

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : ELECTRONIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

INGENIORAT D'ETAT EN ELECTRONIQUE

SUJET

ETUDE DE LA SENSIBILITE
STRUCTURELLE DE FILTRES
NUMERIQUES RII & RIF
"POUR E. E. G."

Proposé par :
M.D.E. AZOUZ

Etudié par :
AOUIZERAT Hadj
KERROUCHE Farida

Dirigé par :
M.D.E. AZOUZ

Promotion Juin 1986

DEDICACES

- A mon grand-père
- A ma grand-mère
- A mes tantes et oncles
- A toute ma famille
- A tous mes amis(es)

Je dédie ce modeste travail.

HADJ AOUIZERAT.

- A la mémoire de mon père
- A toute ma famille
- A tous mes amis(es)

FARIDA KERROUCHE.

REMERCIEMENTS

Nous adressons nos vives remerciements à monsieur D.E.AZOUZ d'avoir proposé et dirigé ce travail, ainsi qu'à monsieur A.MAAFI d'avoir participé à la proposition de ce sujet.

Nous n'oublions pas tous les professeurs qui ont contribué à notre formation durant le cycle universitaire.

A tous ceux qui nous ont aidé de loin ou de près à l'élaboration de ce travail.

SOMMAIRE

INTRODUCTION		1
CHAPITRE I	NOTIONS DE BASE	2
	- Introduction	2
	1.1 Signaux numériques	2
	1.2 Transformée de fourier	3
	1.3 Transformée en Z	3
	1.4 Les filtres numériques	4
	1.4.2 Fonction de transfert	4
	1.4.3 Classification des filtres numériques	6
	1.4.3.1 Filtres récurrents "R.I.I"	6
	1.4.3.2 Filtres non_récurrents "R.I.F"	7
	1.4.4 Structures des filtres numériques	8
	1.4.5 Sensibilité des filtres numériques	9
CHAPITRE II	SYNTHESE DES FILTRES NUMERIQUES POUR E.E.G	12
	- Généralités	12
	2.2.1 Calcul des coefficients du filtre "R.I.I"	13
	2.2.2 Calcul des coefficients du filtre "R.I.F"	18
	2.3 Fonction de transfert pour les différentes structures pour "R.I.I" et "R.I.F"	20
	2.4 Conclusion	26
CHAPITRE III	SENSIBILITE	29
	- Généralités	29
	3.1 Définition d'une méthodologie	29
	3.2 Sensibilité des filtres "R.I.I"	31
	3.2.1 Comparaison des structures directe et cascade	31

3.2.2	Comparaison des structures cascade et parallèle	32
3.2.3	Sensibilité des filtres "R.I.I" due a la quantification de ses coefficients	35
3.3	Sensibilité des filtres "R.I.F"	39
	- Interprétation des courbes	41
	CONCLUSION	44
	ANNEXES	
ANNEXE I	Différents types de transformation	45
ANNEXE II	Programmes utilisés	47
ANNEXE III	Rappels mathématiques	56

INTRODUCTION:

L'importance du traitement du signal, n'est plus à démontrer surtout avec l'essor actuel des technologies numériques. D'une façon générale, le traitement du signal aura pour but de faire ressortir au mieux ce que l'on désire observer (le signal) d'un environnement parasite (le bruit).

La fonction de base du traitement du signal est donc le filtrage, qui consiste essentiellement à éliminer des bruits superposés aux signaux utiles.

Auparavant seul existait le filtrage analogique mais avec l'avènement du microprocesseur et le développement des techniques numériques, le filtrage numérique s'est imposé. Ce dernier, par rapport à l'analogique, qu'il remplace dans bien des cas a ses performances : grandes variétés, souplesse de sa mise en forme, adaptation aux très basses fréquences ...

En revanche, il convient de noter qu'il exige une très grande maîtrise non seulement théorique mais aussi de mise en œuvre. Autre différence de base, le filtrage numérique est capable de beaucoup plus de souplesse que les dispositifs analogiques, pour faire varier les coefficients on effectuera des traitements non-linéaires. Plutôt que de faire ressortir un signal du bruit, il devient possible, alors, d'en extraire les informations utiles : Analyse de la parole, reconnaissance des formes, détection d'anomalies dans des signaux sismiques ou médicaux.

Dans cet ouvrage, on s'intéresse au domaine particulier qu'est le biomédical, car il s'agit pour nous de rechercher une structure et un type de filtre numérique pour le traitement de signaux "E.E.G" le moins sensible à la variation ou quantification de ses coefficients.

Dans le premier chapitre, nous explicitons les notions générales liées au filtrage numérique : on définit les filtres numériques, leurs différentes classes et les structures de chacune des classes.

Dans le second, on définit le signal "E.E.G". On synthétisera ensuite, pour le traitement de l'E.E.G, des filtres numériques "R.I.I", "R.I.F" sous différentes structures.

Le dernier chapitre constituera la partie la plus importante. En effet elle consiste à étudier la sensibilité de chacune des structures des filtres conçus par rapport à ses coefficients. De plus, pour tenir compte de la longueur du mot (8, 16 ou 32 bits) spécifique à chaque calculateur, nous étudions l'effet sur la transmittance de la quantification des coefficients de chaque structure.

Famille de

CHAPITRE PREMIER

de

NOTIONS DE BASE:

INTRODUCTION:

Ce chapitre commence par énoncer les définitions élémentaires concernant les signaux numériques, de façon à étudier ensuite les systèmes discrets (dans notre cas ce sont des filtres numériques). Après avoir défini ces outils mathématiques nécessaires, nous précisons les termes couramment utilisés et quelques définitions concernant les filtres numériques.

1.1 SIGNAUX NUMERIQUES:

1.1.1 DEFINITION:

Un signal discret (ou numérique) est défini comme une suite d'éléments de \mathbb{R} :

$$X = \{ X(n) \}_{n \in \mathbb{Z}}, X(n) \in \mathbb{R},$$

Dans de nombreuses applications le phénomène physique est étudié à partir d'un instant initial t_0 , par translation et pour des raisons de simplicité l'origine des temps choisie est zéro et les signaux sont supposés nuls avant l'initialisation. Ces signaux sont appelés causaux et sont définis de la façon suivante:

1.1.2 DEFINITION DE LA CAUSALITE:

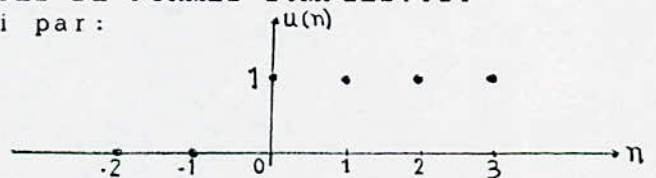
Un signal discret est causal ssi:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, x(n) = 0$$

1.1.3 EXEMPLES DE SIGNAUX NUMERIQUES DE FORMES SIMPLES. [2]

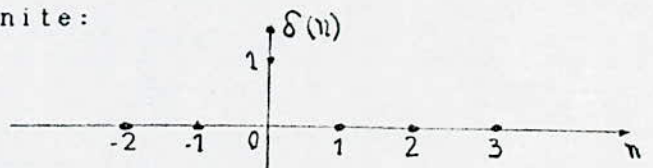
- Le signal saut unité est défini par:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



- L'échantillon ou l'impulsion unité:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n=0 \\ 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases}$$



- Signal retardé:

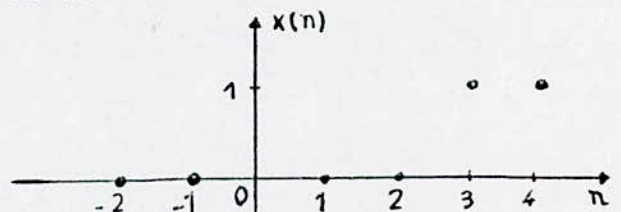
DEFINITION: Un signal y est égal au signal x retardé de k ssi:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad y(n) = x(n-k)$$

EXEMPLE:

$$x(n) = u(n-n_0), \text{ avec } n_0 > 0$$

$u(n)$ défini précédemment.



1.2 TRANSFORMEE DE FOURIER:

Les informations contenues dans un signal sont de 2 natures: TEMPORELLES et FREQUENTIELLES

Un filtre -comme on le verra après- est un système dont les caractéristiques sont exprimées dans le domaine fréquentiel. Il est donc nécessaire de disposer d'une technique de passage du domaine temps-réel au domaine fréquentiel. L'outil mathématique approprié est la transformation de fourier que nous allons introduire ici.

1.2.1 SERIE DE FOURIER:

Notons (R) comme représentation des signaux analogiques.

La série de fourier permet de décomposer un signal périodique. Nous définissons le développement en série exponentielle de fourier des fonctions périodiques de $\mathcal{L}^2(R)$.

$\forall f \in \mathcal{L}^2(R)$ tel que f périodique de période $T = 2\pi / \omega_0$.

$$f(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} C_i \exp(ij\omega_0 t), \forall t \in R$$

avec $C_i = 1/T \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \exp(-ij\omega_0 t) dt ; i \in \mathbb{Z}$

REMARQUE:

Le développement en série de fourier d'une fonction périodique correspond à une représentation fréquentielle discrète de la fonction.

1.2.2 TRANSFORMATION DE FOURIER:

La transformation de fourier nous permet de passer du domaine temporel continu au domaine fréquentiel continu. [1]

La transformation de fourier $F(\omega)$, d'un signal représenté par $f(t)$ est donnée par la relation suivante:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt$$

1.3 TRANSFORMATION EN Z:

La transformation en Z joue dans le domaine numérique le même rôle fondamental que la transformée de Laplace dans le domaine analogique.

1.3.1 DEFINITION:

La transformée en Z, $X(z)$ d'un signal numérique $x(k)$ est définie par:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) Z^{-k}$$

$X(z)$ est appelé fréquemment transformée en Z bilatérale.

Dans l'étude des signaux et des systèmes causaux on utilise la transformée en Z unilatérale définie par:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) Z^{-k}$$

L'intérêt de cette transformée n'est du fait qu'elle peut être interprétée de la façon simple dans les 2 domaines, temporel et fréquentiel.

Elle nous permet aussi l'étude théorique de la fonction de transfert d'un filtre numérique.

1.4 LES FILTRES NUMERIQUES:

Un filtre numérique est un système à temps discret linéaire et en général invariant.

1.4.1 DEFINITION:

Un filtre numérique F est un algorithme de calcul par lequel une séquence de nombres $\{X(n)\}$, dite séquence d'entrée, est transformée en une autre séquence de nombre $\{Y(n)\}$, dite séquence de sortie. Le filtre effectue la transformation:

$$\{Y(n)\} = F[\{X(n)\}]$$

Pour cela l'unité de calcul est munie des opérateurs :

- Addition
- Multiplication
- Retard

L'étude sera limitée au filtre possédant les 3 propriétés suivantes:

- **LINEARITE:** F est dite linéaire si à la séquence d'entrée :

$$\{E(n)\} = a_0 \{X_1(n)\} + b_0 \{X_2(n)\}$$

fait correspondre la séquence de sortie:

$$\{S(n)\} = a_1 \{Y_1(n)\} + b_1 \{Y_2(n)\}$$

avec $\{Y_1(n)\} = F[\{X_1(n)\}]$

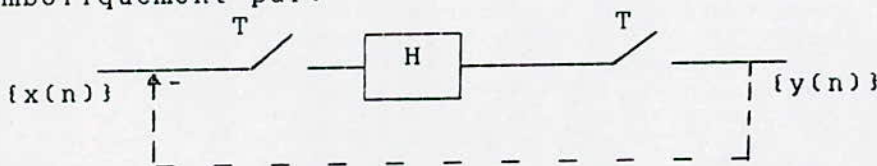
$$\{Y_2(n)\} = F[\{X_2(n)\}]$$

- **INVARIANCE TEMPORELLE:** F est dit invariant temporel si a la séquence $\{X(n-k)\}$, séquence $\{X(n)\}$ retardée de k périodes d'horloges, il fait correspondre la séquence de sortie $\{Y(n-k)\}$.

- **CAUSALITE:** Les filtres travaillant en temps réel doivent satisfaire le principe de causalité (définition en 1.1.2). [2]

1.4.2 FONCTION DE TRANSFERT (équations aux différences):

Suite à la définition d'un filtre numérique donnée en (1.5.1); supposons un système linéaire à temps discret représenté symboliquement par:



Le signal de sortie (y) à l'instant n (nT) peut s'écrire comme une combinaison linéaire du signal d'entrée aux instants n, n-1, ...

$$\text{Alors: } y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \dots + a_N x(n-N) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2) - \dots - b_M y(n-M)$$

$$y(n) = \sum_{i=1}^N a_i X(n-i) - \sum_{i=1}^M b_i Y(n-i) \quad N < M \text{ pour tout système physique.}$$

En s'appuyant sur la propriété suivante (transformée en Z)

$$\text{si a } x(n) \xrightarrow{\text{T.Z}} X(z)$$

$$x(n-k) \xrightarrow{\text{T.Z}} Z^{-k} X(z)$$

$$Y(z) = \sum_{i=0}^N a_i Z^{-i} X(z) - \sum_{i=1}^M b_i y(z) Z^{-i}$$

La fonction de transfert est alors:

$$Y(z) \left[1 + \sum_{i=1}^M b_i Z^{-i} \right] = X(z) \sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M b_i Z^{-i}}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M b_i Z^{-i}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

1.4.2.1 UTILITE DE H(Z):

- DOMAINE TEMPOREL:

La connaissance de $H(z) = N(z)/D(z)$ permet de calculer la relation de récurrence du filtre: La connaissance de cet algorithme est bien sûr indispensable pour pouvoir programmer l'unité de calcul.

- DOMAINE FREQUENTIEL:

L'évaluation de $H(z)$ pour $Z = \exp(-j\omega T_e)$ permet de calculer le module et l'argument de la fonction de transfert du filtre; de là son comportement fréquentiel est connu, ce qui est essentiel à nos yeux.

Nous comprendrons alors que pour un filtre numérique, seul importe le rapport de la fréquence f du signal à la fréquence F_e , et non à la valeur intrinsèque de f .

* CHOIX DE LA FREQUENCE D'ECHANTILLONNAGE F_e :

THEOREME DE SCHANNON: Si un signal $f(t)$ de spectre borné est échantillonné à une cadence supérieure à 2 fois la plus haute fréquence dans ce spectre, alors la quantité d'informations contenue dans le signal $f(t)$ est égale à celle contenue dans le signal discret obtenu par échantillonnage de $f(t)$.
L'application pratique de ce théorème donne lieu à plusieurs remarques:

- Le filtre passe-bas idéal, étant non causal, n'est pas physiquement réalisable. Tout au plus, peut-on l'approximer en module (filtres de Buttrworth) ou en argument.

- En pratique donc, parceque le module de la fonction de transfert du filtre réel n'est pas nul à $f > f_e/2$, on adopte une fréquence d'échantillonnage supérieure à celle indiquée par le théorème de Shannon.

1.4.3 CLASSIFICATION DES FILTRES NUMERIQUES:

D'après la fonction de Transfert du filtre numérique:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i Z^{-i}}$$

Il peut en résulter 2 types de filtres numériques:

- Filtre appelé **RECURSIF** quand au moins un des coefficients b_i est différent de zéro.
- Filtre appelé **NON-RECURSIF** quand tous les coefficients b_i sont nuls.

1.4.3.1 FILTRES RECURSIFS "RII":

La transmittance $H(z)$ d'un filtre récursif se présente sous la forme:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}}{\sum_{j=0}^N b_j Z^{-j}}$$

avec la restriction $b_0 \neq 0$

Les filtres ont en général N zéros finis et M pôles finis. Les zéros peuvent être n'importe où dans le plan des Z mais les pôles doivent être à l'intérieur du cercle unite pour des raisons de stabilité.

* Si l'on effectue la division polynomiale, on obtient:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) Z^{-n}$$

ou $\{h(n)\} n \in \mathbb{N}$ est la réponse impulsionnelle du filtre.

* **MOTS CLES:** Filtres dont la réponse impulsionnelle est de durée infinie (IRR : Infinite Impulsion Réponse, ou RII : Réponse Impulsionnelle Infinie).

* TECHNIQUE D'OBTENSION DES FILTRES RECURSIFS:

Il existe plusieurs méthodes de calcul de filtre RII; parmi ces méthodes, nous pouvons citer:

- La méthode par invariance impulsionnelle. [2]
- La méthode par invariance indicielle. [2]
- La méthode par transformation bilinéaire.

La méthode par transformation bilinéaire à l'avantage par rapport

aux 2 autres de conserver la réponse fréquentielle. Cette méthode est basée sur les propriétés des filtres analogiques. Elle conduit à des filtres récurrents à une réponse impulsionnelle causale et infinie. [ANNEXE 2]

1.4.3.2 FILTRES NON-RECURSIFS "RIF":

Ils se caractérisent par une transmittance de la forme:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

Ils présentent une réponse impulsionnelle de durée finie d'où la dénomination de filtres RIF ou FIR.

Comme on peut le remarquer ces filtres ont seulement N zéros finis donc stabilité toujours assurée puisqu'il n'y-a aucun pôle.

* TECHNIQUES D'OBTENSION DES FILTRES NON-RECURSIFS:

Il existe essentiellement 3 méthodes de calcul des filtres RIF:

a/ Calcul du filtre par développement en série de Fourier et utilisation de fenêtres qui consiste simplement à tronquer le développement en série de la transmittance idéale.

Les fenêtres les plus utilisées sont définies par les formules suivantes : [3]

a1- RECTANGULAIRE:

$$W_n = \begin{cases} 1 & , 0 < n < N-1 \\ 0 & , \text{ailleurs} \end{cases}$$

a2- BARTLETT:

$$W_n = \begin{cases} 2n/(N-1) & , 0 < n < (N-1)/2 \\ 2 - 2n/(N-1) & , (N-1)/2 < n < N-1 \end{cases}$$

a3- HANNING:

$$W_n = 1/2 [1 - \cos(2\pi n/(N-1))] , 0 < n < N-1$$

a4- HAMMING:

$$W_n = 0,54 + 0,46 \cos(2\pi n/(N-1)) , 0 < n < N-1$$

a5- BLACKMAN:

$$W_n = 0,42 + 0,5 \cos(2\pi n/(N-1)) + 0,08 \cos(4\pi n/(N-1)) , 0 < n < N-1$$

b/ Méthode de l'échantillonnage en fréquence consistant à approximer une réponse désirée par une courbe passant par ces échantillons. [2]

c/ Calcul de filtres optimaux par approximation au sens de TCHEBYCHEV. Cette méthode de conception est assistée par ordinateur (CAO). [1]

1.4.4 STRUCTURES DES FILTRES NUMERIQUES:

GENERALITES:

Après avoir défini les filtres numériques il est nécessaire de savoir comment implanter ces filtres sur un ordinateur (ordinateur).

Quelque soit la structure du filtre il est possible de réaliser l'implantation (programmation) de différentes facons. Les techniques les plus répondues sont les suivantes:

- Programmation(structure) parallèle.
- Programmation cascade (itérative).
- Programmation directe (canonique).

Le principe est d'écrire la fonction de transfert $H(z)$ du filtre sous une forme propre au type de programmation:

- Décomposition en éléments simples de $H(z)$.
- Décomposition en produits de transfert en premier ou en deuxième ordre.
- Utilisation de variables intermediaires.

1.4.4.1 STRUCTURE D'UN FILTRE RECURSIF:

a/ PROGRAMMATION (structure) DIRECTE:

a.1/ STRUCTURE DIRECTE 1 (canonique):

Soit $H(z)$ la fonction de transfert en Z du filtre.

La connaissance de cette fonction -donc l'équation de récurrence- nous permettra de programmer l'unité de calcul du filtre.

