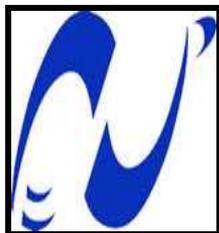


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
Département d'Hydraulique  
Laboratoire LRS/EAU



## THESE DE DOCTORAT D'ETAT EN HYDRAULIQUE

Présentée par :  
Mlle Saâdia Benmamar  
Magister en Hydraulique

### Titre :



**Etude des écoulements dans  
les conduits à motifs  
périodiques – Application aux  
évacuateurs de crues**

**Soutenue le 28 octobre 2006 devant le jury :**

<b><u>Président :</u></b>	Pr. Rabah <b>Kerbachi</b>	Professeur ENP d'Alger
<b><u>Directeurs de la thèse :</u></b>	Pr. Ahmed <b>Kettab</b>	Professeur ENP d'Alger
	Pr. Claude <b>Thirriot</b>	Professeur Emérite INPToulouse
<b><u>Examineurs :</u></b>	Pr. Hamid <b>Yahi</b>	Professeur Université de Tiziouzou
	Mr El Houari <b>Benayada</b>	Maître de Conférences Université d'Oran
	Mr Salah <b>Larbi</b>	Maître de Conférences ENP d'Alger
<b><u>Invités:</u></b>	Mr. Mohamed <b>Bessenasse</b>	Maître de Conférences Université de Blida
	Mr Rachid <b>Taibi</b>	PDG ANRH
	Mr. Madjid <b>Demak</b>	Directeur au Ministère des ressources en eau

Année Universitaire 2005/2006

## DEDICACES

***Je dédie à cette thèse de Doctorat d'Etat à :***

- ♦ ***Mes très chers Parents***
- ♦ ***Mes Frères et Sœurs :***
  - *Djamel, Aziz et Samir*
  - *Zakia, Lyakout et Dalila*
- ♦ ***Mes Beaux frères et Belles Sœurs :***
  - *Rezki et Aziz*
  - *Sonia et Ratiba*
- ♦ ***Mes neveux et nièces du plus grand au plus petit : Samira, Moussa, Mahdi, Athmane, Sid Ahmed, Amina, Mounia, Samza, Amel et Sofiane***
- ♦ ***Ma tante Drifa, son mari Nourreddine et ses enfants : Badra, Ahmed, Fares, Naima, Ryad, Rafik, Amel et Kamel***
- ♦ ***Mes cousines (Zineb, Lila, Fayet..) et Mes cousins (Farid, Hocine, )...***
- ♦ ***Mes très chères amies : Naima, Nacéra, Medjma, Djida, Nadia, Saleha, Malika, Ouiza, Jazia, Azziza, ...***
- ♦ ***A ceux que j'ai oublié de citer***
- ♦ ***Aux futurs membres de la familles et aux futurs ami(e)s.***

## **REMERCIEMENTS**

Les travaux qui font l'objet de cette étude ont été réalisés aux laboratoires :

- de Recherche Sciences de l'Eau de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger;
- d'Hydraulique de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse (ENSEEIH).
- De Mécanique des Fluides de Toulouse ;

D'Hydraulique de l'Ecole Nationale Polytechnique Alger.

Aucun mot, aucune expression ne suffiront pour traduire mon immense gratitude à mon Directeur de thèse Professeur A. Kettab pour son aide et ses conseils et à mon Co-Directeur de thèse le Professeur C. THIRRIOT, pour l'accueil chaleureux qu'il m' a réservé dans son équipe, son aide, ses conseils et sa disponibilité à la réalisation de ce travail. Qu'ils veuillent bien accepter mes remerciements les plus sincères.

Je tiens à remercier :

Monsieur R. Kerbachi Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, de m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury.

Monsieur H. YAHY Professeur à l'Université de Tiziouzu, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

Monsieur S. LARBI, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique d'ALGER, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du Jury.

Monsieur L. BENAYADA, Maître de Conférence à l'Université d'Oran, qui a accepté d'examiner cette thèse et de faire partie du Jury.

Monsieur M. BESSENASSE, Maître de Conférence à l'Université de Blida, pour avoir fait partie du comité de lecture de cette thèse et d'avoir accepté d'être membre invité du jury.

Monsieur R. TAIBI, Directeur de l'ANRH, d'avoir accepté d'être membre invité du jury.

Monsieur M. DEMAK, Directeur au Ministère des ressources hydriques, d'avoir accepté d'être membre invité du jury.

La réalisation de cette thèse de Doctorat d'Etat a été faite avec la collaboration de nombreuse personne. Qu'il me soit également permis d'exprimer mes sincères remerciements à :

Messieurs M. GAFSI et M. DJAROUD et Melle Y. OUABBAS, pour leur collaboration et leur aide.

## **Remerciements**

---

Monsieur J. CHORDA, Responsable des études sur modèles réduits à l'IMFT, pour son accueil et son aide.

Mes ami(e)s et collègues : Mme D. HARIK, Mme R. KETTAB, Melle N. ABOUN, Melle J. ARRAR, Melle A. MOUSSAOUI, Mr O. BELHADJ, Mr S. BENZIADA, Mr M. BERKANI, Mr A. BILEK, Mr R. MESSAHLI, Mr M. NAKIB, Mr N. NEBBACHE, sans oublier le Pr. M.K. BERRAH.

Enfin une grande reconnaissance et un grand merci sont adressés à Mme K. SEBAIBI, à Mme N. LAMARI, Mme N. TAFAT, à Melle A. AOUAR, à Melle Z. SEBAIBI, Monsieur S. HENINE, à Monsieur PECH, à Monsieur ELIAS et son équipe de l'atelier de l'IMFT, sans oublier Monsieur MIRE.

## ملخص

نظرا لصعوبة التدفق عبر المدرجات تبقى النماذج المختصرة بمثابة الوسيلة المميزة و الأنجع. حيث قمنا بسلسلة من التجارب على العديد من نماذج القنوات ذات السطوح المدرجة و استنتجنا انه يوجد نضامين اثنين وهما: التدفق السطحي المتميز بانتقالات متطورة مرحليا و أخرى متطورة كليا و كذا التدفق الشديد الهيجان المتميز بدوره بكون تدفقه عديم التهوية عند قمة نقطة البداية و معرض للتهوية عند أدنى نقطة للبداية.

و عليه فان التدفق السطحي يسمح بتسرب طاقة أكثر منه عند التدفق الشديد الهيجان و ذلك بوجود القفزات المائية.

تؤثر كل من أبعاد المدرجات و سرعة التدفق و ميل الانحدار على طبيعة التدفق.

سمحت لنا ملاحظتنا و نتائج تجاربنا أن نقترح معادلات تجريبية تساعد على دراسة التدفق عبر القنوات ذات تشعيبات مرئية بدرجات انحدار حادة و منفرجة.

كما استعمل النموذج الرياضي قصد التمكين من إنجاز التدفق عبر القناة ذات السطوح المدرجة اصطناعيا.

لقد قادتنا الطبيعة الهائجة للتدفق إلى تطبيق الإحصاءات التقريبية في نقطة معادلة نافبي ستوكس التي تستخلص لمجموعة معادلات رينولدز و كذا نموذج الاندفاع ك-ج .

و قصد تقييم عوامل التدفق ذو التهوية لجانا إلى استعمال نظرية التدفق المنسجم. و هكذا عملنا على النموذج الشامل الذي لا يهتم بأي وصف مدقق للتدفق الثنائي المرحلة. و عليه يتحكم في تغيرات التدفق مجموعة معادلات ذات متغيرات جزئية على شكل فرع مكافئ غير خطي.

يتم ارقمة هذه الأخيرة بفضل مخططات ذات اختلافات محددة. كما تمكننا النتائج الرقمية من رؤية تأثير العناصر المتذبذبة عند السطوح المدرجة على التهوية الذاتية عبر القنوات ذات الانحدار المنفرج و كذا مدى تأثير تغير مقدار التدفق و انحدار القناة على الظاهرة المدروسة.

**كلمات المفتاح** - التهوية- التدفق عبر المدرجات - القنوات ذات الانحدار المنفرج - التدفق السطحي - التدفق الشديد الهيجان- معادلات رينولدز- نموذج الاندفاع ك-ج -

## Résumé :

Devant la complexité des écoulements sur des marches, les modèles réduits restent un outil privilégié. Nous avons fait des séries d'expérimentations sur plusieurs maquettes de canaux en marches d'escaliers.

Deux régimes d'écoulement dans les canaux en marches d'escaliers existent. L'écoulement en nappe est caractérisé par des ressauts partiellement développés et pleinement développés. L'écoulement extrêmement turbulent est caractérisé par un écoulement non aéré à l'amont du point d'inception et aéré à l'aval du point d'inception. Le premier écoulement dissipe plus d'énergie que le deuxième du fait de la présence des ressauts hydrauliques. L'apparition de l'écoulement extrêmement turbulent est fonction des dimensions des marches, des débits et des pentes.

Nos résultats expérimentaux nous ont permis de proposer des formules empiriques permettant d'étudier les écoulements dans les canaux à macro - rugosité à faible et à forte pente.

Pour simuler numériquement l'écoulement dans un canal en marches d'escaliers, un modèle mathématique a été élaboré. La nature turbulente de l'écoulement, nous a conduit à l'application de l'approche statistique en un point aux équations de Navier Stokes, qui aboutissent au système d'équations de Reynolds et celle du modèle de

turbulence  $k-\epsilon$ . Afin d'évaluer les paramètres des écoulements aérés, en utilisant la théorie des écoulements homogènes, nous avons travaillé avec un modèle global qui ne s'intéresse à aucune description détaillée de l'écoulement diphasique.

Finalement, l'écoulement est régi par un système d'équations aux dérivées partielles de type paraboliques, non linéaires. La discrétisation de ces dernières est établie à l'aide de schémas aux différences finies. Les résultats numériques ont permis de voir l'effet des éléments rugueux en marches d'escalier sur l'auto-aération des écoulements à travers les canaux à fortes pentes, ainsi que l'influence de la variation du débit et de la pente du canal sur le phénomène en question.

**Mots clés** : Aération - Canaux à forte pente - Canaux en marches d'escaliers - Ecoulement en nappe – Ecoulement extrêmement turbulent - Point d'inception - Système d'équations de Reynolds – Modèle de turbulence.

---

### Abstract

In front of the complexity of the flows on steps, the small-scale models remain a privileged tool. We have made series of experiments on several models of stepped channels. It is come out from it that there are various modes of flow in the stepped channels. The nappe flow is characterized by partially developed and fully developed jump. The skimming flow is characterized by a non aered flow in the upstream of the point of inception and is aired in the downstream of the point of inception. The nappe flow dissipates more energy than the skimming flow because of the presence of the hydraulic jump in the nappe flows. The appearance of the skimming flow is a function of dimensions of the steps, the flows and the slopes. Our results enabled us to propose empirical formulas making it possible to study the flows in the channels with macro roughness with low and steeply sloping.

To simulate the flow in a stepped channel, a mathematical model was elaborated. The skimming nature of the flow led us to the application of the statistical approach in a point to the Navier-Stokes equations which lead to the system of Reynolds and equations of the model of turbulence  $K-\epsilon$ .

In order to evaluate the parameters of aired flows, we used the theory of the homogeneous flows. Thus it is with a total model we worked and that is not interested in any detailed description of the diphasic flow. The flow governs by a system of equations to the derivative partial of parabolic type, nonlinear. The discretization of these last equations establishes by using diagrams with the finite differences.

The numerical results made it possible to see the effect of the rough elements on steps on the self-aeration of the flows through the channels with strong slopes, as well as the influence of the variation of the flow and the slope of the channel on the phenomenon spoken about.

**Keywords** : Aeration - The channels with strong slopes - The nappe flow - The point of inception - The skimming flow – The step – The system of Reynolds – The model of turbulence .

## Sommaire

<i>Introduction générale</i>	01
<i>Chapitre I: La problématique des écoulements dans les canaux en marches d'escaliers.</i>	04
<b>I. Aperçu historique sur les canaux en marches d'escalier</b>	<b>04</b>
<b>II. Présentation des écoulements dans les canaux en marches d'escaliers</b>	<b>05</b>
<b>A. Régimes d'écoulements en nappe</b>	<b>05</b>
1. Différents régimes d'écoulement en nappe	06
2. Caractéristiques hydrauliques de l'écoulement en nappe	08
3. Dissipation de l'énergie	11
4. Conception d'évacuateurs de crues avec régime d'écoulement en nappe	12
<b>B. Régime d'écoulement turbulent</b>	<b>12</b>
1. Début du régime très turbulent	13
2. Phénomène d'aération naturelle de l'écoulement	14
3. Ecoulement uniforme aéré	17
4. Ecoulement graduellement varié aéré	23
<b>Conclusion</b>	<b>24</b>
<i>Chapitre II: Première approche expérimentale et discussions</i>	<b>25</b>
<b>I. Expériences</b>	<b>25</b>
1. Description du dispositif expérimental	25
2. Technique de mesure	26
3. Les essais sur les deux modèles en position horizontale	26
4. Observations des écoulements dans les deux modèles en fortes pentes	29

<b>II. Analyse des résultats</b>	<b>34</b>
1. Analyse des résultats sur les canaux horizontaux	34
2. Analyse des résultats sur les canaux à forte pente	45
3. Entraînement d'air dans les écoulements très turbulents	47
<b>III. Calcul analytique du point d'inception</b>	<b>48</b>
<b>IV. Dissipation d'énergie</b>	<b>50</b>
1. Ecoulement en nappe	50
2. Ecoulement très turbulent	50
<b>Conclusion</b>	<b>51</b>
<b><i>Chapitre III : Etude expérimentale des écoulements sur canal à motif Périodique à faible et à forte pentes</i></b>	<b>52</b>
<b>I. Etude expérimentale des écoulements sur canal à motif Périodique à faible</b>	<b>52</b>
<b>A. Etudes des écoulements au-dessus d'éléments fixés sur fond de canal</b>	<b>52</b>
<b>B. Etude expérimentale</b>	<b>55</b>
1. Installation	55
2. Moyens de mesures	55
3. Analyse des résultats	55
<b>II. Etude expérimentale des écoulements sur canal à motif Périodique à forte pente</b>	<b>62</b>
<b>A. Installation</b>	<b>62</b>
1. Description du dispositif expérimental	62
2. Description des modèles	63
3. Mesures	64
4. Description des écoulement observés et mesures	65
<b>B. Analyse des résultats expérimentaux</b>	<b>65</b>
1. Détermination du régime d'écoulement	65
2. Résultats et observations	68
3. Proposition de formules empiriques	70
4. Dissipation d'énergie	71
5. Commentaires	76
6. Détermination empirique du point d'inception	76
<b>Conclusion</b>	<b>79</b>

<b>Chapitre IV: Approche numérique du calcul du point d'inception dans les canaux en marches d'escaliers</b>	<b>80</b>
<b>II. Modèle mathématique</b>	<b>81</b>
1. Hypothèses de calcul	82
2. Equations régissant l'écoulement dans la couche limite	82
<b>II. Modèle numérique</b>	<b>82</b>
1. Discrétisation des équations	82
2. Condition aux limites	85
3. Calcul de l'épaisseur de la couche limite	85
4. Calcul de la ligne d'eau	85
<b>III. Applications et résultats</b>	<b>85</b>
<b>Conclusion</b>	<b>89</b>
<b>Chapitre V : Equations des écoulements turbulents</b>	<b>90</b>
<b>I. Equations régissant les écoulements des fluides Newtoniens</b>	<b>90</b>
1. Décomposition statistique	93
2. Les deux types d'advection	94
3. Evolution moyenne	94
<b>II. Equations du mouvement moyen.</b>	<b>95</b>
1. Equation de continuité	95
2. Equation dynamique du mouvement moyen : Equations de Reynolds	95
<b>III. Modèles de la turbulence.</b>	<b>96</b>
1. Classification des modèles en un point	96
2. Choix d'un modèle de turbulence	99
3. Modèle de turbulence k-ε	100
<b>Conclusion</b>	<b>104</b>
<b>Chapitre VI: Modélisation mathématique de l'écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escalier</b>	<b>105</b>
<b>I. Elaboration du modèle mathématique régissant l'écoulement à l'amont du point d'inception</b>	<b>106</b>
1. Présentation des hypothèses de base et du schéma descriptif Modèle de turbulence.	106
2. Modèles de turbulence	107
3. Modèle mathématique final.	108
4. Ecriture du modèle mathématique en fonction de la variable	110

adimensionnelle $\omega$ .	113
5. Construction des profils initiaux des variables de l'écoulement.	113
6. Conditions aux limites.	115
<b>II. Modélisation mathématique de l'écoulement turbulent à l'aval du point d'inception</b>	<b>118</b>
1. Schéma du canal d'étude.	118
2. Hypothèses	119
3. Equations de l'écoulement turbulent	120
4. Modèle mathématique final de l'écoulement graduellement varié aéré	121
<b>Conclusion</b>	<b>124</b>
<b><i>Chapitre VII</i>: Modélisation numérique de l'écoulement turbulent dans un canal en marches d'escalier</b>	<b>125</b>
<b>I. Méthode des différences finies</b>	<b>125</b>
<b>II. Application des schémas numériques au modèle mathématique de l'écoulement turbulent en amont du point d'inception.</b>	<b>127</b>
1. Schéma explicite	127
2. Schéma implicite	130
3. Calcul de la ligne d'eau	132
4. Calcul du point d'inception	132
5. Organigrammes de calculs	133
<b>III. Discrétisation des équations différentielles de l'écoulement turbulent graduellement varié aéré</b>	<b>137</b>
1. Equation de la concentration en air moyenne	138
2. Equation de la conservation de l'énergie	139
3. Discrétisation des équations du mouvement	140
4. Conditions aux limites	142
5. Conditions initiales	144
6. Mise en œuvre numérique	144
<b><i>Chapitre VIII</i>: Expérimentations numériques</b>	<b>148</b>
<b>I. Calcul des paramètres hydrauliques de l'écoulement</b>	<b>148</b>
1. Epaisseur de la lame d'eau au seuil du coursier.	148
2. Hauteur d'eau normale.	148
3. Hauteur d'eau critique.	149
4. Vitesse de frottement.	149
5. Coefficient de frottement.	149

<b>II. Localisation du point d'inception</b>	<b>149</b>
<b>III. Validation des modèles numériques</b>	<b>150</b>
1. Présentation des modèles d'applications.	150
2. Stabilité du schéma numérique explicite aux différences finies.	152
3. Résultats des applications et analyses.	155
<b>IV. Essais numériques</b>	<b>159</b>
1. Effet des marches sur l'apparition de l'aération naturelle.	159
2. Influence du débit et du changement de pente sur le développement de la couche limite dans l'écoulement.	160
3. Profils des variables de l'écoulement.	162
<b>Conclusion</b>	<b>169</b>
<b>V. Détermination de la concentration moyenne d'air dans la région très turbulent graduellement varié aéré</b>	<b>170</b>
1. Présentation des modèles d'application.	170
2. Etude de l'écoulement sur le coursier lisse de l'évacuateur de crue du barrage d'Aviemoire.	170
3. Etude de l'écoulement sur le coursier en marches d'escalier de l'évacuateur de crue du barrage de M'Bali.	176
4. Comparaison entre le coursier lisse et le coursier en marches d'escalier	180
<b>Conclusion</b>	<b>181</b>
<b>Conclusion Générale</b>	<b>182</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>184</b>
<b>Annexe</b>	<b>196</b>

## Sommaire des figures

Figure I.1	: Régime d'écoulement en nappe.	06
Figure I.2	: Ecoulement en nappe avec un ressaut complètement développé.	07
Figure I.3	: Ecoulement en nappe avec un ressaut partiellement développé.	07
Figure I.4	: Ecoulement en nappe sans formation d'un ressaut.	08
Figure I.5	: Caractéristiques d'un écoulement en nappe.	09
Figure I.6	: Régime d'écoulement très turbulent.	12
Figure I.7	: Comparaison des résultats des différents chercheurs (tableau I-1).	14
Figure I.8	: Mécanisme d'entraînement d'air.	14
Figure I.9	: Entraînement de l'air dans le cas du régime turbulent.	16
Figure II.1	: Ecoulement observé pour $Q = 1,911/s$ et $Q = 1,161/s$ .	30
Figure II.2	: Ecoulement observé pour $Q = 0,361/s$ .	31
Figure II.3	: Ecoulement observé pour $Q = 0,211/s$ .	31
Figure II.4	: Ecoulement observé pour $Q = 2,01/s$ et $Q = 1,411/s$ .	32
Figure II.5	: Ecoulement observé dans le cas de la nappe noyée.	33
Figure II.6	: Ecoulement observé dans le cas de l'aération de la nappe d'eau déversante.	33
Figure II.7	: Ecoulement observé pour $Q = 0,551/s$ .	34
Figure II.8	: Profil de la surface libre pour différents débits et pour $\alpha = 0^\circ$ dans le modèle 4,0cm x4,0cm x8,0cm.	35
Figure II.9	: Profil de la surface libre pour différents débits et pour $\alpha = 0^\circ$ dans le modèle 8,0cm x 8,0cm x 8,0cm.	35
Figure II.10	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{2/3}$ : Crête 3.	37
Figure II.11	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{2/3}$ : Crête 4.	37
Figure II.12	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{2/3}$ : Crête 5.	37
Figure II.13	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{2/3}$ : Crête 6.	38
Figure II.14	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{2/3}$ : Crête 1.	38
Figure II.15	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{2/3}$ : Crête 2.	38

