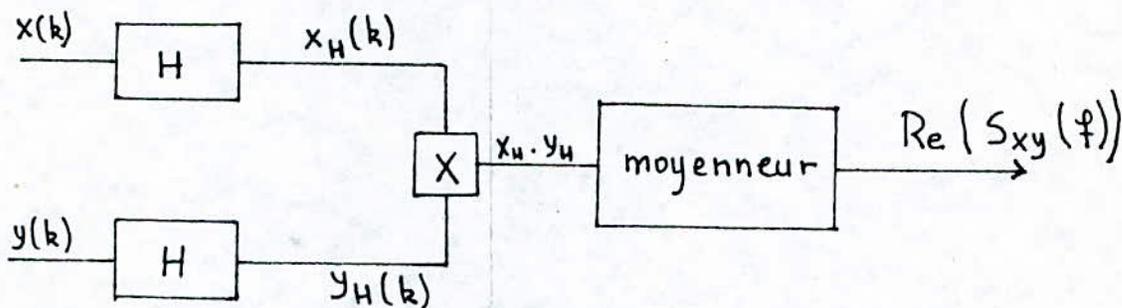


figure (A-1): obtention de la partie réelle de l'interspectre.

2-Calcul de la partie imaginaire:

Pour calculer cette partie, nous devons changer la densité interspectrale $S_{xy}(f)$ en $S'_{xy}(f)$ tel que:

$$S'_{xy}(f) = -j \text{Sign } f \cdot S_{xy}(f)$$

$$\text{avec } \text{Sign } f = \begin{cases} +1 & f \geq 0 \\ -1 & f < 0 \end{cases}$$

Donc $S'_{xy}(f)$ est le résultat du filtrage de $S_{xy}(f)$ par un filtre

dont la réponse en fréquence est :

$$H(f) = -j \operatorname{sign} f = \begin{cases} +j & \text{pour } f > 0 \\ -j & \text{pour } f < 0 \end{cases}$$

$$|H(f)| = 1$$

$$\varphi_H(f) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} f$$

Cela revient à filtrer l'un des deux signaux $x(k)$ ou $y(k)$ par le filtre en question.

Ces filtres sont appelés filtres de quadrature (ou déphaseurs de $\frac{\pi}{2}$). Une méthode détaillée de réalisation de ces filtres est donnée dans [3].

Le schéma pour l'obtention de la partie imaginaire de l'interspectre est donc donné par la figure (A-2).

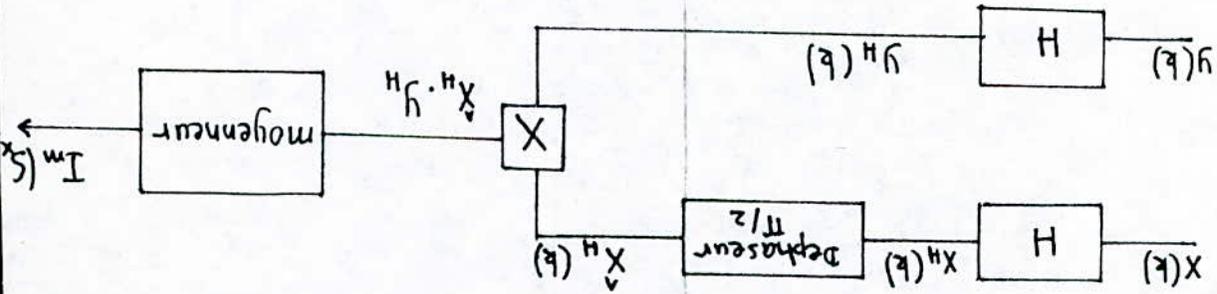


Figure (A-2): La partie imaginaire de l'interspectre.

Remarque: on voit bien la difficulté de mesurer l'interspectre par la méthode de filtrage, car il est nécessaire de doubler une partie de l'analyseur de spectre. La mesure d'un échantillon de l'interspectre est donnée par la figure (A-3). [4]

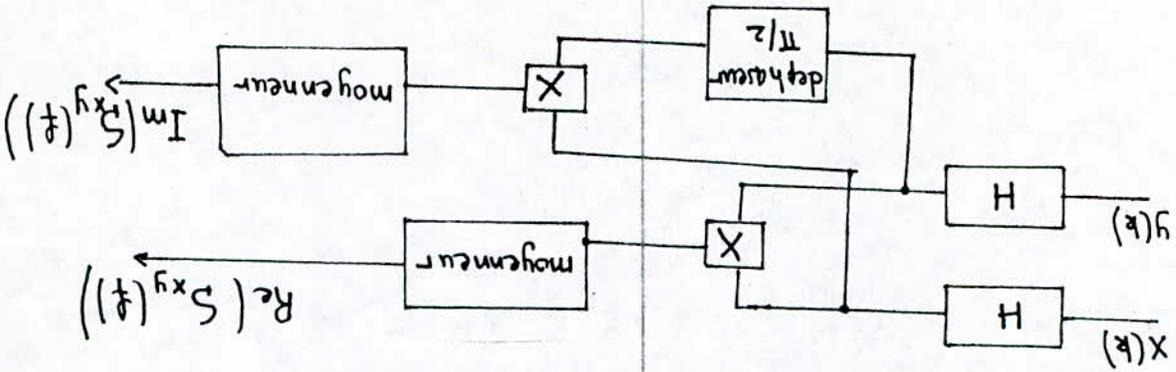


Figure (A-3): schéma globale du dispositif pour la mesure de l'interspectre.