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M b_i Z^{-i}} \quad == \quad (1) \quad y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) - \sum_{j=1}^M b_j y(n-j)$$

L'équation (1) nous permet la réalisation du filtre sous la forme canonique (directe 1) (Fig 1).

On remarque que cette structure nécessite la gestion de 2 tables $x(n-i)$ et $y(n-i)$ donc $(N+M)$ emplacements mémoires, $(N+M)$ multiplications et $(N+M)$ additions.

Cependant on peut améliorer cette structure en introduisant une variable intermédiaire $W(z)$.

a.2/ STRUCTURE DIRECTE 2:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{W(z)} \times \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

avec $N(z) = Y(z)/W(z) = \sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}$

et $\frac{1}{D(z)} = \frac{W(z)}{X(z)}$, $D(z) = 1 - \sum_{i=1}^M b_i Z^{-i}$

Ce qui nous donne l'équation de récurrence:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i W(n-i)$$

$$W(n) = x(n) - \sum_{i=1}^M b_i W(n-i)$$

Cette structure est appelée forme directe 2, elle est illustrée par la figure-2-

Cette forme permet de réduire le nombre d'emplacements mémoires à M et la gestion d'une seule table W(n-i), le nombre de multiplication étant le même (M+N) que la forme directe 1 d'où un gain de temps de calcul.

b/ PROGRAMMATION PARALLELE:

La forme parallèle est obtenue en décomposant H(z) en fractions simples du premier ou du second ordre :

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_r(z) = \sum_{i=1}^r H_i(z)$$

$$H(z) = h_0 + \sum_{i=1}^r \frac{C_i + d_i Z^{-1}}{1 + e_i Z^{-1} + f_i Z^{-2}}$$

H_i(z) peut être réalisé sous la forme directe 1 ou 2 (Fig-3-)

c/ PROGRAMMATION CASCADE:

Cette forme est obtenue en décomposant la fonction de transfert en produits de facteurs simples du 1er ou du 2eme ordre.

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_r(z) = \prod_{i=1}^r H_i(z)$$

H_i(z) peut être réalisé sous la forme directe 1 ou 2 (Fig-4-):

$$H(z) = L_0 \prod_{i=1}^r \frac{1 + C_i Z^{-1} + d_i Z^{-2}}{1 + e_i Z^{-1} + f_i Z^{-2}}$$

1.4.4.2 STRUCTURE D'UN FILTRE NON RECURSIF:

La fonction de transfert en Z d'un filtre est de la forme:

$$H(z) = \sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}$$

Nous pouvons considérer H(z) comme:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M b_i Z^{-i}} \quad \text{avec: } b_i=0, i=1, \dots, M$$

Les résultats précédents de programmation cascade et directe sont alors directement applicables :

1.4.5 SENSIBILITE DES FILTRES NUMERIQUES :

a/ DIFFERENTS TYPES D'ERREUR :

Le traitement numérique d'un signal analogique introduit 3 types d'erreur :

- Erreur de conversion analogique-directe .
- Erreur de quantification-représentation d'une valeur par un nombre fixe de bits (si l'on travaille en binaire).
- Erreur de troncature (lors des opérations arithmétiques ou bien lors d'un déplacement).

b/ SENSIBILITE :

Quelque soit la réalisation physique d'un filtre numérique, les paramètres qui définissent sa transmittance sont représentés avec une précision finie.

Le choix d'une structure particulière dépend donc entre autres de la sensibilité de la transmittance aux erreurs de quantifications commises sur les coefficients.

Une méthodologie va être proposée au CHAPITRE III pour l'étude de la sensibilité des structures de filtres numériques.

SYMBOLES UTILISES DANS LES FIGURES (1 à 4) :

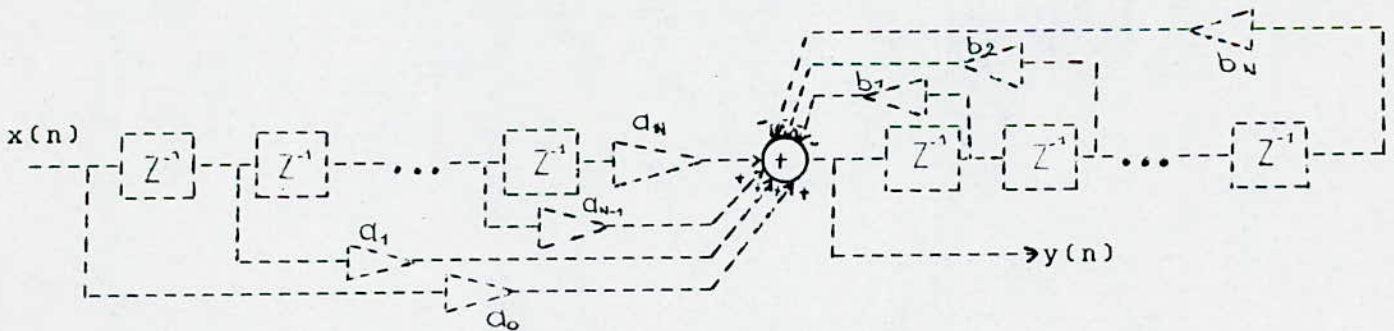
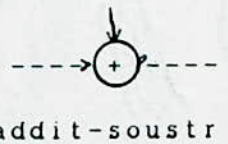
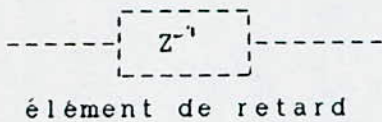


Fig-1- Forme directe 1

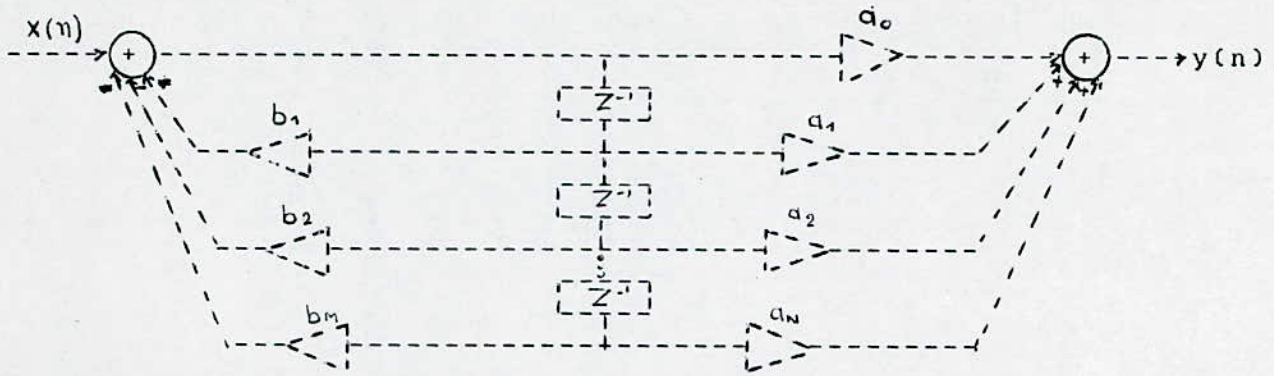


Fig-2- Forme directe 2 (canonique)

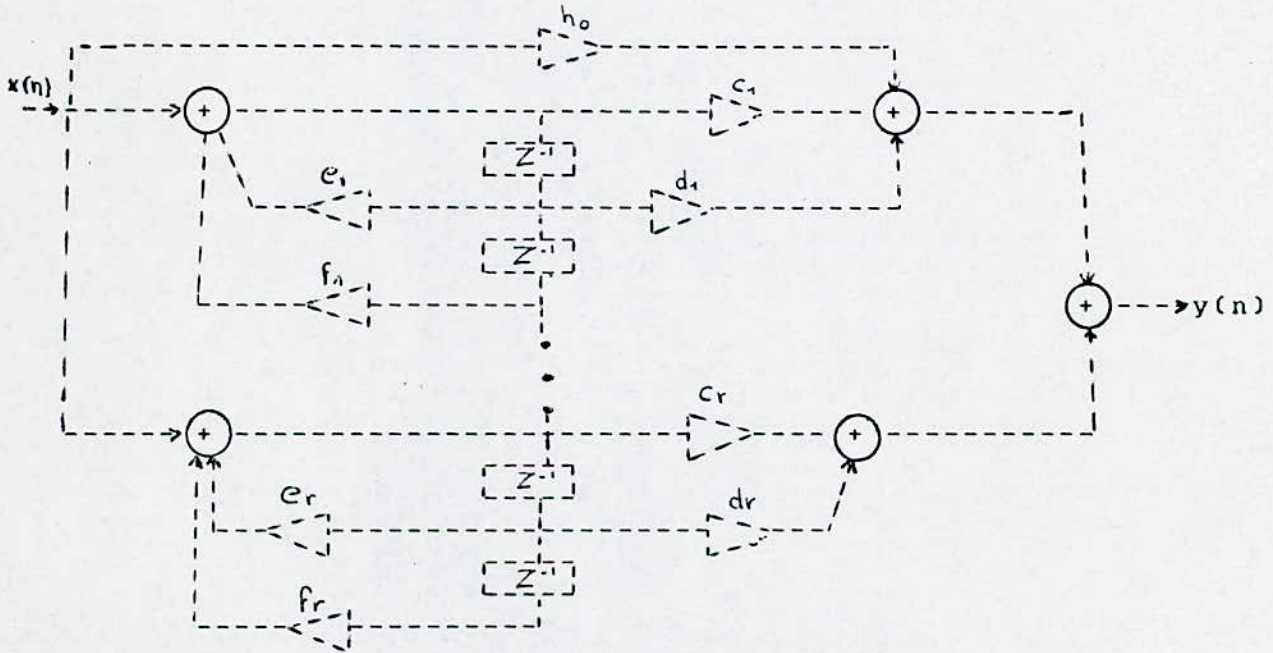


Fig-3- Forme parallele

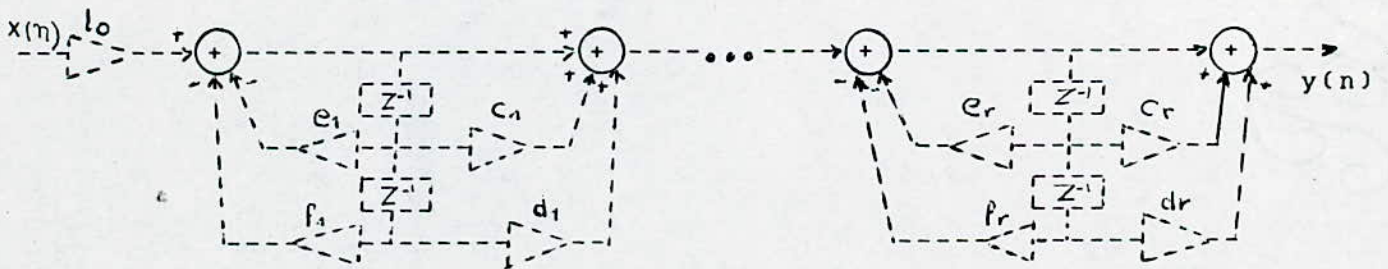


Fig-4- Forme cascade

CHAPITRE DEUXIEME

SYNTHESE DES FILTRES NUMERIQUES POUR E.E.G :

2.1 GENERALITES:

2.1.1 ELECTROCEPHALOGRAPHIE:

L'électrocéphalographie est une technique d'enregistrement graphique des variations des potentiels de divers points du cerveau. Si les électrodes, qui permettent de relever ces potentiels sont placées a la surface du crane, le tracé obtenu est appelé ELECTROENCEPHALOGRAMME "E.E.G".

2.1.2 ELECTROENCEPHALOGRAMME:

Le tracé peut montrer plusieurs catégories d'ondes ou rythmes [4].

- Les ondes ALPHA. Leurs fréquence se situe entre 8 et 12 Hz. Leur amplitude est voisine de 30 microV).
- Les ondes BETA. Leur fréquence est voisine de 25 Hz.
- Les ondes DELTA. Leur fréquence est de 3 Hz.
- Les ondes TETA. Leur fréquence est de 4 a 7 Hz.

Un trace E.E.G peut se trouver surcharge d'artefacts (différence de potentiel extra-cérébral).

2.1.3 L'ELECTROENCEPHALOGAPHE:

Malgré la multitude d'aspects des appareils d'E.E.G, les principes fondamentaux restent les mêmes. Dans tous les appareils, on peut considérer trois parties distinctes:

- Les circuits d'entrées (les capteurs se font par des électrodes)
- Les amplificateurs.
- Système d'enregistrement.

Les amplificateurs sont la partie la plus importante du point de vue électronique :

LES AMPLIFICATEURS:

Les premiers étages d'amplification sont appelés PREAMPLIFICATEURS, c'est à ce niveau que se situent les réglages des différents paramètres.

- Amplification.
- Constante de temps.
- Filtres.

Les filtres permettent d'atténuer les bandes de fréquences et d'éliminer certains artefacts. Il existe, en général, quatre filtres dont les fréquences sont : 15, 30, 45 et 75 Hz.

Le filtrage peut se faire analogiquement mais puisque les techniques numériques prennent de plus en plus d'importance et supplantent les procédés analogiques donc cette partie sera traitée numériquement et il est aisé de voir qu'une visualisation numérique de E.E.G peut permettre et faciliter l'interprétation du neurologue. [4]

2.1.4 SPECIFICATIONS DU FILTRE ETUDIE POUR L'E.E.G :

Dans notre cas on fait l'étude d'un filtre passe-bande dont les caractéristiques sont:

- Bande passante: 2 à 50 Hz, donc fréquences de coupure:
Fc1 = 2 Hz ; Fc2 = 50 Hz.
- Bande passante plate et linéaire.
- Fréquence d'échantillonnage(1.4.2.1)
Fe = 200 Hz (4.fmax)
- Atténuation = 35 db/octave.
- Ondulations tolérées dans la bande passante et atténuée :
S1 = S2 = 0,05.

2.2 SYNTHÈSE DES FILTRES NUMÉRIQUES:

La synthèse directe des filtres numériques n'est pas facile sauf dans des cas simples. Aussi les méthodes de synthèse les plus utilisées trouvent elles leur point de départ dans les propriétés bien connues des filtres analogiques.

On essaye de déterminer un filtre numérique ayant sensiblement le même comportement que le filtre analogique remplissant la fonction souhaitée que nous appellerons filtre PROTOTYPE .

2.2.1 CALCUL DES COEFFICIENTS DU FILTRE "R.I.I":

a/ METHODE UTILISEE:

Nous savons qu'il existe au moins trois méthodes pour la synthèse des filtres "R.I.I". [1]

On a choisi la méthode la plus directe qui est basée sur les propriétés bien connues des filtres analogiques et qui a l'avantage des deux autres(1.4.3.1).

Donc cette méthode consiste à faire appel à une fonction modèle qui est une fonction réelle définie sur l'axe des fréquences.

Les fonctions modèles considérées sont connues par leurs propriétés de sélectivité, les fonctions de BUTTERWORTH, BESSEL, TCHEBYCHEFF et les fonctions elliptiques (Tableau-1-).

Pour illustrer les calculs des coefficients par une fonction modèle, nous avons retenu les fonctions de filtrage de Butterworth en raison de leurs simplicités, et de la réponse plate dans la bande passante.

b/ LES FILTRES DE BUTTERWORTH:

b.1/ DEFINITION:

Une fonction de Butterworth d'ordre n est définie par l'expression:

$$|F(w)|^2 = \frac{1}{1 + (w/w_c)^{2n}} \quad \text{avec } w_c = 1 \text{ (fréquence de coupure)}$$

Nous allons voir comment obtenir la fonction T(jw) à partir de ce module.

$$|F(w)|^2 = |T(jw)|^2 = |T(p) \cdot T(-p)| = 1/(1 + w^{2n})$$

avec $p = jw$ donc $w = p/j$ d'où:

$$T(p) T(-p) = \frac{1}{1 + (-1)^n p^{2n}}$$

Pour trouver les fonctions de transferts des filtres de Butterworth, il suffit de chercher les racines du dénominateur:

$$1 + (-1)^n p^{2n} = 0 \quad (1)$$

et de prendre uniquement les racines à parties réelles négatives pour assurer la stabilité. [5]

b.2/ La fonction de transfert s'écrira alors:

$$T(p) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (p - p_k)} \quad \text{ou } p_k \text{ sont les racines à parties réelles négatives de l'équation (1)}$$

La résolution de l'équation (1) nous permet de déterminer deux types de fonctions de transfert. [6]

Pour n pair :

$$T(p) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n/2} (p^2 + 2p \cos(\pi(2k-1)/2n) + 1)}$$

Pour n impair :

$$T(p) = \frac{1}{1+p} \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{p^2 + 2p \cos(\pi k/n) + 1}$$

b.3/ CHOIX DE n :

D'après les constructions de Butterworth [5], pour $n=5$, on a la raideur souhaitée pour notre filtre prototype qui est 35 db/octave.

c/ FONCTION DE TRANSFERT DU FILTRE NUMERIQUE:

La méthode qui a été choisie consiste à transposer le filtre classique de Butterworth dans le domaine numérique.

Elle utilise les transformations qui font passer du domaine de LAPLACE en P au domaine numérique en Z .

Donc en partant d'un filtre passe-bas dont la bande passante est limitée à 1, on peut obtenir le passe-bande en designant par w_b et w_h les limites inférieures et supérieures de la bande passante et en faisant la transformation suivante:

$$T_2(Z) = \frac{(1 - Z^{-2})^2}{D_2}$$

$$D_2 = (X^2 - A_1X + 1)Z^{-4} - 2XY(2X - A_1)Z^{-3} + 2[(2Y + 1)X^2 - 1]Z^{-2} - 2XY(2X + A_1)Z^{-1} + (X^2 + A_1X + 1)$$

$$T_3(Z) = \frac{(1 - Z^{-2})^2}{D_3}$$

$$D_3 = (X^2 - A_2X + 1)Z^{-4} - 2XY(2X - A_2)Z^{-3} + 2[(2Y + 1)X^2 - 1]Z^{-2} - 2XY(2X + A_2)Z^{-1} + (X^2 + A_2X + 1)$$

Avant d'entamer le calcul des filtres "R.I.F", décomposant la fonction de transfert $T(Z)$ du filtre "R.I.I" pour des raisons citées en (1.4.4).

Décomposition en produits de fonctions de transfert du deuxième ordre [ANNEXE III]:

$$T(Z) = b_0 \frac{(1 - Z^{-2})^5}{\prod_{i=1}^5 (1 + b_{1i} Z^{-2} + b_{2i} Z^{-4})} \quad (1)$$

Décomposition en éléments simples de $T(Z)$: C'est à dire en sommes de fonctions de transfert du deuxième ordre.

$$T(Z) = H_0 + \sum_{i=1}^5 \frac{a_{1i} + a_{2i} Z^{-1}}{1 + b_{1i} Z^{-2} + b_{2i} Z^{-4}} \quad (2)$$

Les coefficients des deux transmittances (1) et (2) seront portés dans le tableau II.

$$p \xrightarrow{\hspace{1cm}} \frac{p(wh - wb)}{p^2 + wh p + wb} \quad (2)$$

Puis utiliser la transformation bilinéaire: [1]

$$p \xrightarrow{\hspace{1cm}} \frac{2 - 1 - Z^{-1}}{Te (1 + Z^{-1})}$$

ou Te : période d'échantillonnage.

Une méthode plus directe c'est à dire le passage d'un filtre passe-bas ($wc=1$) analogique à un filtre passe-bande numérique consiste à utiliser d'autres transformations (ANNEXE I) que la transformation bilinéaire pour aboutir à l'expression $T(Z)$.