---

*Sommaire des figures*

---

Figure II.16	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{2/3}$ : Crête 3.	39
Figure II.17	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{2/3}$ : Crête 4.	39
Figure II.18	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/2}$ : Crête 3.	40
Figure II.19	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/2}$ : Crête 4.	40
Figure II.20	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/2}$ : Crête 5.	40
Figure II.21	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/2}$ : Crête 6.	41
Figure II.22	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/2}$ : Crête 1.	41
Figure II.23	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/2}$ : Crête 2.	41
Figure II.24	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/2}$ : Crête 3.	42
Figure II.25	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/2}$ : Crête 4.	42
Figure II.26	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/3}$ : Crête 3.	43
Figure II.27	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/3}$ : Crête 4.	43
Figure II.28	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/3}$ : Crête 5.	43
Figure II.29	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/3}$ : Crête 6.	44
Figure II.30	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/3}$ : Crête 1.	44
Figure II.31	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/3}$ : Crête 2.	44
Figure II.32	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/3}$ : Crête 3.	45
Figure II.33	: Variation de la profondeur en fonction de $Q^{1/3}$ : Crête 4.	45
Figure III.1	: Ecoulement à rugosité isolée.	52
Figure III.2	: Ecoulement à interférence de sillage.	53
Figure III.3	: Ecoulement quasi-lisse.	53
Figure III.4	: Rugosité triangulaire.	53
Figure III.5	: Variation de la hauteur moyenne de l'écoulement ( $h_*$ ) en fonction du débit pour $\text{tg } \alpha = 1,6\%$ .	56
Figure III.6	: Variation de la hauteur moyenne de l'écoulement ( $h_*$ ) en fonction du débit pour $\text{tg } \alpha = 3\%$ .	56
Figure III.7	: Variation de la hauteur moyenne de l'écoulement ( $h_*$ ) en fonction du débit pour $\text{tg } \alpha = 4,25\%$ .	57
Figure III.8	: Variation de $h_*^{5/3}$ en fonction du débit pour $\text{tg } \alpha = 1,6\%$ .	58
Figure III.9	: Variation de $h_*^{5/3}$ en fonction du débit pour $\text{tg } \alpha = 3\%$ .	58

---

*Sommaire des figures*

---

Figure III.10	: Variation de $h_*^{5/3}$ en fonction du débit pour $\text{tg } \alpha = 4,25\%$ .	59
Figure III.11	: Variation $h_*^{5/3}$ de en fonction $(\text{tg } \alpha)^{1/2}$ .	59
Figure III.12	: Variation du rapport $Q^2/J$ en fonction de la hauteur d'eau pour $\text{tg } \alpha = 1,6\%$ .	61
Figure III.13	: Variation du rapport $Q^2/J$ en fonction de la hauteur d'eau pour $\text{tg } \alpha = 3\%$ .	61
Figure III.14	: Variation du rapport $Q^2/J$ en fonction de la hauteur d'eau pour $\text{tg } \alpha = 4,25\%$ .	62
Figure III.15	: Détermination des régimes d'écoulement dans le modèle I.	67
Figure III.16	: Détermination des régimes d'écoulement dans le modèle II.	67
Figure III. 17	: Détermination des régimes d'écoulement dans le modèle III.	68
Figure III.18	: Détermination des limites des différents régimes d'écoulement dans les canaux en marches d'escaliers.	70
Figure III.19	: Variation de $L_{IM}$ en fonction de $L_{IC}$ .	78
Figure III.20	: Variation de $d_{IM}$ en fonction de $d_{IC}$ .	78
Figure IV.1	: Schéma et notations.	81
Figure IV.2	: Maillage.	83
Figure IV.3	: Validation du modèle numérique.	87
Figure IV.4	: Détermination du point d'inception pour un débit $q = 26,41\text{m}^2/\text{s}$	88
Figure IV. 5	: Influence du débit sur l'épaisseur de la couche limite	88
Figure VI.1	: Schéma descriptif et choix des axes dans le canal	107
Figure VI.2	: Zone de développement de la couche limite	110
Figure VI.3	: Représentation du canal d'étude (canal en marches d'escalier).	119
Figure VII.1	: Maillage d'une fonction suivant un plan $(x, y)$ .	126
Figure VII.2	: Représentation des conditions aux limites.	142
Figure VIII.1	: Localisation du début du phénomène d'aération naturelle de l'écoulement pour deux différents débits.	150
Figure VIII.2	: Comparaison des résultats numériques de Keller à ceux du schéma implicite de notre modèle (cas de l'évacuateur de crues lisse du barrage de Glenmaggie).	157
Figure VIII.3	: Comparaison des résultats numériques obtenus avec le schéma	158

	explicite à ceux obtenus avec schéma implicite (cas de l'évacuateur de crues lisse du barrage de Glenmaggie).	
Figure VIII.4 :	Comparaison des résultats expérimentaux de Vercheval à ceux des schémas implicite et explicite de notre modèle.	158
Figure VIII.5 :	Effet des marches sur l'apparition de l'aération naturelle de l'écoulement.	160
Figure VIII.6 :	Influence du débit sur l'évolution de la couche limite (cas de l'évacuateur à marches d'escalier du barrage de M'Bali).	161
Figure VIII.7 :	Influence de la pente du coursier sur l'apparition de l'aération de l'écoulement.	162
Figure VIII.8 :	Profils des vitesses à différentes sections ( $q = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ ).	163
Figure VIII.9 :	Profils des vitesses à différentes sections ( $q = 15 \text{ m}^2/\text{s}$ ).	163
Figure VIII.10 :	Profils des vitesses à différentes sections ( $q = 20 \text{ m}^2/\text{s}$ ).	164
Figure VIII.11 :	Profils de l'énergie cinétique turbulente à différentes sections (pour un débit $q = 10 \text{ m}^2/\text{s}^2$ ).	165
Figure VIII.12 :	Profils de l'énergie cinétique turbulente à différentes sections (pour un débit $q = 15 \text{ m}^2/\text{s}/\text{m}$ ).	166
Figure VIII.13 :	Profils de l'énergie cinétique turbulente à différentes sections (pour un débit $q = 20 \text{ m}^2/\text{s}/\text{m}$ ).	166
Figure VIII.14 :	Profils du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente à différentes sections (pour un débit $q = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ ).	167
Figure VIII.15 :	Profils du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente à différentes sections (pour un débit $q = 15 \text{ m}^2/\text{s}$ ).	167
Figure VIII.16 :	Profils du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente à différentes sections (pour un débit $q = 20 \text{ m}^2/\text{s}$ ).	168
Figure VIII.17 :	Profils de la viscosité turbulente calculés par le modèle pour différents débits aux points d'inception.	168
Figure VIII.18 :	Profil de la concentration et de la ligne d'eau pour $q = 2,16 \text{ m}^2/\text{s}$ .	171
Figure VIII.19 :	Profil de la concentration et de la ligne d'eau pour $q = 2,34 \text{ m}^2/\text{s}$ .	171
Figure VIII.20 :	Profil de la concentration et de la ligne d'eau pour $q = 3,15 \text{ m}^2/\text{s}$ .	172
Figure VIII.21 :	Profils de concentration moyenne en air et de la hauteur d'eau pure pour $q = 2,16 \text{ m}^2/\text{s}$ .	173
Figure VIII.22 :	Profil de la vitesse à différentes sections pour $q = 2,16 \text{ m}^2/\text{s}$ .	174
Figure VIII.23 :	Profil de la vitesse à différentes sections pour $q = 2,34 \text{ m}^2/\text{s}$ .	174

---

*Sommaire des figures*

---

Figure VIII.24 : Profil de la vitesse à différentes sections pour $q = 3,15\text{m}^2/\text{s}$ .	175
Figure VIII.25 : Profils de la vitesse pour différents débits.	175
Figure VIII.26 : Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux de Cain et Wood.	176
Figure VIII.27 : Profil de la concentration et de la ligne d'eau pour $q = 6\text{m}^2/\text{s}$ .	177
Figure VIII.28 : Profil de la concentration et de la ligne d'eau pour $q = 9\text{m}^2/\text{s}$ .	177
Figure VIII.29 : Profil de la concentration et de la ligne d'eau pour $q = 11\text{m}^2/\text{s}$ .	178
Figure VIII.30 : Profil de la vitesse à différentes sections pour $q = 6\text{m}^2/\text{s}$ .	179
Figure VIII.31 : Profil de la vitesse à différentes sections pour $q = 9\text{m}^2/\text{s}$ .	179
Figure VIII.32 : Profil de la vitesse à différentes sections pour $q = 11\text{m}^2/\text{s}$ .	180

**Sommaire des photos**

Photo II.1 : Installation expérimentale pour $\alpha = 0$	26
Photo III.1 : Modèle I	63
Photo III.2 : Modèle II	64
Photo III.3 : Modèle III	64
Photo VI.1 : Canal à forte pente avec fons en marche d'escalier	105
Photo VIII.1 : Evacuateur de crues du barrage M'Bali	151

## Sommaire des tableaux

Tableau I-1	: Début de l'écoulement extrêmement turbulent sur un évacuateur en marches d'escaliers	13
Tableau II-1	: Résultats expérimentaux pour $\alpha = 0$ et pour le modèle 1	28
Tableau II-2	: Résultats expérimentaux pour $\alpha = 0$ et pour le modèle 2	29
Tableau II-3	: Régimes d'écoulement dans le modèle à marches 4cmx4cmx8cm	46
Tableau II-4	: Régimes d'écoulement dans le modèle à marches 8cmx8cmx8cm	46
Tableau II-5	: Nature des ressauts dans le modèle à marches 4cmx4cmx8cm	47
Tableau II-6	: Nature des ressauts dans le modèle à marches 8cmx8cmx8cm	47
Tableau II-7	: Coordonnées des points d'inception	48
Tableau II-8	: Coefficient de débit.	50
Tableau II-9	: Position du point d'inception (calcul analytique).	50
Tableau II-10	: Taux de dissipation d'énergie dans le modèle 1	51
Tableau II-11	: Taux de dissipation d'énergie dans le modèle 2	51
Tableau III-1	: Mesures de débit et de la profondeur d'écoulement pour les différentes pentes.	57
Tableau III-2	: Pente Hydraulique pour différents débits et pour $\text{tg } \alpha = 1,6\%$	60
Tableau III-3	: Pente Hydraulique pour différents débits et pour $\text{tg } \alpha = 3,0\%$	60
Tableau III-4	: Pente Hydraulique pour différents débits et pour $\text{tg } \alpha = 4,25\%$	60
Tableau III-5	: Taux de dissipation d'énergie dans le modèle 1 avec la pente $\alpha = 12,4^\circ$	71
Tableau III-6	: Taux de dissipation d'énergie dans le modèle 1 avec la pente $\alpha = 16,3^\circ$	72
Tableau III-7	: Taux de dissipation d'énergie dans le modèle 1 avec la pente $\alpha = 22,5^\circ$	72
Tableau III-8	: Taux de dissipation d'énergie dans le modèle 1 avec la pente $\alpha = 42,32^\circ$	72

---

*Sommaire des tableaux*

---

Tableau III-9 :	Taux de dissipation d'énergie dans le modèle 2 avec la pente $\alpha = 12,4^\circ$	73
Tableau III-10 :	Taux de dissipation d'énergie dans le modèle 2 avec la pente $\alpha = 16,3^\circ$	73
Tableau III-11 :	Taux de dissipation d'énergie dans le modèle 2 avec la pente $\alpha = 22,5^\circ$	73
Tableau III-12 :	Taux de dissipation d'énergie dans le modèle 2 avec la pente $\alpha = 39,8^\circ$	74
Tableau III-13 :	Taux de dissipation d'énergie dans le modèle III avec la pente $\alpha = 12,4^\circ$	74
Tableau III-14 :	Taux de dissipation d'énergie dans le modèle III avec la pente $\alpha = 16,3^\circ$	75
Tableau III-15 :	Taux de dissipation d'énergie dans le modèle III avec la pente $\alpha = 22,5^\circ$	75
Tableau III-16 :	Taux de dissipation d'énergie dans le modèle III avec la pente $\alpha = 39,8^\circ$	75
Tableau III-17 :	Caractéristiques des points d'inception	77
Tableau IV-1 :	Résultats expérimentaux de la position du point d'inception	86
Tableau IV-2 :	Position du point d'inception calculée par la formule proposée	86
Tableau IV-3 :	Position du point d'inception calculées par la corrélation proposée par <b>H. Chanson</b>	86
Tableau IV-4 :	Position du point d'inception calculée avec le modèle numérique	86
Tableau VIII-1:	Résultats de la vitesse U (m/s) suite à la perturbation des variables initiales.	153
Tableau VIII-2:	Ordres de grandeurs des erreurs de la vitesse U à différentes sections	155

## Notations principales

Symboles	Signification	Unité
$b_c$	: Largeur du canal	[m]
$B'$	: Constante dans la distribution de la concentration d'air	[-]
$C$	: Coefficient de Chezy	[-]
$C_d$	: Coefficient de débit	[-]
$C_f$	: Coefficient de frottement,	[-]
$C_{Moy}$	: Concentration moyenne d'air	[-]
$C_n$	: Concentration d'air uniforme	[-]
$C_{90\%}$	: Concentration de référence définie pour $C = 90\%$	[-]
$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$	: Constantes du modèle de turbulence	[-]
$C_\mu$	: Constante du modèle de turbulence	[-]
$d$	: Profondeur d'écoulement	[m]
$d_c$	: Profondeur critique	[m]
$d_I$	: Hauteur d'eau au point d'inception	[m]
$E$	: Coefficient de correction de l'énergie cinétique	[-]
$f$	: Coefficient de frottement de l'écoulement non aéré	[-]
$f_e$	: Coefficient de frottement de l'écoulement aéré	[-]
$F_r$	: Nombre de Froude	[-]
$F_{ma}$	: Flux massique pour l'air	[m <sup>3</sup> /s]
$F_{me}$	: Flux massique pour l'eau	[m <sup>3</sup> /s]
$F_x, F_y, F_z$	: Forces de Volumes, respectivement suivant les axes x,y, z,	[N]
$g$	: Accélération de la pesanteur	[m <sup>2</sup> /s]
$G'$	: Constante dans la distribution de la concentration d'air	[-]
$h$	: Hauteur d'une marche	[m]
$h_b$	: Hauteur d'eau au bord d'une marche	[m]
$h_c$	: Hauteur de l'écoulement,	[m]
$h_i$	: Epaisseur de la nappe	[m]
$h_n$	: Profondeur de l'écoulement uniforme aéré	[m]
$h_p$	: Hauteur du nid d'eau	[m]

*Notations principales*

---

$h_r$	: Profondeur de référence	[m]
$h_{r1}$	: Tirant d'eau dans la section 1	[m]
$h_{r2}$	: Tirant d'eau dans la section 2	[m]
$h^*$	: Profondeur moyenne	[m]
$H_{\text{amont}}$	: Charge totale à l'amont d'un barrage	[m]
$H_{\text{aval}}$	: Charge totale au pied aval d'un barrage	[m]
$H_{\text{bar}}$	: Charge à la crête du barrage	[m]
$H_d$	: Hauteur d'eau à l'amont d'un déversoir,	[m]
$H_0$	: Elévation de la surface libre du réservoir au dessus de la crête du déversoir.	[m]
$i$	: Indice de maillage suivant la direction x	[-]
$I$	: Pente du canal	[-]
$j$	: Indice de maillage suivant la direction y	[-]
$J, S$	: Pente de la ligne de charge	[m/m]
$k_s$	: Rugosité équivalente	[m <sup>1/3</sup> /s]
$K_s$	: Coefficient de Strickler	[-]
$l$	: Largeur d'une marche	[m]
$L_m$	: Longueur de mélange	[m]
$L_I$	: Distance séparant le point de l'ascension de la couche limite du point d'inception	[m]
$L_I^C$	: Distance séparant le point de l'ascension de la couche limite du point d'inception calculée	[m]
$L_I^M$	: Distance séparant le point de l'ascension de la couche limite du point d'inception mesurée	[m]
$L_r$	: Longueur du ressaut	[m]
$n$	: Exposant de la loi de vitesse	[-]
$P$	: Valeur Moyenne de la pression	[Pa]
$q$	: Débit par unité de largeur	[m <sup>2</sup> /s]
$Q$	: Débit Volumique	[m <sup>3</sup> /s]
$Re$	: Nombre de Reynolds	[-]
$R_h$	: Rayon hydraulique	[m]
$S_m$	: Section mouillée	[m <sup>2</sup> ]
$t$	: Variable temps	[s]

*Notations principales*

---

$u_r$	: Vitesse limite d'ascension des bulles d'air	[m/s]
$U_1, U_\infty$	: Vitesse de l'écoulement libre	[m/s]
$U, V, W$	: Composantes axiales de la vitesse, respectivement, suivant les axes x,y, et z	[m/s]
$u, v, w$	: Valeurs fluctuantes des composantes u, v, w de la vitesse, respectivement	[m/s]
$\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$	: Valeurs moyennes des composantes u, v, w de la vitesse, respectivement	[m/s]
$U_a$	: Vitesse de l'air	[m/s]
$U_n$	: Vitesse moyenne de l'écoulement uniforme	[m/s]
$U^*$	: Vitesse de frottement	[m/s]
$U_{90\%}$	: Vitesse de référence définie pour $C = 90\%$	[m/s]
$U^=$	: Vitesse adimensionnelle	[ - ]
$V_e$	: Vitesse d'entraînement d'air	[m/s]
$V_{en}$	: Vitesse d'entraînement d'air pour un écoulement uniforme	[m/s]
$x, y, z$	: Variables indépendantes spatiales	[m]
$y'$	: Profondeur adimensionnelle	[ - ]
$y_{90\%}$	: Profondeur de référence définie pour $C = 90\%$	[m]
$Y, \delta$	: Epaisseur de la couche limite	[m]
$\alpha$	: Angle d'inclinaison du canal,	[degrés]
$\beta$	: Angle	[degrés]
$\delta_a$	: Epaisseur de la couche limite de la contraction d'air	[m]
$\delta_1$	: Epaisseur de déplacement	[m]
$\delta_2$	: Epaisseur de quantité de mouvement	[m]
$\delta_3$	: Epaisseur d'énergie	[m]
$\Delta$	: Opérateur Laplacien	[ - ]
$\Delta x$	: Pas de discrétisation suivant x ,	[m]
$\Delta \omega$	: Pas de discrétisation suivant $\omega$	[m]
$\kappa$	: Constante de Von Karman	[ - ]
$\varepsilon$	: Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente	[m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup> ]
$\mu$	: Viscosité dynamique	[kg/m.s]

---

*Notations principales*

---

$\mu_t$	: Viscosité dynamique turbulente	[kg/m.s]
$\nu$	: Viscosité cinématique	[m <sup>2</sup> /s]
$\nu_t$	: Viscosité cinématique turbulente	[m <sup>2</sup> /s]
$\theta$	: Angle d'ondulation	[Degrés]
$\rho$	: Masse volumique de l'eau	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_a$	: Masse volumique de l'air	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_m$	: Masse volumique du mélange air - eau	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma_k, \sigma_\epsilon$	: Constante de cisaillement	[ - ]
$\tau$	: Contrainte de cisaillement	[N/m <sup>2</sup> ]
$\tau_0$	: Contrainte de frottement	[N/m <sup>2</sup> ]
$\omega$	: Fonction de courant adimensionnelle	[ - ]
$\psi$	: Fonction de courant	[ - ]

## Introduction générale

Avec le développement des bassins de dissipation d'énergie par le ressaut hydraulique, la technique des coursiers en marches d'escaliers était obsolète durant la première moitié du vingtième siècle, surtout suite aux travaux de **Boris Bakhmeteff** en 1932.

Le regain d'intérêt pour les canaux et cascades en marches d'escaliers est lié à l'introduction de nouveaux matériaux de construction, de nouvelle technique de déversement ; et de nouvelles applications comme les cascades de réoxygénation artificielle.

Les récents progrès scientifiques furent marqués, durant la période 1970-1992, par une ignorance quasi-complète des caractéristiques diphasiques des écoulements sur les coursiers à marches d'escaliers. Il a fallu attendre les premières mesures de **Ruff** et **Frizill** en 1994 pour apprécier l'importance de l'entraînement d'air sur la conception hydraulique des cascades en marches d'escaliers. Hors l'entraînement d'air dans des écoulements supercritiques (c'est à dire « eau blanche ») est un paramètre essentiel, caractérisant l'augmentation du volume de l'écoulement, et donc le dimensionnement des parois latérales. De plus la présence d'air dans les écoulements à grandes vitesses permet de réduire ou d'empêcher l'érosion par cavitation.

