

*Ecole Nationale Polytechnique*

24  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES



**Simulation des Systèmes  
Asservis sur Calculateurs Analogiques**



Proposé par:  
Mr TRANTIEN  
Professeur à l'ENPA

Etudié par  
L. MESSAOUDI  
A. SAÏFI

Université des Sciences et Techniques d'Alger

*Ecole Nationale Polytechnique*

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

**Simulation des Systèmes  
Asservis sur Calculateurs Analogiques**

Proposé par:  
Mr TRANTIEN  
Professeur à l'ENPA

Etudié par  
L. MESSAOUDI  
A. SAÏFI

Promotion Juin 1979





A MES PARENTS, AINSI QU'A TOUTE MA  
FAMILLE, POUR LE SOUTIEN MORAL QU'ILS N'  
ONT CESSÉ DE M'APPORTER DURANT TOUTE LA  
DURÉE DE MES ÉTUDES.

L. MESSAOUDI.

NOS SINCERES REMERCIEMENTS VONT A MONSIEUR  
MESSAOUDI AHMED RIDA, POUR SA CONTRIBUTION.  
DECISIVE, SA GRANDE GENTILLESSE ET LA QUALITE  
DU TRAVAIL QU'IL A FOURNI.

=====

Nous sommes reconnaissants à l'ensemble du Personnel  
Enseignant de l'ECOLE POLYTECHNIQUE pour la formation  
que nous avons reçue.

Nous remercions Monsieur TRAN TIEN, notre promoteur  
pour sa gentillesse et sa compréhension, Monsieur  
FLAMANT pour avoir mis le laboratoire de PO19, à BAB-  
EZZOUAR, à notre disposition, ainsi que les assistants  
de travaux pratiques de PO19.

=====

INTRODUCTION :-----

Comparaison entre calculateur analogique et numérique:-----

PREMIER CHAPITRE : STRUCTURE D'UN CALCULATEUR ANALOGIQUE:

I. ELEMENTS DE CALCUL ANALOGIQUE :-----

II. ORGANES DE COMMANDES ET DE LECTURE:-----

III. MODES DE FONCTIONNEMENT:-----

IV. CALCULATEURS HYBRIDES :-----

DEUXIEME CHAPITRE : UTILISATION ET APPLICATION DES CALCULATEURS:

ANALOGIQUE :-----

I. INTRODUCTION A LA SIMULATION:-----

II. RESOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES SUR  
CALCULATEUR ANALOGIQUE :-----

III. SIMULATION DES SYSTEMES ASSERVIS :-----

IV. ESSAIS PRATIQUES SUR CALCULATEURS :-----

TROISIEME CHAPITRE : CORRECTION D'UN SYSTEME ASSERVI:-----

I. CORRECTION DU SYSTEME PAR UN REGULATEUR "P" :-----

II. CORRECTION DU SYSTEME PAR UN REGULATEUR "PI" :-----

III. CORRECTION DU SYSTEME PAR UN REGULATEUR "PID" :-----

\* CONCLUSION:-----

\* ANNEXE DE TP:-----

\* BIBLIOGRAPHIE:-----

## INTRODUCTION

Les calculateurs analogiques électroniques sont utilisés pour la résolution de nombreux problèmes mathématiques et physiques ainsi que pour la simulation de divers procédés ou systèmes, notamment dans les industries aéronautiques, chimiques, nucléaires etc. Pour être concrets nous avons mis en évidence la transformation d'une équation différentielle représentant un modèle physique réel (système asservi), en un autre modèle électrique similaire capable de nous renseigner quant au comportement du ~~pas~~ système physique initial. Une fois son comportement connu, on le régule pour améliorer ses performances.

Ainsi Calculateur analogique, simulation des fonctions de transfert des systèmes asservis, régulation, seront les principaux thèmes de notre projet.

---

Comparaison entre calculateurs analogiques et numériques.

Les principaux points de comparaison entre calculateurs numériques et analogiques ont été résumés dans le tableau suivant :

Calculateurs analogiques

Calculateurs numériques

Les calculs sont remplacés par une opération physique :  
exemple : mesures ou comparaison de tension .

Fait des calculs arithmétiques (addition soustraction ...) et logiques ( NAND NOR ...)

Le domaine d'application est restreint (Simulation, contrôle industriel).

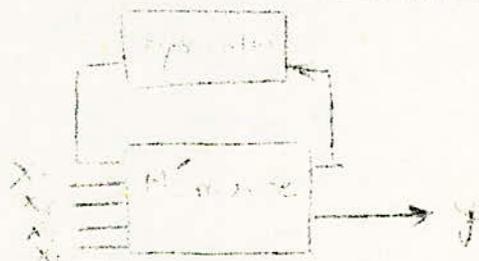
Le domaine d'application est universel (affaires, commerce Recherche ...)

La technologie est très simple ( amplificateur opérationnel ...)

Technologie beaucoup plus compliqué (circuits intégrés...)

Exemple de calcul :

$$Y = X_1 X_2 + X_3 X_4$$



opère sur des grandeurs physiques Restitue soit une grandeur physique soit sa mesure.

Ne peut manipuler et restituer que des nombres.

Un phénomène peut être rendu par un phénomène continu sous forme de courbe.

Un phénomène continu est nécessairement calculé de façon continue (technique des systèmes échantillonnés).

La précision est limitée par celle des mesures. elle est de l'ordre de  $\frac{1}{10}$  ou  $\frac{1}{100}$ .

La précision est théoriquement illimitée. En pratique elle est de l'ordre de 1% (ou lu).

Le temps de réponse des opérateurs est très court.

Le temps de calcul est lié à la précision. Plus celle-ci est grande et plus le temps de calcul sera grand.

<p>Les opérations différentielles sont résolues d'une manière implicite?</p>	<p>Les équations différentielles sont résolues sous forme explicite.</p>
<p>La mise en mémoire pose des problèmes délicats.</p>	<p>La mise en mémoire est aisée.</p>
<p>Un même calculateur permet de passer de l'étude d'un problème à un autre rapidement par simple recablage.</p>	<p>Le passage de l'étude d'un problème à un autre nécessite la mise au point d'un nouveau programme.</p>
<p>Les possibilités d'évolution du point de vue technologique ne sont pas élevées. (possibilités de développer les calculateurs hybrides ).</p>	<p>Grandes possibilités d'évolution technologiques, en vue notamment d'améliorer la vitesse d'exécution des calculs (microprocesseurs).</p>

Il apparait, d'après ce tableau, que les calculateurs numériques peuvent être utilisés, avec profit, dans la résolution de calculs algébriques ou dans la simulation de phénomènes lents exigeants une grande précision.

Les calculateurs analogiques sont particulièrement bien adaptés à la résolution d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.

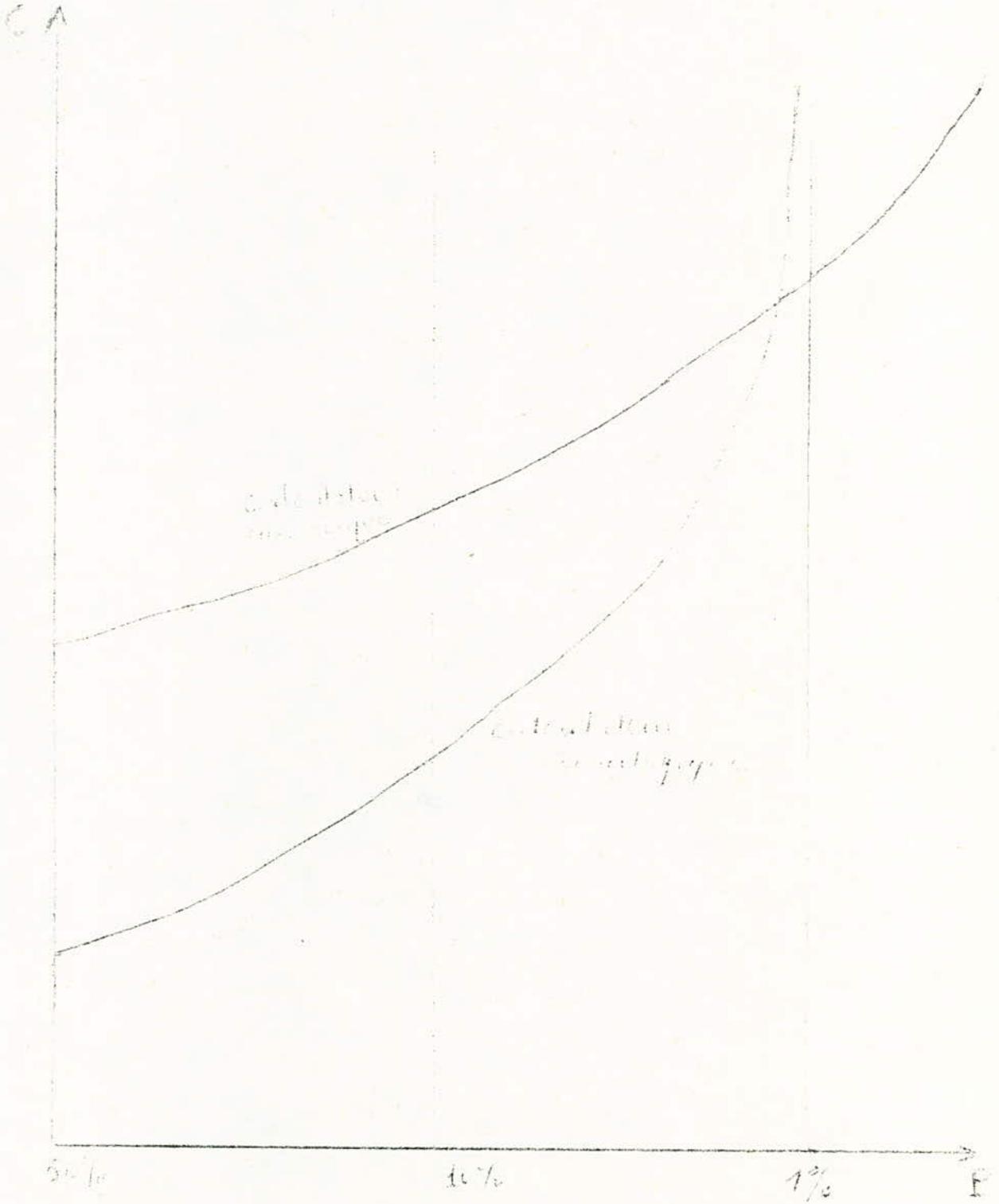
Suivant la nature du problème à étudier et la précision que l'on désire atteindre, on utilisera tel ou tel calculateur.

La courbe du coût en fonction de la précision, montre que le coût d'utilisation d'un calculateur analogique est plus faible que celui d'un calculateur numérique et ce pour une raison faible (50%) ou moyenne (10%).

Par contre ce coût croit rapidement si la précision est plus grande (1%) Il est comparable au coût d'utilisation du calculateur numérique.

De plus la précision d'un calculateur analogique peut rarement dépasser 1%.

Courbe du coût d'utilisation d'un calculateur en fonction de la  
Précision :  $C = F(p)$



# I - STRUCTURE D'UN CALCULATEUR ANALOGIQUE

## 1 - Elements de calcul analogique

En calcul analogique à courant continu on réalise des réseaux constitués par des opérateurs qui sont soumis à des tensions proportionnelles aux grandeurs des systèmes physiques simulés.

Moyennant certaines conditions relatives à l'échelle des temps aux facteurs d'amplitudes des variables, l'équation ou le système d'équations régissant le système physique étudié décrira aussi le circuit réalisé. L'opérateur fonctionnel le plus utilisé, est constitué à partir de l'amplificateur opérationnel. Celui-ci possède en effet une impédance d'entrée suffisamment élevée ( $> 10^6 \Omega$ ), et une impédance de sortie ( $< 100 \Omega$ ) suffisamment faible pour qu'il soit possible d'en connecter plusieurs à la suite les uns les autres, permettant ainsi de s'affranchir des interactions entre éléments de calcul successifs.

Chaque équation est constituée à partir d'un certain nombre de blocs de calcul standard, convenablement interconnectés. Ces blocs de calcul peuvent être décomposé en éléments linéaires et non linéaires.

### 1.1 Elements Linéaires :

A partir de base suivant, on en déduit les circuits permettant de réaliser les différentes opérations comme l'inversion, la sommation, l'intégration, la différentiation etc... Ces circuits sont représentés dans le tableau de la figure I.



#### (a) Opérateur de changement de signe

La tension d'entrée de l'amplificateur est  $e$  ; la somme des courants parcourant les impédances d'entrée et de bouclage est nulle en ce point.

$$(V_2 - e) \frac{1}{Z_1} = 0, \quad e = (V_2 - e) \frac{1}{Z_2}$$

Si le gain de l'amplificateur est suffisamment grand pour qu'on puisse négliger  $\frac{1}{A}$  et  $(\frac{Z_1}{Z_2} \frac{1}{A})$  devant l'unité :

$$V_s \neq -V_e \frac{1}{Z_1} = -V_e \frac{Z_2}{Z_1}$$

$$\text{Si } Z_1 = Z_2 = R \Rightarrow \frac{V_s}{V_e} \neq -1$$

#### (b) Opérateur fonctionnel de sommation :

$$\sum_i (e - V_i) \frac{1}{R_i} + (e - V_s) \frac{1}{R_o} = 0 \quad \text{avec } V_s = eA$$

$$V_s = \frac{\sum_i \frac{V_i}{R_i} \cdot R_o}{\frac{1}{A} - 1 + \frac{R_o}{A}} \approx \sum_i \frac{1}{R_i}$$

si  $\frac{1}{A}$  et  $\frac{R_o}{A}$  sont négligeables devant l'unité on aura :

$$V_s \neq - \sum_i A_i V_i \quad \text{en posant } \frac{R_o}{R_i} = A_i$$

(c) Opérateur de multiplication par une constante :

- Détermination de la constante par réglage potentiométrique :

au noeud B l'équation de KIRCHHOFF en courant s'écrit :

$$I_e + I_s = 0 \Rightarrow \left( \frac{r}{R_c} V_e - V_b \right) \frac{1}{R} + \left( V_s \frac{r'}{R_s} - V_b \right) \frac{1}{R} = 0$$

En tenant compte que  $V_b = \frac{V_s}{A}$  est négligeable devant  $\frac{r}{R_c} V_e$  et  $\frac{r'}{R_s} V_s$ , on aura :

$$\frac{r}{R_c} V_e + V_s \frac{r'}{R_s} = 0 \implies V_s = - \frac{r}{R_c} \frac{R_s}{r'} V_e$$

en posant :  $A_e = \frac{r}{R_c}$  et  $A_s = \frac{r'}{R_s}$

$$V_s = - \frac{A_e}{A_s} V_e$$

(d) Opérateur fonctionnel d'intégration par rapport au temps :

$$I_o + I_i = 0 ; I_o = \frac{V_e - V_b}{R} ; I_i = C \frac{d}{dt} (V_s - V_b)$$

$$\implies \frac{V_e}{RC} - \frac{V_b}{RC} + \frac{d}{dt} (V_s - V_b) = 0$$

en intégrant par rapport au temps l'équation précédente on aura :

$$* \quad V_s - V_b = - \frac{1}{RC} \left( V_b dt + V_s \int V_b dt \right) \frac{1}{RC}$$

$$V_s - V_b = - \frac{1}{RC} V_e dt + \frac{1}{RC} V_b dt$$

Si l'on considère que  $V_b = \frac{V_s}{A}$  est négligeable devant l'unité on aura

$$V_s = - \frac{1}{RC} \int V_e dt$$

(e) Opérateur de différentiation par rapport au temps :

$$I_i + I_o = 0 ; I_o = C \frac{d}{dt} (V_e - V_s) ; I_i = \frac{V_s - V_b}{R}$$

$$\frac{V_s}{RC} \leq \frac{V_b}{RC} + \frac{d}{dt} (V_e - V_b) = 0 ; V_b = \frac{V_s}{A}$$

$$V_s \left( 1 - \frac{1}{A} \right) = -RC \frac{d}{dt} \left( V_e - \frac{V_s}{A} \right)$$

$$V_b = \frac{V_s}{A} \text{ négligeable devant l'unité ;}$$

$$V_s = -RC \frac{d}{dt} (V_e)$$

## 1. 2 Elements non linéaires :

Les éléments non linéaires font généralement appel à des circuits complexes et sont réalisés de façon spécifique par le constructeur. Pour l'utilisateur il se présentent sous forme de " boites noires " définies par leurs relations entrée et sortie.

Les principales fonctions rencontrées sont les suivantes :

- Multiplieur et diviseur.
- Elevation au carré et extraction d'une racine.
- Sinus, cosinus.
- Logarithme et exponentielle.

On matérialise ainsi des courbes analytiques ou empiriques  $Y = F(x)$  quelconque à partir d'une série de segments de droite à niveau et à pente réglables délivrée par des générateurs de fonction.

Dans le tableau suivant on trouvera classé quelques éléments non linéaires avec leurs symboles et leurs fonctions.

=====0=====

Opérateurs fonctionnels	Symboles	Opérations mathématiques	Circuits électriques équivalents
Le facteur ou gain de signe		$Y_s = -a Y_e$ $a = 1 \text{ ou } 10$	 $a = -\frac{Z_2}{Z_1}$ ; $Y_s = -\frac{Z_2}{Z_1} Y_e$
Atténuateur ou diviseur		$Y_s = \alpha Y_e$ $0 \leq \alpha \leq 1$	 $Y_s = \frac{R_L}{R + R_L} Y_e$ $\alpha = \frac{R_L}{R + R_L}$
Multiplicateur		$Y_s = - \sum_{i=1}^n a_i Y_{ei}$ $(a_1; a_2; \dots; a_n) = 1 \text{ ou } 10$	 $Y_s = - \sum_{i=1}^n \frac{R_o}{R_i} Y_{ei}$
Intégrateur - Sommeur		$Y_s = -R_o \int_0^t \left( \sum_{i=1}^n C_i Y_{ei}(t) \right) dt + Y_s(0)$	 $Y_s = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i C} \int_0^t Y_{ei}(t) dt + Y_s(0)$
Multiplicateur		$Y = X_1 \cdot X_2$	
Diviseur		$Y = \frac{X_1}{X_2}$	
Commutateur		$Y = Y_1 \text{ si } X \leq X_1$ $Y = Y_2 \text{ si } X \geq X_2$ $Y = S \text{ si } X_1 \leq X \leq X_2$	

## OPERATEUR LINEAIRES ET NON LINEAIRES D'UN CALCULATEUR ANALOGIQUE

## 2 - Organes de Commandes et de lecture

---

### 2.1 Organes d'accès

Deux types d'organes d'accès seront considérés.

- d'une part, les organes permettant l'introduction des données.
- d'autre part, les organes assurant la lecture des résultats.

#### (a) Introduction des données :

Les seules grandeurs physiques qu'il soit possible d'appliquer à l'entrée des calculateurs analogiques du type électronique étant soit des tensions soit des courants électriques, il conviendra de traduire sous cette forme les grandeurs sur lesquelles doivent être effectuées les opérations mathématiques imposées par le calcul. Ces grandeurs d'entrée une fois traduites sous forme électrique, peuvent être de deux sortes:

- Ou bien des conditions aux limites appliquées exclusivement pour certaines valeurs de la variable indépendante.
- Ou bien des excitations fonction de la variable indépendante.