On a utilisé la transformation directe suivante:

$$p \xrightarrow{\hspace{1cm}} X \frac{Z^{-2} - 2YZ^{-1} + 1}{1 - Z^{-2}} \quad (2)$$

avec $X = wc \cotg[(wh - wb)/2]Te$
 $Y = \cos[Te(wh + wb)/2] / \cos[Te(wh - wb)/2]$
 $wc = 1$
 $wb = \frac{2}{fc1}$ avec $fc1 = 2\text{Hz}$
 $wh = \frac{2}{fc2}$ avec $fc2 = 50\text{Hz}$
 $Te = 1/Fe$ avec $Fe = 200\text{Hz}$

CALCUL DE $T(Z)$:

$$\text{On a } T(p) = \frac{1}{1+p} \prod_{i=1}^2 \frac{1}{p^2 + A_i p + 1}$$

avec $A_i = 2\cos(i\pi/5)$ pour $i=1,2$

$$\text{donc } T(p) = \frac{1}{p+1} \frac{1}{p^2 + A_1 p + 1} \frac{1}{p^2 + A_2 p + 1}$$

$$T(p) = T_1(p) T_2(p) T_3(p)$$

En utilisant la transformation (2), on obtient:

$$T(Z) = T_1(Z) T_2(Z) T_3(Z)$$

avec:

$$T_1(Z) = \frac{1 - Z^{-2}}{(X-1)Z^{-2} - 2YZ^{-1} + (X+1)}$$

TABLEAU I

Type de filtre (noms)	Caracteristiques	Inconvenients
BUTTERWORTH	Reponse plate dans la bande passante.	Flanc de montee tres peu raide.
LEGENDRE	Pente la plus forte a la coupure. Attenuation croissant uniformement.	Ordre souvent eleve pour satisfaire le gabarit.
BESSEL	Approximer un retard pur.	Sans oscillations pour la reponse indicielle. Mauvaise caracteristique d'attenuation et pour cause.
TSCHEBYCHEFF	Ordre minimal pour attenuation donnee.	Oscillation pour la reponse indicielle.
ELLIPTIQUE	Ordre le plus faible.	Complexite des calculs. Phase non-lineaire.

TABLEAU II

i	b _{2i}	b _{1i}	a _{2i}	a _{1i}	H ₀	b ₀
1	0,5484055	-0,0083301	-0,0180094	-0,6564534	0,0449621	0,0449621
2	0,9638442	-1,9599263	-0,0142841	0,0175933		
3	0,1181406	-0,0456379	0,5336417	0,0812237		
4	0,9018827	-1,8977339	0,1161619	-0,117066		
5	0,0314262	-0,9685737	-0,942718	0,8941257		

2.2.2 SYNTHÈSE DU FILTRE "R.I.F" :

a/ FONCTION DE TRANSFERT ISOCHRONE:

Soit un filtre causal dont la réponse impulsionnelle $\{h(n)\}$ est connue.

La relation liant la séquence de sortie $\{y(n)\}$ à une séquence d'entrée $\{x(n)\}$ est :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k)$$

Pour connaître le comportement fréquentiel de ce filtre, nous cherchons sa réponse à une séquence d'entrée exponentielle complexe échantillonnée:

$$x(n) = \exp(jn\omega T_e)$$

On pose: $\omega T_e = M$: pulsation réduite
d'où :

$$x(n-k) = \exp(j(n-k)M)$$

et:

$$y(n) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} h(k) \exp(-jkM) \right] \exp(jnM)$$

donc $\{y(n)\}$ est elle-même une séquence exponentielle mais dont le module et l'argument ont été, par rapport à ceux de $\{x(n)\}$, modifiés par le nombre complexe:

$$T[\exp(jM)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \exp(-jkM)$$

$T[\exp(jM)]$ est appelé fonction de transfert ISOCHRONE (transmittance) du filtre numérique. Elle est périodique de période 2π .

b/ CALCUL DES COEFFICIENTS DU FILTRE "R.I.F" PAR DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER :

La transmittance isochrone $T[\exp(jM)]$ est périodique de période 2π . Une méthode immédiate pour le calcul d'un filtre non récursif qui consiste en un simple développement en série de Fourier.

Si $T_d[\exp(jM)]$ est la transmittance idéale souhaitée, on peut écrire:

$$T_d[\exp(jM)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \exp(-jnM)$$

avec:

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_d[\exp(jM)] \exp(jnM) dM$$

On remarque que les coefficients h_n coïncident avec les échantillons de la réponse impulsionnelle, c'est à dire en fait avec les coefficients de la transmittance:

$$T(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n Z^{-n}$$

ce qui implique $h_n = 0$ pour $n < 0$ et $n > N$

donc l'approximation consiste à choisir $T(Z)$ tel que :

$$h_n = h_{dn} W_n$$

ou la suite W_n constitue une fonction "fenêtre" en ce sens qu'elle doit s'annuler pour $n < 0$ et $n > N$.

Il existe plusieurs types de fonctions fenêtre :

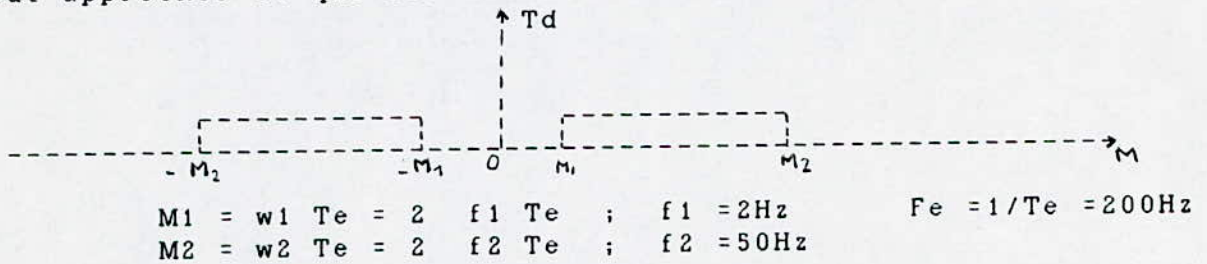
b.1/ UTILISATION DE LA FONCTION RECTANGULAIRE "Wn" :

Cette fonction est utilisée pour sa simplicité.

W_n est définie par :

$$W_n = \begin{cases} 1 & 0 < n < N-1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Soit $T[\exp(jM)]$ la fonction isochrone idéale passe-bande que l'on veut approcher et qui est définie comme suit :



alors $T_d[\exp(jM)] = \begin{cases} 1 & \text{pour } M_1 < M < M_2 \text{ et } -M_1 < M < -M_2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

donc :
$$h_{dn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} T_d[\exp(jM)] \exp(jnM) dM$$

$$h_{dn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-M_2}^{-M_1} \exp(jnM) dM + \frac{1}{2\pi} \int_{M_1}^{M_2} \exp(jnM) dM$$

d'où
$$h_{dn} = \frac{1}{\pi n} [\sin(nM_2) - \sin(nM_1)] \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}$$

Pour l'approximation de $T_d[\exp(jM)]$ par $T(Z)$, on utilise la fonction fenêtre rectangulaire définie précédemment.

donc :
$$h_{dn} = h_{dn} W_n$$

d'où
$$h_n = \frac{1}{\pi n} [\sin(nM_2) - \sin(nM_1)] \quad \text{avec } n=0, 1, \dots, N-1 \text{ et } N \text{ degré de } T(Z).$$

b.2/ UTILISATION DE LA FENETRE DE -HAMMING:

Le calcul des coefficients h_n a été effectué précédemment par la fonction fenêtre la plus simple (fenêtre rectangulaire). En tenant compte du gabarit qui a été fixé au départ ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,05$), il y-a eu un dépassement (voir figure 2-4) Pour ramener ces ondulations qui dépassent le gabarit, nous allons modifier le choix de la fonction fenêtre et prendre la fenêtre de HAMMING définie comme suit :

$$W_n = 0,54 + 0,46 \cos(2\pi n/(N-1)) \quad ; \quad 0 < n < N-1$$

alors les coefficients de $T(Z)$ deviennent :

$$h_n = h_{dn} W_n$$

$$h_n = \frac{1}{\pi n} [\sin(nM_2) - \sin(nM_1)] [0,54 + 0,46 \cos(2\pi n/(N-1))]$$

b.3/ CHOIX DU DEGRE DU FILTRE "N":

Théoriquement plus le degré d'un filtre "R.I.F" est grand, plus il tend vers sa fonction idéale. [5]

Ce degré est entre 20 et 70. Notre choix a été effectué selon deux critères, le premier pour respecter la gamme du degré et le deuxième pour avoir le degré le plus petit possible.

Donc au début nous avons choisi $N=21$; cependant le module de la transmittance ne respecte pas le gabarit choisit (Figure 2-5).

Nous sommes donc contraint d'augmenter le degré du filtre; $N=41$ semble être un bon compromis.

La courbe du module de la transmittance de ce filtre est donnée par la figure 2-7.

2.3 FONCTION DE TRANSMITTANCE POUR LES DIFFERENTES STRUCTURES DES FILTRES "R.I.I" ET "R.I.F" :

2.3.1 TRANSMITTANCE DU FILTRE "R.I.I":

a/ STRUCTURE CASCADE:

Les filtres récursifs de forme cascade se caractérisent par une transmittance de la forme suivante:

$$T(Z) = b_0 \prod_{i=1}^n \frac{1 + a_{i1} Z^{-1} + a_{i2} Z^{-2}}{1 + b_{i1} Z^{-1} + b_{i2} Z^{-2}}$$

dans notre cas :

$$T(Z) = b_0 \prod_{i=1}^5 \frac{(1 - Z^{-2})^i}{1 + b_{i1} Z^{-1} + b_{i2} Z^{-2}}$$

ou les coefficients de ce filtre ont été calculés en (2.1), et sont représentés dans le tableau II.

- Calcul du module de $T(Z)$:

$$Z = \exp(j\omega T_e) \quad ; \quad \text{on pose } M = \omega T_e.$$

$$T(M) = b_0 \prod_{i=1}^5 \frac{[1 - \cos(2M) + j \sin(2M)]^i}{1 + b_{i1}[\cos M - j \sin M] + b_{i2}[\cos(2M) + j \sin(2M)]}$$

$$T(M) = b_0 \prod_{i=1}^5 T_i(M)$$

$$T(M) = b_0 \prod_{i=1}^5 \left\{ \frac{[1 - \cos(2M)]^2 + [\sin(2M)]^2}{[1 + b_{i1} \cos M + b_{i2} \cos(2M)]^2 + [b_{i1} \sin M + b_{i2} \sin(2M)]^2} \right\}^{1/2}$$

b/ STRUCTURE PARALLELE:

La transmittance du filtre de la forme parallele est :

$$T(Z) = H_0 + \sum_{i=1}^5 \frac{a_{i1} + a_{i2} Z^{-1}}{1 + b_{i1} Z^{-1} + b_{i2} Z^{-2}}$$

Les coefficients de cette transmittance ont ete determines dans (2.2) et sont representes dans le Tableau II.

- Calcul du module de cette transmittance :

$$Z = \exp(j\omega T_e) \quad ; \quad \text{on pose } M = \omega T_e.$$

$$T(M) = H_0 + \sum_{i=1}^5 \frac{a_{i1} + a_{i2}(\cos M - j \sin M)}{1 + b_{i1}[\cos M - j \sin M] + b_{i2}[\cos(2M) - j \sin(2M)]}$$

$$T(M) = H_0 + \sum_{i=1}^5 T_i(M)$$

$$T_i(M) = R_{ei} + j I_{mi}$$

$$T(M) = \left[\left[H_0 + \sum_{i=1}^5 \operatorname{Re} i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^5 \operatorname{Im} i \right]^2 \right]^{1/2}$$

c/ STRUCTURE CANONIQUE :

La transmittance de cette structure est de la forme :

$$T(Z) = \frac{\sum_{i=0}^{10} a_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{10} b_i Z^{-i}}$$

on a $Z = \exp(j\omega T_e)$; on pose $M = \omega T_e$.
alors

$$T(M) = \frac{\sum_{i=0}^{10} a_i [\cos Mi - j \sin Mi]}{1 + \sum_{i=1}^{10} b_i [\cos Mi - j \sin Mi]}$$

$$T(M) = \left\{ \frac{\left[\sum_{i=0}^{10} a_i \cos^2 Mi \right] + \left[\sum_{i=0}^{10} a_i \sin^2 Mi \right]^{1/2}}{\left[1 + \sum_{i=1}^{10} b_i \cos^2 Mi \right] + \left[\sum_{i=1}^{10} b_i \sin^2 Mi \right]^{1/2}} \right\}$$

2.3.1.2 REPRESENTATION DU MODULE DE LA TRANSMITTANCE DU FILTRE "R.I.I":

Les figures 2-1;2-2;2-3 montrent les variations des modules de $T(Z)$ des structures cascade, parallèle et canonique respectivement pour $f=w/2\pi$ variant de f_{c1} à $f_c/2$.
On ne constate pas de différences fondamentales entre les trois courbes, car elles reflètent toutes la même fonction de transfert recherchée du point de vue fréquences de coupure.
Neanmoins les différences existantes sont :

- BANDE PASSANTE:
 - * Forme cascade: Parfaitement plate.
 - * Forme parallèle: Plate jusqu'à $\pi/8$, ensuite augmentation légèrement linéaire entre $\pi/8$ et $\pi/2$
 - * Forme canonique: Apparition d'un pic aux très basses fréquences.
- BANDE DE TRANSITION SUPERIEURE:
 - * Forme parallèle: Raide mais apparition d'un lobe secondaire.
 - * Formes canonique et cascade: Même raideur mais plus faible, que celle de la forme parallèle.
- BANDE DE TRANSITION INFERIEURE:
 - * Formes parallèle et cascade: Identiques.
 - * Forme canonique: Plus raide que les deux premières.

CONCLUSION:

De la même fonction de transfert nous avons déduit les différentes formes ; les différences citées ci-dessus ne peuvent donc provenir que du processus de calcul des coefficients pour chaque forme. La comparaison ci-dessus ne nous permet pas de classer les performances de chaque structure. Nous sommes amenés à faire appel à d'autres critères de classement à savoir le critère de la sensibilité (Chapitre III).

2.3.2 TRANSMITTANCE DU FILTRE "R.I.F":

Les filtres non-récurrents de forme canonique se caractérisent par une transmittance de la forme:

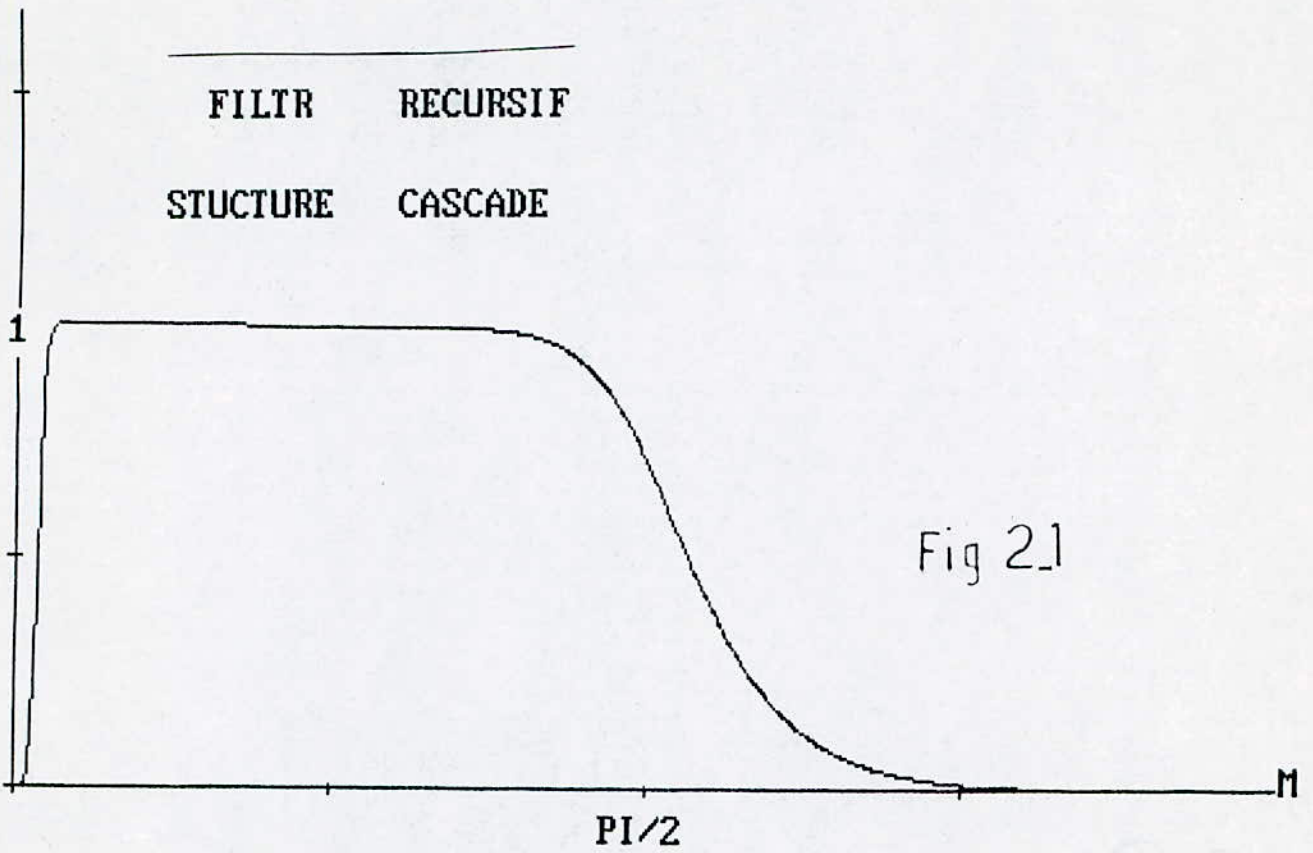
$$T(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_n Z^{-n}$$

Les valeurs des coefficients (h_n) ont été déterminées en (2.2)

- Calcul du module de $T(Z)$:
on a $Z = \exp(j\omega T_e)$; on pose : $M = \omega T_e$.