ANNEXE : B

```

5 CLS
10 REM *** PROGRAMME D'ANALYSE SPECTRALE ***
20 LOCATE 10,20:PRINT "ANALYSE SPECTRALE PAR FFT"
30 FOR I=1 TO 2000:NEXT I
40 CLS:LOCATE 6,38:PRINT "MENU"
50 LOCATE 10,20:PRINT "1.....Algorithme de COOLEY & TUKEY"
60 LOCATE 12,20:PRINT "2.....Algorithme de FORMAN      "
70 LOCATE 14,20:PRINT "3.....Algorithme de SANDES      "
80 LOCATE 18,25:PRINT " FAITES VOTRE CHOIX "
90 A$=INKEY$
100 IF A$="1" THEN SEL=1:GOTO 140
110 IF A$="2" THEN SEL=2:GOTO 140
120 IF A$="3" THEN SEL=3:GOTO 140
130 GOTO 90
140 CLS
150 PI=3.14159268#
170 INPUT "NOMBRE DE SECTION:";L
180 INPUT "NOMBRE D'ECHANTILLONS PAR SECTION:";M
190 K=L*M
200 M2=M/2
210 M21=M2+1
220 DIM X(M),Y(M),XR(M),XI(M),YR(M),YI(M),F(M),Z(M)
230 DIM SPX(M),SPY(M),XYR(M),XYI(M),COH(M),PH(M)
240 DIM X1(M),Y1(M),WR(M),WI(M)
250 FOR I=1 TO M
260   SPX(I)=0
270   SPY(I)=0
280   XYR(I)=0
290   XYI(I)=0
300 NEXT I
310 FOR K=1 TO L
320   OPEN "A:MAD" FOR INPUT AS 5
330   FOR I=M*(K-1)+1 TO M*K
340     INPUT #5,X(I-M*(K-1))
350   NEXT I
360   CLOSE
370   OPEN "A:ONA" FOR INPUT AS 6
380   FOR I=M*(K-1)+1 TO M*K
390     INPUT #6,Y(I-M*(K-1))
400   NEXT I
410   CLOSE
420 REM ***CALCUL DES COEF DE LA FENETRE DE HAMMING***
450 PP=0
460   FOR I=1 TO M
470     F(I)=.54+.46*COS(2*PI*(I-1)/M)
480     PP=PP+F(I)*F(I)

```

```

490 NEXT I
492 FOR I=1 TO M
493     Z(I)=Y(I)
494 NEXT I
500 REM ***PONDERATION DES ECHANTILLONS***
510 FOR I=1 TO M
530     X(I)=X(I)*F(I)
540     Y(I)=0
590 NEXT I
600 GOSUB 740
601 FOR I=1 TO M
602     XR(I)=X(I) : XI(I)=Y(I)
603 NEXT I
604 FOR I=1 TO M
605     X(I)=Z(I)*F(I)
606     Y(I)=0
607 NEXT I
608 GOSUB 740
609 FOR I=1 TO M
610     YR(I)=X(I)
611     YI(I)=Y(I)
612 NEXT I
619 FOR I=1 TO M
660     SPX(I)=SPX(I)+XR(I)*XR(I)+XI(I)*XI(I)
670     SPY(I)=SPY(I)+YR(I)*YR(I)+YI(I)*YI(I)
680     XYR(I)=XYR(I)+XR(I)*YR(I)+XI(I)*YI(I)
690     XYI(I)=XYI(I)-XR(I)*YI(I)+XI(I)*YR(I)
700 NEXT I
711 NEXT K
712 FOR I=1 TO M
713     PL=PP*L
714     SPY(I)=SPY(I)/PL
715     SPX(I)=SPX(I)/PL
716     SPXY=(XYR(I)*XYR(I)+XYI(I)*XYI(I))/(PL*PL)
717     COH(I)=SPXY/(SPX(I)*SPY(I))
718     IF XYR(I)=0 THEN 721
719     PH(I)=ATN(XYI(I)/XYR(I))
720     GOTO 725
721     IF XYI(I)>0 THEN 724
722     PH(I)=-PI/2
723     GOTO 725
724     PH(I)=PI/2
725 NEXT I
726 GOSUB 4000
730 END
740 IF SEL=2 THEN 800