L'écoulement sur les marches d'escaliers n'est donc pas facile, à cause des différents régimes d'écoulements, mais d'une manière très importante à cause de la forte aération de l'écoulement, de la très forte turbulence et de l'interaction entre l'air entraîné et la turbulence.

**Pour comprendre ces différents phénomènes, nous nous proposons dans cette thèse d'étudier les propriétés des écoulements turbulents dans des canaux à forte rugosité à faible et à forte pentes.**

Pour atteindre l'objectif fixé, nous avons suivi la démarche suivante :

- Nous avons tout d'abord souligné, à partir d'une étude bibliographique, les différents régimes d'écoulement existant, les formules empiriques les régissant. Puis nous avons posé la problématique des canaux en marches d'escaliers.
- Pour montrer l'intérêt d'étudier ces écoulements, nous avons fait une approche expérimentale sur deux modèles réduits en marches d'escaliers : modèle 1 (4cm x 4cm x 8cm) et modèle 2 (8cm x 8cm x 8cm). Deux types d'écoulements ont été observés : Ecoulements en nappe et extrêmement turbulent (skimming flow).

Ces canaux en marches d'escaliers mis en position horizontale deviennent "des canaux à rugosité périodique" ou "des canaux avec éléments triangulaires". Nous avons proposé plusieurs anamorphoses pour la variation de la profondeur d'écoulement en fonction du débit.

Nous avons ensuite réalisé de nouvelles expériences sur un troisième modèle réduit de dimensions (8cm x 8cm x 25cm) et ceci pour affirmer les résultats trouvés dans les deux premiers modèles en "canaux à éléments triangulaires". Une loi d'écoulement pour ce type de canaux a été proposée.

La dernière partie expérimentale a consisté à faire de nouveaux essais sur trois autres modèles réduits en forte pente, ceci également pour affirmer les résultats obtenus dans la première série d'expériences. Concernant les canaux en marches d'escaliers, un développement analytique de calcul de l'épaisseur de la couche limite a été présenté.

Nos observations et nos résultats expérimentaux nous ont permis de proposer des formules empiriques permettant d'étudier les écoulements dans les canaux à macro-rugosité à faible et à forte pente.

Dans l'écoulement extrêmement turbulent (skimming flow), un phénomène d'entraînement d'air est observé. Un calcul théorique des caractéristiques du point d'apparition de l'eau blanche a été donné. Ce calcul théorique est basé sur le développement de la couche limite. Un modèle mathématique gouvernant les écoulements à l'amont et à l'aval du point de commencement du phénomène d'entraînement d'air a été élaboré.

- Un modèle numérique permettant de déterminer le point d'inception et la concentration d'air a été élaboré. Ce modèle permet également la détermination des différentes variables de l'écoulement.

Ce document est composé de huit chapitres :

Dans le premier chapitre est présentée la problématique de l'écoulement dans les canaux en marches d'escaliers. Un état de connaissance sur les différents régimes d'écoulement est donné.

Le chapitre deux traite l'approche expérimentale sur deux maquettes de canaux à motif périodique. Les essais nous ont permis de choisir une méthodologie d'étude des écoulements dans ce type de canaux.

Le chapitre trois est consacré à l'étude expérimentale des écoulements dans un canal à motif périodique (forte rugosité) à faible et à forte pentes.

Le chapitre quatre traite l'approche numérique du calcul du point d'inception dans les canaux en marches d'escaliers, approche basée sur les simplifications du modèle de Navier - Stokes.

Les équations de base de l'écoulement turbulent, les différents modèles de la turbulence, ainsi que les méthodes de fermeture des équations de Reynolds sont donnés dans le cinq chapitre.

Dans le chapitre six, une modélisation mathématique de l'écoulement extrêmement turbulent (skimming flow) est présenté. Les équations régissant l'écoulement turbulent sur un canal en marches d'escaliers sont alors données avec un développement judicieux de la turbulence.

Le septième chapitre est consacré à la modélisation numérique de l'écoulement très turbulent avec prise en considération du phénomène d'entraînement d'air et de la turbulence. Deux schémas numériques sont utilisés pour l'étude de l'écoulement à l'amont du point d'inception ainsi que la détermination de la position de ce dernier. Un développement numérique pour la résolution du système régissant la région d'écoulement très turbulent graduellement varié aéré est alors élaboré.

Dans le chapitre huit sont données les expérimentations numériques.

En premier lieu, une validation du modèle numérique est présentée. Cette validation a été faite sur la base d'une comparaison de nos résultats numérique à ceux obtenus par Keller sur un évacuateur de crue à profil lisse et les résultats expérimentaux de Vercheval obtenus sur le modèle réduit du coursier de l'évacuateurs de crue de M'Bali. Une série d'expérimentation numérique est présentée afin de montrer :

- ◆ l'impact des marches d'escaliers sur l'apparition du phénomène d'aération naturelle ;
- ◆ l'influence du débit et de la pente sur le développement de la couche limite.

Ensuite, nous avons présenté l'évolution des différents paramètres physiques intervenant dans un écoulement turbulent.

En dernier, nous avons traité une série d'expérimentation numérique concernant la détermination de la concentration d'air dans un écoulement graduellement varié aéré.

Et enfin, nous terminons par une conclusion générale sur tout le travail.

## **Chapitre I : La problématique des écoulements dans les canaux en marches d'escaliers**

A la différence des dispositifs classiques d'évacuation des eaux à profils lisses dans les barrages, les canaux et les évacuateurs en marches d'escaliers sont constitués d'une série de marches disposées le long du coursier reliant la crête au bassin de dissipation de l'énergie. Ils sont destinés à faire déverser des débits d'eau importants par-dessus les structures tout en contribuant à dissiper une quantité considérable de l'énergie de l'écoulement permettant ainsi de réduire d'autant les dimensions et les coûts des ouvrages de dissipation.

### **I. APERCU HISTORIQUE SUR LES CANAUX A MARCHES**

L'origine du concept d'évacuateur de crues en marches d'escaliers ou en gradins remonte aux ères lointaines de l'histoire. A travers ce parcours, différentes civilisations ont contribué au développement de l'art de construction des barrages et des déversoirs en gradins.

Ainsi, il est convenu que les évacuateurs de crues en gradins les plus anciens du monde sont ceux des deux barrages de la rivière de Khosre en Iraq. Ces barrages ont été construits en 696 avant Jésus-Christ par le roi Assyrien Semagherb pour servir à l'approvisionnement en eau de la capitale Nineveh. Vient par la suite la civilisation romaine qui a bâti des barrages à déversoirs en gradins qu'on retrouve en Syrie, en Libye et en Tunisie. Après la chute de l'empire romain, c'est les Musulmans lors de leur période d'expansion (7<sup>ème</sup> et 9<sup>ème</sup> siècles) qui, suite à l'acquisition du savoir-faire romain, nabatien, et sabien, ont construit des déversoirs de ce type. On les retrouve en Iraq (barrage d'Adheim, 1300), en Arabie saoudite et en Espagne (barrage de Mestella, 960 après J.C) (*Chanson*, 1994, 1998).

Suite à la reconquête espagnole par les catholiques, les ingénieurs espagnols ont continué à utiliser les constructions romaines et musulmanes. Ils ont, par ailleurs, conçu de nouveaux barrages munis d'évacuateurs en marches d'escaliers, citons, entre autres : le barrage d'Almansa (1384), le barrage d'Alicante (1594) et le barrage de Barraruecode Abajo. En 1791, ils ont construit le grand barrage de Puentes munis d'un évacuateur en marches d'escaliers, mais il s'est écroulé suite à l'altération des formations en 1802. Par ailleurs, durant leur conquête du nouveau monde, les Espagnols ont propagé leur technologie, notamment, au Mexique Central où plusieurs barrages à déversoirs en gradins ont été construits aux 18<sup>ème</sup> et 19<sup>ème</sup> siècles, certains ont servi jusqu'au 20<sup>ème</sup> siècle comme le barrage de Ascutney Millen USA (1834) (*Chanson*, 1998).

Au milieu du 17<sup>ème</sup> siècle, les ingénieurs français profitant de l'expérience espagnole ont introduit plusieurs canaux en marches d'escaliers dans le système d'alimentation du canal du Midi.

La majorité des barrages anciens ont débité les eaux à travers leurs crêtes et les déversoirs en gradins ont été sélectionnés soit pour assurer la stabilité, soit pour la commodité qu'ils présentent dans la construction ou pour les deux raisons simultanées.

Après la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, les évacuateurs en gradins étaient fréquemment sélectionnés pour, surtout, contribuer à la stabilité du barrage et pour augmenter la dissipation de l'énergie (*Chanson, 1994*).

Au début du 20<sup>ème</sup> siècle, on a favorisé la conception des bassins d'amortissement (concept du ressaut hydraulique) à l'aval des évacuateurs de crues.

Dans les années 70, les concepteurs ont redonné un grand intérêt au concept d'évacuateur de crues en marches d'escaliers suite à l'apparition de la nouvelle technique de construction en Béton Compacté au Rouleau (B.C.R.), Par ailleurs, les deux dernières décennies ont vu la construction de nombreux barrages de ce type à travers le monde. Le premier à voir le jour est le barrage «d'Upper Still-water» achevé en 1987 aux U.S.A. qui a permis la réduction de l'ouvrage de dissipation au pied aval du barrage et donc une économie considérable en quantité de matériaux.

## **II. PRESENTATION DES ECOULEMENTS DANS LES CANAUX EN MARCHES D'ESCALIERS**

Suivant les conditions d'écoulement et les considérations pratiques de conception, deux régimes d'écoulements peuvent avoir lieu sur ce genre d'ouvrages. Il s'agit de l'écoulement en nappe et de l'écoulement très turbulent.

Nous consacrerons cette partie du travail à faire une présentation générale de ces deux types d'écoulement, ainsi qu'à la description du phénomène d'aération naturelle qui apparaît à une certaine distance à l'aval du seuil déversant.

### **A. REGIME D'ECOULEMENT EN NAPPE**

L'écoulement en nappe est défini comme une succession de nappes en chutes libres, tel que l'eau bandit d'une marche à une autre d'une manière identique (figure I.1). Lors de l'écoulement, la lame d'eau déversante au niveau d'une marche frappe le giron de la marche inférieure totalement ou partiellement, selon les conditions d'écoulement.

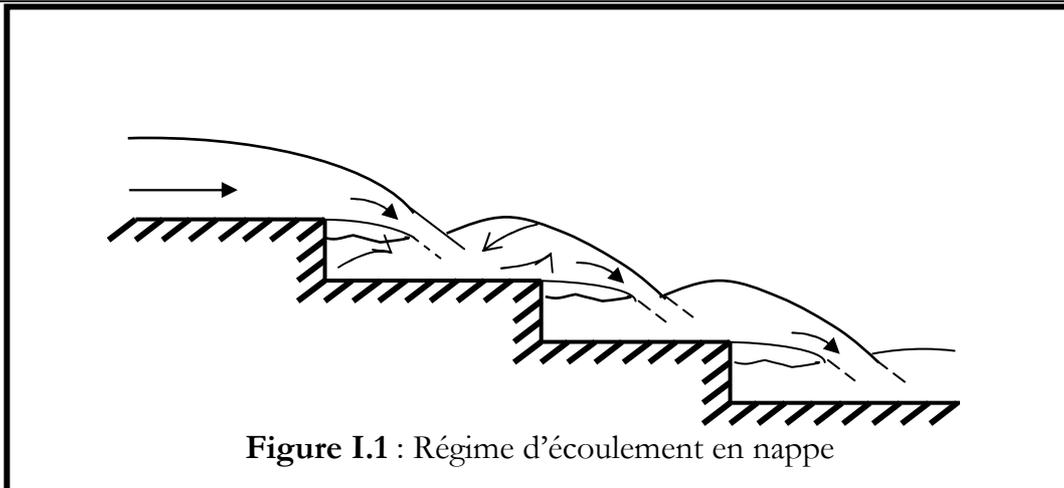


Figure I.1 : Régime d'écoulement en nappe

### 1°/ Différents régimes d'écoulement en nappe

Le régime d'écoulement en nappe peut être classé en trois sous régimes :

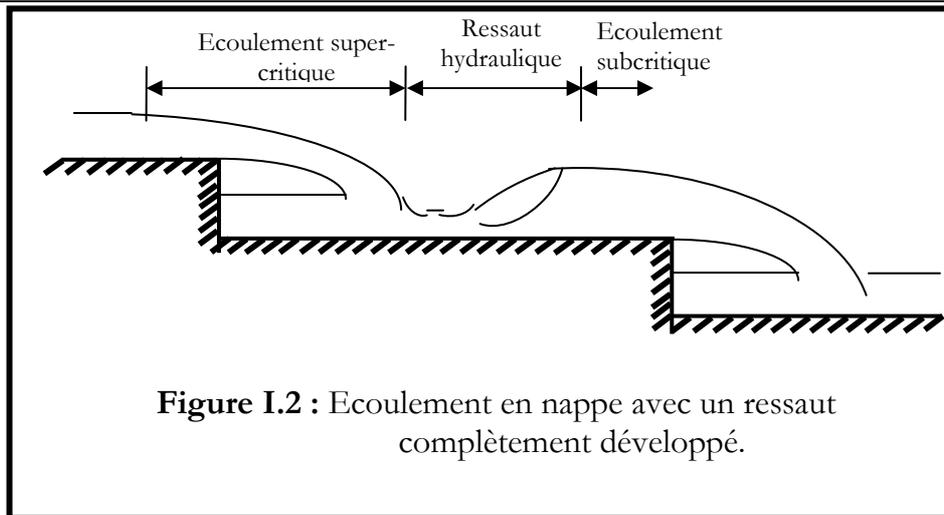
- Écoulement en nappe avec formation d'un ressaut complètement développé ;
- Écoulement en nappe avec formation d'un ressaut partiellement développé ;
- Écoulement en nappe sans formation de ressaut.

#### a. Définition d'un ressaut Hydraulique

Le ressaut hydraulique se produit si un écoulement passe (brusquement) du régime (amont) sur-critique  $F_1 > 1$ , au régime (aval) sous critique,  $F_2 < 1$ . Il se manifeste par une brusque surélévation (discontinuité) du niveau d'eau,  $(h_2 - h_1)$ , sur une courte distance. Il est accompagné par des mouvements très turbulents avec des instabilités à la surface. Il provoque une dissipation importante d'énergie mécanique et se présente souvent sous la forme d'une barre d'écume déferlante en rouleaux (*Graf*, 1993).

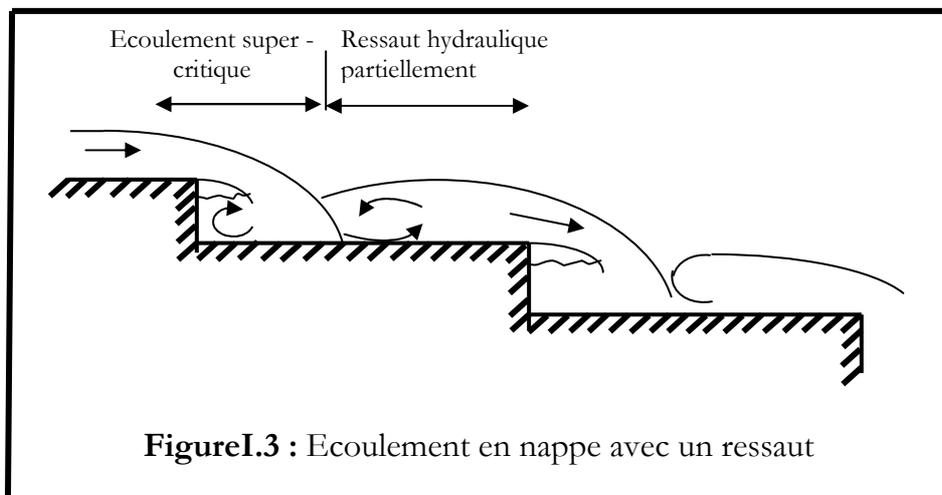
#### b. Écoulement en nappe avec formation d'un ressaut complètement développé

Ce type d'écoulement se présente comme une alternance entre un régime d'écoulement supercritique et un régime d'écoulement subcritique le long d'une marche d'escaliers. Cette transition se produit par la formation d'un ressaut hydraulique complètement développé (figure I.2).



### c. Ecoulement en nappe avec formation d'un ressaut partiellement développé

Dans ce cas, le ressaut hydraulique atteint le bord aval de la marche où il se forme et se jette dans la marche suivante avant qu'il ne se développe complètement. Le régime sub-critique n'est pas observé (figure I.3).



### d. Ecoulement en nappe sans formation de ressaut

Contrairement aux deux cas précédents, cet écoulement ne développe pas de ressaut hydraulique. L'écoulement étant critique le long de la marche, il s'accélère d'abord lors du jet pour ralentir par la suite (figure I.4).

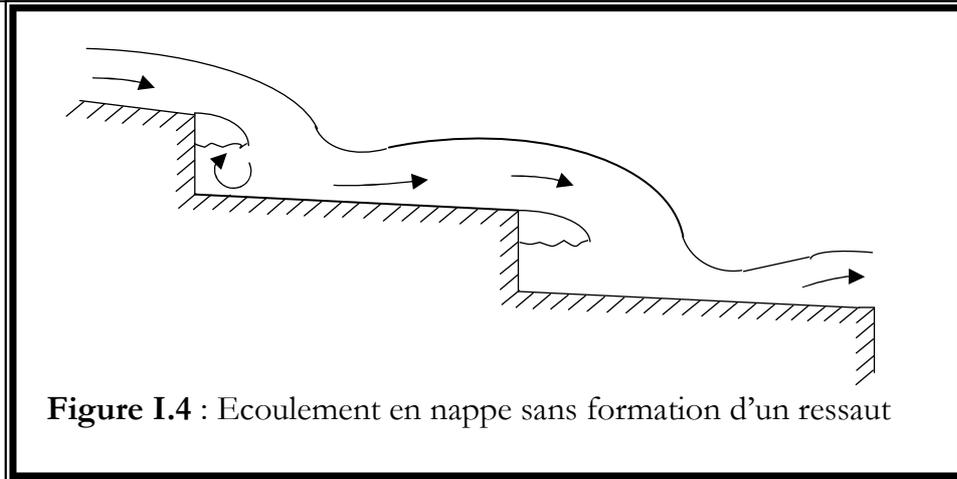


Figure I.4 : Écoulement en nappe sans formation d'un ressaut

## 2°/ Caractéristiques hydrauliques de l'écoulement en nappe

**Moore** en 1943 et **Rand** en 1955, ont étudié une structure à une seule marche. Ils ont remarqué que les conditions d'écoulement tout près de l'extrémité de la marche change d'un écoulement sous critique en écoulement critique en certaines sections se situant à une faible distance en amont du bord de la marche. La profondeur de l'écoulement ( $h_b$ ) est donnée par :  $h_b = 0,715 d_c$  (I-1)

avec,  $d_c$  : la hauteur d'eau critique (figure I.5).

A l'aval du bord, la trajectoire de l'écoulement peut être calculée en utilisant soit le potentiel de l'écoulement soit des méthodes numériques complexes ou encore des méthodes d'approximations. Selon **White** (1943), l'application de l'équation de la quantité de mouvement à la base de la structure donne (**White**, 1943) :

$$\frac{h_{r1}}{d_c} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{3}{2^{3/2}} + \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{h}{d_c}}} \quad (\text{I-2})$$

avec,  $h_{r1}$ , profondeur de l'écoulement à la section 1 et  $h$  la hauteur de la marche (figure I.5).