#### a.1 + Conditions aux limites :

Les conditions aux limites imposées à des systèmes physiques dont le comportement est représenté par des équations différentielles, sont liées à l'évolution de la variable indépendante. Dans les calculateurs analogiques la variable indépendante étant la variable temporelle, l'introduction des conditions aux limites posera essentiellement des problèmes de synchronisation confiés au bloc de commande.

#### a.2 Excitation extérieures

L'Analyse des systèmes physiques conduisant pratiquement à relever les réponses de ces systèmes à des excitations données ; il conviendra d'être en mesure de pouvoir introduire de telles excitations sur les calculateurs analogiques. Ces excitations apparaîtront aussi sous forme de tensions ou de courants électriques, fonction le plus généralement de la variable indépendante.

#### (b) Lecture des résultats :

La caractéristique essentielle des calculateurs analogiques réside dans l'obtention directe des variations des variables dépendantes en fonction de la variable indépendante.

Ces variations apparaissent sous formes de tensions ou de courants électriques évoluant continuellement en fonction du temps. Dans ces conditions tous les appareils de mesure susceptibles de relever ou d'enregistrer les variations de grandeurs électriques en fonction du temps pourront être utilisés comme étages de sortie des calculateurs analogiques.

En général on dispose soit d'un voltmètre analogique ou digital, soit d'un enregistreur à déroulement continu ou de préférence du type x y pour recueillir les courbes élaborées dans le calculateur.

### 3. Mode de fonctionnement :

Il existe trois modes de fonctionnement du calculateur analogique : le mode manuel, répétitif, et hybride.

#### 3.1 Mode manuel :

En mode manuel, les intégrateurs sont simultanément placés, par action sur un clavier dans l'un des trois états suivants :

##### (a) Valeur initiale

La tension de sortie est au signe près, celle affichée comme condition initiale.

##### (b) Calcul ( ou intégration )

La tension de sortie évolue dans le temps selon la formule.

$$V_S = \frac{1}{RC} \int^t V_e dt + V_{S0}$$

$V_{S0}$  étant la sortie à l'état initiale.

##### (c) Memoire

La tension de sortie est " gelée " à la valeur obtenue au moment du passage de " calcul " en memoire.

#### 3.2 Mode repetitif

En mode répétitif, le cycle de calcul est répété automatiquement un certain nombre de fois par seconde, en vue notamment d'évaluer l'influence d'une variation d'un paramètre sur le résultat du calcul.

#### 3.3 Mode hybride

En mode hybride la commande des intégrateurs est réalisée de façon individuelle à partir d'un circuit de programmation logique et séquentielle, réalisé par l'utilisateur lui même. Il devient alors possible de mettre en oeuvre des séquences de calcul dans lesquelles les fonctions analogiques continues sont étroitement imbriquées avec les fonctions de décision discontinues.

Ce fonctionnement ne peut être obtenu que par l'intermédiaire d'éléments d'interface entre les ensembles analogiques et logiques ; ces éléments consistent essentiellement en comparateurs, bascules, et relais à commande électrique.

En comparant les calculateurs numériques et analogiques il est apparu que les nombreux opérateurs disponibles sur ces derniers permettent une grande souplesse lors de l'étude d'un problème. Les calculateurs analogiques sont particulièrement bien adaptés pour la réalisation des systèmes différentiels.

Mais ces machines présentent un certain nombre d'inconvénients.

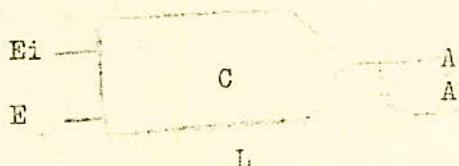
- le mode de fonctionnement est uniforme à toute la machine. Tous les intégrateurs possèdent la même constante de temps et les calculs se font à la même vitesse.
- les éléments non linéaires sont parfois difficiles à réaliser.
- la mise en mémoire de l'information pose des problèmes délicats.

les calculateurs numériques réalisent à eux des calculs numériques à très grande vitesse. La précision de telles machines est théoriquement illimitée. la mise en mémoire ne pose pas de problèmes particuliers.

Finalement, machines numériques et analogiques apparaissent comme complémentaires. D'où l'idée de créer des machines hybrides pour bénéficier des avantages de l'un et de l'autre.

Le degré de complexité de telles associations analogiques digites est plus ou moins grand.

Il est nécessaire de prévoir des éléments de conversion (ou d'interfaces) entre les grandeurs analogiques et logiques, à cause de leur nature différente. On utilise pour cela, le plus souvent le comparateur et l'interrupteur digite analogique. :



$E_i$  et  $E$  étant des grandeurs analogiques la sortie du comparateur change de niveau logique lorsque la somme  $(E_i + E)$  change de signe.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= 0 \quad \text{et} \quad A = 1 && \text{si} \quad (E_i + E) > 0 \\ \bar{A} &= 1 \quad \text{et} \quad A = 0 && \text{si} \quad (E_i + E) < 0 \end{aligned}$$

5.2 L'interrupteur



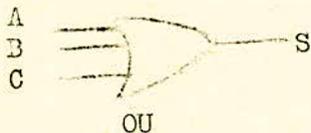
La grandeur analogique ne passe l'interrupteur que si le signal logique A apparaît.

5.3 Elements de logique séquentielle

5.3.1 Portes logiques



$$\begin{aligned} S &= \overline{A + B + C} \\ S &= \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \end{aligned}$$



$$S = A + B + C$$

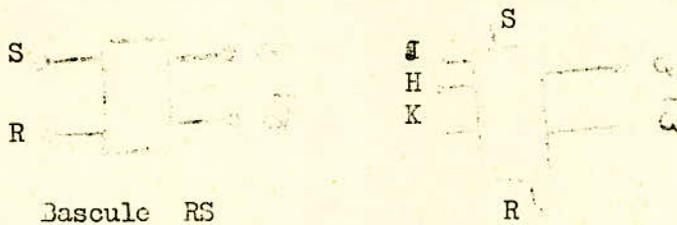


$$S = A \cdot B \cdot C$$

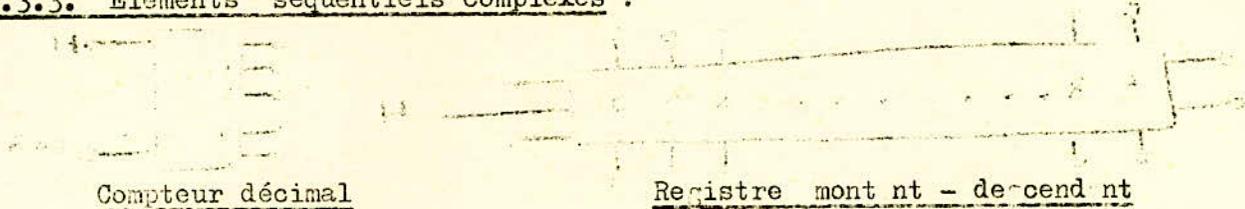
A  
B  
C

$$S = \overline{\overline{A \cdot B \cdot C}} = \overline{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}}$$

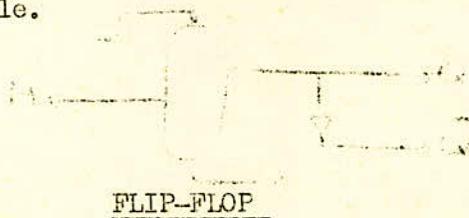
5.3.2 Bascules bistables du type RS, JK, maîtres - esclaves



5.3.3. Elements séquentiels complexes :



L'Organe essentiel de la partie synchronisation est le "flip-flop" : org ne de mémorisation logique ; ils sont à la base de la réalisation des compteurs et des registres à decalage. On peut rencontrer aussi un autre org ne utilisé le monostable.



Dans les calculatrices hybrides, l'intégrateur est modifié par rapport à l'intégrateur présent dans les machines analogiques simples. On a la possibilité de choisir entre trois constantes de temps différentes. De plus cet intégrateur possède une commande logique lui permettant de passer pendant un cycle, par trois étapes successives : "temps de gel", de conditions initiales, " et de calcul ". Ces trois étapes sont commandées par deux niveaux logiques.

## B - Introduction

Expérimenter sur un modèle tel est l'objectif principal des techniques de simulation.

Elles sont nécessaires dans deux types de situations :

D'une part si l'expérimentation directe est impossible pour des motifs matériels moraux ou autres ; d'autre part, si le phénomène étudié ne fait pas l'objet d'une théorie suffisamment développée.

On distingue trois grands domaines d'application de la simulation : la construction des théories, la décision, et la formation de l'homme.

Ce qui nous intéresse, c'est lorsque le modèle est éprouvé et les situations simulées bien connues ; l'intérêt de la simulation est de permettre à ceux à qui la réalisent, c'est à dire ceux qui agissent sur les facteurs exogènes contrôlables du modèle, de se familiariser avec la réalité qu'elle représente.

Cet objectif de formation par la simulation est réalisé en particulier par les machines analogiques ou hybrides appelées "Simulateur". Deux principaux types de simulation peuvent être distingués ; d'une part les simulations analogiques qui construisent des mécanismes physiques ou maquettes dont le fonctionnement présente des analogies avec le système étudié et pour lesquelles la théorie doit être bien connue ; d'autre part, les simulations numériques qui élaborent des modèles abstraits programmable sur ordinateur.

### I Utilisation et application des calculateurs analogiques traditionnels

Les divers opérateurs fonctionnels décrits dans la première partie montrent qu'un calculateur analogique est capable de résoudre des équations algébriques aussi bien que des équations différentielles.

En calcul analogique "pur" les équations traitées ne peuvent comporter qu'une seule variable indépendante, qui en fait le temps. Cette propriété explique l'utilisation de ces calculateurs en ce qui concerne l'étude dynamique des systèmes, et en conséquence dans l'analyse et la synthèse de tous les processus naturels ou artificiels donnant lieu à des phénomènes oscillatoires ou à des problèmes de stabilité.

L'introduction des données dans le calculateur analogique implique l'existence des équations ou des fonctions de transfert du système étudié. Cette introduction des données nécessite un travail de préparation préalable comprenant les opérations suivantes :

- Ecriture des équations du système étudié.
- Détermination approchée des valeurs extrêmes des variables.
- Ecritures des équations en variables machines.

Cette opération implique le choix d'une échelle d'amplitude et le choix d'une échelle des temps.

- Représentation du schéma de calcul avec les valeurs numériques des coefficients et des gains des opérateurs.

#### I.1 Résolution des systèmes d'équations différentielles :

La première phase du travail consiste à réaliser le modèle analogique. Cette phase qui constitue la programmation du modèle comprend deux parties :

- l'établissement d'un schéma de principe du modèle.
- La mise en échelle qui conduit au schéma définitif.

### I.1.1 Equations différentielles du premier ordre :

Supposons que le système considéré soit défini par l'équation suivante :

$$H_0 \frac{dy}{dt} + y = H_1 x \quad H_0 > 0 \quad H_1 > 0$$

$H_0, H_1$  sont les paramètres du système sur lesquels on peut agir pour étudier son comportement.

$x$  est la grandeur d'entrée du système.

$y$  est la grandeur de sortie du système.

$$1 \implies y = \frac{H_0}{1} x - \frac{1}{1} y$$

$$\text{on pose } \frac{1}{1} y = \dots ; \frac{H_0}{1} x = -$$

$$\text{d'où l'on a : } y = - + \implies \frac{dy}{dt} = - + \implies y = \int (H_0 x - y) dt$$

#### a schéma de principe



#### b Mise en échelle

- Echelle des amplitudes

. Choix du facteur d'échelle des amplitudes.

Une grandeur physique "Y" (une longueur par exemple) étant simulée par une tension électrique "U", la loi de correspondance la plus simple entre "y" et "u" est :  $u = ky$ .  $k$  est appelé facteur d'échelle des amplitudes. On ne peut généralement pas donner à "u" une valeur numérique égale à celle de y ( $k = 1$ ) :

. Soit la valeur de "y" est trop faible ; le signal utile "u" doit rester beaucoup plus grand que les signaux parasites.

. Soit que la valeur de "y" est trop grande ; les tensions fournies par le calculateur ne peuvent pas dépasser une certaine valeur  $U_m$  (exemple :  $U_m = 10$  V). Deux circonstances déterminent la valeur de  $U_m$  :

l'Appareil possède une source de tension constante égale à  $U_m$  (tension de référence) à partir de laquelle on affiche les tensions d'entrée indépendantes du temps ; d'autre part la tension de sortie "U" de chaque amplificateur ne doit pas dépasser une certaine valeur au delà de laquelle l'amplificateur saturé, n'a plus un fonctionnement linéaire.

$$\text{soit } |y| \leq y_m \text{ et } |u| \leq U_m$$

On choisit la loi de correspondance suivante :

$$\left( \frac{U}{U_m} = \frac{Y}{Y_m} \right)$$

Le rapport  $\left( \frac{Y}{Y_m} \right)$  est appelé variable réduite :

$$u = ky \implies \boxed{k = \frac{U_m}{Y_m}}$$

La première opération consiste donc à évaluer une borne supérieure  $Y_m$  pour chaque grandeur physique  $y$ .  
 Le facteur d'échelle  $k = (v/y)$  est égal à  $(U_m/y_m)$ . Il ne faut pas oublier d'en tenir compte dans l'exploitation des calculs effectués par la machine.

• Ecriture des équations machines

À partir des équations relatives aux grandeurs à simuler, appelées équations physiques ( $\lambda y + y = H_0 x$ ), il faut écrire en tenant compte des facteurs d'échelle, les équations donnant les tensions du modèle électronique, appelées "équations machine". Au lieu d'écrire l'équation en  $u$ , il revient au même d'écrire l'équation en  $(\frac{U}{U_m})$  donc en  $(\frac{y}{y_m})$ .

Pratiquement les équations machine s'obtiennent à partir des "équations physiques" en introduisant les variables réduites.

- Echelle des temps

Compte tenu des possibilités du calculateur et pour que les observations faites sur l'appareil de mesure utilisé (voltmètre, oscilloscope table traçante) soient faciles à exploiter, il faut que les tensions ne varient ni trop lentement ni trop vite.

On se rend compte alors qu'en faisant  $u(t) = k y(t)$  on ne peut pas simuler dans de bonnes conditions n'importe quel phénomène physique. On est ainsi amené à distinguer :

- \* la Variable "tm", appelée temps réel relative au phénomène physique étudié.
- \* la Variable "tm", appelée temps machine relative au fonctionnement du calculateur.

On peut décider par exemple qu'une seconde sur machine électronique correspond à 10 ou à 10 heures de temps réel. D'une façon générale  $y = f(t)$  est simulé par  $u = g(tm) = kf(t)$  et on pose :  $tm = \beta t$ .

$\beta$  est appelé facteur d'échelle des temps.

Soient  $t$  et  $tm$  exprimés avec la même unité :

- $\beta = 1$  : on dit que le calculateur travaille en temps réel.
- $\beta < 1$  : le phénomène machine est plus lent que le phénomène réel.
- $\beta > 1$  : le phénomène machine est plus rapide que le phénomène réel.

Il faut alors reprendre l'équation du départ et appliquons lui les considérations qu'on vient d'exposer :

$$\lambda y + y = H_0 x$$

• équation physique :  $\lambda y = \frac{H_0 x}{\tau} - \frac{1}{\tau} y$  avec  $|x| \leq X_m$  et  $|y| \leq Y_m$   
 en introduisant la variable réduite

$(\frac{y}{y_m})$  et en remplaçant  $t$  par  $(\frac{1}{\beta} tm)$  on obtiendra l'équation machine.

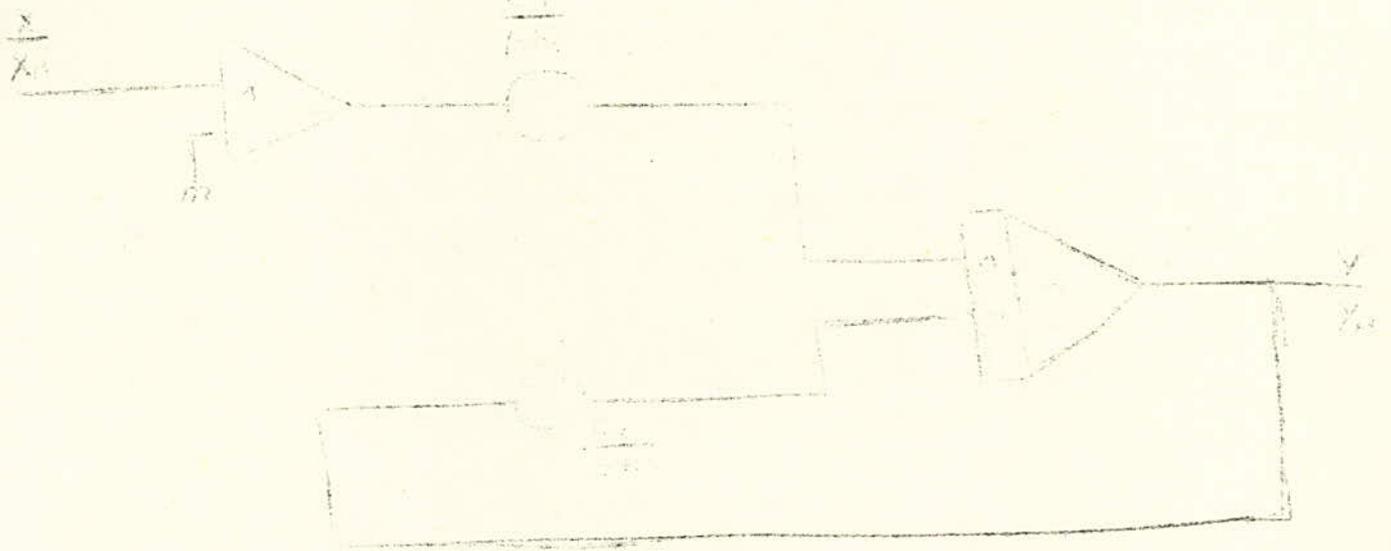
$$\frac{d(\frac{y}{y_m})}{dt} = (\frac{H_0 X_m}{\tau y_m}) \frac{x}{X_m} - \frac{1}{\tau} \frac{y}{y_m}$$

posons  $C_1 = \frac{H_0 X_m}{\tau y_m}$  et  $C = \frac{1}{\tau}$  et remplaçons  $t$  par  $(\frac{1}{\beta} tm)$

$$\beta \frac{d(\frac{y}{y_m})}{dt_m} = \frac{C_1}{\beta} (\frac{x}{X_m}) - \frac{C}{\beta} (\frac{y}{y_m})$$

$$\frac{d(\frac{y}{y_m})}{dt_m} = \frac{1}{\beta} C_1 (\frac{x}{X_m}) - \frac{1}{\beta} C (\frac{y}{y_m})$$

d'ou le schéma définitif



Conséquences pratiques :

Après préparé le schéma définitive, on réalise le montage du modèle, on règle les opérateurs de façon à donner aux quantités  $C_i$  et  $C$  les valeurs désirées, et on met le calculateur en service.