```

```

750 IF SEL=1 THEN 1500
760 IF SEL=3 THEN 2500
800 CLS
810 REM ***** FFT *****
820 REM ***** COOLEY ET TUKEY *****
830 GOSUB 1040
840 MP=LOG(M)/LOG(2)
850 FOR I=1 TO MP
860   REP=2^I
870   ARG=2*PI/REP
880   DISP=REP/2
890   FOR J=1 TO DISP
900     TWF=(J-1)*ARG
910     C=COS(TWF)
920     S=SIN(TWF)
930     FOR K=J TO M STEP REP
940       J2=K+DISP
950       T1=C*X(J2)+S*Y(J2)
960       T2=-S*X(J2)+C*Y(J2)
970       X(J2)=X(K)-T1
980       Y(J2)=Y(K)-T2
990       X(K)=X(K)+T1
1000      Y(K)=Y(K)+T2
1010     NEXT K
1020   NEXT J
1030 NEXT I
1035 GOTO 3500
1040 REM *****SUB ORD *****
1050 ND2=M/2
1060 NM1=M-1
1070 J=1
1080 FOR I=1 TO NM1
1090   IF I)=J THEN 1160
1100   T1=X(J)
1110   X(J)=X(I)
1120   X(I)=T1
1130   T2=Y(J)
1140   Y(J)=Y(I)
1150   Y(I)=T2
1160   K=ND2
1170   IF K)=J THEN 1210
1180   J=J-K
1190   K=K/2
1200   GOTO 1170
1210   J=J+K
1220 NEXT I

```

```

1230 RETURN
1500 REM ***Algorithme de FORMAN ***
1510 REM*****CALCUL DES EXPO*****
1520 WR(1)=1
1530 WI(1)=0
1540 WR(2)=COS(PI/M2)
1550 WI(2)=-SIN(PI/M2)
1560 FOR I=3 TO M2
1570     I1=I-1
1580     WR(I)=WR(2)*WR(I1)-WI(2)*WI(I1)
1590     WI(I)=WR(2)*WI(I1)+WI(2)*WR(I1)
1600 NEXT I
1610 REM *****CALCUL DE LA TRANSFORMEE*****
1620 M22=M2-1
1630 N=LOG(M)/LOG(2)
1640 H=M
1650 S=1
1660 FOR J=1 TO N
1670     H=H/2
1680     FOR I=0 TO M22
1690         I1=I+1
1700         L=I1+M2
1710         KK=INT(I/H)*H+1
1720         P=I+KK
1730         Q=P+H
1740         IF S<0 THEN 1820
1750         A=X(Q)*WR(KK)-Y(Q)*WI(KK)
1760         B=X(Q)*WI(KK)+Y(Q)*WR(KK)
1770         X1(I1)=X(P)+A
1780         Y1(I1)=Y(P)+B
1790         X1(L)=X(P)-A
1800         Y1(L)=Y(P)-B
1810         GOTO 1880
1820         A=X1(Q)*WR(KK)-Y1(Q)*WI(KK)
1830         B=X1(Q)*WI(KK)+Y1(Q)*WR(KK)
1840         X(I1)=X1(P)+A
1850         Y(I1)=Y1(P)+B
1860         X(L)=X1(P)-A
1870         Y(L)=Y1(P)-B
1880     NEXT I
1890     S=-S
1900 NEXT J
1910 IF S>0 THEN 1960
1920 FOR I=1 TO M
1930     X(I)=X1(I)
1940     Y(I)=Y1(I)

```

```

1950 NEXT I
2490 GOTO 3500
2500 CL5
2510 REM ***** FFT *****
2520 REM *****ALGORITHMES DE SANDES*****
2530 MP=LOG(M)/LOG(2)
2540 FOR LO=1 TO MP
2550     LMX=2^(MP-LO)
2560     LIX=2*LMX
2570     SCL=6.283185/LIX
2580     FOR LM=1 TO LMX
2590         ARG=(LM-1)*SCL
2600         C=COS(ARG)
2610         S=SIN(ARG)
2620         FOR LI=LIX TO M STEP LIX
2630             J1=LI-LIX+LM
2640             J2=J1+LMX
2650             T1=X(J1)-X(J2)
2660             T2=Y(J1)-Y(J2)
2670             X(J1)=X(J1)+X(J2)
2680             Y(J1)=Y(J1)+Y(J2)
2690             X(J2)=C*T1+S*T2
2700             Y(J2)=C*T2-S*T1
2710 NEXT LI:NEXT LM:NEXT LO
2720 REM ***** SUB ORD *****
2730 ND2=M/2
2740 NM1=M-1
2750 J=1
2760 FOR I=1 TO NM1
2770     IF I=J THEN 2840
2780     T1=X(J)
2790     X(J)=X(I)
2800     X(I)=T1
2810     T2=Y(J)
2820     Y(J)=Y(I)
2830     Y(I)=T2
2840     K=ND2
2850     IF K=J THEN 2890
2860     J=J-K
2870     K=K/2
2880     GOTO 2850
2890     J=J+K
2900 NEXT I
3500 RETURN
4000 REM *** GRAPHISMES ***
4005 VIEW (0,0)-(320,200)

