UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE
POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ELECTRICITE

FILIERE D'INGENIEUR EN ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

ETUDE DES SYSTEMES COMBINATOIRES ET SEQUENTIELS PAR LA METHODE DE R.VALLEE

BANCS D'ESSAIS

PROPOSE PAR :
Mme MONDON
Docteur Ingénieur

ETUDIE PAR :
Mr. DJEDDOU Bachir
Mr. BENSLAMA Malek

PROMOTION : OCTOBRE - JANVIER 1977 - 1978

DEDICACES.

- A mes Parents.
- A mon Frère et mes Soeurs.
- A mes Amis.

BENSLAMA MALEK.

- A mes Parents.
- A mes Frères et Soeurs.
- A mes Amis.

DJEDDOU BACHIR.

- A Monsieur SELLAL RACHID, Chef de Service du SCE F.T.C S.N.METAL Engineering.

- A Mademoiselle CHELLAT Zakia, sa secrétaire.

§ -0-0-0-0-0-0-0-0- §

A V A N T - P R O P O S .

- Nous tenons en premier lieu à exprimer nos vifs remerciements et notre sincère gratitude à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation depuis notre tendre enfance jusqu'à ce jour
- Que Messieurs les professeurs de l'Ecole Nationale Polytechnique trouvent là l'expression de notre profonde reconnaissance;en particulier Monsieur le Chef de Département d'Electricité ainsi que notre chère promoteur Madame MONDON GEORGETTE Docteur Ingénieur.

BENSLAMA - DJEDDOU .

S O M M A I R E .

I N T R O D U C T I O N .

En I854, George Boole publia un ouvrage sur la codification de la logique formelle; ouvrant ainsi la voie à l'analyse binaire, à partir de l'algèbre Boole opèra une modification de l'axiomatique tout en conservant le symbolisme.
D'autres suivirent le chemin inverse c'estàà-dire: conservation de l'axiomatique, mais modification du symbolisme. Cette seconde façon de procéder s'avérera en pratique d'une extême fécondité .
Ainsi RL. VALLEE dans son étude sur les systèmes combinatoires et séquentielles introduisit de nouvelles notions . Parmi celle-ci nous citons : le Produel.
La représentation du produel a été faite avec un symbolisme bi-dimensionnel.
RL. VALLEE a donc changé le symbolisme . C'est l'idée maîtresse de l'exposé que nous allons étudiée .
Cet exposé comprend trois grandes parties :

- Les systèmes combinatoires suivis d'un annexe spécifique aux aléas de ceux-ci.
- Les systèmes séquentiels .
- Nous examinerons quelques applications pratiques de cette méthode.

En ce qui concerne les systèmes combinatoires et à côté de la notion nouvelle du produel VALLEE, propose une méthode inédite de simplication binaire, méthode qui a le mérite d'être générale (c'est-à-dire d'envisager toutes les simplifications possibles) et d'être programmable.
Pour ce qui est des systèmes séquentiels, en tenant des paramétres dynamiques, et avec l'importante condition des seuils (critére inconnu pour la méthode d'HUFFMAN) VALLEE tente une formalisation de l'étude des systèmes séquentiels.
Des graphes séquentiels ont spécialement été imaginés pour permettre la séparation aisée de différentes classes de fonctions : fonctions de transcodage, fonctions réflexes et fonctions génératrices . Tout calcul de systèmes séquentiels d'aprés VALLEE consiste à faire apparaître ces fonctions là .
La méthode de VALLEE prend un intérêt pratique certain et satisfait le domaine technologique: les échantillonneurs aléatoires, les opérateurs numér[illegible]
[illegible]

-O-O-O-O-O-O-O-O-O-O-

Chap 1 - DEFINITIONS GENERALES.

11 - ENSEMBLE DE REFERENCE

12 - INTRODUCTION DU PRODUIT ET DU PRODUEL

13 - THEOREME de DE MORGAN

14 - 1 ére FORME CANONIQUE

15 - 2 éme FORME CANONIQUE

1 - DEFINITION

On considère un ensemble binaire. E ab ; cet ensemble est constitue de 2 élements logiques a et b qui s'exclent mutuellement.

Soit $\emptyset\ ab$ E ab si $\emptyset\ ab = a \Longrightarrow \emptyset\ ab \neq b$.
de même si $\emptyset\ ab = b \Longrightarrow \emptyset\ ab \neq a$.

DUALITE DES ENSEMBLE BINAIRES :

Soit une application : $E\ ab \longrightarrow E_{\alpha\beta}$
On peut envisager 2 relations :

1 er relation :

$(\emptyset\ ab = a) \Longleftrightarrow (\emptyset_{\alpha\beta} = \alpha)$; $(\emptyset\ ab = b) \Longleftrightarrow (\emptyset_{\alpha\beta} = B)$.

$$\boxed{(\beta - \alpha)\ (\emptyset\ ab - a) = (b - a) \cdot (\emptyset_{\alpha\beta} - \alpha)} \quad (1)$$

2 éme relation :

$(\bar{\emptyset}\ ab = a) \Longleftrightarrow (\emptyset_{\alpha\beta} = \beta)$; $(\bar{\emptyset}\ ab = b) \Longleftrightarrow (\emptyset_{\alpha\beta} = \alpha)$

$$\boxed{(\beta - \alpha)\ (\bar{\emptyset}\ ab - b) = (a - b)\ (\emptyset_{\alpha\beta} - \alpha)} \quad (2)$$

Avec $\emptyset_{\alpha\beta} \in E_{\alpha\beta} \Rightarrow \emptyset\ ab \in E\ ab$ et $\bar{\emptyset}\ ab \in$ Eab;
chaque bijection ne fait pas correspondre au même élément $\emptyset_{\alpha\beta}$ un même élement de l'ensemble Eab . C'est la raison pour laquelle 2 symboles differents $\emptyset$ ab et $\bar{\emptyset}$ ab ont été utilisés.
Si on additonne les 2 relations précédentes : on aboutit à une relation qu'on appellera RELATION DE DUALITE .

$$\boxed{(\emptyset\ ab + \bar{\emptyset}\ ab) - (a+b) = 0}$$

Cette relation de dualité résulte de l'automorphisme des ensembles binaires du fait du rôle symetrique que jouent les valeurs algébriques a et b.

$$(\emptyset\ ab - a) = (b - a)\ \emptyset\ 01$$

Relation évidante, si on remplace dans l'équation (1) =0 et = 1.

D'autre part $\emptyset\ 01 + \bar{\emptyset}\ 01 = 1$ $\quad (\emptyset\ ab - a) = (b - a)(1 - \bar{\emptyset}01)$

12 INTRODUCTION DU PRODUIT ET DU PRODUEL

1.21 - PRODUIT BINAIRE :

EO1 étant l'ensemble de référence $EO1 = \{0,1\}$
Soient n. fonction binaires $f1, \ldots\ldots, fi, fn$ avec $fi \in EO1$
$\forall i = 1, \ldots\ldots, n$

Définition :

On appelle produit binaire de n fonctions de n fonction binaires ; la fonction P telle que :

$$P = \prod_{i=1}^{i=n} fi = f1.f2.f3 \ldots\ldots fn \qquad P \in EO1$$

$P=1 \quad (f1=f_2=f3 \ldots\ldots =fn = 1)$

$P = 0$ dans tous les autres cas

2 éléments particuliers de E O1 : 0 et 1

0 : élément absorbant 1 : élement symétrique (ou neutre)

1.2.2 PRODUEL .

On va correspondre par dualité au produit binaire. La fonction algébrique :

$$= 1 - (1-f1)(1-f_2) \ldots\ldots;(1-fi)\ldots.(1-fn)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{i=n}(1-fi).$$

Le produel sera nul : $\top\!\!\top = 0$ si $\forall i = 1 \ldots\ldots n$; $fi = 0$

Dans tous les autres cas $\top\!\!\top = 1$

NOTATION DU PRODUEL :

$$\top\!\!\top = \left| \begin{array}{c} f_1 \\ \\ fi \\ \\ fn \end{array} \right| = 1 - \prod_{i=h}^{i=n}(1-fi).$$

..../....

13 - Application du Théorème de De MORGAN :

Si on fait la complementation du produel ; on obtient des complements du facteurs duals qui le composent .

$$1 - \quad \begin{vmatrix} f1 \\ \vdots \\ fi \\ \vdots \\ fn \end{vmatrix} = \overline{\begin{vmatrix} f1 \\ \vdots \\ f2 \\ \vdots \\ fn \end{vmatrix}} = \overline{f1}.\ \overline{f2}.\ \overline{fI}...\overline{fn} = (1-f1).(1-f2)..,(1-fi)...(1-fn)$$

Si on fait la complementation d'un produit ; on obtient le produel des complements des facteurs.

$$\overline{f1.\ f2.....fn} = \begin{vmatrix} \overline{f1} \\ \overline{f2} \\ \vdots \\ \overline{fi} \\ \vdots \\ \overline{fn} \end{vmatrix} = 1 - (f_1.f_2.f_I\ .....f_n) \quad = 1 -$$

1.31 Correspondance duales des proprietés élémentaires :

(Tableau)

Fonctions canoniques et tableau de verite :

Toute fonction binaire peut s'exprimer, soit par un produit de produels, soit par un produel de produits.

Soit F1 une fonction binaire qui dépend de n variables

Nous pouvons au total envisager 2 combinaisons.

F1 : La fonction binaire cherchée est égale à 1 pour les p combinaisons particulières de ces n variables; F = O pour les 2^n-p combinaisons restantes, et dans tous les cas $p < 2^n$.

..../....

1.4 DE FINITION DE LA 1ére FORME CANONIQUE

Elle correspond à un produel de produits.

Notons que le produel se distingue de la somme logique dans sa définition et son symbolisme.

$$F_1 = \left| \begin{array}{l} f1\ (x1,\ldots\ldots.xn) \\ \vdots \\ fi\ (x1,\ldots\ldots.xn) \\ \vdots \\ f_n\ (x1,\ldots\ldots.xn) \end{array} \right|$$

Pour F1 chacune des combinaisons de valeur des variables qui correspondent à la valeur unite de chacun des produits et pour les 2n restant $F_1=0$

1.5 DEFINITION DE LA 2 éme FORME CANONIQUE

Dans ce cas F1 est exprimé par un prduit de produels, appele par définition 2 éme forme canonique.

$$F1 = \left| f'1(x1,x2,\ldots..,xn) \right| . \left| f'2(x1,x2\ldots\ldots xn) \right| \ldots \left| f'_q(x1,x2,\ldots xn \right.$$

telque $\qquad q = 2h - p$

Chaque produel fait intervenir chaque variable ou son complement. Le produel f'_q pour une seule combinaison des variables qui intervient dans F1.

F1 = 0 pour chacune des combinaisons de valeurs des variables qui annulent successivement chacune de ses fonctions.

Pour une même fonction : On appelle transposition le passage de la 1 ére forme à la 2 éme forme et vice versa.

Exemple: Soit 4 variables x1,x2,x3,x4

cherchons le produit f = 1 pour cette combinaison x1.x2.x3.x4= : 1 0 0 1

$$f = x1.\overline{x2}.\overline{x3}.x_4.$$

Etablissons le produel correspondant à la précédent combinaison

$$f' = \left| \begin{array}{c} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{array} \right| = 0 \qquad f' = 1 - \prod_{i=1}^{i=4} (1-fi) = 0$$

.../....

15.1 ETABLISSEMENT DES 2 FORMES CANONIQUES

1.5.11 - Etablissement de la 1er forme :

On opère de la façon suivante : on inscrit horizontalement sous un ordre quelconque, puis on porte successivement sous ces variables dans le sens horizontal , la combinaison des valeurs pour laquelle à la fonction égale à 1

Exemple :

x1	x2	x3	f
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1

D'où l'ecriture de la 1er forme canonique.

$$f = \left| \begin{array}{ccc} x1 & \overline{x2} & \overline{x3} \\ \overline{x1} & x2 & \overline{x3} \\ \overline{x1} & \overline{x2} & x3 \end{array} \right|$$

15.12 - Etablissement de la 2 éme forme canonique :

La disposition se fait de la même façon mais verticalement.

$$f = \left| \begin{array}{c} \overline{x1} \\ x2 \\ x3 \end{array} \right| \begin{array}{c} x1 \\ \overline{x2} \\ x3 \end{array} \left| \begin{array}{c} x1 \\ x2 \\ \overline{x3} \end{array} \right|$$

15.2 **Présentation** des tables de vérite :

Avant d'entamer la transformation des formes canoniques ; on notera les différentes formes de présentation des tables de vérité qui sont :

a - Table de vérité complète
b - Table de vérité incomplète
c - Table de vérité réduite.

a) Table de vérité complète :

Une table de vérité est dite complète, si elle fait apparaître toutes les combinaisons des 2 n valeurs possibles.

b) Table de vérité incomplète :

La table de vérité est dans ce cas mise sous l'une des 2 formes canoniques, et seulement une seule. Elle englobe dans ce cas toutes les combinaisons possibles.

c) Table de vérité réduite :

.../...

c) Table de vérité réduite :

Ce sont des tables de vérité incomplêtes dans les quelles certaines combinaisons sont groupées afin de tenir compte d'une partie ou de la totalité des combinaisons

Elle n'est plus une représentation d'une forme canonique, mais une forme déjà simplifiée :

Exemple :

TABLE DE VERITE INCOMPLETE

	a	b	c	f
0	0	0	0	f = 1
4	1	0	0	
6	1	1	0	
7	1	1	1	

TABLE DE VERITE REDUITE

a	b	c	f
Ø	0	0	1
1	1	Ø	

15.3 Transformation des formes canoniques

- On entend par transformation des formes canoniques : des transpositions ou des complémentations.

15.3 1) Transposition :

C'est le passage d'une forme canonique à une deuxième forme canonique. La transposition d'une fonction de n variables requiert une table de vérité complète; avec les 2 n combinaisons.

Si une fonction binaire de "n" variables, mise sous la 1 ère forme canonique, contient "p" produit, elle doit contenir necessairement lorsqu'elle est transposée "q" produels (p + q = 2n)

La transposition est un moyen de simplification lorsque le nombre de produits ou produels est supérieure à 2 h - 1 .

..../...

15.3 2°) <u>Complémentations</u> :

Par application du théorème de DE MORGAN
Il suffit de remplacer chaque produel par un produit et réciproquement, en complementant chacune des variables.

<u>Exemple</u> :

$$f = \left|\begin{array}{c} x1 \\ \overline{x2} \\ \overline{x3} \end{array}\right|\begin{array}{c} \overline{x1} \\ x2 \\ \overline{x3} \end{array}\left|\begin{array}{c} \overline{x1} \\ \overline{x2} \\ x3 \end{array}\right| \qquad \overline{f} = \left|\begin{array}{c} \overline{x1} \cdot x2 \cdot x3 \\ x1 \cdot \overline{x2} \cdot x3 \\ x1 \cdot x2 \cdot \overline{x3} \end{array}\right|$$

Si la fonction ne se présente pas sous une forme canonique, la méthode de complémentation est identique et reste aussi simple dans son application.

$$f1 = a \left|\begin{array}{c} b \\ \overline{c} \cdot d \end{array}\right| \qquad \overline{f1} = \left|\begin{array}{c} \overline{a} \\ \overline{b} \left| \begin{array}{c} c \\ \overline{d} \end{array} \right. \end{array}\right|$$

$$f2 = \left|\begin{array}{c} \overline{x1} \left| \begin{array}{c} \overline{x2} \\ x3 \end{array} \right. \\ x2 \cdot x3 \end{array}\right| \qquad \overline{f2} = \left|\begin{array}{c} \overline{x2} \\ \overline{x3} \end{array}\right|\begin{array}{c} x1 \\ x2 \cdot \overline{x3} \end{array}\right|$$

.../...

- TABLEAU DES PROPRIETES COMPAREES DU PRODUIT ET DU PRODUEL -

PRODUIT

- $P = a.b.c.d$

- Elément Neutre " I "

- Elément Absorbant " 0 "

  Le produit par "0" de toute fonction " f " est nul: $0 \cdot f = 0$

  Toute fonction multipliée par "I" reste égale à elle-même: $(I.f) = f$

PRODUEL

$$-\prod = \left| \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \right| = I-(I-a)(I-b)(I-c)(I-d).$$

- Elément Neutre " 0 "

- Elément Absorbant " I "

  Le Produel par " I " de toute fonction " f " est égal à l'unité: $\left| \begin{array}{c} I \\ f \end{array} \right| = I$.

  Toute fonction multipliée dualement par "0" reste égale à elle-même : $\left| \begin{array}{c} 0 \\ f \end{array} \right| = f$.

THEOREME D'IDEMPOTENCE .

Si tous les facteurs d'un produit sont égaux, à un même terme le produit est égal à ce terme

$$- P = a.a. \ldots \ldots . a = a^n .$$

pour $a=0 \quad (0)^n = 0$.

pour $a=I \quad (I)^n = I$.

$$P = a^n = a .$$

Si tous les facteurs duals d'un produel sont égaux à un même terme, le produel est égal à ce terme .

$$- \prod = \left| \begin{array}{c} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{array} \right| = I-(I-a)^n.$$

pour $a=0 \quad = I-(I)^n = 0$.

pour $a=I \quad = I-(0)^n = I$.

$$\prod = a .$$

Si dans un produit, 2 facteurs sont complémentaires, le produit est nul.

$$P = f.\bar{f}.P_I .$$

$$P = f.(I-f).P_I = (f-f^2).P_I .$$

$$P = 0.P_I = 0 .$$

Si dans un produel, 2 facteurs duals sont complémentaires, le produel est égal à l'unité.

$$\prod = \left| \begin{array}{c} f \\ \bar{f} \\ \prod_I \end{array} \right| = I-(I-f).f.(I-\prod_I) .$$

$$= I-0.(I-\prod_I) = I .$$

$$= \left| \begin{array}{c} I \\ \prod_I \end{array} \right| = I.$$

COROLLAIRES .

Le produit de deux fonctions complémentaires est nul .

$$(f.\bar{f}) = 0 .$$

Le produel de deux fonctions complémentaires est égal à l'unité.

$$\left| \begin{array}{c} f \\ \bar{f} \end{array} \right| = I .$$

CHAP 2 - SIMPLIFICATION DES FONCTIONS BINAIRES

2.1 Mise en facteur et developpements

2.2 Simplifications élementaires

2.3 Méthodes générales. de simplification

2.4 Decompositions; Notions de fonctions carrées biformes

2.5 Simplification par la méthode des "CONSENSUS"

2.6 Simplification par adjacences

2.7 Simplification par transpositions mises en facteur et adjacences

2.8 Fonctions carrées.

But : Elimination et suppression des termes redondants.

Méthodes utilisées :

- Simplification par mise en facteur et developpements
- " par adjacences
- " par transpositions
- " par consensus

21 MISE EN FACTEUR ET DEVELOPPEMENTS

L'ensemble EO1 est un anneau commutatif automorphe. Les 2 lois algébriques de composition interne sont le produit et le produel.

Le produel est distributif par rapport au produit, et viee versa.
Ceci résulte de la propriété fondamentale de dualité

2.11 MISE EN FACTEUR DANS UN PRODUEL

$$F = \begin{vmatrix} \emptyset . f1 \\ \emptyset . f2 \end{vmatrix} = 1 - (1-\emptyset.f1)\ (1-\emptyset.f2) \Longrightarrow F = \emptyset \begin{vmatrix} f1 \\ f2 \end{vmatrix}$$

Identité :

$$\begin{vmatrix} \emptyset . f1 \\ \emptyset . f2 \end{vmatrix} = \emptyset \begin{vmatrix} f1 \\ f2 \end{vmatrix}$$

La "mise en facteur" est le passage de la 1 ére expression à la seconde, le passage inverse est le developpement.

L'indentité precédente peut être étendue dans un cas général

Supposons

$$F = \begin{vmatrix} \emptyset . f1 \\ \emptyset . f2 \\ \emptyset\ fq \\ \\ \emptyset . fn \end{vmatrix} \qquad \text{Avec } q \leqslant n$$

Notons par $P_1 = \emptyset\ f1$, $P2 = \emptyset f2$,.........$Pq = \emptyset\ fq$ ......

Appelons $P'I2 = \emptyset . \left| \begin{array}{c} f1 \\ f2 \end{array} \right|$ la fonction obtenue en mettant Ø en facteur.

$$\left|\begin{array}{c} \emptyset\ f1 \\ \vdots \\ \emptyset fq \\ \vdots \\ \emptyset fn \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \emptyset \left|\begin{array}{c} f1 \\ \vdots \\ fq \end{array}\right| \\ Pq+1 \\ \vdots \\ Pn \end{array}\right|$$

Ainsi se trouve prouver la relation de distributivité du produit par rapport au produel.

2.1.2 MISE EN "FACTEUR DUAL" dans un produit

Soit F la fonction telleque :

$$F = \left|\begin{array}{c} \emptyset \\ \\ f1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} \emptyset \\ \\ f2 \end{array}\right| \Longrightarrow F = \left|\begin{array}{c} \emptyset \\ \\ f1.f2 \end{array}\right|$$

En effet le developpement de "F" s'écrit

$$F = \left[1-(1-\emptyset).(1-f1)\right] . \left[1-(1-\emptyset).(1-f2)\right]$$

$$= 1-(1-\emptyset).(1-f1) - (1-\emptyset).(1-f2) + (1-\emptyset)^2 .(1-f1).(1-f2)$$

Or par idempotence $(1-\emptyset)^2 = (1-\emptyset)$

$$F = 1 - (1-\emptyset) . \left[(1-f1) + (1-f2) - (1-f1).(1-f2)\right]$$

$$= 1 - (1-\emptyset).(1-f1.f2) = \left|\begin{array}{c} \emptyset \\ \\ f1.f2 \end{array}\right|$$

La reciproque est ainsi demontrée.

Nous appelerons mise en facteur dual, le passage de la 1 ére expression à la seconde et "po uels effectués""ou developpement dual" le passage reciproque.

Par analogie, on demontre la distributivité du produel par rapport au produit.

.../...

$$\begin{vmatrix}\varnothing \\ \\ f1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\varnothing \\ \\ F2\end{vmatrix}\;.......\begin{vmatrix}\varnothing \\ \\ f_i\end{vmatrix}.\prod q+1 \ldots x \prod n = \begin{vmatrix}\varnothing \\ \\ f1\ldots i\end{vmatrix}\prod q+1 \ldots\ldots\ldots \prod n$$

2.2 SIMPLIFICATIONS ELEMENTAIRES

La propr été reciproque de distributivité des produits et produ: els, nous permet d'établir certains théorèmes relatifs à la simplifications des fonctions binaires.

2.2.1 SIMPLIFICATIONS PAR DEVELOPPEMENTS :

Par developpemnt d'une fonction binaire, on peut simplifiér une fonction binaire.
2 cas sont à considérés :

1 er cas :

$$\varnothing \cdot \begin{vmatrix} f \\ \\ A.\varnothing \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varnothing.f. \\ \\ A.\varnothing.\bar{\varnothing} \end{vmatrix} = \varnothing.f. \quad \text{et ceci } \forall A$$

Dans certains cas particuliers on a souvent A = 1

$$\begin{vmatrix} \varnothing & \\ f & \begin{vmatrix} B \\ \bar{\varnothing} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varnothing \\ f. \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \varnothing \\ \bar{\varnothing} \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varnothing \\ \\ f \end{vmatrix} \quad \text{en effet} \quad \begin{vmatrix} \varnothing \\ \bar{\varnothing} \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ B \end{vmatrix} = 1$$

Dans certains cas particuliers en a B = 0

2.2.2 IMPLICATIONS :

a)

$P = f1.f2.......fn = 1) \Longleftrightarrow (f1 = f2 = ...fi = fn = 1)$

Chaque facteur fi est appelé implicant directe ou implicant de la fonction P

D'où la conclusion suivante :

Toute fonction partielle pouvant être mise en facteur donnée, sera donc un implicant de cette dernière .
Cas du produel

.../...

$$\prod = \begin{vmatrix} f1 \\ f2 \\ fn \end{vmatrix} = 0 \iff f1=f2=\dots\dots fi = \dots\dots\dots fn = 0$$

chaque facteur fi est appelé dual

Toute fonction partielle pouvant être mise en facteur dual dans une fonction donnée sera par définition un implicant dual de cette dernière.

$F = \emptyset \quad \begin{vmatrix} \emptyset \\ f \end{vmatrix}$ comme O est un élement neutre (pour le produel) on peut écrire .

$$0 = \begin{vmatrix} \emptyset \\ 0 \end{vmatrix}$$

$F = \begin{vmatrix} \emptyset \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \emptyset \\ f \end{vmatrix}$ On peut mettre $\emptyset$ en facteur dual, nous obtenons

$$F = \begin{vmatrix} \emptyset \\ 0 ; f \end{vmatrix} = \emptyset$$

De même le produel, ayant pour facteurs duals en produit, et l'un de ses implicants s'écrit :

$$F' = \begin{vmatrix} \emptyset \\ \emptyset . f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \emptyset . 1 \\ \emptyset . f \end{vmatrix} = \emptyset \quad \begin{vmatrix} 1 \\ f \end{vmatrix} = \emptyset$$

2.2.3

b) Théorèmes :

Le produit d'une fonction binaireet de l'un quelconque de ses implicants duals, est égal à cet implicant dual.

$$\emptyset . \begin{vmatrix} \emptyset \\ f \end{vmatrix} = \emptyset$$

Le produel d'une fonction binaire et de l'un quelconque de ses implicants directs.

est égal à cet implicant $\quad \begin{vmatrix} \emptyset \\ \emptyset . f \end{vmatrix} = \emptyset$

DEMONSTRATION :

1 er cas :

$$\emptyset \begin{vmatrix} \emptyset \\ f \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & f \end{vmatrix} = 1 - (1-\emptyset-0)(1-\emptyset . f) = 1-1+f+\emptyset . f+\emptyset f = \emptyset$$

D'où $\quad \emptyset . \begin{vmatrix} \emptyset \\ f \end{vmatrix} = \emptyset$

../...

2 éme cas : Par analogie on démontre la 2 éme relation à savoir .

$$\begin{vmatrix} \emptyset \\ \emptyset .f \end{vmatrix} = \emptyset$$

2.2.3 ADJACENCES :

P1=$\emptyset$.f   P2 = $\bar{\emptyset}$ .f

P1 et P2 sont dits adjacents si l'on peut passer de l'un à l' l'autre en complementant l'un des facteurs seulement .

Π_1 , et $\Pi 2$ (2 produels) sont dits adjacents si l'on peut passer de l'un à l'autre en complementant l'un des facteurs duals.

2.2.31 THEOREMES :

Le produel de 2 produits adjacents est égal au facteur commun aux 2 produits

$$\begin{vmatrix} P1 \\ P2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \emptyset.f \\ \bar{\emptyset}.f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \emptyset \\ \bar{\emptyset} \end{vmatrix} .f = f$$

De même le produit de deux produels est égal au facteur dual commun aux deux produels

$$\Pi 1 . \Pi 2 = \begin{vmatrix} \emptyset \\ f \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\emptyset} \\ f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \emptyset \quad \bar{\emptyset} \\ f \end{vmatrix} = f$$

La fonction "$\emptyset$" est appelée "fonction adjacente" ou "variable adjacente", lorsqu'il s'agit d'une simple variable.

DEMONSTRATION :

1ée cas

$$\begin{vmatrix} P1 \\ P2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \emptyset.f \\ \bar{\emptyset}.f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \emptyset \\ \bar{\emptyset} \end{vmatrix} . f = f$$

$$= 1 - (1-\emptyset f)\ (1-\bar{\emptyset}.f) = 1- (1-\bar{\emptyset}f-\emptyset f+\underbrace{\emptyset.\bar{\emptyset}}_{0} f)$$

$$= 1 - 1 + \bar{\emptyset}f + \emptyset f = f\ \underbrace{(\emptyset+\bar{\emptyset})}_{1} = f$$

2 éme cas

Par analogie, on aboutit au même resultat.

.../...

2.3 METHODES GENERALES DE SIMPLIFICATION UTILISANT LA MISE EN FACTEUR

23.1 PRELIMINAIRE :

La mise en facteur est une opération pouvant être effectue en chaine (cascode); ceci est du à la commutativite du produit et du produel.

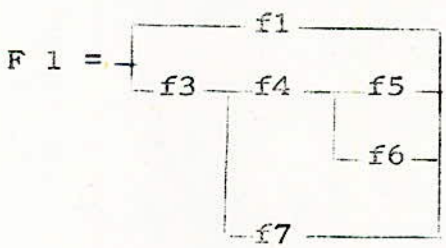
Exemple n° 1

Le schéma de disposition des facteurs duaux est le suivant :

F1 =

f1	F1	f1
f3	f4	f5
	f7	f6
		f7

- On constate que f1 apparait dans les 3 produels ; ainsi on peut opéré une mise en facteur dual de fi, f7 apparait dans 2 produels on peut le mettre en facteur



La 1 ére forme obtenue peut se réduire à la forme précédente.

On utilise les traits horizontaux, puisque les fonctions ne remplissent pas tout . L'expace exemple n° 2

F_2 =

F1 . f4 . f7

f1 . f5 .f6 . f7

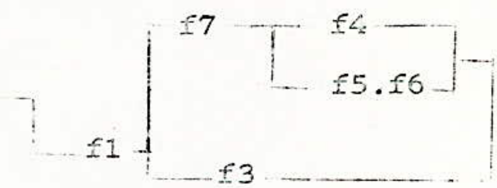
f1 .f3

.../...

- De même ci on constate aussi que F1 apparait en facteur direct direct des 3 produits on sort f1 du produel dans une 1é étape

- On met f3 en facteur direct des 2 produits où il apparait

$$F2 = f1 . \left| \begin{array}{c} f4 \;.\; f7 \\ f5 \;.f6 \;.f7 \\ f3 \end{array} \right| =$$



23.2 <u>PROCEDE POUR LA MISE EN FACTEUR</u>

Les produits et produels sont commuttatifs. On peut permutter les lignes ou les colonnes des fonctions binaires.

Pour un produit la mise en facteur peut s'éfectuer en partant ou de la droite ou de la gauche.

Pour un produel : opérer du haut vers le bas, ou du bas vers le haut.

Nous retiendrons que si pour un produit (respectivement du haut et du bas).
On introduit une solution étrangère.

Il est necessaire de verifier que la simplification obtenue correspond à un produit nul, pour pouvoir affirmer que la simplification n'a pas introduit de solution étrangère.

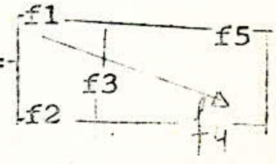
23.2 CAS DE SIMPLIFICATION, INTRODUISANT UNE SOLUTION ETRANGERE (NON NULLE)

<u>Preliminaire</u> :

Le trait vertical d'un produel quand il n'est pas en extremité, est équivalent au symbole d'un produit.

$$\left| \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right| = a.b.c$$

Soit la fonction = $F = \left| \begin{array}{c} f1.f5 \\ f2.f3.f5 \\ f2.f4 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} f1 \\ f2.f3 \\ f2\ f4 \end{array} \right| . f5 =$



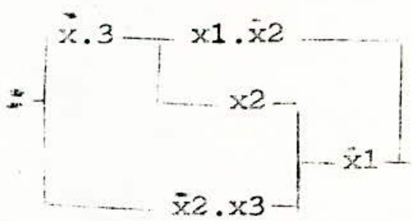
On opère une mise en facteur de f5 à droite, et une mise en facteur de f2 à gauche.

On effectue le produit suivant le sens de la flèche, à savoir f1,f5, puis f5.f̄3.f2. et f2.f.4.
Il ya apparition d'un 4 ème facteur f1.f3.f4 .Ce terme n'appartient pas à F.
<u>DONC ON NE PEUT EFFECTUER DE SIMPLIFICATION si f1.f3.f4. ≠ 0</u>

Conclusion : Si dans la simplification , il apparait un facteur n'appartenant pas à la fonction donnée au préalable. Ce facteur est donc étranger, et il faut s'assurer que ce facteur nul.

23.4 <u>Cas de simplification ; Introduisant une solution étrangère (nulle)</u>.

$$\left|\begin{array}{l} x1.\bar{x}2.\bar{x}3 \\ \bar{x}1.x2.\bar{x}3 \\ \bar{x}1.\bar{x}2.x3 \end{array}\right| =$$

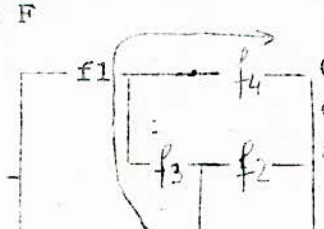


On fait apparaitre le produit x,x̄2,x2.x̄2.x3 qui est nul.Donc la solution étrangère introduite est nulle. La simplification est exacte.

2.3.5 <u>Amélioration de la simplification dans le cas où la solution particulière est redondante</u>

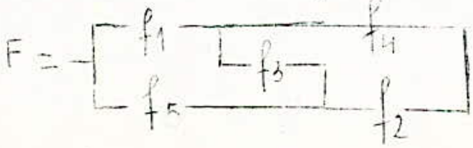
Supposons la fonction F

$$F = \left|\begin{array}{l} f1.f4 \\ f1.f2.f3 \\ f5.f2 \\ f5.f3.f4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l|l} f1 & f4 \\ & f2.f3 \\ f5 & f2 \\ f5 & f3.f4 \end{array}\right| =$$



On a mis f1 et f5 en facteur en faisant apparaître 2 produels.

On suivant les 2 flèches, il ya un terme redondant f5.f3.f4 on enleve carrément de terme là ce qui donne la simplification suivante.



On supprime le produit f3.f4 qui est en facteur dual de f2 sans que la fonction F soit modifiée. Dnas ce cas il n'existe pas de solutions étrangères.

NOTE : Des simplifications particuliers n'ont d'intrêt que pour les circuits utilisant une technologie où les instruments sont à commande isolée
(Relais - optoélectronique - transformateur)

Ce n'est pas le cas des circuits à base de semi conducteurs.

2.4 DECOMPOSITIONS : FONCTIONS CARREES BIFORMES

2.4.1 Définition : n° 1

Si une variable x intervient dans une fonction sous une forme binaire directe ou complémentée. On dit que cette fonction est mono-forme par rapport à x.

Exemple:

f1 .	x	et	$\bar{x}$ Ø 1
	f2		Ø 2

sont deux fonctions monoformes par rapport à x.

si et seulement si f1,f2,Ø1,Ø2 sont des fonctions indépendantes de x.

Définition n° 2

Une fonction biforme par rapport à x, c'est le cas d'une fonction f de la variable binaire x intervenant sous ses 2 formes directe et complementée (x et x)

Exemple

Ø 1 .	x	x	et	$\bar{x}$.f1
	f1	f2		x.f2
				Ø1

"x" ou "$\bar{x}$"

Dans le cas où est implicant direct d'une fonction f :f sera appelée produit monoforme de la variable x.

Définition n° 3

Une fonction est dite carrée, si elle comprend 4 termes groupés en carré suivant un produit de 2 produels d e 2 facteurs duals, ou suivant un produel de 2 produits de 2 foncteurs directs.

Ø.A	et	Ø	$\bar{Ø}$
$\bar{Ø}$.B		A1	B1

sont 2 fonction carrées biformes en Ø

NOTE : L'Algébre classique de BOOLE ne met pas en evidence, les particulières des fonctions carrées biformes qui ont une symétrie duale particulière et sont extrêmement utile pour la simplification des circuits de commutations.

2.4.2 Propriété des fonctions carrées biformes :

Toute fonction peut s'écrire sous la forme d'une fonction carrée biforme.

Exemple :

$$- f_1' \left| \begin{array}{c} x \\ f2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \bar{x}.x & x \\ f1 & f2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c|c} \bar{x} & x & x \\ f1 & f1 & f2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \bar{x} & x \\ f1 & f1.f2 \end{array} \right|$$

$$- \left| \begin{array}{c} \bar{x}.\emptyset 1 \\ \\ 1.\emptyset 2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \bar{x}.\ \emptyset 1 & \\ \bar{x} & \\ x & \emptyset 2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \bar{x} & \emptyset 1 \\ & \emptyset 2 \\ \multicolumn{2}{c}{x.\emptyset 2} \end{array} \right|$$

2 - Si une fonction carrée biforme se presente sous la forme d'un produit de produels c'est à dire $P = \left| \begin{array}{c|c} \emptyset & \bar{\emptyset} \\ A & B \end{array} \right|$

On peut l'écrire sous la forme de produel de produits

$$P = \left| \begin{array}{c} \emptyset.B \\ A.\bar{\emptyset} \\ A.B \end{array} \right|$$ puis en faisant apparaitre le produel $\left| \begin{array}{c} \emptyset \\ \bar{\emptyset} \end{array} \right| A.B \Big| = A.B$

$$P = \left| \begin{array}{cc} \emptyset.B & \\ A.\bar{\emptyset} & \\ AB & \left| \begin{array}{c} \emptyset \\ \bar{\emptyset} \end{array} \right. \end{array} \right|$$ en mettant Ø et Ø en facteur on aura. $$P = \left| \begin{array}{c|c} \emptyset & \begin{array}{c} B \\ A.B \end{array} \\ \bar{\emptyset} & \begin{array}{c} A \\ AB \end{array} \end{array} \right|$$

D'autre part nous savons que ;

$$\left| \begin{array}{c} B \\ AB \end{array} \right| = B \ ; \left| \begin{array}{c} A \\ AB \end{array} \right| = A \Longrightarrow P = \left| \begin{array}{c} \emptyset \cdot B \\ \bar{\emptyset} \cdot A \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \emptyset.B \\ \bar{\emptyset}.A \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \emptyset & B \\ A & \bar{\emptyset} \end{array} \right|$$

A paritr de ce resultat qui est un théorème fondamental, on va pouvoir établir la méthode des consensus.

2.4.3 Théoreme :

Une fonction carrée biforme; n'est pas modifiée par la suppression ou le tracé d'un trait vertical median, à condition de disposer les facteurs complementaires suivant une diagonale du carré correspondant à son expression symbolique

A et B sont appelés facteurs diagonaux de la fonction carrée biforme.

Interêt : Ce théorème nous assure le passage d'un produit à un produel et vice versa sans introduire le terme redondant.

2.5 SIMPLIFICATION PAR LES METHODES DES CONSENSUS

Prologne : Elle a été exposée pour la 1 érefois par T Bartee, et et mise au point de façon plus détaillée par P. TISON. Son fondement est "L'opération de consensus" si l'on considère 2 monomes booléens A_1 et A2 tels querespectivement:

$A1 = \alpha . a_1$ et $A2 = \bar{\alpha} . a2$ On appelle consensus de A1 et A2 le produit $a_1 . a2$

Posant alors $\mathcal{C} = a_1 . a2$ on voit que $\mathcal{C} \leq A_1 + A2$

Exemple : $A1=a.b.c$ $A2. = \bar{a}.\bar{b}.d$

$a_1 = \bar{b}c$ $a2 = \bar{b}d \Rightarrow a_1 . a2 = \bar{B}cd$

De cette propriété, on peut déduire la façon de procéder suivante : Soient 2 termes A et B d'une fonction booléénne. F, mise sous forme d'un produel des produits.

Le consensus de A et B est $\mathcal{C}$ On ne change rien à l'expression de celle-ci en lui ajoutant $\mathcal{C}$

25.2 DEFINITION n°1

On appelle consensus d'une fonction carrée biforme, le produit des termes diagonaux non complementaires.

DEFINITION N°2

On appelle"consensus dual" d'une fonction carrée biforme le produel du termes diagonaux non complementaires.

 .../...

$F = \begin{vmatrix} \emptyset \\ f2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f1 \\ \bar{\emptyset} \end{vmatrix}$ d'aprés le théorème fondamental: $\begin{vmatrix} \emptyset . f1 \\ \bar{\emptyset} . f2 \end{vmatrix} = F$

La fonction carrée biforme admet pour consensus le produit f1.f2 ; et pour consensus dual le produel $\begin{vmatrix} f1 \\ f2 \end{vmatrix}$

Formes diverses :

Soit $F = \begin{vmatrix} \emptyset . f1 \\ f2 . \bar{\emptyset} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \emptyset . f1 . f1 \\ f2 . \bar{\emptyset} . f2 \end{vmatrix}$ Ceci en introduisant : $\emptyset f1 . f1 = \emptyset f1$ et $f2 . \bar{\emptyset} . f2 = f2 . \bar{\emptyset}$.

du fait de lindempotence.

- En appliquant le théorème fondamental on a :

$$F = \begin{vmatrix} \emptyset \\ f2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f1 \\ \bar{\emptyset} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f1 \\ f2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \emptyset . f1 \\ f2 . \bar{\emptyset} \end{vmatrix}$$

- En procédant par produits effectués nous pouvons écrire.

$$F = \begin{vmatrix} \emptyset . f1 \\ f2 . \bar{\emptyset} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \emptyset \\ f2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f1 \\ \bar{\emptyset} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f1 \\ f2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \emptyset . f1 \\ f2 . \bar{\emptyset} \\ f2 . f1 \end{vmatrix}$$

Démonstration :

On considère la forme initiale qu'on developpe : soit

$(\emptyset + f2) . (f1 + \bar{\emptyset}) . (f1 + f2) = (\emptyset f1 + \emptyset \bar{\emptyset} + f2 f1 + f2 \bar{\emptyset}) . (f1 + f2)$

$= \emptyset . f1 . f1 + \emptyset f1 . f2 . + f1 . f1 . f2 + f2 . \bar{\emptyset} . f1 + f2 + f2 \bar{\emptyset} + f2 . f2 . f1$

On applique la régle d'idempotence :

$= \emptyset . f1 + \emptyset f1 . f2 + f2 + f1 + f2 . f1 + f2 . f1 \bar{\emptyset} + f2 \bar{\emptyset}$

$= \emptyset f1 + f2 \bar{\emptyset} + f2 . f1$

Le developpement fait donc apparaitre le terme f2.f1
Sous sa forme developpée F s'écrit $F = \emptyset . f1 + f2 \bar{\emptyset} + f2 . f1$

C'est à dire

$$F = \begin{vmatrix} \emptyset . f1 \\ f2 . \bar{\emptyset} \\ f1 . f2 \end{vmatrix}$$

 .../...

25.3 Théoremes :

nº 1 : Si parmi les facteurs d'un produit, il existe une fonction carrée biforme et un terme redondant en facteur dual, le consensus dual de cette fonction, ce dernier terme est redondant et peut être supprimé.

nº 2 : Si parmi les facteurs duals d'un produel, il existe une fonction carrée biforme et un terme redondant en facteur, ce dernier terme est redondant et peut-être supprimé car c'est le consensus de cette fonction.

Exemples : nº 1

$$F_2 = \left| \begin{array}{l} \emptyset.f1 \\ f2.\bar{\emptyset} \\ .\ . \end{array} \right| \begin{array}{l} k \\ f1 \\ f2 \end{array} \left| . f_3 \ .... fn \right.$$

Posons f3x.....xfn= Pk

On peut écrire F2 sous la forme suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \emptyset.f1 \\ f2.\bar{\emptyset} \end{array} \right| \begin{array}{l} k \\ f1 \\ f2 \end{array} \left| \ ... \ P_k \right.$$

On effectue le developpement du produel des 2 produits

soit :

$$(\emptyset f1+f2\bar{\emptyset})(k+f1+f2) = \emptyset f1.k+\emptyset f1+\emptyset f1.f2+f2\bar{\emptyset}k+f2f1\bar{\emptyset}+f2\bar{\emptyset}$$

$$= \emptyset f1 + f1.f2+f2.\bar{\emptyset}$$

Soit la forme $\left| \begin{array}{l} \emptyset.f1 \\ f2.\bar{\emptyset} \\ f1.f2 \end{array} \right|$ Le produit f1.f2 est un impliquant dual, donc on peut le supprimer

finalement on a :

$$\left| \begin{array}{l} \emptyset.f1 \\ f2.\bar{\emptyset} \end{array} \right| .Pk = \left| \begin{array}{l} \emptyset.f1 \\ f2.\bar{\emptyset} \end{array} \right| .f3.x.........xfn.$$

Exemple nº 2

..../...

$$\left|\begin{array}{c} \emptyset.f1 \\ f2.\bar{\emptyset} \\ k.f1.f2 \\ f3 \\ \vdots \\ fn \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \emptyset.f1 \\ f2.\bar{\emptyset} \\ f2.f1 \\ k.f1.f2 \\ f2 \\ \vdots \\ fn \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \emptyset.f1 \\ f2.\bar{\emptyset} \\ f2.f1 \\ f3 \\ \vdots \\ fn \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \emptyset.f1 \\ f2.\bar{\emptyset} \\ f3 \\ \vdots \\ fn \end{array}\right|$$

25.4 REGLES GENERALES DES/"CONSENSUS"

On se donne une fonction carrée biforme $F = \left|\begin{array}{c} \emptyset \\ f1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} f2 \\ \bar{\emptyset} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \emptyset.f2 \\ f1.\bar{\emptyset} \end{array}\right|$

1°) le consensus f1.f2 mis sous **la forme** d'un produel de produits, traduit lorsque un de ces produits apparait en facteur dans un ferme facteur dual de "F" une condition suffisante pour affirmer que ce terme est redondant et peut être supprimé.

2°) Le consensus dual $\left|\begin{array}{c} f1 \\ f2 \end{array}\right|$ mis sous la forme d'un produit de produels traduit-lorsque un de ces produels apparait en facteur de "F" une condition suffisante,
Pour affirmer que ce terme est redondant et peut être supprimé.

On va considérer 2 cas :

1 er cas : le consensus de la fonction carrée biforme F est mise sous forme d'un produel de "q" produits $p+q = 2^n$.

Le consensus de la fonction carrée biforme étant **f1**.f2

$$f1.f2 = \left|\begin{array}{c} PI \\ \vdots \\ PK \\ \vdots \\ Pq \end{array}\right| \quad 1 \leqslant k \leqslant q$$

2 éme cas : Si le cosensus dual est mis sous la forme d'un produits de "2" produels

$$\left|\begin{array}{c} f1 \\ \\ f2 \end{array}\right| = \Pi_1 . \Pi_2 .. \Pi_j .... \Pi_r$$

 ..../....