La charge totale à la section 1 peut être exprimée par :

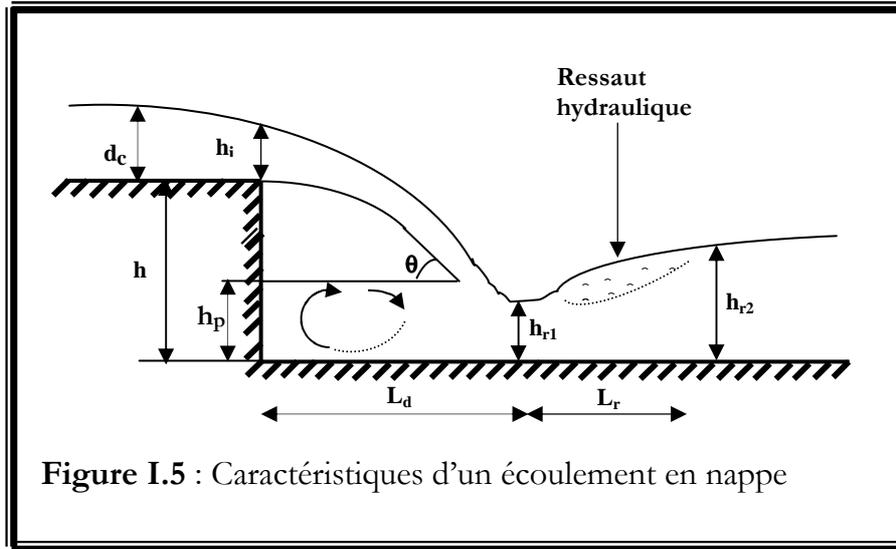
$$\frac{H_{r1}}{d_c} = \frac{h_{r1}}{h_c} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_c}{h_{r1}} \right)^2 \quad (\text{I-3})$$

La profondeur de l'écoulement et la charge d'eau totale à la section 2 sont données par les équations régissant le ressaut hydraulique :

$$\frac{h_{r2}}{h_{r1}} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8F_{r1}^2} - 1 \right) \quad (I-4)$$

$$\frac{(H_{r1} - H_{r2})}{d_c} = \frac{(h_{r2} - h_{r1})^3}{4h_{r1} h_{r2} d_c} \quad (I-5)$$

où,  $F_{r1} = \frac{q}{\sqrt{g \cdot h_{r1}^3}}$  est le nombre de Froude à la section 1.



- Calcul des tirants d'eau ( $h_{r1}$ ,  $h_{r2}$  et  $h_p$ )

**Rand** (1955) a proposé un système d'équations empiriques définissant les différents paramètres (figure I.5).

➤ Tirant d'eau dans la section 1 ( $h_{r1}$ ) :

$$\frac{h_{r1}}{h} = 0,54 \left( \frac{d_c}{h} \right)^{1,275} \quad (I-6)$$

➤ Tirant d'eau dans la section 2 ( $h_{r2}$ ) :

$$\frac{h_{r2}}{h} = 1,66 \left( \frac{d_c}{h} \right)^{0,81} \quad (I-7)$$

➤ Hauteur du nid d'eau ( $h_p$ ) :

$$\frac{h_p}{h} = \left( \frac{d_c}{h} \right)^{0,66} \quad (I-8)$$

$$\frac{L_d}{h} = 4,30 \left( \frac{d_c}{h} \right)^{0,81} \quad (\text{I-9})$$

avec,  $h_p$  : la hauteur d'eau dans la marche (régime en nappe) et  $L_d$  : la longueur du jet dans la marche.

En utilisant les équations (I-1) et (I-8), l'épaisseur de la nappe  $h_i$ , sa vitesse  $v_i$  et l'angle  $\theta$  qu'elle fait avec l'horizontale au niveau de la section de l'impact, peuvent être corrélés pour aboutir aux expressions suivantes :

$$\frac{h_i}{h} = 0,69 \left( \frac{d_c}{h} \right)^{1,483} \quad (\text{I-10})$$

$$\frac{v_i}{v_c} = 1,46 \left( \frac{d_c}{h} \right)^{-0,483} \quad (\text{I-11})$$

$$\tan \theta = 0,84 \left( \frac{d_c}{h} \right)^{-0,586} \quad (\text{I-12})$$

où :  $v_c$  est la vitesse critique de l'écoulement.

**Rousse** (1943), **Rajaratnam** et **Muralidhar** (1968), **Hager** (1983) et **Marchi** (1993) ont abouti au résultat suivant :

$$\frac{h_{r1}}{d_c} = \frac{2F_r^{2/3}}{1 + \frac{2}{F_r^2} + \sqrt{1 + \frac{2}{F_r^2} \left( 1 + \frac{h}{d_c} F_r^{2/3} \right)}} \quad (\text{I-13})$$

où,  $F_r$  est le nombre de Froude pour l'écoulement supercritique à l'amont du bord de la chute.

La charge critique est définie par l'expression suivante :

$$\left( \frac{d_c}{h} \right)_{cr} = 0,09 \left( \frac{h}{l} \right)^{-1,28} \quad (\text{I-14})$$

dans laquelle  $l$  est la longueur de la marche.

L'écoulement en nappe avec un ressaut pleinement développé a lieu pour une charge inférieure à la charge critique :

$$\frac{d_c}{h} < \left( \frac{d_c}{h} \right)_{cr}$$

L'équation (I-14) est vérifiée pour :  $0,2 \leq \frac{h}{l} \leq 6$

**Hager** et ses collaborateurs (1990) ont estimé la longueur du ressaut hydraulique pleinement développé à l'aval de l'impact de la nappe comme suit (**Chanson**, 1994) :

$$\frac{L_r}{h_{r1}} = 8 \left( \left( \frac{d_c}{h_{r1}} \right)^{3/2} - 1,5 \right) \quad (\text{I-15})$$

où,  $L_r$  est la longueur du ressaut hydraulique.

### 3°/ Dissipation de l'énergie

Pour un écoulement en nappe avec ressaut pleinement développé, la perte de charge sur toute marche intermédiaire est égale à la hauteur de cette dernière (**Chanson**, 1994).

La dissipation d'énergie se produit par la fragmentation du jet dans l'air, et avec la formation du ressaut hydraulique sur la marche. La perte de charge totale le long de la chute  $\Delta H$  est égale à la différence entre la charge maximale  $H_{\max}$  et la charge résiduelle à l'aval de l'extrémité du canal  $H_{r1}$  (équation I-3). Son expression adimensionnelle est (**Chanson**, 1994) :

$$\frac{\Delta H}{H_{\max}} = 1 - \left( \frac{\frac{d_1}{d_c} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_c}{d_1} \right)^2}{\frac{3}{2} + \frac{H_{\text{bar}}}{d_c}} \right) \quad \text{Evacuateur sans vanne} \quad (\text{I-16})$$

$$\frac{\Delta H}{H_{\max}} = 1 - \left( \frac{\frac{d_1}{d_c} + \frac{1}{2} \left( \frac{d_c}{d_1} \right)^2}{\frac{H_{\text{bar}} + H_0}{d_c}} \right) \quad \text{Evacuateur avec vanne} \quad (\text{I-17})$$

Pour un canal sans vanne, la charge maximale disponible est :

$$H_{\max} = H_{\text{bar}} + 1,5d_c.$$

Pour un canal avec vanne, la charge maximale disponible est :

$$H_{\max} = H_{\text{bar}} + H_0.$$

avec,  $H_{\text{bar}}$  charge à la crête du barrage et  $H_0$  élévation de la surface libre du réservoir au dessus de la crête du déversoir.

#### 4. Conception d'évacuateurs de crues avec régime d'écoulement en nappe

**Stephenson** (1991) a suggéré que la plupart des conditions appropriées à un écoulement en nappe sont :

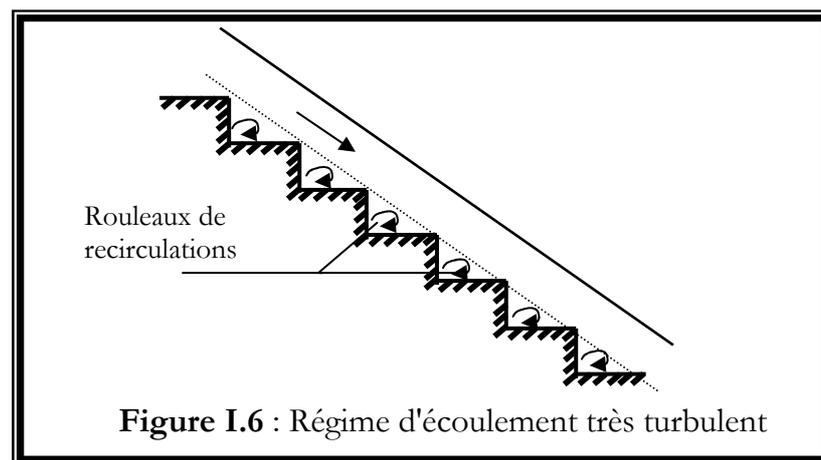
$$\begin{cases} \frac{h}{l} < 0,20 \\ \frac{d_c}{h} < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Les recommandations de Stephenson impliquent relativement de grandes marches et des pentes douces.

#### B. REGIME D'ÉCOULEMENT EXTREMEMENT TURBULENT

Contrairement au régime d'écoulement en nappe où la forme de la nappe épouse approximativement le profil des marches, en régime turbulent l'eau s'écoule en un courant fort, cohérent et turbulent au-dessus des marches ; on ne distingue plus la lame d'eau déversante et les marches sont totalement immergées.

D'après **Stephenson** (1991), les études d'**Esserey** et **Horner** (1978) ont indiqué que dans le cas d'un écoulement turbulent, l'eau coule sur la face en escaliers comme un cours d'eau régulier et les marches d'escaliers représentent une forme de frottement interne provoquant le ralentissement de l'écoulement. Les bords extrêmes des marches forment ainsi une pseudo-base au-dessous de laquelle se développent des rouleaux de recirculations occupant l'espace creux entre les marches et le courant (figure I.6). Ces rouleaux de recirculations sont maintenus par la transmission des contraintes de cisaillement du fluide.



Nous avons nous même étudié ce type d'écoulement expérimentalement sur modèle physique et théoriquement par voie numérique. L'étude de ces écoulements fortement turbulents sera l'objet de cette thèse.

**1°/ Début du régime très turbulent**

Dans le cas de faibles débits et de pentes douces, l'écoulement se fait en petits jets, on aura ainsi affaire à un régime d'écoulement en nappe. L'augmentation du débit ou de la pente induit le régime d'écoulement très turbulent. Le début du régime d'écoulement très turbulent est défini par la disparition des cavités au-dessous des nappes libres, l'eau s'écoule ainsi, en un filet quasi homogène. Ce phénomène présente quelques similitudes avec la submersion des cavités dans les dispositifs d'aération et des cavités ventilées.

Au cours de son étude, Chanson a réanalysé les données d'**Essery** et **Horner** (1978), de **Peyras** et ses collaborateurs (1991), de **Degoutte** et ses collaborateurs (1992), et de **Beitz** et **Lawless** (1992) (tableau I-1). Pour ces derniers, le régime d'écoulement extrêmement turbulent se produit pour un débit supérieur à la valeur critique définie comme suit :

$$\frac{(d_c)_{\text{début}}}{h} = 1,06 - 0,47 \frac{h}{l} \quad \text{avec, } l > 0,44h \quad (\text{I-18})$$

où,  $h$  et  $l$  représentent respectivement la hauteur et la largeur des marches (m),  $(d_c)_{\text{début}}$  : la hauteur critique correspondant au début de l'écoulement très turbulent.

L'équation qui exprime le rapport  $d_c/h$  dans le régime d'écoulement en nappe est :

$$\frac{d_c}{h} = 0,09 \left( \frac{h}{l} \right)^{-1,28} \quad (\text{I-19})$$

L'équation (I-18) est déduite pour des valeurs de  $h/l$  allant de 0.2 à 1.25, c'est à dire pour une pente allant de 11° à 52°, et il n'y a aucune information sur sa validité au-delà de ce rang de valeurs.

La figure I.7 montre une comparaison entre les équations (I-14) et (I-18) et les données expérimentales résumées sur le tableau I-1.

**Tableau I-1** : Début de l'écoulement extrêmement turbulent sur un évacuateur en marches d'escaliers

$h/l$	$d_c/h$	Référence
0,20	1,15	Essery et Horner (1978)
0,42	0,81	
0,53	0,82	
0,74	0,82	
0,84	0,80	
0,33	0,74	Peyras et ses collaborateurs (1991) Degoutte et ses collaborateurs (1992)
0,50	0,67	
1,00	0,61	
1,25	0,40	Beitz et Lawless (1992)

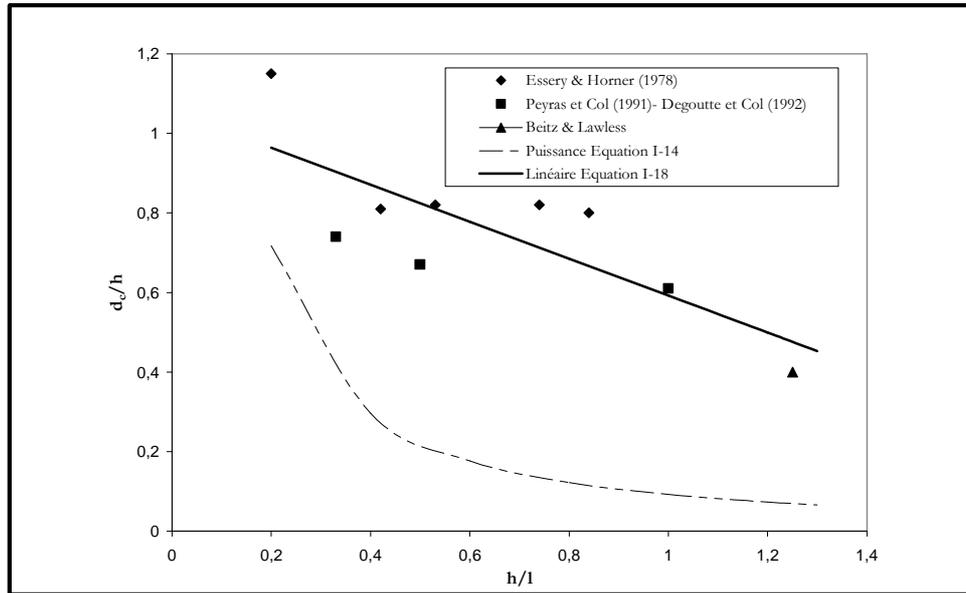


Figure I.7 : Comparaison des résultats des différents chercheurs (tableau I-1)

2°/ Phénomène d'aération naturelle de l'écoulement

a. Mécanisme d'entraînement d'air

Une première description du mécanisme d'entraînement d'air fut présentée par **Straub** et **Anderson** en 1958. Ils ont observé que l'aération naturelle de l'écoulement commence dans une zone où la couche limite atteint la surface de l'eau.

Ce phénomène trouve son origine dans les grandes vitesses acquises par le fluide. En effet, les composantes transversales des vitesses peuvent devenir si grandes qu'elles arrivent à surmonter les forces de tensions superficielles et de gravité. Il en résulte une éjection de gouttelettes d'eau dans l'air. En retombant dans l'écoulement, la goutte ouvre la surface de l'eau et la referme sous l'action de la tension superficielle. La goutte entraîne avec elle une bulle d'air qui se trouve ainsi emprisonnée dans l'écoulement (figure I.8) (**Sinniger & Hager**, 1989).

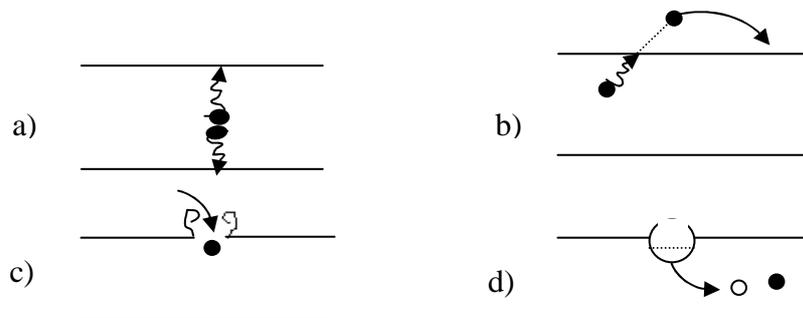


Figure I.8 : Mécanisme d'entraînement d'air

**b. Entraînement d'air en régime d'écoulement extrêmement turbulent**

Dans le cas d'un régime d'écoulement extrêmement turbulent (skimming flow) sur les évacuateurs de crues en marches d'escaliers, les conditions de l'aération de la surface libre sont très souvent satisfaites et de grandes quantités d'air sont entraînées le long du canal. Sur le tronçon amont, il apparaît une zone d'écoulement lisse, il n'y a pas d'entraînement d'air. Le phénomène de turbulence est généré au voisinage de la couche limite qui se développe graduellement à partir du seuil du déversoir. Au moment où cette couche atteint la surface libre en un point appelé point d'inception, la turbulence provoque une aération naturelle de l'écoulement qui rend l'eau bouillante et blanche. Ainsi, le fluide biphasique (mélange : eau + air) s'étend graduellement à travers l'écoulement. Si le canal est suffisamment long, l'écoulement devient uniforme, tel que pour un débit donné, la profondeur de l'écoulement, la concentration d'air et la distribution des vitesses restent pratiquement constantes. En somme, trois zones distinctes sont observées dans l'écoulement turbulent (figure I.9). Il s'agit de :

- La zone de l'écoulement d'eau claire ;
- La zone de l'écoulement graduellement varié aéré ;
- La zone de l'écoulement uniforme aéré.

L'avantage principal de la présence de l'air dans les écoulements à grandes vitesses et qu'il permet de ralentir ou de prévenir les dommages dus à cavitation. En fait, des chercheurs ont indiqué que pour des vitesses atteignant 35 m/s, une teneur en air de l'ordre de 6 à 8 % près de la paroi peut empêcher le phénomène de l'érosion par cavitation.

**c. Point d'inception**

Les caractéristiques du point d'inception (point de début de l'entraînement d'air) sont :  $L_I$  qui représente la distance séparant le point de commencement de l'ascension de la couche limite du point d'inception et  $d_I$  qui représente la hauteur d'eau au point d'inception (figure I.9).

Dans les évacuateurs de crues en marches d'escaliers, la position du point de début de l'entraînement d'air est fonction du débit, de la conception de la crête, de la rugosité du fond, de la géométrie des marches et du profil du déversoir. La majorité des crêtes est ajustée au profil Creager (barrage M'Bali) ou au profil WES (barrage Monksville).

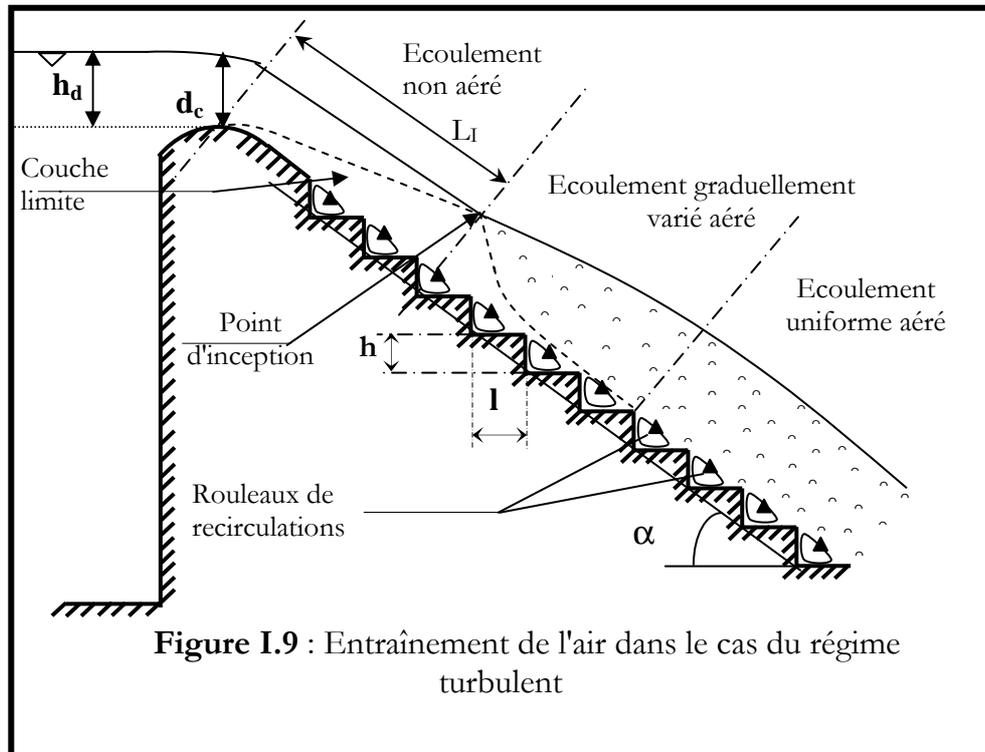


Figure I.9 : Entrâinement de l'air dans le cas du régime turbulent

D'après **Chanson**, les analyses statistiques des données de plusieurs chercheurs ont indiqué que les propriétés de l'écoulement sont bien représentées par les formules suivantes (**Chanson**, 1993) :

$$\frac{L_I}{k_s} = 9,72 (\sin \alpha)^{0,08} (F_r)^{0,71} \quad (\text{I-20})$$

$$\frac{d_I}{k_s} = \frac{0,40}{(\sin \alpha)^{0,04}} (F_r)^{0,6} \quad (\text{I-21})$$

L'équation  $\frac{d_I}{L_I} = 0,02 (\sin \alpha)^{0,11}$  donne :

$$\frac{d_I}{L_I} = 0,06 (\sin \alpha)^{0,13} \left( \frac{L_I}{k_s} \right)^{-0,17} \quad (\text{I-22})$$

où,  $k_s = h \cos \alpha$  est la rugosité,  $\alpha$  est l'angle d'inclinaison du coursier de l'évacuateur ( $27^\circ < \alpha < 53^\circ$ ), et  $F_r = \frac{q}{\sqrt{g \sin \alpha k_s^3}}$  est le nombre de Froude défini en terme de

$k_s$ . Pour les évacuateurs à profils lisses, nous avons :

$$\frac{L_I}{k_s} = 13,6 (\sin \alpha)^{0,08} (F_r)^{0,71} \quad (\text{I-23})$$

$$\frac{d_I}{k_s} = \frac{0,22}{(\sin \alpha)^{0,04}} (F_r)^{0,64} \quad (\text{I-24})$$

$$\frac{d_I}{L_I} = 0,02 (\sin \alpha)^{0,11} \left( \frac{L_I}{k_s} \right)^{-0,10} \quad (\text{I-25})$$

La comparaison entre les équations (I-20) et (I-23) montre que l'application des formules des évacuateurs à profils lisses sur les évacuateurs en marches d'escaliers va surestimer la position du point du début de l'aération naturelle. **Chanson** indique que le taux de croissance de la couche limite sur les canaux à marches est approximativement 2,8 fois plus grand que sur les canaux à profils lisses.