```

```

4006 WINDOW SCREEN (0,400)-(640,0)
4010 REM ** TRACE DU SPECTRE DE X **
4020 CLS
4030 YZ=SPX(1)
4040 FOR I=1 TO M/2
4050     IF SPX(I)>YZ THEN 4070
4060     GOTO 4080
4070     YZ=SPX(I)
4080 NEXT I
4090 FOR I=0 TO M/2-1
4100 LINE (I*1200/M+20,320-200*SPX(I)/YZ)-((I+1)*1200/M+20,320-200*SPX(I+1)/YZ)
4110 NEXT I
4120 GOSUB 5000
4121 LOCATE 1,3:PRINT "SPX(n)"
4122 LOCATE 10,38:PRINT "n"
4123 LOCATE 2,8:PRINT "Spectre de signal X (normalisé)"
4130 LOCATE 4,1:PRINT "1"
4140 REM ** TRACE DU SPECTRE DE Y **
4145 VIEW (320,0)-(639,200)
4146 WINDOW SCREEN (0,400)-(640,0)
4150 YY=SPY(1)
4160 FOR I=1 TO M/2
4170     IF SPY(I)>YY THEN 4190
4180     GOTO 4200
4190     YY=SPY(I)
4200 NEXT I
4205 FOR I=0 TO M/2-1
4210 LINE (I*1200/M+20,320-200*SPY(I)/YY)-((I+1)*1200/M+20,320-200*SPY(I+1)/YY)
4220 NEXT I
4230 GOSUB 5000
4231 LOCATE 1,43:PRINT "SPY(n)"
4232 LOCATE 10,78:PRINT "n"
4233 LOCATE 2,46:PRINT "Spectre de signal Y (normalisé)"
4240 LOCATE 4,40:PRINT "1"
4250 REM ** TRACE DU SPECTRE DE COHERENCE **
4255 VIEW (0,200)-(320,399)
4256 WINDOW SCREEN (0,400)-(640,0)
4260 ZZ=COH(1)
4270 FOR I=1 TO M/2
4280     IF COH(I)>ZZ THEN 4300
4290     GOTO 4310
4300     ZZ=COH(I)
4310 NEXT I
4320 FOR I=1 TO M/2-1
4330 LINE (I*1200/M+20,320-200*COH(I)/ZZ)-((I+1)*1200/M+20,320-200*COH(I+1)/ZZ)
4340 NEXT I

```

```

4350 GOSUB 5000
4351 LOCATE 13,3:PRINT "Coh(n) "
4352 LOCATE 22,38:PRINT "n"
4353 LOCATE 14,8:PRINT "Spectre de cohérence normalisé"
4360 LOCATE 17,1:PRINT "1"
4380 VIEW (320,200)-(639,399)
4381 WINDOW SCREEN (0,400)-(640,0)
4400 REM *** TRACE DU SPECTRE DE PHASE ***
4410 FOR I=1 TO M-1
4420 LINE (I*1200/M+20,200-100*PH(I))-((I+1)*1200/M+20,200-100*PH(I+1))
4440 NEXT I
4441 LINE (15,200)-(25,200)
4442 FOR I=1 TO M-1 STEP M/16
4446 LINE (I*1200/M+20,325)-(I*1200/M+20,315)
4448 NEXT I
4450 LINE (20,0)-(20,380)
4460 LINE (10,320)-(640,320)
4470 LINE (20,0)-(15,5)
4480 LINE (20,0)-(25,5)
4490 LINE (640,320)-(635,315)
4495 LINE (640,320)-(635,325)
4500 LOCATE 13,43:PRINT "PH(n) "
4510 LOCATE 22,78:PRINT "n"
4520 LOCATE 14,46:PRINT "Spectre de PHASE"
4530 LOCATE 19,40 PRINT "0"
4900 RETURN
5000 REM **** TRACE D'AXES ****
5010 LINE (20,0)-(20,340)
5020 LINE (10,320)-(640,320)
5030 LINE(20,0)-(15,5)
5031 LINE(20,0)-(25,5)
5034 LINE (640,320)-(635,315)
5035 LINE (640,320)-(635,325)
5037 LINE (15,120)-(25,120)
5043 FOR I=1 TO M/2 STEP M/16
5045 LINE (I*1200/M+20,325)-(I*1200/M+20,315)
5046 NEXT I
5070 RETURN

```

```

10 CLS
20 FE=300
30 PI=6.28318307179586#2
40 REM ***          PROGRAMME DE SIMULATION DU SIGNAL EEG          ***
50 INPUT "Nbre de points :";N
60 INPUT "Nombre d'activité à simuler :";DG
70 DIM F(DG),A(DG),X(N),Y(N)
80 FOR J=1 TO DG
90   INPUT "La frequence de l'activité :";F(J)
100  INPUT "L'amplitude du signal:";A(J)
110 NEXT J
120 SYG=0
130 FOR J=1 TO DG
140   SYG=SYG+A(J)
150 NEXT J
160 FOR I=1 TO N
170   X(I)=0
180   FOR J=1 TO DG
190     X(I)=(A(J)/SYG)*SIN(2*PI*I*F(J)/FE)+X(I)
200     Y(I)=X(I)
210   NEXT J
220 NEXT I
230 REM *** GENERATION DE BRUIT BLANC AVEC DISTRIBUTION GAUSSIENNE ***
240 C=0
250 D=.01:IE=15:IS=0
260 AA=0
270 ID=8192
280 FOR I=1 TO N
290   IS=IE*899
300   IS=(IS/ID-INT(IS/ID))*ID
310   AA=IS
320   AA=AA*3.0517E-05
330   R1=AA
340   IE=IS
350   IS=IE*899
360   IS=(IS/ID-INT(IS/ID))*ID
370   AA=IS
380   AA=AA*3.0517E-05
390   R2=AA
400   IE=IS
410   AO=SQR(-2*LOG(R1))*COS(2*PI*R2)
420   BB=AO*D+C
430   X(I)=X(I)+BB
440   Y(I)=X(I)
450 NEXT I
460 OPEN "MAD" FOR OUTPUT AS 5