Si la fonction "F" est un facteur dual de la forme "A.Pk" ce terme est redondant, on peut écrire dans ce cas.

$$\begin{vmatrix} F \\ A.PK \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F \\ f1.f2 \\ A.Pk \end{vmatrix} \quad \text{On remplace f1xf2 par f1xf2} = \begin{vmatrix} P1 \\ \vdots \\ PK \\ \vdots \\ Pq \end{vmatrix}$$

Soit :

$$\begin{vmatrix} F \\ A.pK \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F \\ P1 \\ P2 \\ \vdots \\ PK \\ \vdots \\ Pq \\ \vdots \\ A.PK \end{vmatrix}$$

PK est un implicant de "$A.p_K$" , et il est en facteur dual

$$\text{OR} \begin{vmatrix} Pk \\ A.pK \end{vmatrix} = Pk \Longrightarrow \begin{vmatrix} F \\ f1.f2 \\ A.p_K \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F \\ f.f2 \end{vmatrix} = F$$

25.5 EXEMPLE DE SIMPLIFICATION PAR CONSENSUS

Soit F1 la fonction donnée par le produel de produits, on constate que dans le 1 er facteur de F1, il ya 2 variables bifàrmes "C" et "A" on peut faire apparaître des fonctions carrées biformes suivantes :

..../...

$$F_1 = \begin{array}{|c|c|} B.C.F. & \\ D.\bar{C}.F & D \\ D.B.E & B \\ A.\bar{C} & \bar{C} \\ D.\bar{A} & \bar{F} \\ A.B & \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|c|} B.C.F. \\ \begin{array}{c|c} DF & \\ & \bar{C} \\ A & \end{array} \end{array} \text{ et } \begin{array}{|c|} \begin{array}{c|c} A\ . & \bar{C} \\ & B \end{array} \\ D.\bar{A} \end{array}$$

Ces 2 fonctions carrées biformes admettent respectivement pour consensus. :

(1) $\begin{array}{|c|} D.B.F. \\ A.B.F \end{array}$ (2) $\begin{array}{|c|} D.\bar{C} \\ D.B \end{array}$

Détermination des consensus duals :

$$\begin{array}{|c|c|} A & \\ D & A \\ F & F \end{array} \qquad \begin{array}{|c|} D \\ B \\ \bar{C} \end{array}$$

Si on considère les consensus de 2 fonctions carrées biformes, on peut supprimer les termes $D.\bar{C}.F$ et $D.B.E$ on peut donc écrire la fonction F1

$$F_1 = \begin{array}{|c|c|} B.C.F & D \\ A.\bar{C} & B \\ D.\bar{A} & \bar{C} \\ A.B & \bar{F} \end{array}$$

Si On met A en facteur: $F_1 = \begin{array}{|c|c|} B.C.F & D \\ D.\bar{A} & B \\ \begin{array}{c|c} \bar{C} & A \\ B & \end{array} & \begin{array}{c} \bar{C} \\ \bar{F} \end{array} \end{array}$

en tenant compte de la fonction carrée biforme en "A" on a le consensus $\begin{array}{|c|} D.\bar{C} \\ D.B \end{array}$ qu'on peut introduire dans le 1 er produel de F1

On aura la forme suivante :

$$F_1 = \left|\begin{array}{l} A \\ \\ D \\ B.C.F \end{array}\right|\begin{array}{c} \bar{C} \\ B \\ \bar{A} \\ \\ \end{array}\left|\begin{array}{c} D \\ B \\ \bar{C} \\ \bar{F} \end{array}\right|$$ Le 3 ème produel $\left|\begin{array}{c} D \\ B \\ \bar{C} \\ \bar{F} \end{array}\right|$ contient le consensus dual $\left|\begin{array}{c} D \\ B \\ \bar{C} \end{array}\right|$

On peut donc le supprimer.

$$F_1 = \left|\begin{array}{l} A \\ D \\ \\ B.C.F \end{array}\right|\begin{array}{c} \bar{C} \\ B \\ \bar{A} \\ \\ \end{array}\Bigg| = \left|\begin{array}{l} A.\bar{C} \\ D.B \\ D.\bar{A} \\ D.C.F \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} A \\ D \\ BCF \end{array}\right|\begin{array}{c} \bar{A} \\ B \\ \bar{C} \end{array}\Bigg| = \left|\begin{array}{c} A \\ D \\ B \end{array}\right|\begin{array}{c} A \\ D \\ C \end{array}\left|\begin{array}{c} A \\ D \\ F \end{array}\right|\begin{array}{c} \bar{A} \\ B \\ \bar{C} \end{array}\Bigg|$$

2-6 SIMPLIFICATION PAR ADJACENCES

La méthode du diagramme de KARNAUGH utilise les adjacences comme mode de recherche des implicants. La méthode des mises en facteurs et celle des consensus la complètent utilement :

Exemple de 4 variable :

On se donne une fonction de 4 variables A,B,C,D qui sera égale à 0 pour les combinaisons (0011) , (0111),(1000),(1001),(1110), (1111)

AB \ CD	00	01	11	10
00			0	
01			0	
11			0	0
10	0	0		

A	B	C	D	F
0	Ø	1	1	0
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~Ø~~	~~0~~
1	1	1	Ø	0

On obtient : $F = \left|\begin{array}{c} A \\ \bar{C} \\ \bar{D} \end{array}\right|\begin{array}{c} \bar{A} \\ B \\ C \end{array}\left|\begin{array}{c} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{array}\right|$

.../...

On peut aussi utiliser les combinaisons adjacentes par les 1
Exemple de 5 variables.

On se donne une fonction de 5 variables x5,x4,x3,x_2,x1 et on leur fait correspondre les puissances de 2, des nombres binaires associés.

Il est demandé d'écrire la fonction binaire "F" égale à l'unite pour les combinaisons 1-3-7-8-10-12-17-20

Les combinaisons disponibles sont les suivantes : 0-5-6-9-11-14-16-18-21-22

x3x2x1 / x5 x4	000	001	011	010	110	111	101	100
00	Ø	1	1		Ø	1	Ø	
01	1		Ø	1	Ø			1
11								
10	Ø	1		Ø	Ø		Ø	1

TABLE DE VERITE

	x5	x4	x3	x2	x1	F
1.3.7.5	0	0	Ø	Ø	1	1
8.10.12.14	0	1	Ø	Ø	0	1
16.17.21.20	1	0	Ø	0	Ø	1

$$F = \left| \begin{array}{l} \bar{x}5.\bar{x}4;x1 \\ \bar{x}5.x4.\bar{x}1 \\ x5.\bar{x}4.\bar{x}2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \bar{x}5 \left| \begin{array}{l} \bar{x}4.\bar{x}1 \\ \bar{x}1.x4 \end{array} \right. \\ \bar{x}4.x5.\bar{x}2 \end{array} \right|$$

.../...

On applique le théorème fondamental.

$$F = \left|\begin{array}{l|l|l} \bar{x}5 & x1 & \bar{x}4 \\ & x4 & \bar{x}1 \\ \multicolumn{3}{l}{\bar{x}2.x5.\bar{x}4} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} \bar{x}5 & x1 & \bar{x}1 & \bar{x}4 \\ & x4 & \bar{x}4 & \bar{x}5 \\ \bar{x}2 & x5 & x5 & \end{array}\right|$$

On peut de la même façon opérer pour les zéros de la fonction.

2.7 SIMPLIFICATIONS PAR TRANSPOSITIONS, MISES EN FACTEURS ET ADJACENCES

La méthode qui suit pour la simplification des fonctions binaires, réunit les 3 moyens exposés précédemment à savoir. La transposition, la mise en facteur, et l'adjacence.

2.7.1 CAS GENERAL :

Une forme canonique est en général une fonction carrée biforme, lorsque l'une des variables a été mise en facteur partielle (La mise en facteur partielle correspond à une disjonction)

$$F(x1,x2,\ldots.xi,\ldots xn) = \left|\begin{array}{l} xi \ . \ G \\ H. \ \bar{x}i \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} xi & G \\ H & \bar{x}i \end{array}\right|$$

IMPORTANT : Si f est une fonction canonique "H" et "G" qui sont determinées à partir de F sont également des fonctions canoniques qui ne contiennent plus la variable x_i

$$G = G\ (x1,\ldots\ldots xi-1,xi+1,\ldots\ldots xn)$$

$$H = H\ (x1,\ldots\ldots xi-1,xi+1,\ldots\ldots xn)$$

H et G sont aussi des fonctions carrées biformes, les fonctions diagonales residuelles sont toujours des fonctions canoniques sur lesquelles on peut encore effectuer des transpositions.

P : Nombre de produits ou produels

n : Nombre de variables indepependantes

alors P.n represente le nombre total des variables litterales qui apparaissent dans la fonction.

Le nombre total de variables litterales qui apparaissent aprés la mise en facteur partielle de la variable xi est égale à

p (n-1)+2 si xi est une variable biforme

$p\,(n-1)+1$ si xi est une vairable monoforme.

Une fonction Binaire peut être simplifié, en opérant succesivement des mises en facteurs partielles, des transpositions et des réductions par adjacences.

Supposons en effet que la fonction des "n" variables F (x,x2,x3,.......xn) elle contient p termes avec $p = 2^{n-1}-m$ (m entier positif, $m < 2^{n-1}$).

Cette fonction partielle de la variable binaire xi
De cette manière, les 2 fonctions diagonales "H" et "G" contiennent p0 et p1 termes (produits ou produels")
Dans ce cas ou peut écrire $p0+p1 = 2^{n-1} - m$

p0 et p1 contiennent chacun (n-1) variables (x1,x2....xi;xi+1.. ....xn)

1 er cas : SI $p0 < 2^{n-2}$ et $p1 < 2^{n-2}$

- On ne peut effectuer aucune transposition.

Seulement s'il existe a telque $a < p0$ et $a < p1$

(a étant le nombre d'adjacences relatives à la variable "xi" c'est à dire un nombre "a" de termes communs à "H" et "G")

On peut dans ce cas opérer une simplification par adjacences

Le nombre total réduit des variables sera :

$N1 = (p-a)(n-1)+2$ si p1 et $p0 \neq 0$

Si $N1 = p(n-1)+1$ dans le cas où "xi" est monoforme et où l'une des valeurs p0 ou p1 est nulle ainsi que a.

La simplification par adjacence relative à la variable "xi" aprés mise en facteur partielle, fournit donc une réducation de variables : telleque.

$$\Delta N1 = P\,(n-1) + 2 - 2 - (p-a)(n-1)$$

$$\Delta N1 = a\,.\,(n-1)$$

.../...

2 ème cas : SI $p0 > 2^{n-2}$ $(p0 = 2^{n-2}+k \quad k > 0)$ $\quad k < 2^{n-2}$

Dans ces conditions, la fonction diagonale "H" qui comprend $po = 2^{n-2}+k$ termes peut être transposée.

Nombre de termes, aprés transposition $p2 = 2^{n-1} - po = 2^{n-2}-k$

Détermination du nombre total des variables litterales apparaissant dansF simplifiée :

$N2 = (P2+P1)(n-1)+2$ $\quad$ si xi est biforme

$N2 = p2\ (n-1)+1$ $\quad$ si xi est nomoforme

La simplification par transposition aprés mise en facteur partielle de la variable xi fournit donc une réduction des variables égale :

$$\Delta N2 = p(n-1)+2 - (p2+p1)(n-1) - 2$$

$$= (p0-p2)\ (n1)$$

Soit $\Delta N2 = 2\ k\ (n-1)$

$\Delta N2$ sera maximal ; lorsque k est maximal , et si on considére le module de p0-p1 on a :

$$|p0-p1| = |2p0-(p0+p1)| = |2p0-p| = |2(2^{n-2}+k) - 2^{n-1}+m| = |2k+m|$$

En conclusion on a :

La simplification optimale par transposition sera obtenue

- Si on fait une mise en facteur partielle par rapport à l'une des variables.
- Si on fait une mise en facteur de la variable pour laquelle

$|p0 - p1|$ est maximal

Théorème : soit une fonction binaire mise sous forme canonique simplifiée par mise en facteur partielle d'une variable; suivie d'une reduction par transposotion.

La simplification est optimale si $|p0-p1|$ est maximal

p0 : nombre de fois que la fonction est écrite sous forme directe (avant mise en facteur)

p1 : nombre de fois que la fonction est écrite sous forme complementée (avant mise en facteur)

.../...

2.7.2 Méthode Pratique :

On simplifie l'étude faite dans le cas général par le procédé suivant :

- On écrit la fonction sous forme canonique(si elle ne l'était pas)

- On la transpose : si le nombre de produits ou produèls est supérieur à 2^{n-1}
  (n : nombre de variables)

- Pour chaque variable, on calcule le module $|p0-p1|$

- On écrit la fonction carrée biforme relative à xi qui correspond à Max $|p0-p1|$

- On détermine le nombre "a" de termes communs aux fonctions diagonales.

  H et G de la fonction carrée biforme F

- Si H et G ne sont pas reductibles par transposition, on simplifie dans ce cas par adjacences en écrivant .

$$\left|\begin{array}{l} xi \,.\, H1 \\ G1.\bar{x}i \\ \quad J1 \end{array}\right| \quad \text{où} \quad \left|\begin{array}{c|c} xi & H1 \\ G1 & \bar{x}i \end{array}\right| . \ K1$$

J1 et K1 representent le produit ou le produel des termes communs ; à H et G .

- Si l'une des fonctions diagonales "H" ou "G" est réductible par transposition(le nombre de terme de H ou G = $2^{n-2}+k$) On calcule k que l'on compare au nombre d'adjacences "a"

  - Si $2k \leqslant a$ on procéde comme avant
  - Si $a < 2k$ on transpose "H" ou "G" selon le cas, mais on écrit H1 ou G1 et "J1" ou "K1" en tenant compte des adjacences.

En appelant "Ht" la fonction transposée de "H" $(H_t = H)$

On obtient selon le cas :

$$\left|\begin{array}{l} xi \,.\, ht \\ G1 \,.\, \bar{x}i \\ \quad J_1 \end{array}\right| \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{c|c} xi & Ht \\ G1 & \bar{x}i \end{array}\right| . \ K_1$$

.../....

On continue la simplification en repêtant les mêmes opérations pour les fonctions canoniques Ht,H1,G1,J1 ou K1 jusqu'à **épuis**ement du nombre des variables.

2.73 EXEMPLES D'APPLICATION:

Simplication de la fonction F(a,b,c,d)=1 pour les combinaisons de ces 4 variables 2-3-4-5-6-7-7-9-10-12-13

- La fonction éxrite sous la 1 ére forme canonique, comprendrait dix produits, alors que le nombre total de combinaisons de valeurs des 4 variables est : 2^4 = 16

- On choisit de simplifier par transposition en écrivant la fonction sous la 2 éme forme canonique (combinaisons complémentaires (16-10=6) pour 0-1-8-11-14-15

TABLE DE VERITE.

d	c	b	a	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

$$\text{Soit } F = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} d & d & \bar{d} & \bar{d} & \bar{d} & \bar{d} \\ c & c & c & c & \bar{c} & \bar{c} \\ b & b & b & \bar{b} & \bar{b} & \bar{b} \\ a & \bar{a} & a & \bar{a} & a & \bar{a} \end{array} \right|$$

1e étape :

Calcul des modules $|p0-p1|$:

pour "a" $|p0-p1| = 0$

pour "b" $|p0-p1| = 0$

pour "c" $|p0-p1| = 2$

pour "d" $|p0-p1| = 2$

On peut donc mettre "c" ou "d" en facteur dual.

.../...

2 éme étape : Recherche des adjacences :

Etablissons la fonction carrée biforme en "d"

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{d} & \multicolumn{4}{c}{\bar d}\\ a & \bar a & a & \bar a & a & \bar a \\ b & b & b & \bar b & \bar b & \bar b \\ c & c & c & c & \bar c & \bar c\end{array}\right|$$

Nous constatons qu'il existe une adjacence (indiquée pas la flèche) mais que les fonctions diagonales ne sont pas susceptibles d'être simplifiés par transposition.

Nous écrirons donc :

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} a & d & \bar a & a & \bar a \\ b & \bar a & \bar b & \bar b & \bar b \\ c & b & c & \bar c & \bar c \\ & c & \multicolumn{3}{c}{\bar d} \end{array}\right|$$

Nous constatons que $\bar b$ apparait dans les 3 produels de la fonction diagonale, donc $\bar b$ peut être mis en facteur dual.

$$\text{soit} \left|\begin{array}{c|c|c} \bar a & a & \bar a \\ \bar b & \bar b & \bar b \\ c & \bar c & \bar c \end{array}\right| = \;\; = \left|\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{3}{c}{\bar b} \\ \bar a & a & \bar a \\ c & \bar c & \bar c \end{array}\right|$$

Dans la fonction resultante, on peut simplifier par transposition soit :

$$\left|\begin{array}{c|c|c} \bar a & a & \bar a \\ c & \bar c & \bar c \end{array}\right| = \overline{\left|\begin{array}{c} a \\ c \end{array}\right|} = \bar a . \bar c$$

Finalement on a :

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c} a & d & \bar b \\ b & \bar a & \bar a . \bar c \\ c & b & \bar d \\ & c & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} ad & \bar b \\ c & \bar a . \bar c \\ b & \bar d \end{array}\right|$$

AUTRE METHODE PRATIQUE : Opérée directement sur la table verite.

Adjacence relative à "c" → 11, 14, 15

	d	c	b	a	F
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
8	1	0	0	0	0
11	1	0	1	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0
Valeurs de $\lvert p_0 - p_1 \rvert$	2	2	0	0	

Valeur choisie pour la mise en facteur dual.

- On prend "c" comme factuer dual.

$$F = \begin{vmatrix} c & \bar{c} \\ Ø1 & Ø2 \end{vmatrix} \times C1$$

C1 correspond à une seule adjacence et s'écrit $\begin{vmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{d} \end{vmatrix} = C_1$

"$Ø_1$" et "Ø2" ne se simplifient pas par transposition, et nous pouvons établir aprés reduction par adjacence. Les tables de verite incompletes suivantes :

	d	b	a	Ø1
9	0	0	0	0
1	0	0	1	
8	1	0	0	
$\lvert p_0 - p_1 \rvert$	1	3	1	

Valeur à mettre en facteur dual

	d	b	a	Ø2
14	1	1	0	0

Nous tirons de ces tables $Ø1 = \begin{vmatrix} b \\ Ø3 \end{vmatrix}$ et $Ø2 = \begin{vmatrix} a \\ \bar{b} \\ \bar{d} \end{vmatrix}$

La fonction "Ø3" peut être simplifiée par transposition puisqu'elle fait apparaitre 3 combinaisons distincts de 2 variables "a" et "d" alors qu'on a $2^2 = 4$ au total

.../...

d	d	Ø3
1	1	1

; $\emptyset_3 = a.d$ donc $F = \left|\begin{array}{c|c|c} b & a & \bar{a} \\ c & \bar{b} & \bar{b} \\ a;d & \bar{c} & \bar{d} \\ & \bar{d} & \end{array}\right|$

Aprés mise en facteur dual de $\left|\begin{array}{c} \bar{b} \\ \bar{d} \end{array}\right|$ nous obtenons :

$$F = \left|\begin{array}{c|c} b & \bar{b} \\ c & \bar{d} \\ a;d & \bar{a};\bar{c} \end{array}\right| \quad (1) \qquad F = \left|\begin{array}{c|c} b\,. & \begin{array}{c} \bar{d} \\ \bar{a};\bar{c} \end{array} \\ \bar{b}\,. & \begin{array}{c} c \\ a;d \end{array} \end{array}\right| \quad (2)$$

La forme (2) a été obtenue à partir de (1) en utilisant les fonctions carrées biformes.

CONCULSION:

Il résulte de l'étude, que les formes de produits de produits ou vice versa, correspondent rarement à des formes optimales relativement aux variables litterales .

Dans notre cas :

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c|c} a & b & \bar{a} & \bar{b} \\ b & c & \bar{b} & \bar{c} \\ c & d & \bar{d} & \bar{d} \end{array}\right| \quad \text{et } F = \left|\begin{array}{c} \bar{b}.c \\ a;\bar{b}d; \\ \bar{a};b;\bar{c} \\ b;\bar{d} \end{array}\right|$$

Comprennent respectivement 12 et 10 variables litterales.Elles ne sont pas optimales, puisque par mise en facteur partielle nous pouvons la reduire à 8 variables.

Donc une optimisation poussée passe d'abord par la Connaissance approfondie des fonctions binaires et aussi de leurs applications technologiques/...

2.8 FONCTIONS CARREES

Prologue : La propriete des fonctions carrées biformes qui permet de passer trés simplement d'un produit à un produel on vice versa, peut s'étendre à toute fonction carrée sous certaines conditions.

- Recherche des conditions générales

$$F = \begin{vmatrix} f1 & f2 \\ f4 & f3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} f1 \cdot f2 \\ f4 \cdot f3 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Cette identite mise sous forme algébrique s'écrit

$$F = 1 - (1 - f1.f2)\ (1 - f4f3)$$

$$\Longrightarrow \quad f1.f3(1-f2)(1-f4) + f2.f4(1-f1)(1-f3) \equiv 0$$

Théoreme :

L'identite (1) sera verifiée si et seulement si :

$f1.f3 \quad \bar{f2} \, . \, \bar{f4} = 0$ et $f2.f4.\bar{f1}.\bar{f3} = 0$

Si on choisit des solutions sous la forme :

$f1 = f2$, $f1 = f4$, $f3 = f2$, $f3 = f4$

Elle conduisent à des mises en facteur direct on dual simples

$(f1.f3 \equiv 0 \ , \quad \bar{f1}.\bar{f3} \equiv 0) \Longleftrightarrow (f1 \equiv \bar{f3})$

$(f2.f4 \equiv 0 \ , \quad \bar{f2}.\bar{f4} \equiv 0) \Longleftrightarrow (f2 \equiv \bar{f4})$

Parmi les solutions possibles on a aussi

$f1.f3 \equiv f2.f4 \equiv 0$

et $\bar{f1}.\bar{f3} \equiv \bar{f2}.\bar{f4} \equiv 0$ Soit $\begin{vmatrix} f1 \\ f3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} f2 \\ f4 \end{vmatrix} \equiv 1$

Si dans une fonction binaire mise sous forme carrée, le produits des termes diagonaux sont nuls, ou leurs produels égaux à l'unite.

on peut écrire : $\begin{vmatrix} f1 & f2 \\ f4 & f3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f1 \cdot f2 \\ f4 \cdot f3 \end{vmatrix}$

w.../...

Les conditions précédentes sont en particuliers verifiée lorsque :

$f1 = Ao.\emptyset O$,, $f2 = A1.\emptyset 1$, $f3 = Bo.\bar{\emptyset}o$ et $f4 = B1 \cdot \bar{\emptyset}1$

où $f1 = \left|\begin{matrix} Ao \\ \emptyset o \end{matrix}\right|$, $f2 = \left|\begin{matrix} A1 \\ \emptyset 1 \end{matrix}\right|$, $f3 = \left|\begin{matrix} Bo \\ \bar{\emptyset}o \end{matrix}\right|$, $f4 = \left|\begin{matrix} B1 \\ \bar{\emptyset}1 \end{matrix}\right|$

Celà entraine differentes égalites qu'il est interéssant d'utiliser au cours de simplification telles les égalites suivantes :

$$\left|\begin{matrix} \emptyset o.a1.a2 \ldots\ldots\ldots\ldots ap \;\; \bar{\emptyset}1 \\ \emptyset 1.b1.b2 \ldots\ldots ;bq.\bar{\emptyset}o = \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} \emptyset_o.a1.a2 \ldots ai \\ \emptyset 1.b1.b2 \ldots bj \end{matrix}\right| \begin{matrix} ai+1 \ldots\ldots ap\bar{\emptyset}1 \\ bj+1 \ldots\ldots bq \; \bar{\emptyset}O \end{matrix}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c|c} \emptyset o & \emptyset 1 \\ a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ ap & bq \\ \bar{\emptyset}1 & \bar{\emptyset}o \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \emptyset o & \emptyset 1 \\ a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ \vdots & \vdots \\ ai & bj \\ ai+1 & bj+1 \\ \vdots & \vdots \\ ap & bq \\ \bar{\emptyset}1 & \bar{\emptyset}O \end{array}\right|$$

Les produits et les produels étant commutatifs, les permutation respectives des facteurs ou des facteurs duals donnent d'autres égalites de même forme à condition d'écrire toujours des termes complementaires aux extremites des diagonales des fonctions carrées.

FONCTIONS MAJORITEES

CHAP.3.

31. DEFINITION

L'exemple général que nous allons traiter a pour but de montrer surtout la marche à suivre dans l'étude d'un probleme particulier.

Etant donnée "N" variables distinctes et "P" un nombre entier inférieur ou égal à N. On appelle fonction majorité, une fonction binaire des "N" variables qui prend la même valeur logique (0 ou 1) lorsque le nombre des variables qui prennent simultanement la même valeur (0 ou 1) fixée à l'avance, est supérieur ou égal à " P ".

Nous désignerons par "M_N^P la fonction majorite de "N" variables qui prend la valeur "1" lorsque le nombre des variables qui prennent en valeur "0" est supérieur ou égal à "P".

Nous en déduisons que $M_{\overline{N}}^{P}$ est une fonction "majorite" qui prend la valeur "0" lorsque le nombre des variables qui prennent la valeur "1" est supérieur ou égal à "P".

M_N^P est une fonction majorite qui prend la valeur "0" lorsque le nombre des variables qui prennent la valeur la valeur "0" est supérieur ou égal à "P".

Le passage de $M_{\overline{N}}^{P}$ se fait en remplaçant toutes les variables littérales par leurs compléments.

A partir des définitions, on écrit immédiatement la fonction majorite " $M_{\overline{N}}^{P}$ " sous la forme d'un produel de tous les produits distincts de "P" variables directes prises parmi les "N" variables, ou sous forme d'un produit de tous les produels distincts de "N-P+1" variables directes parmi les "N" variables.

32. DECOMPOSITION DU FONCTION MAJORITE

Si on met Xi en facteur partiel dans la fonction majorite M_{N}^{P} on aura l'égalité suivante :

$$M_N^P = \left| \begin{array}{l} Xi.\ M_{N.1}^{P.1} \\ M_{N-1}^P \end{array} \right|$$

Les fonctions "majorite" M_{N-1}^{P} et M_{N-1}^{P-1} ne contiennent pas la variable "Ni" mais tous les produits en facteur dual dans M_{N-1}^{P-1} se retrouvent en facteur direct dans les produits du produel M_{N-1}^{P}.

$$\boxed{M_{N-1}^P \cdot \overline{M}_{N-1}^{P-1} = 0}$$

En utilisant la relation $\left| \begin{array}{l} \emptyset \\ A \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \emptyset \\ A\bar{\emptyset} \end{array} \right|$, nous écrivons

$$M_N^P = \left| \begin{array}{l} Xi \cdot M_{N-1}^{P-1} \\ M_{N-1}^P \left| \begin{array}{l} \overline{Xi} \\ \overline{M}_{N-1}^{P-1} \end{array} \right. \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} Xi \cdot M_{N-1}^{P-1} \\ M_{N-1}^P \cdot \overline{Xi} \\ M_{N-1}^P \cdot \overline{M}_{N-1}^{P-1} \end{array} \right|$$

M_N^P peut s'exprimer également par la fonction carrée biforme suivante / :

$$M_N^P = \left| \begin{array}{l} Xi \cdot M_{N-1}^{P-1} \\ M_{N-1}^{P-1} \cdot \overline{Xi} \end{array} \right|$$

Si on effectue la mise en facteur partielle de la variable X1 dans M_N^P , puis la mise en facteur parielle de X2 dans les 2 fonctions résiduelles.

M_{N-1}^P et M_{N-1}^{P-1} nous obtenons :

$$M_N^P = \left| \begin{array}{l} X1 \cdot M_{N-1}^{P-1} \\ M_{N-1}^P \end{array} \right| ; \quad M_{N-1}^P = \left| \begin{array}{l} X2 \cdot M_{N-2}^{P-1} \\ M_{N-2}^P \end{array} \right| \quad M_{N-1}^{P-1} = \left| \begin{array}{l} X2\ M_{N-2}^{P2} \\ M_{N-2}^{P-1} \end{array} \right|$$

$$
M_N^P = \left| \begin{array}{l} X1 \,.\, X2 \,.\, M_{N-2}^{P-2} \\[2ex] \begin{array}{c} X1 \\ X2 \end{array} \Big| \; M_{N-2}^{P-1} \\[2ex] 1 \,.\, M_{N-2}^{P} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} M_2^2 \cdot M_{N-2}^{P-2} \\[2ex] M_2^1 \cdot M_{N-2}^{P-1} \\[2ex] M_2^0 \cdot M_{N-2}^{P} \end{array} \right|
$$

Dans cette dernière expression les symboles M_2^K représentent les fonctions "majorite" des 2 variables "X1" et X2 et les symboles M_{N-2}^K , les fonctions majorite des N-2 variables X3, X4 , XN.

La décomposition de la fonction M_N^P peut être poursuivie par récurrence jusqu'aux termes de la forme - M_h^h et H_2^0 , mais nous obtiendrons, dans ce cas les C_N^P produits

Dans cette dernière expréssion les symboles M_2^k representent les fonctions "majorités" des deux variables "x_I" et "x_2" et les symboles M_{n-2}^k, les fonctions majorités des n-2 variables $x_3, x_4, \dots\dots, x_n$.

La décomposition de la fonction M_n^p peut etre poursuivie par recurrence jusqu'aux termes de la forme "M_h^k" et "M_1^0", mais nous obtiendrons, dans ce cas les " C_n^p" produits "M_p^p" relatifs aux combinaisons des "n" variables prises p à p.

Il est par contre intéressant, si les temps de fonctionnement n'éxigent pas la réalisation de circuit en 2 couches, de séparer l'ensemble des "n" variables en deux sous-ensembles.

- L'un contenant les "p" variables $x_I, x_2, \dots\dots, x_p \Longrightarrow M_p^k$
- L'autre contenant les n-p variables $x_{p+I}, x_{p+2}, \dots, x_n \Longrightarrow M_{n-p}^{k'}$

Dans le cas où $p \leqslant \frac{n}{2}$:

$$M_n^p = \left| \begin{array}{ccc} M_p^p & \cdot & M_{n-p}^0 \\ M_p^{p-I} & \cdot\cdot & M_{n-p}^I \\ M_p^{p-2} & \cdot & M_{n-p}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_p^0 & \cdot & M_{n-p}^p \end{array} \right|$$

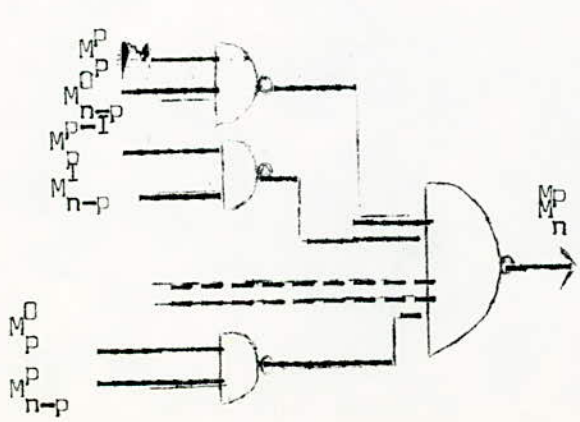
Dans le cas où $\frac{n}{2} < p < n$

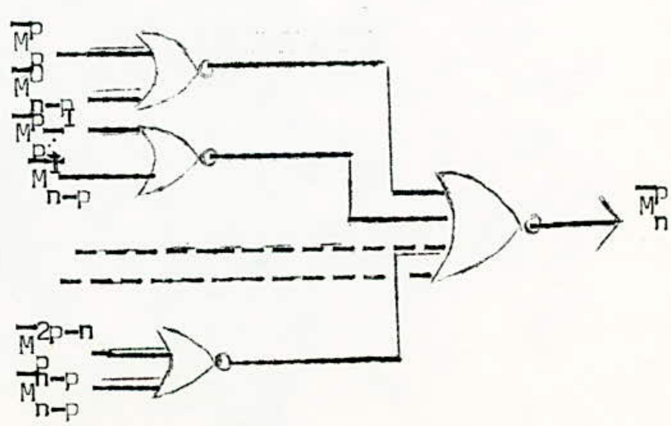
$$M_n^p = \left| \begin{array}{ccc} M_p^p & \cdot & M_{n-p}^0 \\ M_p^{p-I} & \cdot & M_{n-p}^I \\ M_p^{p-2} & \cdot & M_{n-p}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_p^{2p-n} & \cdot & M_{n-p}^{n-p} \end{array} \right|$$

Dans les 2 cas le nombres de fonctions "majorite" qui apparaissent dans le produel "M_n^p" est inferieures à n et le nombre final des éléments du schéma inférieur à " C_n^p ". Le nombre de couches est supérieur à 2 et le temps de réponse, est en conséquence plus long .

On peut représenter les 2 cas à partir de circuits "NAND" ou "NOR"

$p \leqslant \frac{n}{2}$ $\qquad\qquad$ $\frac{n}{2} < p < n$





EXEMPLES DE FONCTIONS MAJORITE

$$M_3^I(a;b;c)=\left|\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right| \qquad M^2_3(a;b;c)=\left|\begin{array}{c} a.b \\ b.c \\ c.a \end{array}\right| \qquad M_3^3(a;b;c)=a.b.c$$

$$M_4^2(a;b;c;d)=\left|\begin{array}{l} M_2^2(a;b)\ .M_2^0 \\ \\ M_2^I(a;b)\ .\ M_2^I(c;d) \\ \\ M_2^0\ .\ M_2^2(c;d) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a.b.I \\ \left.\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right| \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \\ I.c.d \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a.b \\ a.c \\ a.d \\ b.c \\ b.d \\ c.d \end{array}\right|$$

$$M_5^3 = \left|\begin{array}{l} M_5^3(xI;x2;x3)\ .\ M_2^0(x4;x5) \\ \\ M_3^2(x_I;x_2;x_3)\ .\ M_2^I(x_4;x_5) \\ M_3^I(xI;x2;x3)\ .\ M_2^2(x4;x5) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l} xI.x2.x3 \\ \left.\begin{array}{l} xI.x2 \\ x2.x3 \\ x3.xI \end{array}\right| \begin{array}{l} x4 \\ \\ x5 \end{array} \\ \left.\begin{array}{c} xI \\ x2 \\ x3 \end{array}\right| x4.x5 \end{array}\right|$$

CHAP 4. TRANSCODAGE

41 - FONCTIONS DE TRANSCODAGE

42 - FORMES DE TRANSCODAGE

43 - SIMPLIFICATIONS DES FONCTIONS DE TRANSCODAGE

44 - ETUDE D'UNE FONCTION DE TRANSCODAGE

ADDITION BINAIRE

45 - ETUDE D'UNE FONCTION ITERATIVE DE TRANSCODAGE

46 - MATRICES DE TRANSCODAGE

CHAP 5. DECODAGE

CHAP. 4. TRANSCODAGE :

Avant de voir ce que c'est le transcodage, il est utile de definir les 3 familles suivantes : les codeurs, les decodeurs, les transcodeurs.

Un codeur possède autant d'entrées, qu'il ya de symboles différents à CODER, et autant de sorties qu'il ya de digits dans le code.

Un décodeur joue le rôle inverse. On présente les signaux codés, et l'on obtient sur l'une des lignes de sortie un signal indiquant que c'est cette ligne qui correspond au code appliqué à l'entrée.

Lorsque l'on veut passer d'un code à un autre, on emploie un transcodeur ce dispositif peut être réalisé en accouplant un décodeur du 1er code et un codeur du 2e . Ce n'est généralement pas la méthode la plus satisfaisante , et il est préférable de chercher, s'il ya un moyen de réaliser directement les relations cherchées.

4.1. FONCTIONS DE TRANSCODAGE

411 DEFINITIONS :

On appelle fonction de transcodage, toute fonction algébrique discontinue et bornée.

Cette fonction fait correspondre des nombres entiers donnés "Xn" (vecteur variable ou vecteur de commande) des nombres entie[rs] " Yp" appelée vecteur fonction.

$$\{X_n\} \longrightarrow Y_p$$
$$x_i \in X_n \longrightarrow y_j \in Y_p$$

412. PROPRIETES DES FONCTIONS DE TRANSCODAGE:

Une fonction de transcodage $Y_p = F(x_n)$ fait correspondre à toute valeur entière du vecteur de commande " Xn", une valeur du vecteur fonction " Yp" et une seule

Nous obtenons dans un système

$$Y_p = Y_p(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$$
$$Y_{p-1} = Y_{p-1}(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)$$
$$Y_1 = Y_1(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1).$$

On peut representer graphiquement dans un plan ramené à 2 axes de coordonnées ox, oy -
Le graphe obtenu se limite à un ensemble fini de points absolument indépendant les uns des autres.

.../....

Ce qui signifie qu'il est toujours possible de choisir pour quelqu points ou pour la totalité des points du graphe, un ordre de succession quelconque.

<u>Reciproquement</u> $Y_p \longrightarrow X_n$ (définit une fonction de transcodag

a) soit à établir par exemple la fonction de transcodage

$$Y_{(6)} = X^2_{(3)} \qquad X = x3,\ x2,\ x1 \qquad Y = Y6, Y5, Y4, Y3, Y2, Y1$$

L'indice placé au bas du vecteur indique le nombre de composants de ce vecteur.

	X			Y						
	x3	x2	x1	Y6	Y5	Y4	Y3	Y2	Y1	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
2	0	1	0	0	0	0	1	0	0	4
3	0	1	1	0	0	1	0	0	1	9
4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	16
5	1	0	1	0	1	1	0	0	1	25
6	1	1	0	1	0	0	1	0	0	36
7	1	1	1	1	1	0	0	0	1	49

On tire de cette table de vérité

$Y1 = x1 \qquad Y2 = 0 \qquad Y3 = \left| \begin{array}{c} \overline{x3} \cdot x2 \cdot \overline{x1} \\ x3 \cdot x2 \cdot \overline{x1} \end{array} \right| = x2 . \overline{x1}$

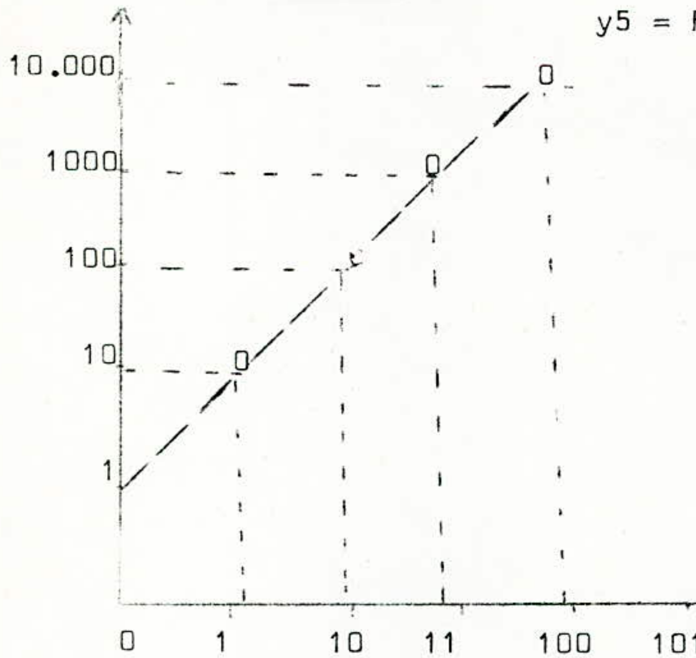
$$Y4 = \left| \begin{array}{ccc} \overline{x3} & x2 & x1 \\ x3 & \overline{x2} & x1 \end{array} \right| = x1 \ . \left| \begin{array}{c|c} \overline{x3} & x2 \\ \overline{x2} & x3 \end{array} \right|$$

$$Y5 = \left| \begin{array}{l} x3 \cdot \bar{x}2 \cdot \bar{x}1 \\ x3 \cdot \bar{x}2 \cdot x1 \\ x3 \cdot x2 \cdot x1 \end{array} \right| = x3 \cdot \left| \begin{array}{ll} \bar{x}2 & x1 \\ \bar{x}2 & \bar{x}1 \\ x2 & x1 \end{array} \right| = x3 \cdot \left| \begin{array}{l} \bar{x}2 \\ x1 \end{array} \right|$$

$$Y6 = \left| \begin{array}{l} x3 \cdot x2 \cdot \bar{x}1 \\ x3 \cdot x2 \cdot x1 \end{array} \right| = x2 \cdot x3$$

b) <u>Tracé du graphe</u>

y5 = F(x3)



Il arrive souvent comme dans le cas du graphe qu'une fonction de transcodage soit incompletement définie, lorsque un certain nombre de valeurs peuvent être arbitrairement fixées. Ces valeurs correspondent à des combinaisons disponibles.

	x4	x2	x1	y4	y3	y2	y1	y0	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	2
2	0	1	0	0	0	1	0	0	4
3	0	1	1	0	1	0	0	0	8
4	1	0	0	1	0	0	0	0	16
5	1	0	1	1			1		Comb. Disp.
6	1	1	0	1		1			
7	1	1	1	1	1				

Dans cet exemple, on constate qu'en utilisant au mieux les combinaisons disponibles
On peut simplifiés y1 , y2, y3 et y4.

Ainsi "y1" peut être simplifié par adjacence en associant 1 et 5

"y2" en associant 2 et 6

"y3" en associant 3 et 7

"y4" en associant 4 - 5 - 6 - 7

Ce qui donne :

$$y0 = \bar{x}_4 . \bar{x}2 . \bar{x}1 \qquad y1 = \left| \begin{matrix} \bar{x}4 . \bar{x}2 . x1 \\ x4 . \bar{x}2 . x1 \end{matrix} \right| = \bar{x}2 . x1$$

$$y2 = \left| \begin{matrix} \bar{x}4 . x2 . \bar{x}1 \\ x4 . x2 . \bar{x}1 \end{matrix} \right| = x2 . \bar{x}1 \qquad y3 = \left| \begin{matrix} \bar{x}4 & x2 & x1 \\ x4 & x2 & x1 \end{matrix} \right| = x2\ x1$$

$$y_4 = x_4$$

Notons que la fonction de transcodage considèrèe correspond à
y (5) = 2 x

$$\begin{matrix} X(3) = 0 & y(5) = 1 \\ x(3) = 1 & y(5) = 2 \\ x(3) = 2 & y(5) = 4 \end{matrix} \Longrightarrow \boxed{y(5) = 2^{x(3)}}$$

42 <u>FORMES DE TRANSCODAGE</u>

Etant donnée une fonction de transcodage constituée de fonction binaires, si les fonctions binaires sont exprimées séparement en fonction de "xi" ; on dit que la fonction de transcodage se présente sous sa forme developpée.

Si yi ∈ Yp / yi = f(xi) i= I...n ; fonction de transcodage est sous forme developpée.

Autres formes de transcodage :

- Forme maillée ou arborescente
- Forme paramétrique
- Forme itérative

421. Forme Maillée ou Arborescente:

Procédé : mise en facteur sur plusieurs fonctions binaires groupées appartenant à un système de transcodage.

Exemple :

$$
\begin{aligned}
y0 &= \bar{x}4.\bar{x}2.\bar{x}1\\
y1 &= \bar{x}4.\bar{x}2.x1\\
y2 &= \bar{x}4.x2.\bar{x}1\\
y3 &= \bar{x}4.x2.x1\\
y4 &= x4.\bar{x}2.\bar{x}1
\end{aligned}
$$

$$
\left|\begin{array}{l}
\bar{x}4 \;.\; \left|\begin{array}{l}
\bar{x}2 \;.\; \left|\begin{array}{ll} \bar{x}1 & = y0 \\ x1 & = y1 \end{array}\right. \\[2ex]
x2 \;.\; \left|\begin{array}{ll} \bar{x}1 & = y2 \\ x1 & = y3 \end{array}\right.
\end{array}\right. \\[4ex]
x4 \,.\, \bar{x}2 \;\; \bar{x}1 \;=\; y4
\end{array}\right.
$$

$$
\left|\begin{array}{l}
\bar{x}1 \;.\; \left|\begin{array}{l}
\bar{x}2 \;.\; \left|\begin{array}{l} \bar{x}4 = y0 \\ x4 = y4 \end{array}\right. \\[2ex]
x2 \;.\; \bar{x}4 = y2
\end{array}\right. \\[3ex]
\qquad x1 \;.\; \bar{x}4 \left|\begin{array}{l} \bar{x}2 = y1 \\ x2 = y3 \end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

L'interêt de la forme arborescente apparait lorsque les fonction binaires élémentaires sont des produits.

422. FORME PARAMETRIQUE:

Elle se caractérise par la substitution de fonctions ou paramètres à des groupes fonctionnels de variables qui apparaissent simultanément dans plusieurs fonctions binaires élémentaires du même système de transcodage.

Dans certains cas le paramêtre est une fonction binaire du système lui même.

exemple :

$y0 = \overline{x1} \cdot \overline{x2}$; $y1 = x1 \cdot \overline{x2}$; $y2 = \overline{x1} \cdot x2$

On peut representer y, et y2 suivant les produits :

$y1 = x1 \cdot \overline{x2} = \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \end{vmatrix} \cdot \overline{x2}$ $\quad y2 = \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \end{vmatrix} \cdot \overline{x1}$

Dans le cas où on pose $a = \begin{vmatrix} x1 \\ x2 \end{vmatrix}$

on obtient

$y0 = \bar{a}$: $y1 = a \cdot \overline{x2}$; $y2 = a \cdot \overline{x1}$

Dans le cas où y0 sera considéré comme paramétre :

$y0 = \overline{x1} \cdot \overline{x2}$ en peut exprimer y1 et y2 à partir de y0

soit

$$y0 = \overline{x1} \cdot \overline{x2}$$
$$y1 = \overline{y0} \cdot \overline{x2}$$
$$y2 = \overline{y_0} \cdot \overline{x1}$$

ou

$$\overline{x1} \cdot \overline{x2} = y0$$
$$\overline{y_0} \cdot \left| \begin{matrix} \overline{x_1} = y_2 \\ \overline{x_2} = y_1 \end{matrix} \right.$$

423 FORME ITERATIVE

C'est une forme parométrique particulière, qui s'établit lorsque les fonctions élémentaires d'un système de transcodage sont ulicés entre elles par une loi de recurrence.

Exemple :

on pose $y0 = x0$

$yp = yp-1 \cdot xp$ on aura $y1 = y0 \cdot x1$

$y2 = y1 \cdot x2 = y0 \cdot x1 \cdot x2 = x0 \cdot x1 \cdot x2$

$yn = yn-1 \cdot xn = yn-2 \cdot xn-1 \cdot xn.$

On peut établir une forme maillée :

```
—x0┌          =  y0
   │x1┌         =  y1
       │x2┌        =  y2
           │x3┌       =  y3
               │. . . . . . . . .
               └xn ———— =  yn
```

L'avantage d'une forme itérative est de pouvoir être déterminée à partir de tables de vérité trés simples ; où les fonctions binaires apparaissent également comme des variables selon la valeur de l'indice considéré.

VARIABLES		FONCTION
xp	yp-1	yp
1	1	1

La forme itérative est la forme rencontrée le plus souvent en pratique . Elle résulte du fait que la recherche des algorithmes dans les systèmes de traitement numérique de l'information , procède le plus souvent des lois de recurrence liées à la distribution des fonctions.