### 3°/Écoulement uniforme aéré

Si l'évacuateur en marches d'escaliers est assez long, les conditions d'un écoulement uniforme sont atteintes avant le pied de celui-ci.

#### a. Définitions

- ◆ **Concentration en air locale**: elle est définie comme étant le volume d'air par unité volume d'air et d'eau :

$$C(y) = \frac{\text{volume (air)}}{\text{volume (air + eau)}} \quad 0 < C < 90\% \quad (\text{I-26})$$

- ◆ **Profondeur d'eau de référence  $h_r$** : elle est définie comme suit :

$$h_r = \int_0^{y_{90}} (1 - C) dy \quad (\text{I-27})$$

avec,  $C$  : la concentration locale d'air fonction de  $y$  mesuré perpendiculairement à la surface du canal,  $y_{90}$  : Profondeur d'eau de référence définie pour  $C = 90\%$ .

- ◆ **Concentration moyenne  $C_{\text{moy}}$** : sur une section transversale à l'écoulement, elle est définie comme :

$$(1 - C_{\text{moy}}) y_{90} = d_n \quad (\text{I-28})$$

avec,  $C_{\text{moy}} = \frac{1}{y_{90}} \int_0^{y_{90}} C(y) dy$ , ce qui nous donne :

$$C_{\text{moy}} = 1 - \frac{h_r}{y_{90}} \quad (\text{I-29})$$

♦ **Vitesse moyenne de l'écoulement,  $U$** : dans une section transversale est définie par :  $U = q / h_r$  (I-30)

♦ **Flux de masse** : c'est le débit massique par unité de surface, noté en général  $F_m$  :

Pour l'eau :  $F_{me} = \rho_e U_e (1 - C)$  (I-31)

Pour l'air :  $F_{ma} = \rho_a U_a C$  (I-32)

Le flux de masse total est donc :

$$F_m = \rho_e U_e (1 - C) + \rho_a U_a C \quad (I-33)$$

Ainsi la masse volumique du mélange ( $\rho_m$ ) est définie par :

$$\rho_m = \rho_e (1 - C) + \rho_a C \quad (I-34)$$

### b. Distribution de la concentration en air

En 1983, **Wood** et ses collaborateurs ont analysé les mesures expérimentales obtenues par **Straub** et **Anderson** (1958), pour des écoulements uniformes et a montré que les profils de distribution de la concentration en air sont indépendants des conditions amont (débit, profondeur et rugosité) et sont uniquement fonction de la pente du canal.

De plus en 1984, **Wood**, a développé un modèle simple pour représenter la diffusion des bulles d'air dans un écoulement extrêmement turbulent, et a montré que la distribution de la concentration en air s'exprime par :

$$C = \frac{B'}{B' + e^{-(G' \cos \alpha y'^2)}} \quad (I-35)$$

avec :  $\alpha$  pente du canal,  $y'$  la profondeur adimensionnelle :  $y' = y/y_{90}$  et  $B'$  et  $G'$  : sont des constantes fonction de la concentration moyenne en air.

Cependant, près de la surface du coursier, les données de **Cain** (1978) et **Chanson** (1988) s'écartent de l'équation (I-35), et montrent que la concentration en air tend vers zéro à la paroi solide ( $C_{(y=0)} = 0$ ).

L'existence d'une couche limite de concentration en air a été prouvée par les données de **Bogdevich** (1977), **Madavan** (1984) et **Marie** (1991), qui ont étudié l'injection de micro-bulles dans un écoulement de couche limite turbulente.

L'analyse des données obtenues par **Bogdevich** et ses collaborateurs (1977) et **Cain** (1978) montre que la distribution de la concentration en air peut être estimée dans la couche limite de concentration en air par :

$$C = C_b \left( \frac{y}{\delta_{ab}} \right)^{0,27} \quad (\text{I-36})$$

où,  $\delta_{ab}$  : est l'épaisseur de la couche limite de concentration en air, et  $C_b$  est :

$$C_b = \frac{B'}{B'+1}$$

En résumé deux régions sont à distinguer au niveau d'une section transversale de l'écoulement uniforme aéré :

- Prés de la paroi solide :  $0 \leq y \leq \delta_{ab}$ .
- Loin de la paroi solide :  $\delta_{ab} \leq y \leq y_{90}$ .

### c. Concentration moyenne en air ( $C_{moy}$ )

Une analyse des mesures obtenues par **Straub** et **Anderson** (1958), montre que la concentration moyenne en air, pour des écoulements uniformes ( $C_n$ ) est définie par :

$$C_n = \frac{1}{y_{90}} \int_0^{y_{90}} C(y) dy \quad (\text{I-37})$$

est indépendante du nombre de Froude (**Chanson**, 1989, **Wood**, 1985).

Pour des pentes inférieure à  $50^\circ$ , une relation simple entre la pente ( $\alpha$ ) et la concentration en air moyenne ( $C_n$ ) a été proposée :

$$C_n = 0,9 \sin \alpha \quad \text{pour } \alpha < 50^\circ \quad (\text{I-38})$$

**Hartung** et **Scheuerlein** (1970), ont effectué des mesures sur des écoulements avec des rugosités importantes ( $k_s$  entre 0,10 et 0,35m), pour des pentes de  $6^\circ$  à  $34^\circ$ . Ces rugosités induisent un écoulement fortement turbulent, avec entraînement d'air.

**Knauss** (1979) a indiqué que le taux d'aération exprimée en terme de concentration moyenne est :

$$C_n = 1,44 \sin \alpha - 0,08 \quad (\text{I-39})$$

### d. Distribution de vitesse

Les mesures de vitesses à l'intérieur d'un écoulement auto-aéré obtenues sur le barrage d'Avièmore (Nouvelle Zélande) par **Cain** (1978) et **Cain** et **Wood** (1981), ont montré que la distribution de vitesse peut être approximée par :

$$\frac{U}{U_{90}} = \left( \frac{y}{y_{90}} \right)^{1/N} \quad (\text{I-40})$$

avec,  $N$  : exposant de la loi de vitesse estimé égale à 6 pour les données de **Cain**.

Bien que les mesures de **Cain** (1978) aient été obtenues pour des écoulements graduellement variés et pour des concentrations en air moyennes variant de 0 à 50%, il est clair que la distribution adimensionnelle de la vitesse ( $U/U_{90}$ ) est indépendante de la concentration, et il est raisonnable de supposer que ce résultat s'applique aussi bien aux écoulements uniformes.

La vitesse de référence  $U_{90}$  se déduit à partir de l'équation de conservation de la masse (pour l'eau) combinée à l'équation (I-40) comme suit :

$$\left. \begin{aligned} q &= \int_0^{y_{90}} (1-C) U dy \\ \frac{q}{U_{90} y_{90}} &= \int_0^1 (1-C) y^{1/N} dy \end{aligned} \right\} \quad (I-41)$$

$q$  : étant le débit d'écoulement d'eau par unité de largeur ( $m^2/s$ ).

Les valeurs théoriques du rapport  $\frac{q}{U_{90} y_{90}}$  sont estimées approximativement analytiquement par la relation suivante (**Chanson**, 1997):

$$\frac{q}{U_{90} y_{90}} = - 0,883 C_n + 0,835 \quad (I-42)$$

#### e. Coefficient de perte de charge

- **Cas d'écoulement uniforme aéré ( $f_e$ )**

La présence de bulles d'air n'affecte en rien la distribution de vitesse, mais devrait tendre à réduire les contraintes de cisaillement entre les lignes de courant et donc le coefficient de frottement  $f$  (**Wood**, 1983 et **Chanson**, 1992).

L'équation de la conservation de l'énergie pour un écoulement uniforme, exprime l'équilibre entre la composante longitudinale de la force de gravité et la force de frottement par :

$$\tau_0 = \rho g R_H \sin \alpha \quad (I-43)$$

avec,  $\tau_0$  : contrainte de frottement ( $N/m^2$ ),  $R_H$  : Rayon hydraulique (m).

Par analogie à l'écoulement d'eau claire,  $\tau_0$  est définie par :

$$\tau_0 = \frac{f_e}{8} \rho U_n^2 \quad (I-44)$$

avec,  $f_e$  : facteur de **Darcy** de l'écoulement uniforme aéré,  $U_n$  : vitesse moyenne de l'écoulement uniforme aéré (m/s).

En combinant les deux équations (I-43) et (I-44), il en résulte :

$$f_e = \frac{2 g \sin \alpha h_n^2 D_H}{q^2} \quad (\text{I-45})$$

avec,  $h_n$  : profondeur de l'écoulement uniforme aéré (m) et  $D_H$  : diamètre hydraulique (m), égal à  $4R_H$ .

Une analyse dimensionnelle du coefficient de frottement d'un écoulement indique que le rapport ( $f_e/f$ ) est fonction de la concentration en air moyenne ( $C_{\text{moy}}$ ), du nombre de Reynolds ( $R_e$ ) et de la rugosité ( $k_s$ ) :

$$\frac{f_e}{f} = F\left(C_{\text{moy}}, R_e, \frac{k_s}{D_H}\right) \quad (\text{I-46}) \text{ avec,}$$

$f$  : coefficient de frottement de l'écoulement non aéré.

Dans le cas d'écoulement uniforme :  $C_{\text{moy}} = C_n$ .

#### • Influence du nombre de Reynolds

Pour les mesures obtenues par **Jevdjovich** et **Levin** (1953), **Straub** et **Anderson** (1958) et **Aivazyam** (1986), l'équation (I-46) peut être estimée par (**Chanson, Toombes**, 2002) :

$$\frac{f_e}{f} = 0,307 + 0,1446 \log_{10}(R_e) - 1,44 C_{\text{moy}} \quad (\text{I-47})$$

avec :  $R_e$ , le nombre de Reynolds donné par :  $R_e = 4 \frac{U R_H}{\nu}$  où,  $\nu$  est la viscosité cinématique de l'eau.

Cette équation est obtenue pour  $C_n > 0,25$  et des nombres de Reynolds compris entre  $2,10^5$  et  $4,10^7$ .

#### • Influence de la rugosité

Une analyse détaillée des données expérimentales indique que le rapport ( $f_e/f$ ) dépend peu de la rugosité.

Complétée par les mesures obtenues par **Hartung** et **Cheurlein** (1970) sur les canaux à pentes raides et à grandes rugosités ( $0,02 < k_s/D_H < 0,2$ ), l'analyse de ces données implique une réduction des pertes par frottement due à la présence de l'air qui peut être exprimée par :

$$\frac{f_e}{f} = \frac{1}{\left(1 - 3,2 \sqrt{f} \operatorname{Log}_{10} (1 - C_n)\right)^2} \quad (\text{I-48})$$

Chanson a réanalysé les données expérimentales obtenues sur évacuateurs lisses et a présenté une formule d'estimation du rapport ( $f_e / f$ ) par (**Chanson & Toombes**, 2002) :

$$\frac{f_e}{f} = 0,5 \left( 1 + \tanh \left( 0,63 \frac{0,514 - C_n}{C_n (1 - C_n)} \right) \right) \quad (\text{I-49})$$

- **Cas d'écoulement non aéré (f)**

Le coefficient linéaire de perte de charge de **Darcy-Weisbach** ( $f$ ), pour un écoulement uniforme à surface libre non aéré peut être obtenu par la relation de **Coolebrok-White** adaptée aux écoulements dans les canaux comme suit :

$$\sqrt{\frac{I}{f}} = -2 \operatorname{Log}_{10} \left( \frac{k_s / R_H}{a_f} + \frac{b_f}{R_e \sqrt{f}} \right) \quad (\text{I-50})$$

avec,  $12 < a_f < 15$  et  $0 < b_f < 6$ , établies pour des sections de formes différentes, ainsi que pour divers types de rugosités.

Pour un canal rectangulaire infiniment large, on utilise en général :  $a_f = 12$  et  $b_f = 3,4$ .

Les canaux naturels et artificiels sont en général de dimension importante, en conséquence, le nombre de Reynolds et la rugosité relative ( $k_s / 4 * R_H$ ) ont des valeurs élevées. La valeur du coefficient de frottement pour un écoulement turbulent rugueux est alors donnée par :

$$\sqrt{\frac{I}{f}} = 2 \operatorname{Log}_{10} \left( \frac{a_f}{k_s / R_H} \right) \quad (\text{I-51})$$

Pour un canal rectangulaire large, nous avons :  $R_H \equiv h$

d'où :

$$\sqrt{\frac{I}{f}} = 2 \operatorname{Log}_{10} \left( \frac{d}{k_s} \right) + 2,2 \quad (\text{I-52})$$

si,  $k_s = 0$ , la relation (I-50) se réduit au cas d'un écoulement turbulent lisse à :

$$\sqrt{\frac{I}{f}} = 2,03 \operatorname{Log}_{10} \left( \frac{R_e \sqrt{f}}{4} \right) + 0,32 \quad (\text{I-53})$$

Dans le cas des canaux en marches d'escaliers, **Rajaratnam** (1990) a proposé pour le calcul du coefficient de frottement de l'écoulement non aéré ( $f$ ), la relation suivante :

$$f = \frac{8 g \sin \alpha h_n^3}{q^2} \quad (\text{I-54})$$

avec,  $h_n$ : hauteur de l'écoulement uniforme non aéré (m) donnée par :

$$h_n = \left( \frac{q^2}{K_s^2 \sin \alpha} \right)^{3/10} \quad \text{où, } K_s : \text{ est le coefficient de Strickler.}$$

#### f. Calcul pratique pour l'ingénieur

Pour un écoulement uniforme avec entraînement d'air, la géométrie du coursier (pente, rugosité, largeur) et le débit permettent de calculer les caractéristiques de l'écoulement.

A partir de la pente du coursier  $\alpha$ , les équations (I-38) et (I-39) donnent une estimation de la concentration en air moyenne  $C_n$ , et connaissant le coefficient de perte de charge de l'écoulement non aéré, la valeur du coefficient de frottement pour un écoulement aéré est fournie par les équations (I-48) et (I-49).

La profondeur uniforme de référence  $h_n$  est déduite de l'équation (I-45) :

$$h_n = \left( \frac{q^2 f_e}{8 g \sin \alpha} \right)^{1/3} \quad (\text{I-55})$$

Il en résulte alors :

- La profondeur caractéristique  $y_{90}$  (équation I-28),
- La vitesse moyenne de l'écoulement  $U$  (équation I-30),
- La vitesse de référence  $U_{90}$  (équation I-41),
- Les profils de vitesses (équation I-40) et les profils de concentration (équations I-38 et I-39).

#### 4°/ Écoulement graduellement varié aéré

Entre le point d'inception, début d'entraînement d'air, et la région d'écoulement uniforme, existe une zone non uniforme aérée appelée région d'écoulement graduellement varié aéré.

Dans cette région, la concentration en air,  $C_{moy}$ , la profondeur de l'eau,  $d$ , et la vitesse moyenne,  $U$ , varient d'une section à une autre.

**Wood** en 1985, a montré que si l'on suppose :

1. Un taux d'entraînement d'air faible,
2. Une distribution de pression hydrostatique,
3. Des variations graduelles de vitesse,

L'équation de la conservation de la masse pour la phase air et l'équation d'énergie, fournissent deux équations permettant de calculer la concentration en air ( $C_{\text{moy}}$ ) et la profondeur de référence ( $d$ ) en tout point de l'écoulement graduellement varié aéré.

### Conclusion

Dans ce chapitre, sur la base des travaux antérieurs, nous avons mis en évidence les deux régimes d'écoulements apparaissant sur un canal en marches à savoir :

- *Le régime d'écoulement en nappe,*
- *Le régime d'écoulement extrêmement turbulent.*

La résistance de l'écoulement pleinement turbulent, dans le cas où l'entraînement de l'air serait négligé, est estimée à partir des résultats expérimentaux, ainsi que les caractéristiques du point d'inception.

Pour des écoulements à surface libre, il est important de connaître la quantité de l'air entraînée dans l'écoulement. La présence de l'air augmente le volume de l'écoulement, réduit le coefficient de perte de charge, de plus, la présence de petites quantités d'air proches du coursier, permet de réduire les dommages due à l'érosion par cavitation. *Ce phénomène peut être défini comme l'usure ou la destruction progressive des parois solides placées à la frontière d'un écoulement cavitant. Du point de vue hydrodynamique, la cavitation produit des structures de vapeurs (bulles, tourbillons) dans les zones de basse pression.*

*Celles-ci sont entraînées par l'écoulement et implosent, parfois violemment, lorsqu'elles entrent dans les zones de plus haute pression. Ce sont les implosions de telles structures, qui, lorsqu'elles se produisent au voisinage immédiat d'une paroi solide, sont à l'origine du phénomène d'érosion.*

Au vu de notre recherche bibliographique, nous pouvons dire qu'il y a beaucoup d'études expérimentales, par contre il n'existe point de résultats numériques concernant la simulation des écoulements dans les canaux en marches d'escaliers à l'amont et à l'aval du point d'inception. Nous nous proposons dans ce modeste travail d'essayer d'y remédier.

## **Chapitre II : Premières approches expérimentales et discussions**

Devant la complexité des écoulements sur des marches, les modèles réduits restent un outil privilégié. Une expérimentation sur maquettes de canaux a été réalisée, afin d'observer les écoulements dans un conduit à motifs périodiques.

Nous nous sommes attachés dans les essais décrits par la suite, à définir dans un premier temps les diverses formes que pouvait prendre l'écoulement puis à dégager dans chaque cas leurs caractéristiques à l'aide de mesures ponctuelles. Ces essais préliminaires, à la lumière des difficultés rencontrées, devaient enfin nous permettre de choisir une méthodologie d'étude appropriée à ces types d'écoulements particulièrement complexes.

### **I. EXPERIENCES**

Pour un prédimensionnement de notre modèle et pour visualiser les phénomènes hydrodynamiques existants dans les écoulements dans des canaux à géométrie complexe, nous avons conçu deux modèles de canaux en acier à motifs périodiques de dimensions 4cm x 4cm x 8cm et 8cm x 8cm x 8cm.

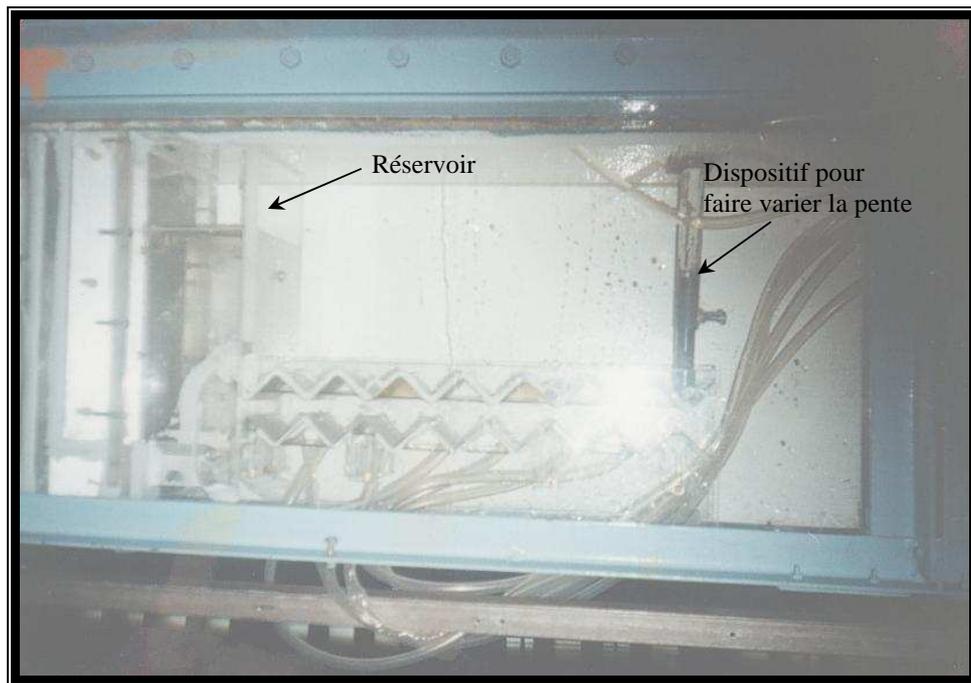
#### **1°/ Description du dispositif expérimental**

Les expériences ont été effectuées en écoulement à surface libre au moyen du dispositif donné dans la photo II.1. Ce dispositif a été conçu et installé dans le laboratoire de travaux pratiques hydraulique de l'ENSEEIH Toulouse.