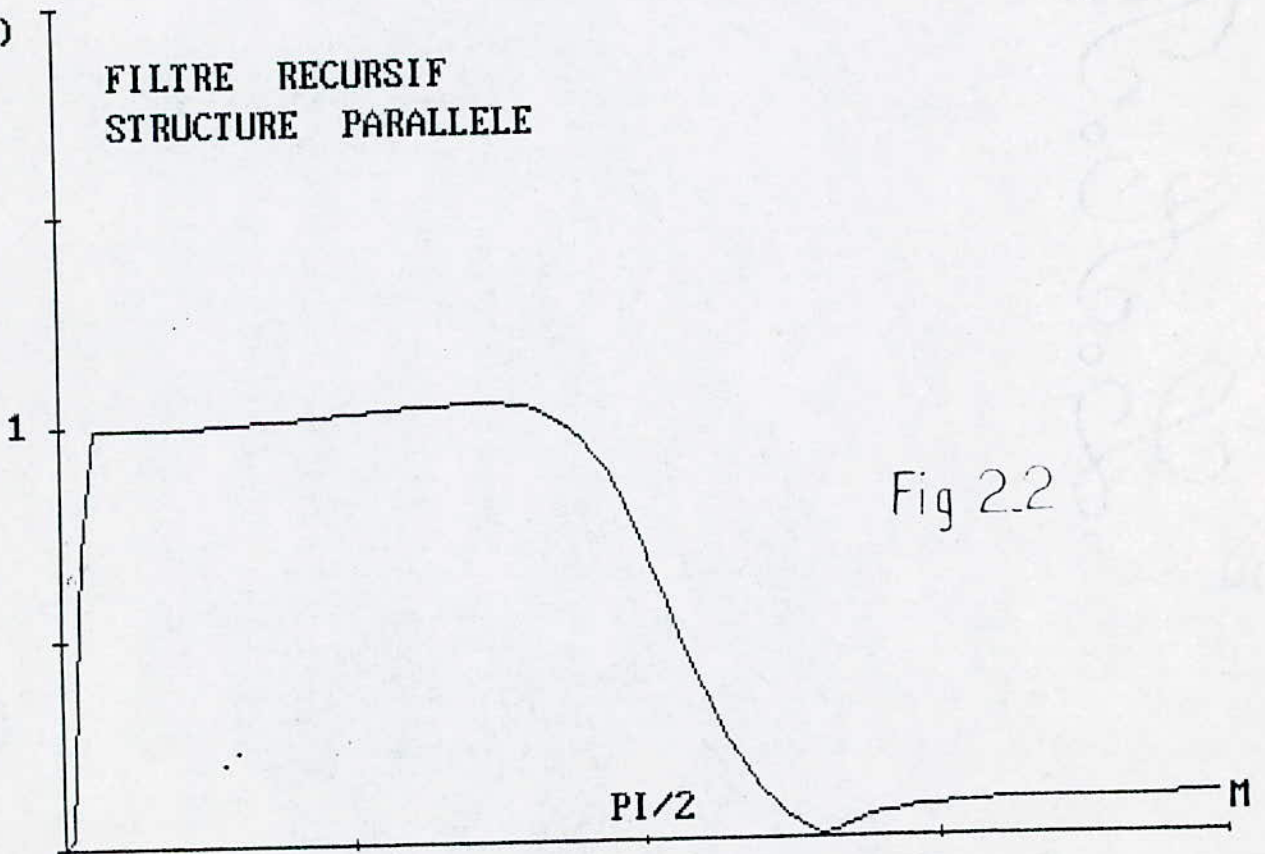
$$T(M) = \left\{ \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_n \cos(nM) \right]^2 + \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_n \sin(nM) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

H(M)



H(M)

FILTRE RECURSIF
STRUCTURE PARALLELE



H(M)

FILTRE RECURSIF
STRUCTURE CANONIQUE

1

$\pi/2$

π

Fig 2.3

INTERPRETATION DES COURBES:

Les Figures 2-4 a 2-7 présentent les variations du module de $T(Z)$ pour deux degrés différents et utilisation de deux fonctions fenêtres différentes. Les différences existantes entre ces courbes sont:

- BANDE PASSANTE:

*Figures 2-4 et 2-6: Apparition de cinq ondulations de forte amplitude dépassant le gabarit.

*Figure 2-5: Apparition de dix ondulations de très faibles amplitudes sauf deux d'entre elles situées aux extrêmes de la bande dépassant le gabarit.

*Figure 2-7: Apparition de dix ondulations de très faibles amplitudes ne dépassant pas gabarit.

- BANDE DE TRANSITION INFERIEURE:

*Figures 2-4 et 2-6: Ont la même pente qui est peu raide

*Figures 2-5 et 2-7: Pente plus raide que pour les deux premières et qui approche de l'idéal. Il y-a un dépassement de gabarit d'une ondulation pour la figure 2-5.

- BANDE DE TRANSITION SUPERIEURE:

*Figures 2-4 et 2-6: Ont une pente plus raide et des ondulations qui s'applatissent au fur et a mesure que la fréquence augmente. La première ondulation dépasse le gabarit.

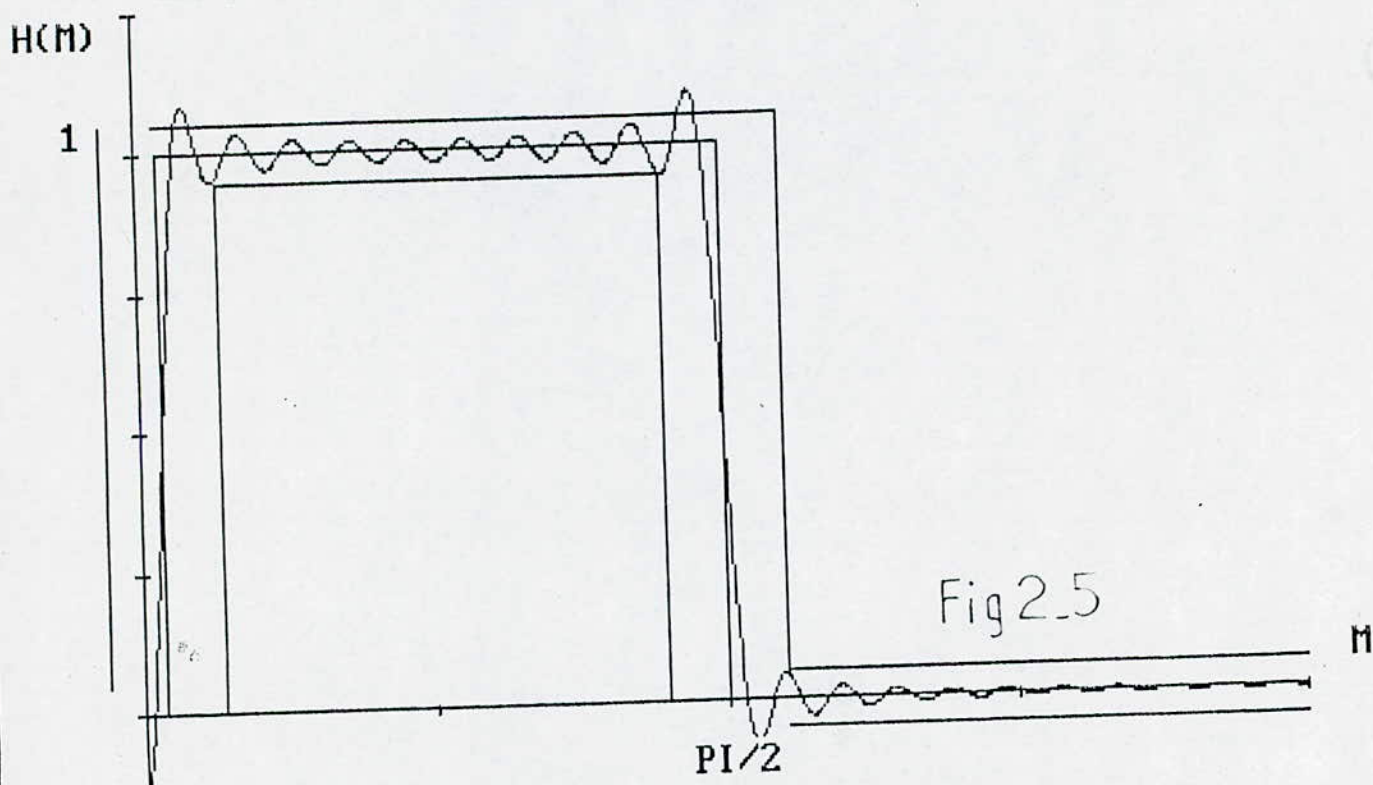
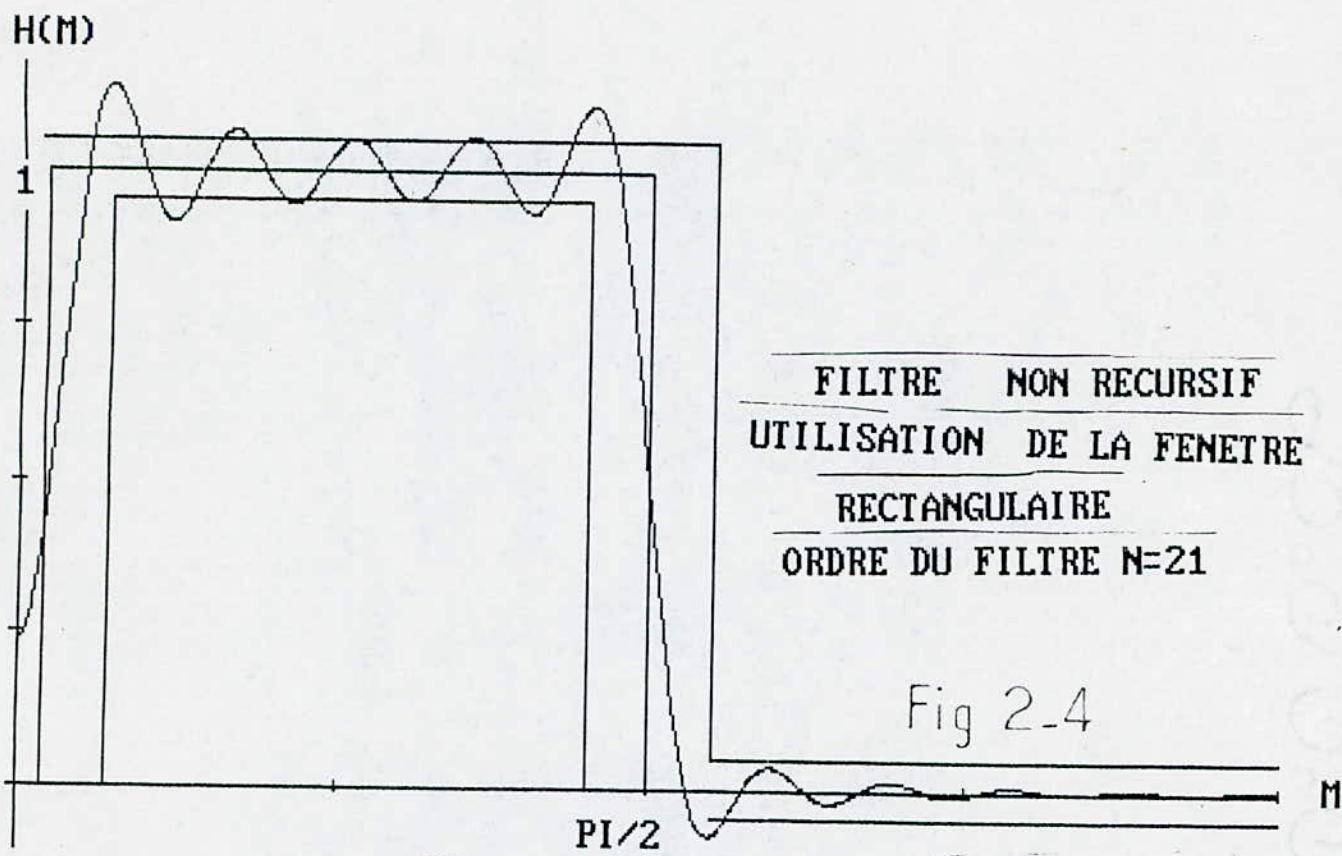
*Figures 2-5 et 2-7: Ont une pente plus raide que les deux premières et des ondulations qui s'applatissent au fur et à mesure que la fréquence augmente. Dans la figure 2-5 la première ondulation dépasse le gabarit.

Comme on peut le constater, d'après la comparaison faite ci-dessus, le filtre de la figure 2-7 est le meilleur comme la théorie l'a prédit. En effet la fenêtre utilisée possède de bonnes performances et le degré choisi est assez élevé ; c'est-à-dire que la performance est obtenue au détriment d'un nombre de calculs plus important.

2.4 CONCLUSION:

La synthèse des filtres numériques et la représentation du module de leur transmittance sous différentes structures, est nécessaire mais qui ne peut nous renseigner sur le choix d'un filtre optimal du point de vue variations des coefficients.

Pour cela une étude de la sensibilité aux variations des coefficients est nécessaire. Elle sera traitée dans le chapitre suivant.



FILTRE NON RECURSIF UTILISANT LA FENETRE RECTANGULAIRE
 N=41

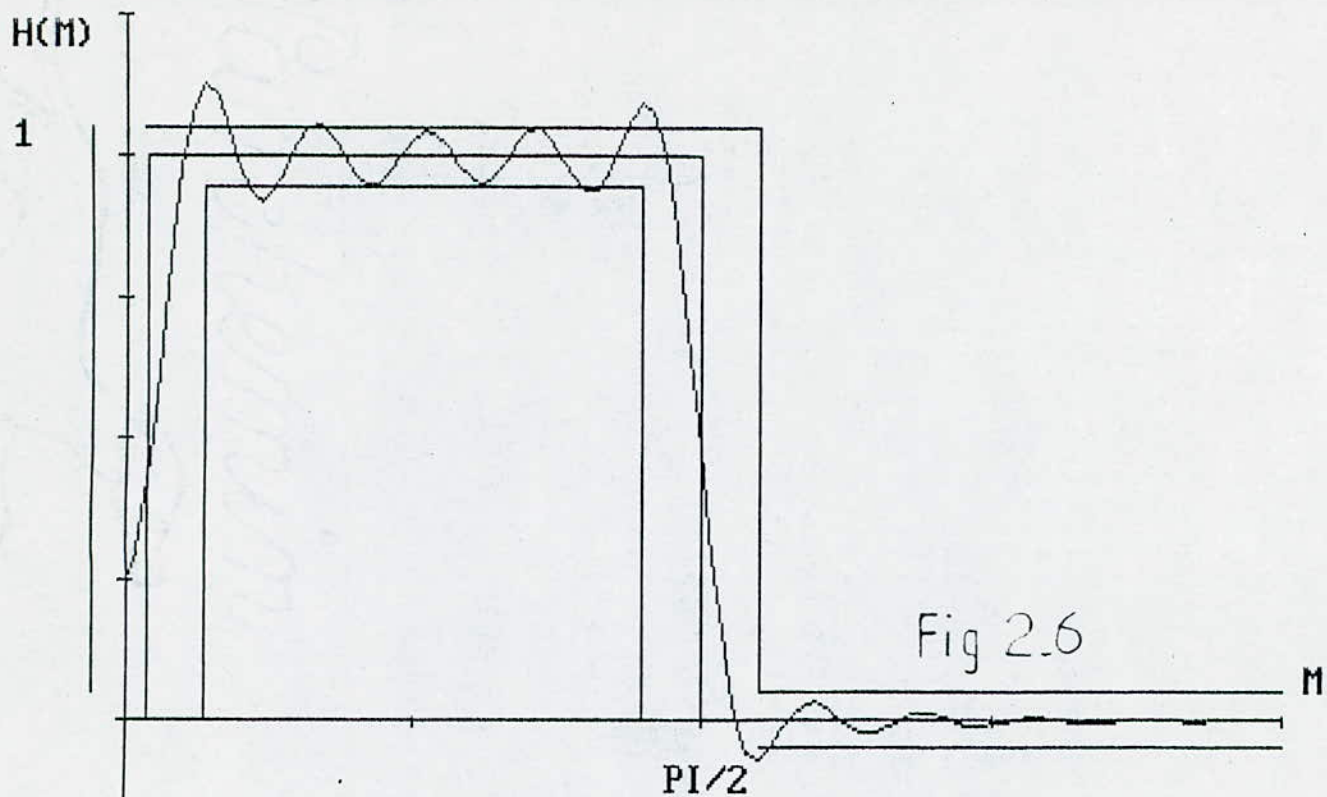


Fig 2.6

FILTRE NON RECURSIF UTILISANT LA FENETRE DE HAMMING
N=21

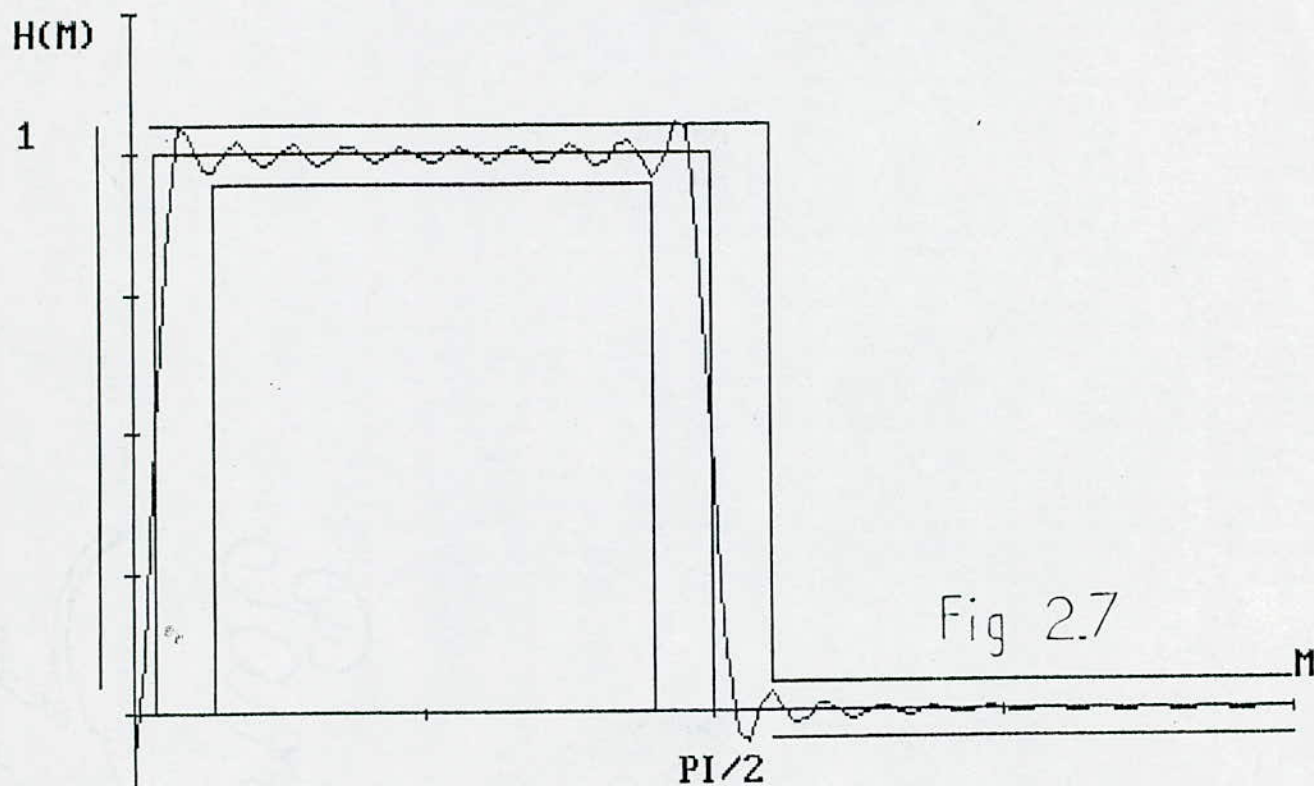


Fig 2.7

FILTRE NONRECURSIF UTILISANT LA FENETRE DE HAMMING
N=41

CHAPITRE TROISIEME

SENSIBILITE DES STRUCTURES

GENERALITES

Ayant effectué la synthèse de notre filtre numérique dans le chapitre précédent, et connaissant sa transmittance sous différentes formes, dont les coefficients sont calculés avec une précision finie.

Le choix d'une structure particulière dépend entre autre de la sensibilité de la transmittance aux erreurs de quantifications comises sur les coefficients.

On a choisit une méthodologie puisqu'il en existe plusieurs [2] par exemple simuler sur ordinateur, cas par cas le comportement du filtre et évaluer le meilleur compromis entre des exigences contradictoires telles que: Précision, Cout, Temps de calcul, Place mémoire (degré du filtre), Stabilité, ... [2]

3.1 DEFINITION D'UNE METHODOLOGIE:

Cette méthodologie est une approche statique.

Soient :

- $T(Z) = T[\exp(j M)]$ la transmittance isochrome d'un filtre numérique, avec : $Z = \exp(j M)$, $M = wTe$.
- $\{x\}$ le vecteur des coefficients de ce filtre, et $\{\Delta x\}$ celui des écarts séparants les coefficients quantifiés de leurs valeurs idéales; ces écarts provoquent une variation de l'affaiblissement $A_f(M)$ définit par:

$$A_f(M) = -20 \text{ Log}[A(M)]$$

ou $A(M)$ étant le module de la transmittance $T(Z)$, donc:

$$A(M) = |T(Z)|_{Z=\exp(j M)}$$

d'ou:

$$A_f(M) = -20 \text{ Log} |T(Z)|_{Z=\exp(j M)}$$

La perturbation $\Delta A_f(M)$ vaut au premier ordre:

$$\Delta A_f(M) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial A_f(M)}{\partial x_k} \Delta x_k$$

On définit la dérivée partielle

$$S_{x_k}(M) = \frac{\partial A_f(M)}{\partial x_k}$$

comme étant la sensibilité de l'affaiblissement par rapport au coefficient x_k .