4.3. SIMPLIFICATION DES FONCTIONS DE TRANSCODAGE:

Théorème 1: Tous les facteurs ou implicants commun à "p" fonctions binaires élémentaires y1,......,yp sont facteurs ou implicants du produit de ces fonctions

$$\text{soit le produit } \prod f = \begin{vmatrix} y1 \\ y2 \\ \vdots \\ yp \end{vmatrix}$$

$\prod f$ est un implicant de toutes les fonctions "yi"

$$\left(\Pi_f = \begin{vmatrix} y1 \\ \vdots \\ yp \end{vmatrix}\right) \Longrightarrow (yi = \Pi_f . yi), \quad \forall i = 1,2,\dots\, p)$$

En effet on peut écrire :

$$f = I - \prod_{i=1}^{n} (1 - yi) \Rightarrow \Pi_f . yi = yi - \prod_{i=1}^{n} yi \; (1 - yi)$$

$$\Pi_{f} . yi = yi - \prod_{i=1}^{n} yi \, . \, \overline{yi} = yi$$

Tout facteur "f" commun aux fonctions "yi" est réciproquement facteur de Π_f $y1 = f.h1$ $y2 = f.h2, \dots$ $yp = f.hp$

$$\Rightarrow \Pi_f = f . \begin{vmatrix} h1 \\ \vdots \\ hp \end{vmatrix}$$

Théorème 2

Tous les facteurs on implicants duals communs à "p" fonctions binaires élémentaires y1, y2,....., yp sont facteurs ou implicants duals du produit de ces fonctions.

soit le produit $P_f = (y1 \; y2 \; \dots \; yp) \Rightarrow \left(yi = \begin{vmatrix} yi \\ P_f \end{vmatrix} \quad \forall i=1,2;..p\right)$

Reciproquement :

$$\left(y1 = \begin{vmatrix} f \\ y1 \end{vmatrix}, \; y2 = \begin{vmatrix} f \\ g2 \end{vmatrix} \; \dots, \; y_p = \begin{vmatrix} f \\ g_p \end{vmatrix}\right) \Rightarrow \left(P_f = \begin{vmatrix} & f & \\ g1 & g2 \dots & gp \end{vmatrix}\right)$$

Corollaire : soient 2 fonctions binaires

$$y1\,(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ et } y_2(x_1, x_2, \dots x_n)$$

Supposons connues en totalité les "p" combinaisons reperées par les a_p pour lesquelles y1 = 1 et y2 = 1

On calcule les "p" produels f1 , f2, ..; fp qui sont respectivement nuls pour les ap, et les "q" produits respectivement égaux à 1 pour les bq.

$$y2 = \begin{vmatrix} y1 \, . \, \bar F_1 \dots \bar F_p \\ \phi_1 \\ \dots \\ \phi_q \end{vmatrix} \qquad y1 = \begin{vmatrix} y2 \, . \, \bar\phi_1 \dots \bar\phi_q \\ f_1 \\ \dots \\ fp \end{vmatrix}$$

4-4 - ETUDE D'UNE FONCTION DE TRANSCODAGE.

Une des fonctions de transcodage couramment utilisée dans les calculateurs numériques est l'addition binaire. Dans le cas où l'on opère avec des registres, on verra apparaitre deux procédés pour effectuer l'addition binaire, qui sont l'addition serie et l'addition parallele.
Seulement l'étude qu'on entreprendra fera uniquement appel aux diverses notions déjà vues.

On opère une décomposition suivant les fonctions plus simples, en analysant les particularités du système, connues généralement à l'origine.
La décomposition doit se faire en rassemblant au mieux les fonctions élémentaires qui admettent des produits ou des produels communs.
Il est indiqué surtout de faire apparaitre des relations de recurrence qui peuvent mener à des formes iteratives faciles à traiter.

ex : fonction de transcodage qui correspond à l'addition binaire.

2 nombres binaires de "n" chiffres.

$An = a_n \; a_{n-1} \; \ldots\ldots\ldots \; a_1$

$Bn = b_n \; b_{n-1} \; \ldots\ldots\ldots \; b_1$

$Sn = S_n \; S_{n-1} \; \ldots\ldots\ldots \; S_1$ somme binaire

Sn : définit une fonction de transcodage
$Sn = T\,(An,\; Bn) = An + Bn$

An : 00 10 111 01 (93)10

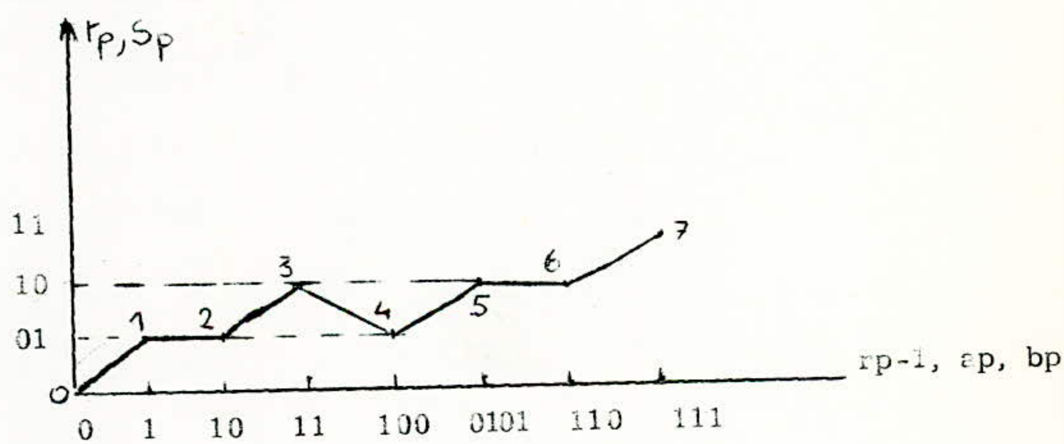
Bn : 000 100 111 (39)10

01 00 00 100 Sn

$$\boxed{Sp = Rp\text{-}1 + ap + bp}$$

Table de vérité.

	rp-1	ap	bp	rp	sp
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0
6	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	1



On constate sur le graphe que les points 1, 2, 4 et 3, 5, 6 correspondent respectivement à une même valeur du vecteur fonction "rp, sp".
Le vecteur "$\overline{rp}$, sp" est donc nul pour les combinaisons 3, 5, 6 des variab
ce qui signifie que les produels correspondant à ces combinaisons sont des
facteurs communs aux fonctions binaires $\overline{rp}$, et sp.

$$\overline{rp} = \left|\begin{array}{c} rp\text{-}1 \\ \overline{ap} \\ \overline{bp} \end{array}\right| \begin{array}{c} \overline{rp}\text{-}1 \\ ap \\ \overline{bp} \end{array} \left|\begin{array}{c} \overline{rp}\text{-}1 \\ \overline{ap} \\ bp \end{array}\right| \begin{array}{c} \overline{rp}\text{-}1 \\ \overline{ap} \\ \overline{bp} \end{array} \Bigg| = \left|\begin{array}{c} \overline{ap} \\ \overline{bp} \end{array}\right| \begin{array}{c} \overline{rp}\text{-}1 \\ \begin{array}{c|c} ap & bp \\ \overline{bp} & \overline{ap} \end{array} \end{array} \Bigg|$$

De même qu'on a une relation donnant Sp.

$$Sp = \left|\begin{array}{c|c|c|c} rp-1 & \overline{rp}-1 & \overline{rp}-1 & rp-1 \\ \bar{a}p & ap & \bar{a}p & ap \\ \bar{b}p & \bar{b}p & bp & bp \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} rp-1 \\ \begin{array}{c|c} \bar{a}p & ap \\ \bar{b}p & bp \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \overline{rp}-1 \\ \begin{array}{c|c} ap & \bar{a}p \\ \bar{b}p & bp \end{array} \end{array} \end{array}\right|$$

en posant $\alpha p = \left|\begin{array}{c|c} \bar{a}p & bp \\ \bar{b}p & ap \end{array}\right|$ on peut ecrire le systeme d'addition binaire sous une forme qui est à la fois iterative, paramétrique et maillée.

<u>Demonstration de rp</u>

$$\overline{rp} = \left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \bar{a}p \\ \bar{b}p \end{array} & \begin{array}{c} \overline{rp}-1 \\ \begin{array}{c|c} ap & bp \\ \bar{b}p & \bar{a}p \end{array} \end{array} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \bar{a}p \\ \bar{b}p \end{array} & \begin{array}{c} \overline{rp}-1 \\ ap \cdot bp \\ \bar{b}p \cdot \bar{a}p \end{array} \end{array}\right|$$

On peut écrire en développant le produit des 2 produels

$$\overline{rp} = \left|\begin{array}{c} \overline{rp}-1 \cdot \bar{a}p \\ \bar{b}p \cdot \bar{a}p \\ \overline{rp}-1 \cdot \bar{b}p \\ \bar{b}p \cdot \bar{a}p \end{array}\right| \Rightarrow rp = \overline{\left|\begin{array}{c} \overline{rp}-1 \cdot \bar{a}p \\ \bar{b}p \cdot \bar{a}p \\ \overline{rp}-1 \cdot \bar{b}p \\ \bar{b}p \cdot \bar{a}p \end{array}\right|} = \left|\begin{array}{c|c|c} rp-1 & bp & rp-1 \\ ap & ap & bp \end{array}\right|$$

<u>en complémentant</u> le produit on a :

On obtient une forme telle que :

$$\left|\begin{array}{c} f1\ \emptyset \\ f2\ \emptyset \\ f1f2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} f1 & \emptyset & f1 \\ \emptyset & f2 & f2 \end{array}\right|$$

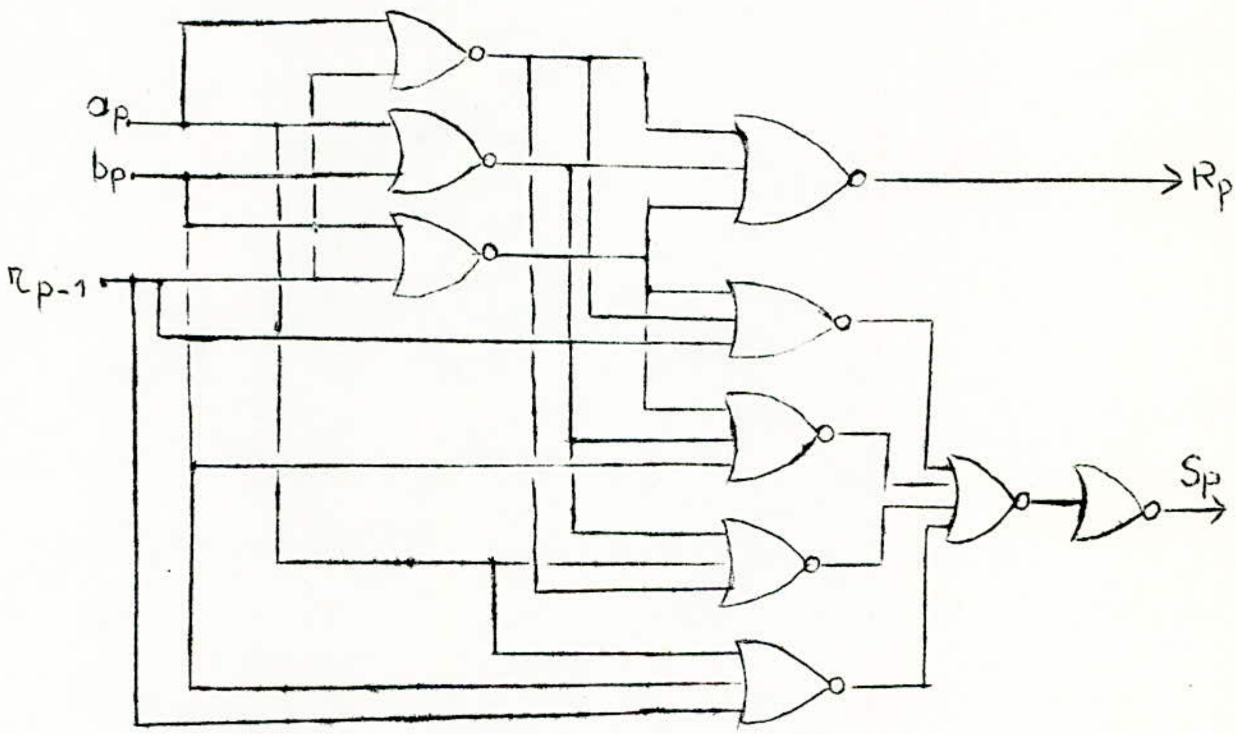
Donc on peut écrire que

$$rp = \left|\begin{array}{c} rp-1 \cdot ap \\ rp-1 \cdot bp \\ ap \cdot bp \end{array}\right|$$

Dans le cas où l'on ne dispose que de circuts "NI" on représente rp et Sp sous forme d'un produit de produels.

$$rp = \left| \begin{array}{c} ap \\ bp \end{array} \right| \begin{array}{c} rp\text{-}1 \\ ap \end{array} \left| \begin{array}{c} rp\text{-}1 \\ bp \end{array} \right| \qquad Sp = \left| \begin{array}{c} \overline{rp\text{-}1} \cdot \overline{ap} \\ \overline{rp\text{-}1} \cdot \overline{bp} \\ rp\text{-}1 \end{array} \right| \begin{array}{c} \overline{rp\text{-}1}\ \overline{bp} \\ \overline{ap} \cdot \overline{bp} \\ bp \end{array} \left| \begin{array}{c} \overline{ap} \cdot \overline{bp} \\ \overline{rp\text{-}1} \cdot \overline{ap} \\ ap \end{array} \right| \begin{array}{c} rp\text{-}1 \\ ap \\ bp \end{array} \right|$$

Si l'on ne dispose que de variables directes, on constate qu'il ne faut que 9 circuits "NI"



Autre décomposition différente.

Dans le cas où l'on considere deux additions successives, il est possible d'envisager une décomposition différente de la fonction de transcodage.

1ère addition : ap + bp = xp , zp (xp = 1e retenue, zp : somme)

2ème addition: rp-1+ zp = yp, sp (yp = 2e retenue, sp = 2e somme)

Retenue xp + yp = rp

Ces additions correspondent aux tables de vérité suivantes :

ap	bp	xp	zp
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

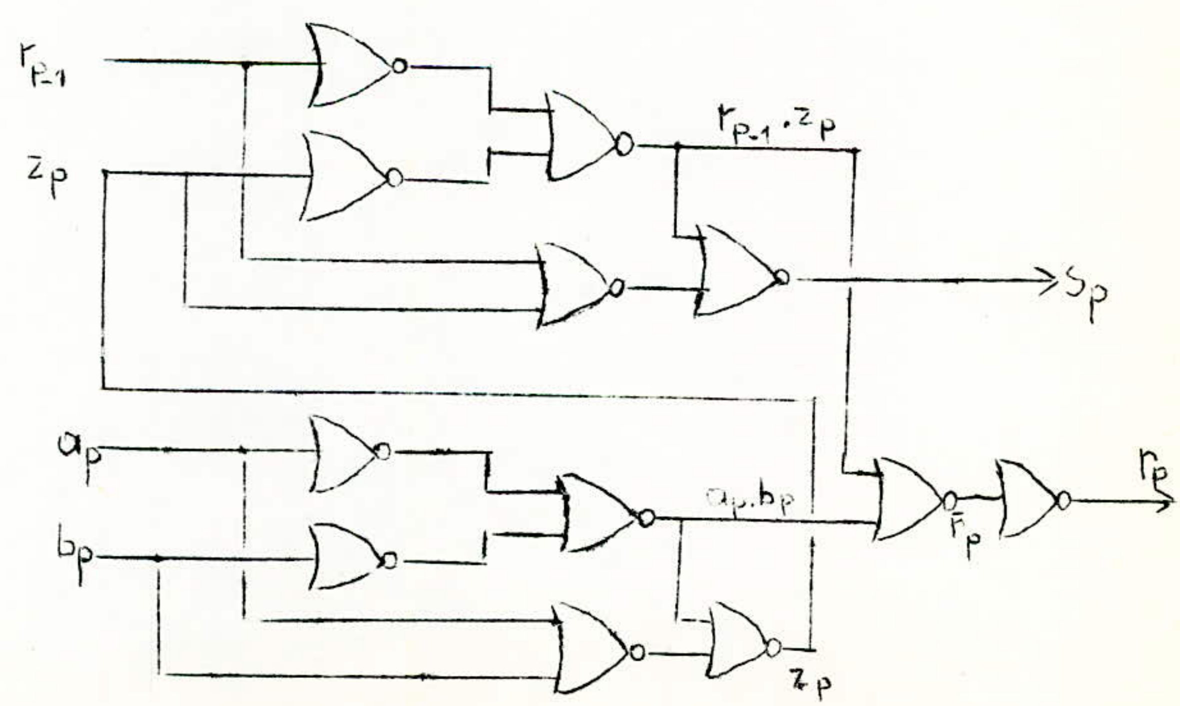
rp-1	zp	yp	sp
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

D'où les fonctions

$$zp = \left|\begin{array}{c|c} ap & \overline{ap} \\ bp & \overline{bp} \end{array}\right| \qquad xp = ap \cdot bp$$

$$sp = \left|\begin{array}{c|c} rp-1 & \overline{rp}-1 \\ zp & \bar{zp} \end{array}\right| \qquad yp = rp-1 \cdot zp \qquad r_p = \left|\begin{array}{c} xp \\ yp \end{array}\right|$$

d'où les schémas suivants :



4-5 - ETUDE D'UNE FONCTION DE TRANSCODAGE ITERATIVE.

Il s'agit d'étudier la fonction de transcodage $yn = y_n^n, y_n^{n-1}, y_n^{n-2}, \ldots y_n^p, \ldots, y_n^0$ dans laquelle chaque composante "y_n^p" représente une fonction binaire de "n" variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1 = X_n$ telle que "y_n^p" prenne la valeur unité lorsque "p" variables et "p" seulen[ment] appartenant à "Xn" sont égales à l'unité.

Il y a lieu de rechercher, d'abord une loi de rcurrence qui permette de résoudre simplement le problème de transcodage en écrivant la fonction sous forme itérative. Dans ce but, nous supposerons connu le vecteur fonction :

$$Y_{n-1} = Y_{n-1}^{n-1},\ y_{n-1}^{n-2},\ \ldots,\ Y_{n-1}^{0}$$

qui comprend une fonction et une variable binaire de moins que le vecteur "Yn".

Un raisonnement simple permet de constater que $Y_n^p = 1$ si $x_n = 0$, $Y_n^p = 1$ si $x_n = 1$

$$Y_{n-1}^{p-1} \Rightarrow Y_n^p = 1$$

Dans tous les autres cas $Y_n^p = 0$, et on peut en conséquence établir la table de vérité suivante

x_n	Y_{n-1}^{p-1}	Y_{n-1}^{p}	Y_n^p
0	$\emptyset$	1	1
1	1	$\emptyset$	1

Nous pouvons tirer la fonction carrée biforme de récurrence

$$y_n^p = \left|\begin{array}{c} \bar{x}_n \cdot y_{n-1}^p \\ y_{n-1}^{p-1} \cdot x_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x}_n & y_{n-1}^p \\ y_{n-1}^{p-1} & x_n \end{array}\right|$$

Les fonctions extrèmes se simplifient et s'écrivent :

$$y_n^n = x_n \cdot y_{n-1}^{n-1} \qquad y_n^0 = \bar{x}_n \cdot y_{n-1}^0$$

On peut déduire le vecteur Yn à partir du vecteur Yn-1, en mettant la fonction de transcodage sous forme iterative et maillée.

$$
Y_{n-1}\left\{\begin{array}{llll}
 & \bar{x}_n & - & = y_n^0 \\
y_{n-1}^0 & x_n & & \\
 & & - & = y_n^1 \\
y_{n-1}^1 & \bar{x}_n & & \\
 & & - & = y_n^2 \\
 & \bar{x}_n & & \\
y_{n-1}^2 & x_n & & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
Y_{n-1}^{n-2} & \bar{x}_n & & \\
 & x_n & - & = Y_n^{n-1} \\
 & \bar{x}_n & & \\
y_{n-1}^{n-1} & x_n & - & = y_n^n
\end{array}\right\} Y_n
$$

La fonction de transcodage Y4 exprimée sous forme millée

$$
\begin{array}{llllll}
 & & & \bar{x}4 & - & = y_4^0 \\
 & & \bar{x}3 & x4 & - & = y_4^1 \\
 & \bar{x}2 & x3 & \bar{x}4 & & \\
\bar{x}1 & x2 & \bar{x}3 & x4 & - & = y_4^2 \\
x1 & \bar{x}2 & x3 & \bar{x}4 & & \\
 & x2 & \bar{x}3 & x4 & - & = y_4^3 \\
 & & x3 & \bar{x}4 & & \\
 & & & x4 & & = Y_4^4
\end{array}
$$

Il existe une relation entre les fonctions "Yn" et les fonctions binaires majorité.

La fonction "majorite" M_n^p est égale au produel des fonctions

$$Yn^p,\ Yn^{p+1},\ \ldots\ldots,\ Yn^{n-1},\ Yn^n$$

$$M_n^p = \left|\begin{array}{l} Y_n^n \\ \vdots \\ y_n^p \end{array}\right|$$

4.6 - MATRICES DE TRANSCODAGE

4.61 - a) Preliminaires :

On va specifier la définition d'une fonction de transcodage ainsi, nous dirons qu'une fonction de décodage est du genre produit, quand toutes les composantes du vecteur fonction sont des produits, et qu'elle est du genre produel si toutes les composantes du vecteur sont des produels.

4.62 - Décomposition des formes de transcodage developpés

Le transcodage est une opération qui posséde la propriété de transitivité. Considérons les 2 fonctions de transcodage suivantes.

$Yp = F\ (Zq) \qquad Zq = G\ (Xn)$

Nous pouvons en mettant "Zq" sous forme developpée, remplacer dans la fonction "Yp" chaque composante $Zi \in E\ 01$ par son expression binaire en fonction du composants du vecteur "Xn"

Donc on peut écrire $Yp = F\ [G\ (xn)] = \Psi\ (xn)$

La fonction $Yp = \Psi\ (xn)$ est également une fonction de transcodage d'où la propriété de transitivité

$\left.\begin{array}{l}\text{Si Yp est transcodée de Zq}\\ \text{et Zq est transcodée de Xn}\end{array}\right] \Rightarrow$ Yp est transcodée de Xn

cette propriété entraine les conséquences suivantes :

la décomposition d'une fonction de transcodage en 2 ou plusieurs (autres) fonctions qui seront aussi des fonctions de transcodage.

Il y a 2 décompositions particulières, qui ne font intervenir que 2 fonctions de décodage différentes en genre et associées en cascade. L'existence de 2 possibilités de choix des décodages résulte de la propriété de dualite des fonctions binaires.

En effet chaque composante binaire $yi \in E01$ d'une vecteur fonction de transcodage "yp" peut d'une façon générale, s'exprimer sous forme developpée

Soit par un produel de produits (1^{e} forme canonique), soit par un produit de produels (2^{e} forme canonique) des composants du vecteur variable "Xn".

./.

Dans le 1$^{\text{e}}$ cas, chaque produit en facteur dual correspond à une combinaison, et une seule, associée à une valeur du vecteur "Xn"

Si nous considérons la fonction intermédiaire Zq = G (xn) dans laquelle chaque fonction composante Zi ($\in$ E01 / Zi = 1 pour une valeur et une seule de Xn = Xn^i chaque composante "Zi" est alors un produit des variables binaires du vecteur "Xn" et la fonction Zq = G (Xn) est une fonction de décodage du genre produit.

THEOREME

Toute fonction de transcodage peut-être décomposée suivant 2 fonctions de décodage intermédiaire, il existe 2 possibilités de décomposition

- produits de produels
- produel de produits

qui dependent de la forme canonique des expressions binaires respectives, choisies dans le developpement des composants du vecteur fonction.

En pratique, il est possible de réaliser toute fonction de transcodage Yp = ~~fff~~ (xn) en associant 2 matrices de décodage Zq = G (xn) et Yp = F (Zq) de genres différents : L'ensemble obtenu constitue une matrice de "trancodage" (dans le langage ordinaire - mémoires Mortes).

Avantage

La décomposition qui mène aux matrices de trancodage ne correspond pas à une réalisation optimale son avantage est plutôt de fournir des solutions systématiques qui sont valables est appicable dans tous les cas.

./.

Exemple de matrice de transcodage :

On reprend la fonction qui correspond à l'addition Binaire, et on la developpe sous forme de produits de produels.

$$\overline{rp} = \left|\begin{array}{c|c|c} \overline{ap} & \overline{rp-1} & \overline{rp-1} \\ \overline{bp} & ap & bp \\ & \overline{bp} & \overline{ap} \end{array}\right| = \begin{array}{cccc} \left|\begin{array}{c|c|c|c} rp-1 & \overline{rp-1} & \overline{rp-1} & \overline{rp-1} \\ ap & ap & \overline{ap} & \overline{ap} \\ \overline{bp} & \overline{bp} & bp & \overline{bp} \end{array}\right| \\ 3 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \end{array} ; \begin{array}{c} \left|\begin{array}{c|c|c|c} rp-1 & rp-1 & rp-1 & \overline{rp-1} \\ ap & ap & \overline{ap} & ap \\ bp & \overline{bp} & bp & bp \end{array}\right| \\ 0 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \end{array} = rp$$

$$SP = \begin{array}{c} \left|\begin{array}{c|c|c|c} rp-1 & rp-1 & \overline{rp-1} & \overline{rp-1} \\ ap & \overline{ap} & ap & \overline{ap} \\ bp & \overline{bp} & \overline{bp} & bp \end{array}\right| \\ 0 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \end{array} , \quad \overline{Sp} = \begin{array}{c} \left|\begin{array}{c|c|c|c} rp-1 & rp-1 & \overline{rp-1} & \overline{rp-1} \\ ap & \overline{ap} & ap & \overline{ap} \\ \overline{bp} & bp & bp & \overline{bp} \end{array}\right| \\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 7 \end{array}$$

Il existe au total $2^3 = 8$ produels différents qui sont respectivement :

$$Zo = \left|\begin{array}{c} rp-1 \\ ap \\ bp \end{array}\right| , Z_1 = \left|\begin{array}{c} rp-1 \\ ap \\ \overline{bp} \end{array}\right| , Z_2 = \left|\begin{array}{c} rp-1 \\ ap \\ \overline{bp} \end{array}\right| , Z_3 = \left|\begin{array}{c} rp-1 \\ \overline{ap} \\ \overline{bp} \end{array}\right| , Z_4 = \left|\begin{array}{c} \overline{rp-1} \\ ap \\ bp \end{array}\right|$$

$$Z5 = \left|\begin{array}{c} \overline{rp-1} \\ ap \\ \overline{bp} \end{array}\right| , Z6 = \left|\begin{array}{c} \overline{rp-1} \\ \overline{ap} \\ bp \end{array}\right| , Z7 = \left|\begin{array}{c} \overline{rp-1} \\ \overline{ap} \\ \overline{bp} \end{array}\right|$$

(ANNEXE)

CHAP 6 - LES ALEAS DANS LES SYSTEMES COMBINATOIRES

61 Préliminaires : Nature du problème.

Dans l'étude des systèmes combinatoires, nous avons fait implicitement une hypotèse fondamentale, à savoir que l'algèbre des circuits à relais, à diodes, à transistors était l'algèbre de Boole du moins en ce qui concerne l'axiomatique.

Pour celà, nous avons toujours supposé que ces organes technologiques étaient parfaits ce qui n'est pas le cas dans la réalité.

Ainsi pour un relais qui avait 2 positions ou 2 contacts travail et repos; et on a supposé que la vitesse de commutation est infinie.

Or dans tout système de commutation, il ya toujours un retard aussi faible qu'il soit à l'éxcitation. De même que les crêneaux presentent toujours une certaine pente; des implusions parasites.

Donc faut-il rechercher une algébre plus complexe, qui tiendrait mieux compte de la réalité, de même les transitions ont-elles une influence sur les systèmes combinatoires c'est là l'objet de ce problème.

Les systèmes combinatoires se caratérisent uniquement par la valeur du signal de sortie. Les aléas de fonctionnement seront classés en diverses catégories selon le regime transitoire de cette sortie. Nous distinguerons 3 types d'aléas.

- Les aléas statiques
- Les aléas dynamiques
- Les aléas de courses.

62 Aléas statiques :

Définition : On dit qu'un système combinatoire présente un aléa statique si, pour 2 entrées adjacentes, la sortie du système doit être constante (o ou 1) mais qu'il existe un regime transitoire durant lequel la sortie prend une valeur différente (1 ou 0).

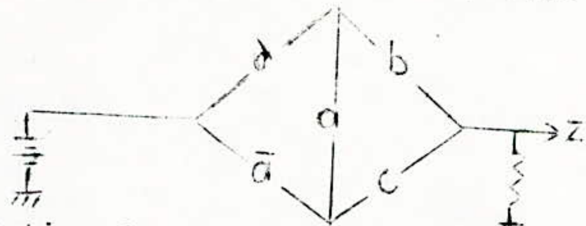
Supposons que la variable booléenne d'entrée "a" distingue les 2 entrées adjacentes, la fonction de sortie peut s'écrire $z = f(a,x)$.

Etant un vecteur dont les composantes sont les variables booléennes d'entrée différentes de "a"

.../...

6.3 NOTIONS DE GROUPE D'OUVERTURE ET DE GROUPE DE FERMETURE

- Pour introduire les notions importantes de groupe d'ouverture:et groupe de ferméture, qui s' avéreront dans la suite necessaire pour établir les conditions d'élémination des aléas statiques; on vas considérer un système à relais



L'équation de la sortie peut s'écrie sous la forme d'un produel :

$$Z = \left|\begin{array}{l} \bar{a}\cdot c \\ a.c.d \\ b\cdot d \\ a.\bar{a}.b \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} a \\ c \\ \\ d \end{array}\right|\begin{array}{c} \bar{a} \\ \\ d \\ \\ \end{array}\left|\begin{array}{c} b \\ \\ c \\ \\ \end{array}\right|\begin{array}{c} a \\ \bar{a} \\ \\ b \end{array}\right|$$

63.1 <u>Défintion</u> : On appelle groupe de fermeture un ensemble de contacts telque si l'onferme, la sortie correspondante soit égale à 1 (bd par exemple est un groupe de fermeture); Un groupe de ferméture est dit instable, si une même variable y apparait sous ses 2(deux) formes (complémentée et non complémentée), et stable dans les cas contraire

exemple : bd est un groupe de fermeture stable et $a.\bar{a}.b$ un groupe de fermeture instable.

63.2 <u>Définition</u> : On appelle groupe d'ouverture un ensemble de contacts du circuit tels que, si on les ouvre, la valeur de sortie soit nulle . Un groupe d'ouverture est dit instable si une même variable y apparait sous ses 2 formes (complémentée et non complémentée) et stable en cas contraire.

Sous la 2 éme forme donnée de en constate que les produels $\left|\begin{array}{c} b \\ c \end{array}\right|$ et $\left|\begin{array}{c} a \\ \bar{a} \\ b \end{array}\right|$ représente respectivement un groupe d'ouverture instable.

<u>Remarque</u> : Sur une table de Karnaugh, un groupe de fermeture stable correspond à un groupement de "1" tandis qu'un groupe d'ouverture stable correspond à un groupement de "O"

.../...

On peut écire aussi :

$$z = \begin{bmatrix} a\ f(1,x) \\ \bar{a}\ f(0,x) \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad z = \begin{bmatrix} a & f(1,x) \\ f(0,x) & \hat{a} \end{bmatrix}$$

(1) (2) (Propriété de la fonction carrée biforme)

Nous allons étudier z sous l'une de ses deux formes :

- Par exemple pour la forme (1)
- Supposons que pour une certaine valeur Xo de X on ait :

$f(1,Xo) = 1$ et $f(0,xo) = 1$

Pour l'entrée Xo la valeur de la sortie s'écrit $Z = \left| \begin{matrix} a \\ \bar{a} \end{matrix} \right|$

La condition necessaire et suffisante pour que, durant le regime transitoire correspendant un changement de valeur de a la sortie prenne la valeur 0 est que la relation suivante soit vérifiée : $z = 0 = \left| \begin{matrix} a \\ \bar{a} \end{matrix} \right|$ (1)'

- De la même façon, si l'on avait la relation

$f(1,xo) = f(o,xo) = 0$

Considèrons la forme (2)

La condition necessaire et suffisante pour que z prenne la valeur 1 durant la commutation de a est que la relation suivante soit vérifiée : :

$$a.\ \bar{a} = 1 \quad (2)'$$

<u>Les relations (1)' et (2)' sont les causes des aléas statiques</u>

64 <u>Recherche des aléas statiques</u> :

- Toute équation booléenne de la sortie d'un circuit exprimée par rapport à une variable a peut s'écrire :

$$z = \begin{bmatrix} Aa \\ B\bar{a} \\ C_{a\bar{a}} \end{bmatrix} \ (2) \quad \text{ou } z = \left| \begin{matrix} H \\ a \end{matrix} \right| \begin{matrix} K \\ \bar{a} \end{matrix} \left| \begin{matrix} M \\ a \\ \bar{a} \end{matrix} \right| L \quad (3)$$

Il ya deux (2) types d'aléas :

- Les aléas sur les groupes de fermeture qui correspondent à : $a+\bar{a} = 0$

La sortie qui a pour valeur une (1) prend la valeur 0 durant le regime transitoire.

- Les aléas sur les groupes d'ouverture qui correspondent à : $a.\bar{a} = 1$ la sortie qui a pour valeur 0 prend la valeur 1 durant le regime transitoire.

Suivant ces deux (2) cas, on envisage une expression de la sortie de la forme (2) ou (3).

64.1 - Aléas sur les groupes de fermeture :

Pour se ramener à une équation de la forme $z = a+\bar{a}$, nous aurons selon que z a pour expression (2) ou (3) à resoudre l'un ou l'autre des systèmes.

Pour (2) $z = a+\bar{a}$ si $A = 1$ $B = 1$ $C = D = 0$

Pour (3) $z = a+\bar{a}$ si $H = 1$ $K = 1$ $M = 0$

Si le système envisagé a des solutions, le circuit aura des aléas sur le groupe de fermeture.

Dans le cas du schéma proposé au début ; on a les relations :

$A = c.d$ $B = c$ $C = b \cdot d$ $D = b$

Le système s'écrit :

$$\left.\begin{array}{r} cd = 1 \\ c = 1 \\ bd = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{Solution} \qquad \begin{array}{r} c = d = 1 \\ b = 0 \end{array}$$

64.2 Aléas sur les groupes d'ouverture :

- Pour se ramener à une équation de la forme $z = a\bar{a}$ et dans le cas du système envisagé nous aurons à résoudre le système suivant :

..../....

$A = B = C = 0$ $\qquad\qquad$ $D = 1$

$H = K = 0$ $\qquad\qquad$ $L = M = 1$

Si ce système là admet des solutions, le système aura des aléas sur le groupe d'ouverture. Pour le schéma proposé; le système s'écrit :

$$cd = 0 \;,\; c = 0 \;,\; bd = 0 \;,\; b = 1$$

On en déduit la solution : $b = 1$, $d = 0$, $c = 0$

64.3 Elimination des Aléas statiques :

- On va essayer de voir qu'elles conditions doivent satisfaire les équations binaires d'un système combinatoire pour que le circuit correspondant soit exempt d'Aléas statiques.

On a les équations précédentes :

$$z = Aa + B\bar{a} + C \qquad (1) \qquad \left|\begin{matrix} Aa \\ B\bar{a} \end{matrix}\right|$$

$$z = (H+a)(K+\bar{a})\,L. \qquad (2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C \ldots\ldots L \left|\begin{matrix} H \\ a \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} K \\ \bar{a} \end{matrix}\right|$$

On élimine les aléas sur les groupes d'ouverture à l'aide de (1), ou les aléas sur les groupes de fermeture à l'aide de deux (2).

Notons que AB (1) et $\left|\begin{matrix} H \\ K \end{matrix}\right|$ dans (2) representent respectivement le consensus direct et le consensus dual.

Travaux Pratiques

SYSTEMES COMBINATOIRES

TP N° 1 : INITIATION AUX SYSTEMES COMBINATOIRES

(T P PREVU POUR 1 HEURE)

TP N° 2 : TRANSCODAGE ET DECODAGE

(T P PREVU POUR 3 HEURES).

Travaux Pratiques

INITIATION AUX SYSTEMES COMBINATOIRES

On donne le schéma suivant :

a - Ecrire la fonction binaire "y" de sortie correspondant au schéma proposé.

Réaliser 2 schémas à l'aide de circuits "ON" uniquement et comparer ces 2 schémas (nombre de circuits mis en jeu et rapidite d'éxecution)

b - Simplifier la fonction "Y" par mise en facteur, et l'écrire sous la forme d'un produit de 2 produels. Donner aussi la fonction complementée Y

c - Réaliser le schéma à l'aide de 2 circuits "OU" et d'un circuit "Et" puis à l'aide de trois circuits "N1" seulement.

SOLUTION

a. On dispose de 4 circuits "ET" et d'un circuit "OU"

- Un circuit ET donne le produit binaire des élements d'entrée tandis que le circuit OU donne le produel des élements d'entrée.

$$\text{Soit} \quad y = \left|\begin{array}{c} A.B \\ A.C \\ C.D \\ B.D \end{array}\right|$$

Pour réaliser le schéma uniquement à l'aide des circuits "ON" il faut que la fonction binaire "y" soit sous la forme d'un produel de produits, ce qui est le cas.

$$\text{On a } \bar{y} = \left|\begin{array}{c|c|c|c} \bar{A} & \bar{A} & \bar{D} & \bar{B} \\ \bar{B} & \bar{C} & \bar{C} & \bar{D} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{D} \\ \bar{B}\bar{C} & \bar{B}\bar{C} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \bar{A}\bar{B} \\ \bar{B}\bar{C} \end{array}\right|$$

$$y = \overline{\bar{y}} = \overline{\left|\begin{array}{c} \bar{A}.\bar{D} \\ \\ B.C \end{array}\right|} = \left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \\ D & C \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} AB \\ AC \\ DB \\ DC \end{array}\right|$$

Si on suppose qu'on a des variables déjà complementées disponibles à l'entrée. On peut envisager un 2 éme schéma.

.../...

La difference qu'il ya entre les 2 logigrammes, c'est que le 1 er est réalisé en 2 couches, ce qui réduit le temps d'action des circuits à 2 fois seulement: le temps de propagation d'un élément, tandis que le 2 ème schéma est réalisé en 3 couches $\Longrightarrow$ temps d'action des circuits = 3 fois le temps de propagation d'un élément.

b) Simplification de la fonction "Y"

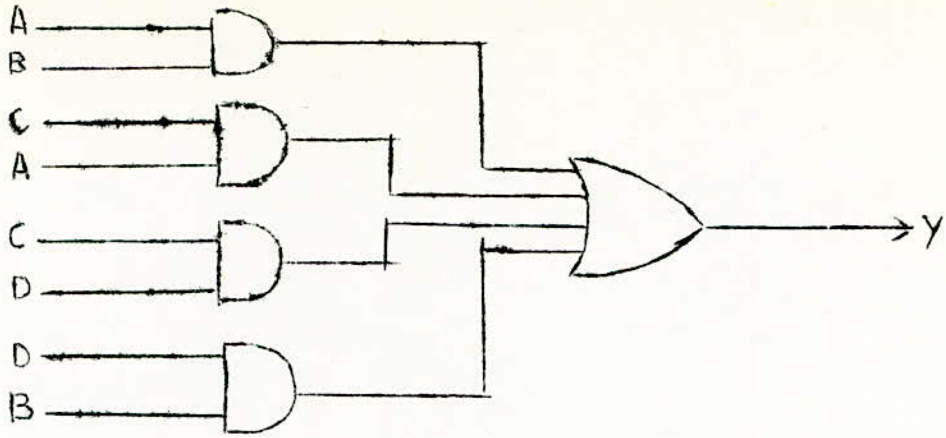
$$y = \left| \begin{array}{c} AB \\ AC \\ \\ CD \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} A & B \\ & C \\ D & B \\ & C \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} A & B \\ D & C \end{array} \right|$$

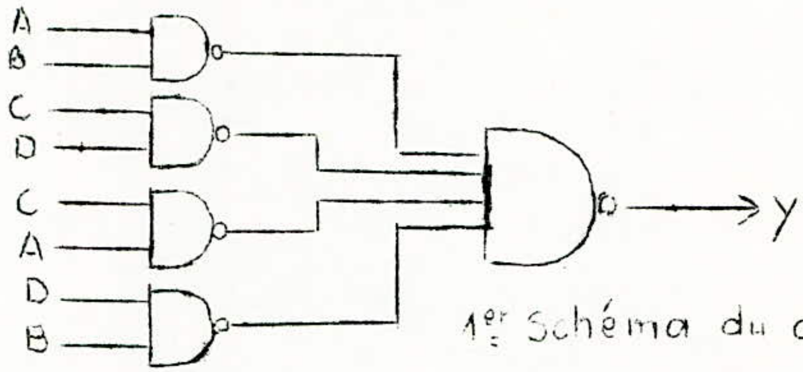
$$\overline{y} = \overline{\left| \begin{array}{c} AB \\ AC \\ CD \\ BD \end{array} \right|} = \left| \begin{array}{c|c|c|c} \overline{A} & \overline{A} & \overline{C} & \overline{B} \\ \overline{B} & \overline{C} & \overline{D} & \overline{D} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \overline{A} & \overline{B}.\overline{C} \\ \overline{B}\overline{C} & \overline{D} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \overline{A}.\overline{D} \\ \overline{B}.\overline{C} \end{array} \right|$$

Pour réaliser "Y" uniquement à l'aide des circuits "NI", il faut que "y" soit sous la forme d'un produit de produels ce qui est le cas :

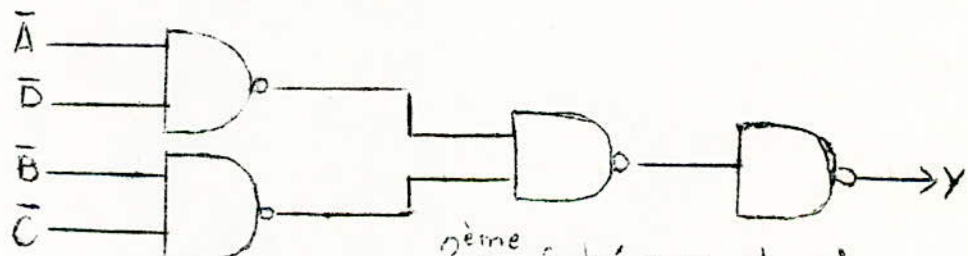
$$Y = \left| \begin{array}{c|c} A & B \\ D & C \end{array} \right|$$

.../...

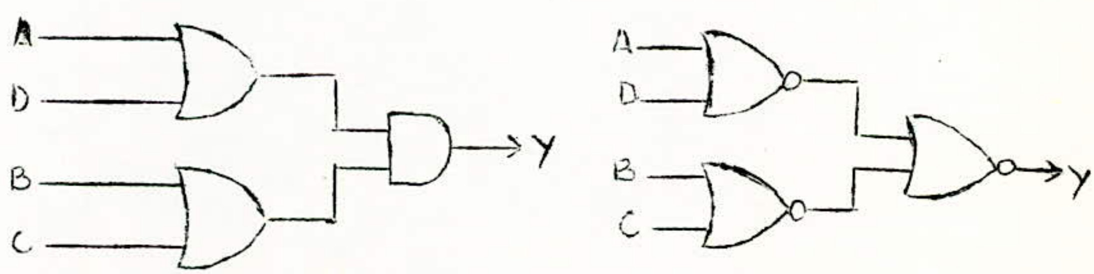




1er Schéma du a)



2ème Schéma du a)



Schémas du b)

TRAVAUX PRATIQUES.

TRANSCODAGE ET DECODAGE

1°) Etablir la fonction de décodage developpée et simplifiée

$Y_{10} = Y_9 \cdot Y_8 \cdots\cdots\cdots Y_0$ relative au code de stibitz (code excédant "z") dont les états sont rappelés dans de verite.

Faire le schèma de la matrice de décodage utilisant des circuits "N1" en supposant les variables $x_1, \bar{x}_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}_4, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ disponibles sur des barres de distribution OMNIBUS.

2°) Ecrire la fonction de décodage du code Stibitz, précédent sous forme maillée en faisant apparaître les groupements respectifs (y_0, y_4, y_8), (y_1, y_5, y_9), (y_2, y_6), (y_2, y_6), (y_3, y_7).

En déduire une matrice de décodage à diodes montées en fonction 'ET', en supposant que les variables directes et complementées sont disponibles sur des barres omnibus.

3°) Etablir respectivement les fonctions simplifiés de transcodage $y_4 = f(x_4)$ et $X_4 = \emptyset\,(Y_4)$ qui permettent le passage d'un code de stibiz à un code decimal binaire, et vice versa selon la correspondance établie par les tableaux ci-aprés et en utilisant au mieux les combinaisons disponibles.

- Montrer que la 1 ére fonction de transcodage peut être réalisée à l'aide de portes "NI" à 2 entrées quand on l'écrit sous forme paramètrique ; en posant $a = x_1 x_2$

- Montrer, de même, que la seconde fonction peut être réalisée à l'aide de porter "ON" à 2 entrées en posant $b = y_1 \, \bar{y}_2$

on supposera les variables disponibles, sous leurs deux formes, directe et complementée

..../....

TABLE DE VERITE :

	x_4	x_3	x_2	x_1	Y_{1D}
0	0	0	1	1	$Y0 = 1$
1	0	1	0	0	$Y1 = 1$
2	0	1	0	1	$Y2 = 1$
3	0	1	1	0	$Y3 = 1$
4	0	1	1	1	$Y4 = 1$
5	1	0	0	0	$Y5 = 1$
6	1	0	0	1	$Y6 = 1$
7	1	0	1	0	$Y7 = 1$
8	1	0	1	1	$Y8 = 1$
9	1	1	0	0	$Y9 = 1$
10	1	1	0	1	Combinaisons disponibles
11	1	1	1	0	
12	1	1	1	1	
13	0	0	0	0	
14	0	0	0	1	
15	0	0	1	0	

1°) Determination des formes developpées du décodage :
- On associé les combinaisons 0.14.15 (en effet dans ce cas il n'ya changement que pour un seul digit)

Donc $x_2$et x_1 qui varieront pour les combinaisons 0.14.15 ne seront pas prises en considération pour déterminer Y 0.

Soit $Y0 = \bar{x}_4.\bar{x}_3$

- On associe les combinaisons 1 et 13 pour determiner .. y_1
  On constate que seul x_3 varie donc il ne sera pris en compte

  Soit $y_1 = \bar{x}_4.\bar{x}_2.\bar{x}_1$

- On associe les combinaisons 2 et 14 pour déteminer y_2. Dans ce cas x_3 sera écartée soit $y_2 = \bar{x}_4.\bar{x}_2.x_1$.
- On associe les combinaisons 3 et 15 pour détemminer y_3

  soit $y_3 = \bar{x}_4.\bar{x}_2.\bar{x}_1$

..../..

- On associe les combinaisons 4 et 12 pour déterminer y_4

  $y_4 = x_3 . x_2 . x_1 .$

- On associe les combinaisons 5 et 13 pour déterminer y_5

  $y_5 = \bar{x}_3 . \bar{x}_2 . \bar{x}_1$

- On associe les combinaisons 6 et 14 . Pour déterminer y_6

  $y_6 = \bar{x}_3 . \bar{x}_2 . x_1$

- On assócie les combinaisons 7 et 15 pour déterminer y_7

  $y_7 = \bar{x}_3 . x_2 . \bar{x}_1$

- On associe les combinaisons 8 et 12 pour déterminer y_8

  $y_8 = x_4 . x_2 . x_1$

- On associe les combinaisons 9-10 et 11 pour déterminer y_9

  $y_9 = x_4 . x_3$

D'où la forme developpée du decodage.