Du réservoir d'alimentation, l'eau est pompée dans un bac. L'eau s'écoule à surface libre dans un canal de dimensions 20 cm x 38,5 cm. Les parois latérales du canal sont en verre et le fond est en acier.

L'eau franchit une vanne de fond, elle s'écoule dans un bac, puis passe dans un conduit composé de plusieurs éléments. Ces derniers sont en acier, alors que les parois latérales du conduit sont en Plexiglass. L'étanchéité du système est assurée par un mastic élastique au silicone.

L'installation est munie d'un dispositif qui permet de régler la pente.



**Photo II.1 :** Installation expérimentale pour  $\alpha = 0$

Après la mise en marche de la pompe, une période de mise en régime est observée pour une bonne stabilisation de l'écoulement.

## 2°/ Technique de mesures

Nous nous proposons de relever pour un débit et une pente donnés, le profil de la surface libre et d'observer l'écoulement.

### a. Mesures des profondeurs

La mesure de la profondeur d'eau est faite à l'aide de papier millimétré collé sur une des parois latérale du canal. Ce moyen nous a apparu comme étant le mieux adapté au repérage de la position de la surface libre.

### b. Mesure des débits

La mesure de débit est faite en utilisant un déversoir rectangulaire à paroi mince.

## 3°/ Les essais sur les deux modèles en position horizontale

Dans le cas de la pente nulle ( $\alpha = 0$ ), le canal n'est plus en marches d'escaliers, mais c'est un canal à éléments triangulaires sur le fond.

### a. Essais sur le modèle 1 (Eléments de dimensions 4cm x 4 cm x 8 cm)

Le premier modèle est constitué de huit (08) marches de dimensions constantes 4cmx4cmx8cm.

Le relevé des lignes d'eau pour différents débits, est fait à l'aide de papier millimétré transparent collé sur une des parois latérales du canal. Les résultats sont donnés dans le tableau II-1.

**b. Essais sur le modèle 2 (Eléments de : 8 cm x 8 cm x 8 cm)**

Notre deuxième modèle est constitué de quatre (04) marches de dimensions constantes 8cm x 8cm x 8cm. Le relevé des lignes d'eau pour différents débits est fait également à l'aide de papier millimétré transparent collé sur une des parois latérales du canal. Nous donnons les résultats dans le tableau II-2.

Tableau II-1 : Résultats expérimentaux pour  $\alpha = 0$  et pour le modèle 1

Eléments		1		2		3		4		5		6		7	
Q (l/s)	Hauteur	Crête	Creux												
1,18 l/s $d_c = 2,79\text{cm}$	y(cm)	4,90	5,00	5,50	5,70	6,40	6,00	6,40	6,00	6,50	6,00	6,00	5,60	5,80	5,80
	d' (cm)	2,10	2,10	2,70	2,90	3,80	3,40	3,90	3,50	4,00	3,50	3,60	3,20	3,10	3,10
	$V_0^2/2g$ (cm)	2,47	0,44	1,49	0,33	0,75	0,30	0,72	0,30	0,68	0,30	0,83	0,35	1,13	0,32
0,45l/s $d_c = 1,46\text{cm}$	y (cm)	4,00	4,00	4,80	4,60	5,00	4,70	5,20	4,70	5,20	5,00	5,20	4,60	5,00	4,60
	d' (cm)	1,10	1,10	2,00	1,80	2,40	2,10	2,70	2,20	2,70	2,50	2,80	2,20	2,30	1,90
	$V_0^2/2g$ cm	1,31	0,10	0,4	0,07	0,27	0,07	0,22	0,07	0,20	0,06	0,20	0,07	0,30	0,07
0,27l/s $d_c = 1,04\text{cm}$	y(cm)	3,80	3,50	4,30	4,20	4,80	4,30	4,80	4,30	4,80	4,30	4,80	4,30	4,80	4,20
	d' (cm)	0,90	0,60	1,50	1,40	2,20	1,70	2,30	1,80	2,30	1,80	2,40	1,90	2,10	1,50
	$V_0^2/2g$ (cm)	0,70	0,04	0,25	0,03	0,12	0,03	0,11	0,03	0,11	0,03	0,10	0,03	0,13	0,03
0,09l/s $d_c = 0,50\text{cm}$	y(cm)	3,50	3,20	3,70	3,60	4,10	3,70	4,00	3,60	4,00	3,60	4,00	3,60	4,00	3,60
	d' (cm)	0,60	0,30	0,90	0,80	1,50	1,10	1,50	1,10	1,50	1,10	1,60	1,20	1,30	0,90
	$V_0^2/2g$ (cm)	0,1759	0,0062	0,0781	0,0449	0,0281	0,0046	0,0281	0,0049	0,0039	0,0523	0,0039	0,0439	0,0039	0,0781

avec, y : hauteur d'eau par rapport au fond du canal ; d' : hauteur d'eau par rapport à la crête ;  $V_0$ , vitesse d'écoulement donnée

par :  $V_0 = \frac{Q}{bh'}$  ;  $d_c$  : hauteur critique donnée par :  $d_c = \left(\frac{Q}{b_c}\right)^{2/3} \frac{1}{g^{1/3}}$  où, Q est le débit d'écoulement et  $b_c$ , la largeur du canal.

Tableau II-2 : Résultats expérimentaux pour  $\alpha = 0$  et pour le modèle 2

Elément		1		2		3		4
Q (l/s)	Hauteur	Crête	Creux	Crête	Creux	Crête	Creux	Crête
1,27 l/s $d_c = 2,93\text{cm}$	y(cm)	8,40	7,80	9,40	9,40	9,80	9,00	10,50
	$d'$ (cm)	2,80	2,00	3,90	3,90	4,40	3,60	5,10
	$V_0^2/2g$ (cm)	1,61	0,21	0,83	0,14	0,65	0,16	0,48
0,73l/s $d_c = 2,03\text{cm}$	y(cm)	7,50	7,20	8,20	7,80	8,50	8,00	9,00
	$d'$ (cm)	1,90	1,60	2,70	2,30	3,10	2,60	3,60
	$V_0^2/2g$ (cm)	1,15	0,08	0,57	0,07	0,43	0,06	0,32
0,36l/s $d_c = 1,26\text{cm}$	y(cm)	7,20	7,00	8,00	7,30	8,00	7,40	8,30
	$d'$ (cm)	1,60	1,40	2,50	1,80	2,60	2,00	2,90
	$V_0^2/2g$ (cm)	0,39	0,02	0,16	0,02	0,15	0,02	0,12
0,09l/s $d_c = 0,50\text{ cm}$	y(cm)	6,90	6,50	7,30	7,60	7,30	6,60	7,40
	$d'$ (cm)	1,30	0,90	1,80	2,10	1,90	1,20	2,40
	$V_0^2/2g$ (cm)	0,037	0,0015	0,02	0,0011	0,018	0,001	0,011

#### 4°/ Observations des écoulements dans les deux modèles en fortes pentes

Nos essais expérimentaux nous ont permis de faire les observations suivantes.

##### a. Observations des écoulements dans le modèle 1

Deux pentes différentes ont été considérées  $\alpha = 20^\circ$  et  $\alpha = 41^\circ$ .

##### – Pente : $\alpha = 20^\circ$

Pour le cas  $\alpha = 20^\circ$ , nous avons fait les constats suivants :

- Pour le débit  $Q = 1,91\text{l/s}$ , une surface libre lisse jusqu'aux deux dernières marches, où des bulles d'air apparaissent.
- Pour les débits  $Q = 0,91\text{l/s}$  et  $0,64\text{l/s}$ , la surface libre est lisse jusqu'aux trois dernières marches, où des bulles d'air apparaissent.

Nous avons injectée de la poussière de craie dans l'écoulement et ceci nous a permis de visualiser les rouleaux de recirculation.

- Pour le débit  $Q = 0,22\text{ l/s}$ , la présence d'air apparaît au bout du deuxième motif, l'écoulement épouse la forme de la conduite. Le phénomène est périodique.
- Pour le débit  $Q = 0,18\text{l/s}$ , la nappe adhère à la paroi supérieure.

– Pente :  $\alpha = 41^\circ$ 

Pour le cas  $\alpha = 41^\circ$ , les observations suivantes ont été faites :

Pour les débits  $Q = 1,16\text{l/s}$  et  $Q = 1,91\text{l/s}$ , une surface lisse jusqu'à la cinquième marche et apparition de bulles d'air à partir du quatrième motif. Une instabilité de la surface libre est engendrée. Il y a un écoulement extrêmement turbulent.

Donc, il y a une zone transitoire sur les quatre premières marches: l'écoulement s'accélère jusqu'à atteindre une vitesse où les phénomènes d'entraînement d'air apparaissent. Les particules d'air se mêlent alors au courant d'eau et un bouillement intense se prolonge en s'amplifiant (Figure II.1).

Pour le débit  $Q = 0,36\text{l/s}$ , une courte zone d'écoulement à potentiel sur le seuil est observé. Au niveau du troisième motif, un jet tombant en chute libre sur un matelas d'eau est observé (figure II.2).

Pour le débit  $Q = 0,21\text{l/s}$ , il y a la présence d'air au bout du deuxième motif. L'écoulement épouse la forme de la conduite. Le phénomène devient périodique au bout de la troisième marche (figure II.3).

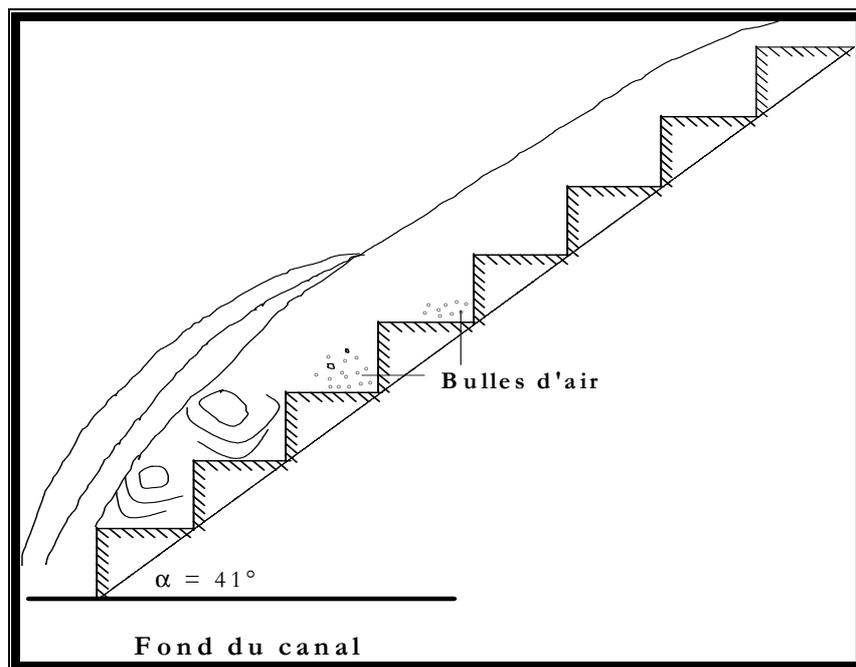


Figure II.1 : Ecoulement observé pour  $Q = 1,91\text{l/s}$  et  $Q = 1,16\text{l/s}$

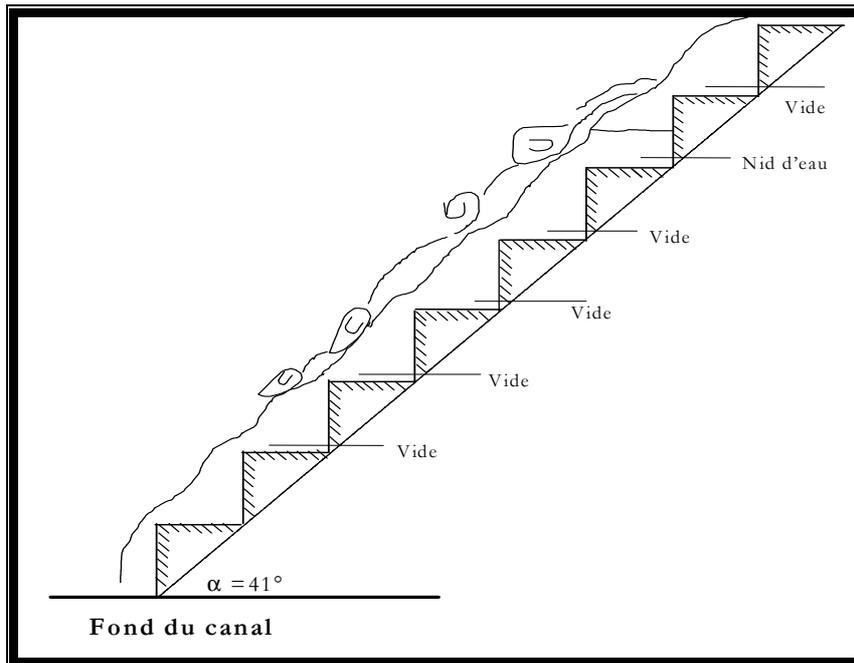


Figure II.2 : Ecoulement observé pour  $Q = 0,361/s$

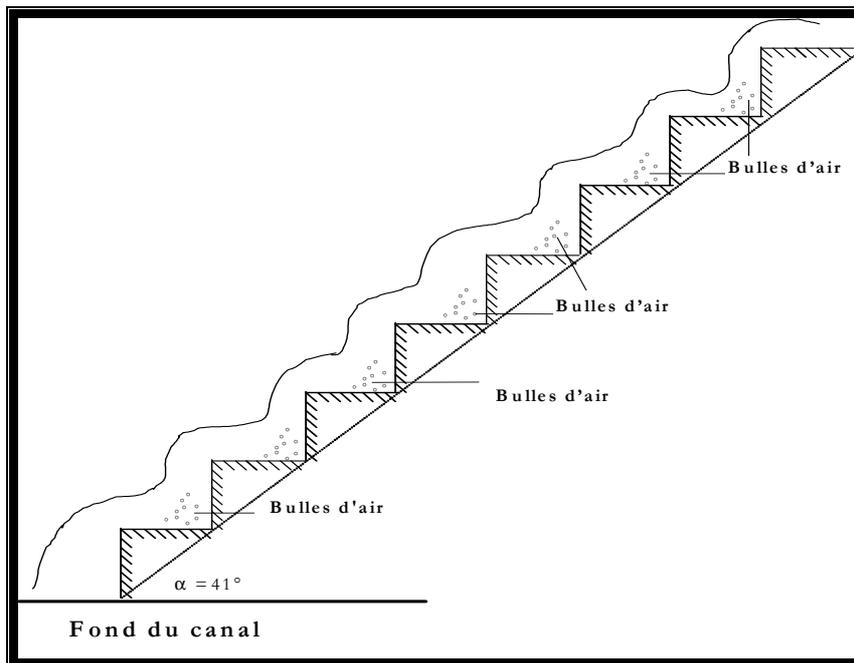


Figure II.3 : Ecoulement observé pour  $Q = 0,211/s$

Pour les faibles débits, l'eau blanche apparaît rapidement. L'épaisseur de la lame est réduite. La zone en eau blanche est très importante et l'épaisseur de la lame semble rester plus au moins constante. Avec l'augmentation du débit, l'eau blanche recule le long du coursier.

**b. Observations des écoulements dans le modèle 2**

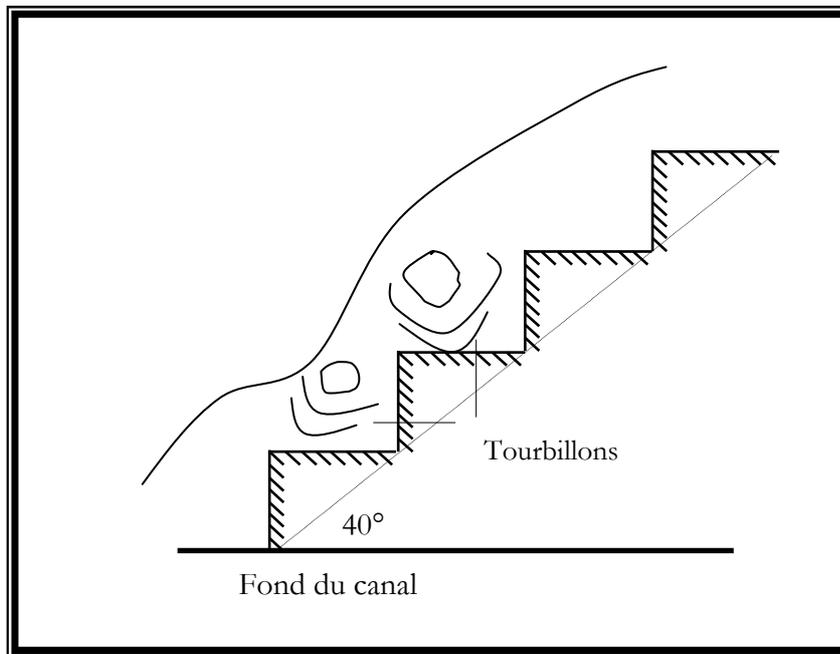
Dans ce cas, nous avons considéré une pente de  $41^\circ$  et nous avons fait varier le débit.

Pour les débits  $1,4\text{l/s}$  et  $Q = 2,0\text{l/s}$ , nous avons observé des tourbillons et des bulles d'air au niveau des dernières marches. De la poussière a été injectée dans l'eau. Ceci nous a permis de visualiser les rouleaux (figure II.4).

Pour les débits  $Q = 1,00\text{l/s}$  et  $Q = 1,09\text{l/s}$ , deux cas ont été observés.

*\* Cas de nappe noyée*

Une courte zone d'écoulement à potentiel sur le seuil déversant est observée (figure II.5). Le jet tombant en chute libre sur un matelas d'eau crée une zone de grand impact, une hauteur sous lui confinant ainsi l'air emprisonné. Un saut d'une marche est également constaté (écoulement à saut de mouton).



**Figure II.4 :** Ecoulement observé pour  $Q = 2,0\text{l/s}$  et  $Q = 1,4\text{l/s}$

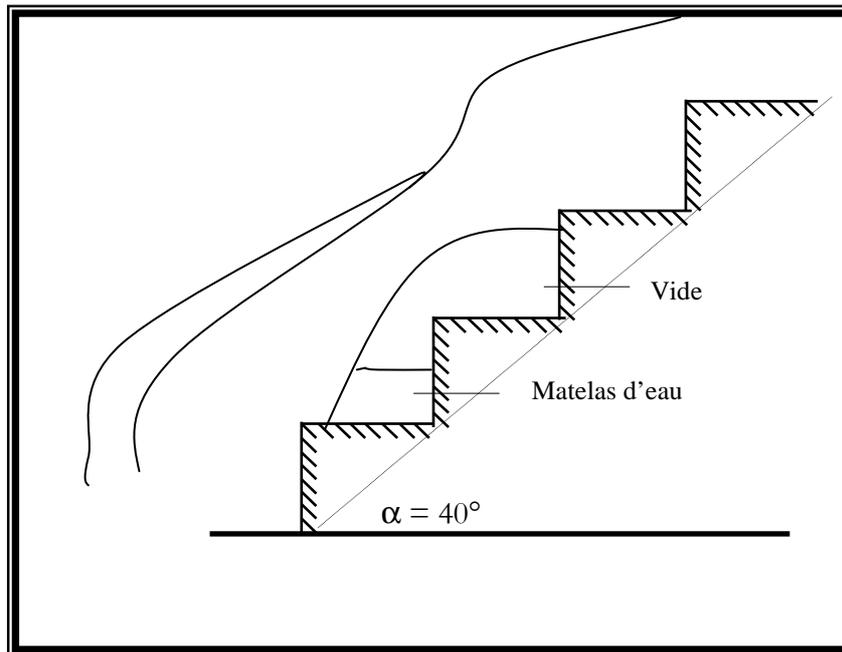


Figure II.5 : Ecoulement observé dans le cas de la nappe noyée

\* Cas de l'aération de la nappe d'eaux déversante

Dans ce cas, de l'air est injecté dans l'écoulement : Un jet tombant en chute libre dans un nid d'eau dès la première marche est observé (figure II.6).