Comme on ne sait pas a priori quelle valeur on va donner à  $B$ , on garde ce facteur d'échelle sous forme littérale jusqu'au dernier moment.

1. On commence par faire  $B = 1$  et on essaie de réaliser chaque coefficient "C" par un choix convenable de  $\frac{1}{RC}$  et de  $\alpha$  ( $C_i = \frac{a_i}{R_i C}$  ;  $C = \frac{a}{R C}$ )

$a_i$  et  $a$  étant des rapports protentionométriques. ( $a$  est compris entre 0 et 1)

exemple :  $\frac{1}{RC} = 1 ; 10 ; 100 ; 510 ; 510$  ou  $510$

$C = 4,1 \cdot 10^3 ; \frac{1}{RC} = 510$  et  $a = 0,820$

$C = 4,1 \cdot 10^3 ;$  impossible car  $C > 510$

$C = 4,1 \cdot 10^3 ; \frac{1}{RC} = 1$  et  $a = 0,004$  (mauvaise solution :

si  $a$  est affiché à 0,001 près,  $\frac{\Delta C}{C} \approx \frac{\Delta a}{a} = 25\%$ )

2. Si les résultats obtenus avec ( $B=1$  ne conviennent pas) (Coefficients trop grands ou trop petits, phénomène observé sur calculateur trop rapide ou trop lent), on choisit  $B \neq 1$  (retenir une valeur simple de la forme  $10^k$ )

lorsqu'on fait  $B \neq 1$  tous les coefficients sont divisés par  $B$ .

Pour  $B \neq 1$ , on a l'égalité :  $\frac{C_i}{B} = a_i \left( \frac{1}{R_i C} \right)$

dés lors :

- Si les coefficients  $c$  sont trop grands (ce qui correspond au fait que le phénomène réel est trop rapide), on choisit  $B > 1$  ; le phénomène machine est plus lent que le phénomène réel.

Exemple :  $c = 4,110$  ,  $B = 100 \implies \frac{c}{B} = 4,110$  d'où  $\frac{1}{RC} = 510$  et  $a = 0,820$

si les coefficients  $c$  sont trop petits, on choisit au contraire  $B < 1$

Exemple :

$$C = 4,1 \cdot 10^3 \quad B = 10$$

$$\frac{C}{B} = 0,41 \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{RC} = 1 \quad \text{et} \quad a = 0,410$$

Equations différentielles du second ordre :

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2m y' + ky = x$$

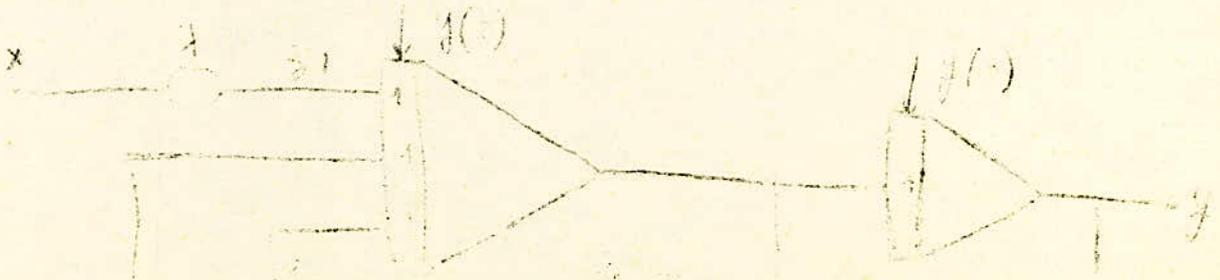
Schéma de principe du modèle :

On écrit l'équation différentielle (équation physique) sous le forme du système suivant :

$$\frac{dy}{dt} = y \quad (1) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = x - ky - 2m y \quad (2)$$

On en déduit le schéma suivant en faisant un changement de variables de façon à respecter le signe de chaque quantité.

$$x = x \quad ; \quad y = -y \quad ; \quad 2m = 2m \quad (-y)$$



Mise en échelle

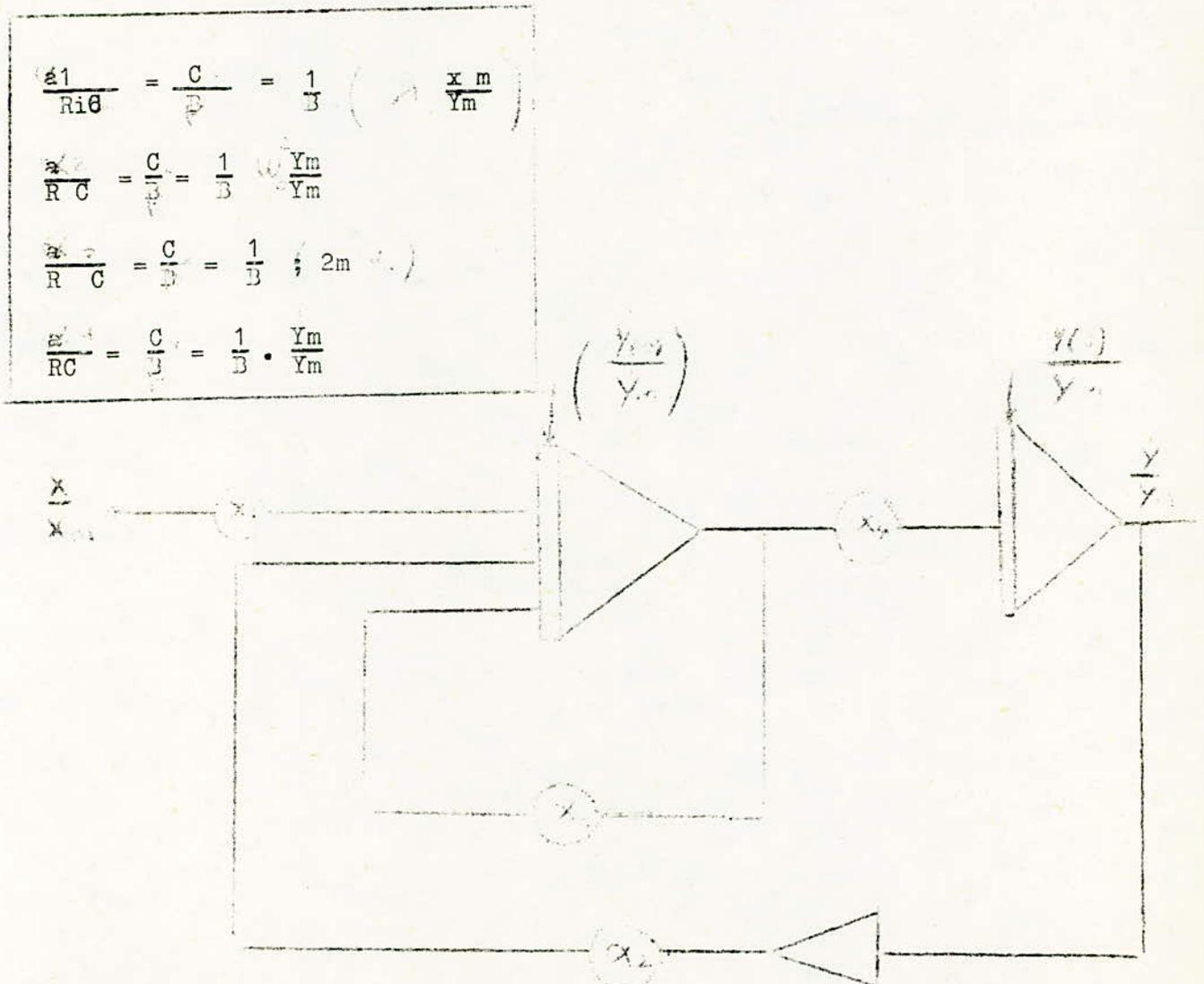
les equations machines s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{Y}{Y_M} \right) = \left( \frac{1}{B} \frac{y_m}{y_m} \right) \left( \frac{Y}{y_m} \right) = \frac{C}{B} \left( \frac{Y}{y_m} \right) \quad 1$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{Y}{y_m} \right) = \left( \frac{1}{B} \frac{X_m}{Y_m} \right) \left( \frac{X}{X_m} \right) - \left( \frac{1}{B} \frac{Y_m}{Y_m} \right) \left( \frac{Y}{Y_m} \right) - \left( \frac{1}{B} \frac{2m}{Y_m} \right) \left( \frac{Y}{Y_m} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{Y}{Y_m} \right) = \frac{C}{B} \left( \frac{X}{X_m} \right) - \frac{C}{B} \left( \frac{Y}{Y_m} \right) - \frac{C}{B} \left( \frac{Y}{Y_m} \right)$$

d'ou l'on a le schéma definitif de la figure précédente :



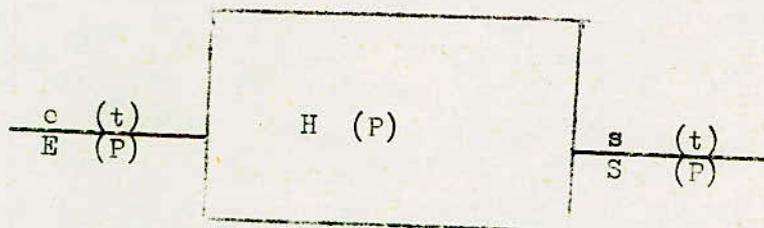
I.2. Simulation des systèmes asservis sur calculateurs analogiques

Les calculateurs analogiques se prêtent remarquablement bien à l'étude des systèmes asservis dont ils permettent une simulation qui autorise une discussion détaillée du comportement dynamique du système en fonction des différents paramètres des sous-ensembles constitutifs.

L'étude des systèmes asservis sur calculateurs analogiques comporte deux étapes qui sont successivement :

- La représentation des fonctions de transfert de chacun des sous-ensembles du système.
- La simulation proprement dite qui est réalisée au moyen de l'interconnexion des fonctions de transfert du système.

Soit un sous ensemble fonctionnel utilisé dans une chaîne d'asservissement.



Si l'équation différentielle reliant  $s(t)$  à  $e(t)$  est de la forme :

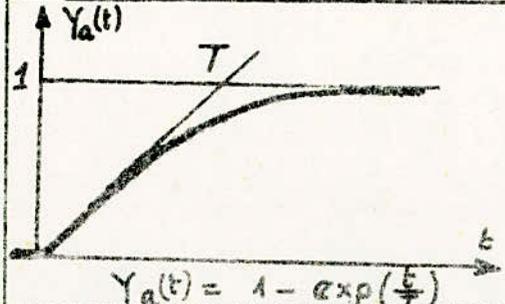
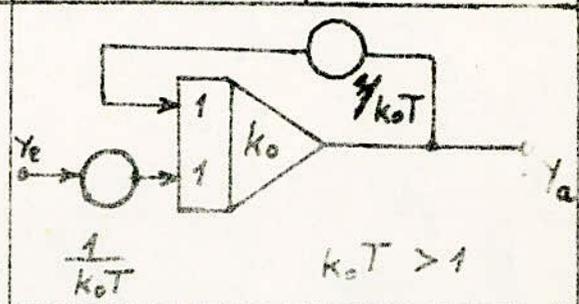
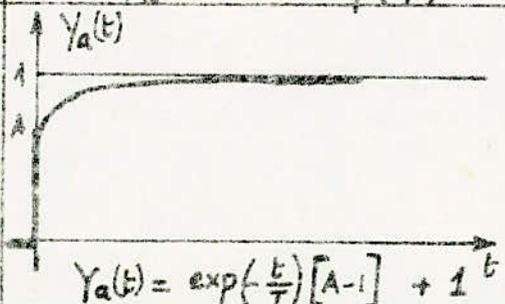
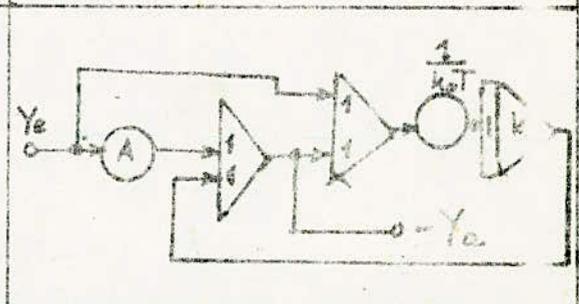
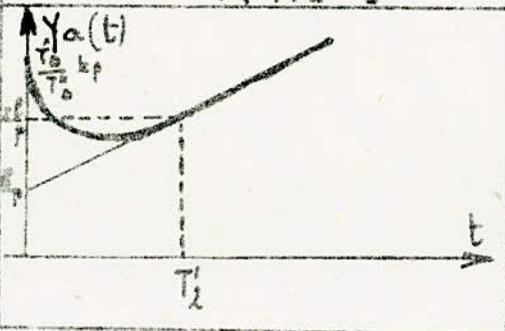
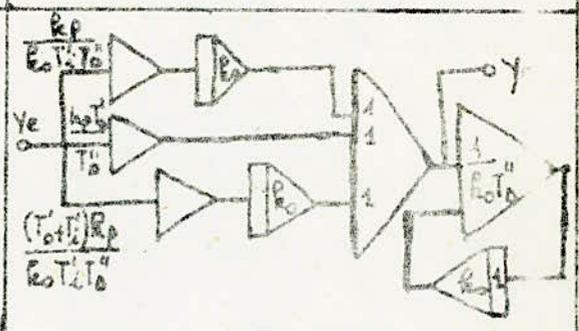
$$A_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + A_i \frac{de(t)}{dt} + A_0 e(t) = B \frac{ds(t)}{dt} + \dots + B_0 s(t)$$

En supposant les conditions initiales nulles la fonction de transfert caractéristique du sous-ensemble considéré est :

$$H(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{A_m P^m + \dots + A_i P + A_0}{B P + \dots + B_i P + B_0}$$

On détermine ainsi les fonctions de transfert de chaque sous-ensemble du système asservi à étudier ; ensuite on passe à la simulation dans le tableau suivant on trouvera les circuits analogiques de certains systèmes asservis et des régulateurs classiques (P, PI, D etc...).

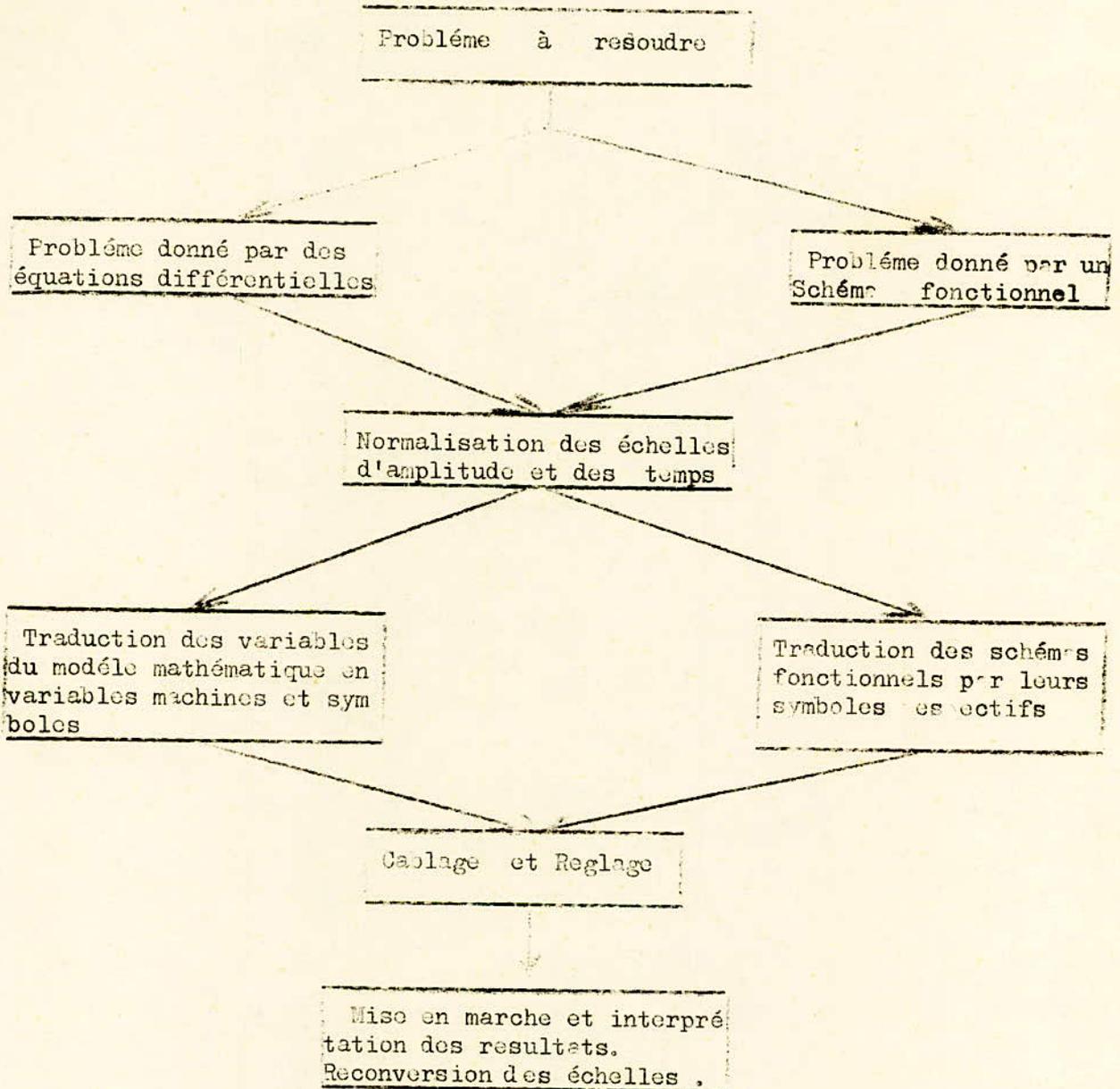
Nomenclature du Système	fonction de Transfert	Equation différentielle	Réponse Indicielle	Circuit analogique de pr
P. Régulateur	$H(p) = v$	$Y_a(t) = v Y_e(t)$		
I. Régulateur	$H(p) = \frac{1}{pT_i}$	$\dot{Y}_a = \frac{1}{T_i} Y_e$		
Régulateur-D réel	$H(p) = \frac{pT_D}{1+pT}$	$T \dot{Y}_a = T_D \dot{Y}_e - Y_a$		
P.I. Régulateur	$H(p) = k_p \left( 1 + \frac{1}{pT_i} \right)$ $T_i = k_p T_i$	$\dot{Y}_a = k_p \left( \dot{Y}_e + \frac{1}{T_i} Y_e \right)$		
P.D. Régulateur	$H(p) = k_p \frac{1+pT_D}{1+pT_D}$	$\dot{Y}_a = \frac{k_p}{T_D} Y_e + \frac{k_p T_D}{T_D} \dot{Y}_e - \frac{1}{T_D} Y_a$		

Nomenclature du système	fonction de Transfert	Equation différentielle	Réponse Indicielle	Circuit analogique de principe
SYSTEME DU premier ordre	$H(p) = \frac{1}{1 + pT}$	$\dot{Y}_a = \frac{1}{T} (Y_e - Y_a)$	 $Y_a(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$	
SYSTEME DEPHASEUR	$H(p) = \frac{1 + pAT}{1 + pT}$ $A < 1$	$\dot{Y}_a = A\dot{Y}_e + \frac{1}{T} Y_e - \frac{1}{T} Y_a$	 $Y_a(t) = \exp\left(-\frac{t}{T}\right)[A-1] + 1$	
Régulateur P.I.D.	$H(p) = \frac{k_p(1 + pT_i)(1 + pT_d)}{pT_0(1 + pT_0)}$	$\dot{Y}_a = \frac{k_p}{T_0 T_0''} \int_0^t Y_e dt + \frac{k_p(T_0 + T_i)}{T_0 T_0''} Y_e + \left[ \frac{k_p T_d}{T_0} \right] \dot{Y}_e - \frac{1}{T_0} \int_0^t Y_a dt$		

Simulation de quelques cas de systèmes observés (suite et fin)

EXEMPLE D'ETUDE D'UNE SIMULATION  
D'un SYSTEME ASSERVI

A Organigramme de la méthode d'étude du système proposé.