$y_0 = \bar{x}4.\bar{x}3$	$y_3 = \bar{x}4.x2.\bar{x}1$	$y5 = \bar{x}3.\bar{x}2.\bar{x}1$	$y_8 = x4.x2.x1$
$y1 = \bar{x}4.\bar{x}2.\bar{x}1$	$y_4 = x3.x2.x1$	$y6 = \bar{x}3.\bar{x}2.x1$	$y_9 = x4.x3$
$y2 = \bar{x}4.\bar{x}2.\bar{x}1$		$y7 = \bar{x}3.x2.\bar{x}1$	

3°) - Etablir respectivement les fonctions simplifiée de Transcodage $y4 = f(x4)$ et $y4 = \varnothing\ (Y4)$ qui permettent le passage d'un code de stibitz à un code decimal code binaire et vice vers a

x4	x3	x2	x1		y4	y3	y2	y1
O	O	1	1	———— 0 ————	O	O	O	O
O	1	O	O	———— 1 ————	O	O	O	1
O	1	O	1	———— 2 ————	O	O	1	O
O	1	1	O	———— 3 ————	O	O	1	1
O	1	1	1	———— 4 ————	O	1	O	O
1	O	O	O	———— 5 ————	O	1	O	1
1	O	O	1	———— 6 ————	O	1	1	O
1	O	1	O	———— 7 ————	O	1	1	1
1	O	1	1	———— 8 ————	1	O	O	O
1	1	O	O	———— 9 ————	1	O	O	1
1	1	O	1	Combinaisons disponibles.	1	O	1	O
1	1	1	O		1	O	1	1
1	1	1	1		1	1	O	O
O	O	O	O		1	1	O	1
O	O	O	1		1	1	1	O
O	O	1	O		1	1	1	1

Code de STIBITZ   Code D.C.B

· La 1 ére fonction de transcodage peut être réalisée à l'aide de portes "NI" quand on l'écrit sous forme paramétrique en posant $a = x1.x2$.

On a : $Y1 = \bar{x}1$

- D'autre part en considérant les combinaisons (1-5-7),(2-6-8) (3-5-7) ; (4-6-8), on obtient :

$$y2 = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x}1 & x1 \\ \bar{x}2 & x2 \end{array}\right| \qquad \text{C'est à dire } y2 = \bar{a} \cdot \left|\begin{array}{c} x1 \\ x2 \end{array}\right|$$

Fonction Y_4

$y_I = \bar{x}_I$

$$y_2 = \left| \begin{matrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_I \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x_I \\ x_2 \end{matrix} \right|$$

$$y_3 = \left| \begin{matrix} x_3 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_I \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x_I \cdot x_2 \\ \bar{x}_3 \end{matrix} \right|$$

$$y_4 = x_4 \left| \begin{matrix} x_3 \\ / \\ x_I \cdot x_2 \end{matrix} \right|$$

Forme paramétrique

$a = x_I \cdot x_2$

$y_I = \bar{x}_I \qquad y_3 = \left| \begin{matrix} x_3 \\ \bar{a} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a \\ \bar{x}_3 \end{matrix} \right|$

$$y_2 = \bar{a} \left| \begin{matrix} x_I \\ x_2 \end{matrix} \right| \qquad y_4 = x_4 \left| \begin{matrix} a \\ x_3 \end{matrix} \right|$$

Fonction X_4

$x_I = \bar{y}_I$

$$x_2 = \left| \begin{matrix} \bar{y}_2 \cdot \bar{y}_I \\ \\ y_2 \cdot y_I \end{matrix} \right|$$

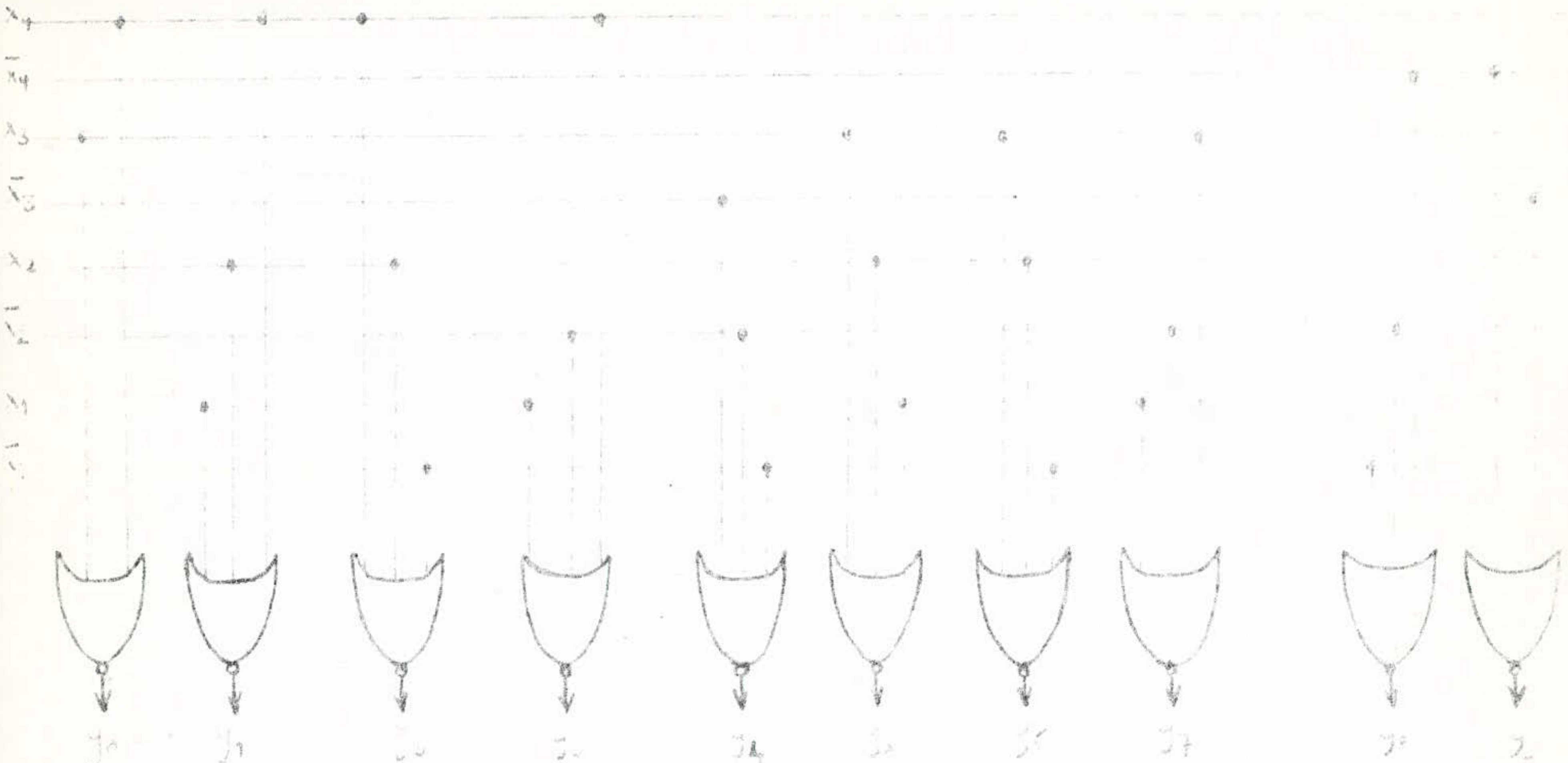
$$x_3 = \left| \begin{matrix} y_3 \cdot \bar{y}_2 \cdot \bar{y}_I \\ \begin{matrix} y_I \\ y_2 \end{matrix} \middle| \bar{y}_3 \end{matrix} \right|$$

$$x_4 = \left| \begin{matrix} y_4 \cdot \bar{y}_3 \\ \\ y_3 \left| \begin{matrix} y_I \\ y_2 \end{matrix} \right. \end{matrix} \right|$$

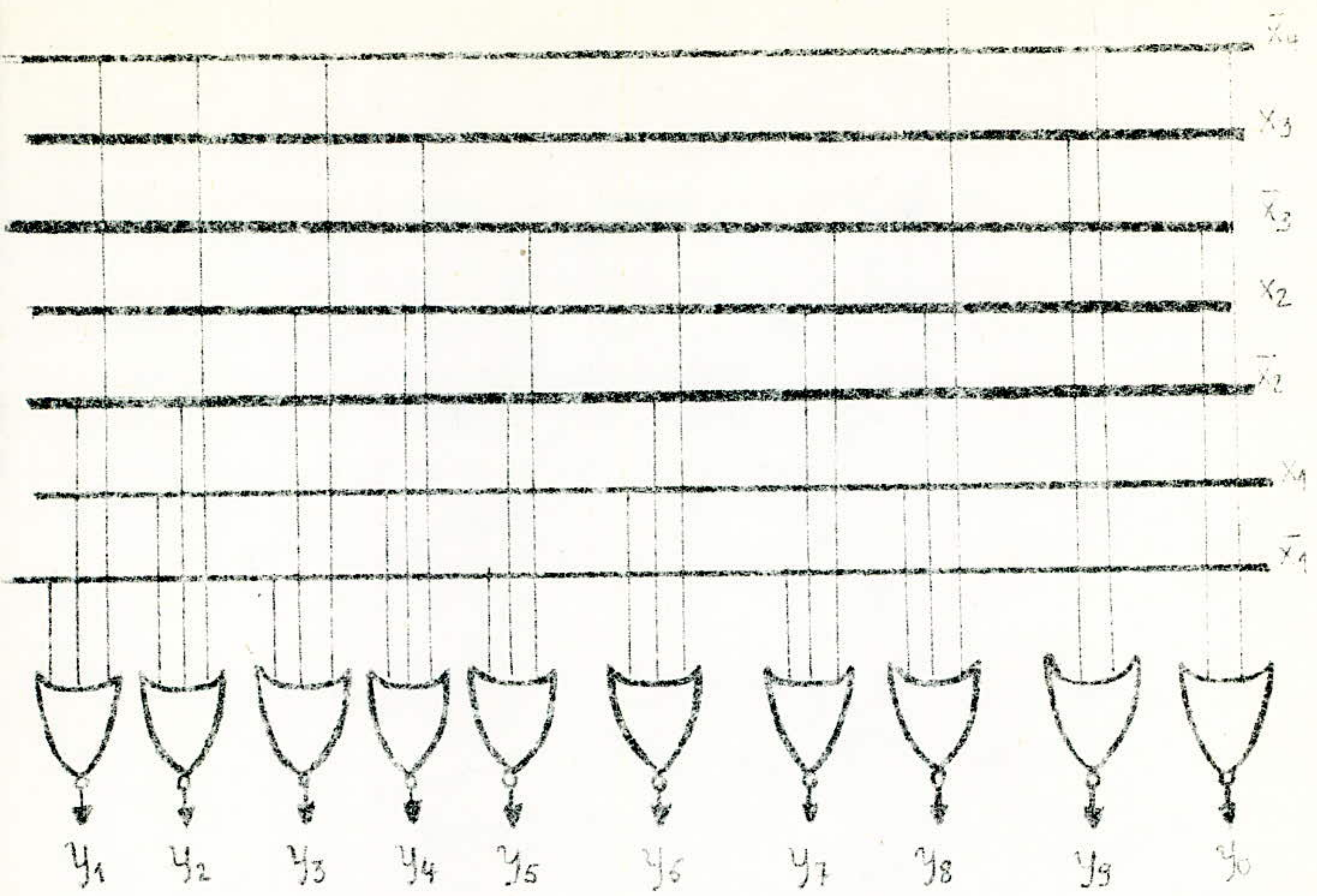
$$b = \left| \begin{matrix} y_I \\ y_2 \end{matrix} \right| \qquad x_3 = \left| \begin{matrix} y_3 \cdot \bar{b} \\ b \cdot \bar{y}_3 \end{matrix} \right|$$

$$x_I = \bar{y}_I$$

$$x_2 = \left| \begin{matrix} \bar{b} \\ \\ y_I \cdot y_2 \end{matrix} \right| \qquad x_4 = \left| \begin{matrix} y_4 \cdot \bar{y}_3 \\ \\ y_3 \cdot b \end{matrix} \right|$$



SCHEMA DE LA MATRICE DE DECODAGE AVEC DES "NOR"

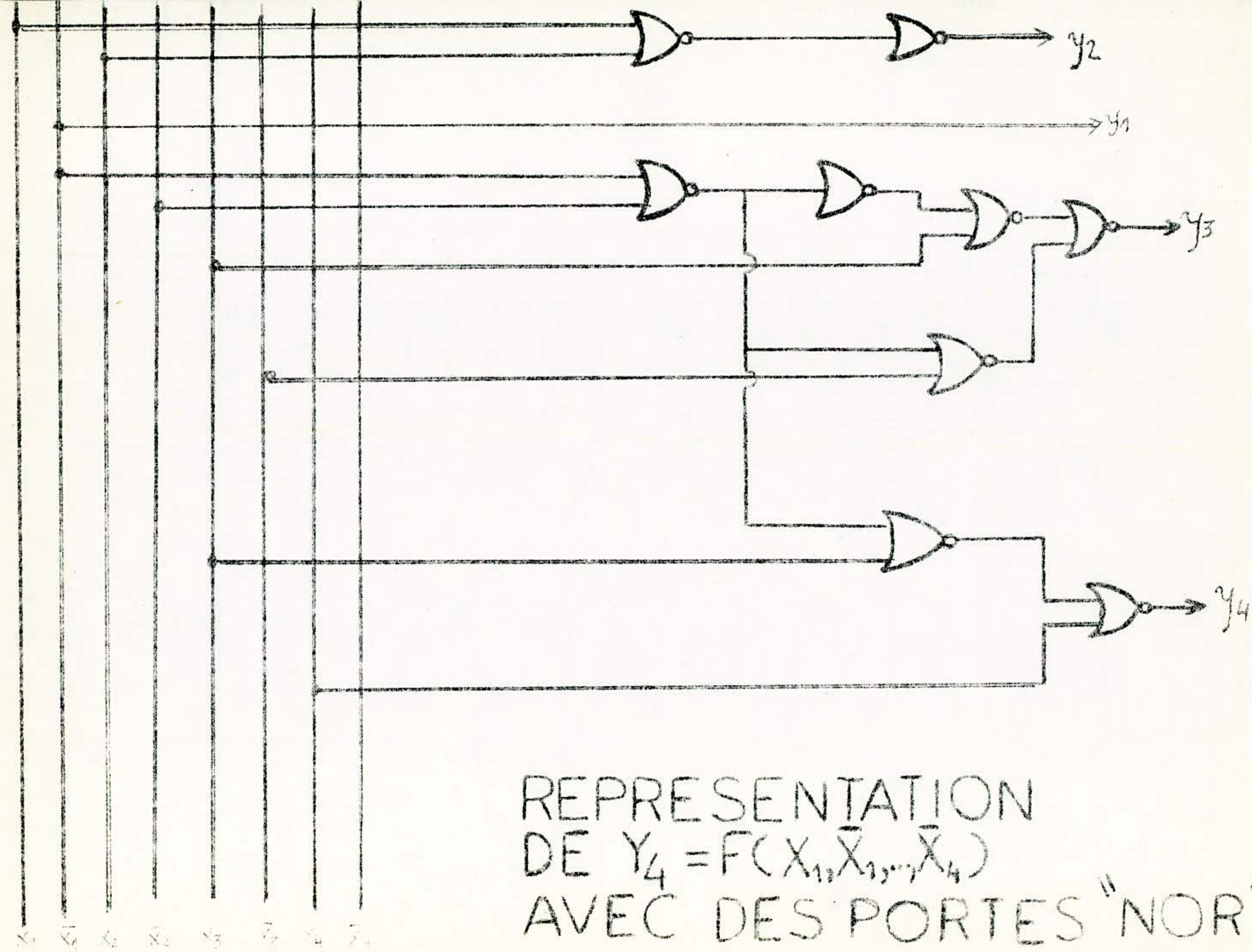


SCHEMA DE LA MATRICE

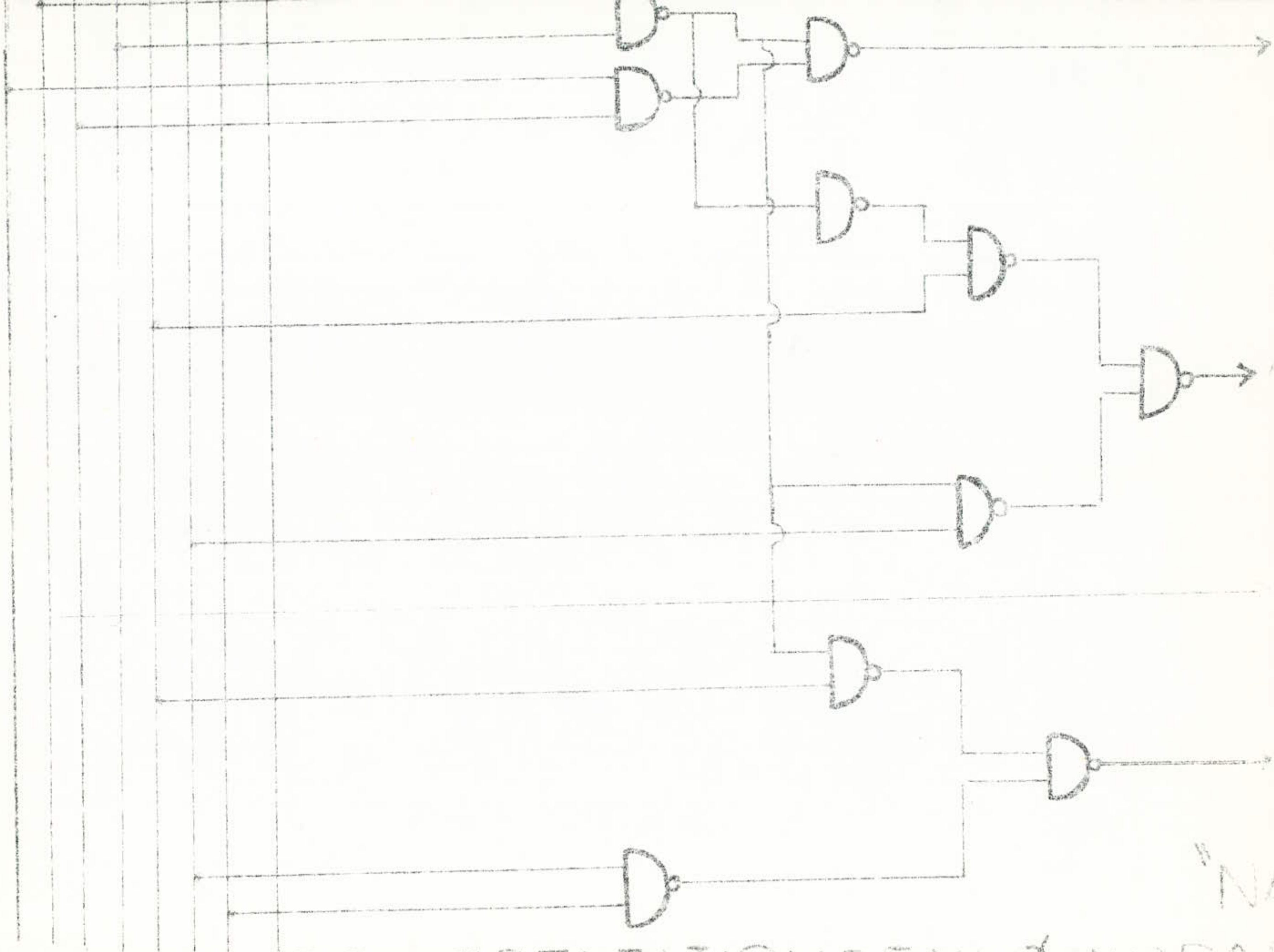
DE DECODAGE UTILISANT

DES CIRCUITS

"NOR"



REPRESENTATION
DE $Y_4 = F(X_1, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_4)$
AVEC DES PORTES "NOR"



"NA

REPRESENTATION.DE.X4:Ø(.Y4)PA

1 - INTRODUCTION DES PRINCIPALES FONCTIONS SEQUENTIELLES

12 - FONCTIONS REFLEXES

13 - FONCTIONS MEMOIRES

14 - ETUDE SUR LES REGISTRES A DECALAGE .

I5 - LES REGISTRES " MEMOIRES " .

I6 - LES MATRICES"MEMOIRES" .

1 - INTRODUCTION DES PRINCIPALES FONCTIONS SEQUENTIELLES -

L'information, véhicule des mesages n'est toujours pas accessible directement à notre entendement. Elle subit une évolution dans le temps, et ne sera pas à notre portée en tant que connaissance, à cause du rythme de son déroulement.

Pour cela au niveau de l'émission, ou de la transmission, il est impératif de transformer l'information suivant un certain schéma, c'est ce qu'on est convenu d'appeler CODAGE.

Le codage habituellement choisi consiste en une application de l'ensemble des informations vers un ensemble numerique.

Après mémorisation et traitement, la transmission se fait sur un mode que l'on nommera " série-parallèle "

Dans cette seconde partie, qui traite des outils nécessaires à l'étude de systémes sequentiels. L'analyse binaire sequentielle, tout en incluant les fonctions de transcodage, va faire apparaître 2 classes complementaires de fonctions essentielles.

Ce sont les fonctions réflexes $Y = \emptyset (x,y)$ susceptibles d'une représentation binaire intimement liée à la notion de seuil de commutation et à la variable horloge. Tandisque les fonctions génératrices ne peuvent pas être developpées en termes binaires, mais illustrent ce qu'on appelle séries de commutation liées ou non à des variables indépendantes parmi, ces classes de fonctions, en étudiera :

- Les fonctions "mémoires "
- Les fonctions dibinaires
- Les fonctions impulsions
- Les fonctions délais

Il s'agit donc de faire une décomposition des systèmes selon des fonctions élémentaires. De tels systèmes, comportent des fonctions de différents types qui dépendent d'un vecteur variable d'entrée " X " et d'une fonction Autogénérative " H " comprenant un ou plusieurs éléments horloge.

1.2. FONCTIONS REFLEXES

1.2-1 Définition :

On écrit une fonction réfléxe sous une forme semi implicite : $Yp = \emptyset\ (Xn, Yp)$. Le vecteur fonction Yp admet pour composantes " p " fonctions binaires.

Yp, Yp-2, ... Y2, Y1, le vecteur variable de commande Xn, n variables binaires xn, xn-2, ..., x2, X1 . $Xn \in E01, \forall i = 1,2,......$ P. et $xj \in Eo1\ \forall\ j = 1, ...\ n.$

Les valeurs que prennent les vecteurs " Yp " et Xn " sont entièrement déterminés par des nombres binaires constitués de chiffres associés aux composantes.

1.2.-2 Concept de Base :

Le vecteur fonction n'est jamais directement accessible. Il y a une distinction fondamentale entre variable et fonction dont les relations reciproques ne sont pas symétriques.

En ce qui concerne les fonctions reflexes, la séparation se fait en définissant comme composante du vecteur fonction, tout élément binaire qui n'est pas entièrement indépendant des états propres du système, limité bien entendu à la fonction étudiée.

Une fonction reflexe $Yp = \emptyset\ (xn, yp)$ posséde la propriété spécifique de pouvoir faire correspondre plusieurs valeurs du vecteur fonction " Yp " à une seule et même valeur du vecteur variable Xn. Ceci n'est pas le cas des fonctions de transcodage.

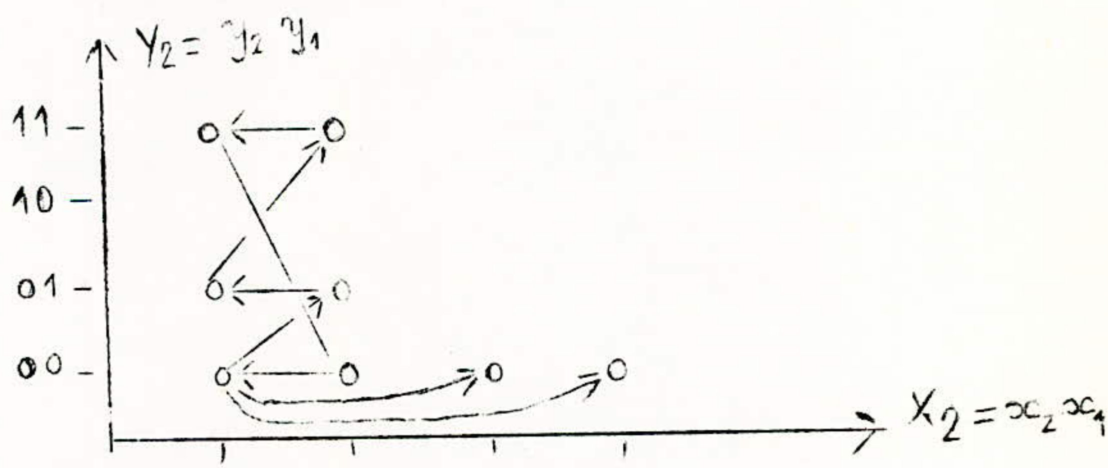
Comme pour les fonctions de transcodage, on peut faire une representation graphique dans un système d'axes " XOY ". On porte en abscisses Xn, et Yn en ordonnées. Le graphe sequentiel obtenu est discontinu. Il est fini; le nombre de points reliés par ordre de succession, le graphe est orienté.

Toute modification ou veriation de "Xn" modifie la fonction Yp dont la valeur finale va dépendre également de sa propre valeur, immédiatement, avant la modification. Il est exclu que le vecteur fonction puisse changer de valeur spontanément si le vecteur de commande n'a subi aucune variation.

Il n'y a donc pas de passage direct d'un point à un autre, lorsque ces points sont situés tous deux, sur une même verticale.

Cela résulte de la distinction fondamentale faite entre variable et fonction.

<u>Exemple de graphe séquentiel</u> :



1.2-3 Condition des états:

Si nous savons, en effet, exprimé par des nombres binaires les vecteurs fonctions " Yp " et variable " Xn " d'un ensemble séquentiel, nous pouvons définir un état " $\mathcal{E}_K$ " comme le nombre binaire associé à l'ensemble ordonné des composantes réunies des vecteurs " Yp " et " Xn " pour une combinaison particulière $\mathcal{E}_k = Xn^k, Yp^k$

$$N \leqslant 2^{n+p}$$

N : nombre total des états " n " nombre de composantes binaires du vecteurs variable. " p " : nombre de composantes binaires du vecteur c'est une condition nécessaire, à laquelle on adjoint une autre condition pour chaque valeur du vecteur " Xn " le nombre d'états $Nx \leqslant 2p$, nombre maximal d'états distincts pouvant être différencies par le vecteur fonction " Yp ".

" N " représente l'ensemble des états stables et des états de commutation. Nous dirons que $\mathcal{E}_1 = Xn^1, Yp^1$ est un état stable, lorsque le vecteur Yp conserve sa valeur aussi longtemps que le vecteur variable Xn reste égal à Xn

Si $\mathcal{E}_1 = Xn^1, Yp^1$ et $\mathcal{E}_2 = Xn^2, Yp^2$ sont 2 etats stables consécutifs, le passage de Xn^1 à Xn^2 entraine le passage de l'état $\mathcal{E}_1$ à l'état $\mathcal{E}_2$ en passant au moins pas un état intermédiaire $\mathcal{E}_{12}$, selon les sequences.

$$\mathcal{E}_1 = Xn1 \ , \ Yp^1 \rightarrow \mathcal{E}_{12} = Xn^2, Yp^1 \rightarrow \mathcal{E}_2 = Xn^2, Yp^2$$

Par définition : 12 qui est un état ftigace (sommaire), est appelé état de commutation pour une table de verite sequentielle compléte, il est necessaire de compter les états de commutation dans le nombre total d'états N.

Il faut s'assurer que le nombre de composantes du vecteur fonction est suffisant pour permettre la résolution pratique du problème

Donc, il faut controler que $N \leq 2^{n+p}$ et $N_x \geq 2^p$ est vérifiée dans le cas où $N > 2^{n+p}$ ou bien $N_x > 2^p$. Le problème ne peut être abordé qu'à la condition d'ajouter " K " fonctions supplémentaires.

Le nombre d'états " N " étant fini, il faut pour pouvoir envisager un fonctionnement permanent que le système séquentiel soit bouclé.

Chaque composante binaire doit donc, pour intervenir dans un cycle subir au moins 2 transitions $0 \rightarrow 1$ et $1 \rightarrow 0$, ou bien $1 \rightarrow 0$ et $0 \rightarrow 1$.

Afin de retrauver la même valeur lorsque se présente a nouveau l'état initial choisi comme début du cycle. Chaque composante binaire ajoutée fait donc apparaître au moins 2 états supplémentaires.

Pour " K " composantes ajoutées le nombre d'états " N " est alors tel que $N'' \geq N + 2k$

$$N + 2k \leq 2^{n+p+k}$$

On peut déterminer le nombre optimal " k " de composantes binaires.

1. 3 FONCTIONS MEMOIRES

On distingue 3 types de fonctions mémoires, parmi les fonctions mémoires élémentaires, c'est à dire celles dont le vecteur fonction ne comprend qu'une seule composante binaire

$$Y = \emptyset\ (Y,X) \quad \text{avec} \quad Y \in Eo1$$

Si on considère les fonctions carrées biformes, on constate que $Y = \emptyset\ (y,x)$ peut se mettre sous la forme d'une fonction carrée biforme (en y).

En effet sont $Y = \emptyset\ (y,x) = \left| \begin{array}{c} Y.A\ (x) \\ \\ \bar{Y}.B\ (x) \end{array} \right|$ dans laquelle $(A(x), B\ (x)) \in E_{01}$

Seulement, il faut que l'une des 2 implications suivantes soit vérifiée :

$$[A\ (x) = 0] \Longrightarrow [B\ (x) = 0]$$
$$[B\ (x) = 1] \Longrightarrow [A\ (x) = 1]$$

A partir de la fonction mémoire élémentaire envisagée, mise sous la forme d'une fonction carrée biforme, et suivant le choix de A (x) et B (x) on aura 3 types de fonctions mémoires.

1.3 - 1 <u>Fonction Mémoire à mise à zéro prioritaire</u> (R prioritaire)

Considérons la 1^{ere} implication $[A\ (x) = 0] \Longrightarrow [B\ (x) = 0]$

cette implication entraine $B\ (x) = A\ (x).\ S\ (x)$

$$\text{soit } Y = \left| \begin{array}{c} Y.\ A\ (x) \\ \\ \bar{Y}\ A\ (x).\ S(x) \end{array} \right| = A\ (x) \left| \begin{array}{c} Y \\ \\ \bar{Y}\ .\ S\ (x) \end{array} \right|$$

Si on pose $A\ (x) = \bar{R} \Rightarrow \quad Y = \bar{R} \left| \begin{array}{c} Y \\ \bar{Y}\ .\ S \end{array} \right|$

La solution d'instabilité $Y = Y'$ est éliminée, on aura ainsi :

$$(S = 1\ ,\ R = 0) \Longrightarrow Y = 1$$
$$(S = 0\ ;\ R = 0) \Longrightarrow Y = Y$$

La dernière égalité signifie que la fonction "Y" conserve la valeur (0 ou 1) qui lui est imposée par l'état qui précéde immédiatement le passage à (R = S = 0)

D'où l'appellation de fonction mémoire.

D'autre part, nous remarquons que quelque soit la valeur donnée à S ou a Y = 0. C'est à dire que si (R = 1 ; S = Ø) $\Longrightarrow$ (Y = 0)

On dira dans ce cas que la fonction mémoire est à " R " prioritaire.

1.3 - 2 Fonction Mémoire à armément prioritaire (S prioritaire)

La 2ème implication (B (x) = 1) $\Longrightarrow$ (A(x) = 1) conduit à l'égalité suivante :

$A(x) = \left| \begin{array}{l} B(x) \\ \bar{R}(x) \end{array} \right|$ Si on reporte cette valeur de A (x) dans y sous forme de fonction carrée biforme; on en déduit :

$$Y = \left| \begin{array}{l} y \left| \begin{array}{l} B(x) \\ \bar{R}(x) \end{array} \right. \\ \\ \bar{Y} . B(x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} Y.\ \bar{R}(x) \\ \begin{array}{l} Y \\ \bar{Y} \end{array} \left| \ B(x) \right. \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} Y.\ R(x) \\ B(x) \end{array} \right|$$

En posant B (X) = S (x) nous aurons $Y = \left| \begin{array}{l} Y.\ \bar{R} \\ S \end{array} \right|$

La solution $Y = \bar{Y}$ se trouve également éliminée dans ce cas, et nous avons successivement :

(S = 0 ; R = 1) $\Longrightarrow$ (Y = 0)
(S = 0 ; R = 0) $\Longrightarrow$ (Y = Y)

Cette dernière implication caractérise aussi une fonction "mémoire" Quelque soit la valeur de " R " nous avons
(S = 1, R = Ø) $\Longrightarrow$ (Y = 1)

La fonction mémoire obtenue est à armement prioritaire ou à "S" prioritaire.

1.3. - 3 Fonction Mémoire sans priorite où R - S Symétique

Dans le cas où on considère les 2 implications données au préalable.

Si on pose $A\ (x) = \left| \begin{array}{c} S \\ \bar{R} \end{array} \right|$ et $B\ (x) = S.\bar{R}$, les 2 implications sont satisfaites.

C'est à dire que si $A\ (X) = 0 \rightleftharpoons B\ (x) = 0$

et si $B\ (x) = 1 \rightleftharpoons A\ (x) = 1$

En effet, $A\ (x).\ B\ (x) = S.\bar{R} = B\ (x)$ le facteur $A\ (x)$ est bien un implicant de $B\ (x)$

L'égalite $\left| \begin{array}{c} A\ (x) \\ B\ (x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} S \\ \bar{R} \end{array} \right| = A\ (x) \rightleftharpoons B\ (x)$ est un implicant dual de $A\ (x)$.

Si nous remplaçons dans " Y " $A\ (x)$ et $B\ (x)$ par leurs expressions en S et R, nous obtenons successivement :

$$Y = \left| \begin{array}{c} Y \left| \begin{array}{c} S \\ \bar{R} \end{array} \right. \\ \bar{Y}.\ S.\bar{R}. \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} S \left| \begin{array}{c} Y \\ \bar{Y}.\bar{R} \end{array} \right. \\ \bar{R} \left| \begin{array}{c} Y \\ .\bar{Y}.S \end{array} \right. \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} S \left| \begin{array}{c} Y \\ \bar{R} \end{array} \right. \\ \bar{R} \left| \begin{array}{c} Y \\ S \end{array} \right. \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} Y \\ S.\bar{R} \end{array} & \begin{array}{c} S \\ \bar{R} \end{array} \end{array} \right|$$

Ce qui entraine les implications suivantes.

$(\ S = 1,\ R = 0\ ) \rightleftharpoons (\ Y = 1\ )$

$(\ S = 0,\ R = 0\ ) \rightleftharpoons (\ Y = Y\ )$ fonction mémoire

$(\ S = 0,\ R = 1\ ) \rightleftharpoons (\ Y = 0\ )$

$(\ S = 1,\ R = 1\ ) \rightleftharpoons (\ Y = Y\ )$ fonction mémoire

Il n'existe dans ce cas aucune priorité, et nous dirons que la fonction " Mémoire " est sans priorité où à " R - S " symétrique.

13.4 PROPRIETES GENERALES DES FONCTIONS MEMOIRES ELEMENTAIRES

Une fonction mémoire élementaire est une fonction reflexe binaire ($y = \emptyset(y,x)$) $\in$ EO1 que l'on fait dependre de 2 variables binaires "R" et "S" considérées comme independante l'une de l'autre est telleque.

$$(R=S=O) \Longrightarrow (y = y)$$

Dans ce cas la valeur de la fonction est identique à celle qui lui a été imposée, dans l'état immédiatement precédent.

Si l'état précédent était (R=O;S=1) alors y =1 pour R=S=O
Si l'état précédent était (R=1,S=O) alors y =O pour R=S=O

La combinaisons R=O, S=1 des variables entraine la transition $O \longrightarrow 1$ de la fonction y.

La combinaison R =1 , S=O des variables entraine la transition $1 \longrightarrow O$ de la fonction y

NOTONS que les fonctions "mémoires" élémentaires peuvent être établies également en partant d'une table de verite sequentielle.

Nous ferons apparaître dans la table de vérite sequentielle, y qui sera considérée comme une variable pour l'établissement des produits et produels intervenant.

Les transitions de la fonction "y" qui correspondent aux états de commutations seront préciseés.

Les états stables sont repérées par toutes les combinaisons où une même valeur des fonctions apparait à droite et à gauche du trait vertical double. Les états de commutation correspondent aux autres cas, où cette dernière condition n'est pas réalisée.

A partir d'une table de verite sequentielle, on va établir les 3 types de fonctions mémoires vues precédemment, et ceci en appliquant les conditions necessaires aux états stables et aux états de commutations ou de transition.

.../...

	R	S	Y	Y	
→ 0	0	0	0	0	st
↓ 2	0	1	0	1	Co
↓ 3	0	1	1	1	st
↕ 1	0	0	1	1	st
↓ 5	1	0	1	0	Co
→ 4	1	0	0	0	st
6	1	1	0	Ø	Combinaisons à preciser dans
7	1	1	1	Ø	le choix de la fonction

- On constate que la condition des états est vérifiée

$N = 6\ (0,2,3,1,5,4)$ avec $2^{n+p} = 8$

Donc $N < 2^{n+p}$ $(6 < 8)$

Parmi les combinaisons successives écrites horizontalement, les lignes qui correspondent aux commutations ont été repérées par les lettres "Co" et les lignes qui correspondent aux états stables, par les lettres "St"

(C'est à dire qu'on peut revenir en sens inverse et retrouver le même état)

Par contre les fléches dirigés dans un seul sens indiquent que la séquence correspondante est irréversible

1°) Si nous associons les combinaisons 1,2 et 3 pour lesquelles la fonction "y" (colonne de droite) est égale à 1 , ce qui revient à donner à "y" la valeur (0) pour les combinaisons 6et7

$$y = \left|\begin{matrix} \bar{R}.\bar{S}.\bar{y} \\ R.S.y \\ \bar{R}.\bar{S}.y \end{matrix}\right| = \bar{R} \left|\begin{matrix} S.\bar{y} \\ S.y \\ \bar{S}.y \end{matrix}\right| = \bar{R} \left|\begin{matrix} S \\ \bar{S}.y \end{matrix}\right| = \bar{R} \left|\begin{matrix} S \\ y \end{matrix}\right|$$

.../...

On constate que la forme obtenue correspond à une fonction mémoire à R. prioritaire .

2°) Dans le cas, où on associe les combinaisons 0-4-5 qui correspondent aux valeurs nu: .es de la fonction"y" ce qui revient à donner à 6 et 7 la valeur. 1

On écrit y sous forme de produits de produels :

$$y = \left|\begin{array}{c|c|c} \bar R & \bar R & \bar R \\ S & S & S \\ y & \bar y & y \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} R & \bar Y & \bar R \\ S & S & S \\ y & \bar R & y \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} R.y & \bar R \\ S & S \\ y.\bar R & y \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} S \\ y.\bar R \end{array}\right|$$

On a donc une fonction mémoire à "S" prioritaire.

3°) Nous pouvons en plis associer à cette dernière fonction, la combinaison "6" (R =1, S=1 y =0) "y" est alors égal à l'unite pour la combinaison "7"

$$y = \left|\begin{array}{c|c|c|c} \bar R & \bar R & \bar R & \bar R \\ S & S & S & S \\ y & \bar y & y & y \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} y.\bar R & \bar R \\ S & \bar S \\ & y \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} y.\bar R \\ S.\bar R \\ S.y \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} y & \bar R \\ & S \\ \multicolumn{2}{c}{S.\bar R} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} y. & \bar R \\ S.\bar R & S \end{array}\right|$$

La fonction obtenue est celle d'une fonction mémoire symtrique

4°) Une quatrieme solution consisterait à associer à la fonction $\left|\begin{array}{c} y.\bar R \\ S \end{array}\right|$, le produel qui correspond à la combinaison "7" (R=1, S=1,y=1) "y" est alors égale à 1 pour la combinaison "6"

$$y = \left|\begin{array}{c|c} y.\bar R & \bar R \\ S & \bar S \\ & \bar y \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} y.\bar R \\ S.\bar R \\ S.\bar y \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar R & S \\ & y \\ \bar y.S & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar R & S \\ & \\ \bar y & y \end{array}\right|$$

Cette solution est à rejeter parceque l'on a :

$$(R = S = 1) \Rightarrow (y = \bar y) \Rightarrow y \notin \text{EO1}$$

13.5 ETABLISSEMENT DES FONCTIONS MEMOIRES (a partir des tables de KARNAUGH)

- Bascule à 2 entrées :

y/RS	00	01	11	10
0	0	1	Ø	0
1	1	1	Ø	0

à partir de cette table établit d'aprés la table de verite de séquentielle, on peut distinguer 4 cas.

Ø = 0 ; Ø = 1 ; deux autres cas sont à prévoir; dont l'un donnera une solution d'instabilité du type $y = \bar{y}$ et sera de ce fait éliminé.

1 er cas : Ø = 0

y/RS	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	0	0

$y = \bar{R} \left| \begin{array}{l} S \\ y \end{array} \right|$ Fonction mémoire à R préoritaire.

2 éme cas : Ø = 1

y/RS	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0

$y = \left| \begin{array}{l} S \\ y.\bar{R} \end{array} \right|$ Fonction memoire à S préoritaire.

3 éme cas : Ø = 0 ; Ø = 1

y/Rs	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

$y = \left| \begin{array}{l} \bar{y}.S \\ y.\bar{R} \\ \bar{R}.S \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \bar{y}.S \\ \bar{R}.y \end{array} \right|$

.../...

(On peut supprimer $\bar{R}S$ qui est le consensus de $\bar{y}S$ et $y.\bar{R}$)

ce cas est impossible, en effet

$S = 1 \quad , R = 0 \Longrightarrow y = 1$

$S = 0 \quad , R = 1 \Longrightarrow y = 0$

$S = 0 \quad , R = 0 \Longrightarrow y = y$ fonction mémoire

$S = 1 \quad , R = 1 \Longrightarrow y = \bar{y}$ (Solution d'instabilité)

<u>4 ème cas : $\emptyset = 1$: $\emptyset = 0$</u>

y/RS	00	01	11	10
0	0	1	0	
1	1	1	1	

$$y = \left| \begin{array}{l} \bar{R}.S \\ y.S \\ \bar{R}.y \end{array} \right|$$

$S = 1 \quad , R = 0 \Longrightarrow y = 1$

$S = 0 \quad , R = 1 \Longrightarrow y = 0$

$$\left. \begin{array}{l} S = 0 \; , R = 0 \Longrightarrow y = y \\ S = 1 \; , R = 1 \Longrightarrow y = y \end{array} \right\} \Rightarrow \text{fonction mémoire.}$$

136 - CIRCUITS ET REPRESENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS MEMOIRES

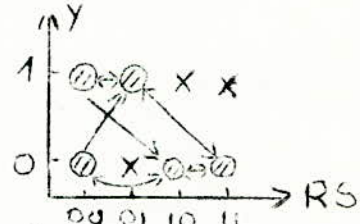
1°) - Circuits :

Les fonctions mémoires déjà vu peuvent être réalisés à l'aide de générateurs de relaxation du type : Bistale - flip-flop, etc... Nous étuderons ce problème là qui est purement technologique, pour nous consacrer aux logigrammes, représentatifs des différentes fonctions mémoires.

- Fonction mémoire à mise à zéro prioritaire :

GRAPHE

Circuits: Fig. 1

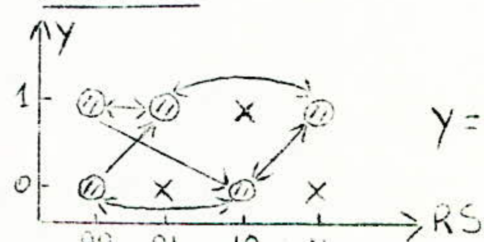


$$Y = \begin{vmatrix} y \\ S \end{vmatrix} . \overline{R}$$

- Fonction mémoire à armement prioritaire :

GRAPHE

Circuits : Fig. 2



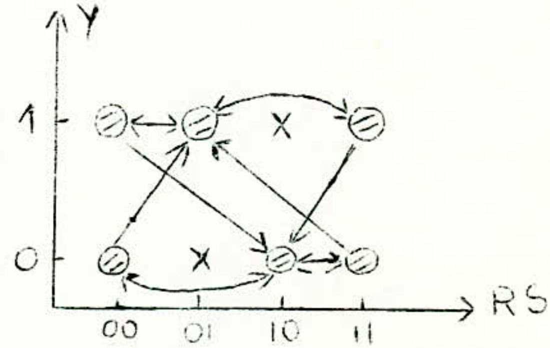
$$Y = \begin{vmatrix} Y . \overline{R} \\ S \end{vmatrix}$$

- Fonction mémoire sans prioritaire :

GRAPHE

Circuits : Fig. 3

$$Y = \begin{vmatrix} Y \\ S . \overline{R} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overline{R} \\ S \end{vmatrix}$$



137 - UTILISATION DES FONCTIONS MEMOIRES : (THEOREME ET CONDITION)

A partir d'un théorème très puissant et des conditions d'applications de ce théorème ; on essayera de déterminer l'intérêt qu'il y a à construire des fonctions mémoires à partir de fonctions binaires sequentielles. Le théorème qu'on va envisager ne concerne pas les fonctions mémoires plus compliquées et d'ordre général. Aussi, nous nous bornerons uniquement à des bascules à 2 entrées ou 3 entrées (la 3ème étant la variable horloge).

S'il s'avère qu'une fonction mémoire peut être utilisée dans un circuit, il suffit de calculer les élèments binaires d'entrée "R" et "S" de cette fonction pour la définir totalement. Seul reste à faire ensuite un choix de la forme (prioritaire ou non) qui résulte de la technologie envisagée.

Théorème :

Pour qu'une fonction binaire $y(xn) \in E01$ qui dépend de "n" variables binaires constituant le vecteur "Xn" soit une fonction "mémoire", il faut et il suffit qu'il existe 3 groupes Co, C_1, C_2, distincts de combinaisons de valeurs des variables tels que toute combinaison du groupe :

$$Co \Longrightarrow y = 0$$
$$C_1 \Longrightarrow y = 1$$
$$C_2 \Longrightarrow y = y$$

Dans ce dernier cas la fonction "y" doit lorsqu'une combinaison du groupe C_2 apparait, conserver la valeur qu'elle avait dans l'état précédant immédiatement la commutation du vecteur de commande "Xn" C_0, C_1, et C_2 ne doivent en aucun cas présenter des combinaisons communes.