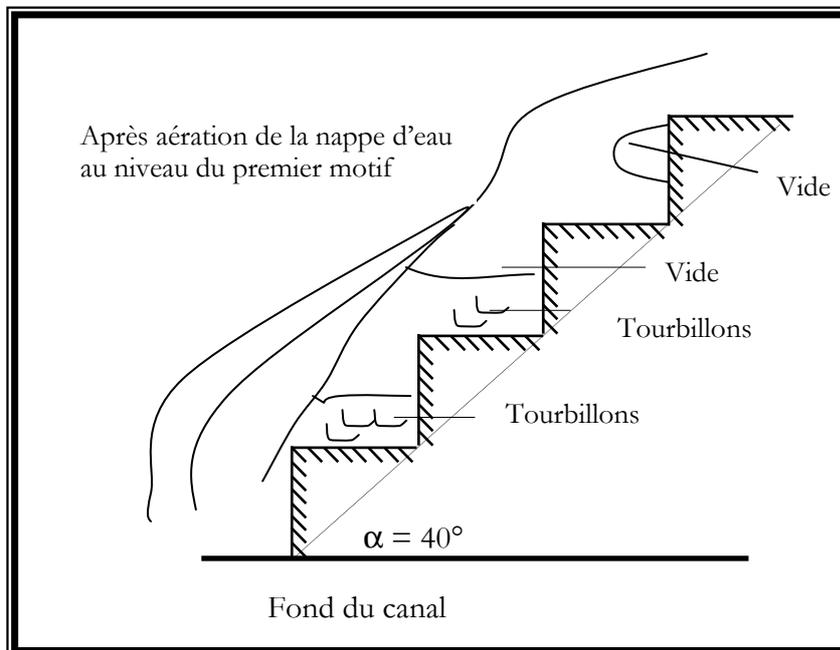


Figure II.6 : Ecoulement observé dans le cas de l'aération de la nappe d'eau déversante

Pour le débit  $Q = 0,551/s$ , un jet tombant en chute libre sur un matelas d'eau, en sautant deux marches est observé (figure II.7).

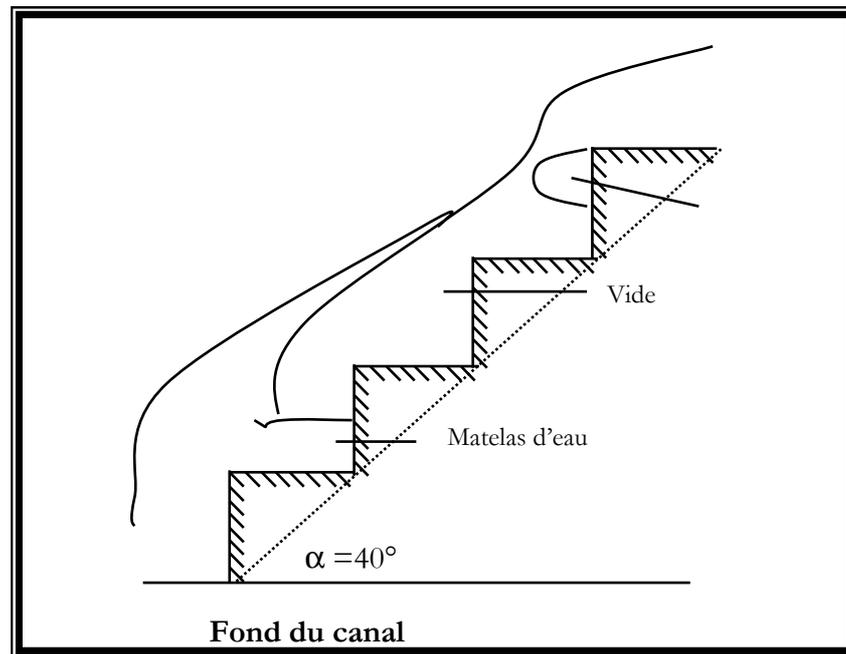


Figure II.7 : Ecoulement observé pour  $Q = 0,55 \text{ l/s}$

Nos essais ont montré que pour les écoulements rapides, il y avait bien deux zones : zone de la mise en vitesse et celle de l'entraînement d'air. Le nombre de motifs semble faible pour que l'on puisse parler d'écoulement parfaitement périodique.

Finalement, nous pourrions envisager de dire que pour tout motif et toute pente, il y a deux situations asymptotiques :

- a. Le seuil déversant sur un matelas d'eau ou non,
- b. L'écoulement sur fond rugueux et les écoulements intermédiaires allant de la lame déversante noyée au flot qui passe au-dessus des aspérités en y entraînant des rouleaux.

## II. ANALYSE DES RESULTATS

### 1°/ Analyse des résultats sur les canaux horizontaux

Nous avons porté sur les figure II.8 et II.9 les profils de la surface libre pour différents débits et les deux modèles. Ces profils de la surface libre suivent la géométrie des modèles.

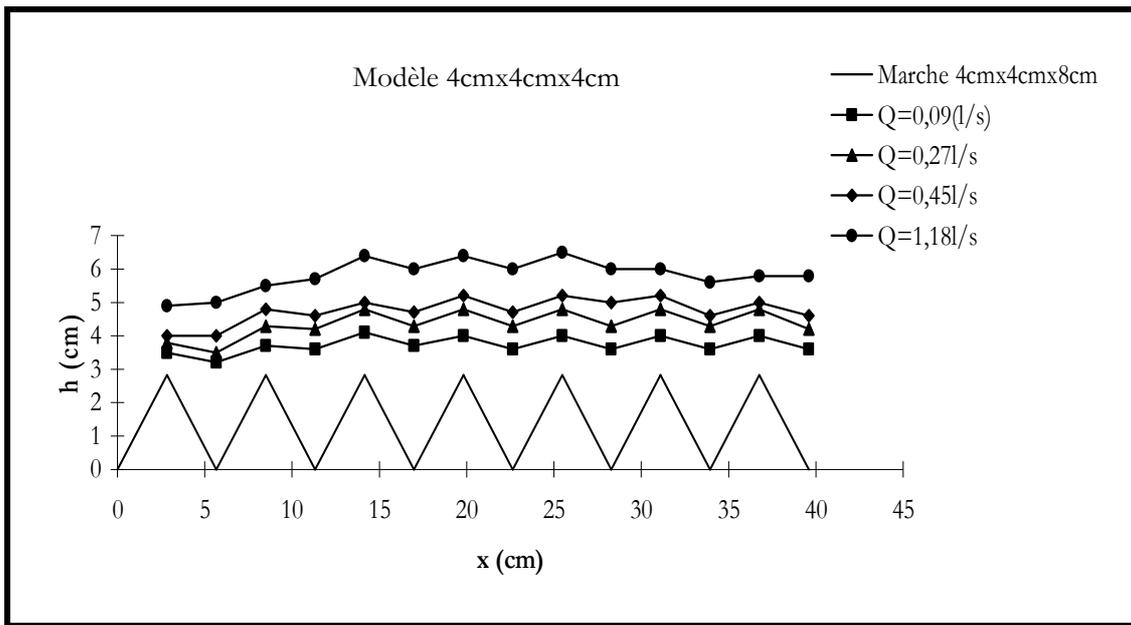


Figure II.8 : Profil de la surface libre pour différents débits et pour  $\alpha = 0^\circ$  dans le modèle 4cm x 4cm x 8cm

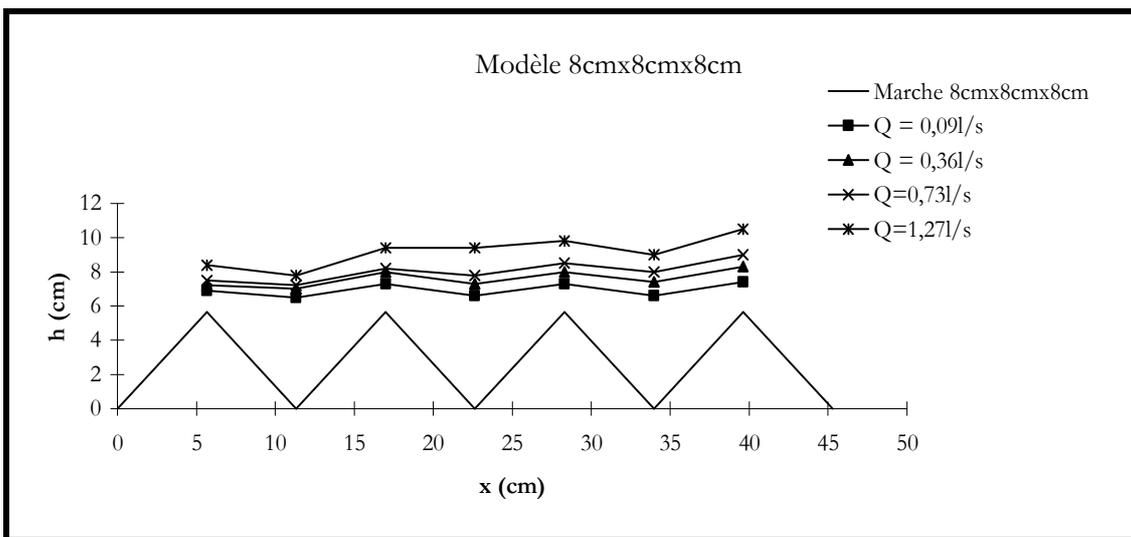


Figure II.9 : Profil de la surface libre pour différents débits et pour  $\alpha = 0^\circ$  dans le modèle 8cm x 8cm x 8cm

Suite à ces graphiques, nous nous sommes posés la question suivante :

Pourquoi la surface libre remonte sur les crêtes et baisse aux creux?

Pour répondre à cette question essayons de voir l'influence de l'énergie cinétique sur la ligne d'eau.

*\* Influence de la hauteur cinétique sur la ligne d'eau*

Le calcul de la hauteur cinétique (tableau II-1 page 31 et II-2 page 32) a montré l'importance de celle-ci au-dessus des crêtes. La hauteur cinétique est plus importante au-dessus des crêtes qu'au-dessus des creux.

Nous avons porté sur des graphes (figures 1 ÷ 10, **Annexe A**) la variation de la hauteur d'eau en fonction des débits pour chaque crête et creux du modèle 1. Une dispersion des points est observée.

La variation de la hauteur d'eau en fonction des débits est portée sur des graphes (figures 11 ÷ 17, **Annexe A**) pour chaque crête et creux du modèle 2. Une dispersion des points est également observée.

### Commentaires

En premier lieu, nous avons tenté de présenter des anamorphoses en se basant sur la représentation classique des phénomènes hydrauliques dans les canaux découverts.

L'écoulement dans ces derniers peut être caractérisé par le nombre de Froude:

$$F^2 = \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial y} \quad (\text{II-1})$$

où,  $Q$  est le débit,  $g$  l'accélération et  $A = A(y,x)$  la section mouillée,  $x$  la coordonnée longitudinale et  $y$  la hauteur d'eau.

Dans le cas d'un canal rectangulaire, la section mouillée est  $A = by$ , d'où :  $\frac{\partial A}{\partial y} = b$ .

Un écoulement critique s'établit pour un nombre de Froude égal à 1 ( $F = 1$ ), relation qui donne la hauteur critique en fonction du débit :

$$d_c = \left( \frac{\frac{2}{3} Q^3}{b^3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{g^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{II-2})$$

En partant de l'idée d'assimiler nos modèles à un seuil épais, nous avons tracé la hauteur d'eau ( $y$ ) en fonction du débit à la puissance  $2/3$  (figures II.10 ÷ II.17).

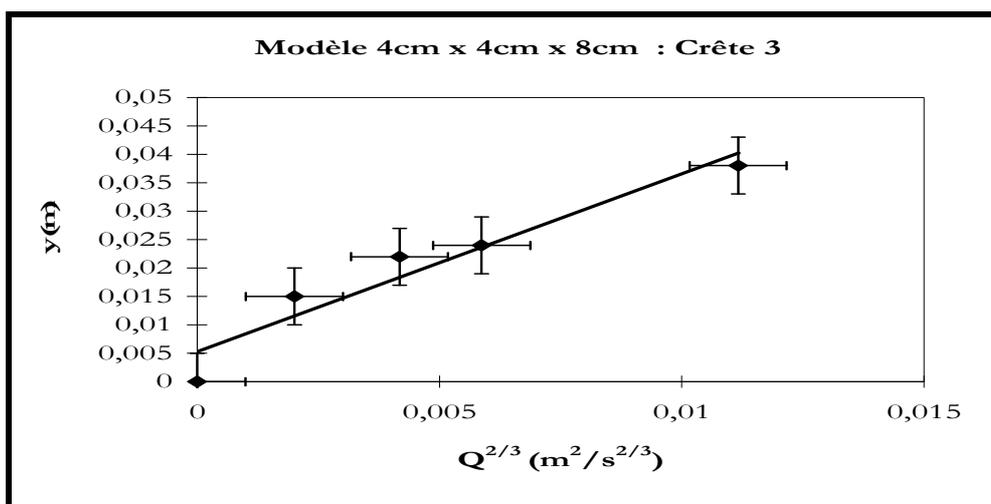


Figure II.10 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{2/3}$  : Crête 3

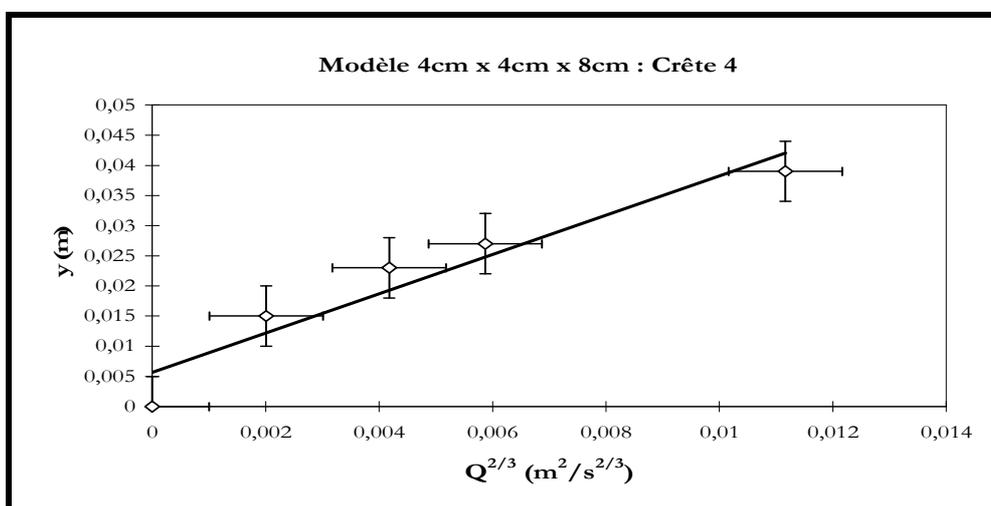


Figure II.11 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{2/3}$  : Crête 4

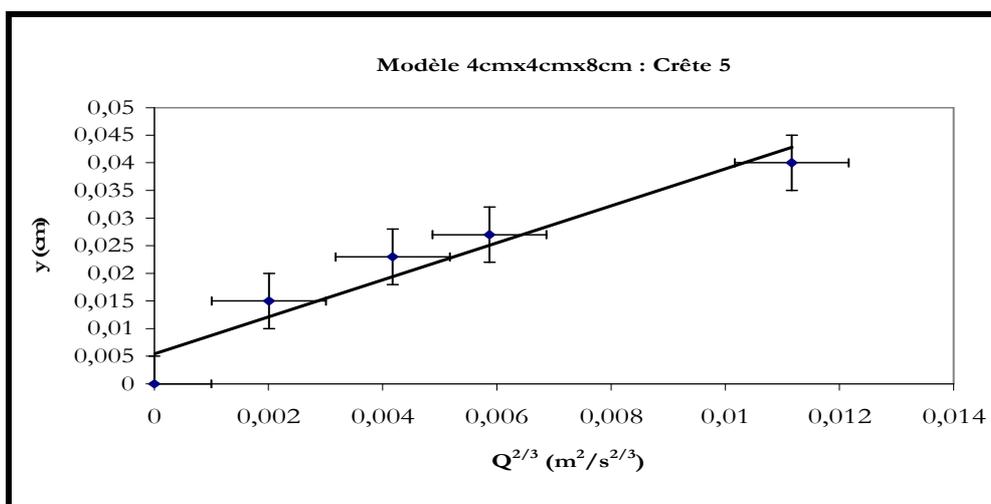


Figure II.12 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{2/3}$  : Crête 5

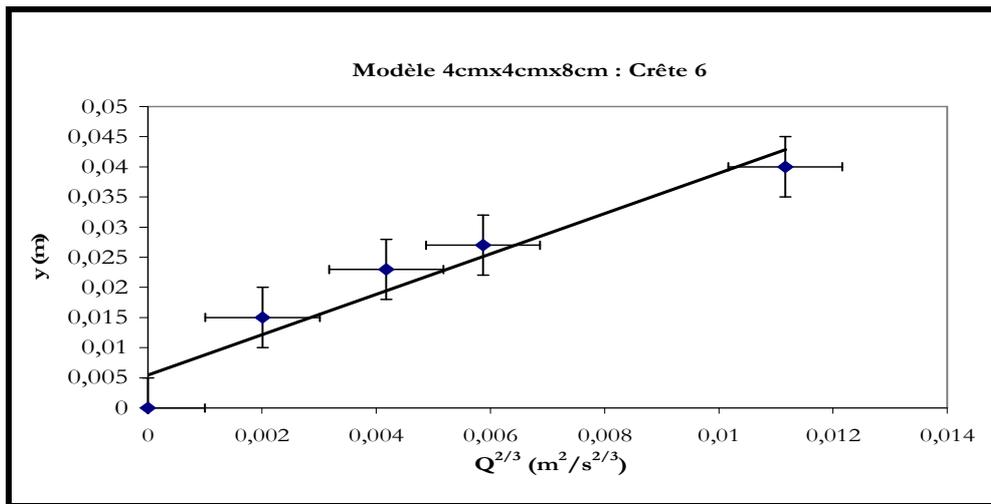


Figure II.13 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{2/3}$  : Crête 6

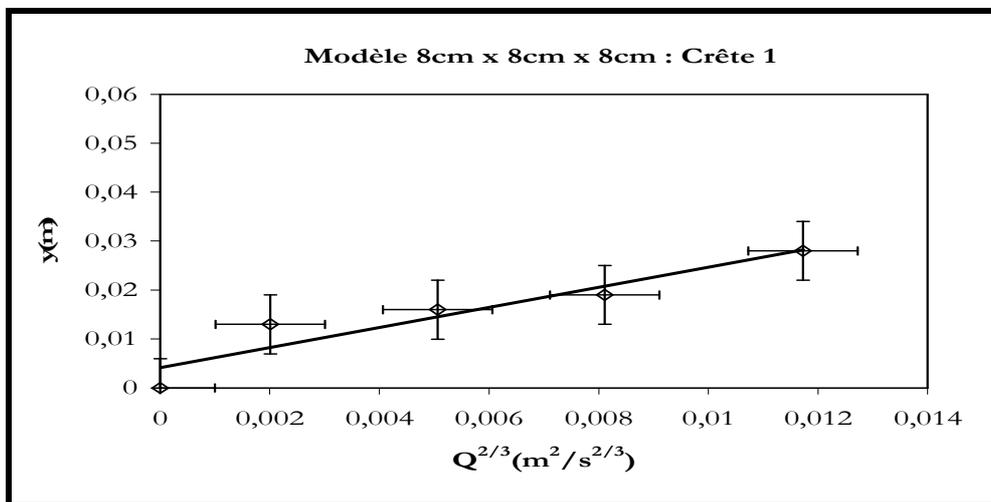


Figure II.14 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{2/3}$  : Crête 1