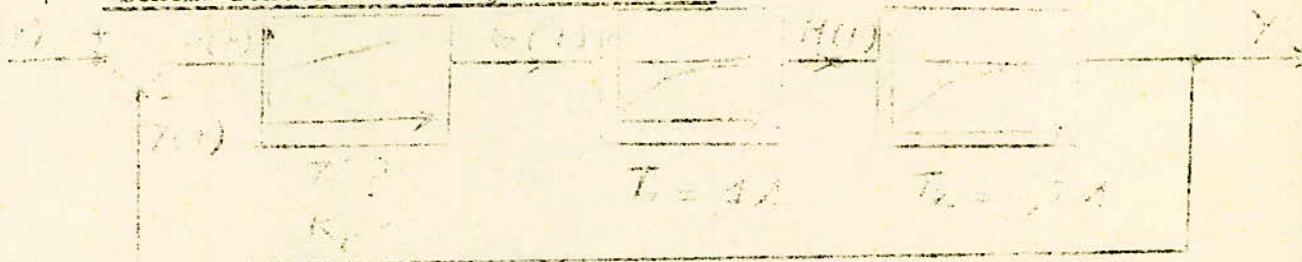


Sous la forme la plus simple le problème à résoudre se pose ainsi : On considère d'abord le système simulé non régulé. On le règle de façon à obtenir certaines performances exigées.

Dans un deuxième temps, on recherche le correcteur permettant d'obtenir un meilleur compromis entre les conditions qui garantissent une bonne stabilité et une bonne précision en régime établi. Le système à étudier est défini soit par un système d'équations différentielles ou par un schéma fonctionnel.

Dans l'exemple que nous allons traiter, le système à étudier est donné par un schéma fonctionnel.

1° Schéma fonctionnel du système asservi :



Pour déterminer la fonction de transfert du régulateur on calcule les paramètres  $T$  et  $K_p$  par la méthode des pôles et zéros.

$$F_s(P) = \frac{1}{(1+pT_i)(1+pT_l)} ; \quad F_r(P) = \frac{K_p(1+pT)}{PT}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte du système est :

$$F_o(P) = F_r(P) \cdot F_s(P) = F_o(P) = \frac{K_p(1+pT)}{pT'(1+pT_l)(1+pT)}$$

L'équation caractéristique du système est donnée par la relation :

$$1 + F_o(P) = 0 \Rightarrow \frac{K_p(1+pT)}{pT'(1+pT_l)(1+pT)} + 1 = 0$$

$$K_p(1+pT) + pT'(1+pT_l)(1+pT) = 0$$

$$pT'T_lT' + p(T'T' + T'T') + p(K_pT + T_l) + K_p = 0$$

en divisant par  $T'T_lT'$  il vient :

$$p + p\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T_l}\right) + p\left(\frac{K_p}{T'T_l} + \frac{1}{T'T'}\right) + \frac{K_p}{T'T_lT'} = 0$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ s} ; \quad \frac{1}{T_l} = 1 \text{ s}$$

$$P + 6p + 5(1 + K_p)p + 5\frac{K_p}{T_l} = 0 \quad \text{I}$$

L'équation caractéristique étant du troisième ordre, elle possède trois pôles ; elle se met sous le forme :

$$(p - S_1)(p - S_2)(p - S_3) = 0 \quad \text{II}$$

$$\text{II} \Rightarrow p^3 + p^2(-S_1 - S_2 - S_3) + p(S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3) - S_1S_2S_3 = 0$$

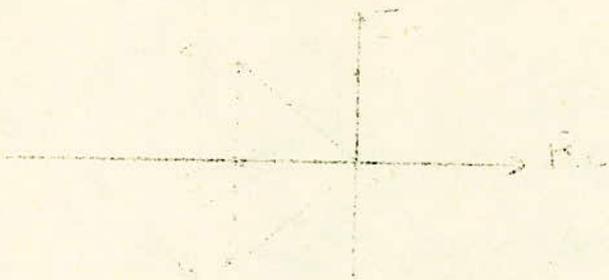
$$\text{Posons } A = -(S_1 + S_2 + S_3) ; \quad A_1 = S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3$$

$$A_0 = -S_1S_2S_3$$

L'équation caractéristique devient :

$$p^3 + Ap^2 + A_1p + A_0 = 0 \quad \text{III}$$

On a deux pôles complexes et conjugués et un pôle réel.



$$S_1 = a + j ; \quad S_2 = a - j ; \quad S_3 = -a$$

en identifiant (I) et (III) on a le système suivant :

$$A_2 = -S_1 - S_2 - S_3 = -3a = 6 \implies a = -2$$

$$A_0 = S_1 S_2 + S_1 S_3 = 4a = 5(1 + kp) \implies 5kp = 11 \implies kp = \frac{11}{5} = 2,2$$

$$A_0 = -S_1 S_2 S_3 = -2a = 5 \frac{kp}{T_i} \implies T_i = \frac{5kp}{2a}$$

$$T_i = -\frac{5}{2} \left( \frac{2,2}{-8} \right) = 0,68 \text{ s}$$

kp = 2,2	T'i = 0,68 s
----------	--------------

Une deuxième méthode consiste à prendre l'équation différentielle de tout le système (équation tirée à partir du schéma fonctionnel) la fonction de transfert du système étant :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{kp(1 + pT_i)}{pT_i(1 + pT_i)(1 + pT)}$$

$$Y(p)(T_i T + p + T_i T_i p + T_i T_i p + T_i T_i p + T_i p) = kp X(p) + kp T_i p X(p)$$

en divisant les deux membres de l'égalité par  $T_i T$   $T_i$  on aura

$$pY(p) + \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \right) pY(p) + \frac{1}{T_i T} pY(p) = \frac{kp}{T_i T} pX(p) + \frac{kp}{T_i T} X(p)$$

En remplaçant l'opérateur p par la variable "t" on obtient :

$$\frac{d y(t)}{dt} + \frac{6d y(t)}{dt} + \frac{5d y(t)}{dt} = 11 \frac{d x(t)}{dt} + 16 x(t)$$

$$\frac{1}{16} \frac{d y(t)}{dt} + \frac{6}{16} \frac{d y(t)}{dt} + \frac{5}{16} \frac{d y(t)}{dt} = \frac{11}{16} \frac{d x(t)}{dt} + x(t)$$

$$\frac{1}{16} \frac{d y(t)}{dt} = \frac{11}{16} \frac{d x(t)}{dt} + x(t) - \frac{6}{16} \frac{d y(t)}{dt} - \frac{5}{16} \frac{d y(t)}{dt}$$

$$\frac{d y(t)}{dt} = y \implies \frac{d y(t)}{dt} = y \implies \frac{d y(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d y(t)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (y)$$

$$\frac{1}{16} \frac{d}{dt} (y) = \frac{11}{16} x + x(t) - \frac{6}{16} y - \frac{5}{16} y$$

$$t = \frac{1}{B} tm \implies dt = \frac{1}{B} dtm$$

$$\frac{1}{16} y = \frac{1}{B} \frac{11}{16} X + \frac{1}{B} X(t) dtm - \frac{6}{16} \frac{1}{B} y - \frac{1}{B} \frac{5}{16} y$$

Les paramètres  $K_p$  et  $T_i$  déterminés, on établit la fonction de transfert du Régulateur P.I. :

$$Fr(p) = \frac{2,2 + 1,49 p}{0,68 p}$$

$$Fr(p) = \frac{G(t)}{E(t)} \text{ . En posant } D = \frac{d}{dt} \text{ , on a :}$$

$$\frac{G(t)}{E(t)} = \frac{2,2 + 1,49 D}{0,68 D}$$

$$0,68 \frac{d}{dt} ( G(t) ) = 2,2 E(t) + 1,49 \frac{d}{dt} ( E(t) )$$

$$0,31 \frac{d}{dt} ( G(t) ) = E(t) + 0,68 \frac{d}{dt} ( E(t) )$$

$$0,31 \frac{d}{dt} \left( \frac{G(t)}{G_m} \right) = \frac{E_m}{G_m} \frac{E(t)}{E_m} + 0,68 \frac{d}{dt} \left( \frac{E_m}{G_m} \frac{E(t)}{E_m} \right)$$

$$\text{Comme } tm = \beta t \text{ , on a : } dt = \frac{1}{\beta} dtm$$

La variable  $t$  est appelée temps réel, relative au phénomène physique étudié.

La variable  $tm$  est appelée temps machine relative au fonctionnement du calculateur.

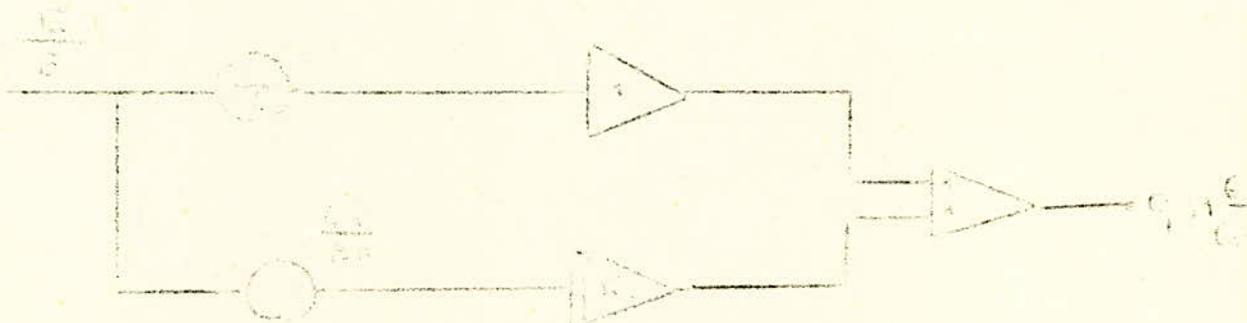
$\beta$  est appelé facteur d'échelle des temps.

$$0,31 \frac{G(t)}{G_m} = \frac{1}{\beta} \frac{E_m}{G_m} \frac{E(t)}{E_m} dt + \frac{0,68}{\beta} \frac{E_m}{G_m} \frac{E(t)}{E_m}$$

$$0,31 \frac{G(t)}{G_m} = \frac{C_i}{\beta} \frac{E(t)}{E_m} dt + \left( \frac{C_d}{\beta} \right) \frac{E(t)}{E_m}$$

$$\text{Avec } C_i = \frac{E_m}{G_m} \text{ ; } C_d = 0,68 \frac{E_m}{G_m} = 0,68 C_i$$

Circuit analogique correspondant au régulateur P.I



L'Equation différentielle régissant le système à réguler s'obtient à partir de la fonction de transfert.

$$F_s(p) = \frac{1}{(1 + pT_i)(1 + pT_c)}$$

Ce système se compose de deux systèmes du premier ordre dont chacun possède une fonction de transfert :

$$F_{s_1}(p) = \frac{1}{1 + pT_i} \quad \text{et} \quad F_{s_2}(p) = \frac{1}{1 + pT_c}$$

$$F_s(p) = F_{s_1}(p) \cdot F_{s_2}(p)$$

$$F_{s_1}(p) = \frac{H(p)}{G(p)} = \frac{1}{1 + pT_i}$$

$$H(p)(1 + pT_i) = G(p)$$

$$H(p) + pT_i H(p) = G(p)$$

$$pT_i H(p) = G(p) - H(p)$$

$$\frac{d}{dt} (H(t)) = \frac{1}{T_i} G(t) - \frac{1}{T_i} H(t)$$

$T_i$  étant égal à 1s, on a

$$H(t) = \frac{1}{T_i} (G(t) - H(t)) dt$$

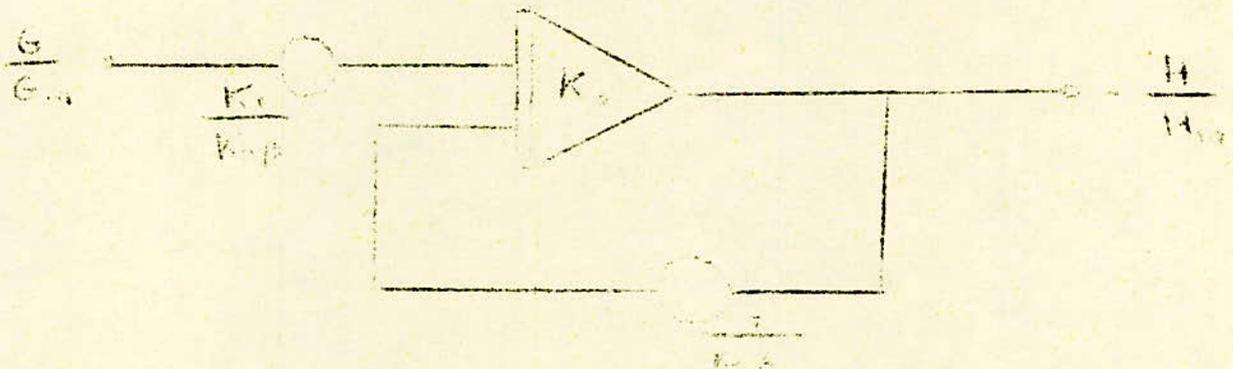
$$H(tm) = \frac{1}{T_i} (G(tm) - H(tm)) dtm \quad \text{car} \quad tm = \int dt$$

L'équation machine du premier circuit du premier ordre est :

$$\frac{H}{H_m} = \frac{K_i}{S} \left( \frac{G}{G_m} \right) dtm - \frac{1}{S} \left( \frac{H}{H_m} \right) dtm$$

$$\text{avec} \quad K_i = \frac{G_m}{H_m}$$

Le circuit analogique simulant ce système est le suivant :



La fonction de transfert du deuxième système est :

$$F_s(p) = \frac{Y(p)}{H(p)} = \frac{1}{1 + pT}$$

$$Y(p) + pT Y(p) = H(p) - Y(p)$$

$$pT Y(p) = H(p) - Y(p)$$

$$\frac{d}{dt} (Y(t)) = \frac{1}{T} H(t) - \frac{1}{T} Y(t)$$

$$Y(t) = \frac{1}{T} (H(t) - Y(t)) dt$$

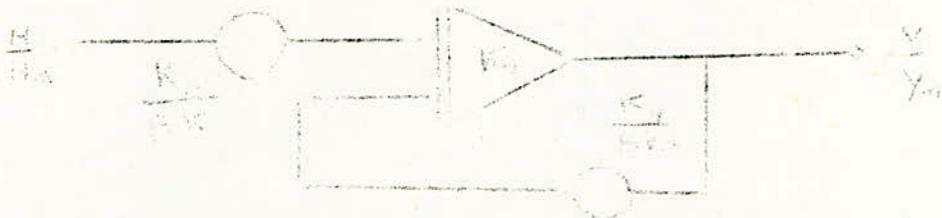
$$\frac{Y}{Y_m} = \frac{1}{B} \frac{1}{T} \frac{H_m}{Y_m} \frac{H}{H_m} dtm - \frac{1}{T} \frac{1}{B} \frac{Y}{Y_m} dtm$$

T étant égal à 0,2 s, l'équation machine de ce système est :

$$\frac{Y}{Y_m} = \frac{1}{B} K \frac{H}{H_m} dtm - \frac{K}{B} \frac{Y}{Y_m} dtm$$

$$\text{Avec } K = \frac{1}{T} \frac{H_m}{Y_m} ; K = \frac{1}{T}$$

Le circuit analogique correspondant est le suivant :



En remplaçant chaque sous ensemble du système asservi proposé par son circuit analogique de simulation, on obtient le circuit analogique pouvant simuler le comportement du système asservi en entier.

Remarque :