Condition nécessaire :

Si une fonction binaire est une fonction "mémoire", il existe nécessairement 2 fonctions binaires d'entrée R(Xn) et S(Xn) telle que :

$(R = 1 \; ; \; S = 0) \Longrightarrow y = 0$

$(R = 0 \; ; \; S = 1) \Longrightarrow y = 1$ ainsi que l'identité $R.S \equiv 0$

$(R = S = 0) \Longrightarrow y = y$

- <u>Lorsque la fonction mémoire est à mise à zéro prioritaire</u>

  $(R' = 1 \; ; \; S' = \emptyset) \Rightarrow y = 0$

  $(R' = 0 \; ; \; S' = 1) \Rightarrow y = 1$

  $(R' = S' = 0) \Longrightarrow y = y$

  Il suffit de poser $R = R'$ et $S = S'\bar{R}'$ pour que $R.S = 0$

- <u>Lorsque la fonction mémoire est à armement prioritaire</u> :

  $(R' = 1 \; ; \; S' = 0) \Rightarrow y = 0$

  $(R' = \emptyset \; ; \; S' = 1) \Rightarrow y = 1$

  $(R' = S' = 0) \Rightarrow y = y$

  Il suffit de poser $R = \bar{S}'R'$ et $S = S'$

- <u>Dans le cas de la fonction mémoire symétrique</u>

  $(R' = 1 \; ; \; S' = 0) \Rightarrow y = 0$

  $(R' = 0 \; ; \; S' = 1) \Rightarrow y = 1$

  $(R' = S') \Longrightarrow y = y$

  Il suffit de poser $R = R'\bar{S}'$ et $S = S'\bar{R}'$

L'identité $R(Xn).S(Xn) \equiv 0$ signifie que les 2 fonctions d'entrées $R(Xn)$ et $S(Xn)$ n'ont aucun facteur dual commun.

- <u>Condition suffisante</u> :

  Réciproquement, s'il existe 3 groupes distincts C_o, C_1 et C_2 de combinaisons de Xn tels que les conditions précédentes soient vérifiées, $y(Xn)$ est une fonction mémoire dans laquelle, il suffit de choisir

  $R = 1$ dans la combinaison C_o

  $S = 1$ dans la combinaison C_1

  Les groupes C_o, C_1 et C_2 qui identifient une fonction mémoire, sont relatifs à des Etats Stables.

  Le calcul des fonctions mémoires n'exige pas que les états de commutateur soient exprimés.

I4 - LES REGISTRES A DECALAGE :

14 - ETUDE SUR LES REGISTRES A MEMOIRES.

14.1- PRELIMINAIRES .

- On essayera de mettre en évidence dans ce chapitre, l'intérêt fondamental des fonctions mémoires. Cet intérêt sera mesuré à l'aide des matrices mémoires, et des registres.

- Pour cela, on va calculer les fonctions reflexes itératives et synchrones qui dépendent de la variable horloge H.

Un registre n'assure de décalage que sous l'éffet de la variable horloge

H.	Q2p-2	Q2p-1	Q2p.	Q2p+1
0	1	0	0	0
1	1	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1
0	0	0	1	1

- On pose 2p=k, on constate que Qk=1 si Qk-1=1 et H=1 ainsi que Qk-2 =0 et que Qk =0 si H=0 et Qk+1=1.

- Ces conditions permettent de conclure que Qk peut être réalisée à l'aide d'une fonction mémoire itérée dans laquelle.

$$S = H.\ Qk\text{-}1.\ \overline{Q}k\text{-}2 \qquad R = \overline{H}.\ Qk\text{+}1.$$

- Si on considêre une fonction mémoire à " R " prioritaire on à :

$$\overline{R} \left| \begin{matrix} Qk \\ S \end{matrix} \right| = Qk = \left| \cdot \begin{matrix} \text{— } Qk \text{ —} \\ H.Qk\text{-}1.\overline{Q}k\text{-}2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} H \\ \overline{Q}k\text{+}1 \end{matrix} \right|$$

- Le calcul d'une fonction mémoire donne un résultat qui n'est pas toujours unique on peut faire un raisonnement différent sur les conditions de transition et simplifier les fonctions.

...../.....

- On peut par exemple séparer, les fonctions de rang pair Q2p-2, Q2p, Q2p+2 des Fonctions de rang impair Q2p-1, Q2p +1 et contater que pour satisfaire aux conditions de fonctionnement proposé. Il suffit que chaque foction de rang pair prenne la valeur de la fonction de rang impair qui la précéde lorsque H = 1 et que chaque fonction de rang impair prenne la valeur de la fonction de rang pair qui la précéde pour H = 0. Ceci nous donne une table de vérite sequentielle réduite, différente de la précédente mais qui répend aux conditions imposées.

H.	.....	Q2p-2	Q2p-1	Q2p.	Q2p+1
0		1	1	0	0
1		0	1	1	0
0		0	0	1	1
1		0	0	0	1

- Les fonctions cherchées sont réalisables à l'aide de fonctions mémoires

  - Pour les fonctions de rang pair "Q2p"

$S2p = H.\ Q2p-1$, soit $Q2p = \begin{vmatrix} Q_{2p} & \bar{H} \\ H.Q_{2p-1} & Q_{2p-1} \end{vmatrix}$

$R2p = H.\bar{Q}\ 2\ p-1$

  - Pour les fonctions de rang impair "Q2p+1"

$S2p+1 = \bar{H}.\ Q2p$, Soit $Q2p+1 = \begin{vmatrix} Q_{2p+1} & H \\ \bar{H}.Q2p & Q_{2p} \end{vmatrix}$

$R2p_{+1} = \bar{H}.\ \bar{Q}_{2p}$

- Cette solution fait apparaître successivement des fonctions carrées biformes en "H" et ont l'avantage d'avoir 2à2 un produel et un produit commun.

  Ce qui simplifie l'éxécution technologique des circuits

Avantage:

- Il réside dans la possibilité, sachant qu'on a inscrit un nombre binaire dans les mémoires de même parite de rang, de retrouver ce nombre décalé d'un rang de parite après chaque impulsion de l'horloge. Nous abtenoms ainsi un registre à glissement dont le rôle s'est révèlé depuis longtemps primordial dans l'élaboration des opérateurs de calcul.

.../...

I5 - LES REGISTRES " MEMOIRES " :

- On va examiner maintenant les modes de lecture et d'écriture qu'on peut effectuer dans un premier temps sur un registre à memoire puis sur une matrice à mémoire.
Etant donné un vecteur variable de commande $Xn+2 = V2$,Xn constitué de 2 vecteur associés $V2 = e , 1$ et $Xn = xn,xn-1,..$ $x2,x1$, on veut réaliser le sytème sequentiel itératif composé d'une fonction reflexe et d'une fonction de transcodage $yn= \mathcal{R}(Xn+2, Yn)$ $Zn = F (V2,yn)$ dans lesquelles :

$$V2 = 0 \Rightarrow (Yn=Yn) \text{ et } (Zn=0)$$
$$V2 = 1 \Rightarrow (Yn=Yn) \text{ et } (Zn=Yn)$$
$$V2 = 2 \Rightarrow (Yn=Xn) \text{ et } (Zn=0)$$

Nous imposons à "V2" de ne jamais prendre la valeur $V2=3=11_2$
- celà signifie que chaque composante binaire $yP \in E01$ du vecteur "Yn" doit repondre aux implications suivantes :

$$\forall p = 1,2,\ldots\ldots n$$

$$(V2 = 0, xp = \emptyset) \Longrightarrow (yp = yp)$$
$$(V2 = 1; xp=\emptyset) \Longrightarrow (yp = yp)$$
$$(V2 = 2, xp = 0) \Longrightarrow (yp = 0)$$
$$(V_2 = 2, x_p = 1) \Longrightarrow (y_p = 1)$$

$xp \in E01$ est une composante du vecteur variavle"**Xn**".On conséquence chaque composante "yp" est une fonction "mémoire" qui obeit à la table de verite sequentielle réduite et itérative suivante :

	V2 (e)	V2 (1)	xp	yp	
4 (V2=2,xp = 0)	1	0	0	0	groupe Co
0.1 (V2=0,xp=Ø)	0	0	Ø	Ø	groupe C2
2.3 (V2=1,xp=Ø)	0	1	Ø	Ø	groupe C2
5 (V2=2, xp = 1)	1	0	1	1	groupe: C1
6 (V2= 3)	1	1	0		Combinaisons disponibles
7 (V2= 3)	1	1	1		Combinaisons disponibles

De cette table de verite, il en ressort Rp = e.$\bar{x}$p en associant les combinaisons 4-6 et Sp = e. xp. en associant les combinaisons 5.7 . Chaque fonction binaire "yp" peut donc être réalisée à l'aide d'une fonction mémoire d'éxpression.

$$yp = \begin{vmatrix} yp & \bar{e} \\ e.xp & xp \end{vmatrix}$$

Sa fonction de transcodage Zn = F (V2,Yn) est entièrement définie par les implications.

$$V_2 = 0 \Longrightarrow Z_n = 0$$
$$V_2 = 1 \Longrightarrow Z_n = Yn$$
$$V_2 = 2 \Longrightarrow Z_n = 0$$

Ceci nous donne la table de vérite itérative complètête.

		e	l	Yp	Zp
$(V_2=0)$	0.	0	0	0	0
	1.	0	0	1	0
$(V_2=1)$	2.	0	1	0	0
	3.	0	1	1	1
$(V_2=2)$	4.	1	0	0	0
	5.	1	0	1	0
$(V_2=3)$	6.	1	1	0	
	7.	1	1	1	

Combinaisons disponibles

En associant les combinaisons 3 et 7 nous obtenons. Zp = l.Yp.
Le système sequentiel ainsi, définit un registre qui conserve pour e=0 le valeur binaire du vecteur "Xn" enregistrée.

La variable "e" représente donc la commande de l'écriture dans le registre mémoire "Yn" de la valeur prise, au moment de l'opération d'écriture(e=1) par le vecteur variable "Xn" .Pour l=1, la variable binaire "l" entraine Zn=Yn, la vonction Zn prend alors la valeur de Yn.
"l" = Commande la lecture du Registre mémoire. (Fig. 5)

La sortie $S_p.\bar{y}_p$ est égale à:

$$\begin{vmatrix} \bar{e} & \bar{y}_p & \begin{matrix}\bar{e} \\ \bar{x}_p\end{matrix} \\ \bar{x}_p & e.\bar{x}_p & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yp^{\circ}/ & \bar{e} \\ e.\bar{x}_p & \bar{x}_p \end{vmatrix} = \bar{y}_p$$

L'opération se fera d'aprés le logigramme suivant : Fig. 5

16. MATRICES A MEMOIRES

L'association de plusieurs "mémoires" rend possible la constitution de matrices·considèrons un systéme de q registres mémoires $Yn^1, yn^2, \ldots, y^q$ associés aux transcodages.

$$Zn^1 = F1\ (V_2^1, yn^1) \qquad 1 \leq k \leq q \qquad Zn^K = zn^K, zn-1^K, \ldots, z_1^K \quad z_i^K \in E_{01}$$

$$Zn^2 = F2\ (V_2^2, Yn^2)$$

- - - - - - - - - -

$$V_2^K = e_K,\ l_K$$

$$Zn^K = F2\ (V_2^K, Yn^K) \qquad Yn^K = Yn^K, yn-1^K, \ldots; y1^{K^2},\ y_j^K \in E01$$

- - - - - - - - - -

$$Zn^q = Fq\ (V_2^q, Yn^q)$$

Considérons d'autre part un vecteur de commande Am=am,am-1,.. a2,a1 dans lequel $2^m = q$ Donnons nous également les 2 fonctions de décodage.

$Lq = \Delta 0\ (Am, \lambda)$ et $Eq = \Delta 1\ (Am, \mathcal{E})$ dans lesquelles

$Lq = lq, lq-1, \ldots, L2, L1$, $Lk \in E01$ signal de lecture du registre d'indice K

$Eq = eq, eq-1, \ldots, e2, e1$, $e_k \in E01$ signal d'écriture du registre d'indice K

La fonction de décodage $Lq = \Delta 0\ (Am, \lambda)$ est définie de telle sorte que $(Am = Am^K, \lambda = 1) \Longrightarrow (Lk = 1 \text{ et } Li = 0 \text{ pour } i \neq k)$

La fonction de décodage $Eq = \Delta 1\ (Am, \mathcal{E})$ est définie de telle sor sorte que $(Am = Am^K, \mathcal{E} = 1) \Longrightarrow (e_K = 1 \text{ et } ei = 0 \text{ pour } i \neq k)$

CHaque registre d'indice Rk"

$Yn^K = R_K(V_2^K, Xn, Yn^k)$ est une fonction reflexe tel-que $(Am = Am^K, \mathcal{E} = 1) \Longrightarrow (Yn^k = Xn)$

Donc il est possible d'inscrire dans le registe Rk, la valeur de "Xn" en faisant $\mathcal{E} = 1$

Posons enfin la fonction de transcodage.

$$Sn = \sqcup qn\ (Zn^1, Zn^2, \ldots, Zn^k, \ldots, zn^q)$$

Tlleque $(Am = Am^k, \lambda = 1) \Longrightarrow (Sn = Zn^K)$

On peut tirer des conclusions intéressantes de l'étude du système sequentiel que nous avons défini, et que nous appelerons " matrice"memoire".

- Lorsque la matrice est lue (λ=1)

($\lambda=1$, $Am= Am^k$) ($l_k =1$, $Zn^k=Yn^k$, $Sn =Zn^k$).

- Achaque valeur donnée du vecteur $Am=Am^k$, que nous appelerons vecteur adresse correspond donc une valeur et une seule du vecteur fonction $Sn = Yn^k$ nous appelerons vecteur contenu le vecteur Yn^k .

- Lorsque la matrice est utilisée en écriture . ($\mathcal{E}$ = 1).

  ($\mathcal{E}$ = 1, $Am = Am^k$) $\Longrightarrow$ ($ek = 1$, $Yn^k = Xn$).

- Pour chaque valeur de $Am = Am^k$, le vecteur fonction Yn^k prend alors la valeur affichée à ce moment la par le vecteur variable Xn.

- Une matrice memoire peut fournir selon un choix décidé au moment de l'écriture, toute fonction de transcodage Yn= F(Am) contenant un nombre total de points égal au nombre de registres ou d'adresses distinctes que selectionne le vecteur variable "Am" et dont Yn contient un nombre de composantes égales à "n" fonctions "memoires"

- MEMOIRES -

- Nous avons jusque ici consideré 2 types de mémoires.b

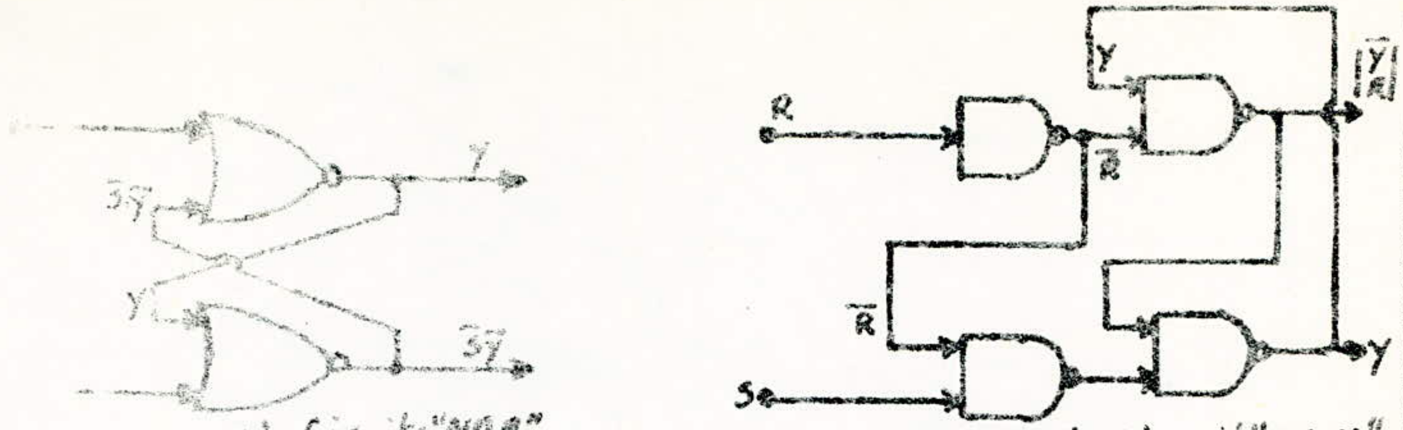
$ les mémoires élementaires, qui permettent de garder trace d'un digit et qui, par suite seront trés utilisées dans les circuits de commande pour indiquer que l'on doit, ounon, exécuter un ordre.

$ les registres, soit statiques, soit à glissement, qui permettent de loger un mot . Ce sont géneralement des mémoires temporaires, auxiliaires directesde l'equipement de traitement.

Les mémoires possèdent un certain nombre de caracteristiques, en plus de leur capacité, qui définissent leurs possibilités d'utilisation.

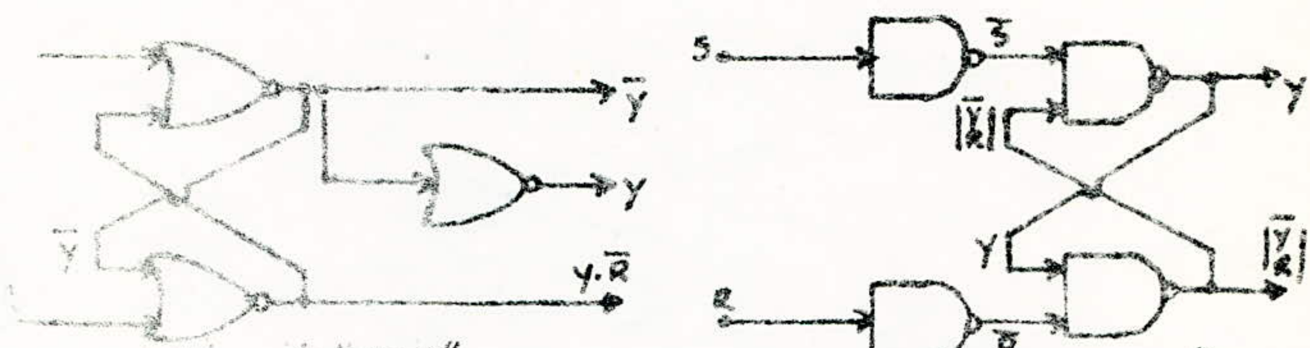
- durée
- modalites d'ecriture
- modalités de lecture
- temps d'accés
- mode d'adressage.

Pour trouver l'information stockée dans une mémoire, on utilise son adresse, c'est-à-dire l''informationpermettant d'identifier la position des cellules contenant les informations cherchées. On peut effectuer cette designation au moyen de coordonnées, si la distribution spatiale des cellules rend celle ci plus parlante. L'accés sera selectif si la donnée du numéro d'ordre permet d'effectuer aussitôt la lecture (ou l'ecriture) de la cellule ainsi designée. Dans le cas de l'accés sequentiel, les informations sont logées à la suite les unes des autres et l'adresse peut-être vérifiée par un procédé de comptage, soit d'intervalles entre les blocs, soit de marques spéciales d'identification placées en tête des blocs d'information. Certaines informations peuvent-être formées de 2 parties : un argument et une fonction et il est possible d'effectuer une recherche amenant à l'identification de l'argument qui constitue l'adresse de la fonction correspondante : ce mode d'adressage est dit associatif.



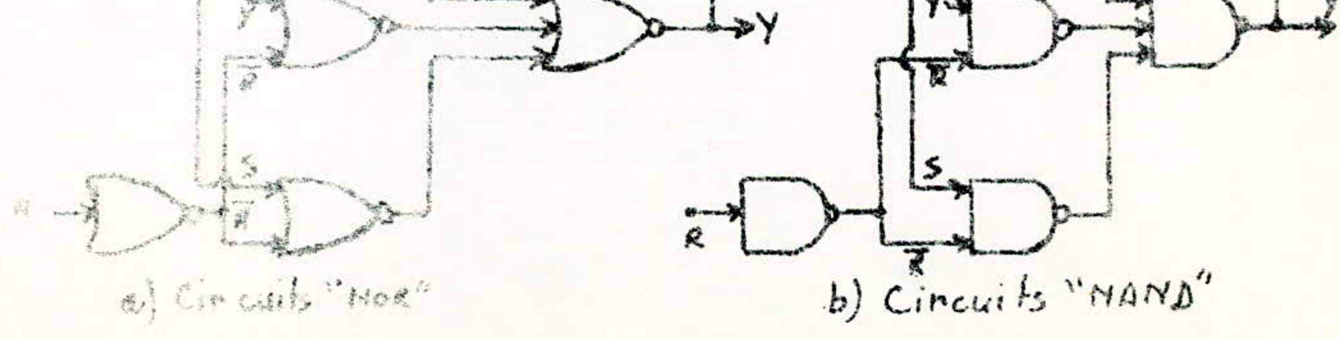
a) Circuits "NOR"   b) Circuits "NAND"

Fig 1 : Fonctions "mémoires" à mise à zéro prioritaire



a) Circuits "NOR"   b) Circuits "NAND"

Fig 2 : fonctions "mémoires" à armement (ou S) Prioritaire



a) Circuits "NOR"   b) Circuits "NAND"

Fig.3 : Fonctions "Mémoires" Symétriques

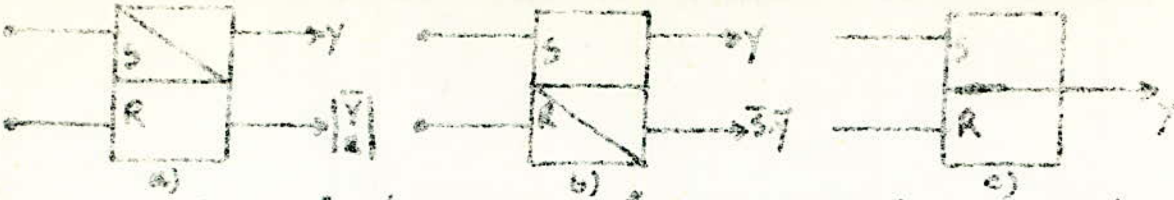


Fig. 4 : Fonctions "mémoires" : a) à "S" prioritaire ; b) "R" prioritaire
c) symétrique

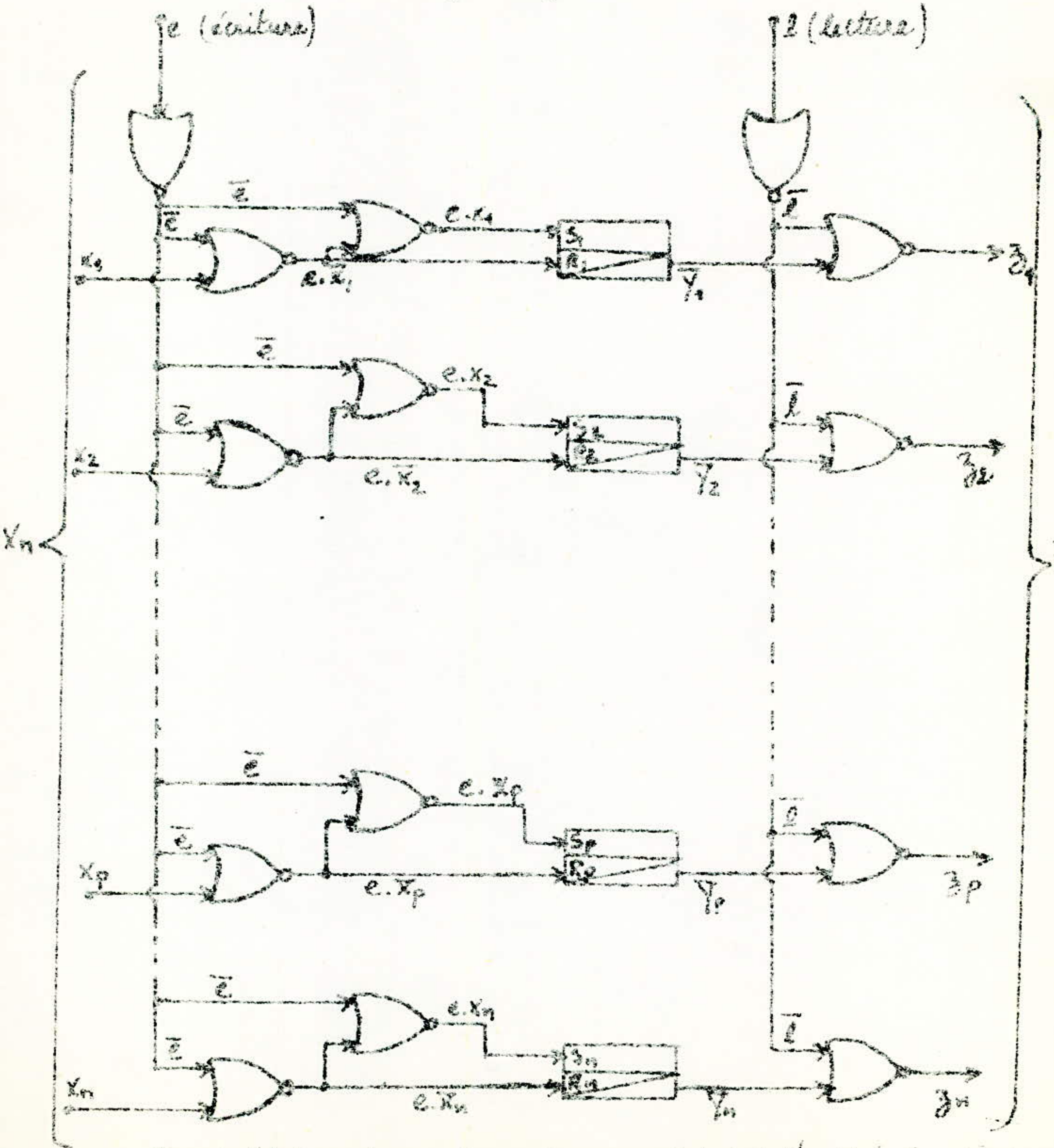


Fig. 5 : Schéma du registre mémoire réalisé à l'aide de circuits "NOR"

2. LES FONCTIONS DIBINAIRES

2 LES FONCTIONS [illegible]

21 Préliminaires :

Ce sont des fonctions reflexe élémentaires définies à partir de graphes sequentiels simples.

On considère pour celà la classe des fonctions reflexes $Z' = f(Z,z)$ dont les vecteurs variables et fonction n'ont respectivement chacun qu'une seule composante binaire

(Z,z)

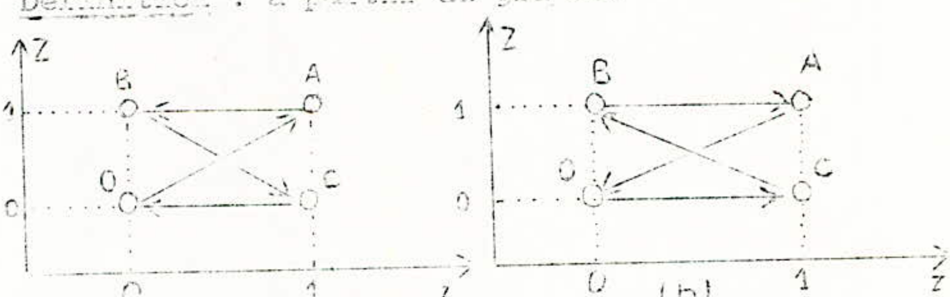
- Le [illegible] associé à $Z = f(Z,z)$ ne peut comprendre que [illegible] (4) points [illegible] B,C, qui correspondent à :

$O : z = 0 \; ; \; Z = 0 \qquad B : z = 0 \; , Z' = 1$

$A : z = 1 \; ; \; Z = 1 \qquad C : z = 1 \; , Z = 0$

[illegible] aux points situés sur une même verticale OB et CA ne sont pas des états consécutifs (La fonction reflexe ne peut changer spontanement) de valeur sans modification du vecteur de commande.

Définition : à partir du graphe.



(a) (b)

FIG. 1

Schéma : Fonctions [illegible] a) $Z = B(Z,z)$ fonction directe

b) $Z = Bi(Z,z)$ fonction inverse

La fonction qui correspond au parcours O,A,B,C, est appelée par définition fonction d'binaire directe et s'écrit $Z = B(Z,z)$ celle qui correspond au parcours O,C,B,A est appelée fonction d'binaire inverse et s'écrit $Z = Bi(Z,z)$

Intérêt : L'interêt réside dans le fait que l'écriture mathématique adoptée admet implicitement que les problèmes pratiques, de commutation interne sont résolus, alors que les expressions binaires developpées, ne peuvent en tenir compte [illegible] ces expressions ignorent dans leurs définitions

.../...

Les variations physiquement continues, obtenues en pratique; pour les variables et fonctions binaires, lors de leurs transitions $0 \rightarrow 1$ ou $1 \rightarrow 0$.

22 Propriétes des fonctions dibinaires :

On peut changer le sens de parcours d'un groupe, transformer une fonction dibinaire directe, en fonction dibinaire inverse, ou vice versa en complementant la variable de commande " z "

Donc $B(Z,\bar{z}) = Bi(Z,z)$; $Bi(Z,\bar{z}) = B(Z, z)$

Par contre la complementation de la fonction "Z" ne change pas le sens de parcours, ce qui permet d'écrire égalenent le groupe de relations.

$$B(\bar{Z},z) = B(Z,z) \qquad Bi(\bar{Z}, z) = Bi(Z, z)$$

* Les fonctions dibinaires sont des DIVISEURS BINAIRES on peut en effet partant des graphes de definition , établir le diagramme.

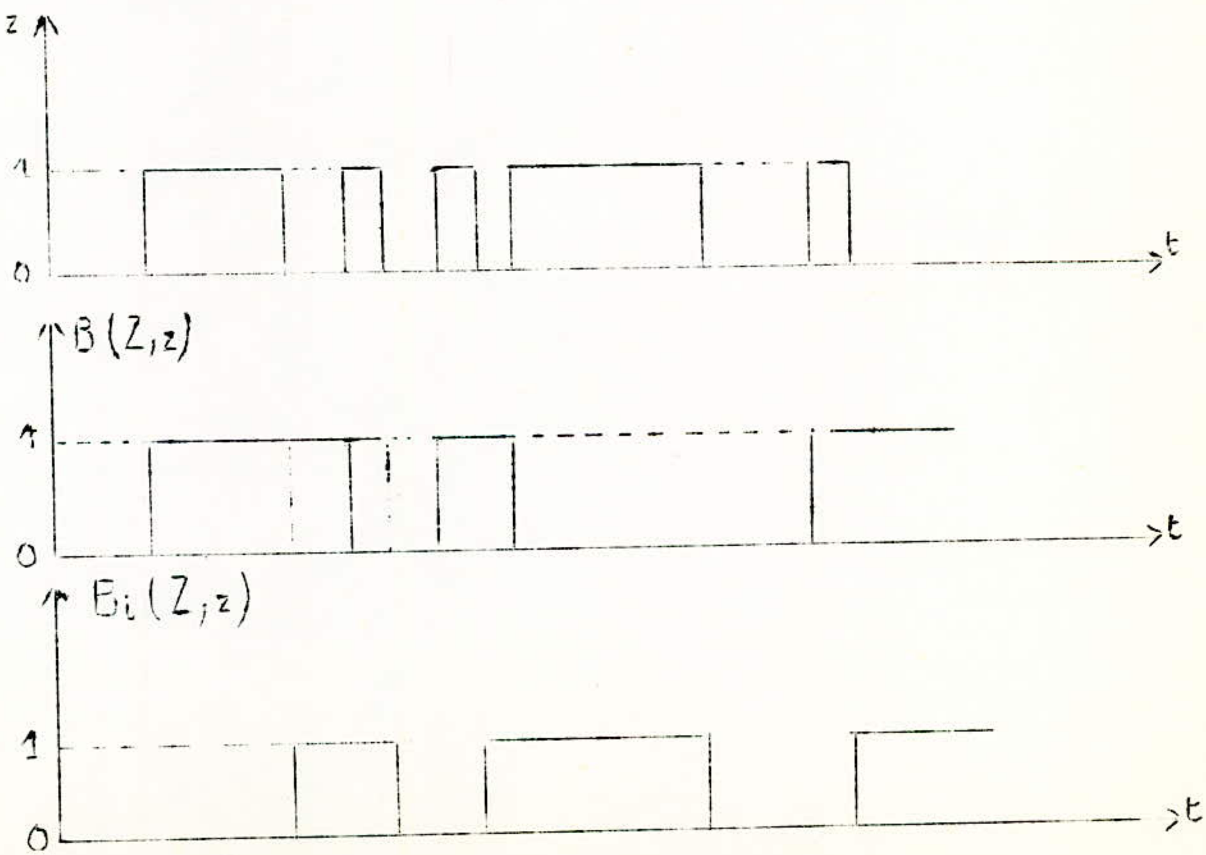


FIG.2

Nous constatons que lorsque la variable "z" change 2n fois de valeur, les fonctions dibinaires changent seulement "n" fois de valeur. Il faut noter que la fonction dibinaire directe change de valeur les transitions $0 \rightarrow 1$ de la variable de commande z , et que la fonction dibinaire inverse change de valeur pour les transitions $1 \rightarrow 0$ de z .

23. Echelles asynchrones :

La propriété de division par deux permet d'écrire immédiatement les équations d'une échelle de comptage ou de décomptage binaire "N" de poids 2^N , et **d'en** établir la représentation graphique à partir des graphes de définition .

Dans le cas, où on utilise une variable horloge de commande "H" les équations d'une échelle de comptage binaire peuvent s'écrire sous forme iterative.

$Q_1 = Bi\ (Q_1, H)$	$Q_1 = B(Q_1, H)$
$Q_2 = Bi\ (Q_2, Q_1)$	$Q_2 = B(Q_2, \bar{Q}_1)$
. . . .	. . . .
$Q_n = Bi\ (Q_N, Q_{N-1})$	$Q_N = B(Q_N, \bar{Q}_{N-1})$

De même les équations d'une échelle binaire de décomptage "N" peuvent revêtir les deux formes suivantes

$Q_1 = B(Q_1, H)$	$Q_1 = Bi\ (Q_1, H)$
$Q_2 = B(Q_2, Q_1)$	$Q_2 = Bi\ (Q_1, \bar{Q}_1)$
. . . .	. . . .
$Q_N = B\ (Q_N, Q_{N-1})$	$Q_N = Bi\ (Q_N, Q_{N} - 1)$

(VOIRE FIG.3

Dans ces cas particuliers, les échelles binaires de comptage et de décomptage sont d'ordre "3" et de poids "8".

Il est à noter que les circuits "Echelles" obtenus sont asynchrones, c'est-à-dire que le temps de fonctionnement est variable et dépend du nombre de bascules qui changent d'état lors d'une même commutation d'ensemble.

23.1 REMISE A ZERO DES ECHELLES ASYNCROMES

Il est possible de calculer des échelles de comptage asynchrones dont les p: .ne. sont plus des puissances de deux. Pour celà, il suffit de déterminer les fonctions binaires d'entrée qui entraînent la remise à zèro que l'on désire.

Dans le cas d'une échelle asynchrone constituée de fonctions dibinaires inverses, la forme itérative et paramétrique peut s'écrire :

$Qp = Bi\ (Q_p,\ z_p)$ $zp =: Qp-1$ $p = 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$

Qp-1 = 1 Constitue la condition normale de préparation de basculement pour une fonction dib inverse.

Qp-1 = 0 Constitue la condition normale de préparation de bascule pour une fonction dib directe.

Dans l'état qui précéde immédiatement la remise à zéro

Il faut que toutes les fonctions d'entrée des fonctions conservent la même valeur qu'elles avaient auparavant

-Si Qp = Qp-1 la fonction d'entrée sera zp = Qp - 1

-Si Qp = 1et il faut mettre en facteur dual dans z_p, le pro-

$Q_{p-1} = 0$ duit associé à la combinaison de valeurs, qui précédé la remise à zéro, des fonctions dibinaires $Q_n, Q_{n-1}, \ldots, Q_p, Q_\ell$ $\ell < p$

represente la 1 ére fonction non nulle rencontre aprés dans l'ordre inverse des indices.

dans le cas où toutes les fonctions sont nulles ; on met en facteur dual le produit correspondant par $Q_n, Q_{n-1}, \ldots, Q_1,$ Q_0 et H dans l'état qui precéde la remise à zéro.

- Si Qp =0et Qp-1= 1 Il faut mettre en facteur dans "zp " le produel associé à la conbinaison de valeurs, précédant la remise à zéro, des fonctions d'indice supérieur à "p"

Qn, Qn-1, ..., Qp+2

Remarque : Si l'échelle de comptage envisagé doit être constituée de fonctions dibinaires directes il suffit de choisir comme fonction d'entrée, les complements de celles qui seraient calculées dans le cas d'utilisation des fonctions dibinaires inverses.

.../...

23.2 <u>Exemple de calcul de la remise à zéro d'échelles asynchrones :</u>

On se propose de déterminer une échelle de comptage asynchrone de poids "60".

- On écrit d'abord le dernier nombre binaire enregistré par l'échelle, avant la remise à zéro

$$\text{soit } 59_{10} = 111\ 011_2$$

- On choisit des fonctions dibinaires inverses $Q6$, $Q5$, $Q4$, $Q3$, $Q2$, $Q1$ qui correpondent respectivement à chaque chiffre binaire du nombre compté

p : est un indice qui représente le poids du chiffre associé.

- Nous constatons qui il n'existe dans l'état précédant la remise à zéro que 2 fonctions binaires telles que $Q_p \neq Q_{p-1}$ il s'agit de ($Q\,4=1$, $Q3 = 0$) et de ($Q\,3=0$, $Q\,2 = 1$)

Dans tous les autres cas on a $Q_p = Q_{p-1}$

Si nous appelons $z_6, z_5, z_4, z_3, z_2, z_1$ les fonctions d'entrées respectives des fonctions dibinaires inverses du même indice

$$z_4 = \left|\begin{array}{c} Q_3 \\ \\ \bar{Q}_6 \cdot Q_5 \cdot Q_4 \cdot Q_3 \cdot Q_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} Q_3 \\ \\ Q_6 \cdot Q_5 \cdot Q_4 \cdot Q_2 \end{array}\right|$$

$$z_3 = Q_2 \left|\begin{array}{c} \bar{Q}_6 \\ \bar{Q}_5 \\ \bar{Q}_4 \end{array}\right| \qquad z_6 = Q_5 \quad ; \quad z_2 = Q_1$$

- Dans ce cas les combinaisonsdisponibles ne permettent aucune simplification et les équations de l'échelle asynchrone cherchée s'écrivent .

$$Q_1 = B_i\ (Q_1, H)$$
$$Q_2 = B_i\ (Q_2, Q_1)$$
$$Q_3 = B_i\ (Q_3, z_3)$$
$$Q_4 = B_i\ (Q_4, z_4)$$
$$Q_5 = B_i\ (Q_5, Q_4)$$
$$Q_6 = B_i\ (Q_6, Q_5)$$

$$z_3 = Q_2 \left|\begin{array}{c} \bar{Q}_6 \\ \bar{Q}_5 \\ \bar{Q}_4 \end{array}\right|$$

$$z_4 = \left|\begin{array}{c} Q_3 \\ \\ Q_6 \cdot Q_5 \cdot Q_4 \cdot Q_2 \end{array}\right|$$

23.3 CALCUL D'UNE DECADE DE COMPTAGE ASYNCHRONE EN DCB

Pour une echelle qui compte en CODE DCB. L'état qui précéde la remise à zéro correspond à $9_{10} = 1001_2$

- On appellera succesivemnt Q4 , Q3 , Q2 , Q1 les quatre fonctions binaires associées respectivement à chaque chiffre binaire selon un poids.

- On constate qu'il existe deux fonctions pour les quelles $Qp \neq QP - 1$ qui sont ($Q4 = 1, Q3 = 0$) et ($Q2=0, Q1 = 1$)

- Pour pouvoir simplifier les fonctions d'entrée, on établit une table de verite réduite qui fait apparaître la combinaison de comptage avant la remise à zéro ainsi que les combinaisons disponibles qui suivent dans l'ordre binaire.

	Q4	Q3	Q2	Q1	
9	1	0	0	1	Dernière combinaison utilisée.
10	1	0	1	0	
11	1	0	1	1	
12	1	1	0	0	Combinaisons disponibles
13	1	1	0	1	
14	1	1	1	0	
15	1	1	1	1	

- Détermination de la fonction d'entrée "Z4" de Q4

$$z4 = \left| Q4.\bar{Q}3.\bar{Q}2.Q1 \right|$$

Mais en associant à la combinaison "9" les combinaisons 11.13. et 15 on constate que ce produit peut se simplifier et s'écrire

- Détermination de la fonction d'entrée "z_2" de Q_2

Il faut normalement mettre en facteur le produel

Dans le cas où on utilise, des fonctions dibinaires, inverses les équations peuvent s'écrire

$Q1 = B^{\cdot}(Q_1, H^{\cdot})$ $\quad Q_3 = B_i(Q_3, \bar{Q}_2)$ $\quad z_2 = Q1 \cdot \bar{Q4}$

$Q_2 = B^{\cdot}(Q_2, z_2)$ $\quad Q_4 = B_i(Q4, z4)$ $\quad z_4 = \begin{vmatrix} Q_3 \\ Q_4 & \cdot Q_1 \end{vmatrix}$

- Si nous avons utilisé des fonctions dibinaires directes, nous obtenons pour la même échelle.

$Q_1 = B(Q_1, H')$ $\quad Q_3 = B(Q_3, \bar{Q}2)$ $\quad z'_2 = \begin{vmatrix} \bar{Q}1 \\ Q_4 \end{vmatrix}$

$Q_2 = B(Q_2, z'_2)$ $\quad Q_4 = B(Q_4, z'4)$ $\quad z'4 = \bar{Q}3 \begin{vmatrix} \bar{Q}4 \\ \bar{Q}1 \end{vmatrix}$.

VOIR : FIG. 5

REMARQUE :

Nous pouvons passer de l'un à l'autre de ces systèmes d'équations en posant :

$H' = \bar{H}$ $\quad z'_2 = \bar{z}_2$ $\quad z'_4 = \bar{z}_4$

Toutes les méthodes habituelles de simplification des fonctions binaires sont utilisables pour la simplifications des fonctions d'entrée

Schémas correspondants à une fonction dibinaire

a = directe b : inverse

FIG 4

24. SYSTEMES SYNCHRONISES

Les équations de circuits synchrones utilisant les fonctions dibinaires, nous donnent les tables de vérite ou des matrices de phases simples.

Nous savons que les fonctions dibinaires comprennent 4 états stables.

L'expérience montre que la totalité des états stables doivent apparaître dans des séquences successives si ces états sont internes.

On repère les états intermédiaires de préparation de basculement des fonctions dibinaires en plaçant le signe + immédiatement à droite de la valeur binaire prise effectivement par la fonction considérée .

EXEMPLE :

Bouclage de cycle

z	Z=B (Z,z	Z=Bi(Z,z)
0	0^+	0
1	1	0^+
0	1^+	1
1	0	1^+

Cette table fait apparaître 4 états distincts qui sont successivement $0;0^+,1^+$, et 1^+

Les fonctions B(Z,z) et Bi(Z,z) changent respectivement de valeur pour les transitions différentes "z". Les états de préparation de basculement repérés par "+" correspendent aux combinaisons qui précédent immédiatement une commutation de la fonction , ce symbolisme nous permet d'établir les équations de circuits sequenttiels synchrones en utilisant des fonctions binaires.

- Si on utilise des fonctions dibinaires directes, les états de préparation de basculement correspondent aux zéros des fonctions combinatoires d'entrée.

On peut établir, pour chaque fonction dibinaire, en écrivant le produit des produels qui correspondent aux combinaisons dans lesquelles la valeur de la fonction dibinaire associée est suivie du signe + .

- Si on utilise des fonctions dibinaires inverses, les états de préparation de basculement correspondent aux 1 des fonctions d'entrée.

Ces fonctions s'établissent en écrivant le produel des produits correspondant aux ombinaisons où le signe + suit la valeur de la fonction dibinaire associée.

24.1 SYSTEMES SYNCHRONES ET ASYNCHRONES

24.11 DEFINITION :

Un système sequentiel est dit synchrone quand il éxiste parmi les composantes du vecteur de commande, une variable binaire particulière appelée "Horloge" telle que tous les changements d'états du système, sans exception, se trouvent liés d'une façon synchrone aux transitions de cette variable "horloge".

Il en resulte qu'un système synchrone ne change d'état que lors des transitions "O → 1" ou "1 → O" de la variable horloge.

Nous avons différents types de circuits se quentiels synchrones.

- Ceux qui dépendent de plusieurs variables dont la variable "horloge"
- Ceux qui ne dépendent que la la seule variable "horloge"
- Ceux qui correspondent à un graphe comprenant un seul parcours polygonal fermé (cas des échelles synchrones)
- Ceux qui admettent un graphe à parcours polygonaux multiples (cas des registres à glissèment synchrones).

24.12 EXEMPLE Etude du cas d'un diviseur par trois de type synchrone :

- Ecrivons une table de verite réduite, en utilisant par exemple :
- 2 fonctions dibinaires inverses $Q_2 = Bi\ (Q_2, z_2)$, $Q_1 = Bi(Q_1, z_n)$

et en appelant "H" la variable horloge de commande.

..../....

	H	Q2	Q1	
0	1	0	0^+	Bouclage du cycle
1	1	0^+	1^+	
2	1	1^+	0	
3	1	1	1	Combinaison disponible.

Les signes(+) sont placés systematiquement à droite des valeurs de Q_2 et Q_1 , avant chaque commutation.

Il s'agit de déterminer ensuite $z_1$et z_2 en fonction de H, Q_1,Q2 .

Pour calculer "z_1", il suffit d'établir, suivant la régle enoncée, le produel des produits correspondant aux deux combinaisons (0-1) pour lesquelles les valeurs de "Q_1" sont suivies du signe + soit :

$$z_1 = \left| \begin{array}{c} H.\bar{Q}_2.\bar{Q}_1 \\ H.\bar{Q}_2.Q_1 \end{array} \right| = H.\bar{Q}2$$

Pour calculer "z_2", nous prendrons le produel des produits correspondant aux combinaisons (1.2) pour lesquelles les valeurs de "Q_2" sont suivies du signe(+), mais en y associant la combinaison disponible "3", qui permet d'obtenir une expression plus simple.

$$z_2 = \left| \begin{array}{c} H.\bar{Q}_2.Q_1 \\ H.Q_2.Q_1 \\ H.Q_2.Q_1 \end{array} \right| = H \left| \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \end{array} \right|$$

Nous obtenons ainsi les équations cherchées :

$$Q_1 = Bi\ (Q_1, z_1) \qquad z_1 = H.\bar{Q}_2$$

$$Q_2 = Bi\ (Q_2, z_2) \qquad z_2 = H \left| \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \end{array} \right|$$

VOIRE FIG. 6

.../...

Pour calculer "z2", nous prendrons le produel des produits correspondant aux combinaisons (1-2) pour lesquelles les valeur de "Q2" sont suivie du signe (+), mais en y associant la combinaison disponible "3", qui permet d'obtenir une expression plus simple.

$$z2 = \left| \begin{array}{l} H.\bar{Q}_2.Q_1 \\ H.Q_2.Q_1 \\ H.Q_2.Q_1 \end{array} \right| \doteq H \left| \begin{array}{l} Q_1 \\ Q_2 \end{array} \right|$$

Nous obtenons ainsi les équations cherchées :

$$Q1 = Bi(Q_1, z_1) \qquad z_1 = H.\bar{Q}_2$$

$$Q_2 = Bi(Q_2, z_2) \qquad z_2 = H \; . \left| \begin{array}{l} Q_1 \\ Q_2 \end{array} \right|$$

Ceci nous amène au schéma suivant : Fig. 6

24.13 APPLICATION : ETABLIR LES EQUATIONS D'UNE D'ECADE DE COMPTAGE SYNCHRONE, EN CODE DE STIBITZ.

- Table de verite

Les états intermediaires de preparation de basculement des fonctions dibinaires seront reperés par le signe(+)

..../....