```

```

470 FOR I=1 TO N
480   PRINT #5,X(I);", ";
490 NEXT I
500 CLOSE
510 OPEN "ONA" FOR OUTPUT AS 4
520 FOR I=1 TO N
530   PRINT #6,Y(I);", ";
540 NEXT I
550 CLOSE
560 REM*****
570 REM*****TRACE DU SIGNAL SIMULE *****
580 REM*****
590 CLS
600 SCREEN 3
610 FOR I=1 TO N-1
620   Y=(-X(I)*150)/DG+200
630   Y1=(-X(I+1)*150)/DG+200
640   X=I*600/N+10
650   X1=(I+1)*600/N+10
660   LINE (X,202)-(X,198)
670   LINE (X,Y)-(X1,Y1)
680 NEXT I
690 REM*****
700 REM*****TRACE D' AXES*****
710 REM*****
720 LINE (10,0)-(10,350)
730 LINE (10,200)-(639,200)
740 LINE (10,0)-(5,5):LINE (10,0)-(15,5)
750 LINE (639,200)-(634,195):LINE (639,200)-(634,205)
760 LINE (5,50)-(15,50):LINE (5,125)-(15,125)
770 LOCATE 3,1:PRINT "1"
780 LOCATE 1,3:PRINT "X(n)":LOCATE 14,79:PRINT "n"
790 LOCATE 22,1

```

ANNEXE : C

```

10 CLS
20 REM *****
25 REM ***** SIMULATION D'UN SIGNAL *****
30 REM *****
40 GOSUB 1840
50 FOR I=1 TO 1000:NEXT I
60 CLS:SCREEN 3
70 PI=6.28318307179586#2
80 FE =300
90 INPUT "NOMBRES DE COURBES A SOMMER:";DG
100 DIM F(DG)
110 FOR J=1 TO DG
120     PRINT "FREQUENCE DU SIGNAL N°:";J:INPUT "F(J):";F(J)
130 NEXT J
140 T1$=TIME$
150 NP=1024
160 DIM X(NP*2),Y(NP*2)
170 OPEN "A:MAD" FOR INPUT AS 5
180 FOR I=1 TO NP*2
190     INPUT #5,X(I)
200 NEXT I
210 CLOSE
220 CLS
230 REM *****
240 REM ***** GRAPHISME *****
250 REM *****
260 VIEW (0,0)-(320,200)
270 WINDOW SCREEN (0,399)-(639,0)
280 FOR I=0 TO NP-1
290     Y=(-X(I)*150)/DG+200
300     Y1=(-X(I+1)*150)/DG+200
310     X=I*600/NP+10
320     X1=(I+1)*600/NP+10
330     LINE (X,Y)-(X1,Y1)
340 NEXT I
350 FOR I=1 TO NP-1 STEP 100
360     Y=(-X(I)*150)/DG+200
370     Y1=(-X(I+1)*150)/DG+200
380     X=I*600/NP+10
390     X1=(I+1)*600/NP+10
400     LINE (X,202)-(X,198)
410 NEXT I
420 REM *****
430 REM ***** TRACE D'AXES *****
440 REM *****
450 LINE (10,0)-(10,350)
460 LINE (10,200)-(639,200)

```

```

470 LINE (10,0)-(5,5):LINE (10,0)-(15,5)
480 LINE (639,200)-(634,195):LINE (639,200)-(634,205)
490 LINE (5,50)-(15,50):LINE (5,125)-(15,125)
500 LOCATE 2,1:PRINT "1"
510 LOCATE 1,3:PRINT "X(n)" :LOCATE 8,39:PRINT "n"
520 LOCATE 22,1
530 REM *****
540 REM *** CALCUL D'UN FILTRE PASSE BAS PAR LA METHODE D'ECHANTILLONNAGE ***
550 REM *****
560 M=30
570 W=75
580 N=51
590 DIM S(M),Y5(NP)
600 FC=75
610 PI=6.28318307179586#W/2
620 DIM H(NP),G(N)
630 OPEN "A:H"FOR INPUT AS 3
640 FOR K=0 TO NP-1
650     INPUT #3,H(K)
660 NEXT K
670 CLOSE
680 FOR I=(N-1)/2 TO NP+(N-1)/2
690     Y(I)=0
700     FOR K=0 TO N-1
710         IF I<K THEN 740
720         Y(I)=Y(I)+H(K)*X(I-K)
730         GOTO 750
740         K=N
750     NEXT K
760 NEXT I
770 VIEW (320,0)-(639,200)
780 WINDOW SCREEN (0,399)-(639,0)
790 FOR I=(N-1)/2 TO NP+(N-1)/2-1
800     Y=(-Y(I)*150)/DG+200
810     Y1=(-Y(I+1)*150)/DG+200
820     X=(I-(N-1)/2)*600/NP+10
830     X1=(I-(N-1)/2+1)*600/NP+10
840     LINE (X,Y)-(X1,Y1)
850 NEXT I
860 FOR I=(N-1)/2 TO NP+(N-1)/2-1 STEP 100
870     Y=(-Y(I)*150)/DG+200
880     Y1=(-Y(I+1)*150)/DG+200
890     X=(I-(N-1)/2)*600/NP+10
900     X1=(I-(N-1)/2+1)*600/NP+10
910     LINE (X,202)-(X,198)
920 NEXT I