On définit aussi le gain logarithmique $\alpha(M)$:

$$\alpha(M) = \text{Ln}[A(M)] = \text{Re}\{\text{Ln}[T(Z)]\} \quad | \quad Z = \exp(jM) \quad] \quad [2]$$

avec : $T(Z) = T[\exp(jM)] = A(M) \exp(j\beta(M))$

ou $A(M)$ étant le module de $T(Z)$ et $\beta(M)$ son argument

$$A_f(M) = -20 \text{ Log}[A(M)] = \frac{-20}{\text{Ln}(10)} (\text{Ln}[A(M)])$$

on pose : $C = 20/\text{Ln}(10) = 8,6858896$.

$$A_f(M) = -C \alpha(M) = -C \text{Re}\{\text{Ln}[T(Z)]\} \quad | \quad Z = \exp(jM) \quad]$$

d'ou
$$S_{X_k} = \frac{\partial A_f(M)}{\partial X_k}$$

$$S_{X_k} = -C \text{Re}\left\{ \frac{\partial T(Z)}{\partial X_k} \frac{1}{T(Z)} \right\} \quad | \quad Z = \exp(jM) \quad]$$

$$S_{X_k} = -C \left[\frac{\partial |T(Z)|}{\partial X_k} \frac{1}{T(Z)} \right]$$

Pour pouvoir comparer des structures différentes qui réalisent une même transmittance et aboutir à des conclusions indépendantes des valeurs particulières des coefficients de cette transmittance, il faut utiliser une méthode statique. [3]

On va faire les trois hypothèses suivantes :

1- L'erreur d'arrondi sur un coefficient X_k est une variable aléatoire dont la densité de probabilité est uniformément répartie entre $-q/2$ et $q/2$, ou q est le pas de quantification défini par :

$$q = 2^{-b}, \quad \text{ou } b \text{ désigne le nombre de bits.}$$

Sa variance vaut donc :

$$\sigma_X^2 = q^2/12$$

2- Les diverses erreurs ΔX_k sont statiquement indépendantes.

3- La perturbation $\Delta Af(M)$ est considérée en première approximation comme variable GAUSSIENNE. [3]
 La variance de la perturbation $\Delta Af(M)$ peut s'écrire:

$$\sigma_{Af}^2 = \sum_{k=1}^N \frac{S^2}{X_k} \sigma_X^2$$

et l'écart quadratique moyen vaut donc:

$$\sigma_{Af} = P(M) \cdot \sigma_X / \sqrt{12}$$

La fonction $P(M)$ ainsi définie est appelée INDICE DE SENSIBILITE QUADRATIQUE. L'étude comparative des structures est basée sur cette fonction.

Elle s'écrit:

$$P(M) = \sqrt{\sum_{k=1}^N \frac{S^2}{X_k}}$$

3.2 FILTRES RECURSIFS:

3.2.2 COMPARAISON DES STRUCTURES DIRECTE (canonique) ET CASCADE:

Il est bien connu que la valeur d'un polynome de degré élevé est très sensible aux erreurs commises sur ces coefficients, ceci est vrai aussi pour les transmittances des filtres récurifs, synthétisés sous la forme directe, on est donc amenés à utiliser en général la forme cascade ou la forme parallèle.

Pour justifier ce choix, nous allons comparer les sensibilités des structures directe et cascade.

Soient : b_p ($p=1, \dots, N$) un des coefficients du dénominateur de la forme directe, et b_{lk} ($l=1, 2$ et $k=1, \dots, r$) un des coefficients du dénominateur de la forme cascade.

Il vient pour les sensibilités :

$$S_{b_p} = C \operatorname{Re} \left\{ \frac{z^{-p}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} \right\}$$

sachant que :

$$T(Z) = \frac{\sum_{i=0}^N A_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i Z^{-i}}$$

$$S_{blk} = C \operatorname{Re} \left\{ \frac{Z^{-1}}{1 + b_{1k} Z^{-1} + b_{2k} Z^{-2}} \right\}$$

avec :

$$T(Z) = b_0 \prod_{k=1}^r \frac{1 + A_{1k} Z^{-1} + A_{2k} Z^{-2}}{1 + b_{1k} Z^{-1} + b_{2k} Z^{-2}}$$

D'après une interprétation géométrique :

$$S_{bp} = C \frac{1}{\prod_{i=1}^N p \pi_i} \cos \left(\sum_{i=1}^N \psi_i + p \varphi \right)$$

ou les points π_i représentent les pôles de $T(Z)$. Le point p du cercle unite représente $\exp(jM)$ dans le plan Z , d'où les $\frac{p}{\pi_i}$ sont les images des nombres complexes $(p - \pi_i)$, et ψ_i désigne les arguments des binomes $[\exp(jM) - \pi_i]$. [3]

$$S_{blk} = C \frac{1}{p \pi_k p \pi_{k^*}} \cos \left(\psi_k + \psi_{k^*} + p \varphi \right)$$

ou k^* désigne l'indice du pôle conjugué à π_k . Les vecteurs $\frac{p}{\pi_i}$ étant en général plus petit que l'unité (pour assurer la stabilité du filtre).

Il est clair que : $S_{bp} \gg S_{blk}$

et ce d'autant plus que le degré du filtre est plus élevé.

3.2.2 COMPARAISON DES STRUCTURES CASCADE ET PARALLELE:

L'indice de sensibilité quadratique $P(M)$ permet de comparer les structures cascade et parallèle.

3.2.2.1 CALCUL DE $P(M)$ POUR LES DEUX STRUCTURES:

a/ FORME CASCADE:

$$T(Z) = \frac{b_0 (1 - Z^{-2})^5}{\prod_{i=1}^5 [1 + b_{1k} Z^{-1} + b_{2k} Z^{-2}]}$$

on pose: $C = 20/\ln 10$

$$S_{blk} = C \operatorname{Re} \left\{ \frac{Z^{-1}}{1 + b_{1k} Z^{-1} + b_{2k} Z^{-2}} \right\} \quad |Z = \exp(jM)$$

pour $l=1$:

$$S(M) = \frac{(1+b_{2k})\cos M + b_{1k}}{b_{1k} \left[1 + b_{1k} + b_{2k} + 2 b_{1k}(1+b_{2k})\cos M + 2 b_{2k} \cos(2M) \right]}$$

pour $l=2$:

$$S(M) = \frac{(1+b_{2k})\cos M + b_{2k}}{b_{2k} \left[1 + b_{1k} + b_{2k} + 2 b_{1k}(1+b_{2k})\cos M + 2 b_{2k} \cos(2M) \right]}$$

donc :

$$P(M) = \left\{ \sum_{k=1}^5 \left[S_{b_{1k}}^2 + S_{b_{2k}}^2 \right] \right\}^{1/2}$$

b/ FORME PARALLELE:

$$T(Z) = H_0 + \sum_{k=1}^5 \frac{a_{1k} + a_{2k} Z^{-1}}{1 + b_{1k} Z^{-1} + b_{2k} Z^{-2}}$$

$$S_{blk} = \frac{\partial Af(M)}{\partial b_{lk}}$$

avec : $M = wTe$; $Af(M) = -C \ln |T(Z)|$ |Z = exp(jM)

$l=1, 2$.

$k=1, \dots, 5$.

$$T(M) = \{ \operatorname{Re} + \operatorname{Im} \}^{1/2}$$

$$\text{avec : } \operatorname{Re} = H_0 + \sum_{k=1}^5 \operatorname{Re} k$$

$$I_m = \sum_{k=1}^5 I_{mk}$$

Les expressions de Re_k et I_{mk} ont été calculées au chapitre II (2.3.1.b)

$$\begin{aligned} S_{b1k} &= -C \left\{ \frac{\partial |T(Z)|}{\partial b1k} \cdot \frac{1}{|T(Z)|} \right\}_{Z=\exp(jM)} \\ &= - \frac{C}{(Re + Im)^2} \left\{ Re \frac{\partial Re}{\partial b1k} + Im \frac{\partial Im}{\partial b1k} \right\} \\ &= - \frac{C}{|T(M)|^2} [Re.A + Im.B] \end{aligned}$$

$$A = \frac{D[a1k \cos 1M + a2k \cos(1-i)M] - Nr[2 b1k + 2 b1k \cos M + 2 \cos 1M]}{D}$$

$$B = \frac{D[a1k \sin 1M + a2k \sin(1-1)M] - Ni[2 b1k + 2 b1k \cos M + 2 \cos 1M]}{D}$$

$$D = 1 + b1k^2 + b2k^2 + 2 b1k b2k \cos M + 2[b1k \cos M + b2k \cos 2M]$$

$$Nr = [a1k + a2k \cos M][1 + b1k \cos M + b2k \cos 2M] + a2k \sin M [b1k \sin M + b2k \sin 2M]$$

$$Ni = [a1k + a2k \cos M][b1k \sin M + b2k \sin 2M] - a2k \sin M [1 + b1k \cos M + b2k \cos 2M]$$

L'indice de sensibilité quadratique sera donc :

$$P_p(M) = \left\{ \sum_{k=1}^5 \left[S_{b1k}^2 + S_{b2k}^2 \right] \right\}^{1/2}$$

Le tracé de $P(M)$ et $P(M)$ en fonction de la fréquence nous permet de déduire laquelle des deux structures est la meilleure. La figure 3-1 illustre les variations de l'indice de sensibilité quadratique pour f variant de f_c à $f_c/2$ des structures cascade et parallèle.

Si les sensibilités sont à peu près égales dans la bande passante, la structure parallèle est de loin la plus sensible dans la bande atténuée, ceci s'explique aisément : dans la formule (1) relative à la

structure cascade, les coefficients du numérateur sont soit nuls soit égaux à (-1) et par conséquent, ils sont représentés exactement ($a_{ii} = 0$), ce qui n'est pas le cas des coefficients de la structure parallèle.

Ces résultats expliquent clairement l'intérêt porté à la structure cascade pour laquelle on va étudier l'effet de la quantification de ses coefficients.

3.2.3 SENSIBILITE DES FILTRES "R.I.I" DUE A LA QUANTIFICATION DES COEFFICIENTS:

3.2.3.1 ERREURS DE QUANTIFICATION:

La représentation d'une grandeur analogique par un mot binaire de longueur finie entraîne une erreur appelée erreur de quantification.

Sa valeur est fonction de l'approximation faite (arrondie ou troncature) qui dépend d'une quantité appelée PAS DE QUANTIFICATION: $\frac{1}{2^{(N-1)}}$

$$q = \frac{1}{2^{(N-1)}} \text{ avec } N: \text{nombre de bits (mot binaire).}$$

L'opération d'arrondie consiste par définition à choisir la valeur quantifiée (X) la plus proche de la valeur exacte (x).

Dans ce cas, on a:

$$-q < X-x < +q$$

Dans le cas d'une troncature, un nombre représenté en grandeur et signe voit son module réduit quelque soit son signe.

On a donc :

$$\begin{array}{ll} -2q < X-x < 0 & x > 0 \\ 0 < X-x < 2q & x < 0 \end{array}$$

3.2.3.2 VALEURS DES COEFFICIENTS APRES QUANTIFICATION :

On considère les valeurs des coefficients du filtre "R.I.I" calculées (en 32 bits) précédemment, exactes (non-quantifiées).

3.2.3.3 QUANTIFICATION DES COEFFICIENTS DE LA FORME CASCADE:

Soit $\overline{b_{1i}}$ et $\overline{b_{2i}}$ les valeurs exactes. Les valeurs réelles après quantification seront:

$$\overline{b_{1i}} = \overline{b_{1i}} + \overline{d_{1i}}$$

$$\overline{b_{2i}} = \overline{b_{2i}} + \overline{d_{2i}} \quad i=1, \dots, 5$$

d_{1i} et d_{2i} sont les erreurs introduites par la quantification.

Le pas de quantification est: $\frac{1}{2^{(N-1)}}$
 $q=2$

- Calcul de d_{1i} et d_{2i} :

On peut écrire: $\overline{b_{li}} / q = M + d \cdot 10^{-1}$ l=1, 2 et
i=1, ..., 5

M est un nombre entier positif, d est le premier chiffre décimal arrondi.

On a alors:

$$d_{2i} = q \cdot d \cdot 10^{-1} \quad \text{donc} \quad b_{li} = \overline{b_{li}} + \overline{d_{li}}$$

pour $N=8$ et $b_{21}=+1,9599263$ par exemple, on a : $250q + 0,9q$.
donc : $d_{21} = 0,9q$.

Finalement : $b_{21} = 1,9669576$.

Les Tableaux V et VI donnent les valeurs des coefficients du dénominateur de la transmittance du filtre "R.I.I" de la forme cascade, quantifiés sur 8 bits et 16 bits respectivement.

U

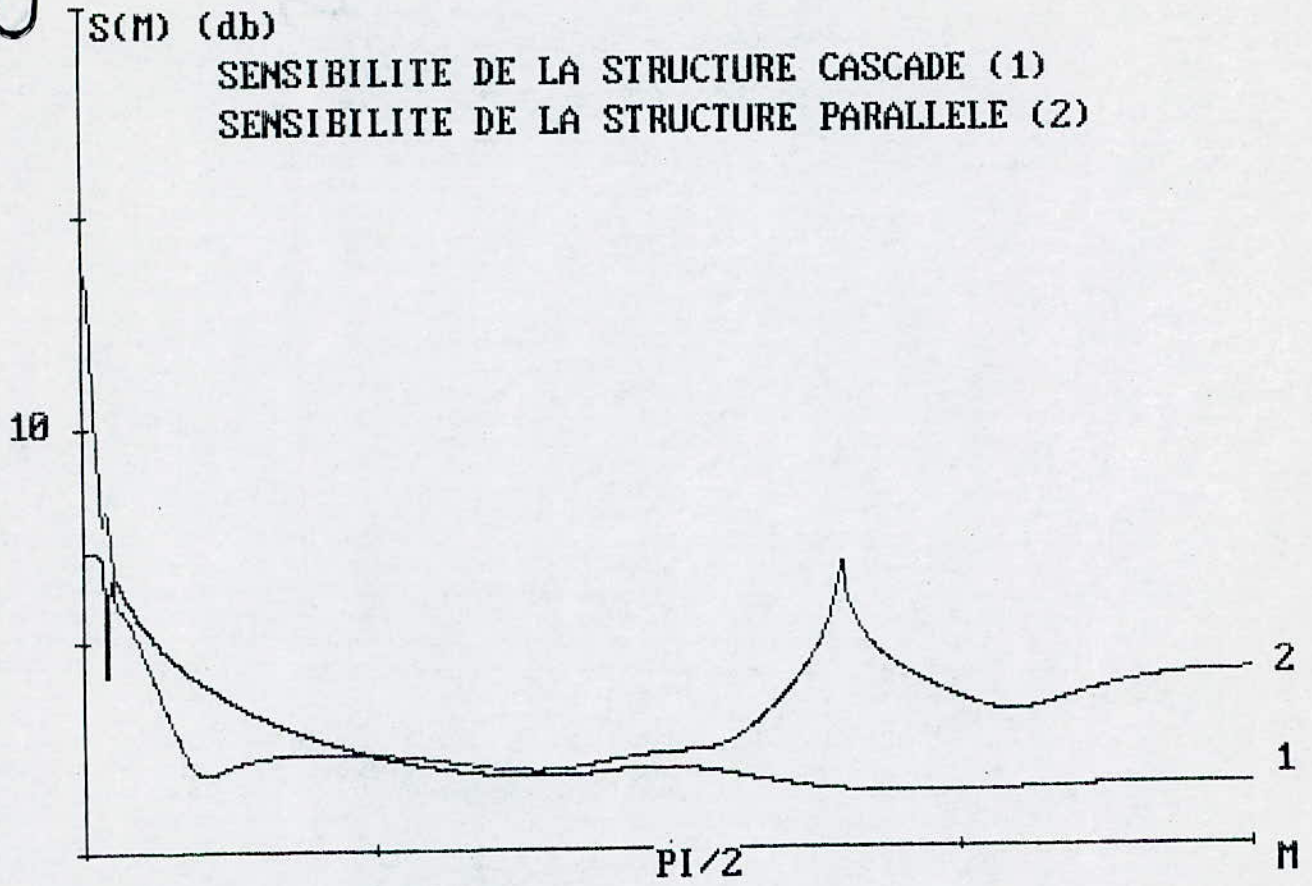


Fig 3.1

Tableau V

i	$\overline{b1i}$	b1i	$\overline{b2i}$	b2i	d1i	d2i
1	-0,0083301	-0,00911135	0,5484055	0,549968	0,1q	0,2q
2	-1,9599263	-1,9669576	0,9638442	0,9669692	0,9q	0,4q
3	-0,0456379	-0,0518879	0,1181406	0,1189218	0,8q	0,1q
4	-1,8977339	-1,904652	0,9018827	0,9050077	0,9q	0,4q
5	-0,9685737	-0,9763862	0,0314262	0,034262	q	0,0q

Tableau VI

i	$\overline{b1i}$	b1i	$\overline{b2i}$	b2i	d1i	d2i
1	-0,0083301	-0,00836061	0,5484055	0,5484085	q	0,1q
2	-1,9599263	-1,9599538	0,9638442	0,9638503	0,9q	0,2q
3	-0,0456379	-0,0456531	0,1181406	0,1181467	0,5q	0,2q
4	-1,8977339	-1,8977614	0,9018827	0,9019101	0,9q	0,9q
5	-0,9685737	-0,9685798	0,0314262	0,0314506	0,2q	0,8q

3.2.3.4 INTERPRETATION DES COURBES:

Les courbes des figures 3-2 et 3-3 représentent les variations du module de T(Z) en fonction de la fréquence, de la structure cascade après quantification de ses coefficients par un ordinateur à 8 bits et un à 16 bits, respectivement.

Une première constatation est que la courbe de la figure 3-3 (N=16 bits) peut être considérée identique à celle de la figure 2-1 (N=32 bits).

Par ailleurs, la courbe de la figure 3-2 (N=8 bits) est différente de celle de la figure 2-1 en ce sens que:

- La bande passante de la courbe de la figure 3-2 est plus réduite et moins plate.
- Les bandes de transition inférieure et supérieure de la courbe de la figure 3-2 sont plus larges.

La quantification à 8 bits a grandement altéré la transmittance du filtre "R.I.I" cascade. Par contre la quantification à 16 bits l'a laissée inchangée. Ceci permet de déduire une conclusion, a priori uniquement valable pour ce filtre, à savoir: L'utilisation d'un ordinateur de 16 bits est suffisante pour une détermination précise des coefficients de ce filtre.

3.3 SENSIBILITE DU FILTRE NON-RECURSIF:

La fonction de transfert isochrone s'écrit:

$$A(M) = h_0 + \sum_{n=1}^{(N-1)/2} 2 h_n \cos(nM)$$

ou les h_n sont les coefficients du filtre non-récurif de degré N. Si on considère l'amplitude A(M) au lieu de l'affaiblissement $\Delta A_f(M)$ sa sensibilité par rapport aux coefficients h_n vaut:

$$S_{hn} = \frac{\partial A(M)}{\partial h_n} = 2 \cos(nM).$$

On remarque que ces sensibilités sont indépendantes des coefficients du filtre et de plus, elles sont comprises entre (-2 et +2). Comme au paragraphe précédent, on utilise une approche statistique.