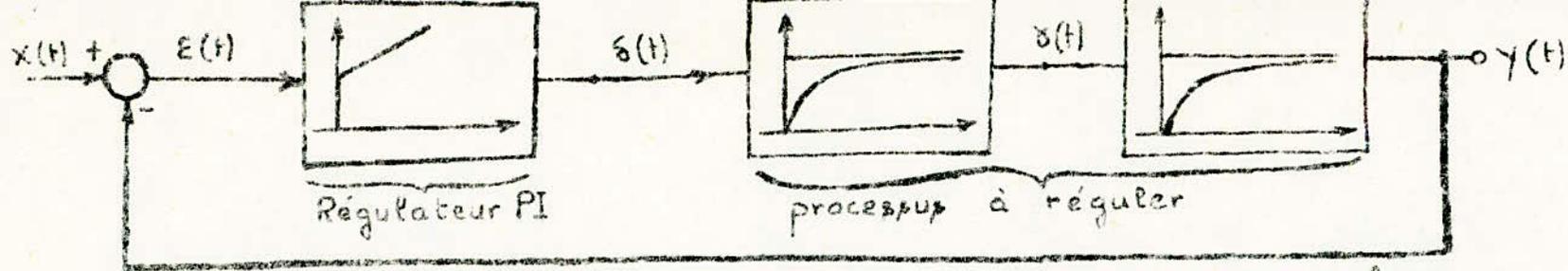


Fig I : schéma fonctionnel donné

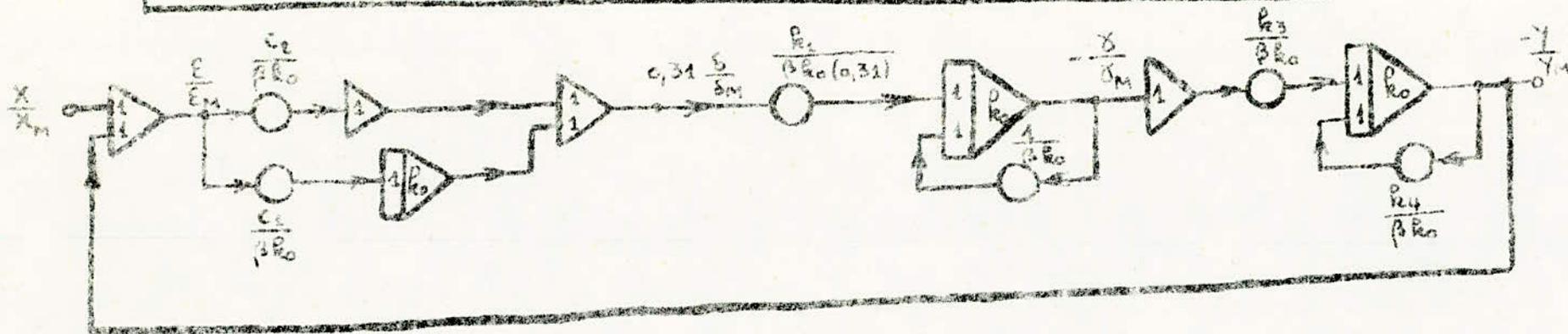


Fig II : Circuit analogique principe du schéma fonctionnel donné

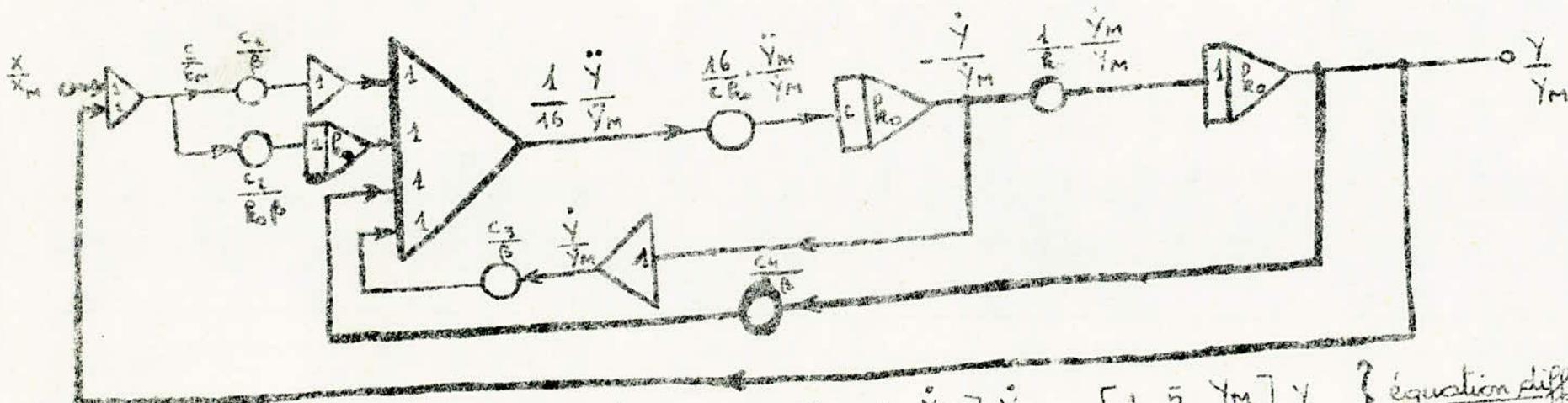


Fig III : Circuit analogique définitif du système avec erreur proportionnelle

$$\frac{1}{16} \ddot{y} = \left[ \frac{1}{\beta} \frac{11}{16} \frac{E_M}{\dot{y}_M} \right] \frac{E}{E_M} + \left[ \frac{1}{\beta} \frac{E_M}{\dot{y}_M} \right] \int_0^t \frac{E}{E_M} dt_{Mm} - \left[ \frac{1}{\beta} \frac{6}{16} \frac{\dot{y}_M}{\dot{y}_M} \right] \dot{y} - \left[ \frac{1}{\beta} \frac{5}{16} \frac{y_M}{\dot{y}_M} \right] \frac{y}{y_M} \quad \left. \begin{array}{l} \text{équation différentielle représentée par} \\ \text{la fig III.} \end{array} \right\}$$

$$C_2 = \frac{11}{16} \frac{X_M}{\dot{y}_M}; \quad C_3 = \frac{6}{16} \frac{\dot{y}}{\dot{y}_M}; \quad C_4 = \frac{y_M}{\dot{y}_M} \cdot \frac{5}{16}; \quad R_0 = 1 \text{ ou } 10; \quad C = \quad ; \quad \beta =$$

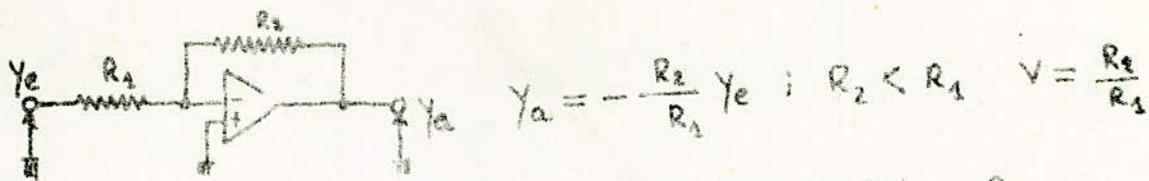
### Essais pratiques sur calculateur.

Les essais de simulation des systèmes donnés dans le tableau 3 ont été effectués sur un calculateur analogique simple de marque LEYBOLD - HERAEUS .

Ce calculateur se présente sous la forme d'un tableau possédant sur sa face avant sept amplificateurs, quatre sources de tensions continues, variables entre + 10V et - 10V, grâce à quatre potentiomètres.

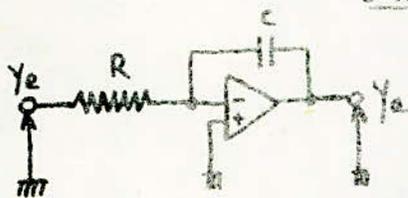
Ces tensions peuvent être utilisées pour donner les conditions initiales d'un problème.

On dispose, de plus sur ce tableau de deux multiplicateurs dont un effectue aussi la division et l'extraction de racine carrée. Nous n'avons pas eu à nous en servir, au cours de nos simulations.



$$Y_a = -\frac{R_2}{R_1} Y_e \quad ; \quad R_2 < R_1 \quad V = \frac{R_2}{R_1}$$

Schéma électrique du régulateur P



$$Y_a = -\frac{1}{RC} Y_e \quad ; \quad T_i = RC$$

Schéma électrique du régulateur I

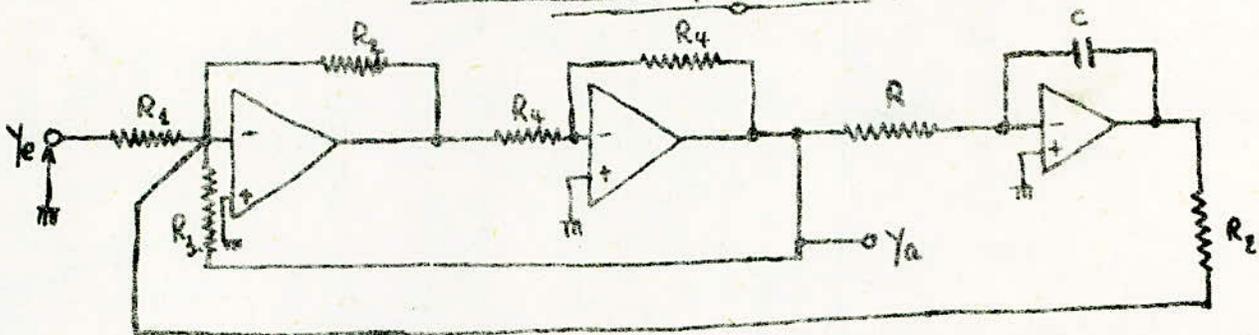
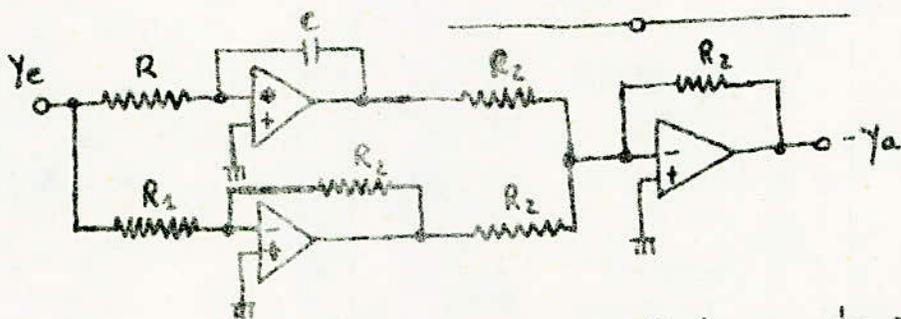


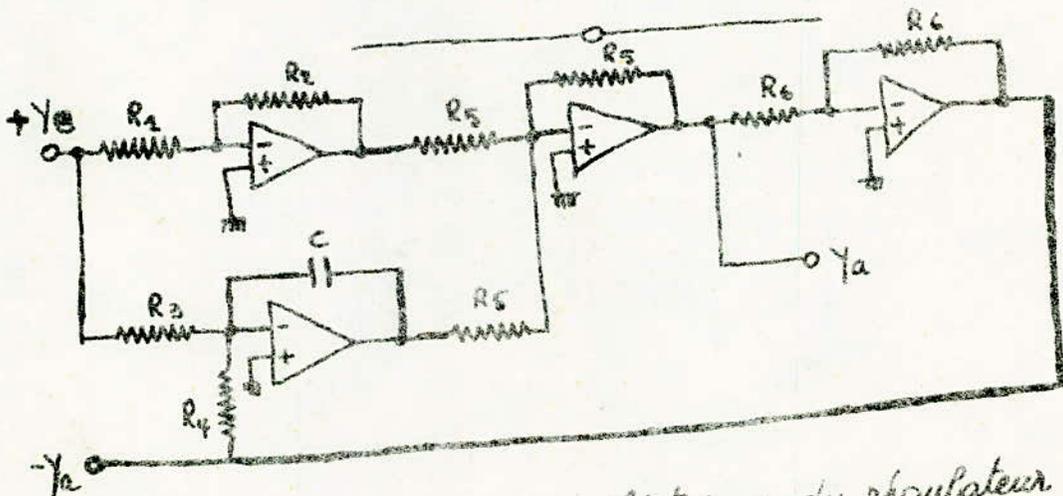
Schéma électrique du régulateur D réel

$$\frac{R_2}{R_1} = k_0 T_D \quad ; \quad \frac{R_2}{R_3} = \alpha = 1 - k_0 T \quad ; \quad k_0 = \frac{1}{RC}$$



$$\frac{k_p}{T_i} = \frac{1}{RC} \quad ; \quad k_p = \frac{R_2}{R_3}$$

Schéma électrique du régulateur PI



$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{k_p}{T} (T + T_D)$$

$$\frac{1}{R_3 C} = \frac{k_p}{T}$$

$$\frac{1}{R_4 C} = \frac{1}{T}$$

Schéma électrique du régulateur PD

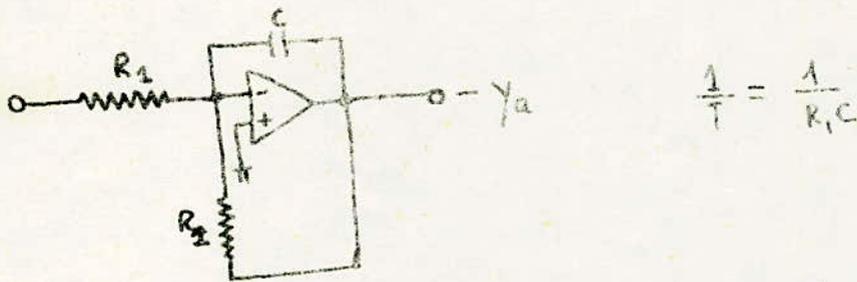
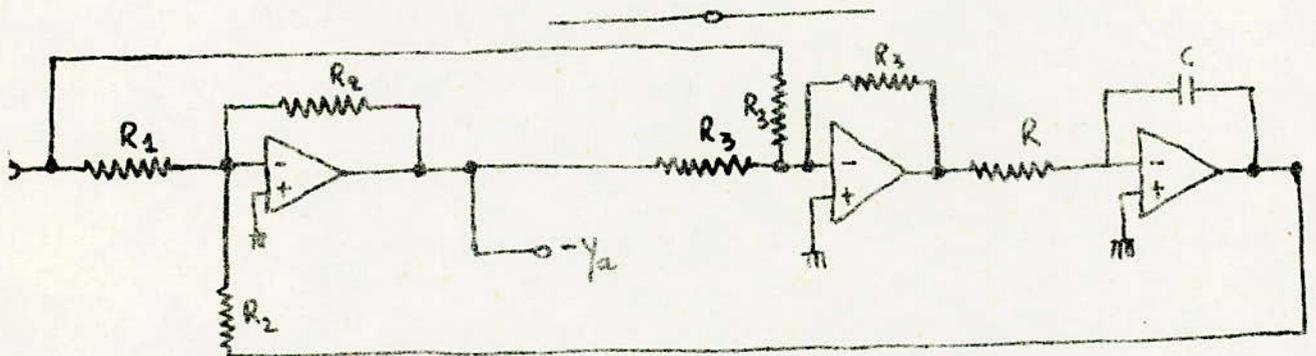
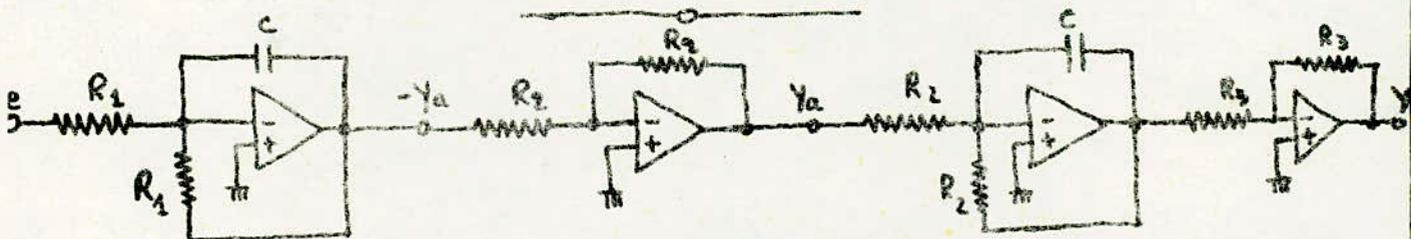


schéma électrique du système de premier ordre



$$\frac{R_2}{R_1} = A < 1; \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{RC}$$

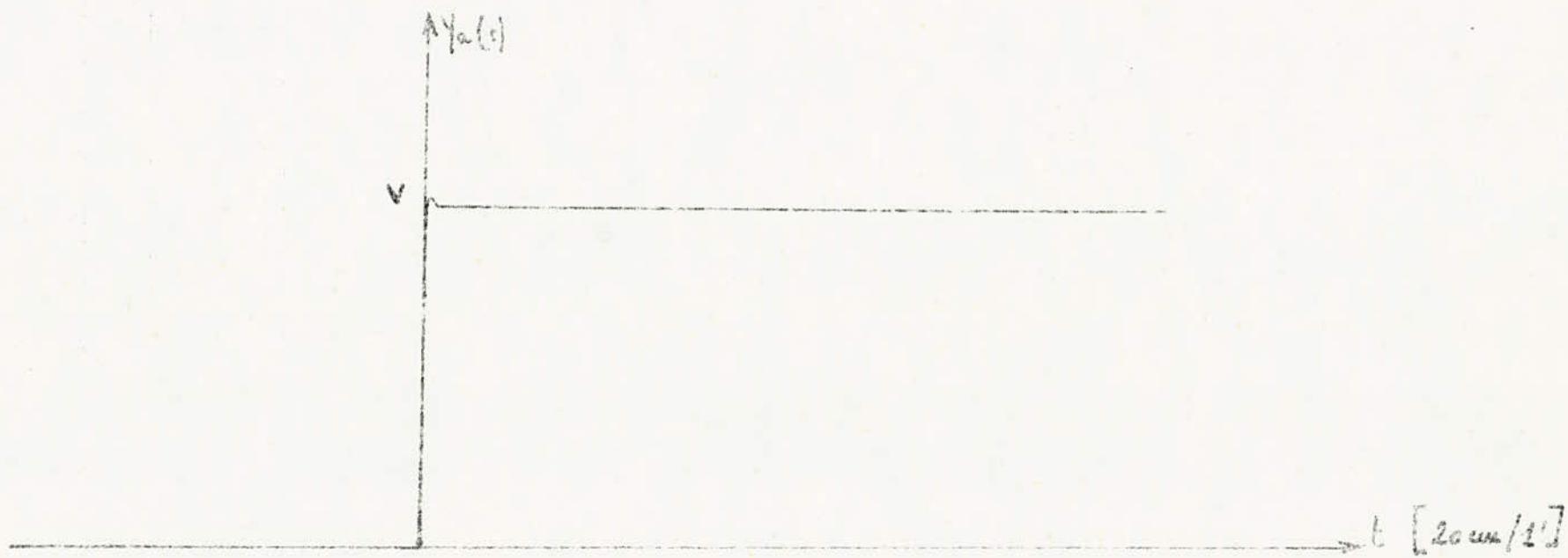
schéma électrique du système déphaseur



la fonction de transfert du système est  $H(p) = \frac{Y_a}{Y_e} = \frac{1}{(1+pT_1)(1+pT_2)}$

$$T_1 = R_1 C ; \quad T_2 = R_2 C$$

schéma électrique du système déphaseur



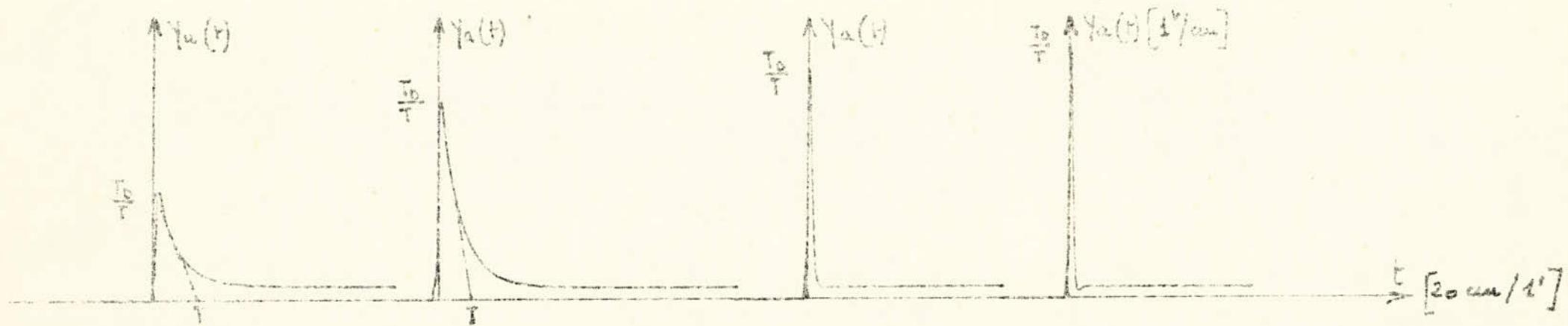
Réponse Indicielle du régulateur F

$\gamma_a(t)$  ( $1^\circ/\text{cm}$ )

zone correspondant à la saturation de l'ampli-opérationnel.