```

```

930 REM *****
940 REM ***** TRACE D'AXES *****
950 REM *****
960 LINE (10,0)-(10,350)
970 LINE (10,200)-(639,200)
980 LINE (10,0)-(5,5):LINE (10,0)-(15,5)
990 LINE (639,200)-(634,195):LINE (639,200)-(634,205)
1000 LINE (5,50)-(15,50):LINE (5,125)-(15,125)
1010 LOCATE 2,40:PRINT "1"
1020 LOCATE 1,43:PRINT "Y(n) " :LOCATE 8,79:PRINT "n"
1030 GOTO 1040
1040 OPEN "A:R" FOR INPUT AS 1
1050 FOR I=1 TO M
1060     INPUT #1,B0,B1,B2,B3,B4
1070     IF I=1 THEN GOSUB 1620
1080     F1=X(0)
1090     F2=F1
1100     F3=F2
1110     Y5(0)=B0*F3
1120     F2P=F2:F3P=F3
1130     F1=X(1)
1140     F2=F1-B1*F2P
1150     F3=F2-B3*F3P
1160     Y5(1)=B0*F3
1170     FOR J=2 TO NP
1180         F2PP=F2P
1190         F2P=F2
1200         F3PP=F3P
1210         F3P=F3
1220         F1=X(J)-X(J-2)
1230         F2=F1-B1*F2P-B2*F2PP
1240         F3=F2-B3*F3P-B4*F3PP
1250         Y5(J)=B0*F3
1260     NEXT J
1270     S(I)=0
1280     FOR L=0 TO NP STEP M
1290         Y5(L)=Y5(L)*Y5(L)
1300         S(I)=S(I)+Y5(L)
1310     NEXT L
1320 NEXT I
1330 CLOSE
1340 YX=5(1)
1350 FOR I=1 TO M
1360     IF S(I)>YX THEN 1380
1370     GOTO 1390
1380     YX=S(I)

```

```

1390 NEXT I
1400 VIEW (150,200)-(489,399)
1410 WINDOW SCREEN (0,399)-(639,0)
1420 FOR I=1 TO M-1
1430 LINE (W*(I+.5)/M*5+20,320-5(I)/YX*200)-((I+1.5)*W/M*5+20,320-5(I+1)/YX*200)
1440 LINE (30,10)-(30,320)
1450 LINE (30,320)-(639,320)
1460 NEXT I
1470 LINE (30,10)-(25,15):LINE (30,10)-(35,15)
1480 LINE (639,320)-(634,325):LINE (639,320)-(634,315)
1490 LOCATE 22,1
1500 LOCATE 22,59:PRINT "f(Hz)"
1510 LOCATE 14,23:PRINT "S(f)"
1520 LINE (25,320-.5*300)-(35,320-.5*300)
1530 LINE (25,320-1*300)-(35,320-1*300)
1540 LOCATE 19,18:PRINT ".5"
1550 LOCATE 14,18:PRINT "1"
1560 LOCATE 23,18:PRINT "0"
1570 T2$=TIME$
1580 LOCATE 2,68:PRINT "T.D=";T1$
1590 LOCATE 4,68:PRINT "T.F=";T2$
1600 LOCATE 22,1
1610 END
1620 F2=X(0)
1630 F3=F2
1640 Y5(0)=B0*F3
1650 F2P=F2:F3P=F3
1660 F2=X(1)-B1*F2P
1670 F3=F2-B3*F3P
1680 Y5(1)=B0*F3
1690 FOR J=2 TO NP
1700     F2PP=F2P
1710     F2P=F2
1720     F3PP=F3P
1730     F3P=F3
1740     F2=X(J)-B1*F2P-B2*F2PP
1750     F3=F2-B3*F3P-B4*F3PP
1760     Y5(J)=B0*F3
1770 NEXT J
1780 S(1)=0
1790 FOR L=0 TO NP STEP M
1800     Y5(L)=Y5(L)*Y5(L)
1810     S(1)=S(1)+Y5(L)
1820 NEXT L
1830 RETURN

```

```

1840 SCREEN 1:SCREEN 0:COLOR 2,0:PRINT "*****"
1850 PRINT "*****"
1860 PRINT "**"
1870 PRINT "**"
1880 PRINT "**"
1890 PRINT "**":COLOR 16,2
1900 PRINT "**      ANALYSE SPECTRALE  **":COLOR 2,0
1910 PRINT "**      D'UN SIGNAL           **":COLOR 16,2
1920 PRINT "**      PROGRAMME REALISE PAR :  **":COLOR 2,0
1930 PRINT "**      AIT BOUDAUD DJAMEL    **"
1940 PRINT "**      &                          **"
1950 PRINT "**      AGGOUN AMAR           **"
1960 PRINT "**      DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE **"
1970 PRINT "**"
1980 PRINT "**"
1990 PRINT "**"
2000 PRINT "**"
2010 PRINT "**"
2020 PRINT "**"
2030 PRINT "**"
2040 PRINT "**"
2050 PRINT "*****"
2060 PRINT "*****"
2070 RETURN
2080 YX=5(1)
2090 FOR I=1 TO H
2100     IF 5(I)>YX THEN 1380
2110     GOTO 1390
2120     YX=5(I)
2130 NEXT I
2140 FOR J=1 TO DG
2150     LINE (F(J)*5+26,320)-(F(J)*5+26,325)
2160     LOCATE 23,(F(J)*5+26)/4.2:PRINT F(J)
2170 NEXT J