On définit l'indice de sensibilité quadratique:

$$P(M) = \left\{ \sum_{n=0}^{(N-1)/2} 4 \cos^2(nM) + 1 \right\}^{1/2}$$

Cette fonction ne dépend que du degré du filtre; elle est illustrée aux figures 3-3-a, 3-3-b et 3-3-c, après division par $(2N-1)^{1/2}$, pour trois degrés, nettement différents l'un de l'autre égaux à 9, 21 et 41

H(M)

FILTRE RECURSIF STRUCTURE CASCADE
QUANTIFICATION SUR 8 BITS

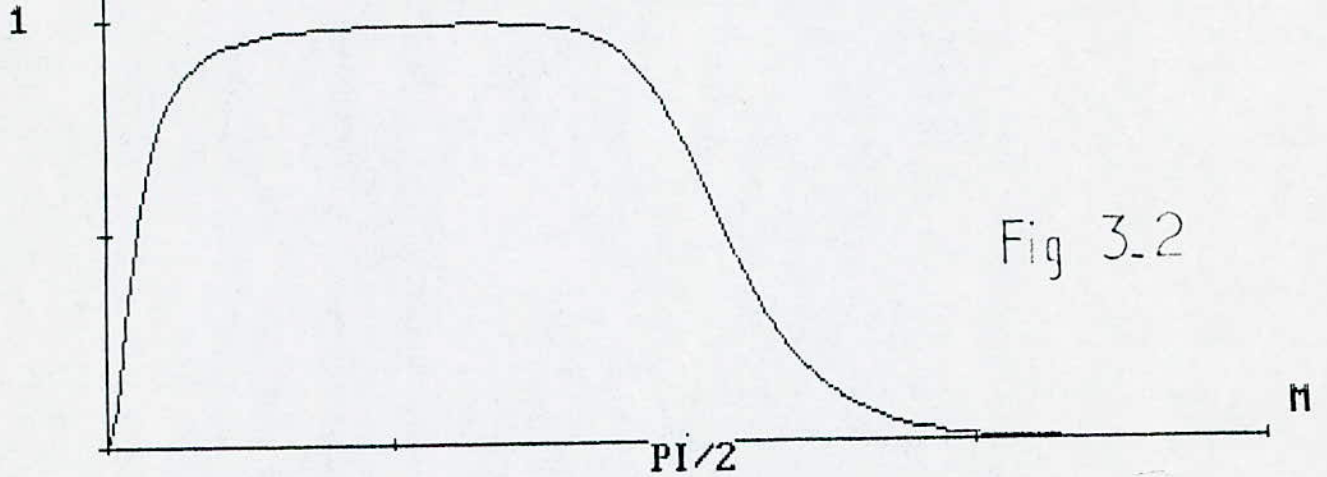


Fig 3.2

H(M)

FILTRE RECURSIF STRUCTURE CASCADE
QUANTIFICATION SUR 16 BITS

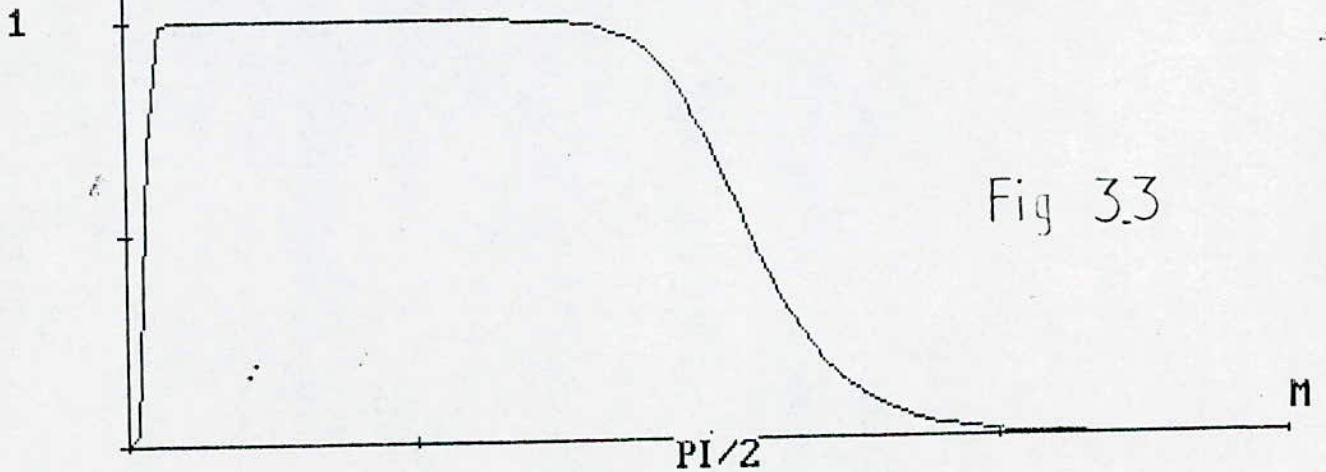


Fig 3.3

S(M)

SENSIBILITE D'UN FILTRE NON RECURSIF
N=9

1

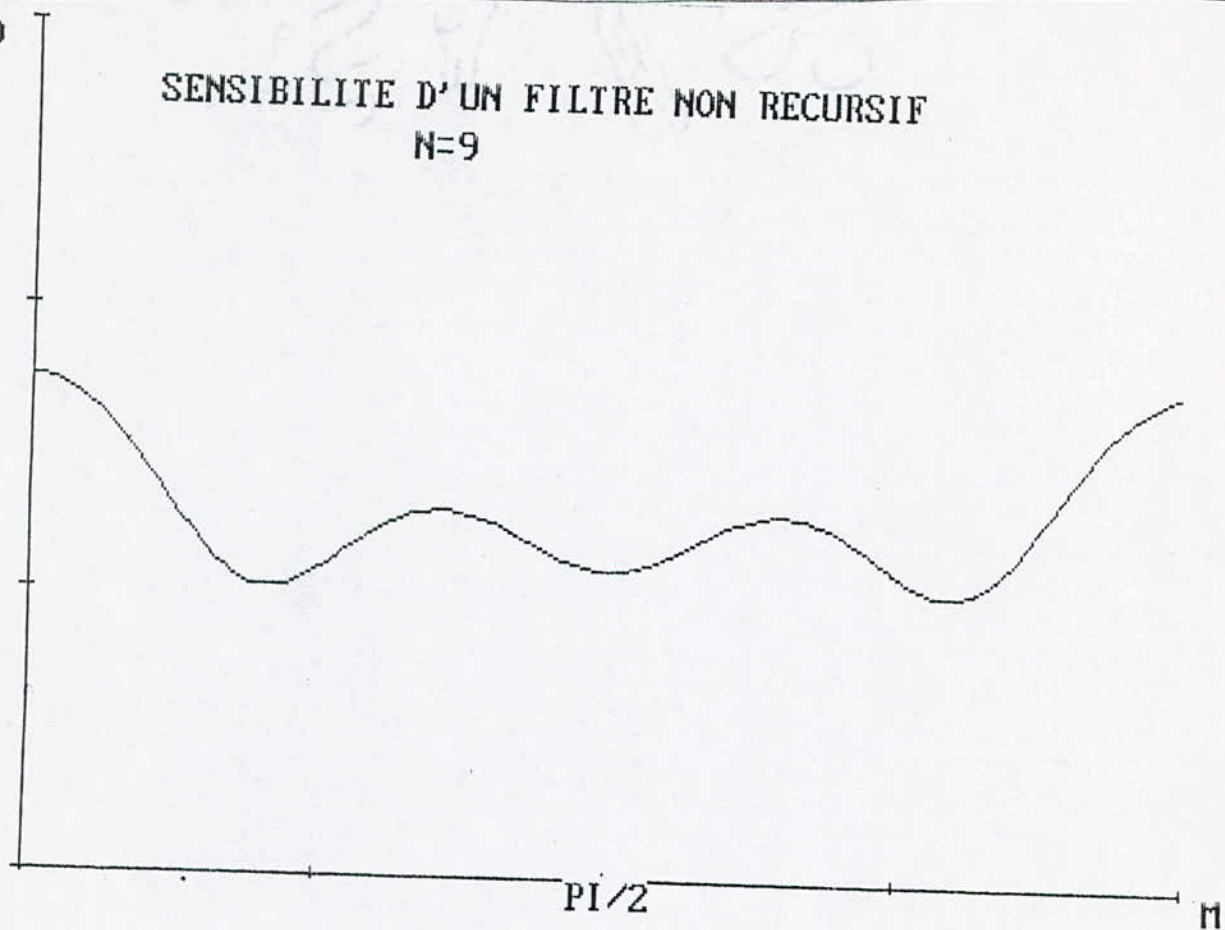


Fig 3.3a

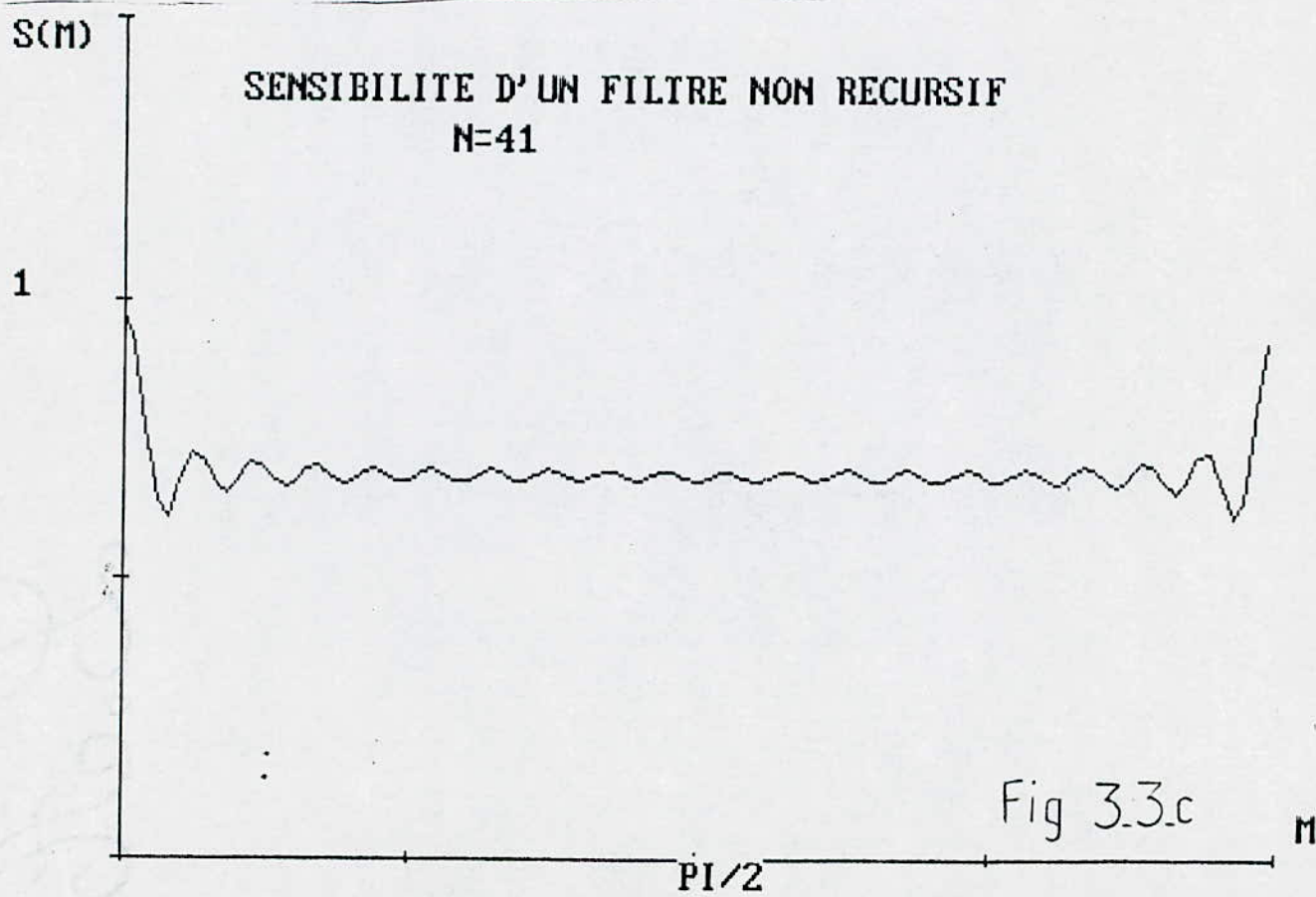
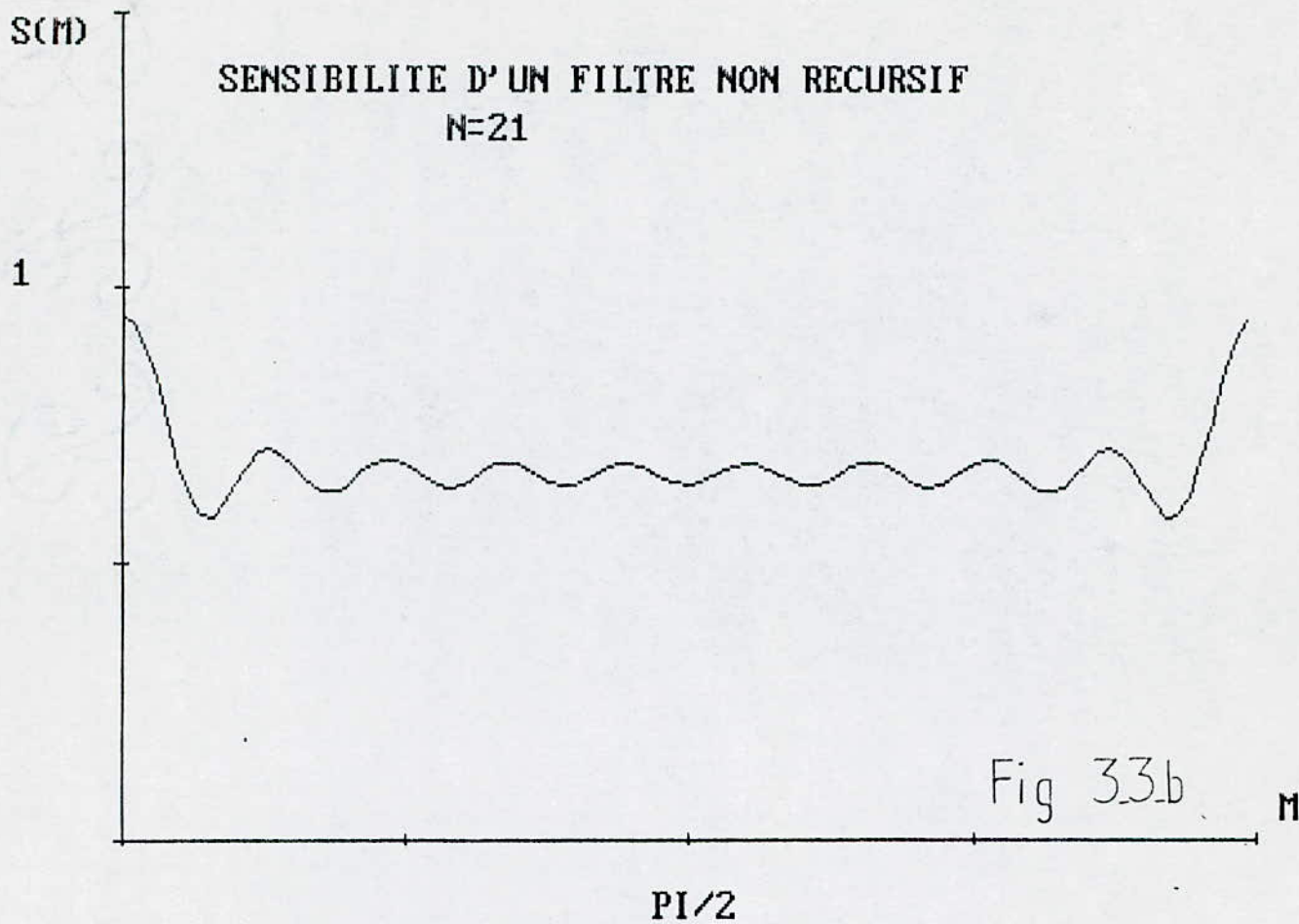
On constate que plus le degré est faible, plus la sensibilité du filtre est importante dans la bande d'atténuation, et plus les amplitudes des ondulations dans la bande passante sont importantes. Or comme nous sommes principalement intéressés par une faible sensibilité dans la bande passante on peut conclure que: plus le degré d'un filtre numérique est grand plus sa sensibilité est faible. Par ailleurs cette méthode ne permet pas de déterminer la sensibilité des filtres "R.I.F" par rapport à ses coefficients. C'est pour cela qu'on étudie l'effet de la quantification de ces derniers.

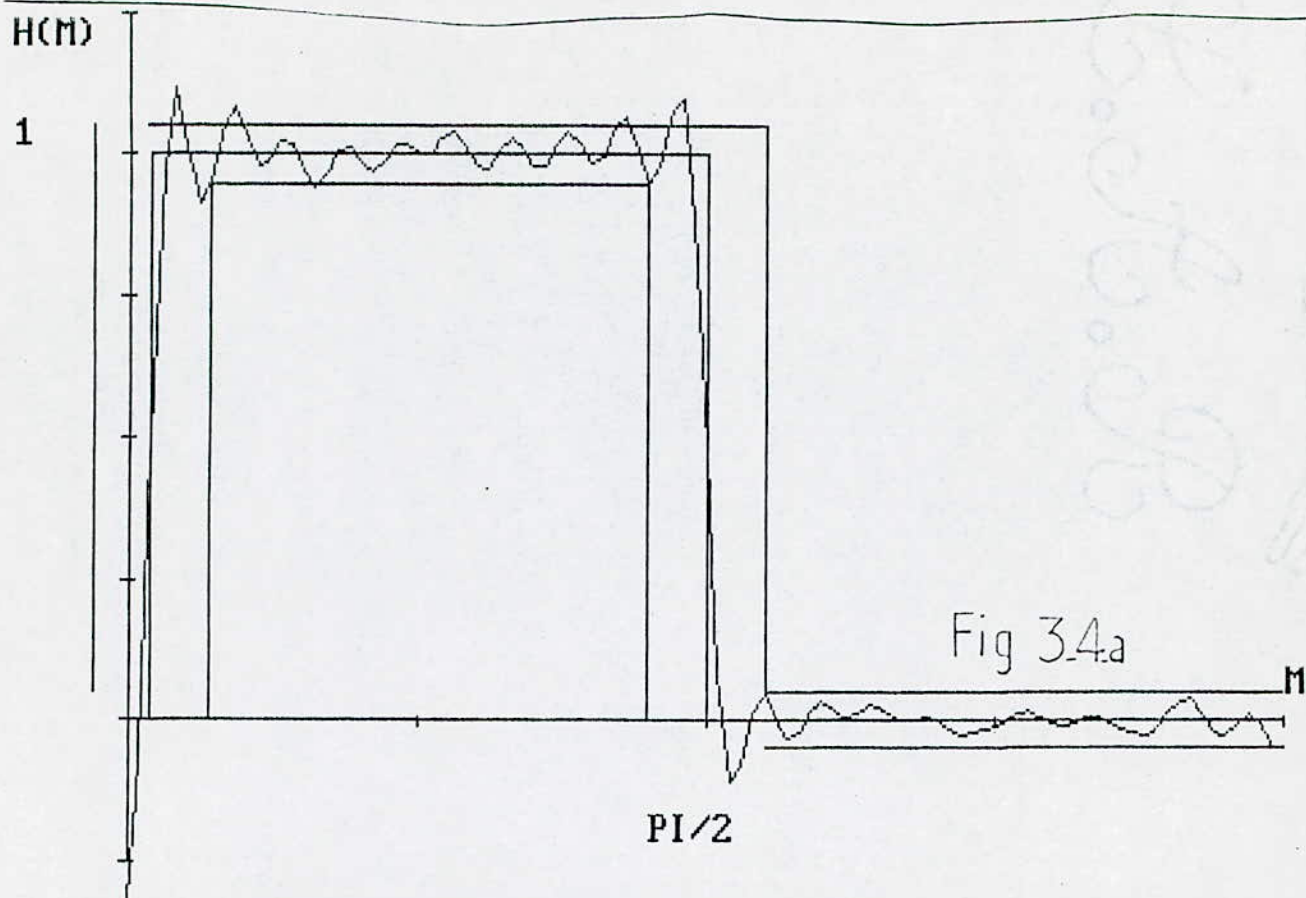
Une alternative consiste à introduire soit même la quantification des coefficients et à étudier l'effet de cette dernière sur la transmittance du filtre.