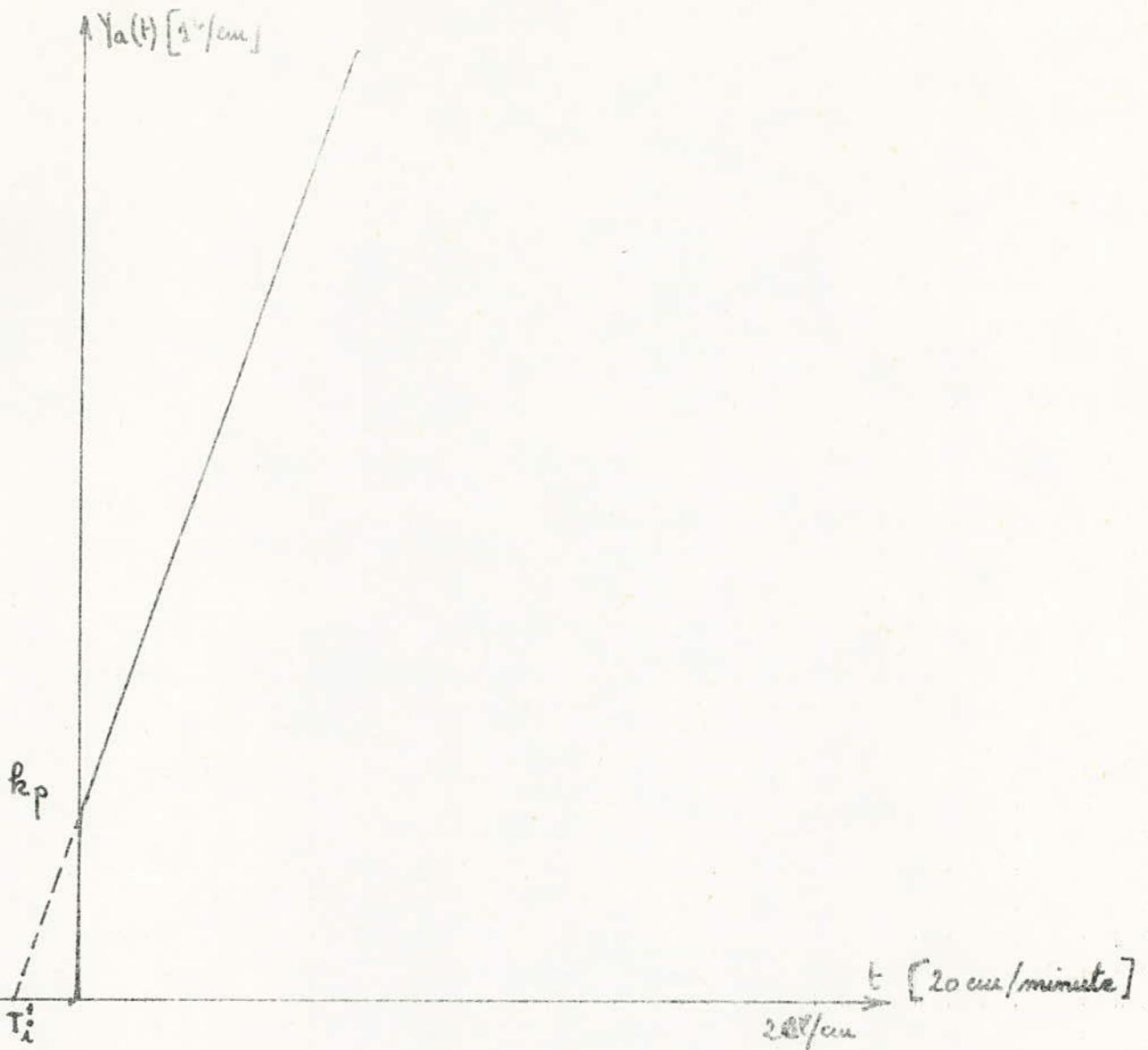
intégration du signal d'entrée  $t$  ( $20^\circ/\text{cm}/1'$ )

Réponse Impulsielle du régulateur I

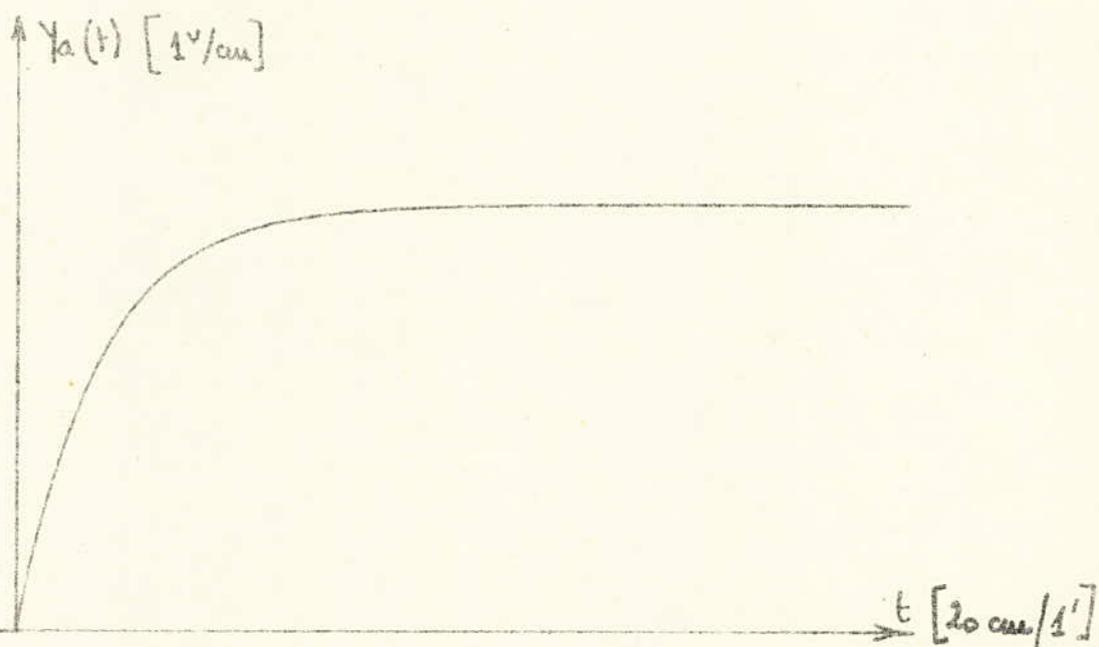


Courbes représentant les réponses indicielles d'un régulateur réel

$$H(p) = \frac{PT_0}{s + PT}$$

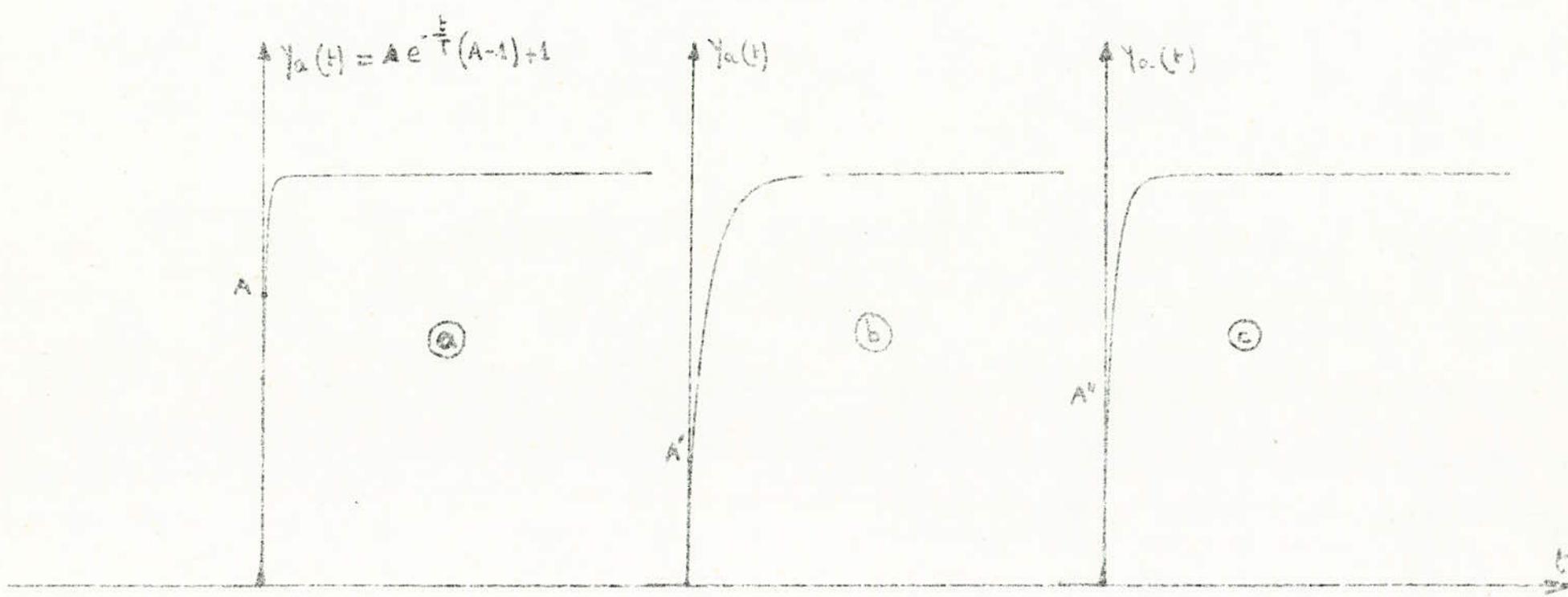


Réponse Indicielle du Régulateur P-I :  $H(p) = k_p \left( 1 + \frac{1}{pT_i} \right)$



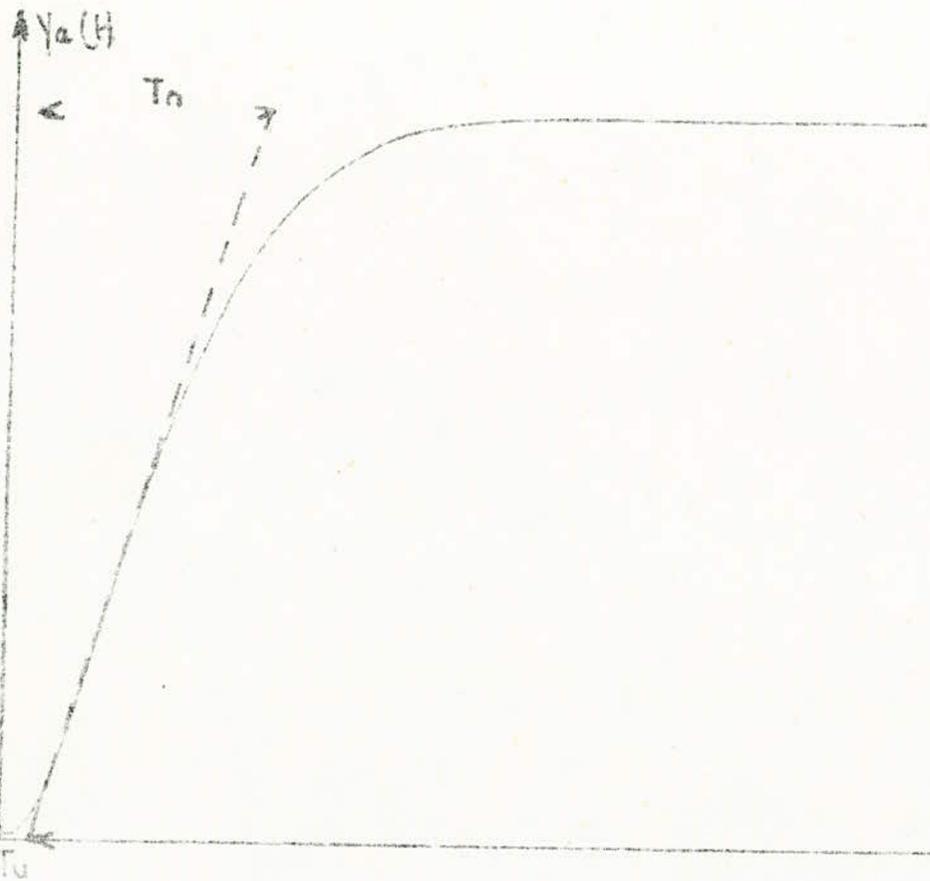
Réponse Indicielle du système du premier ordre

> \ = 4,54

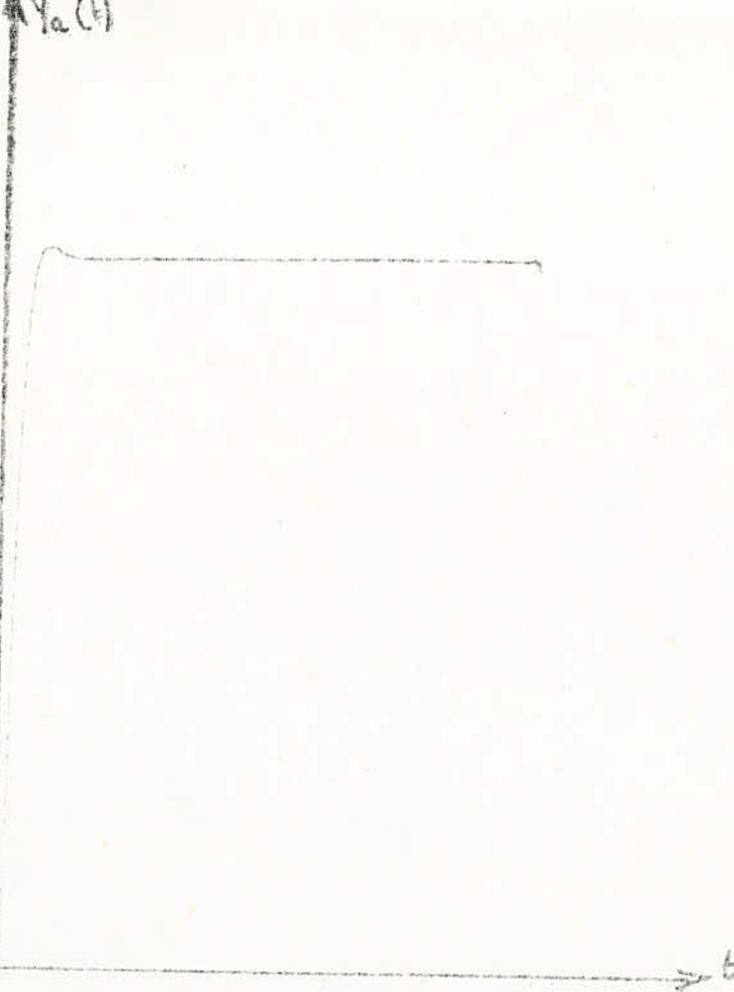


Réponse Indicielle du système déphaseur:  $H(p) = \frac{1 + PAT}{1 + PT}$

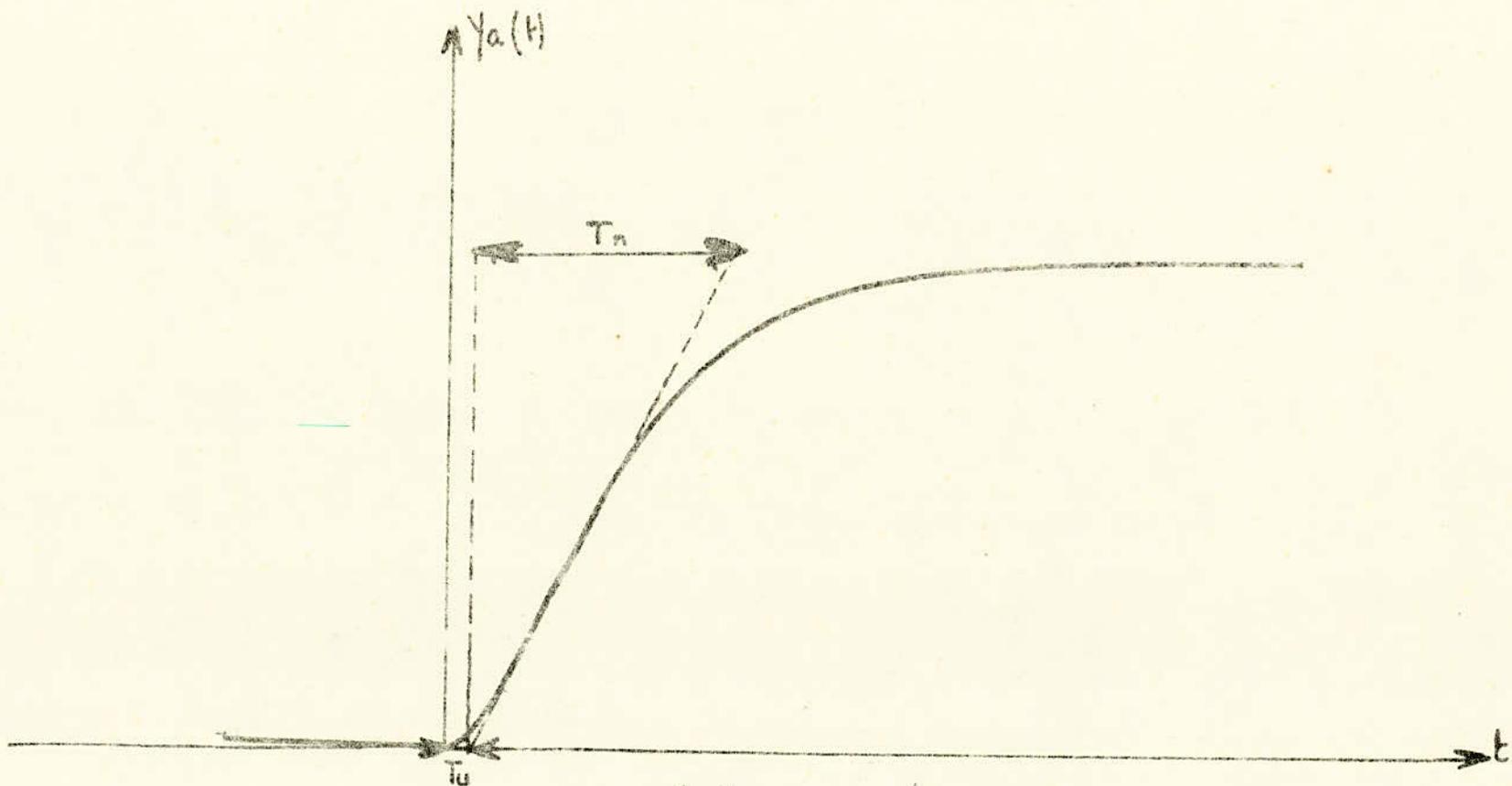
échelle:  $y_c(t)$  [L<sup>3</sup>/cm<sup>3</sup>];  $t$  [200s/div]