```

```

10 REM *****
20 REM *****CALCUL DES POLES D'UN FILTRE DE BUTTERWORTH*****
30 REM *****
40 CLS
50 W=75
60 M=30
70 DIM Z1(M),Z2(M),A(M),B(M),C(M),D(M),B1(M),B2(M),B3(M),B4(M),B0(M)
80 T=1/(4*W)
90 PI=6.283183071795864/2
100 I=1:Y1=-2*PI*W*COS(3*PI/8)/M:X1=2*PI*W*SIN(3*PI/8)/M
110 Y2=-2*PI*W*COS(PI/8)/M:X2=2*PI*W*SIN(PI/8)/M
120 A1=EXP(Y1*T)*COS(X1*T):A(I)=A1:B1=EXP(Y1*T)*SIN(X1*T):B(I)=B1
130 C1=EXP(Y2*T)*COS(X2*T):C(I)=C1:D1=EXP(Y2*T)*SIN(X2*T):D(I)=D1
140 IF B1>0 THEN PRINT "Z1(",I,")=";A1;"+";B1,"MOD Z1(",I,")=";SQR(A1*A1+B1*B1):Z1(I)=SQR(A1*A1+B1*B1):GOTO 160
150 B1=B1*(-1):PRINT "Z1(",I,")=";A1;"-" ;B1,"MOD Z1(",I,")=";SQR(A1*A1+B1*B1):Z1(I)=SQR(A1*A1+B1*B1)
160 IF D1>0 THEN PRINT "Z2(",I,")=";C1;"+";D1,"MOD Z2(",I,")=";SQR(C1*C1+D1*D1):Z2(I)=SQR(C1*C1+D1*D1):GOTO 180
170 D1=D1*(-1):PRINT "Z2(",I,")=";C1;"-" ;D1,"MOD Z2(",I,")=";SQR(C1*C1+D1*D1):Z2(I)=SQR(C1*C1+D1*D1)
180 FOR I=2 TO M
190 Y=-2*PI*W*COS(PI/4)/(M*2):Z=2*PI*W*SIN(PI/4)/(M*2):X=2*PI*W*(I-.5)/M
200 A=EXP(Y*T)*COS((X+Z)*T):A(I)=A:B=EXP(Y*T)*SIN((X+Z)*T):B(I)=B
210 C=EXP(Y*T)*COS((X-Z)*T):C(I)=C:D=EXP(Y*T)*SIN((X-Z)*T):D(I)=D
220 IF B>0 THEN PRINT "Z1(",I,")=";A;"+";B,"MOD Z1(",I,")=";SQR(A*A+B*B):Z1(I)=SQR(A*A+B*B):GOTO 240
230 B=B*(-1):PRINT "Z1(",I,")=";A;"-" ;B,"MOD Z1(",I,")=";SQR(A*A+B*B):Z1(I)=SQR(A*A+B*B)
240 IF D>0 THEN PRINT "Z2(",I,")=";C;"+";D,"MOD Z2(",I,")=";SQR(C*C+D*D):Z2(I)=SQR(C*C+D*D):GOTO 260
250 D=D*(-1):PRINT "Z2(",I,")=";C;"-" ;D,"MOD Z2(",I,")=";SQR(C*C+D*D):Z2(I)=SQR(C*C+D*D)
260 NEXT I
270 CLS
280 REM *****
290 REM *****CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA FONCTION DE TRANSFERT*****
300 REM *****
310 PRINT:PRINT:PRINT "L'EXPRESSION DE LA FONCTION DE TRANSFERT.":PRINT:PRINT:PRINT
320 PRINT "          (1-Z^-1)(1+Z^-1)          "
330 PRINT "Hi(Z)=b0i -----"
340 PRINT "          (1+b1i*Z^-1+b2i*Z^-2)(1+b3i*Z^-1+b4i*Z^-2)          "
350 FOR I=1 TO M
360 B1(I)=-2*A(I):B2(I)=Z1(I)*Z1(I):B3(I)=-2*C(I):B4(I)=Z2(I)*Z2(I)
370 NEXT I
380 I=1
390 B0(I)=(1+B1(I)+B2(I))*(1+B3(I)+B4(I))
400 FOR I=2 TO M
410 BETA=2*PI*W*(I-.5)/M
420 L1=1+B1(I)*B1(I)+B2(I)*B2(I)+2*(B1(I)*(B2(I)+1)*COS(BETA*T)+B2(I)*COS(2*BETA*T))
430 L2=1+B3(I)*B3(I)+B4(I)*B4(I)+2*(B3(I)*(B4(I)+1)*COS(BETA*T)+B4(I)*COS(2*BETA*T))
440 L3=2*(1-COS(2*BETA*T))
450 B0(I)=(L1*L2/L3)^.5
460 NEXT I