La méthode de quantification est exposée dans la section 3.2.3 et est appliquée au filtre "R.I.F" de degré 41 utilisant la fenêtre de HAMMING.

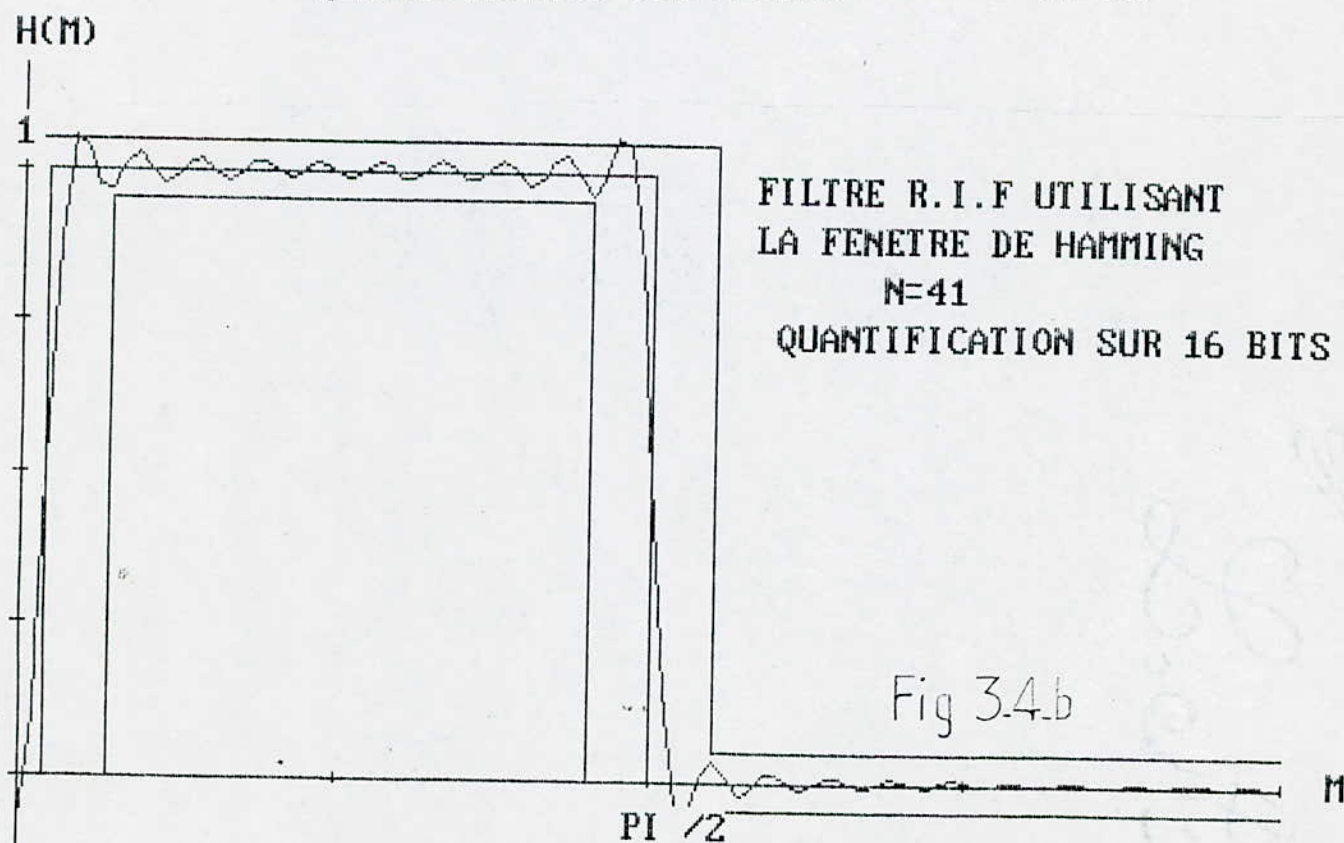
Les figures 3-4-a et 3-4-b montrent les variations en fonction de la fréquence du module de la transmittance de ce filtre avec des coefficients quantifiés sur un calculateur à 8 bits et un autre à 16 bits respectivement.

La même conclusion qui a été faite en ce qui concerne la quantification des coefficients du filtre "R.I.I" est valable pour celui-ci; à savoir l'utilisation d'un calculateur de 16 bits est suffisante pour une détermination précise des coefficients du filtre "R.I.I"





FILTRE NON RECURSIF UTILISANT LA FENETRE DE HAMMING
 QUANTIFICATION SUR 8 BITS (N=41)



FILTRE R.I.F UTILISANT
 LA FENETRE DE HAMMING
 N=41
 QUANTIFICATION SUR 16 BITS

Fig 3.4.b

CONCLUSION

Ce travail met en évidence un des paramètres essentiels dans la synthèse des filtres numériques. En effet, l'étude de la sensibilité des différentes structures, par rapport aux variations des coefficients, principalement la quantification, s'avère nécessaire.

Jusqu'à ce jour il n'existe pas de recettes standard pour le choix optimum d'un filtre numérique pour le traitement de signaux. Le choix est fait pour le cas d'un signal spécifique donné et au vu des critères choisis et des contraintes imposées, à savoir :

- Caractéristiques des signaux à traiter.
- Caractéristiques des calculateurs ou microprocesseurs utilisés
- Temps de traitement.
- Précision.
- Sensibilité.
- Fiabilité.

En résumé, et en se basant sur les constatations faites tout au long de notre étude et qui sont assez concluantes, on peut affirmer que la structure cascade du filtre récursif est la mieux indiquée pour l'E.E.G du point de vue de la sensibilité.

Enfin vu la grande importance du sujet, il serait fort intéressant d'envisager l'étude de ce filtre cascade par rapport aux autres paramètres cités au paravant, afin de pouvoir réaliser un filtre numérique optimal, dans le sens le plus large, pour l'E.E.G.

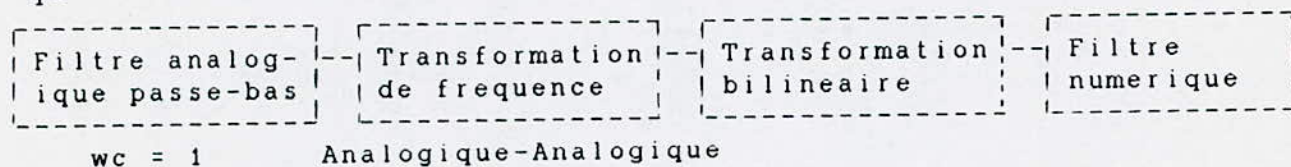
ANNEXES

ANNEXE I

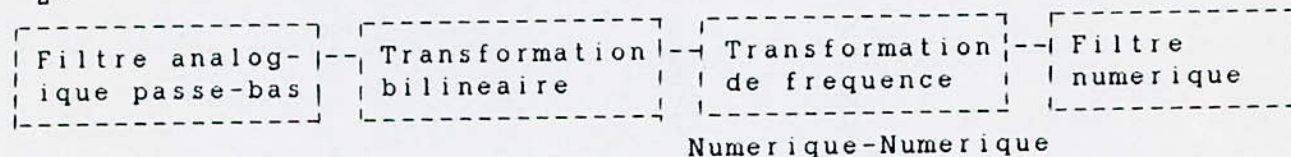
1-LES DIFFERENTS TYPES DE TRANSFORMATION:

Pour obtenir à partir d'un filtre passe-bas les filtres passe-haut, passe-bande ou coupe-bande, la méthode classique consiste à appliquer les formules de transformation de fréquence selon un des deux schémas suivants:

1-



2-



- Cas du schéma 1 :

La transformation de fréquence se fait en analogique et peut être résumé dans le tableau suivant:

Type de filtre	Transformation
Passe-bas	$P \rightarrow P/wh$
Passe-haut	$P \rightarrow wh/P$
Passe-bande	$P + wh wb$ $P(wh - wb)$
Coupe-bande	$P(wh - wb)$ $P + wh wb$

- Cas du schéma 2 :

La transformation se fait dans le domaine numérique et peut se résumer dans le tableau suivant [1]:

TYPE FILTRE	TRANSFORMATION $G(Z)$	PARAMETRES
Passe-bas	$Z \frac{1 - Y}{1 - YZ}$	$Y = \frac{\sin[(Mc - mc)/2]}{\sin[(Mc + mc)/2]}$
Passe-haut	$Z \frac{1 + Y}{1 + YZ}$	$Y = -\frac{\cos[(Mc + mc)/2]}{\cos[(mc - Mc)/2]}$
Passe-bande	$Z \frac{1 - 2YKZ / ((1+K) + (K-1)/(K+1))}{(K-1)Z / (K+1) - 2YKZ / ((1+K) + 1)}$	$Y = \frac{\cos[(m_1 + m_2)/2]}{\cos[(m_2 - m_1)/2]}$ $K = \operatorname{ctg}[(m_2 - m_1)/2] \operatorname{tg}[Mc/2]$
Coupe-bande	$Z \frac{1 - 2YKZ / ((1+K) + (1-K)/(1+K))}{(1-K)Z / (1+K) - 2YKZ / ((1+K) + 1)}$	$Y = \frac{\cos[(m_1 + m_2)/2]}{\cos[(m_2 - m_1)/2]}$ $K = \operatorname{tg}[(m_2 - m_1)/2] \operatorname{tg}[Mc/2]$

Mc: Fréquence de coupure du filtre passe-bas de départ.
mc: Fréquence de coupure désirée.
m1 et m2 : limites de la bande passante.

2- AUTRE TYPE DE TRANSFORMATION DE FREQUENCE:

A partir d'une fonction de transfert en P (Laplace) on obtient les filtres passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande.

TYPE FILTRE	TRANSFORMATION	PARAMETRES
Passe-bas	$X \frac{1 - Z}{1 + Z}$	$X = \omega_c \operatorname{ctg}(\omega_h T_e/2)$
Passe-haut	$X \frac{1 + Z}{1 - Z}$	$-X = \omega_c \operatorname{tg}(\omega_h T_e/2)$
Passe-bande	$X \frac{Z^2 - 2YZ + 1}{1 - Z^2}$	$Y = \frac{\cos[(\omega_h + \omega_b)T_e/2]}{\cos[(\omega_h - \omega_b)T_e/2]}$ $X = \omega_c \operatorname{ctg}[(\omega_h - \omega_b)T_e/2]$
Coupe-bande	$X \frac{1 - Z^2}{Z^2 - 2YZ + 1}$	Y défini ci-dessus $X = \omega_c \operatorname{tg}[(\omega_h - \omega_b)T_e/2]$

ANNEXE II
PROGRAMMES

```

5 '*****PROGRAMME DONNANT LE TRACE' DE LA FONCTION DE TRANSFERT *****
6 '***** FILTRE RECURSIF *****
8 '***** STRUCTURE CASCADE *****
10 XMAX=22/7:YMAX=2
15 GOSUB 140
20 FOR M=0 TO 22/7 STEP 22/7000
30 B1(1)=-.0083301:B1(2)=-1.9599263# :B1(3)=-.0456379:B1(4)=-1.8977339# :B1(5)=-.9
685737:B2(1)=.5484055:B2(2)=.9638442:B2(3)=.1181406:B2(4)=.9018827:B2(5)=.031426
2:BO=.0449621
32 P=((1-COS(2*M))^2+(SIN(2*M))^2)^.5
35 S=1
40 FOR I=1 TO 5
50 S(M)=((1+B1(I)*COS(M)+B2(I)*COS(2*M))^2+(B1(I)*SIN(M)+B2(I)*SIN(2*M))^2)^-.5
60 S=5*S(M)
65 NEXT I
90 Q(M)=P*S*BO
100 IF M=0 THEN 120
110 LINE (MO,QMO)-(M,Q(M))
120 MO=M:QMO=Q(M)
130 NEXT M:END
140 CLS:SCREEN 3
150 VIEW (0,0)-(480,300)
160 WINDOW (-XMAX/100,-YMAX/100)-(XMAX,YMAX)
170 LINE (0,0)-(XMAX,0)
180 LINE (0,0)-(0,YMAX)
190 FOR I=0 TO XMAX STEP XMAX/4
200 LINE (I,-YMAX/200)-(I,YMAX/200)
210 NEXT I
220 FOR I=0 TO YMAX STEP YMAX/4
230 LINE (-XMAX/200,I)-(XMAX/200,I)
240 NEXT I
250 RETURN

```

```

5 '***** PROGRAMME DONNANT LE TRACE DE LA FONCTION DE TRANSFERT *****
6 '***** FILTRE RECURSIF *****
8 '***** STRUTURE PARALLELE *****
10 XMAX=22/7:YMAX=2
15 GOSUB 440
30 B1(1)=-.0083301:B1(2)=-1.9599263#:B1(3)=-.0456379:B1(4)=-1.8977339#:B1(5)=-.9
685737:B2(1)=.5484055:B2(2)=.9638442:B2(3)=.1181406:B2(4)=.9018827:B2(5)=.031426
2
40 A1(1)=-.6564534:A2(1)=.0180094:A1(2)=.0175933:A2(2)=-.0142841:A1(3)=.0812237:
A2(3)=.5336417:A1(4)=-.117066:A2(4)=.1161619:A1(5)=.8941257:A2(5)=-.94627118#:HO
=.0449621
100 FOR M=0 TO 22/7 STEP 22/700
110 N=HO
120 FOR K=1 TO 5
122 Y(K)=(A1(K)+A2(K)*COS(M))*(1+B1(K)*COS(M)+B2(K)*COS(2*M))+A2(K)*SIN(M)*(B1(K)
)*SIN(M)+B2(K)*SIN(2*M))
124 D(K)=(1+B1(K)*COS(M)+B2(K)*COS(2*M))^2+(B1(K)*SIN(M)+B2(K)*SIN(2*M))^2
130 N(K)=Y(K)/D(K)
140 N=N+N(K)
150 NEXT K
155 T(M)=N^2
160 W=0
170 FOR K=1 TO 5
172 Z(K)=(A1(K)+A2(K)*COS(M))*(B1(K)*SIN(M)+B2(K)*SIN(2*M))-A2(K)*SIN(M)*(1+B1(K)
)*COS(M)+B2(K)*COS(2*M))
174 D(K)=(1+B1(K)*COS(M)+B2(K)*COS(2*M))^2+(B1(K)*SIN(M)+B2(K)*SIN(2*M))^2
180 W(K)=Z(K)/D(K)
190 W=W+W(K)
200 NEXT K
205 L(M)=W^2
210 P(M)=(T(M)+L(M))^.5
270 IF M=0 THEN 290
280 LINE (MO,PMO)-(M,P(M))
290 MO=M:PMO=P(M)
300 NEXT M:END
440 CLS:SCREEN 3
450 VIEW (0,0)-(480,300)
460 WINDOW (-XMAX/10,-YMAX/10)-(XMAX,YMAX)
470 LINE (0,0)-(XMAX,0)
480 LINE (0,0)-(0,YMAX)
490 FOR I=0 TO XMAX STEP XMAX/4
500 LINE (I,-YMAX/200)-(I,YMAX/200)
510 NEXT I
520 FOR I=0 TO YMAX STEP YMAX/4
530 LINE (-XMAX/200,I)-(XMAX/200,I)
540 NEXT I
550 RETURN

```

```

5 '****PROGRAMME DONNANT LE TRACE DU MODULE DE LA FONCTION DE TRANSFERT****
6 '***** FILTRE RECURSIF *****
7 '***** STRUCTURE CANONIQUE *****
10 XMAX=22/7:YMAX=2:KEY OFF
20 GOSUB 140
30 FOR M=0 TO 22/7 STEP 22/700
40 A(3)=-.9685737:B(3)=.0314262:A(2)=-1.9433719#:B(2)=1.1066321#:C(2)=-.2653597:
D(2)=.1065492:A(1)=-1.9682564#:B(1)=1.5285763#:C(1)=-1.0828634#:D(1)=.5285761
50 Q(1)=.4842868:Q(2)=.2592271:Q(3)=.3581489
60 E(1)=A(1)+A(2):E(2)=B(1)+B(2)+A(1)*A(2):E(3)=C(1)+C(2)+A(1)*B(2)+A(2)*B(1):E(
4)=D(1)+D(2)+A(1)*C(2)+A(2)*C(1)+B(1)*B(2):E(5)=A(1)*D(2)+D(1)*A(2)+B(1)*C(2)+C(
1)*B(2):E(6)=B(1)*D(2)+D(1)*B(2)+C(1)*C(2):E(7)=C(1)*D(2)+C(2)*D(1):E(8)=D(1)*D(
2)
70 F(1)=E(1)+A(3):F(2)=E(2)+E(1)*A(3)+B(3):F(3)=E(1)*B(3)+E(2)*A(3)+E(3):F(4)=E(
2)*B(3)+E(3)*A(3)+E(4):F(5)=E(3)*B(3)+E(4)*A(3)+E(5):F(6)=E(4)*B(3)+E(5)*A(3)+E(
6):F(7)=E(5)*B(3)+E(6)*A(3)+E(7):F(8)=E(6)*B(3)+E(7)*A(3)+E(8):F(9)=E(7)*B(3)+E(
8)*A(3)
75 F(10)=E(8)*B(3)
80 X=(1+F(1)*COS(M)+F(2)*COS(2*M)+F(3)*COS(3*M)+F(4)*COS(4*M)+F(5)*COS(5*M)+F(6)
*COS(6*M)+F(7)*COS(7*M)+F(8)*COS(8*M)+F(9)*COS(9*M)+F(10)*COS(10*M))^2
90 Y=(F(1)*SIN(M)+F(2)*SIN(2*M)+F(3)*SIN(3*M)+F(4)*SIN(4*M)+F(5)*SIN(5*M)+F(6)*S
IN(6*M)+F(7)*SIN(7*M)+F(8)*SIN(8*M)+F(9)*SIN(9*M)+F(10)*SIN(10*M))^2
95 D(M)=(X+Y)^-.5
100 N(M)=((1-5*COS(2*M)+10*COS(4*M)-10*COS(6*M)+5*COS(8*M)-COS(10*M))^2+(5*SIN(2
*M)-10*SIN(4*M)+10*SIN(6*M)-5*SIN(8*M)+SIN(10*M))^2)^.5
105 H(M)=N(M)*D(M)*Q(1)*Q(2)*Q(3)
107 IF M=0 THEN 120
110 LINE (M0,HM0)-(M,H(M))
115 'PRINT M,H(M)
120 M0=M:HM0=H(M)
130 NEXT M:END
140 CLS:SCREEN 3
150 VIEW (0,0)-(480,300)
160 WINDOW (-XMAX/10,-YMAX/10)-(XMAX,YMAX)
170 LINE (0,0)-(XMAX,0)
180 LINE (0,0)-(0,YMAX)
190 FOR I=0 TO XMAX STEP XMAX/4
200 LINE (I,-YMAX/200)-(I,YMAX/200)
210 NEXT I
220 FOR I=0 TO YMAX STEP YMAX/4
230 LINE (-XMAX/200,I)-(XMAX/200,I)
240 NEXT I
250 RETURN

```

```

5 '***** PROGRAMME DONNANT LE TRACE' DE LA FONCTION DE TRANSFERT *****
6 '***** FILTRE NON RECURSIF UTILISANT LA FENETRE DE HAMMING *****
8 '***** N=41 *****
10 XMAX=22/7:YMAX=1.5:DIM H(41)
20 GOSUB 180
50 PI=22/7:AI=2*PI*.01:AN=2*PI/4
60 FOR I=1 TO 41
70 H(I)=((SIN(AN*I)-SIN(AI*I))/(PI*I))*(.54+.46*COS(20*PI*I))
90 NEXT I
100 FOR M=0 TO 22/7 STEP 22/700!:G=.48
110 FOR I=1 TO 41
120 G=G+2*H(I)*COS(I*M)
130 NEXT I
135 G(M)=G
140 IF M=0 THEN 160
150 LINE (M0,GM0+YMAX/6)-(M,G(M)+YMAX/6)
160 M0=M:GM0=G(M)
170 NEXT M:END
180 CLS:SCREEN 3
190 VIEW (0,0)-(480,300)
200 WINDOW (-XMAX/100,-YMAX/100)-(XMAX,YMAX)
210 LINE (0,YMAX/6)-(XMAX,YMAX/6)
220 LINE (0,0)-(0,YMAX)
222 LINE (22/350,1+YMAX/6)-(22/14 ,YMAX/6),1,B
223 LINE (77/350,.95+YMAX/6)-(99/70,YMAX/6),1,B
224 LINE (-33/350,.05+YMAX/6)-(-33/350,1.05+YMAX/6)
225 LINE (.05,1.05+YMAX/6)-(1.73,1.05+YMAX/6)
226 LINE (1.73,.05+YMAX/6)-(1.73,1.05+YMAX/6)
227 LINE (0,YMAX/6)-(.05,YMAX/6)
228 LINE (1.73,.05+YMAX/6)-(22/7,.05+YMAX/6)
229 LINE (1.73,-.05+YMAX/6)-(22/7,-.05+YMAX/6)
230 FOR S=0 TO XMAX STEP XMAX/4
240 LINE(S,-YMAX/200+YMAX/6)-(S,YMAX/200+YMAX/6)
250 NEXT S
260 FOR S=0 TO YMAX STEP YMAX/6
270 LINE (-XMAX/200,S)-(XMAX/200,S)
280 NEXT S
290 RETURN

```

Handwritten mark: a diagonal slash with a small '1' above it, and a circled '1' to its right.