Réponse du système du 2<sup>ème</sup> ordre  
 $\beta = 10$

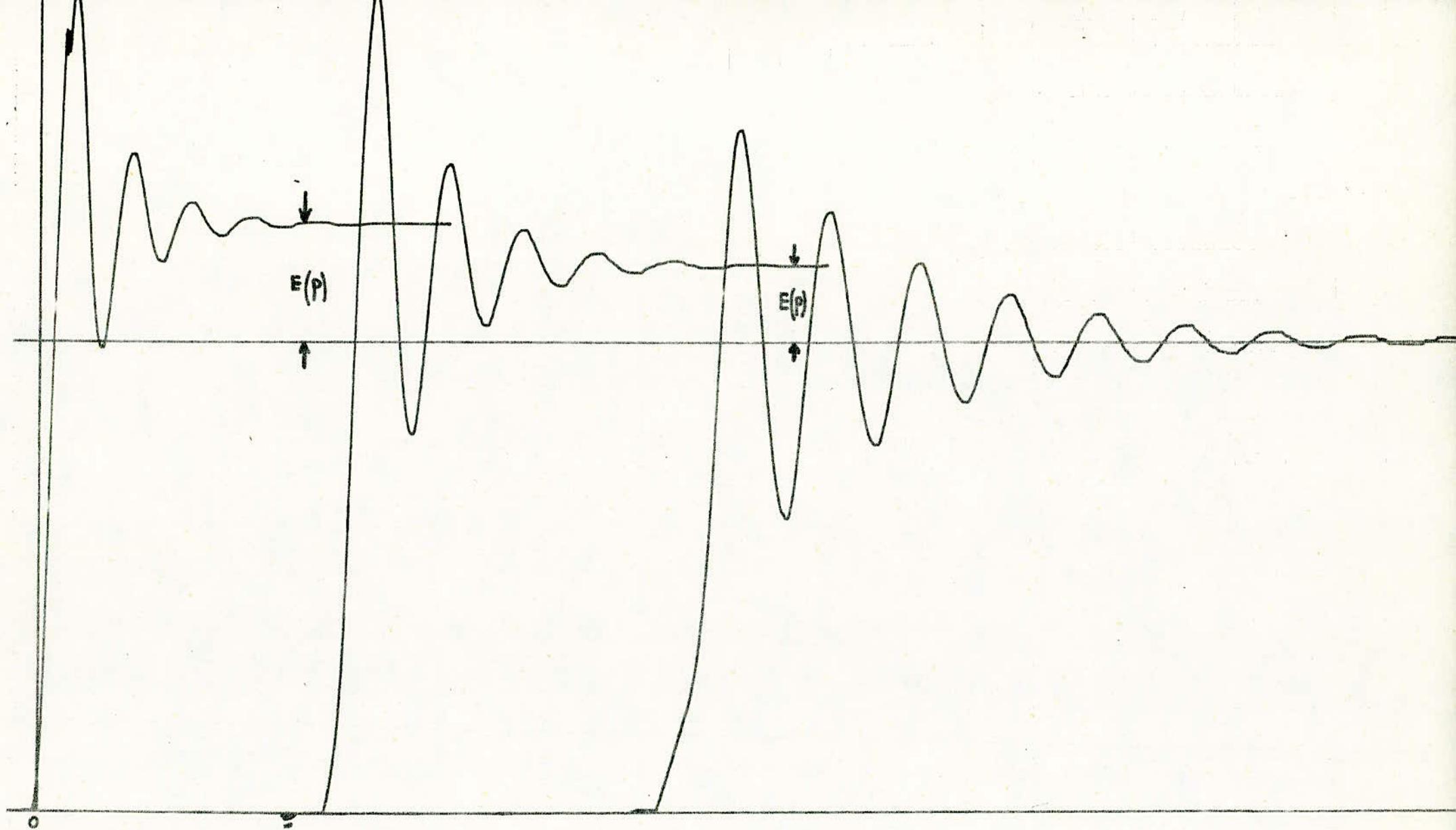


Réponse du système du 2<sup>ème</sup> ordre  
 $\beta = 1$

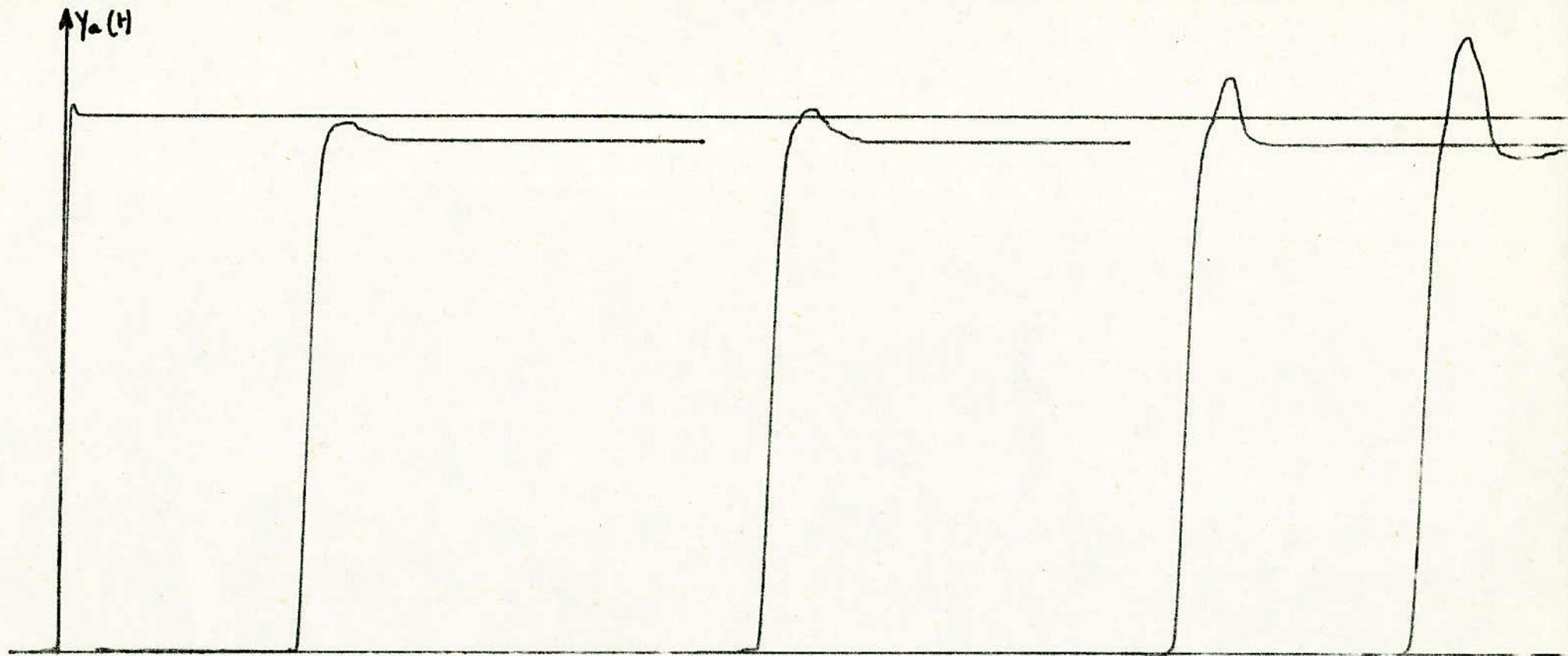


système du 2<sup>ème</sup> ordre non corrigé  
 avec  $H(p) = \frac{1}{(1+pT_1)(1+pT_2)}$  ;  $T_1 = 3s$  ;  $T_2 = 2s$ .

Echelle:  $Y_a(t) \Rightarrow [1^v / \text{cm}]$   
 $t \Rightarrow [s]$

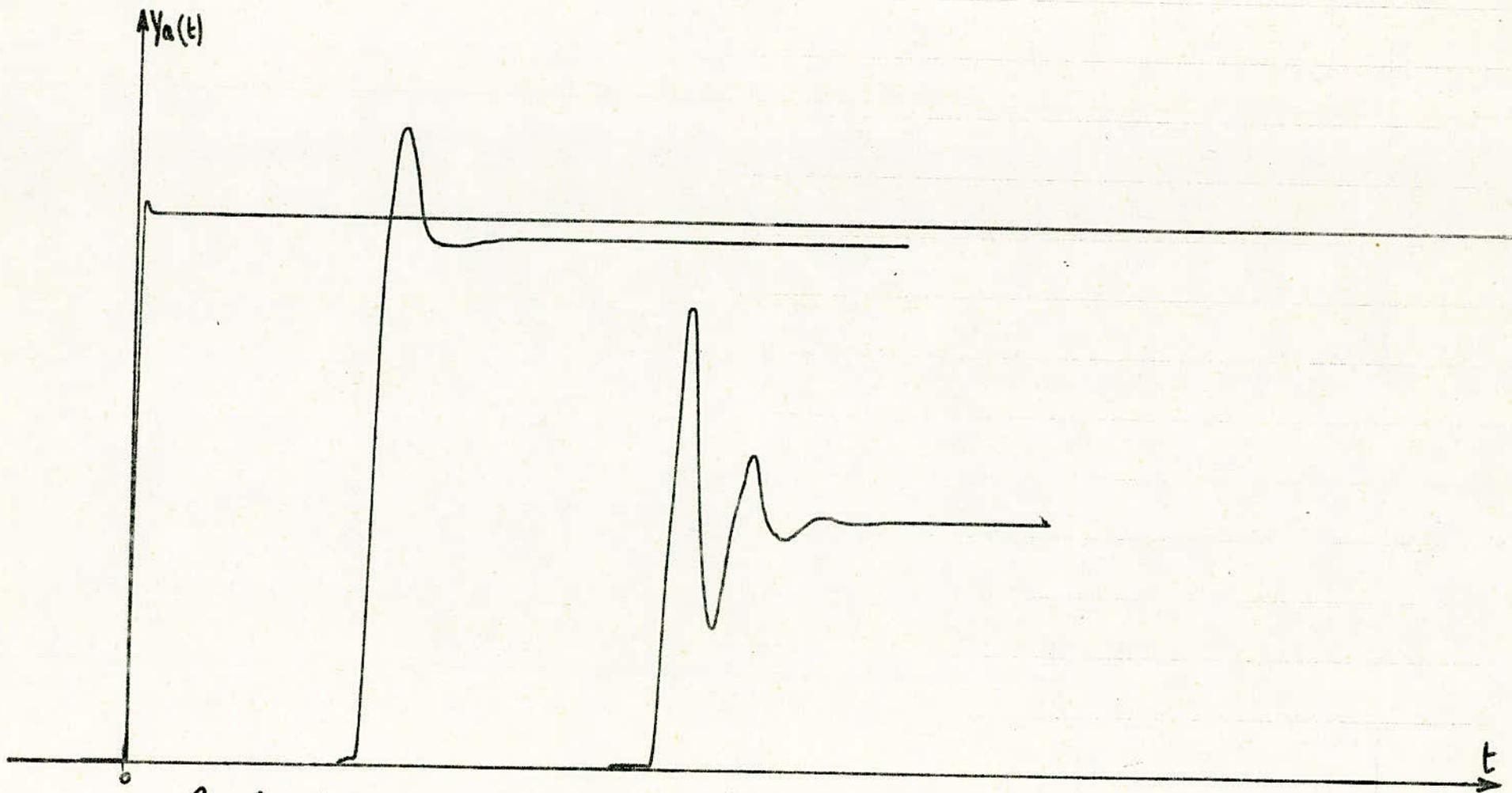


Courbes de réponses du système du 2<sup>ème</sup> ordre corrigé par un régulateur P avec  $k_p \uparrow$   
échelle:  $y_a(t) \Rightarrow 1\text{V/cm}$ ;  $t \Rightarrow 20\text{cm}/1\text{s}$ :



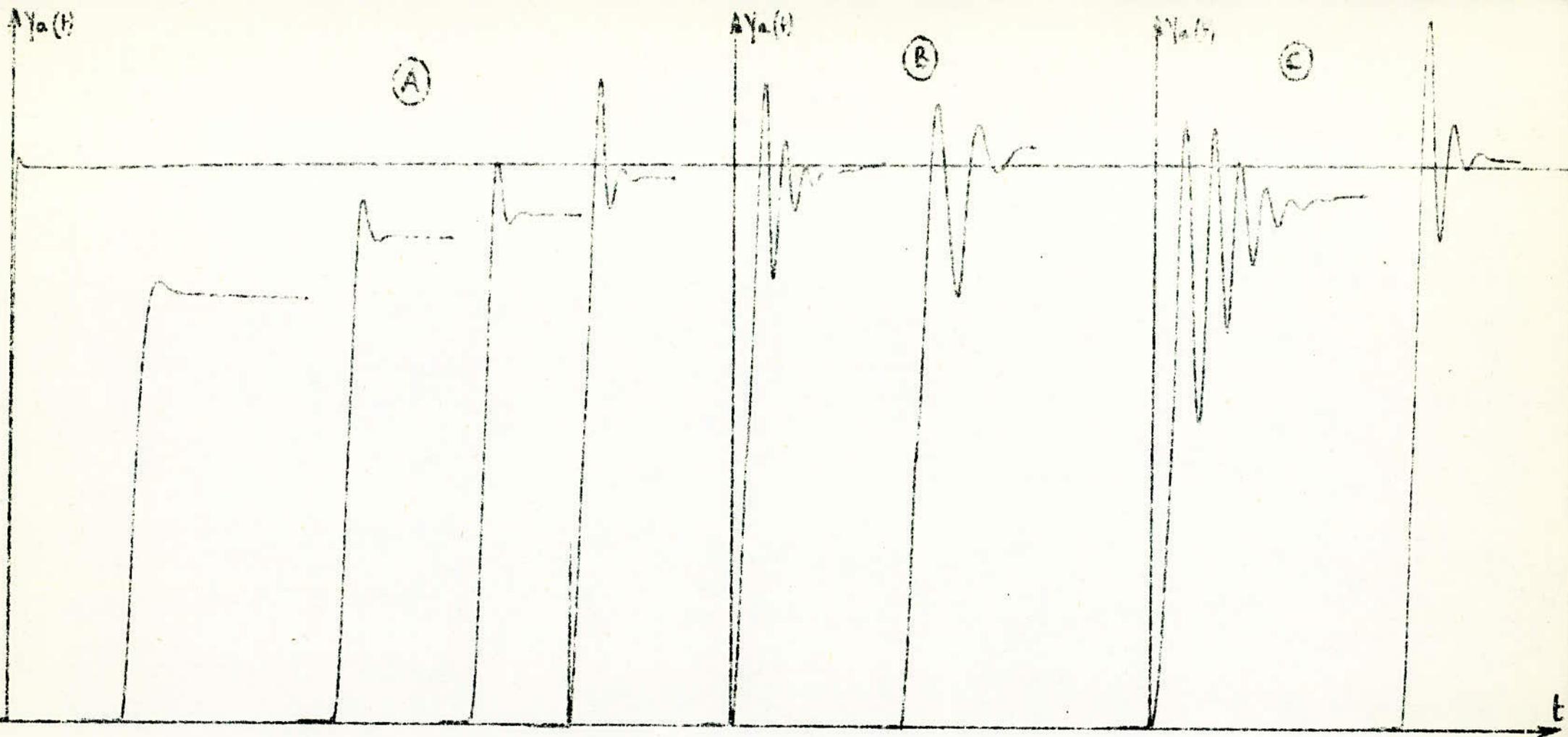
Courbes de réponses du système du 2<sup>ème</sup> ordre corrigé par un régulateur P.I  
avec  $k_p \uparrow$  et  $T_i = \text{cte}$

échelle:  $y_a(t) \Rightarrow 1^\circ/\text{cm}$  ;  $t \Rightarrow 20 \text{ cm}/1'$



Courbes de réponses du système du 2<sup>ème</sup> ordre corrigé par un régulateur P.I  
avec  $T_i \downarrow$  et  $k_p = \text{cste}$

échelle:  $Y_a(t) \Rightarrow 1 \text{ cm}$  ;  $t \Rightarrow 20 \text{ cm/1'}$ .



Système du 2<sup>ème</sup> ordre corrigé par un PID

Ⓐ  $\Rightarrow k_p = \text{cste}; T_i = \text{cste}; T_d \uparrow$

Ⓑ  $\Rightarrow k_p \downarrow; T_i = \text{cste}; T_d = \text{cste}$

Ⓒ  $k_p = \text{cste}; T_i = \text{cste}; T_d \text{ variable}$

échelle:  $Y_a(t) \Rightarrow 1\% \text{ au}$ ;  $t \Rightarrow 20 \text{ cm} / \text{s}$

## Correction des systèmes asservis :

### Comparaison des différents modes de régulation :

La régulation d'un processus vise l'amélioration des performances de celui-ci. Finit lors de la régulation, il faut toujours chercher une régulation optimale, en d'autres termes essayer d'avoir :

Un temps de réponse faible, un bon amortissement, un écart permanent faible.

Ceci nous a amené à considérer l'influence des paramètres des différents régulateurs sur le processus et par la même à comparer les différents modes de régulation :

des différentes réponses qu'on a obtenues nous permettent d'établir les conclusions suivantes.

- + Le régulateur P a un grand écart maximal, et un temps de stabilisation assez élevé.
- + Le régulateur I annule l'écart permanent.
- + Le régulateur D donne le plus faible écart maximal, et le plus court temps de réponse.
- Le régulateur PI donne un temps de stabilisation assez long et ne produit pas d'écart permanent par suite de l'action du régulateur I.
- Le régulateur PD donne le plus faible temps de stabilisation, et le plus faible écart maximal, ceci est dû à l'action du régulateur D.
- Le régulateur PID a un écart maximal assez petit dû à l'action du régulateur D, l'écart permanent est éliminé par l'action de I.
- Le temps de stabilisation s'établit entre celui du PI et celui du PD.

## CONCLUSION

Le projet qui nous a été proposé nous a permis non seulement de nous familiariser avec le calculateur analogique, mais aussi de concrétiser pratiquement les résultats théoriques établis lors de l'étude des systèmes asservis et du contrôle industriel.

Ainsi partant d'un système sur-amorti, on a pu voir, combien est importante la notion de facteur d'échelle des temps, et facteur d'échelle des amplitudes.

En outre l'influence des paramètres de chaque correcteur a été mise en évidence; par exemple pour le régulateur I on a pu obtenir  $K_{pmax}$  et un écart de position nul.

En joignant à notre humble thèse une annexe, on espère que celle-ci soit l'objet de travaux pratiques dans le cadre des modules "Systèmes asservis" et "Contrôle industriel" pour que les prochaines promotions puissent en tirer profit.

---

Travaux Pratiques TTN 169

- 1 - Notion de calcul analogique
- 2 - Modèles analogiques des fonctions de base.
- 3 - Structure d'un calculateur analogique
- 4 - Programmation d'un calculateur analogique
- 5 - Résolutions d'équations différentielles
- 6 - Simulation des systèmes asservis

## I Notion de calcul analogique.

Il existe une analogie entre deux phénomènes s'ils sont représentés par les mêmes équations.

La connaissance de cette analogie permet d'étendre à l'un des phénomènes, certaines propriétés déjà connues de l'autre. Dans le cas où le calcul mathématique est laborieux, nous avons recours à des mesures. Ceci nous permet de remplacer le système étudié par son modèle analogique. Le processus de simulation analogique est le suivant :

- 1- A partir des équations du système à étudier, on cherche un modèle analogique sur lequel on effectuera des mesures.
- 2 - On procède à la mise en échelle des temps et des amplitudes.
- 3- On applique au modèle analogique, des excitations électriques.
- 4- On mesure la réponse du modèle à ces excitations.
- 5- On traduit enfin ces mesures, pour trouver les véritables des grandeurs physiques du problème étudié.

Dans le modèle analogique, les tensions prises par rapport à la masse sont proportionnelles aux inconnues du problème.

Un calculateur analogique doit pouvoir réaliser sur des tensions variables dans le temps les opérations classiques : Somme, Intégration, Multiplication, division etc...

## 2. Modèles analogiques des fonctions de base.

Il est nécessaire d'utiliser des opérateurs fonctionnels présentant une impédance d'entrée suffisamment élevée, et une impédance de sortie suffisamment faible pour qu'il soit possible de les connecter à la suite les uns des autres.

Les caractéristiques de l'amplificateur opérationnel répondent à ces exigences :

- Gain très élevé.
- Impédance d'entrée en boucle ouverte élevée.
- Tension de sortie pour une tension d'entrée nulle.
- Niveau de bruit négligeable.