H	Q_4	Q_3	Q_2	Q_1	Code decimal
	0	0^+	1^+	1^+	0
	0	1	0	0^+	1
	0	1	0^+	1^+	2
	0	1	1	0^+	3
1	0	1^+	1^+	1^+	4
	1	0	0	0^+	5
	1	0	0^+	1^+	6
	1	0	1	0^+	7
	1	0^+	1^+	1^+	8
	1^+	1^+	0^+	0^+	9
	0	0	0	0	10
	0	0	0	1	11
1	0	0	1	0	12
	1	1	0	1	13
	1	1	1	0	14
	1	1	1	1	15

Nous designerons respectivement par z_1, z_2, z_3, z_4 Les fonctions binaires d'entrée de Q_1, Q_2, Q_3, et Q_4.

Si l'on considère des fonctions dibinaires inverses, on doit faire correspondre aux états de préparation de basculement la valeur "1" de la variable horloge.

Etablissement des fonctions d'entrées z_1, z_2, z_3, z_4

- "Q_1" est toujours en préparation de basculement pour H=1, on en déduit immédiatement $z_1 = H$.

- La fonction d'entrée z_2 peut s'établir en associant les - 0 - 2 - 4 - 6 - 8 - 9 - 11 - 13 - 14 - 15 . combinaisons

.../...

$$z_2 = \left|\begin{array}{l} H\ \bar{Q}_4.\bar{Q}_3.Q_2.Q_1 \\ H\ \bar{Q}_4.Q_3.\bar{Q}_2.Q_1 \\ H\ \bar{Q}_4.Q_3.Q_2.Q_1 \\ H\ Q_4.\bar{Q}_3.\bar{Q}_2.Q_1 \\ H\ Q_4.\bar{Q}_3.Q_2.Q_1 \\ H\ Q_4.Q_3.\bar{Q}_2.\bar{Q}_1 \\ H\ \bar{Q}_4.\bar{Q}_3.\bar{Q}_2.Q_1 \\ H\ Q_4.Q_3.Q_2.Q_1 \\ H\ Q_4.Q_3.Q_2.\bar{Q}_1 \\ H\ Q_4.Q_3.Q_2.Q_1 \end{array}\right| = \left[\begin{array}{l} H.\bar{Q}_4.Q_3.Q_1 \\ H.\bar{Q}_3.\bar{Q}_2.Q_1 \\ H.Q_3.Q_2.Q_1 \\ H.Q_4.Q_3.\bar{Q}_1 \\ H.Q_4.Q_3.Q_2 \end{array}\right] = H\left|\begin{array}{l} Q_1 \left|\begin{array}{l} \bar{Q}_4 . Q_3 \\ \bar{Q}_3 . \bar{Q}_2 \\ Q_3 . Q_2 \end{array}\right. \\ Q_4 . Q_3 \end{array}\right|$$

$$z_2 = \left|\begin{array}{l} Q_1 \left|\begin{array}{l} \bar{Q}_4 \\ Q_2 \end{array}\right| Q_3 \\ \qquad \bar{Q}_3 . \bar{Q}_2 \\ Q_4.Q_3 \end{array}\right| = H \left|\begin{array}{l} Q_1 \left|\begin{array}{l} \bar{Q}_4 \\ Q_2 \\ \bar{Q}_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} Q_3 \\ \bar{Q}_3 \end{array} \\ Q_4.Q_3 \end{array}\right| = H \left|\begin{array}{l} Q_1 \left|\begin{array}{l} \bar{Q}_4 \\ 1 \end{array}\right| 1 \\ Q_4.Q_3 \end{array}\right| = H \left|\begin{array}{l} Q_1 \\ Q_4.Q_3 \end{array}\right|$$

D'où $z_2 = H \left|\begin{array}{l} Q_1 \\ Q_4.Q_3 \end{array}\right|$

- La fonction d'entrée "z_3" peut s'établir en associant les combinaisons 0-4-8-9-13-14-15

$$z_3 = \left|\begin{array}{l} H.\bar{Q}_4.\bar{Q}_3.\bar{Q}_2.\bar{Q}_1 \\ H.\bar{Q}_4.Q_3.\bar{Q}_2.\bar{Q}_1 \\ H.Q_4.\bar{Q}_3.\bar{Q}_2.\bar{Q}_1 \\ H.Q_4.\bar{Q}_3.\bar{Q}_2.Q_1 \\ H.Q_4.Q_3.\bar{Q}_2.Q_1 \\ H.Q_4.Q_3.Q_2.\bar{Q}_1 \\ H.Q_4.Q_3.Q_2.Q_1 \end{array}\right| = H \left|\begin{array}{r} \bar{Q}_4.Q_3.\bar{Q}_2.\bar{Q}_1 \\ Q\ .\bar{Q}_3.\bar{Q}_2.\bar{Q}_1 \\ Q_4.Q_3.Q_2 \\ Q_4.Q_3.Q_2 \end{array}\right| = H \left|\begin{array}{l} Q_3.\bar{Q}_2.\bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_3.\bar{Q}_2.\bar{Q}_1 \\ Q_4.Q_3 \end{array}\right|$$

$$z_3 = H \left|\begin{array}{l} \bar{Q}_2\ \bar{Q}_1 \\ Q_4\ Q_3 \end{array}\right|$$

.../...

La fonction d'entrée "z_4" peut s'établir en associant les combinaisons 4-9-13-14-15

$$z_4 = \left| \begin{array}{l} H.\bar{Q}_4.Q_3.Q_2.Q_1 \\ H.Q_4.Q_3.\bar{Q}_2.\bar{Q}_1 \\ H.Q_4.Q_3.\bar{Q}_2.Q_1 \\ H.Q_4.Q_3.Q_2.\bar{Q}_1 \\ H.Q_4.Q_3.Q_2.Q_1 \end{array} \right| = H \left| \begin{array}{l} Q_4.Q_3 \\ \quad Q_3.Q_2.Q_1 \end{array} \right| = H \left| \begin{array}{l} Q_3.Q_4 \\ Q_3.Q_2.Q_1 \end{array} \right| = H\, Q_3 \left| \begin{array}{l} Q_4 \\ Q_2.Q_1 \end{array} \right|$$

Soit $z_4 = H.Q_3 \left| \begin{array}{l} Q_1.Q_2 \\ Q_3.Q_4 \end{array} \right|$

<u>Logigramme</u> : VOIRE FIG. 7

Les équations obtenues s'écrivent pas aprés simplification

$Q_1 = Bi\ (Q_1, z_1)$ $\qquad z_1 = H$

$Q_2 = Bi\ (Q_2, z_2)$ $\qquad z_2 = H \left| \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_3.Q_4 \end{array} \right|$

$Q_3 = Bi\ (Q_3, z_3)$ $\qquad z_3 = H \left| \begin{array}{cc} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{array} \right|$

$Q_4 = Bi\ (Q_4, z_4)$ $\qquad z_4 = H.Q_3 \left| \begin{array}{cc} Q_1 & Q_2 \\ & Q_4 \end{array} \right|$

.../...

24.14 REGISTRES A GLISSEMENT CONSIDERES COMME FONCTIONS SEQUENTIELS SYNCHRONES

Il ya lieu d'accorder une attention particulière aux registres à glissement, dans la mesure où ceux-ci constituent un groupe interéssant de fonctions synchrones.

Considèrons par exemple un registre composé de "n" chiffres associés aux "n" valeurs binaires prises par "n" fonctions dibinaires inverses.

Imposons à chacune de ces fonctions de prendre à chaque transition 1 → O de la variable horloge "H", la valeur de la fonction dibinaire précedente dans l'ordre des indices.

Ces considèrations permettent d'écrire la table de verite ipérative suivante.

H	Qp-1	Qp
1	O	O^+
1	O	1^+

On peut établir la relation de recurrence

$$Qp = Bi\ (Qp, zp) \text{ avec } zp = H \left| \begin{matrix} Qp.Qp-1 \\ Qp_{-}1\ .Qp \end{matrix} \right| = H \left| \begin{matrix} Qp \\ Qp1 \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \overline{Qp}.1 \\ \bar{Q}p \end{matrix} \right|$$

Conclusion :

Dans un registre à glissement, chaque fonction d'entrée "zp" comprend donc la fonction dibinaire correspondante "Qp" elle même. Cette fonction d'entrée particulière caractérise en pratique, lorsque les liaisons Qpet Qp sont réalisés dans les circuits eux-mêmes.
Un type de fonctionnement dit "J.K. flip.flop"

..../....

Les équations s'écrivent :

$$Q = Bi\ (Q,z) \qquad\qquad z = H \begin{vmatrix} Q & K \\ J & Q \end{vmatrix} = H \begin{vmatrix} Q.K \\ J.\bar{Q} \end{vmatrix}$$

Ou encore

$$Q = B(Q,z) = z = \begin{vmatrix} H \\ \bar{J}.\bar{Q} \\ Q.\bar{K} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H & H \\ \bar{J} & \bar{Q} \\ Q & \bar{K} \end{vmatrix}$$

25 RECHERCHE DES EQUATIONS CORRESPONDANT PARTIELLEMENT AUX FONCTIONS DIBINAIRES

On se propose d'établir les équations correspondant aux fonctions dibinaires. Pour établir une table de verite qui nous donne la fonction dibinaire directe et la fonction dibinaire inverse.

1°) Table de verite de la fonction dibinaire directe.

z	$\bar{z}$	z	
0	0	0	St
1	0	1	Co
1	1	1	St
0	1	1	St
1	1	0	Co
1	CO	0	St

Mais dans une fonction réflexe en général , $Yp = f(Yp, xn)$, il est necessaire, comme nous l'avons déjà vu, que le nombre "N", somme des états stables et des états de commutation, soit telque N 2^{n+p}

Si cette condition n'est pas verifié, il faut alors ajouter "k" fonctions supplementaires de telle manière que :

$$\boxed{N' = N + 2k \leqslant 2^{n+p+k}}$$

Le nombre total des états augmente en effet, au moins de 2 états de commutation ($0 \rightarrow 1$) et ($1 \rightarrow 0$) pour chaque fonction supplementaire ajoutée.

Pour représenter "N" états, il faut donc un nombre d'élements binaires "n+p+k" telque l'on ait au moins "N" = 2^{n+p+k}.

Dans le cas des fonctions dibinaires, la condition n'est pas verifiée que si nous ajoutons une fonction binaire supplementaire "γ" (γ : fonction dibinaire inverse)

2°) <u>Table de verite de la fonction dibinaire compléte</u>

z	Z	Y	Z	Y	
O	O	O	O	O	St ←
1	O	O	1	O	Co
1	1	O	1	O	St
O	1	O	1	1	Co
O	1	1	1	1	St
1	1	1	O	1	Co
1	O	1	O	1	St
O	O	1	O	O	Co

bouclage de cycle

La condition N 2^{n+p} est verifié ($8=2^3$), et les fonctions Z et Y peuvent être immédiatement tirés de cette table de verite.

$$z = \left| \begin{array}{c|c|c|c} z & \bar{z} & \bar{z} & z \\ Z & \bar{Z} & Z & Z \\ Y & \bar{Y} & \bar{Y} & \bar{Y} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} z & \bar{z} \\ \gamma & \bar{\gamma} \end{array} \right|$$

$$y = \left| \begin{array}{c|c|c|c} z & \bar{z} & \bar{z} & z \\ Z & Z & \bar{Z} & Z \\ Y & Y & Y & \bar{Y} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} z & \bar{z} \\ Z & Y \end{array} \right|$$

- Ecriture de la fonction sous forme maillée :

.../...

$$\begin{array}{l|l|l} z & \bar{z} & \\ & \bar{y} & - = Z = B\ (Z,z) \\ Z & & \\ & \bar{z} & \\ & Y & - = Y = Bi\ (Y,z) \end{array}$$

- Conclusion : De nombreux schémas peuvent être établis à parter de ces équations, mais aucun ne donnera satisfaction en pratique, si les problèmes posés par les Aléas de commutation ne sont pas résolus. Il s'agit des aléas de continuite (dus aux commutations théoriquement simultanées des 2 formes z et z), et des aléas de simultaneïte dus aux commutations des fonctions et de la qui, en principe, se produsent au même instant . Ces problèmes de simultaneïte, ne sont resolus qu'à la condition d'introduire des retards de propagation, des différentiations dans les signaux transmis ou des seuils de non Linéarite, compatibles avec le fonctionnement desiré ou poinde vue algébrique, on peut en principe écrire les équations partielles "Z" et "Y" d'une fonction "dibinaire" sous forme developpée, selon les cas à la technologie que l'on envisage d'utiliser.

On peut écrire : $Z = \left| \begin{array}{l} \bar{z}.Z. \\ z.\bar{Y}. \end{array} \right|$ $\bar{Y} = \left| \begin{array}{l} \bar{z}.\bar{z} \\ z.\bar{y} \end{array} \right|$

Et réaliser la bascule à l'aide de six portes "ON;"

<u>Schéma</u> VOIRE. FIG. 8

Nous pouvons également écrire les équations :

$$Z = \left|\begin{array}{c|c} z & \bar{z} \\ Z & z.\bar{y} \end{array}\right| \qquad\qquad Y = \left|\begin{array}{c|c} z & \bar{z} \\ z & y \end{array}\right|$$

Et le réaliser à le circuit à l'aide de six portes "NI"

- Ces circuits, au total, six aléas de commutation.(dont 4 ne peuvent être eliminés par des moyens algébriques).

- <u>ELIMINATION DE CERTAINS TYPES D'ALEAS</u>

biformes

En multipliant chacune des 2 fonctions "Z" et "Y" carrées en "z" par leur consensus dual respectif, nous pourrons eliminer les ALEAS DE CONTINUITE.

Dans le cas où l'on envisage la réalisation à l'aide de circuits "NI"

Nous obtenons alors : Pour Z et Y

$$Z = \left|\begin{array}{c|c} Z & \bar{z} \\ z & \bar{y} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} Z & \bar{z} & Z \\ z & \bar{y} & \bar{y} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} Z & \bar{z} \\ z.\bar{y} & \bar{y} \end{array}\right|$$

$$Y = \left|\begin{array}{c|c} y & z \\ \bar{z} & Z \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} y & z & y \\ \bar{z} & Z & Z \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} y & z \\ \bar{z}.Z & Z \end{array}\right|$$

Nous pouvons alors écrire "Z" et "Y" sous de fonctions memoires.

$$Z = \left|\begin{array}{c} Z \\ S_1 \end{array}\right| \bar{R}_1 \qquad S_1 = z\,\bar{y} \quad ; \quad R_1 = z\,y$$

$$Y = \left|\begin{array}{c} Y \\ S_2 \end{array}\right| \bar{R}_2 \qquad S_2 = \bar{z}.Z \qquad R_2 = \bar{z}.\bar{Z}$$

L'intrêt de cette forme résulte du fait que dans ce cas les 2 sorties de chacune des fonctions memoires sont complementaires.

$$\bar{S}_1.\bar{Z} = \left|\begin{array}{c}\bar{z}\\ y\end{array}\right| \bullet \left|\begin{array}{c|c} z & \bar{z}\\ \bar{Z} & y\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} z & \bar{z}\\ \bar{z} & y\end{array}\right| = \bar{Z}$$

et

$$\bar{S}_2.\bar{Y} = \left|\begin{array}{c} z\\ \bar{Z}\end{array}\right| . \left|\begin{array}{c|c} \bar{z} & z\\ \bar{Y} & \bar{Z}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{z} & z\\ \bar{Y} & \bar{Z}\end{array}\right| = \bar{Y}$$

Ceci nous permet d'établir le schéma symétrique.

VOIRE FIG. 9

Le schéma précédent correspond à un type de Bascule que l'on appelle Bascule "Maitre esclave". La fonction Z est considerée comme maître, et la fonction Y_1 est l'esclave.

En fait "Z" correspond au Bistable de sortie d'une fonction dibinaire directe l'autre "Y" est le bistable de sortie d'une fonction dibinaire inverse.
Il subsite encore dans le circuit 4 Aléas de simultaneïte qui peuvent être eliminés par une condition particulière et simple concernant la distribution des seuils de commutation ramenés à l'entrée.

Les proprietés des fonctions dibinaires, rigouresement définies par les graphes sequentiels ne sont pas en définitive, complétement décrites par les équations binaires qui sont sensées leur correspondre.

26 CARACTERISATION ET CHOIX DES FONCTIONS DIBINAIRES Dans un système

26.1 Théorème :

La condition necessaire et suffisante pour qu'une fonction $Q(xn) \in EO1$ (Xn : vecteur variable) puisse être representée par une fonction dibinaire, et qu'il existe au moins un groupe "C_3" de combinaisons, non consécutives, des variables $Xn=xn,xn-1,.......x2,x_1$ telque l'une de ces combinaisons, lorsqu'elle se produit assure la transition $(Q \longrightarrow \bar{Q})$

C'est à dire que si Q=o, l'apparition de la combinaison $Xn^o C\ C_3 \Longrightarrow Q=(0 \longrightarrow 1)$ Si $Q = 1$ $(Xn^1 \longrightarrow Xn^o) \longrightarrow$ $(Q = (1 \longrightarrow 0)$ avec $Xn^o \subset C_3$ et $Xn^1 \not\subset C_3$.

- La condition est necessaire :

Supposons que la fonction Q(xn) soit une fonction dibinaire $Q = B\ (Q,z)$ [qui est identique à $Q = Bi(Q,z')$

$z^1 = \bar{z}$]

selon l'hypothèse de départ $z = z\ (Xn)$ est une fonction binaire car $z \in EO1$, si nous considèrons le groupe "C_3" des différentes valeurs du vecteur variable "Xn" qui donnent à "z" la valeur unite et si de plus, ces valeurs ne sont pas consécutives alors les valeurs qui les précédent immédiatement dans l'ordre des séquences donnent à "z" la valeur O, ce qui met la fonction dibinaire "Q" en préparation de basculement et assure la transition $(Q \longrightarrow \bar{Q})$ lorsque l'une des combinaisons $(Xn^o\ C\ C_3)$ se manifeste.

- La condition est suffisante :

Supposons qu'il existe un groupe "C_3" de valeur non consécutives du vecteur variable "Xn" qui entrainent pour une fonction $Q \in EO1$, lorsqu'elles apparaissent, les transitions $(Q \longrightarrow \bar{Q})$.

Nous pouvons établir la fonction $z \in EO1$ produel des produits qui correspondent aux différentes combinaisons du groupe "C_3"

Pour toute valeur; l'apartenant pas à "C_3", $z = 0$ et la fonction dibinaire $Z= B\ (Z,z)$ est en préparation de basculement L'apparition d'une transition $(Xn^1 \longrightarrow Xn^o)$, $Xn^o \in C_3$ $Xn^1 \not\subset C_3$ assure donc la transition $(Z \longrightarrow \bar{Z})$ lorsque ces combinaisons ne sont pas consécutives. Nous pouvons donc écrire $Q = Z$ et par suite

$$Q = B\ (Q,z) \quad z = \left|C_3\right| \quad \text{ou } Q = Bi\ (Q,z')\ ,\ z' = \left|\bar{C}_3\right|$$

26.2 CAS GENERAL D'ETABLISSEMENT DES FONCTIONS ET UTILITE DES FONCTIONS "R,S,z".

Il est trés important, dans le cas général, d'analyser les solutions possibles lorsque sont réunies à la fois, pour une même fonction binaire reflexe ; les conditions qui caracterisent les fonctions mémoires et celles qui distinguent les fonctions dibinaires.
Supposons qu'il existe une fonction binaire $Q \in EC1$, et 4 groupes distincts des valeurs du vecteur variable "Xn" tels que l'on puisse écrire.

$$(C_0) \Longrightarrow (Q=0)$$
$$(C_1) \Longrightarrow (Q=1)$$
$$(C_2) \Longrightarrow (Q=Q, \forall Q)$$
$$(C_3) \Longrightarrow (Q \rightarrow \bar{Q})$$

Si 2 valeurs quelconque du vecteur "Xn" appartenant au groupe C_3 ne sont pas jamais consécutives dans l'ordre chronologique prévu pour le fonctionnement, la fonction "Q" peut alors, dans tous les cas envisagés, être représentée par une fonction dibinaire "R-S-z" dans la-quelle les actions de "R" et "S" devront être prioritaires sur celles de l'entrée "z"

$$Q = B(Q,R,S,z) \quad \text{ou} \quad Q = Bi\ (Q,\bar{R},\bar{S},\bar{z})$$

avec

$$z = |C_3|, \quad R = |C_0|, \quad \text{et} \quad S = |C_1|$$

$|C_0|$, $|C_1|$ et $|C_3|$ représentent symboliquement les produels de produits qui donnent respectivement à "R", "S", et "z", la valeur unite, pour les combinaisons de valeurs de "Xn" correspondant à chacun des groupes "C_0" , "C_1", "C_3"

Cas particulier :

Si les valeurs du vecteur variable "Xn" qui appartiennent à "C_0" et "C_1" sont non seulement distinctes, mais ne sont pas l'ordre chronologique du fonctionnement envisagé consécutives aux valeurs de "Xn" qui appartiennent à "C_3"

Nous pouvons grouper "C_0" "C_1", et "C_3" dans une même implication en écrivant .

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} |C_0| = 1 \ ; \ Q = 1 \\ |C_1| = 1 \ ; \ Q = 0 \end{array}\right\} \quad (Q \rightarrow \bar{Q}) \\ |C_3| = 1 \\ |C_2| = 1 \Longrightarrow \ (Q = Q \ ; \ \forall Q) \end{cases}$$

Nous pouvons alors utiliser dibinaires dont les élements d'entrée, sont finalement ceux des Bascules J.K

$$Q = B(Q,z) \quad \text{avec } z = \left| \begin{array}{c|c} & C_3 \\ Q & C_0 \\ \bar{Q} & C_1 \end{array} \right|$$

Ou bien :

$$Q = Bi\ (Q,\bar{z}) \quad \text{avec } \bar{z} = \bar{C}_3 \left| \begin{array}{c|c} \bar{Q} & Q \\ |\bar{C}_0| & |\bar{C}_1| \end{array} \right|$$

Fig 1 : Fonctions dibinaires : a) $Z = B(Z, z)$: fonction directe
b) $Z = Bi(Z, z)$: fonction inverse

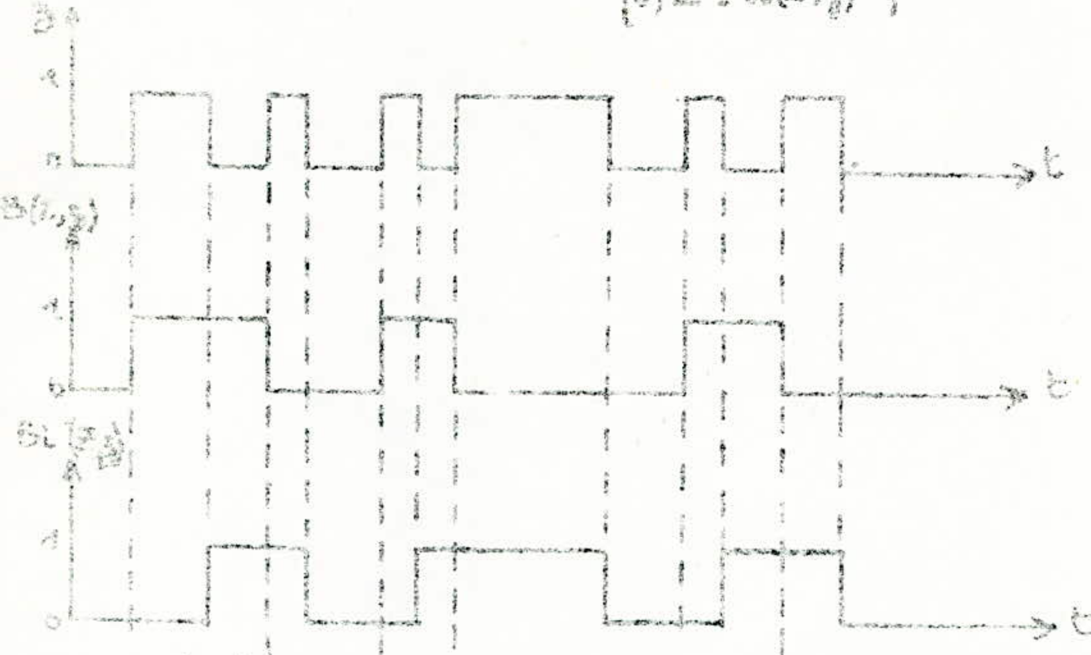


Fig. 2

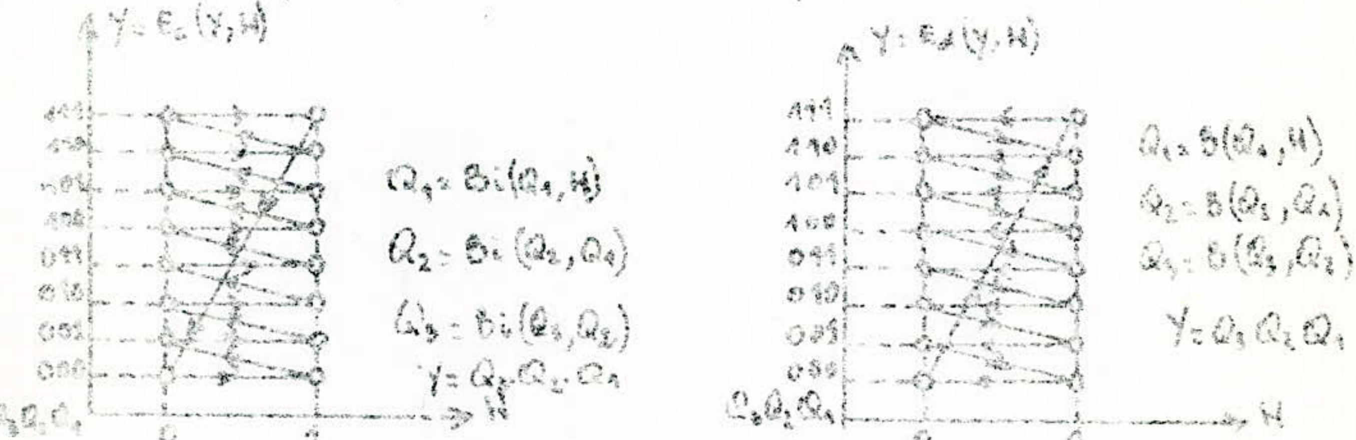


Fig. 3

Fig. 4 : Schémas correspondants à une fonction dibinaire : a) directe
b) inverse

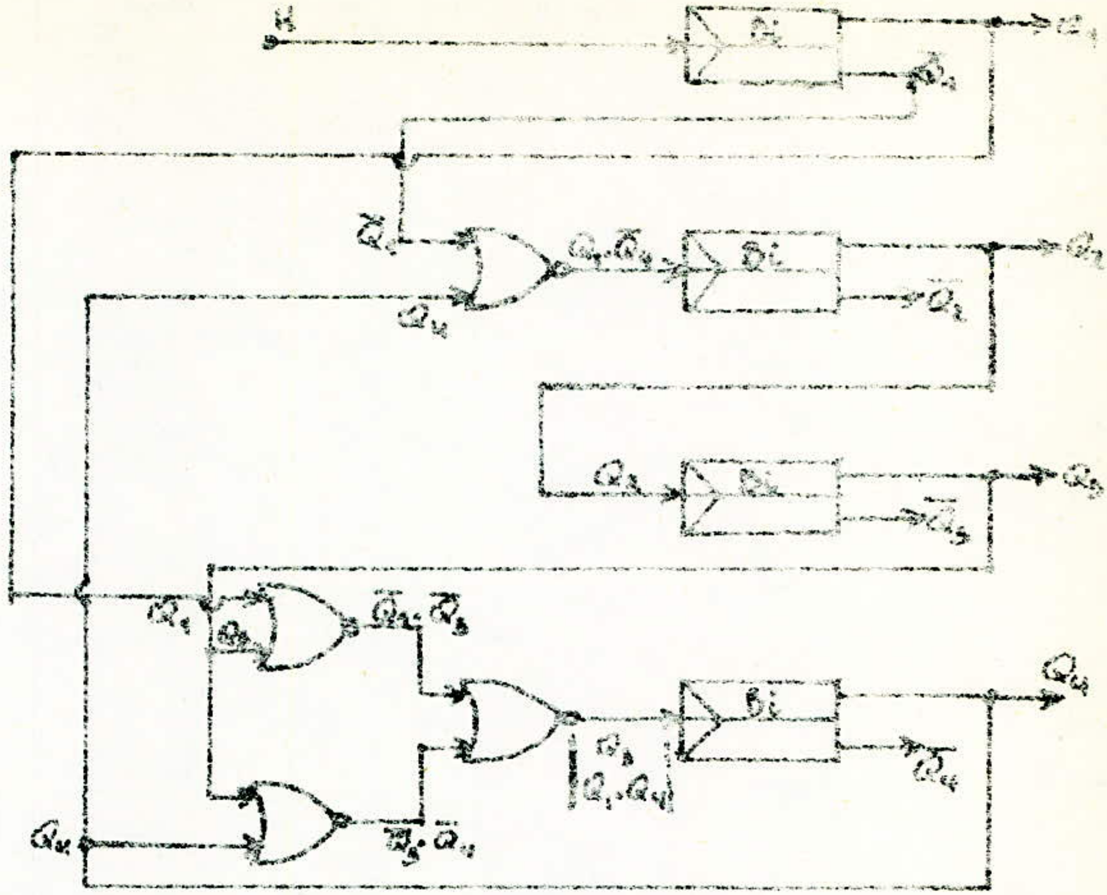


Fig. 5 : Décade de Comptage en D.C.B

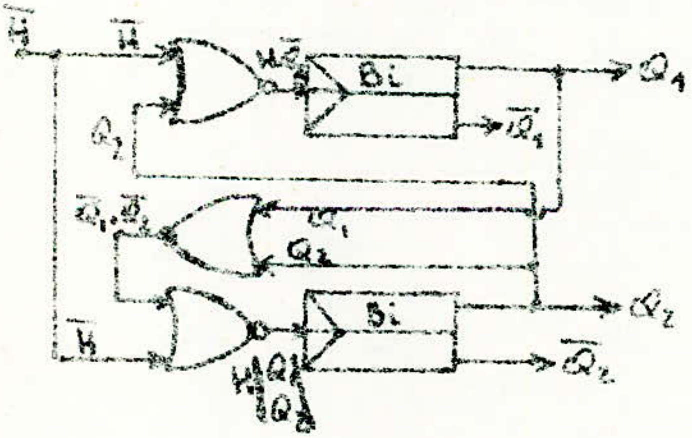


Fig. 6

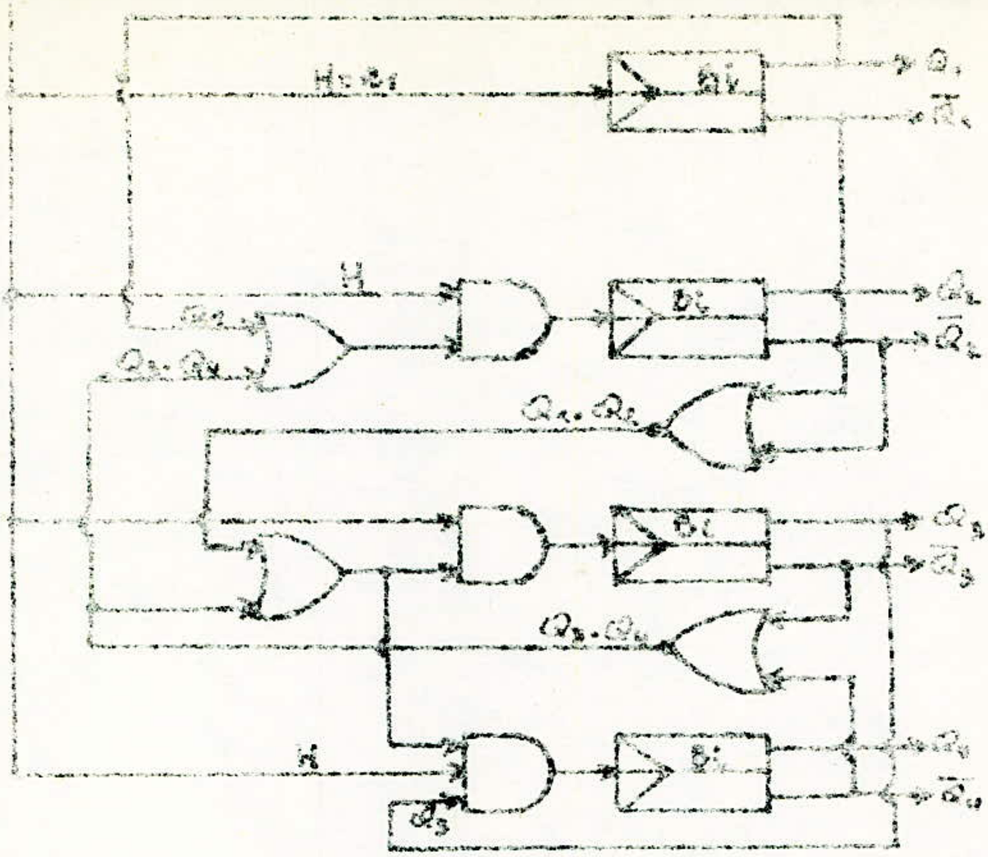


Fig.7

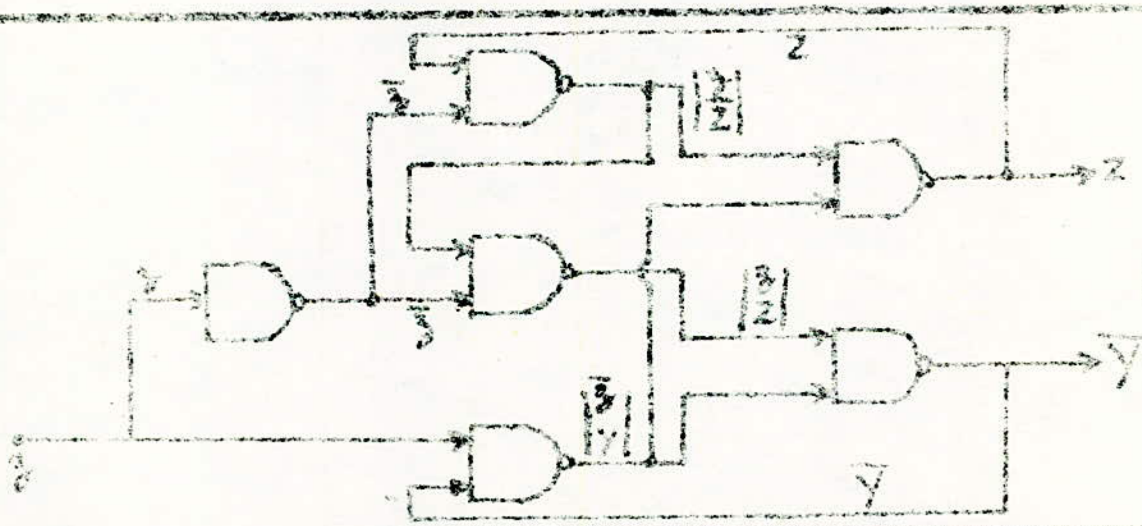


Fig. 8

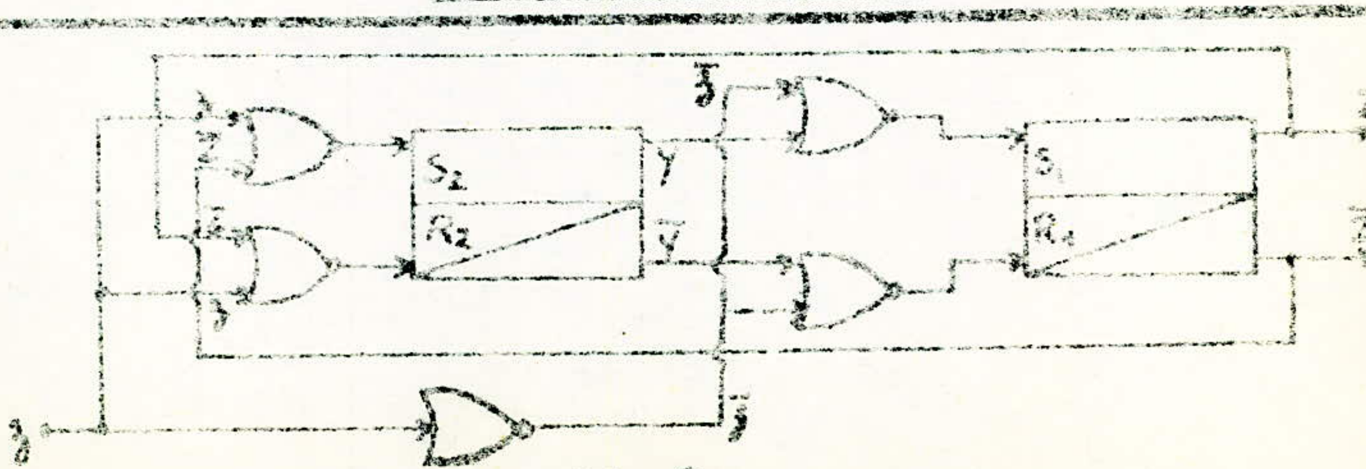


Fig.9

CHAP 3 - ETUDE SUR LES BASCULES

CHAP 4 - FONCTIONS GENERATRICES

41 - FONCTION DELAI

42 - MODE DE RECHERCHES DES FONCTIONS ASSOCIEES

CHAP 5 - METHODE DE CALCUL DES FONCTIONS SEQUENTIELLES.

ETUDE SUR LES BASCULES

Dans l'étude des registres à mémoires, nous avons parlé de Bascules. Il s'agit de préciser ce qu'on comprend par Bascules et l'intérêt que nous avons à introduire celles-ci.
Ces bascules correspondent en fait à la réalisation pratique des fonctions dibinaires, dont le rôle est essentiel dans l'étude des systèmes sequentiels.

Les Bascules électroniques sont la version actuelle des anciennes dite, à Relais, seulement les bascules électroniques introduisent des conditions unherentes aux problèmes de commutation interne.

La solution à ces problèmes consite à introduire, soit des retards de propagation, ou à différentation des signaux d'entrée ou encore à l'aide de seuils non linéaires indicieusement distribués.
Cette dernière possibilité est plus intéressante, car elle est par la définition trés large des seuils que nous allons donner plus générale que les 2 précédentes.

31. CONDITION DES SEUILS

- On appelle seuil de commutation amené à l'entrée d'un circuit logique, le niveau de tension ou de courant atteint par le signal d'entrée à partir duquel le circuit se comporte en sortie, comme s'il se trouvait dans l'état complémentaire de celui dans lequel il était immédiatement avant que ce niveau soit atteint.

Les seuils de commutation ne sont pas les mêmes pour des sorties differentes correspondant à une même entrée. Ils ne sont pas constants pour les transitions $0 \rightarrow 1$ et $1 \rightarrow 0$.
Ils dependant de la rapidité des doubles transitions $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

Si v(t) designe une tension variable, il suffit d'exprimer sous forme de variations relatives, l'évolution dans le temps de la variable binaire "x" en écrivant la relation

$$x\ (H = \frac{v\ (t) - v\ o}{Vm - VO}$$

Dans cette relation "VO" représente le niveau de tension correspondant à $x = 0$ vm correspond à $x = 1$.

Les seuils de commutation jouent un rôle essentiel dans l'étude des automatismes à séquences.
Dans bien des cas, l'élimination des aléas de commutation reste un problème insoluble, si la notion de seuil n'est pas introduite dans l'étude du fonctionnement .

..../....

Les fonctions "dibinaires" en sont un exemple precis.

3.2 APPLICATION AUX FONCTIONS DIBINAIRES

Les 4 états stables consécutifs qui corracterisent les fonctions dibinaires, ont pour conséquence pratique; l'existence sz 4 seuils de commutation ramenés à l'entrée; liés à ces 4 états.

L'importante condition des seuils s'annonce de la façon suivante.

Pour qu'un circuit sequentiel élémentaire qui dépend d'une seule variable binaire puisse être identifié à une fonction dibinaire, il faut et il suffit qu'il présente 4 états d'équilibre consécutifs et distincts qui conditionnent 4 seuils intermédiaires de commutation ramenés à l'entrée, séparant les 4 états stables, et distribués de telle sorte que les seuils franchis par les niveaux croissant du signal d'entrée soient supérieurssau deux seuils franchis par les niveaux d'entrée décroissants. (Voir Fig. 1)

3.3 Etude sur le graphique :

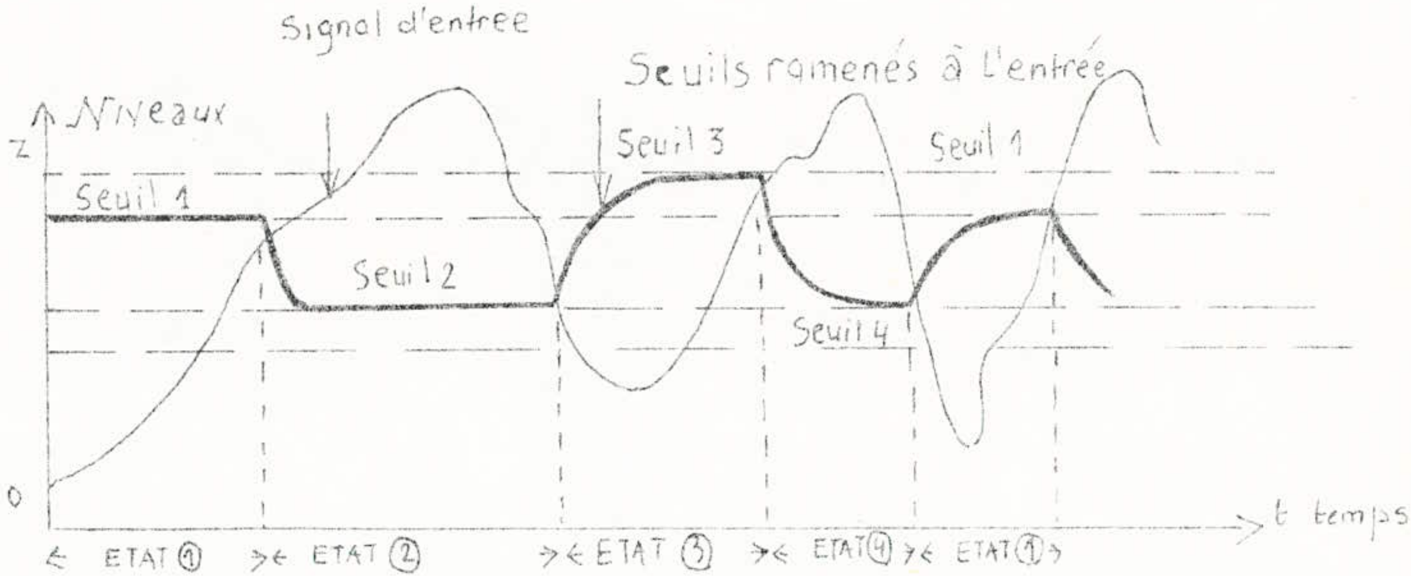
Le graphique précédent illustre la condition des seuils.

Quatre états d'équilibre stable distincts assujettis à la condition des seuils, sont donc necessaires et suffisants pour assurer la réalisation de bascules logiques correspondant aux fonctions dibinaires.
Chaque état determine à l'entrée un seuil de passage à l'état suivant chaque changement d'átat entraine donc une modification de ce seuil. Les seuils sont donc variables dans le temps.
Ainsi sur le graphique les états (1) et (3) correspondent à des niveaux d'entrée bas et les états "2" et "4" à des niveaux d'entrée hauts.

En conséquence, si le seuil "2" est supérieur au seuil "1" pour une variation di niveau d'entrée moins rapide que la variation de suil, le seuil "1" étant franchi, le niveau d'entrée se trouve être inférieur au seuil "2" ce qui entraine le passage immédiat à l'état "3" et l'état "2" n'est pas un état stable.

Dans ces conditions, la vascule peut encore fonctionner, à la condition expresse, d'appliquer à l'entrée des signaux ayant des temps de montée supérieurs à ceux des variations de seuil, mais cette bascule n'est pas plus une bascule logique car son fonctionnemnt dépend du temps de montée de l'impulsion d'entrée

Lorsque la condition d'alternance concomittante des seuils n'est pas verifiée, le comportement d'une bascule dépend donc de la forme du signal d'entrée . Cette dépendance qui réduit beaucoup la fiabilité peut et doit être dans la construction de toute bascule.



"CONDITION DES SEUILS"

34 BASCULES LOGIQUES A SEUILS

Pour respecter la condion des seuils, il faut coupler les 2 fonctions mémoires "Z" et "Y" d'une façon DISSYMETRIQUE.

Dans le cas d'une fonction dibinaire, seule la fonction "Z" doit repondre aux caracteristiques logiques imposées alors que la fonction interne "Y" qui en générale n'est pas utilisée, peut avoir des caractéristiques differentes.

Ceci permet d'introduire la dissymétrie necessaire à un fonctionnement convenable.

REALISATION

Pour réaliser simplement une bascule logique à seuils à l'aide de semi conducteurs il suffit théoriquement de disposer comme élements actifs, de deux bistables (4 transistors) qui permettent d'obtenir 4 états d'équilibre stables et de quatre diodes fixant les 4 seuils de commutation.

Voire schéma à la fin du chapitre.

35. CLASSIFICATION DES BASCULES

Il existe actuellement un trés grand nombre de bascules de différentes sortes et de caractéristiques variées dont certaines sont réalisées sous la forme de circuits integrés, mais parmi ces nombreux types proposés par les constructeurs, il en existe peu pour lesquels la conditions des seuils soit satisfaite.

La grande diversité des modéles s'explique par les nombreuses possibilités offertes dans le choix des fonctions d'entrée associées à une fonction dibinaire et aussi dans celui des fonctions mémoires qui la composent.

Parmi les différents types de bascules, certaines présentent des propriétés intéressantes qui engagent à leur accorder une attention particulière. Il est utile de rappeler cependant que les équations, exprimées à l'aide des fonctions dibinaires supposent implicitement que la condition des seuils est satisfaite ; ce qui n'est pas le cas des fonctions binaires développées.

3.5.1 BASCULES "T"

Lorsque la condition des seuils est satisfaite les bascules "T" sont des fonction dibinaires. Il en existe deux sortes :

- L'une correspond à la fonction dibinaire directe
- L'autre correspond à la fonction dibinaire inverse.

.../....