4

```

5 '***** PROGRAMME DONNANT LES 2 COURBES DE SENSIBILITE *****
6 '***** STRUCTURE CASCADE-STRUCTURE PARALLELE EN FONCTION DE LA FREQUENCE *****
10 XMAX=22/7:YMAX=20
15 GOSUB 440
20 FOR M=0 TO 22/7 STEP 22/7000
30 B1(1)=-.0083301:B1(2)=-1.9599263#:B1(3)=-.0456379:B1(4)=-1.8977339#:B1(5)=-.9
685737:B2(1)=.5484055:B2(2)=.9638442:B2(3)=.1181406:B2(4)=.9018827:B2(5)=.031426
2
40 A1(1)=-.6564534:A2(1)=.0180094:A1(2)=.0175933:A2(2)=-.0142841:A1(3)=.0812237:
A2(3)=.5336417:A1(4)=-.117066:A2(4)=.1161619:A1(5)=.8941257:A2(5)=-.9462718:H0=.
0449621
50 FOR K=1 TO 5
60 Y(K)=(A1(K)+A2(K)*COS(M))*(1+B1(K)*COS(M)+B2(K)*COS(2*M))+A2(K)*SIN(M)*(B1(K)
*SIN(M)+B2(K)*SIN(2*M))
70 Z(K)=(A1(K)+A2(K)*COS(M))*(B1(K)*SIN(M)+B2(K)*SIN(2*M))-A2(K)*SIN(M)*(1+B1(K)
*COS(M)+B2(K)*COS(2*M))
80 U(K)=(1+B1(K)*COS(M)+B2(K)*COS(2*M))^2
90 V(K)=(B1(K)*SIN(M)+B2(K)*SIN(2*M))^2
100 D(K)=U(K)+V(K)
105 NEXT K
110 N=H0
120 FOR K=1 TO 5
130 N(K)=Y(K)/D(K)
140 N=N+N(K)
150 NEXT K
160 W=0
170 FOR K=1 TO 5
180 W(K)=Z(K)/D(K)
190 W=W+W(K)
200 NEXT K
210 T=(N^2+W^2)
211 E=-20/(LOG(10))
213 S=0
216 FOR K=1 TO 5
220 S1(K)=(E/T)*(N*(D(K)*((A1(K)+A2(K)*COS(M))*COS(M)+A2(K)*SIN(M)*SIN(M))-Y(K)*
(2*U(K)*COS(M)+2*V(K)*SIN(M)))+W*(D(K)*((A1(K)+A2(K)*COS(M))*SIN(M)-A2(K)*SIN(M)
*COS(M))-Z(K)*(2*U(K)*COS(M)+2*V(K)*SIN(M))))/D(K)^2
225 S2(K)=(E/T)*(N*(D(K)*((A1(K)+A2(K)*COS(M))*COS(2*M)+A2(K)*SIN(M)*SIN(2*M))-Y
(K)*(2*U(K)*COS(2*M)+2*V(K)*SIN(2*M)))+W*(D(K)*((A1(K)+A2(K)*COS(M))*SIN(2*M)-A2
(K)*SIN(M)*COS(M))-Z(K)*(2*U(K)*COS(2*M)+2*V(K)*SIN(2*M))))/D(K)^2
230 S(K)=(S1(K))^2+(S2(K))^2
240 S=S+S(K)
250 NEXT K
260 P(M)=20*LOG((S/12)^.5)
270 IF M=0 THEN 290
280 LINE (H0,P(M)/20)-(H,P(M)/20)
290 H0=M:P(M)=P(M)
310 C=20/LOG(10)
320 F=0
330 FOR K=1 TO 5
340 F1(K)=C*((1+B1(K)*COS(M)+B2(K)*COS(2*M))*COS(M)+(B1(K)*SIN(M)+B2(K)*SIN(2*M)
)*SIN(M))/D(K)

```

```

350 F2(K)=C*((1+B1(K)*COS(H)+B2(K)*COS(2*M))*COS(2*M)+(B1(K)*SIN(H)+B2(K)*SIN(2*
M))*SIN(2*M))/D(K)
360 F(K)=F1(K)^2+F2(K)^2
370 F=F+K
380 NEXT K
390 Q(M)=20*LOG((F/12)^.5)
400 IF M=0 THEN 420
410 LINE (M,QM/20)-(M,Q(M)/20)
420 M=M:QM=Q(M)
430 NEXT M:END
440 CLS:SCREEN 3
450 VIEW (0,0)-(480,300)
460 WINDOW (-XMAX/10,-YMAX/10)-(XMAX,YMAX)
470 LINE (0,0)-(XMAX,0)
480 LINE (0,0)-(0,YMAX)
490 FOR I=0 TO XMAX STEP XMAX/4
500 LINE (I,-YMAX/200)-(I,YMAX/200)
510 NEXT I
520 FOR I=0 TO YMAX STEP YMAX/4
530 LINE (-XMAX/200,I)-(XMAX/200,I)
540 NEXT I
550 RETURN

```



```

5 '*****PROGRAMME DONNANT LE TRACE' DE LA FONCTION DE TRANSFERT *****
6 '***** FILRE RECURSIF STRUCTURE CASCADE *****'
8 '***** QUANTIFICATION SUR 16 BITS *****'
10 XMAX=22/7:YMAX=2
15 GOSUB 140
20 FOR M=0 TO 22/7 STEP 22/700
30 B1(1)=-8.360611E-03:B1(2)=-1.9599538#:B1(3)=-.0456531:B1(4)=-1.8977614#:B1(5)=
=-.9685798:B2(1)=.5484085:B2(2)=.9638503:B2(3)=.11811167#:B2(4)=.9019101:B2(5)=.
0314506:BO=.0449621
32 P=((1-COS(2*M))^2+(SIN(2*M))^2)^.5
35 S=1
40 FOR I=1 TO 5
50 S(M)=((1+B1(I)*COS(M)+B2(I)*COS(2*M))^2+(B1(I)*SIN(M)+B2(I)*SIN(2*M))^2)^-.5
60 S=5*S(M)
65 NEXT I
90 Q(M)=P*S*BO
100 IF M=0 THEN 120
110 LINE (MO,QMO)-(M,Q(M))
120 MO=M:QMO=Q(M)
130 NEXT M:END
140 CLS:SCREEN 3
150 VIEW (0,0)-(480,300)
160 WINDOW (-XMAX/10,-YMAX/10)-(XMAX,YMAX)
170 LINE (0,0)-(XMAX,0)
180 LINE (0,0)-(0,YMAX)
190 FOR I=0 TO XMAX STEP XMAX/4
200 LINE (I,-YMAX/200)-(I,YMAX/200)
210 NEXT I
220 FOR I=0 TO YMAX STEP YMAX/4
230 LINE (-XMAX/200,I)-(XMAX/200,I)
240 NEXT I
250 RETURN

```

2

```

5 '***** PROGRAMME DONNANT LA COURBE DE LA SENSIBILITE EN FONCTION DE F *****
6 '***** D'UN FILRE NON RECURSIF *****
8 '***** N=41 *****
10 XMAX=22/7:YMAX=1.5:GOSUB 140
12 DIM S(19)
15 FOR M=0 TO 22/7 STEP 22/7000
40 S=1
50 FOR I=1 TO 19
60 S(I)=4*COS((20-I)*M)*COS((20-I)*M)
70 S=S+S(I)
80 NEXT I
90 P(M)=(S/81)^.5
95 'PRINT P(M);M
100 IF M=0 THEN 120
110 LINE (M0,PMD)-(M,P(M))
120 M0=M:PMD=P(M)
130 NEXT M:END
140 CLS:SCREEN 3:VIEW (0,0)-(480,300):WINDOW (-XMAX/100,-YMAX/100)-(XMAX,YMAX)
150 LINE (0,0)-(XMAX,0)
160 LINE (0,0)-(0,YMAX)
170 FOR I=0 TO XMAX STEP XMAX/4
180 LINE (I,-YMAX/200)-(I,YMAX/200)
190 NEXT I
200 FOR I=0 TO YMAX STEP YMAX/3
210 LINE (-XMAX/200,I)-(XMAX/200,I)
220 NEXT I
230 RETURN

```

3

Proc 43
(B)

```

5 '***** PROGRAMME DONNANT LE TRACE' DE LA FONCTION DE TRANSFERT *****
6 '***** FILTRE NON RECURSIF UTILISANT LA FENETRE DE HAMMING N=41 *****
8 '***** QUANTIFICATION SUR 8 BITS *****
10 XMAX=22/7:YMAX=1.5:DIM H(41):DIM D(41)
20 GOSUB 180
30 D(1)=.4:D(2)=.5:D(3)=.3:D(4)=.3:D(5)=.9:D(6)=0:D(7)=.2:D(8)=.7:D(9)=.3:D(10)=
.3:D(11)=.9:D(12)=.9:D(13)=.3:D(14)=.6:D(15)=.1:D(16)=.4:D(17)=.9:D(18)=.2:D(19)
=.4:D(20)=.2:D(21)=.2
40 D(22)=.2:D(23)=.5:D(24)=.3:D(25)=.4:D(26)=.4:D(27)=1:D(28)=.6:D(29)=.1:D(30)=
.7:D(31)=.6:D(32)=.8:D(33)=.1:D(34)=.8:D(35)=.8:D(36)=.7:D(37)=.3:D(38)=.7:D(39)
=.7:D(40)=.6:D(41)=.6
50 PI=22/7:AI=2*PI*.01:AN=2*PI/4
53 Q=2^-7
60 FOR I=1 TO 41
65 D(I)=D(I)*Q
70 H(I)=((SIN(AN*I)-SIN(AI*I))/(PI*I))*(.54+.46*COS(20*PI*I))
72 IF H(I)<0 THEN 76
74 H(I)=H(I)+D(I)
76 H(I)=H(I)-D(I)
90 NEXT I
100 FOR M=0 TO 22/7 STEP 22/700!:G=.48
110 FOR I=1 TO 41
120 G=G+2*H(I)*COS(I*M)
130 NEXT I
135 G(M)=G
140 IF M=0 THEN 160
150 LINE (M0,GM0+YMAX/6)-(M,G(M)+YMAX/6)
160 M0=M:GM0=G(M)
170 NEXT M:END
180 CLS:SCREEN 3
190 VIEW (0,0)-(480,300)
200 WINDOW (-XMAX/10,-YMAX/10)-(XMAX,YMAX)
210 LINE (0,YMAX/6)-(XMAX,YMAX/6)
220 LINE (0,0)-(0,YMAX)
222 LINE (22/350,1+YMAX/6)-(22/14 ,YMAX/6),1,B
223 LINE (77/350,.95+YMAX/6)-(99/70,YMAX/6),1,B
224 LINE (-33/350,.05+YMAX/6)-(-33/350,1.05+YMAX/6)
225 LINE (.05,1.05+YMAX/6)-(1.73,1.05+YMAX/6)
226 LINE (1.73,.05+YMAX/6)-(1.73,1.05+YMAX/6)
227 LINE (0,YMAX/6)-(.05,YMAX/6)
228 LINE (1.73,.05+YMAX/6)-(22/7,.05+YMAX/6)
229 LINE (1.73,-.05+YMAX/6)-(22/7,-.05+YMAX/6)
230 FOR S=0 TO XMAX STEP XMAX/4
240 LINE (S,-YMAX/200+YMAX/6)-(S,YMAX/200+YMAX/6)
250 NEXT S
260 FOR S=0 TO YMAX STEP YMAX/6
270 LINE (-XMAX/200,S)-(XMAX/200,S)
280 NEXT S
290 RETURN

```

(2)

ANNEXE III

1- FACTORISATION D'UN POLYNOME DE DEGRE 4 SOUS FORME DE PRODUITS DE DEGRE 2:

$$P(X) = X^4 + AX^3 + BX^2 + CX + D$$

On fait la transformation suivante qui nous permet d'éliminer le degré 3:

$$P(x) = (x - A/4)^4 + A(x - A/4)^3 + B(x - A/4)^2 + C(x - A/4) + D.$$

$$P(x) = x^4 + A'x^3 + B'x^2 + C'.$$

avec:

$$A' = -(3/8)A + B$$

$$B' = A/8 - AB/2 + C$$

$$C' = BA/2 - 3A^2/4 - CA/4 + D$$

Factorisation de P(x):

$$x^4 + A'x^3 + B'x^2 + C' = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + d)$$

tels que:

$$C' = bd$$

$$A' = b+d-a$$

$$B' = a(d-b)$$

d'où on a:

$$b+d = A' + a$$

$$b-d = -B'/a$$

Ce qui nous donne:

$$b = (1/2)(A' + a - B'/a)$$

$$d = (1/2)(A' + a + B'/a)$$

$$C' = (1/4)[(A'+a)^2 - B'^2/a^2] \quad (1)$$

On pose : $y = a$

donc (1) devient:

$$y^3 + 2A'y^2 + (A'^2 - 4C')y - B'^2 = 0 \quad (2)$$

Soit y_1 la racine de (2); cette racine peut être déterminée par la méthode algébrique, c'est-à-dire localiser cette racine dans un intervalle réduit puis la déterminer avec une précision de 10^6 par la méthode de dichotomie :

$$P(x) = \left[x^2 + y_1 x + (1/2)(A' + y_1 - B'/y_1) \right] \cdot \left[x^2 - y_1 x + (1/2)(A' + y_1 + B'/y_1) \right]$$

On revient à notre première variable X en effectuant la transformation :

$$x \text{-----} \rightarrow (X+A/4)$$

2- METHODE DE BAIRSTOV:

Le principe de cette méthode est de mettre le polynôme $P_n(x)$ de degré n sous la forme :

$$P_n(x) = (x^2 - ux - v) \cdot Q(x)$$

ou u et v sont à trouver par un calcul itératif. $Q(x)$ sera un polynôme de degré $(n-2)$, auquel on appliquera le même procédé.

DEFINITION:

On dit que $(x^2 - ux - v)$ est un facteur quadratique de $P_n(x)$ s'il le divise ($u, v \in \mathbb{R}$)

$$P_n(x) = (x^2 - ux - v) \cdot Q(x)$$

en général:

$$P_n(x) = (x^2 - ux - v) \cdot Q(x) + R(x)$$

ou:

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{N-2} b_i x^{n-i-2} \quad (n-2) \text{ ensemble des polynomes de degre } (n-2).$$

le degré de $R < 2$

$$R(x) = b_{n-1}(x-u) + b_n ; b_{n-1}, b_n \in \mathbb{R}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$$

on a donc:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} = (x^2 - ux - v) \sum_{i=0}^{N-2} b_i x^{n-i-2} + b_{n-1}(x-u) + b_n$$

par identification:

$$\begin{aligned} u_0 &= b_0 \\ a_1 &= b_1 - u b_0 = b_1 - u a_0 \\ a_2 &= b_2 - u b_1 - v b_0 \\ &\vdots \\ a_n &= b_n - u b_{n-1} - v b_{n-2} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$b_0 = a_0$$

$$b_1 = a_1 + u b_0$$

$$b_2 = a_2 + u b_1 + v b_0$$

.

.

.

$$b_n = a_n + u b_{n-1} + v b_{n-2}$$

On pose :

$$C_{n-1} = \frac{\partial b_n(u,v)}{\partial u}$$

Pour le calcul d'itérations pour la détermination de u et v , on choisit un couple (u_0, v_0) initial et on détermine le couple suivant de la façon suivante :

$$U_{n+1} = U_n + \frac{b_n C_{n-3} - b_{n-1} C_{n-2}}{C_{n-2} - C_{n-1} C_{n-3}}$$

$$V_n = V_n + \frac{b_{n-1} C_{n-1} - b_n C_{n-2}}{C_{n-2} - C_{n-1} C_{n-3}}$$

$$\text{ou : } \begin{aligned} C_k &= b_k + U C_{k-1} + V C_{k-1} & 0 < k < n \\ C_1 &= C_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= a_k + U b_{k-1} + V b_{k-2} & 2 < k < n \\ b_0 &= a_0; b_1 = a_1 + U b_0 \end{aligned}$$

On arrêtera l'itération qu'on obtient.

$\Delta U_n = U_{n+1} - U_n$ et $\Delta V_n = V_{n+1} - V_n$ très proches de zéro (une précision de 10^{-8} suffit).

REMARQUE :

Cette méthode a été applicable jusqu'au degré 6 sans aucune condition sur le choix de (U_0, V_0) , mais au delà de ce degré les couples (U_n, V_n) divergent. Ces couples ont été déterminés par itération et on n'obtient pas la condition citée auparavant ($\Delta v_n = 0, \Delta u_n = 0$).

Donc le défaut de cette méthode est qu'on a aucune condition sur le choix de (u_0, v_0) et le degré auquel elle est toujours applicable.

3- DECOMPOSITION FRACTIONNELLE:

Soit :

$$P(Z) = \frac{a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + \dots + a_n}{Z^n + b_1 Z^{n-1} + \dots + b_n}$$

qui peut s'écrire comme suit :

$$P(Z) = K + \sum_{i=1}^{n/2} \frac{C_i}{Z - Z_i}$$

ou Z_i étant les racines du dénominateur du polynome ($Z_i \in \mathbb{C}$).

$$K = \lim_{Z \rightarrow \infty} P(Z) = a_0$$

$$C_i = \lim_{Z \rightarrow Z_i} (Z - Z_i) \cdot P(Z)$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] WALID P.SALMAN et MURS S.SOLOTAREFF
"Le filtre numerique" EYROLLES Paris 1982
- [2] P.FONDANECHÉ et P.GILBERTAS
"Filtres numeriques : Principes et realisations"
MASSON 1981
- [3] R.BOITE H.LEICH
"Les filtres numeriques" MASSON 1982
- [4] ENCYCLOPEDIE DES SCIENCES INDUSTRIELLES (E1)
QUILLET 1993
- [5] M.BELLANGER
"Traitement numerique du signal"
MASSON 1984