### 2.1 Opérateur de sommation. (fig 2.1.)

$$\text{on a : } \sum (e - V) \frac{1}{R_i} + (e - V_s) \frac{1}{R_o} =$$

$$\text{d'où (1) } V_s = - R_o \sum \frac{V_i}{R_i} \quad \text{dans le cas où}$$

$\frac{1}{A}$  et  $\frac{R_o}{A} \sum \frac{1}{R_i}$  sont négligeables devant l'unité

l'expression (1) peut se mettre sous la forme

$$V_s = - \sum A_i V_i \quad \text{avec } A_i = \frac{R_o}{R_i}$$

### 2.2 Multiplication par une constante. (fig 2.2)

l'équation de KIRCHHOFF donne.

$$I_e + I_s + I_g = 0 ; I_g = 0$$

$$\frac{V_s}{A} + \frac{1}{R} \left( \frac{r}{R_c} V_e - \frac{V_s}{A} \right) + \left( \frac{r'}{R_s} V_s - \frac{V_s}{A} \right) \frac{1}{R} = 0$$

$\frac{V_s}{A}$  est négligeable devant 1, donc :

$$\frac{r}{R_c} V_e + \frac{r'}{R_s} V_s = 0$$

$$V_s = - \frac{A_c}{A_s} V_e$$

$$\text{avec } A_c = \frac{r}{R_c} \quad \text{et} \quad A_s = \frac{r'}{R_s}$$

### 2.3 Intégration par rapport au temps. (fig 2.3)

$$V_s \left( 1 - \frac{1}{RC} \right) = - \frac{1}{RC} \int e \, dt - \frac{1}{RC} \int V_e \, dt$$

Nous pouvons écrire avec une approximation satisfaisante :

$$V_s = - \frac{1}{RC} \int V_e \, dt$$

### 2.4 Différentiation par rapport au temps (fig 2.4)

$$\frac{d(V_e - e)}{dt} + \frac{1}{RC} (V_s - e) = 0$$

$$V_s \left( 1 - \frac{1}{RC} \right) = RC \frac{d(V_e - e)}{dt}$$

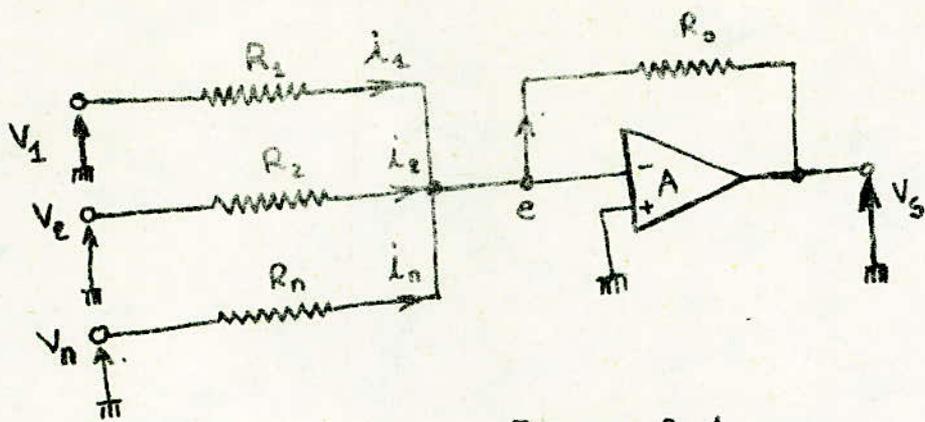


Figure 2-1.

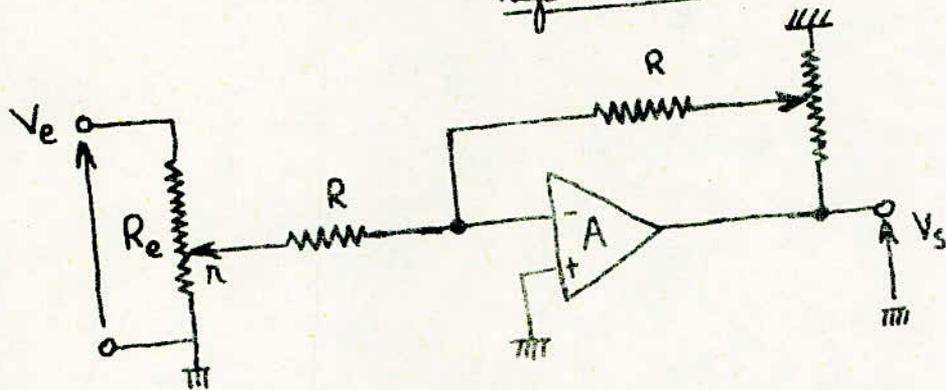


Figure 2-2.

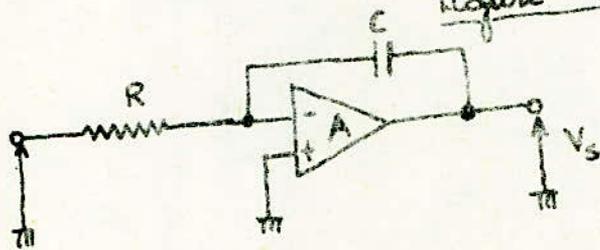


Figure 2-3

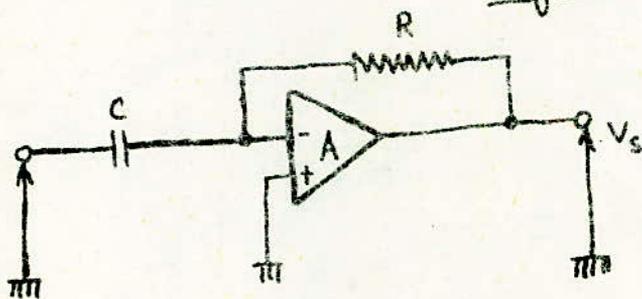


Figure 2-4

### 3. Structure d'un Calculateur analogique

On distingue dans un calculateur les parties suivantes :

#### 3.1 Opérateurs.

L'ensemble des opérateurs effectuant les fonctions fondamentales.

#### 3.2 Système de contrôle des modes.

Il permet de mettre les opérateurs de calcul dans un état particulier : on distingue :

- Mode " étalonnage des potentiomètres "
- Mode " Conditions initiales "
- Mode " Calcul "
- Mode " Mémoire "

#### 3.3 Panneau de câblage.

Il est l'aboutissement des entrées et sorties des opérateurs de calcul, permettant leur interconnexion de façon à réaliser les schémas de calcul désirés. Le panneau de câblage est aussi l'aboutissement de points de liaison avec des organes extérieurs : autres calculateurs, enregistreurs etc...

#### 3.4 Sources de référence.

Elles fournissent une valeur positive et une valeur négative équilibrées. Ces tensions permettant d'introduire les conditions initiales d'un problème.

#### 3.5 Dispositifs d'entrée de données et de sortie de résultat.

##### 3.5.1 Les données sont :

- Les valeurs numériques des coefficients des équations.
- Les conditions initiales des intégrateurs.
- Les ordres de commande d'état des opérateurs de calcul ou ordres destinés au contrôle du mode de la machine.

##### 3.5.2 Les valeurs (soit ) à sortir proviennent des tensions fournies par :

- Certains opérateurs de calcul pendant toute la durée de calcul : prisés sur un enregistreur XY ou à déroulement proportionnel du temps.
- Certains opérateurs de calcul, à mesurer à des instants particuliers ( au début ou à la fin ).

#### 4. Programmation d'un calculateur analogique.

##### 4.1 Ecriture des équations machines.

###### 4.1.1 Choix du temps machine.

On désignera par  $T$  la variable indépendante du calculateur et par  $t$  la variable indépendante du problème.

On a :  $T = nt$  ;  $n$  : facteur d'échelle.

###### 4.1.2. Choix des échelles des variables analogiques.

Partant d'un système :  $\frac{dX}{dt} = f(X, t)$

On fait correspondre l'équation machine :

$$\frac{d\left(\frac{X}{K}\right)}{dt} = \frac{1}{n} \frac{1}{K} f\left(K \left(\frac{X}{K}\right), \frac{1}{n} (T)\right)$$

$n$  : facteur échelle de temps

$K$  : facteur échelle d'amplitude

##### 4.2 Etablissement du schéma analogique :

les variables seront élaborées par des amplificateurs, les constantes par des potentiomètres.

Pour plus de précisions consulter le polycopié.

## 5. Résolution d'équation différentielles

### 5 - 1 Principe de la méthode.

Soit l'équation différentielle du 3e ordre dans laquelle les variables qui apparaissent sont des " variables machines " , fonction des temps machine  $t$  :

$$A \frac{d^3 y}{dt^3} + A_2 \frac{d^2 Y}{dt^2} + A_1 \frac{dY}{dt} + A_0 Y + f(t) = 0$$

On la met sous la forme :

$$\frac{d^3 Y}{dt^3} = - \frac{A_2}{A} \frac{d^2 Y}{dt^2} - \frac{A_1}{A} \frac{dY}{dt} - \frac{A_0}{A} Y - \frac{1}{A} f(t)$$

Les conditions initiales sont supposées connues à l'instant  $t=0$

$$Y(0) ; \left( \frac{dY}{dt} \right)_0 ; \left( \frac{d^2 Y}{dt^2} \right)_0$$

On suppose connue à l'instant  $t$  la dérivée d'ordre supérieure ici  $\frac{d^2 Y}{dt^2}$ . Par intégration successive et compte tenu des signes, on obtient :

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} ; - \frac{dY}{dt} ; Y$$

A partir de ces grandeurs , on forme  $\frac{A_2}{A} \frac{d^2 Y}{dt^2}$  ;  $\frac{A_1}{A} \frac{dY}{dt}$  et  $\frac{A_0}{A} Y$

La quantité  $\frac{1}{A} f(t)$  est fournie par un générateur de fonction. Les conditions initiales sont imposées à l'aide des potentiomètres  $P_1, P_2, P_3$  connectés aux références unitaires (1) ou (-1) ; ils permettent d'introduire les quantités  $\left( \frac{d^2 Y}{dt^2} \right)_0$  ;  $\left( \frac{dY}{dt} \right)_0$  ; et  $(Y)_0$  aux sorties des

intégrateurs (1) ; (2) et (3) à l'instant  $t = 0$  (voir fig 5.1.)

5.2 Exemple de résolution d'une opération différentielles. Soit l'équation suivante, dans laquelle la variable  $X(t)$  représente un déplacement :

$$X + 3 \dot{X} + 16 \ddot{X} = -80 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Conditions initiales } X(0) &= 2m \\ \dot{X}(0) &= 0,6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Les valeurs maximales sont :

$$X_m = 7m ; \dot{X}_m = 47 \text{ m/s} ; \ddot{X}_m = 98 \text{ m/s}^2$$

On choisit les variables normalisées, c'est à dire  $\left( \frac{X}{X_m} \right)$  ;  $\left( \frac{\dot{X}}{\dot{X}_m} \right)$  ;  $\left( \frac{\ddot{X}}{\ddot{X}_m} \right)$

$$\text{soit } : \frac{\ddot{X}}{98} ; \frac{\dot{X}}{47} ; \frac{X}{7}$$

Pour avoir des facteurs d'échelle simples, on choisit :

$$\frac{X}{10} ; \frac{\dot{X}}{50} ; \frac{\ddot{X}}{100}$$

L'équation (1) devient :

$$100 \frac{\ddot{X}}{100} + 3 \times 50 \frac{\dot{X}}{50} + 16 \times 10 \frac{X}{10} = -80$$

$$\frac{\ddot{X}}{100} + 1,5 \frac{\dot{X}}{50} + 1,6 \frac{X}{10} = -0,8$$

$$\text{Avec CI : } \left( \frac{X}{10} \right)_0 = 0,2$$

$$\text{Voir fig ( 5.2 ) } \left( \frac{\dot{X}}{50} \right)_0 = 0,012$$

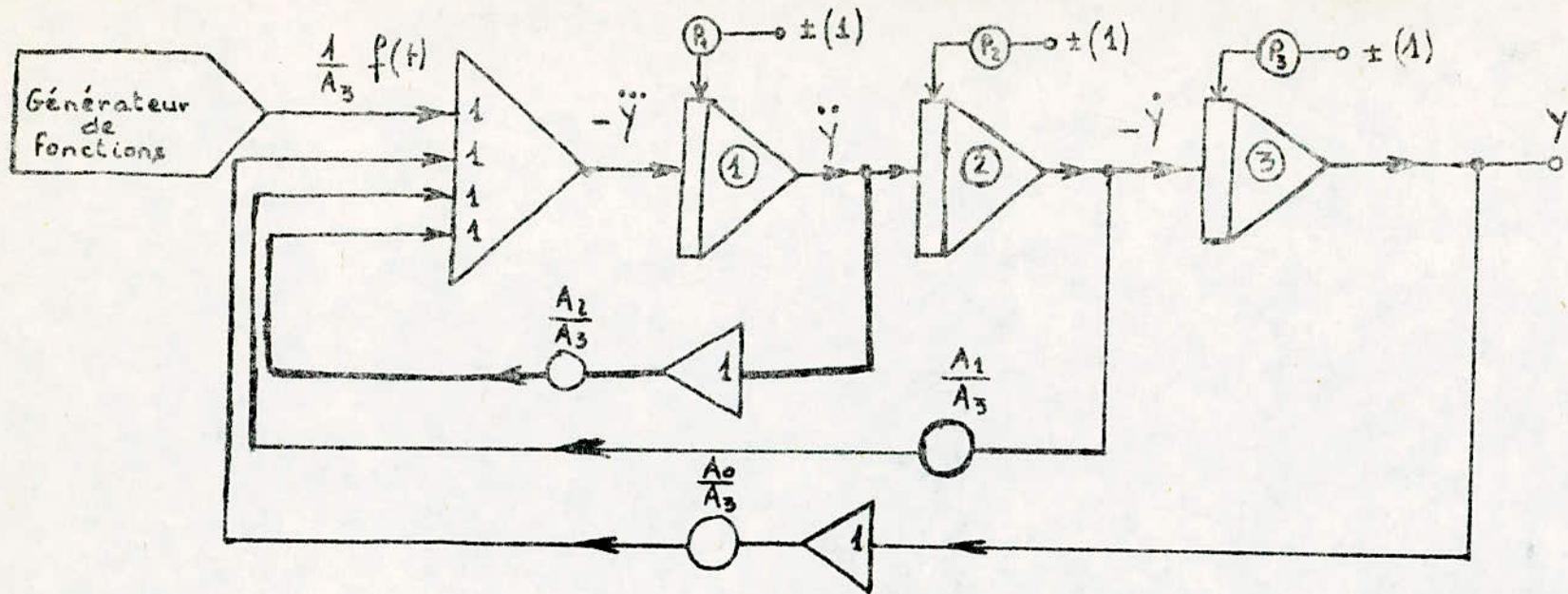


Figure 5-1.

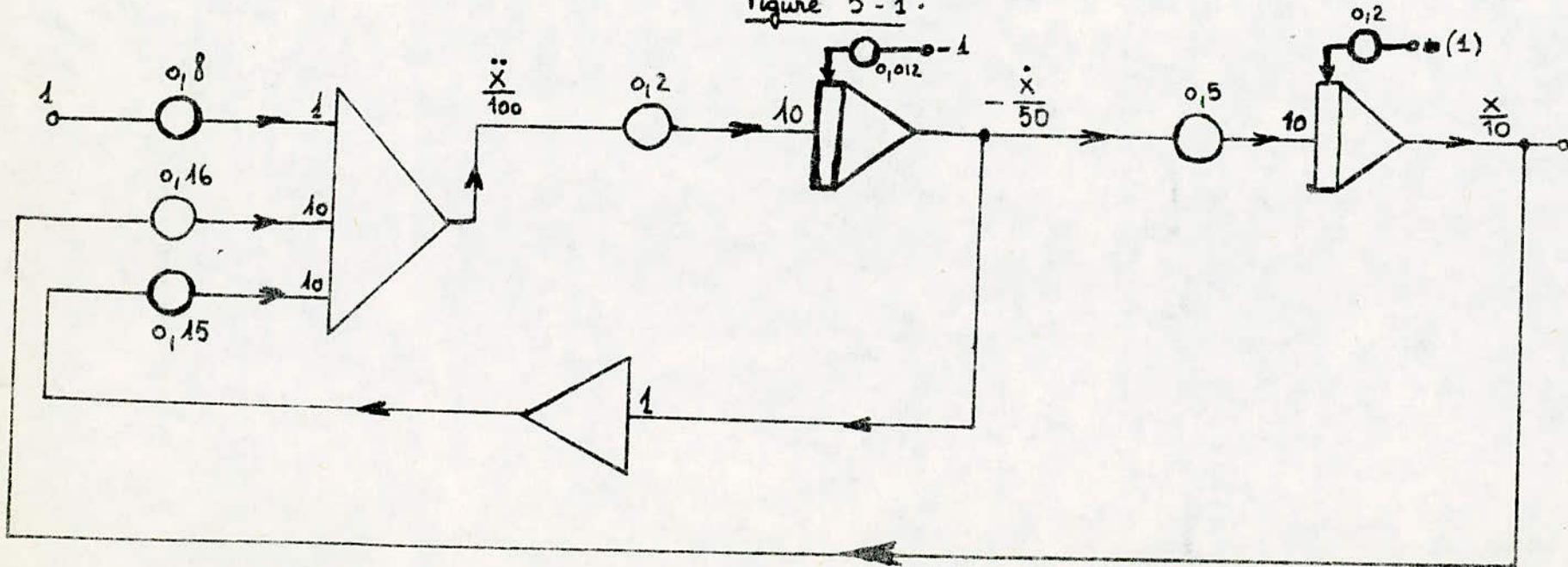


Figure 5-2.

## 6. Simulation des systèmes asservis

Les calculateurs analogiques se prêtent très bien à l'étude des systèmes asservis, dont ils permettent d'effectuer une simulation qui autorise une discussion détaillée du comportement dynamique du système, en fonction des différents paramètres des sous ensemble constitutifs.

L'étude des systèmes asservis sur calculateur (asservis) analogique comporte deux étapes qui sont successivement :

- La représentation des fonctions de transport de chacun des sous-ensemble du système.
- La simulation proprement dite qui est réalisé au moyen de l'interconnexion des fonctions de transport du système.

Dans les tableaux du polycopié on trouvera des circuits analogiques correspondant aux régulateurs classiques ( P, I, D, PI, ... ) On trouver les courbes enregistrées à la sortie de ces circuits à partir de la page (     ) .

BIBLIOGRAPHIE

\* Possibilités des calculateurs analogiques et logiques ALPAM 5, application à la simulation. "TELEMECANIQUE ELECTRIQUE"

\* Calcul analogique et calcul hybride par H. STEINBERG (1967)

\* Traitement des équations différentielles sur calculateurs électroniques par Jean Girard professeur au Conservatoire national des arts et métiers et par Walter T. Korplis professor of Engineering, University of California.

éd. GAUTHIER-VILLARS  
(1968)

\* Cours d'automatique : Correction d'un système asservi linéaire, calcul analogique par J. Maignemaud :

éd MASSON et CIE  
(1974)