FORMES DIBINAIRES

$Q = B\ (Q,T)$

FORMES BINAIRES PARTIELLES

$$-\left|\begin{array}{l} T \\ Q \end{array}\right| \begin{array}{l} \left|\begin{array}{l}\bar{Y}\\ T\end{array}\right| = Q \\ \\ \left|\begin{array}{l} Y \\ \bar{T}\end{array}\right| = Y\end{array}$$

$Q = Bi\ (Q,T)$

$$-\left|\begin{array}{l} \bar{T} \\ Q \end{array}\right| \begin{array}{l} \left|\begin{array}{l}\bar{Y}\\ T\end{array}\right| = Q \\ \\ \left|\begin{array}{l} Y \\ T\end{array}\right| = Y\end{array}$$

3.5.2 BASCULES " R,S,T " et "R,S,z"

Il est interessant dans tous les cas d'utilisation (Contrôle de l'état de départ d'une séquence), de disposer d'une remise à O d'éccés direct et aussi d'une possibilité d'armement de la bascule "T".
Ces possibilités d'action sur les mémoires de la fonction dibinaire conduisent aux bascules "R,S,T".

Il est possible d'imaginer plusieurs sortes de bascules de ce type. Rappelons, à titre d'exemple, les équations de celles qui correspondent aux bascules à seuils, dans lesquèlles les commandes "R,S" et "T" provoquent l'arrêt du fonctionnement et le blocage, lorsque l'une quelconque d'entre elles prend la valeur "1" et s'y maintient.

FORME DIBINAIRE

$Q = Bi\ (Q,R,S,T)$

FORMES BINAIRES PARTIELLES

$$Q = \left|\begin{array}{l} Q \\ \bar{T}' \end{array}\right|\begin{array}{l} T \\ \bar{Y} \end{array}\right|$$

$$y = \left|\begin{array}{l} \quad Y \\ \bar{S}\ \left|\begin{array}{l} T.Q.\bar{R} \\ R.\bar{T} \end{array}\right. \end{array}\right|\begin{array}{l} \quad R \\ \begin{array}{l}\bar{T}\\ Q \\ S\end{array}\left|\begin{array}{l} T \\ \bar{S} \end{array}\right. \end{array}\right|$$

Si nous nous référons au théorème général qui permet de calculer les fonctions dibinaires, nous pouvons définir les caractéristiques d'une bascule "R,S,z", dans laquelle les entrées "R" et "S" sont symétriques mais prioritaires sur l'entrée "z". Il faut, dans ce cas que la fonction cherchée réponde aux implications suivantes :

$$\left.\begin{cases} z = 1 \;,\; R = 0 \;,\; S = 0 \\ z = 1 \;,\; R = 1 \;,\; S = 1 \end{cases}\right\} \;(Q \longrightarrow \bar{Q})$$

$$z = \varnothing \;,\; R = 1 \;,\; S = 0 \Longrightarrow Q = 0$$

$$z = \varnothing \;,\; R = 0 \;,\; S = 1 \Longrightarrow Q = 1$$

N.B : Les combinaisons de valeurs des variables qui impliquent $(Q \dashrightarrow \bar{Q})$ ont été choisies de façon à éviter que les états correspondants ne soient consécutifs, sinon il serait impossible à cette transition $(Q \longrightarrow \bar{Q})$ de se produire parce qu'il n'y aurait pas alors passage par les détats intermédiaires qui mettent la bascule en préparation de basculement.

Si "R" et "S" prioritaires sur l"entrée, agissent toujours plus vite que "z"; les implications précédentes définissent des fonctions dibinaires "R,S,z" qui sont représentées comme suit :

$$Q = B\,(Q,R,S,z) \quad \text{ou} \quad Q = Bi\,(Q,\bar{R},\bar{S},\bar{z})$$

qui ont comme expressions binaires :

$$Q = \left|\begin{array}{l|l|l} Q & \bar{z} & \\ z & \bar{y} & \bar{R} \\ & S & S \\ S & \bar{R} & \end{array}\right| \qquad Y = \left|\begin{array}{l|l|l} Y & z & \\ \bar{z} & Q & R \\ & & \bar{S} \\ \bar{S}.R & & \end{array}\right|$$

Les bascules "R,S,z" ont une importance fondamentale dans l'étude générale des systèmes séquentiels.

37. BASCULES DU TYPE " J - K " :

Ce sont les régistres à glissemant qui sont à l'origine des bascules du types "J.K" . Il en existe plusieurs sortes dont les équations peuvent être calculées à partir de la forme générale des fonctions dibinaires.

Nous nous bornerons à montrer comment certaines de ces bascules peuvent être représentées simplement à l'aide d'une fonction dibinaire et d'une fonction d'entrée associées.

..../....

Formes dibinaires

$$Q = Bi\ (Q, z1), z1 = H.\left|\begin{array}{c|c} Q & \bar{Q} \\ J & K \end{array}\right|$$

$$Q = B(Q, z2), z2 = \left|\begin{array}{c} H \\ \bar{J}.\bar{Q} \\ \bar{K}.Q \end{array}\right|$$

Fornes binaires

$$Q = \left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} Q \\ \bar{Y} \,\Big|\, \begin{array}{c} \bar{H} \\ \bar{J} \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} H.K \\ \overline{Y} \end{array} \end{array}\right|$$

$$Y = \left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} Y \\ \\ H.Q.K \end{array} & \begin{array}{c} Q \\ \bar{H} \\ \bar{J} \end{array} \end{array}\right|$$

$$Q = \left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} Q \\ \bar{Y} \,\Big|\, \begin{array}{c} H \\ \bar{J} \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \bar{H}.\ K \\ \overline{Y} \end{array} \end{array}\right|$$

$$Y = \left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} Y \\ \\ \bar{H}.Q.K \end{array} & \begin{array}{c} Q \\ H \\ \bar{J} \end{array} \end{array}\right|$$

38 BASCULES "D"

Ce sont en réalité des fonctions mémoires à chantillonnage et conduisent à un nombre réduit de liaisons dans la réalisation de registres à glissement. Leurs équations peuvent s'écrire:

$$\left|\begin{array}{c} X_1 \\ \bar{H} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l} \left|\begin{array}{c} Q \\ H \end{array}\right| = Q \\ \\ \left|\begin{array}{c} H \\ D \end{array}\right| = X_1 \end{array}\right.$$

Ou encore

$$Q = \left|\begin{array}{c} Q \\ H \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} \bar{H} \\ X_2 \end{array}\right|$$

$$X_2 = \left|\begin{array}{c} \bar{D} \\ H \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} \bar{H} \\ X_2 \end{array}\right|$$

Avec $X_2 = \overline{X_1}$

Lorsque $D = \bar{Q}$, les équations correspondent à celles d'une fonction dibinaire sous réserve de satisfaire à la condition des seuils. Dans le cas contraire, le fonctionnemnt correct en bascule ne peut être garanti.

La bascule "D" a été introduite pour constituer des registres à 53 glissement en associant 2 fonctions mémoires successives.

Si nous reprenons en effet les équations étalbies au paragraphe .

.../....

"PAS A PAS BINAIRES ET REGISTRES & GLISSEMENT "

$$Q_{2p-1} = \left| \begin{array}{c|c} Q_{2p-1} & H \\ \bar{H} & Q_{2p-2} \end{array} \right| \qquad Q_{2p} = \left| \begin{array}{c|c} Q_{2p} & \bar{H} \\ H & Q_{2p-1} \end{array} \right|$$

Il siffit de poser : $Q_{2p-2} = D$, $Q_{2p-1} = X1$, $Q_{2p}=Q$
et on retrouve les équations d'une bascule "D"

Si l'on ne tient pas compte de la condition des seuils, une bascule "D" peut être réalisée, en principe, à l'aide de circuits "NOR" ou"NAND".

38.1 BASCULE "D" REALISEE A L'AIDE DE CIRCUITS "NOR"

$$Q = \left| \begin{array}{c|c} Q & X1 \\ H & \bar{H} \end{array} \right| \qquad , \; X_1 = \left| \begin{array}{c|c} H. & H \\ \bar{H} & D \end{array} \right|$$

Fig. 1

38.2 BASCULE "D" réalisée à l'aide de circuits "NAND"

$$Q = \left| \begin{array}{c} X_1 . H \\ Q . \left| \begin{array}{c} \bar{H} \\ X_1 \end{array} \right. \end{array} \right| \quad \text{et} \quad X_1 = \left| \begin{array}{c} X_1 . H \\ D . \left| \begin{array}{c} \bar{H} \\ X_1 \end{array} \right. \end{array} \right|$$

Fig. 2

39 BASCULES A FONCTIONNEMENT CONTROLE

On peut imaginer en partant des équations binaires, un grand nombre de bascule ayant des propriétés particulières. C'est ainsi qu'un anneau de glissement comprenant quatre fonctions Qo,Q1,Q2,Q3 permet de réaliser à la fois, à l'aide de 8 circuits "NOR" ou de 8 circuits "NAND" à 2 entrées, une bascule directe et une bascule inverse symétriques.

TABLE DE VERITE REDUITE :

.../...

H	Qo	Q1	Q2	Q3
0	1	1	0	0
1	0	1	1	0
0	0	0	1	1
1	1	0	0	1

$$Qo = \left|\begin{array}{c|c} Qo & \bar{H} \\ H & Q_3 \end{array}\right| , \quad Q1 = \left|\begin{array}{c|c} Q1 & H \\ \bar{H} & Qo \end{array}\right| , \quad Q2 = \left|\begin{array}{c|c} Q2 & \bar{H} \\ H & Q1 \end{array}\right| , \quad Q3 = \left|\begin{array}{c|c} H & Q_3 \\ Q2 & \overline{H} \end{array}\right|$$

Si la condition des seuils est satisfaite , alors

$Qo = \bar{Q}2$ représente une fonction dibinaire directe

$Q1 = \bar{Q}3$ " " ": inverse

Dans le cas où $Qo = Q1 = Q2 = Q3$, le circuit ne dépend plus de H .

Il faut pour démarrer un comptage ou un décomptage, placer les fonctions dans l'état $Qo = Q1 = 1$ et $Q2 = Q3 = 0$ pour $H = 0$.

Ou dans l'état $Q3 = Qo = 0$ et $Q1 = Q2 = 1$ pour $H = 1$

Il suffit de faire $Qo = Q1 = Q2 = Q3$ pour bloquer le fonctionnement.

34. BASCULES "MASTER-SLAVE" A SEUILS

Il existe actuellement, en logique T.T.L, des bascules " MASTER-SLAVE" (Flip-Flop-Master-slave" et "J-K") dans lesquelles la condition des seuils est obtenue en utilisant l'écart de tension qu'il faut introduire entre la base et l'emetteur d'un transistor, pour le rendre conducteur. Le schéma simplifié d'une telle bascule est figuré ci-aprés.

FIG.3

..../....

$$Q = \left|\begin{array}{c} \bar{P} \\ \bar{H}.\,a \end{array}\right| , \quad \bar{P} = Q \cdot \left|\begin{array}{c} H \\ \bar{Y} \end{array}\right| \quad \text{d'où} \quad Q = \left|\begin{array}{c} Q.\left|\begin{array}{c} H \\ \bar{Y} \end{array}\right. \\ \bar{H}.a \end{array}\right|$$

$$Y = \bar{a} \cdot \left|\begin{array}{c} \bar{H} \\ \bar{P} \\ \bar{J} \end{array}\right| , \quad \bar{a} = \left|\begin{array}{c} Y \\ H.Q.K \end{array}\right| \quad \text{d'où} \quad Y = \left|\begin{array}{c|c} Y & \bar{H} \\ & Q \\ H.Q.K & \bar{J} \end{array}\right|$$

$$\text{Mais :} \quad \left|\begin{array}{c} \bar{a} \\ H \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} Y \\ H \end{array}\right| \Rightarrow \bar{H}.a = \bar{H}.\bar{Y} \quad \text{et} \quad Q = \left|\begin{array}{c} Q \left|\begin{array}{c} H \\ \bar{Y} \end{array}\right. \\ \bar{H}.\bar{Y} \end{array}\right|$$

Donc :

$$Q = \left|\begin{array}{c|c} Q & H \\ \bar{H} & \bar{J} \end{array}\right| , \quad Y = \left|\begin{array}{c|c} Y & \bar{H} \\ H.Q.K & Q \\ & \bar{J} \end{array}\right|$$

<u>N.B</u> : Ces équations ne correspondant pas exactement à celles d'une fonction "J - K " au sens défini par M.PHISTER.

Considérons en effet une fonction "J - K " telle qu'elle a été définie au paragraphe 3.7

$$\left|\begin{array}{c} Q \\ \bar{z} \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \left|\begin{array}{c} \bar{Y} \\ z \end{array}\right| = Q \\ \\ \left|\begin{array}{c} Y \\ z \end{array}\right| = Y \end{array} \qquad z = H \cdot \left|\begin{array}{c|c} Q & \bar{Q} \\ J & K \end{array}\right|$$

En remplaçant "z" par sa valeur dans les fonctions mémoires " Q" et "Y" on aura :

$$Q = \left|\begin{array}{c|c} H.K & Q \\ \bar{Y} & \bar{Y} \left|\begin{array}{c} \bar{H} \\ \bar{J} \end{array}\right. \end{array}\right| \quad \text{et} \quad y = \left|\begin{array}{c|c} Q & Y \\ \bar{H} & \\ \bar{J} & H.Q.K \end{array}\right|$$

.../...

Nous voyons, que seule la fonction "Y" est commune avec celle du schéma précédent.

Nêanmoins, lorsque $J = K = 1$, on retrouve les équatinns :

$$Q = \left| \begin{array}{c|c} \bar{Y} & \\ H & Q \\ & \bar{H} \end{array} \right|$$

$$Y = \left| \begin{array}{c} Y \\ H \end{array} \right|$$

Donc : la condition des seuils est satisfaite grâce au montage des 2 transitors T1 et T2 couplés par l'émetteur, le circuit est donc équivalent à la fonction dibinaire inverse.

$Q = Bi\ (Q,H)$ (Pour $J = K = 1$)

..../....

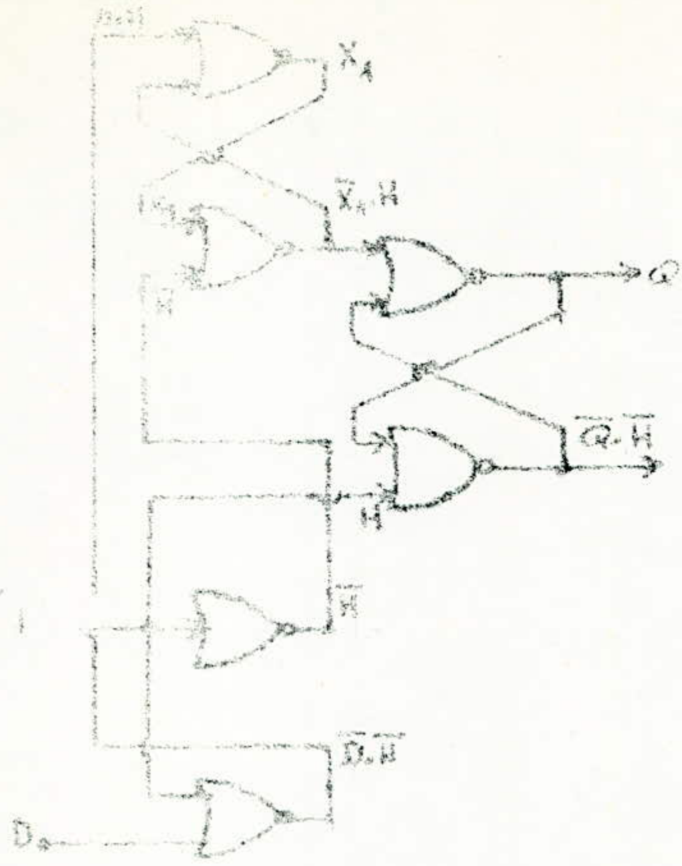


Fig. 10

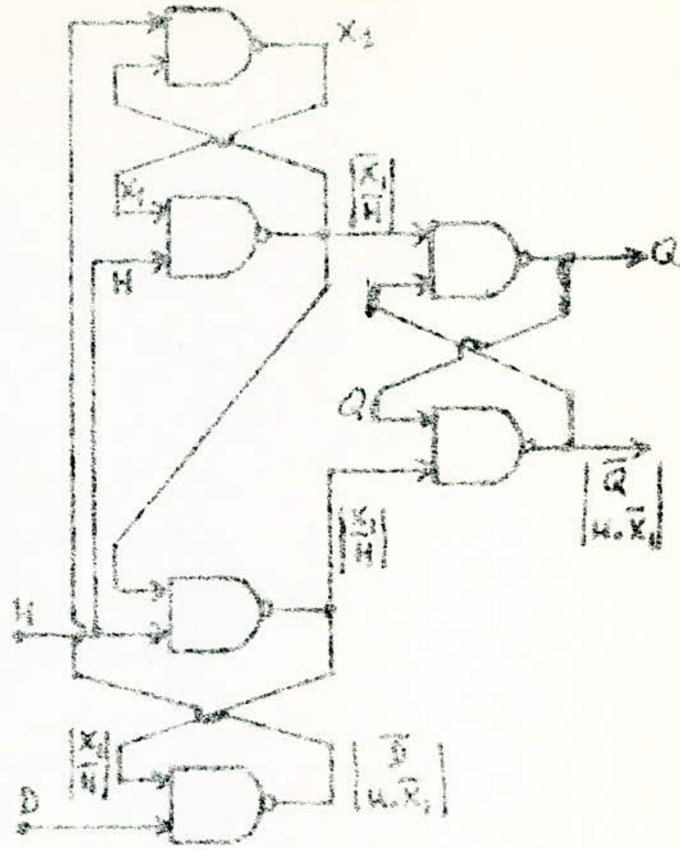


Fig. 11

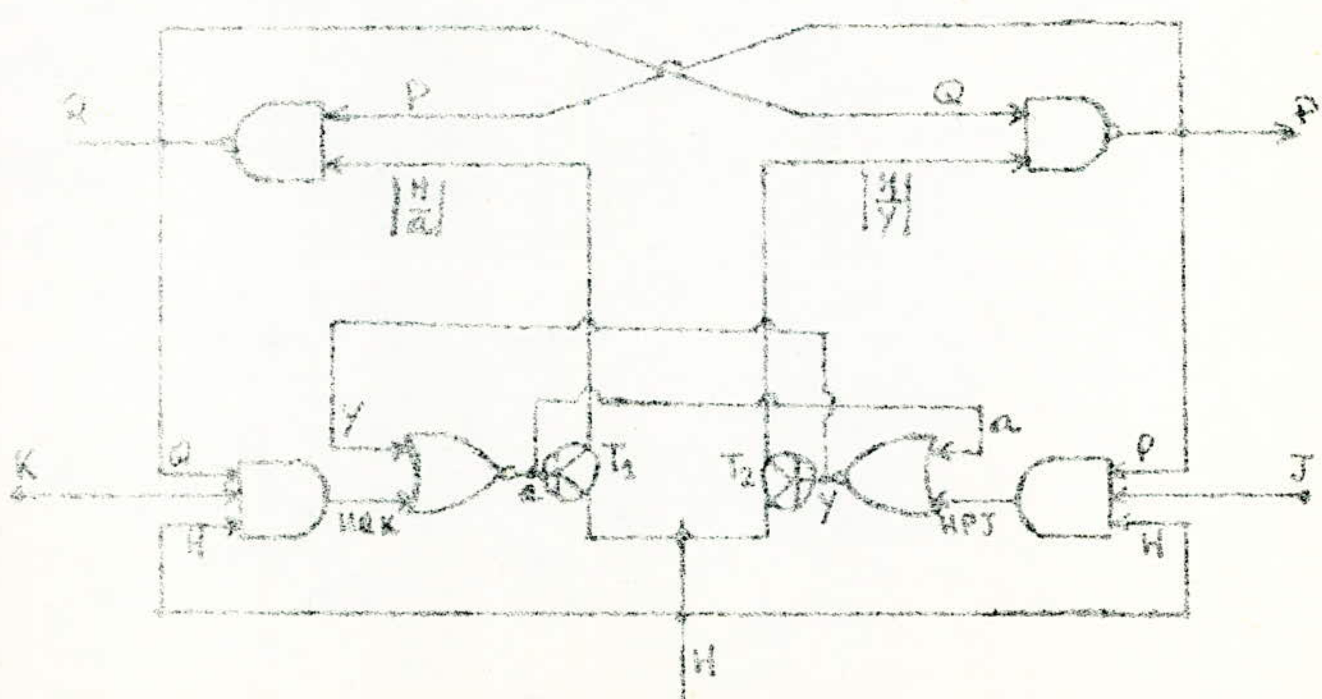


Fig. 12

CHAP 4 LES FONCTIONS GENERATRICES

Les fonctions que nous allons envisager, ne correspondent nullement à des fonctions du type algébrique. L'int qu'il ya à étudier ce genre de fonctions, apparait dans les transitions que nous pouvons générer précisement à ces fonctions.

Ainsi on appelle "fonction génératrice" toute fonction capable de générer des transitions nouvelles qui ne correspondent pas dans le temps aux transitions du vecteur de commande, dont elles dependent eventuellement.

Il existe des fonctions génératrices bien particulières comme les oscillateurs et les fonctions "horloges" ces fonctions sont dites" autogénératrice" ou "relaxée"

41 TRANSITIONS :

Pour exprimer la transition de "O" à "1" de la variable "x" nous écrivons simplement $x = (0 \rightarrow 1)$. Ceci définit en fait un intervalle de temps, généralement trés correct pendant lequel "x" passe de la valeur "O" à la valeur "1"

Inversement, on écrira $x=(1 \rightarrow 0)$ pour exprimer la transion de "1" vers "O".
De la même façon, nous pouvons definir dles doubles transitions.

$x = (0 \nrightarrow 1 \nrightarrow 0)$ et $x = (1 \nrightarrow 0 \nrightarrow 1)$ que nous écrivons également
$x = (0 \nrightarrow 1, 1 \nrightarrow 0)$ et $x = (1 \nrightarrow 0, 0 \nrightarrow 1)$ lorsque les niveaux extrêmes représentes par O et 1 sont effectivement atteints.

42 FONCTION "IMPULSION"

On appelle fonction impulsion de la variable "x" ou impulsion de de x, la fonction $I(x) = 0$ quelque soit la valeur binaire de "x" mais assurant la double transition $(0 \nrightarrow 1, 1 \nrightarrow 0)$ pour $(x = 0 \rightarrow 1)$

Nous admettrons par définition que la 1 ére transition (O 1) de I (x) coincide avec la transition $(0 \nrightarrow 1)$ de "x"
$x = (0 \nrightarrow 1) = I(x)$ (Fig: 1)

Cette définition se traduit par la table de verite et les diagramme suivants.

..../.....

TABLE DE VERITE ET DIAGRAMMES RELATIFS AUX FONCTIONS

x	$I(x)$	$\bar{I}(x)$	$I(\bar{x})$	$\bar{I}(\bar{x})$
0	0	1	0	1
0	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	1	0
0	0	1	1	1
0	0	1	0	1

Nous constatons que les transitions (1 → 0) de $I(x)$ $I(\bar{x})$, ainsi que les transitions (0→1) de $\bar{I}(x)$ et de $\bar{I}(\bar{x})$, ne correspondent à aucune transition de la variation "x"

Il ya donc génération de transitions nouvelles non simultanées avec les transitions de "x"

Les fonctions impulsions sont donc bien des fonctions génétrices .(VOIRE Fig 2

Les fonctions impulsions $I(x);\bar{I}(x);I(\bar{x});\bar{I}(\bar{x})$ sont réalisées à l'aide de circuits "pulseurs"

Entre la variale x, et les fonctions impulsions, on peut établir les relations suivantes:

$x.I(x) = I(x)$ $\qquad \left| \begin{matrix} x \\ I(x) \end{matrix} \right| = x$

$\bar{x}.\overline{I(x)} = \bar{x}$ $\qquad \left| \begin{matrix} \bar{x} \\ I(x) \end{matrix} \right| = \overline{I(x)}$

$x.\overline{I(\bar{x})}=x$ $\qquad \left| \frac{x}{I(\bar{x})} \right| = \overline{I(\bar{x})}$

(Fig.3)

- Réalisation pratique : des fonctions impulsions

Les circuits pulseurs sont réalisés à l'aide de monostable.

..../...

41 FONCTION DELAI

La fonction delai est une fonction binaire de la variable x, notée $\Delta_\tau(x)$, qui avec un retard de propagation constant τ, prend les mêmes valeurs que la variable "x" dont elle depend.

La fonction délai est considerée comme une fonction generatrice, bien que les instants de transition de la fonction delai ne coicident pas avec ceux de la variable.

Ainsi le diagramme des temps de $\Delta_\tau(x)$ est obtenue par une translation égale à "τ" de la variable "x" dans le sens des "t" croissants. (Fig. 5)

Il faut prevoir aussi certains cas particuliers, en effet le retard peut être different pour les transitions $(0 \to 1)$ et $(1 \to 0)$ de "x".

Si "τo" et "$\tau 1$" sont les retards qui correspondent respectivement à ces 2 transitions, nous déciderons d'écrire symboliquement "$\Delta_{\tau 0, \bar\tau 1}(x)$" pour la fonction "delai" considérée.

Nous imposerons aux retards "τo" et "$\tau 1$" d'être inférieurs à la largeur des impulsions.

"$\Delta_{\tau, \bar 0}(x)$" designe une fonction delài dans laquelle le retard "τ" n'affecte que les transitions $(0 \to 1)$, "$\Delta_{0, \bar\tau}(x)$" par contre affecte les transitions $(1 \to 0)$ de "x".

Les transitions $(1 \to 0)$ et $(0 \to 1)$ sont respectivement pour la 1 er cas théoriquement simultanées pour la variable et la fonction. **Identites :**

$$\Delta_{\tau 0, \bar\tau 1}(x) \equiv \overline{\Delta_{\tau 1, \bar\tau 0}(\bar x)}$$

$$\overline{\Delta_{\tau 0, \bar\tau 1}(x)} = \Delta_{\tau 1, \bar\tau 0}(\bar x)$$

Dans le cas où $\tau 0 = \tau 1 = \tau$

$$\Delta_\tau(x) = \overline{\Delta_{\bar\tau}(\bar x)}$$

$$\overline{\Delta_{\bar\tau}(x)} = \Delta_{\bar\tau}(\bar x)$$

FIG. 6

.../....

Ainsi le diagramme des temps de (x) est obtenue par une translation égale à "Z" de la variable "x" dans le sens des "t" croissants.

Il faut prevoir aussi certains (O 1) et (1 O).

Si "Zo" et "Z1" sont les retards qui correspondent respectivement à ces 2 transitions, nous déciderons d'écrire symboliquement ZO,Z1 (x) pour la fonction "delai" considérée.

Nous imposerons aux retards ZO et Z1 d'être inférieurs à la lageur des impulsions.

$Z,\bar{O}$ (x) designe une fonction delai dans laquelle le retard "Z" n'affecte que les transitions (O 1) $O,\bar{Z}(x)$ par contre affecte les transitions (1 O)

Les transitions (1 O) et (O 1) sont respectivement pour le 1 ér cas et le 2 éme cas théoriquement simultanées pour la variable et la fonction. identites :

$$Zo,\bar{Z}1(x) = 2,\bar{Z}o(\bar{x})$$

$$Zo,\bar{Z}1(x) = ,Zo(\bar{x})$$

Dans le cas où Zo=Z1= Z

$$2(x) = 2(\bar{x})$$

$$2(x) = 2(\bar{x})$$

....../....

RELATION ENTRE LA FONCTION DELAI ET LA FONCTION IMPULSION:

La fonction impulsion I2,(x) et la fonction delai $\Delta_{\tau_1, \tau_2}(x)$ sont liées par la relation

$$\overline{I_{\tau_1}(x)} = x . \Delta_{\tau_1 \overline{\tau_2}}(x)$$

en réalite (τ_2) n'intervient pas dans la relation et nous pouvons écrire plus simplement :

$$I_{\tau}(x) = x . \overline{\Delta_{\tau}(x)}$$

D'où les expressions

$$\Delta_{\tau_1 \tau_2}(x) \left| \begin{array}{l} x . I_{\tau_1}(x) \\ \\ I_{\tau_2}(x) \end{array} \right| \qquad \Delta_{\tau}(x) = \left| \begin{array}{c} x . \overline{I_{\tau}}(x) \\ \\ I_{\tau}(\bar{x}) \end{array} \right|$$

Fonction delai conditionné :

C'est une fonction qu'on peut écrire sous forme de produit, ou de produel.

$F_{dc} = x . \Delta_{\tau}(x)$ prend la valeur 1 si x =1 pour un temps supérieur à τ

Par dualite :

$F'_{dc} = \left| \begin{array}{c} x \\ \Delta_{\tau}(x) \end{array} \right|$ prend la valeur 0 si x = 0 pour un temps supérieur à τ

REALISATION PRATIQUE :

La réalisation pratique des fonctions delais se fait avec des lignes à retard à constantés reparties (cables coaxiaux)

Chap. 4 : MODE DE RECHERCHE DES FONCTIONS ASSOCIEES.

Il s'agit d'opérer dés le départ une séparation entre le vecteur séquentiel et le vecteur de commande pour pouvoir accéder àuneétude compléte des systémes sequentiéls . Une fonction sequentielle notée S_q dépend de 2 fonctions l'une étant une fonction de transcodage V_r la seconde une fonction réflexe Y_p . Dans la mesure où on considére V_r et Y_p comme 2 variables ? la fonction sequentielle prendra alors les caracteristiques d'une fonctions de transcodage.

$$S_q = (W_p + r) \qquad W_{p+r} = Y_r , Y_p \quad .$$

4.2.I / Construction du graphe:

On conviendra de préciser qu'il y a une relation biunivoque entre le graphe et la table de vérité;le graphe de la fonction séquentielle sera construit comme un systéme de coordonnées dans lequel on plaçera :

- En abscisse : Les nombres binaires correspondants aux valeurs du vecteur variable .
- En ordonnée : Les nombres binéaires correspondant aux valeurs du vecteur réflexe .

Pour compléter le graphe,on écrira la valeur numérique du vecteur séquentiel en chaque point du graphe qui représente un état stable.

4.2.2 / Exception à respecter:

Sauf pour les états intermédiaires de commutation,toutes les variations du vecteur séquentiel qui ne seraient pas correlées avec le vecteur commande sont interdites .

Pour élaborer le parcours d'un graphe séquentiel,il est impératif d'imposer aux états stables consécutifs de correspondre à des valeurs adjacentes du vecteur variable.

Sur le graphe séquentiel chaque état stable peut constituer un point de départ seulement s'il existe k ; k n de points consécutifs situés sur une même verticale;il est nécessaire de prendre le point de départ autre que ces points, ces points doivent constituer des points d'arrivée.

SEPARATION DES FONCTIONS

- 1 étape : dénombrer la totalité des états stables, et l'ordre de succession de ces états.

- 2éme étape : le choix des fonctions réflexes (mémoires ou débinaires) doit être tel que $Nm \leq 2^p$ et $Nm > 2^{p-1}$ Nm : nombre maximun d'états stables.

  Les 2 Premières étapes nous permettent de construire un graphe bien particulier : dont le graphe optimal des fonctions augmentées.

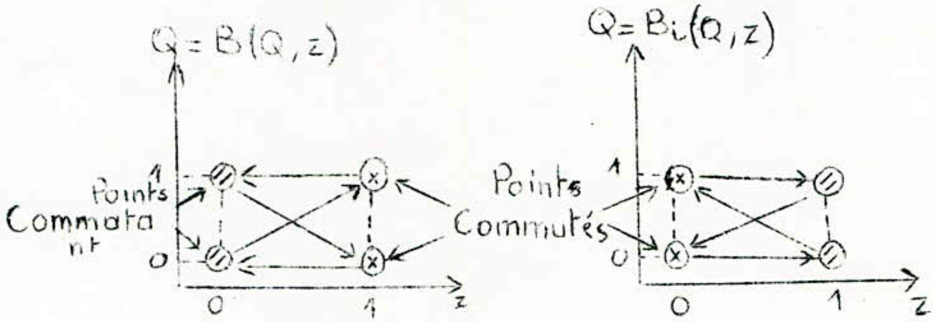
- 3éme étape : dénombrer les fonctions de transcodage qui apparaissent dans p ; b fonctions de transcodage telles que $2^{p-b} \geq Nm$ avec $2^{p-b-1} < Nm$.

- 4éme étape : séparer les fonctions binaires Yi du type combinatoire
  Ainsi à chaque valeur particulière du vecteur variable Yi doit prendre la valeur 0 ou 1.

  -Théorème pour la séparation des fonctions de transcodage :
  -point commutant ou état commutant (point ou état stable) c'est le point qui précède immédiatement une transition de la fonction $Yi \rightarrow \bar{Y}i$

  -point commute ou état commute : (point ou état stable) c'est le point qui suit immédiatement une transition de la fonction $Yi \rightarrow \bar{Y}i$

-Remarque : Pour les fonctions dibinaires, les points commutants correspondant aux états de préparation de basculement "Q"

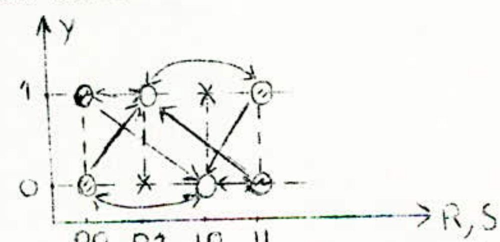


■ état commutant .

O état commuté .

X état de commutation .

Si nous comparons les graphes d'une fonction dibinaire et celui d'une fonction mémoire symétrique, on constate que les états stables et les états de commutation sont distincts dans le graphe d'une fonction mémoire, alors que dans le graphe d'une fonction dibinaire les points commutés sont la superposition d'un état stable et d'un état de commutation .



Graphe d'1 Fonct. Mém. Sym. : $y = \left| \begin{matrix} Y \\ \bar{R}.S \end{matrix} \right| \begin{matrix} \bar{R} \\ S \end{matrix} \right|$

La différence précédente sera exploitée par la séparation des fonctions dibinaires et des fonctions mémoires du graphe optimal des fonctions augmentées correspondant à un système séquentiel . Ceci nous amène au théorème suivant:

Théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un systéme séquentiel puisse être réaliser uniquement à l'aide de fonctions mémoires et qu'il n'existe, dans la table de vérité optimale et sur le graphe optimal correspondant aux système, aucun point de superposition d'un état stable et d'états de commutation .

METHODES DE CALCUL DES FONCTIONS SEQUENTIELLES .

Pour accéder au calcul des fonctions séquentielles, nous allons généraliser la notion d'état commutant et d'état commuté . Il s'agira pour nous surtout de préciser un choix de ces deux états dans la mesure où le calcul d'une fonction séquentielle et sa simplification passera nécessairement par le calcul d'une fonction réflexe (Mémoire ou Dibinaire) donc par un choix arrêté des états commutants et des états commutés .

- Fonction mémoire : Y_i

  Le choix se fera de la façon suivante :

  _ Etat commuté : Etat stable imposé par l'une des variables d'entrée R = I ou S = I .

  _ Etat commutant : Etat stable du type mémoire ($Y_i=Y_i$) d'autre part sont nécessairement commutants tous les états stables adjacents en Y_i.

- Fonction dibinaire :

  On choisit tous les états de préparation de basculement comme états commutants tous les autres états seront de la sorte des états commutés .

Les états commutants et commutés doivent dans la mesure du possible être choisis de telle sorte que le passage d'un état commutant à un état commuté corresponde toujours à une commutation de la fonction étudiée .

Il faudra éviter les commutations du type cmmutant-commutant ou commuté-commuté dans le passage d'un état stable initial à un état stable final .

De même la commutation lors du passage d'un état commuté à un état commutant .

Remarque concernant la fonction mémoire Yi

Pour éliminer "Yi", il faut reunir les états de commutation qui précèdent les états commutes correspondant à Yi = 0 ; pour constituer le groupe Co.

Réunir les états de commutation qui précèdent les états commutes correspondant à Yi =1 pour constituer le groupe C1.

Tous les états commutants constituent le groupe C2

Dans ce cas on a : Ri = /Co/   Si = /C1/

Remarque concernant la fonction dibinaire :

Depuis les règles précedentes, si on réunit les états commutés d'une fonction dibinaire yj et on ajoute les états de commutation associées on pourra constituer le groupe C3, et obtenir ainsi la fonction cherchée yj = B(yj,zj) avec zj = /C3/

Conclusion :

Pour calculer un système sequentiel, il faut préciser les composantes du vecteur variable de commande, puis dénombrer les états stables du système.

Ensuite, il faut établir la table de vérite optimale ; ou le graphe optimal des fonctions augmentées aprés avoir éliminé les fonctions de transcodage, il faut calculer chaque fonction mémoire et chaque fonction dibinaire, préalablement définies par leurs commutations.

En choisissant au mieux les états commutants et les états commutes de chacune d'entre elles sur le graphe d'emergence associé.

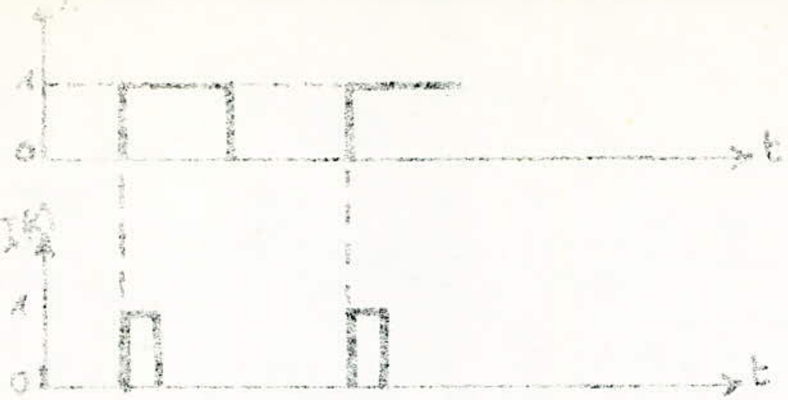


Fig. 1

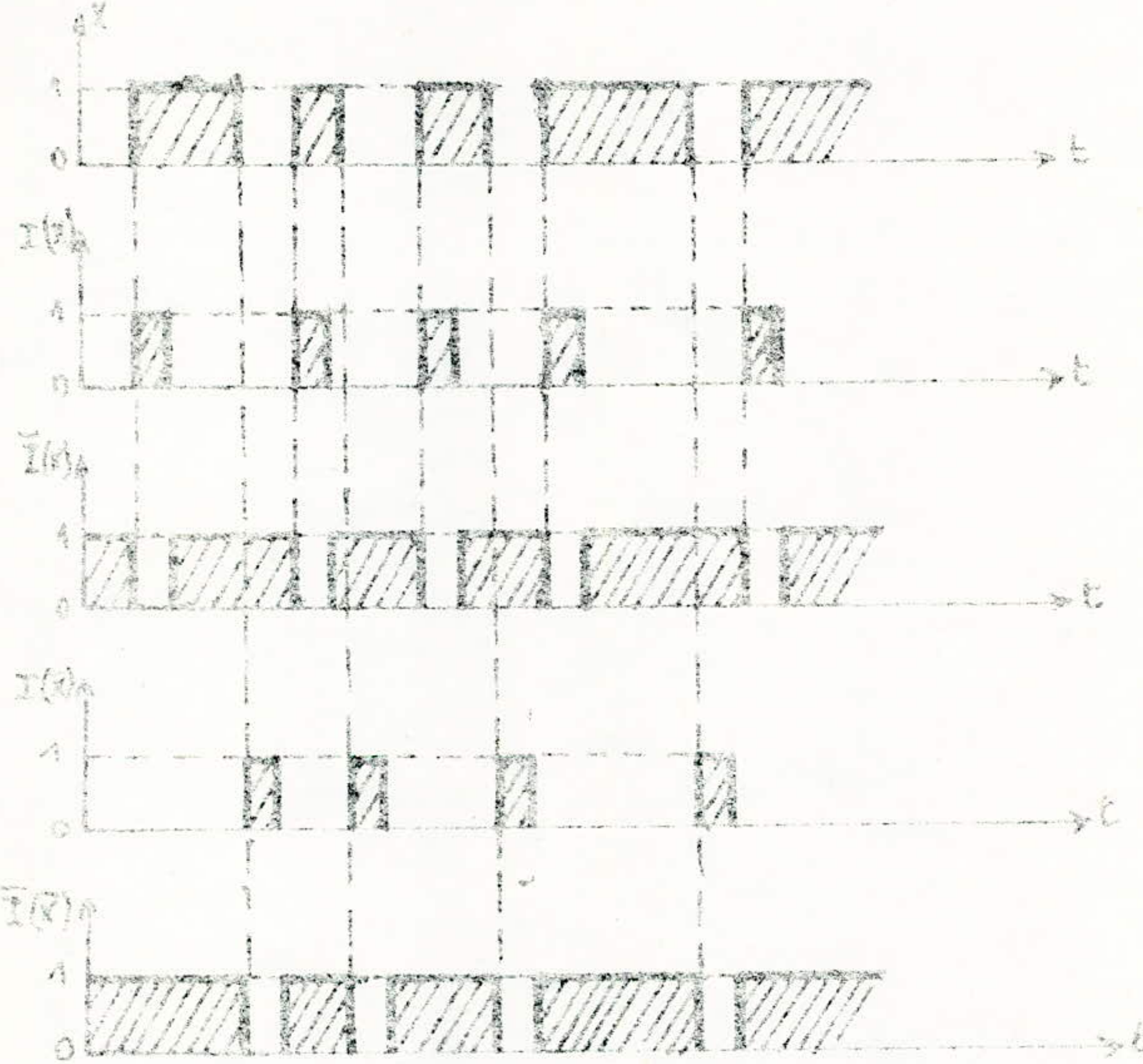


FIG. 2

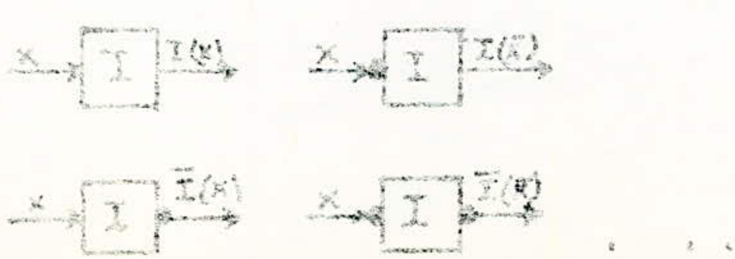


FIG. 3

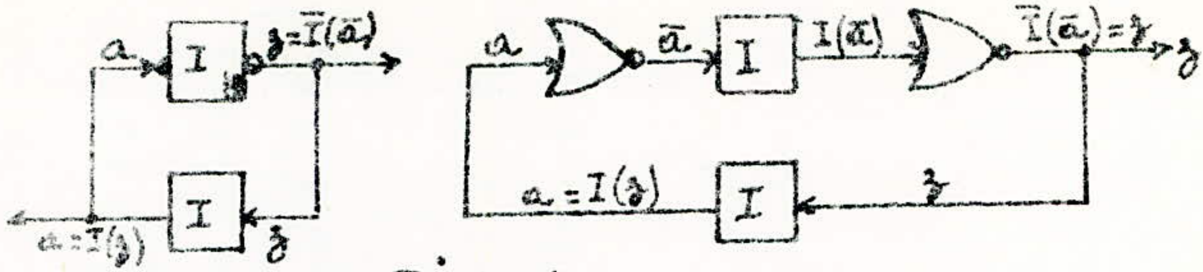


FIG. 4

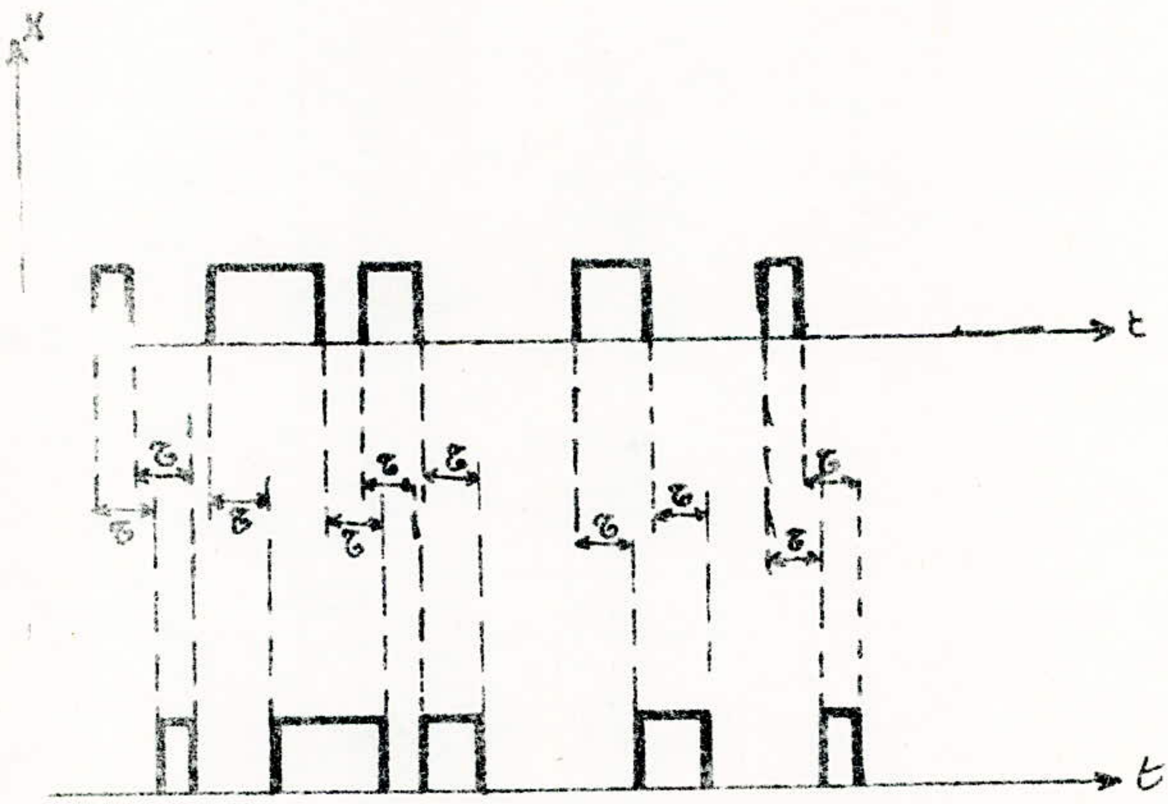


FIG. 5

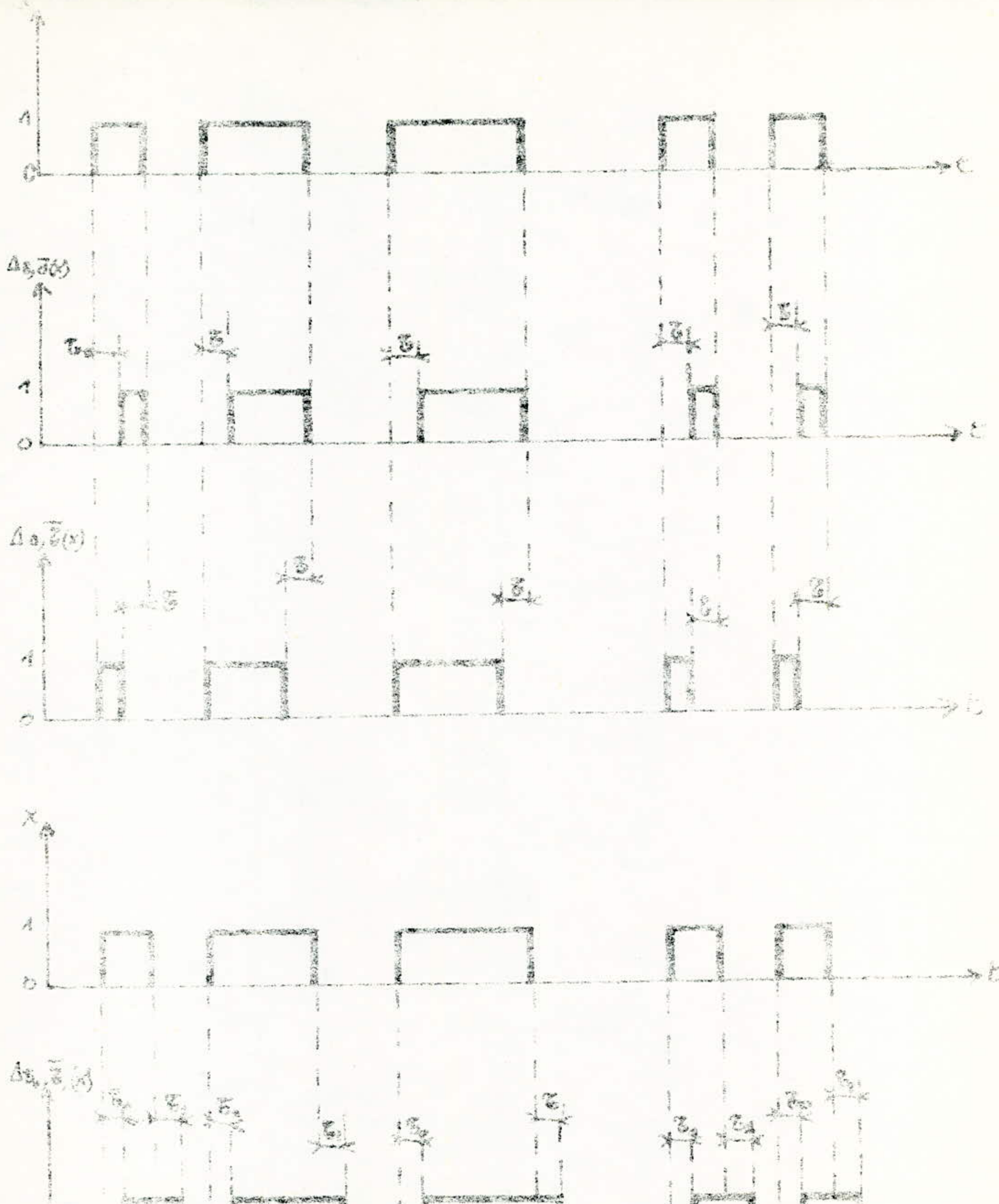


FIG. 6

Les aléas dans les systèmes sequenticles

Nous nous proposons d'étudier principalement les aléas de commutation.Ceux-ci se subdiviѳent en 2 catégories.Les aléas de continuité et les aléas dc simultaneité et de fentière.