```

```
470 OPEN "R" FOR OUTPUT AS 1
480 FOR I=1 TO M
490     PRINT #1,B0(I);",",
500     PRINT #1,B1(I);",",
510     PRINT #1,B2(I);",",
520     PRINT #1,B3(I);",",
530     PRINT #1,B4(I);",",
540 NEXT I
550 CLOSE
```

```

10 CLS
20 REM *** REPOSE IMPULSIONNELLE DU FILTRE PASSE BAS ***
30 M=30
40 W=75
50 N=51
60 NP=1024:FE=300
70 FC=75
80 CLS
90 PI=6.28318307179586# / 2
100 DIM H(NP),G(N)
110 DIM P1(N),P2(N),P3(N),P4(N)
120 FOR K=0 TO (N-1)/2
130     LOCATE 1,70:PRINT TIME$
140     H(K)=1/N
150     FOR I=1 TO (N-1)/2 + 1
160         FG=N*FC/FE
170         IF I<FG-1 THEN GOTO 220
180         IF I>FG-1 AND I<FG THEN GOTO 240
190         IF I>FG AND I<FG+1 THEN 260
200         G(I)=0
210         GOTO 270
220         G(I)=1
230         GOTO 270
240         GOSUB 470
250         GOTO 270
260         G(I)=R
270         X=2*G(I)*COS (2*PI*(K)*I/N)
280         H(K)=H(K)+X/N
290     NEXT I
300 NEXT K
310 H(N-1)=H((N-1)/2)
320 FOR K=(N-1)/2 TO N-2
330     H(K)=H(K-(N-1)/2)
340 NEXT K
350 FOR K=0 TO (N-1)/2
360     H(K)=H(N-1-K)
370 NEXT K
380 FOR K=N TO NP-1
390     H(K)=0
400 NEXT K
410 OPEN "H" FOR OUTPUT AS 3
420 FOR K=0 TO NP-1
430     PRINT #3,H(K);", ";
440 NEXT K
450 CLOSE
460 END

```

```

465 REM *** SOUBROUTINE D' INTERPOLATION ****
470 F1=(2*I-1)/(2*N):F2=(2*I+3)/(2*N)
480 FOR J=0 TO I+1
490   P1(J)=SIN (N*PI*(F1-J/N))/(N*SIN (PI*(F1-J/N)))
500   P2(J)=SIN (N*PI*(F1+J/N))/(N*SIN (PI*(F1+J/N)))
510   P3(J)=SIN (N*PI*(F2-J/N))/(N*SIN (PI*(F2-J/N)))
520   P4(J)=SIN (N*PI*(F2+J/N))/(N*SIN (PI*(F2+J/N)))
530 NEXT J
540 A1=P1(0):A2=P3(0)
550 FOR J=1 TO I-1
560   A1=A1 +P1(J)+P2(J):A2=A2+P3(J)+P4(J)
570 NEXT J
580 B1=P1(I)+P2(I):B2=P3(I)+P4(I)
590 C1=P1(I+1)+P2(I+1):C2=P3(I+1)+P4(I+1)
600 DET1=.05:DET2=-.05
610 D=B1*C2-B2*C1:D1=(1+DET1-A1)*C2-(DET2-A2)*C1:D2=B1*(DET2-A2)-B2*(1+DET1-A1)
620 G(I)=D1/D:R=D2/D
630 RETURN

```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] -M.L Hector - L'enregistrement électroencéphalographique
Masson 1976
- [2] -J.Cambier -Neurologie - Masson 1981
- [3] -M.Bellanger-Traitement numérique du signal- Masson 1984
- [4] -M.Bellanger et P.Bonnával- Quelques applications de la
transformée de fourier rapide-L'onde electri-
que NOV 1968 VOL.48 N°500
- [5] -M.Kunt -Traitement numérique du signal- Masson 1981
- [6] -J.Liffermann -Théorie et applications de la transformée de
Fourier rapide- Masson 1977
- [7] -J.Max -Méthodes et techniques de traitement du signal et
applications aux mesures physiques- Tome I et II
Masson 1981
- [8] -D.Childers and A.Durling- Digital filtering and signal
processing-West publishing company 1975
- [9] -L.Cromwell-Biomedical instrumentation and measurements
Prentice-Hall 1980
- [10] -M.Bellanger- Evaluation de la complexité des filtres
numériques-ANNALES télécommun. 1982
- [11] -M.Mrayti et J.F.Serignat-Conception et réalisation des
Filtres numériques-Automatisme 1976
- [12] -I.M-mallawany-Le filtrage numérique-ANNALES télécomun.
OCT.1968
- [13] -M.Labarrere et J.P.Krief et B.Gimonet-Lefiltrage et ses
applications-Cepadues 1982
- [14] -Fondanèche - Les filtres numériques Masson 1980
- [15] -N.Bennidir et K.Djezzar-Simulation d'une analyse
spectrale numérique de l'EEG-Projet de fin
d'études ENP JAN 1985
- [16] -F.Soltani et T.Nacer -Traitement numérique de données de
l'EEG-Projet de fin d'étude ENP JUIN 1985
- [17] -M.Zerrouki et M.ATTARI-Traitement du signal par FFT
utilisé dans le radar ST AIR Clair-Projet
de fin d'étude ENP JUIN 1985