1°/- Les aléas de continuité

Elles résultent de la présence de 2 formes d'une même variable;la forme directe et la forme complémentée.On dit qu'il y a aléas de continuité si les 2 formes précédentes ne changent pas simultanément de valeur.

La fonction considérée Y : fonction binaire de la variable binaire x sera donc une fonction carrée biforme c'est à dire que :

$$Y = \left| \begin{matrix} x.a \\ b.\bar{x} \end{matrix} \right| \qquad \text{ou } y = \left| \begin{matrix} x \\ b \end{matrix} \right| \begin{matrix} a \\ \bar{x} \end{matrix} \right|$$

1° cas : y sous forme de produel de produits :

nous constatons qu'il existe des aléas de contunuité relatifs aux transitiens de "x" lorsque

$a = b = 1$ $\qquad y = \left| \begin{matrix} x \\ \bar{x} \end{matrix} \right|$ théoriquement on doit avoir 1;

mais les transitiens $x = (\ o \rightarrow 1)$; $\bar{x} = (1 \rightarrow o)$

ou $x = (1 \quad o)$ $\bar{x} = (o \quad 1)$; ne sont pas simultanées, et s'il apparait pendant les transitiens un court instant pendant lequel n et $\ddot{x}$ prennent la valeur zéro ; nous obtenons alors : la double transition $y = (1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1)$ cette double transition sera donc une anomalie pouvant perturber le système envisagé.

2° cas : y sous forme de produit de produels :
De la même façon que le 1° cas;il peut exister des aléas de continuité relatifs aux transitions de "x" lorsque $a = b = 0$; et s'il apparait pendant les transitions de "x",un court instant pendant lequel x et $\bar{x}$ prennent la valeur unité;,ous obtenons alors la double transition $y = (0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0)$.

La manifestation de cette double transition pouvant causer des perturbations au système.

Méthode d'élimination des aléas de continuité

Cette méthode consiste en l'introduction de consensus directs ou duals suivant le cas;pour résoudre le problème posé par l'apparition d'aléas de continuité.

1° cas y mise sous forme de produels de produits

$$y = \begin{vmatrix} x.a \\ b.\bar{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n.a. \\ b.\bar{x} \\ a.b. \end{vmatrix}$$ a.b. étant le consensus direct

dans le cas où a = b = 1 la fonction y prend la valeur 1 quelquesoit la transition de x ou ~~de~~ $x = (0 \rightarrow 1)$ $\bar{x} = (1 \rightarrow 0)$
ou xn $= (1 \rightarrow 0)$ $\bar{x} = (0 \rightarrow 1)$

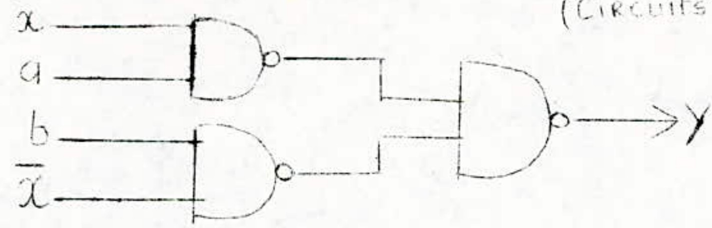
2° cas : y mise sous forme de produit de produels :

$$y = \begin{vmatrix} x \\ b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ \bar{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ \bar{x} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$$, $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ étant le consensus dual

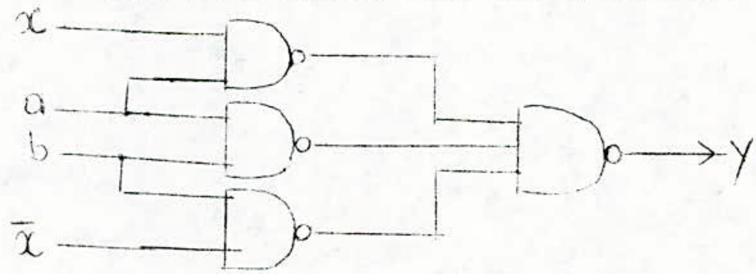
dans le cas où a = b = 0 $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = 0$ y = 0 quelque soit la transition de x ou $\bar{x}$ $x = (0 \rightarrow 1)$; $\bar{x}(1 \rightarrow 0)$
$x = (1 \rightarrow 0)$ $\bar{x} = (0 \rightarrow 1)$

SCHEMA DE CABLAGE.

1° cas y mise sous forme de produel de produits
(Circuits "NAND")

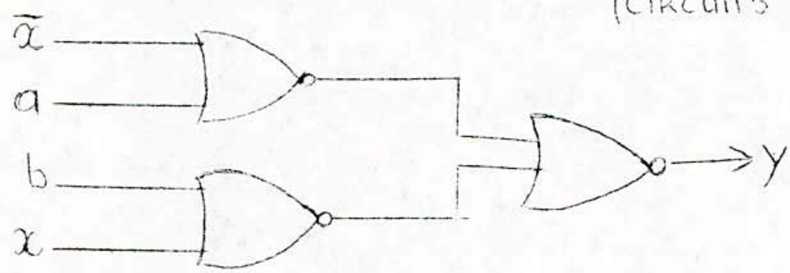


Aléas de continuité non éliminés

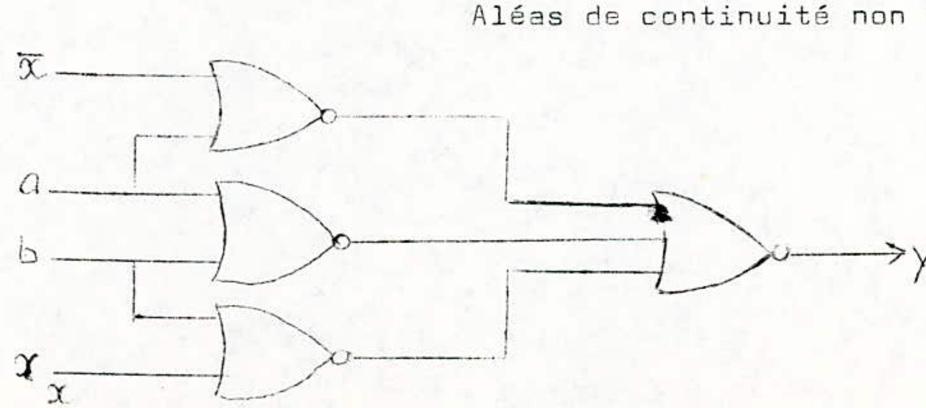


Aléas de continuité éliminés

2° cas mise sous forme de produits de produel
(Circuits "NOR"



Aléas de continuité non éliminés



Pas d'Aléas de Continuité

2°/- Les aléas de similtanéité et de frontière

Le problème des aléas de simultaneité se pose surtout pour le les fonctions du type reflexe $Y_p = \emptyset\ (x_n\ ,\ Y_p)$

En effet ces fonctions interviennent comme variables, mais leur modification ne doit se faire que par l'intermédiaire d'un vecteur de commande.

Le problème réside dans la simultaneité qui doit être avancée entre la modification du vecteur de commande et la fonction, cette simultaneité doit exister lors du changement de la fonction sous l'effet d'une transition d'un élément binaire du vecteur de commande.

- On étudiera les aléas de simultaneité dans le cas de la bascule " Master slave" et ceci nous conduira à un théorème qui constitue pour nous un outil puissant pour surmonter le problème des aléas de simultaneité qui ne peut être résolu par aucun moyen algébrique.

Bascule "Master slave"

On montrera que l'introduction du consensus direct et du consensus dual ne résoudra pas le problème des aléas de simultaneité bien que le problème des aléas de continuité so soit résolu. Et l'introduction d'un consensus dans une fonction débinaire conduit à une bascule "Master slave"

$$Q = \left|\begin{array}{c|c} Q & \bar{z} \\ z & \bar{y} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} Q.\bar{z} \\ z.\bar{y} \end{array}\right| \quad , \quad y = \left|\begin{array}{c|c} y & z \\ \bar{z} & Q \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} y.z \\ \bar{z}\ Q \end{array}\right|$$

Ce sont des fonctions carrées biformes et des fonctions mémoires en même temps.

Après introduction des consensus duaux : $\left|\begin{array}{c} Q \\ \bar{y} \end{array}\right|$ et $\left|\begin{array}{c} y \\ Q \end{array}\right|$

On aura :

$$Q = \left|\begin{array}{c|c|c} Q & \bar{z} & Q \\ z & \bar{y} & \bar{y} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} Q. & \bar{z} \\ z\bar{y} & \bar{y} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} Q \\ S_1 \end{array}\right| .\bar{R}_1 \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} R_1 = zy \\ S_1 = z\bar{y} \end{array}$$

$$Y = \begin{vmatrix} Y \\ \bar{z} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z \\ Q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y \\ Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y \\ \bar{z}.Q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z \\ Q \end{vmatrix} \underset{\text{vérité}}{=} \begin{vmatrix} y \\ S_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{R}_2 \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} S_2 = \bar{z}Q \\ R_2 = \bar{z}\bar{Q} \end{matrix}$$

Ecrivons une table de séquentielle réduite :
On précisera les transitions de la variable "z" et des fonctions "Q" et "Y"

z	Q	Y	
0 → 1	0+ → 1	0 0+	Θ_1
1 → 0	1 1+	0+ → 1	Θ_2
0 → 1	1+ → 0	1 1+	Θ_3
1 → 0	0 0+	1+ → 0	Θ_4

Groupe Θ_2

On constate que Q = 1 et que nous avons simultanément $z=(1 \rightarrow 0)$ et $Y = (0 \rightarrow 1)$ donc $\bar{z} = 0 \rightarrow 1$ et $\bar{y} = (1 \rightarrow 0)$

si $\bar{z}$ et $\bar{y}$ prennent ensemble la valeur 0 pendant un court instant dans l'expression de

$Q = \begin{vmatrix} Q \\ z\bar{y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{z} \\ \bar{y} \end{vmatrix}$;le produel $\begin{vmatrix} \bar{z} \\ \bar{y} \end{vmatrix} = 0$ et nous aurons $Q = (1 \rightarrow 0)$

Cette transition ne devant pas se produire dans un fonctionnement normal.

Groupe Θ_3

La même constatation est relative au groupe Θ_3.Un effet pour la fonction y.
Nous devons avoir y = 1 et simultanément $z = (0 \rightarrow 1)$ $Q = (1 \rightarrow 0)$ si "z" et Q" prennent ensemble la valeur zéro pendant un court instant dans

$y = \begin{vmatrix} Y \\ \bar{z}.Q \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z \\ Q \end{vmatrix}$; nous obtenons $y = 1 \rightarrow 0$ alors que Y dans un fonctionnement normal doit conserver la valeur unité

Détection et élimination des aléas de simultaneité

- Théorème de non simultaneité

soit y_1 et y_2 $\in$ E_{01} ; y_1 et y_2 étant des variables ou des fonctions.

supposons qu'une commutation du système dans lequel interviennent y_1 et y_2. fait apparaitre les transitions :

$y_1 = (a \rightarrow \bar{a})$; $y_2 = (b \rightarrow \bar{b})$ a et b $\in$ E_{01}

le vecteur ab ne pouvant prendre que les valeurs 00,01,10,11 dans le cas par exemple où les transitions $y_2 = (b \rightarrow \bar{b})$ se fait en retard de la transition $y_1 = (a \rightarrow \bar{a})$

La supposition nous conduit à la table suivante; dans laquelle on prendra soin de noter Pab ; $P\bar{a}b$, $Pa\bar{b}$; $P\bar{a}\bar{b}$

$Pab = \bar{Y}_1 . \bar{Y}_2$ $\quad P\bar{a}b = \bar{Y}_1 . Y_2$ $\quad Pa\bar{b} = Y_1 \bar{Y}_2$ $\quad P\bar{a}\bar{b} = \bar{Y}_1 . Y_2$

Y_1	Y_2	Pab	$P\bar{a}b$	$Pa\bar{b}$	$P\bar{a}\bar{b}$	
a	b	1	0	0	0	Valeurs initiales
$\bar{a}$	b	0	1	0	0	Valeurs de commutation
$\bar{a}$	$\bar{b}$	0	0	0	1	Valeurs finales
a	$\bar{b}$	0	0	1	0	Combinaison n'intervenant pas dans la commutation

Nous constatons dans la table de vérité que seul Pab fait apparaitre la double transition $P\bar{a}b = (0 \rightarrow 1 \rightarrow 0)$ et constitué un aléas de simultaneité qui risque de perturber le fonctionnement du système.

Théorème : les doubles transitions résultant de la non simultaneité des commutations de 2 élements binaires,pour une fonction binaire,ne peuvent se produire que dans un produit ou dans un produel qui correspondent tous deux à la combinaison dans laquelle sont associées la valeur finale du 1° élement qui commute et la valeur initiale de l'élément qui commute le dernier.

dans le COS où les commutatio ... e "Y_2" se produisent toujours après celle de "Y_1"), nous ... ivons écrire les implications suivantes :

$$\left[y_1 : (0 \rightarrow 1)\ ,\ y_2 = (0 \rightarrow 1)\right] \Rightarrow \left[y_1 \cdot \bar{y}_2 \quad \ldots \rightarrow 1 \rightarrow 0)\ ;\ \begin{vmatrix} \bar{y}_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = (1 \rightarrow 0 \rightarrow 1)\right]$$

$$\left[y_1 = (0 \rightarrow 1)\ ,\ y_2 = (1 \rightarrow 0)\right] \Rightarrow \left[y_1 \cdot y_2 = \quad \ldots \rightarrow 1 \rightarrow 0)\ ;\ \begin{vmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{vmatrix} = (1 \rightarrow 0 \rightarrow 1)\right]$$

$$\left[y_1 = (1 \rightarrow 0)\ ,\ y_2 = (0 \rightarrow 1)\right] \Rightarrow \left[\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2 = (0 \rightarrow \quad \ldots)\ ;\ \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = (1 \rightarrow 0 \rightarrow 1)\right]$$

$$\left[y_1 = (1 \rightarrow 0)\ ,\ y_2 = (1 \rightarrow 0)\right] \Rightarrow \left[\bar{y}_1 \cdot y_2 = (0 \rightarrow \quad \ldots)\ ;\ \begin{vmatrix} y_1 \\ \bar{y}_2 \end{vmatrix} = (1 \rightarrow 0 \rightarrow 1)\right]$$

Introduction des fonctions délais ... r supprimer les aléas de simultaneité

Soit $\Delta_{\tau}(y_1)$ qui introduit un retar ... " suffisant pour éviter les doubles transitions $(0 \rightarrow 1 \rightarrow 0)$ ou ... $\rightarrow 0 \rightarrow 1)$

on aura dans ce cas les implicati ... précédentes qui se changent en :

$$\left[y_1 = (0 \rightarrow 1)\ ,\ y_2 = (0 \rightarrow 1)\right] \Rightarrow \left[D_{\tau}(y_1 \quad \ldots = 0\ ,\ \begin{vmatrix} D_{\tau}(y_1) \\ y_2 \end{vmatrix} = 1\right]$$

$$\left[y_1 = (0 \rightarrow 1)\ ,\ y_2 = (1 \rightarrow 0)\right] \Rightarrow \left[D_{\tau}(y_1 \quad \ldots = 0\ ,\ \begin{vmatrix} D_{\tau}(\bar{y}_1) \\ \bar{y}_2 \end{vmatrix} = 1\right]$$

$$\left[y_1 = (1 \rightarrow 0)\ ,\ y_2 = (0 \rightarrow 1)\right] \Rightarrow \left[D_{\tau}(\bar{y}_1 \quad \ldots = 0\ ,\ \begin{vmatrix} D_{\tau}(y_1) \\ y_2 \end{vmatrix} = 1\right]$$

$$\left[y_1 = (1 \rightarrow 0)\ ;\ y_2 = (1 \rightarrow 0)\right] \Rightarrow \left[D_{\tau}(\bar{y}_1) \quad \ldots = 0\ ,\ \begin{vmatrix} D_{\tau}(Y_1) \\ \bar{y}_2 \end{vmatrix} = 1\right]$$

Notons alors que dans le cas où "y ... "y_2" sont les composants d'un vecteur fonction de transcod ... ; la propriété de transitivité du transcodage permet de remplace ... y_1" ; "y_2" par leur expression fonction des variables donc ... en particulier ; et il ne subsiste plus que des aléas di ... de continuité.

TP SEQUENTIEL N° 1

ECHELLE DE COMPTAGE SYNCHRONE EN CODE GRAY SYMETRIQUE UTILISANT DES FONCTIONS MEMOIRES

Pour réaliser une échelle de comptage synchrone de poids quatre en interdisant qu'au moment d'une commutation quelconque deux fonctions puissent varier simultanement, on décide d'utiliser trois fonctions $y2, y1, yo$ dont les huits états consécutifs associés aux valeurs successives de la variable d'entrée "H"; sont distribués selon le code GRAY symétrique donné par la table de verite figure 1.

a) Ecrire, enpartant de la table de verite de la figure 1. Les groupes de combinaisons essentielles qui impliquent respectivement.

$$yo = 1,\ yo = o,\ y1 = 1,\ y1 = 0 \text{ et } y2 = 1,\ y2 = 0$$

b) Etablir les expressions binaires de 3 fonctions "mémoires" $y2, y1, yo$

c) Indiquer le nombre minimal de portes de types "NOR" qui permettra la réalisation de l'échelle calculée.

Tracer le schèma correspondant :

Figure : n° 1

	H	y2	y1	yo
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	0	0	1	1
3	1	0	1	0
4	0	1	1	0
5	1	1	1	1
6	0	1	0	1
7	1	1	0	0

../..

Solution

a) De la table de verite donnée nous tenons les implications essentielles suivantes :

$$\begin{array}{l} (1) \\ (5) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} H = 1 \ , \ y_2 = 0 \ , \ y_1 = 0 \\ H = 1 \ , \ y_2 = 1 \ , \ y_1 = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow \ (y_0 = 1)$$

$$\begin{array}{l} (3) \\ (7) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} H = 1 \ , \ y_2 = 0 \ , \ y_1 = 1 \\ H = 1 \ , \ y_2 = 1 \ , \ y_1 = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \ (y_0 = 0)$$

$$(2) \ (H = 0 \ , \ y_2 = 0 \ , \ y_0 = 1) \Longrightarrow (y_1 = 1)$$

$$(6) \ (H = 0 \ , \ y_2 = 1 \ , \ y_0 = 1) \Longrightarrow (y_1 = 1)$$

$$(4) \ (H = 0 \ , \ y_1 = 1 \ , \ y_0 = 0) \Longrightarrow (y_2 = 1)$$

$$(0) \ (H = 0 \ , \ y_1 = 0 \ , \ y_0 = 0) \Longrightarrow (y_2 = 0)$$

b) A l'aide des implications precédentes, nous pouvons calculer respectivement les fonctions d'entrée "S" et "R" de y_2 , y_1 et y_0, puis établir les expressions binaires de ces fonctions mémoires.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_2 = \bar{H}.y_1.\bar{y}_0 \\ R_2 = \bar{H}.\bar{y}_1.\bar{y}_0 \end{array} \right.$$

$$y_2 = \left| \begin{array}{l} y_2 \\ \bar{H} \ y_1 \bar{y}_0 \end{array} \right| \begin{array}{l} H \\ y_1 \\ y_0 \\ H \end{array} \Bigg|$$

$$S_1 = \bar{H}.\bar{y}_2.y_0$$

$$R_1 = \bar{H}.y_2.y_0$$

$$y_1 = \left| \begin{array}{l} y_1 \\ \bar{H} \ \bar{y}_2 \ y_0 \end{array} \right| \begin{array}{l} H \\ \bar{y}_2 \\ \dot{y}_0 \end{array} \Bigg|$$

$$S_0 = H \left| \begin{array}{l} \bar{y}_2.\bar{y}_1 \\ y_2.y_1 \end{array} \right|$$

$$R_0 = H \left| \begin{array}{l} \bar{y}_2.y_1 \\ y_2.\bar{y}_1 \end{array} \right|$$

$$y_0 = \left| \begin{array}{l} y_0 \\ H \end{array} \right| \begin{array}{c} \bar{H} \\ \bar{y}_2.\bar{y}_1 \\ y_2.y_1 \end{array} \Bigg|$$

c) Pour réaliser l'échelle en utilisant des portes de type "NOR", nous écrivons les équations sous la forme suivante

$$y_2 = \left| \begin{array}{c} y_2 \\ y_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} y_2 \\ H.y_0 \end{array} \left| \begin{array}{c} H \\ y_1 \\ y_0 \end{array} \right| \quad 5 \ \text{"Nor"}$$

$$y_1 = \left| \begin{array}{c} y_1 \\ y_0 \end{array} \right| \begin{array}{c} y_1 \\ H.y_2 \end{array} \left| \begin{array}{c} H \\ H.y_2 \\ H.y_0 \end{array} \right| \quad 5 \ \text{"Nor"}$$

$$y_0 = \left| \begin{array}{c} Y_0 \\ H \end{array} \right| \begin{array}{c} H \\ y_1.y_2 \\ y_1 \end{array} \left| \begin{array}{c} H \\ y_1.y_2 \\ y_2 \end{array} \right| \quad 4 \ \text{"Nor"}$$

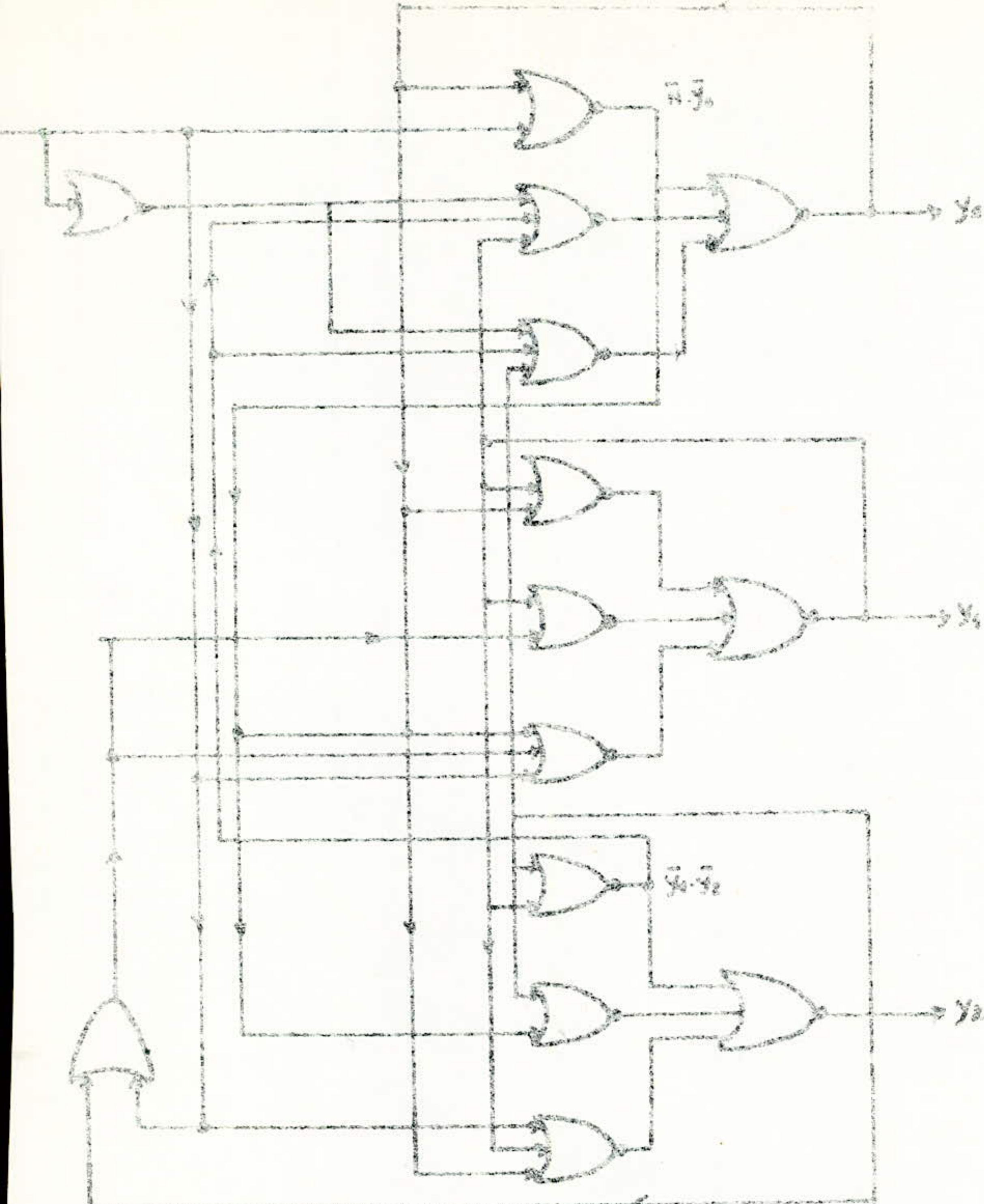


Figure n°2 : Schema de l'échelle de comptage synchrone en code Grey symetrique

TPN° 2

FONCTION "ECHELLE ET FONCTION DE SIGNALISATION POUVANT ETRE ASSOCIEES A UN OPERATEUR DE GESTION DE TRAITEMENT NUMERIQUE DE L'INFORMATION

Dans l'étude de la décomposition d'un ensemble complexe de traitement de l'information on est conduit à faire une distinction entre le traitement proprement dit et un certain nombre d'opèrations automatiques de gestion, necessaires au fonctionnement du système.

En pratique, les taches de gestion peuvent être confiées à des opérateurs asynchrones ayant pour mission essentielle de délivrer, d'une part l'ordre "Tn" de fonctionnement des circuits de traitement qui en dependent, lorsque le chargement de leur registre d'entrée a été effectué, et de fournir, d'autre part, l'information "Dn" de mise à disposition des résultats obtenus en sortie, lorsque la fin de traitement est signalée par une impulsion "Fn" transmise par les circuits concernés.

L'opérateur reçoit également le signal " Cn+1" de chargement du registre d'entrée de l'ensemble recepteur situé en aval, ce signal a pour but de remettre à zéro l'information "Dn" de mise à disposition des resultats. On peut imposer à l'ensemble de fonctionner suivant les séquences indiquées par les diagrammes de temps de la figure (2.1) ci aprés.

a) Construire le graphe incomplet qui correspond à la fontion reflexe

$$Dn,Tn = \emptyset\ (Dn,Tn,Cn,Fn,Cn+1)$$

Montrer que cette fonction correspond à une échelle de poids "trois" que l'on peut représenter sur un graphe réduit, Dn,Tn = En (Tn,Dn,xn), l'élement binaire "xn" ($xn \in EO_1$) pouvant s'éxprimer à l'aide d'un seul produel des variables Cn,Fn,Cn+1 que l'on calculera.

Ecrire, en utilisant les fonctions dibinaires inverses $Dn=Bi(Dn,\bar{z}0)$ et $Tn = Bi(Tn,\bar{z}_1)$, les équations de l'échelle synchrone correspondant à la fonction reflexe "Dn,Tn" calculer dans ce cas $\bar{z}0$ et $\bar{z}1$ en fonction de Cn,Fn,Cn+1, Dn et Tn.

.../....

b) Déterminer, puis exprimer sous les 2 formes produel de produits et produit de produels la fonction de signalisation sig (Cn,Dn,Tn) qui prend la valeur unite, uniquement pour les états stables normalement prévus dans le fonctionnement de l'operateur.

Cette fonction est donc nulle pour tous les autres états qui n'appartiennent pas à une séquence de fonctionnement normal

c)Pour éliminer les doubles transitions, sig = ($1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$), susceptibles de déclencher des signalisations intempestives et non justifiées, on peut envisager l'utilisation d'un "delai conditionné" qui en masquerait les effets. On utilise dans ce but, des portes du type "NAND" dont le retard unitaire est égal à "2O"

Indiquer le nombre de portes necessaires à la réalisation de la fonction "délai conditionné"

$$Sid = \Delta_{\tau 0} \left| \begin{array}{l} Sig \;—— \\ \Delta_{4\tau 0}(sig) \end{array} \right|$$

, en supposant que l'on puisse disposer des variables complémentées $\overline{Cn}$,Dn,et Tn.

- Représenter sur un même schéma, le montage optimal que l'on peut obtenir pour la fonction de transcodage (Sid, z_C, z_1) = F $(\overline{Cn}, \overline{Fn}, \overline{Cn+1}, \overline{Dn}, \overline{Tn})$ en supposant que l'on utilise des fonctions dibinaires directes et des portes du type "NAND"

On écrira préalablement les équations du système complet, fonctions dibinaires comprises, et l'on indiquera en tenant compte éventuellement les facteurs duals communs, le nombre minimal de portes "NAND" necessaires à la realisation de ce système, les variables etant toutes disponibles sous les deux formes, directe et complémentée.

.../...

Solution :

a) Le graphe incomplet correspondant peut être établir immédiatement fig 2, ce graphe, à sens de parcours unique, peut être associé à une échelle de poids "3" dont on peut établir le graphe réduit en remarquant qu'il n'existe que 2 états stables pour chacune des valeurs du vecteur fonction "Dn,Tn" il est ainsi possible d'operer une réduction par rapport aux variables et d'obtenir en fonction de la variable binaire unique "Xn", le graphe 3.

En constatant que "Xn" doit être nulle pour la valeur Cn,Fn, Cn+1 = O O O du vecteur variable, nous pouvons exprimer "xn" en fonction d'un simple produel

$$x_n = \left| \begin{matrix} C_n \\ F_n \\ C_n+1 \end{matrix} \right|$$

Pour déterminer les équations de l'échelle de trois synchrone qui correspond à la fonction "D_n, T_n", il suffit de calculer z_0 et $\bar{z}_1$, en ayant établi préalablement, selon les régles de l'analyse binaire, la table de verite sequentielle suivante.

x_n	D_n	T_n	
1	O	O^+	Etat commutant 4
1	O^+	1^+	Etat commutant 5
1	1^+	O	Etat commutant 6
1	1^+	1	Combinaison disponible.

Ce qui permet d'obtenir pour Dn = Bi (Dn,$\bar{z}$O)

$$\bar{z}_O = xn \left| \begin{matrix} Dn \\ Tn \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} Cn \\ Fn \\ Cn+1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} Dn \\ Tn \end{matrix} \Bigg|$$

Et pour

$$Tn = Bi\ (Tn, \bar{z}_1)$$

$$\bar{z}_1 = x_n\ .\bar{D}n = \left| \begin{matrix} C_n \\ F_n \\ Cn+1 \end{matrix} \right| .\bar{D}n$$

b) Pour déterminer la fonction de signalisation sig (Cn,Dn,Tn) égale à l'unite pour les états stables normalement prévus **dans** le fonctionnement de l'opérateur, il suffit de réunir les combinaisons de valeurs de Cn,Dn et Tn associées aux états stables du graphe de la figure "1", afin d'écrire la table de verite suivante .

	Cn	Dn	Tn	Sig
Etat 0	0	0	0	1
Etat 1-5	0	0	1	1
Etat 2-6	0	1	0	1
Etat 4	1	0	0	1

Cette table de verite permet de calculer immédiatement la fonction cherchée.

$$Sig = \left| \begin{array}{l} \bar{C}n.\bar{D}n \\ \bar{C}n.\bar{T}n \\ \bar{D}n.\bar{T}n \end{array} \right|$$

Que l'on peut également mettre sous la forme d'un produit de produels.

$$Sig = \left| \begin{array}{l} \bar{C}n \\ \bar{C}n.\bar{T}n \\ \bar{D}n.\bar{\bar{T}}n \end{array} \right| \begin{array}{l} \bar{D}n \\ \bar{C}n.\bar{T}n \\ \bar{D}n.\bar{T}n \end{array} \left| = \right| \begin{array}{l} \bar{C}n \\ \bar{D}n \end{array} \left| \begin{array}{l} \bar{C}n \\ \bar{T}n \end{array} \right| \begin{array}{l} \bar{D}n \\ \bar{T}n \end{array} \right|$$

c) Afin d'éliminer les doubles transitions ($1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$) de la fonction "Sig" calculée précédemment, on peut envisager de passer par l'intermediaire d'une fonction "delai conditionné" "Sid", obtenue en faisant le produel de "Sig" avec "Δ_{τ}(sig)".

En utilisant des portes du type "NAND" ayant un temps de propagation unitaire égal à " ", on peut réaliser la fonction sid = $\left| \begin{array}{l} Sig \\ \Delta_{4\tau_0}(Sig) \end{array} \right|$, à l'aide de huit portes.

..../....

En tenant compte des facteurs duals communs et en choisissant des fonctions dibinaires directes, on peut réaliser la fonction de transcodage (Sid, z_0, z_1) = F ($\overline{Cn}, \overline{Fn}, \overline{Cn+1}, \overline{Dn}, \overline{Tn}$) en utilisant onze portes "NAND" comme l'indique la figure 4.

Les équations du système s'écrivent dans ce cas

$$Dn = B\ (Dn, z0) \qquad\qquad Tn = B\ (Tn, z_1)$$

$$z_0 = \left| \begin{array}{l} \overline{Dn} \cdot \overline{Tn} \\ \overline{Cn}.\overline{Fn}.\overline{Cn}+1 \end{array} \right| \qquad\qquad z_1 = \left| \begin{array}{l} Dn \\ \overline{Cn}.\overline{Fn}.\overline{Cn}+1 \end{array} \right|$$

$$Sig = \left| \begin{array}{l} \overline{Cn}.\overline{Dn} \\ \overline{Dn}.\overline{Tn} \\ \overline{Tn}.\overline{Cn} \end{array} \right| \qquad\qquad Sid = \Delta_{\tau 0} \left| \begin{array}{l} Sig \\ \Delta 4_{\tau 0}(Sig) \end{array} \right|$$

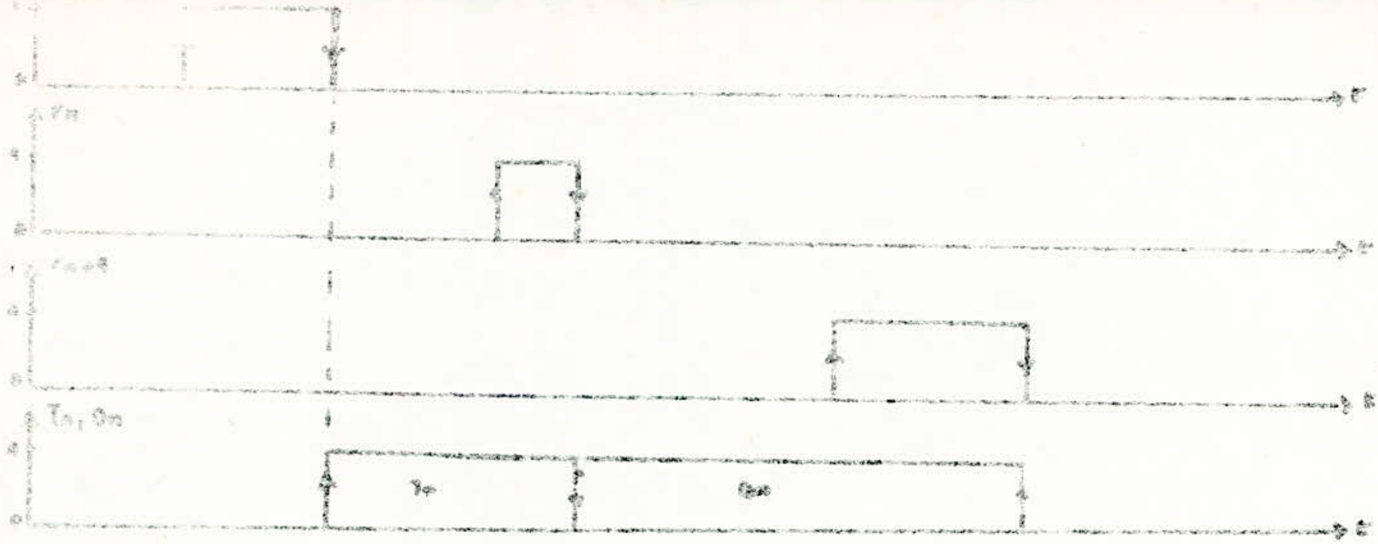


Figure n° 1 : Diagramme des temps de la fonction réflexe
$D_n, T_n = \Phi(D_n, T_n, C_n, F_n, C_{n+1})$

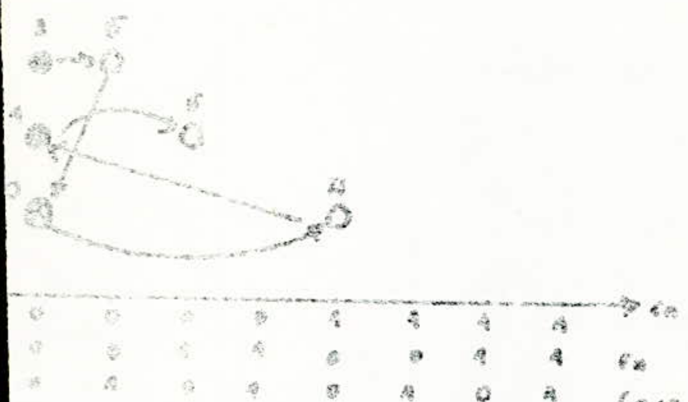


Figure n° 2 : Graphe incomplet de la fonction réflexe
$D_n, T_n = \Phi(D_n, T_n, C_n, F_n, C_{n+1})$

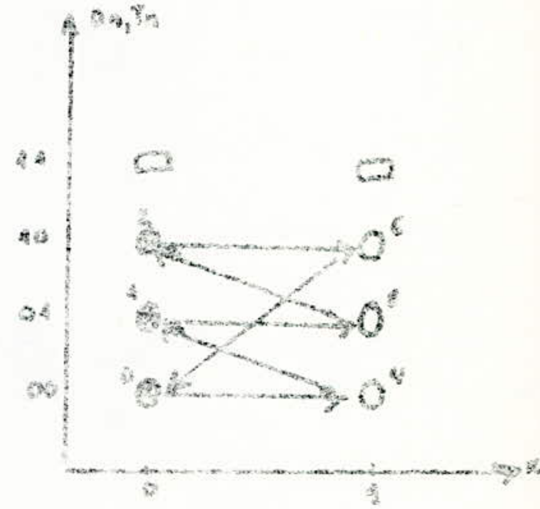


Figure n° 3 : Graphe réduit de la fonction réflexe « D_n, T_n »

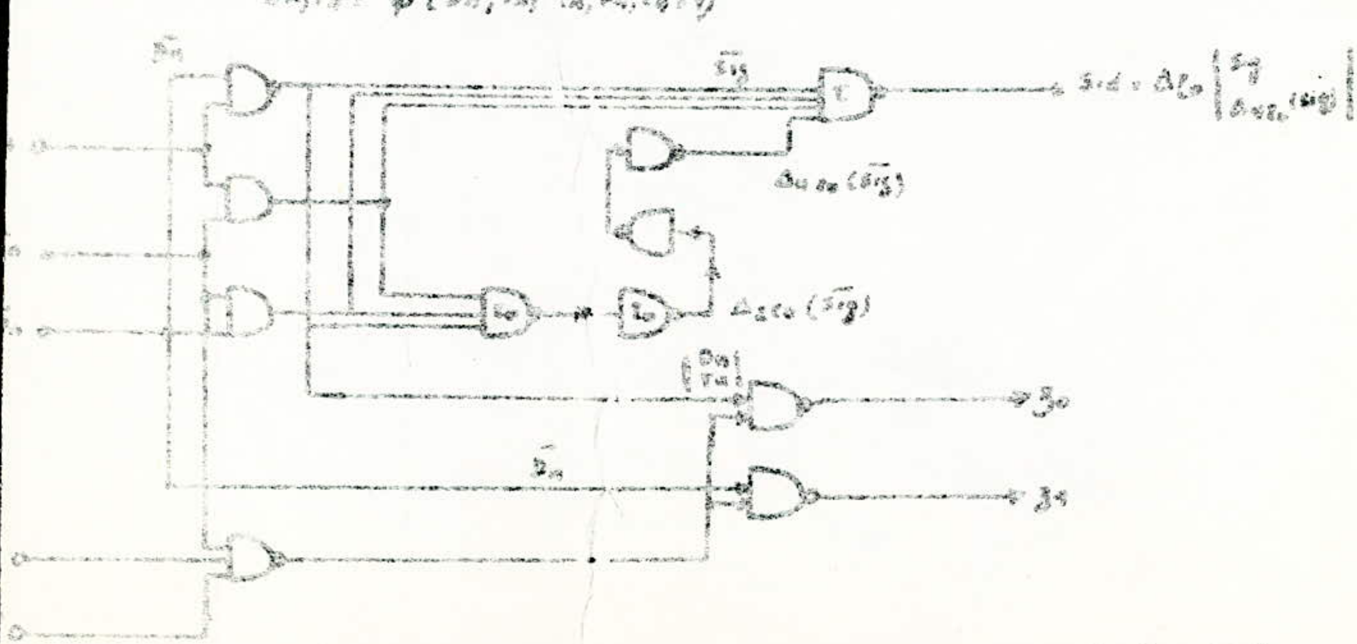


Figure n° 4 : Schéma de la fonction de transcodage $(S{:}d, j_1, j_0) = F(\bar{C}_n, \bar{F}_n, \bar{C}_{n+1}, \bar{D}_n, \bar{T}_n)$

- CONCLUSION -

1- Analyse Combinatoire :

La méthode de simplification /Po - Pi/ a été programmée en langage L.I.S.P.

Les premiers résultats obtenus sont encourageants et un programme exploitable existe déjà.

On a omis de parler du "O U" exclusif, mais la théorie des fonctions carrées biformes est une extension des sommes modulo k ($a \oplus b \oplus \ldots \oplus k$)

Une attention particulière a été accordée aux matrices de transcodages que la terminologie courante désigne sous le nom impropre de mémoire morte.

Dans le domaine des fonctions de transcodage, dont l'aspect peut encore être partiellement considéré comme algébrique, les équations sont immédiatement traduites sous formes de schémas exploitables dans n'importe quelle technologie et recéproquement.

2- Systèmes Séquentiels

Tous les systèmes reflexes peuvent être décomposer en fonctions élémentaires memoires et dibinaires, la condition trés importante des états nous permet de déterminer le nombre minimal, dans un système séquentiel, des fonctions refexes nécéssaires à la réalisation.

Un détail qu'a son importance pour un circuit séquentiel, la méthode d'Huffman ne tient pas compte des paramètres dynamiques des composants utilisé qui rend marginal le fonctionnement des montages ainsi conçu, par contre la méthode de VALLEE s'appuie sur la condition des seuils, Source de la réalisation pratique des fonctions dibinaires et la maitrise de cette condition des seuils dans les circuits de commutations concourent à l'élimination des aléas de toute nature , de même qu'elle améliore de façon appréciable la fiabilité des systèmes, et ceci sans nuire à la sécurité et à la rapidité de ces même dispositifs

Des graphes séquentiels ont été spécialement imaginés pour permettre dans un système séquentiel, la séparation aisée de différentes classes de fonctions (à savoir : fonctions de transcodage, fonctions reflexes, et fonctions génératrices) ; tout calcul de système séquentiel d'aprés VALLEE consiste à faire apparaitre séparement ces fonctions là.

Les transitions :

$$(0 \longrightarrow 1 \text{ et } 1 \longrightarrow 0), \quad \left[0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0\right] \text{ et } \left[1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1\right]$$

nécéssitent de définir une nouvelle classe de fonctions génératrices de transition, parmi ces fonctions, la fonction impulsion et la fonction délai sont des fonctions génératrices car elles engendrent des transitions nouvelles qui ne contiennent pas celles de la variable de commande dont elles dépendent éventuellement.

Nous avons jugé utile d'introduire le théorème de non simultaneïte, pour pouvoir résoudre le problème ardu des aleas en général et principalement les aléas de simultaneite et de

- BIBLIOGRAPHIE .

- Analyse Binaire de R. L vallée

Tome 1 : Théorie et application aux circuits combinatoires

Tome 2 : Chef des Automates numériques

Tome 3 : Problèmes d'automatismes numériques.

- Revue automatisme Tome : XVI.