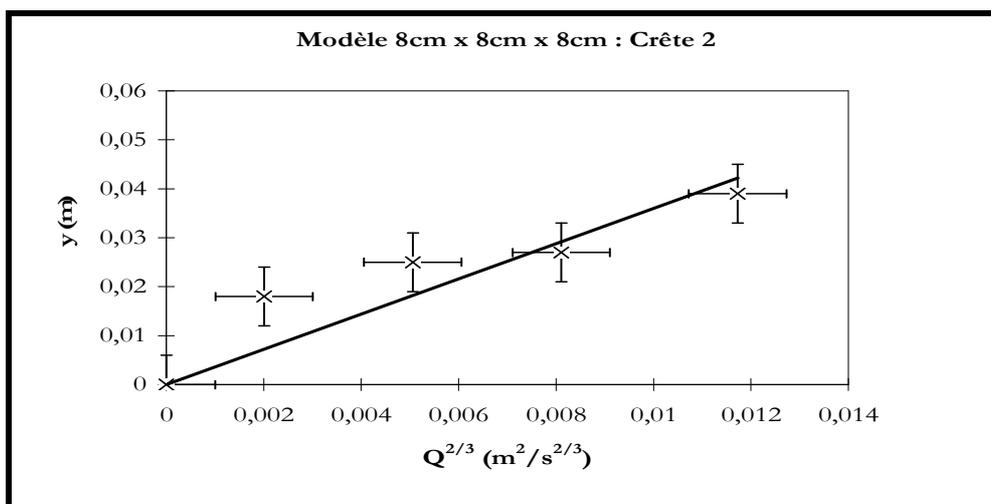
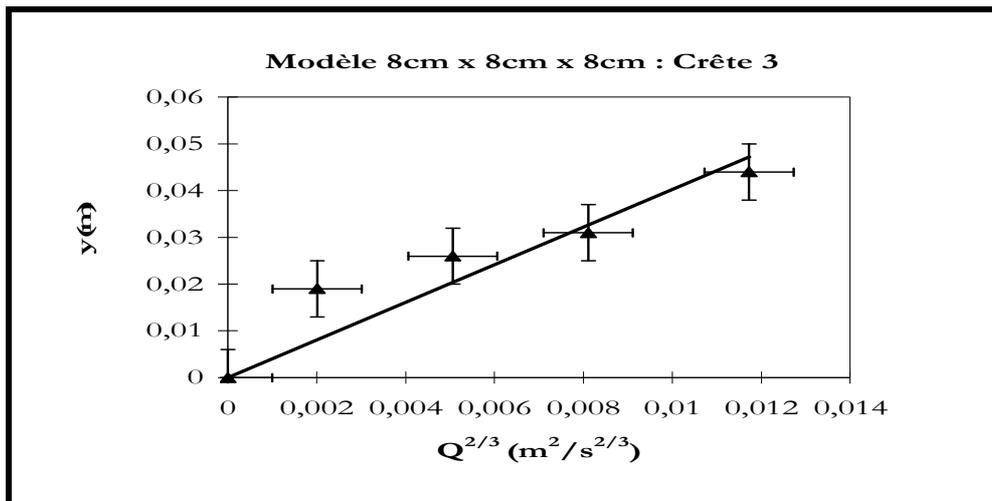
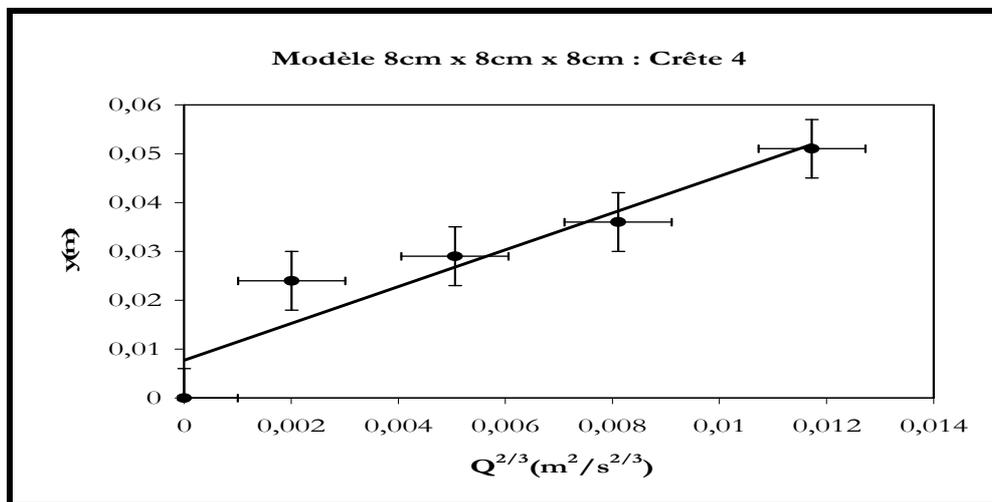


Figure II.15 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{2/3}$  : Crête 2



**Figure II.16 :** Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{2/3}$  : Crête 3



**Figure II.17 :** Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{2/3}$  : Crête 4

Les graphes (figures II.10 ÷ II.17) représentent les droites de régression globale pour les deux modèles. Nous observons une dispersion des points par rapport aux droites de régression. Ceci nous a conduit à tenter de conforter les essais les uns par les autres, en examinant différentes anamorphoses simples mais sans justification physique apparente.

Notre idée sous jacente, c'est que si nous avons une anamorphose qui donne une représentation linéaire sans trop de dispersion, la probabilité des erreurs décroît et donc il y a comme une confirmation des mesures les uns par les autres.

Les différents anamorphoses que nous avons essayé essayées sont :  $y = f(Q^{1/2})$  et  $y = f(Q^{1/3})$ . Nous avons porté sur les figures II.18 ÷ II.25 l'anamorphose  $y = f(Q^{1/2})$  pour chaque crête des deux modèles.

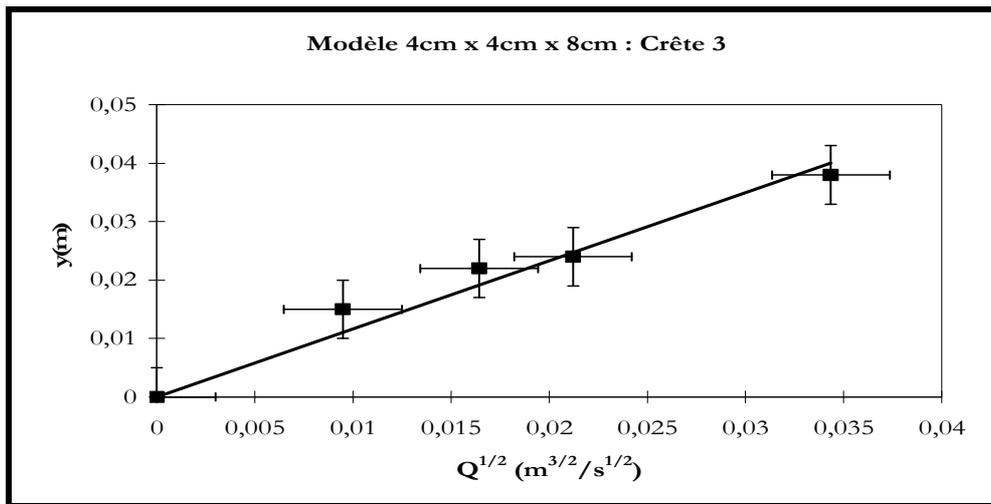


Figure II.18 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/2}$  : Crête 3

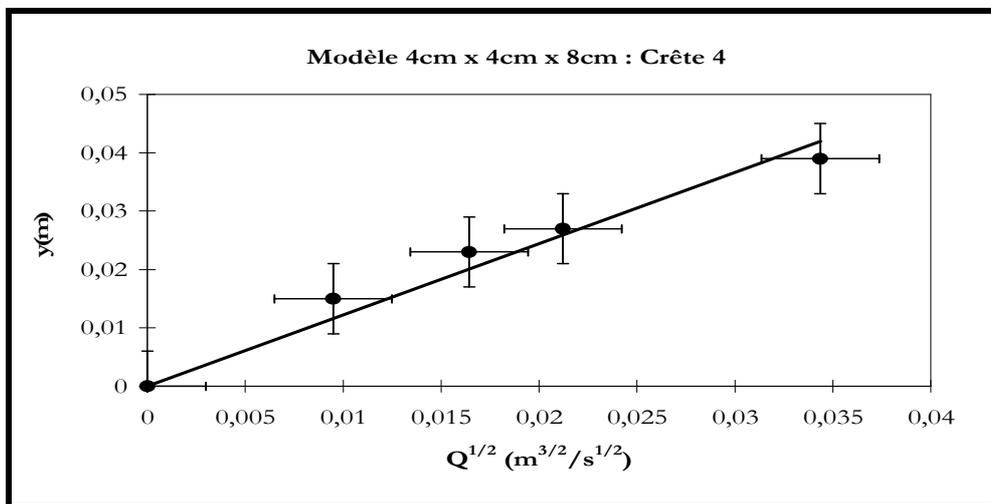


Figure II.19 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/2}$  : Crête 4

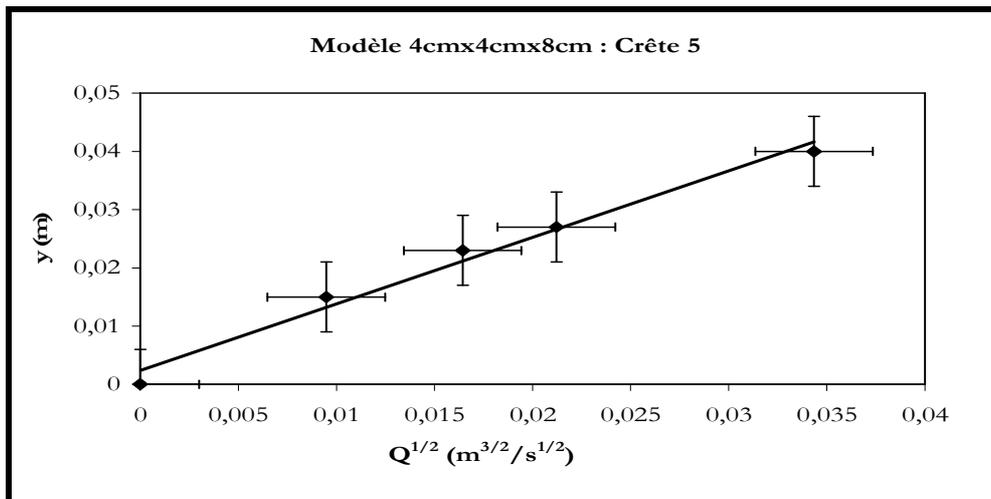


Figure II.20 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/2}$  : Crête 5

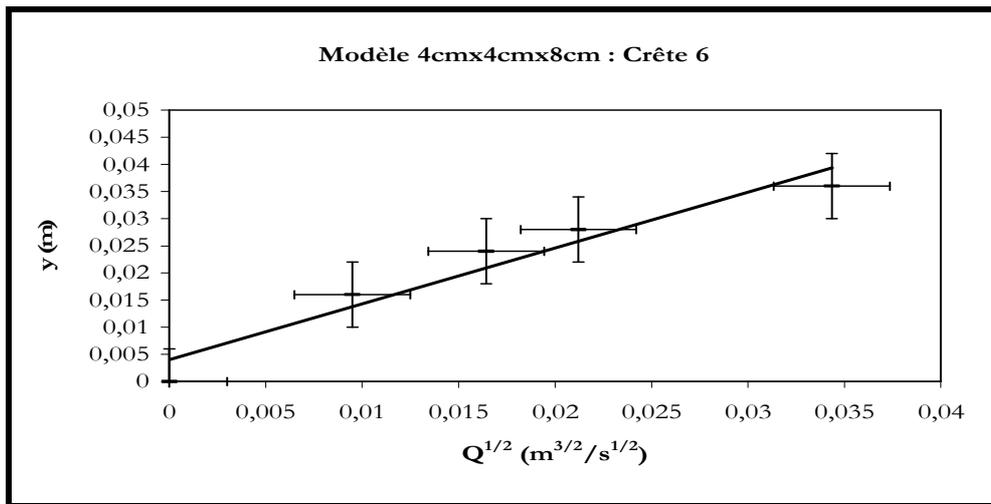


Figure II.21 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/2}$  : Crête 6

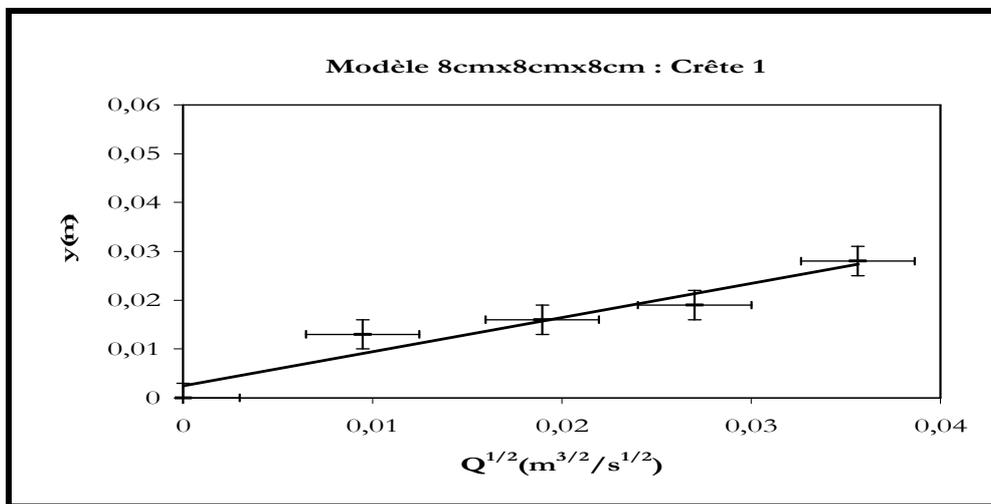


Figure II.22 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/2}$  : Crête 1

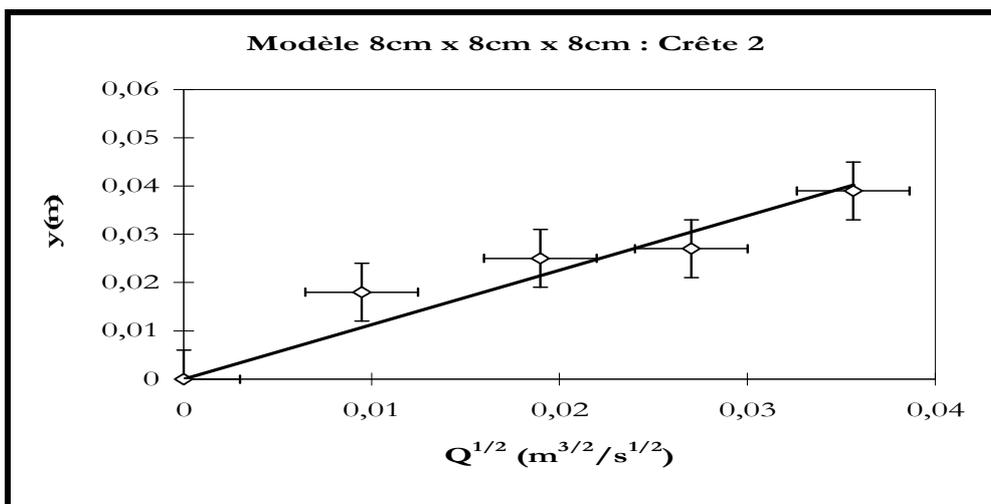


Figure II.23 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/2}$  : Crête 2

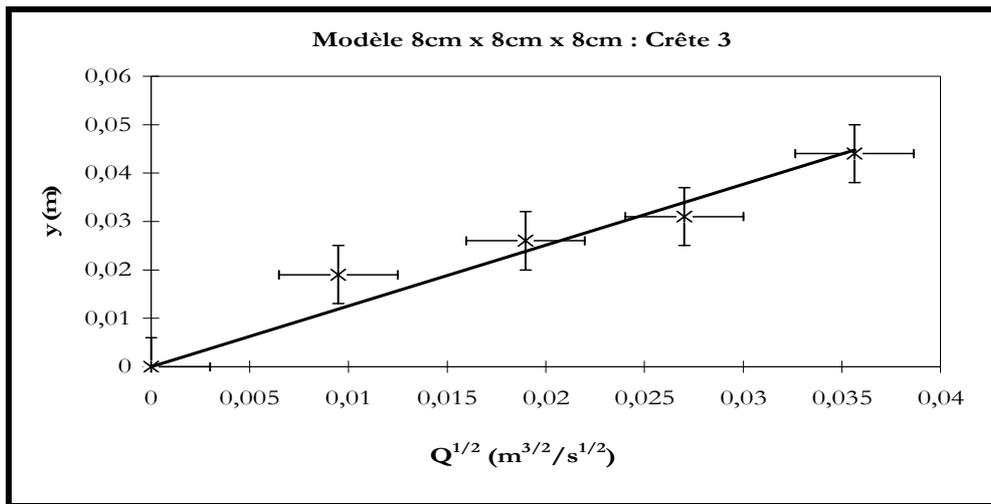


Figure II.24 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/2}$  : Crête 3

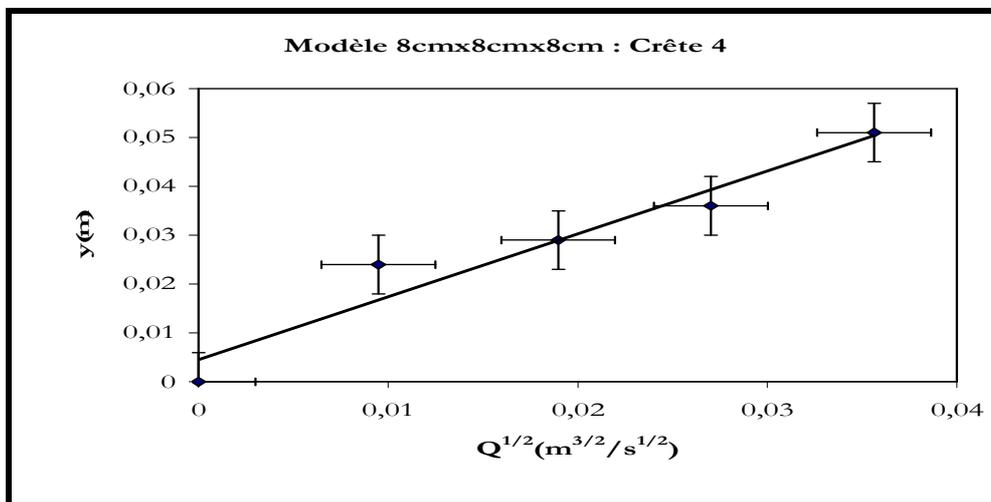


Figure II.25 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/2}$  : Crête 4

Les points sont restés dispersés par rapport aux droites de régression. De là, nous avons essayé l'anamorphose  $y = f(Q^{1/3})$ .

Nous avons tracé sur les figures II.26 ÷ II.33 l'anamorphose  $y = f(Q^{1/3})$ .

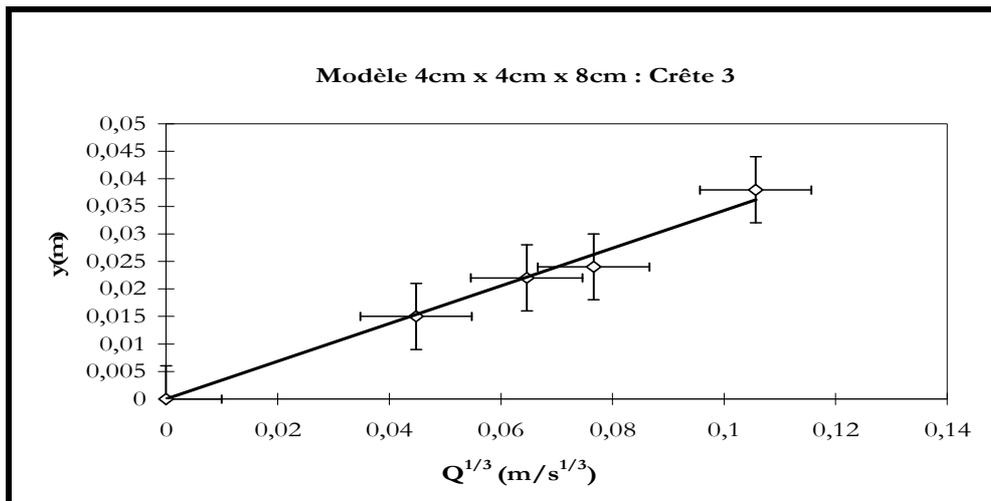


Figure II.26 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/3}$  : Crête 3

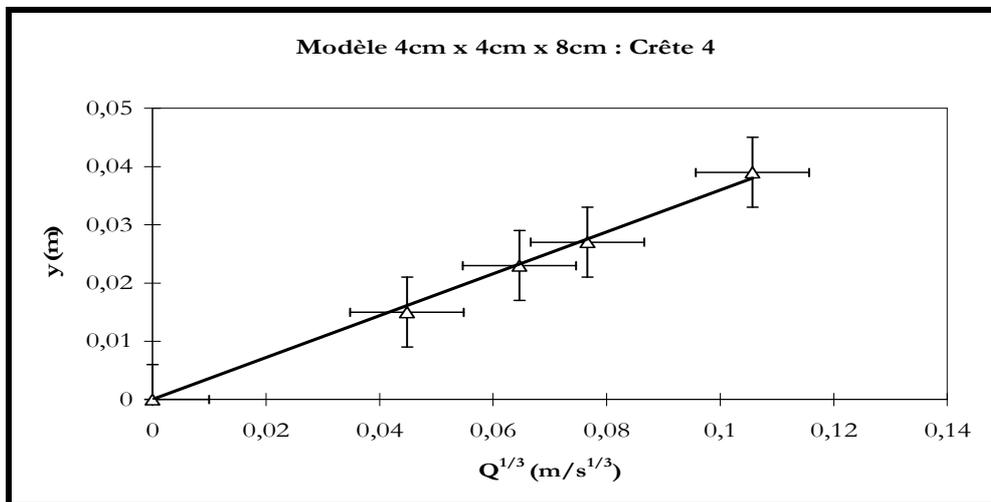


Figure II.27 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/3}$  : Crête 4

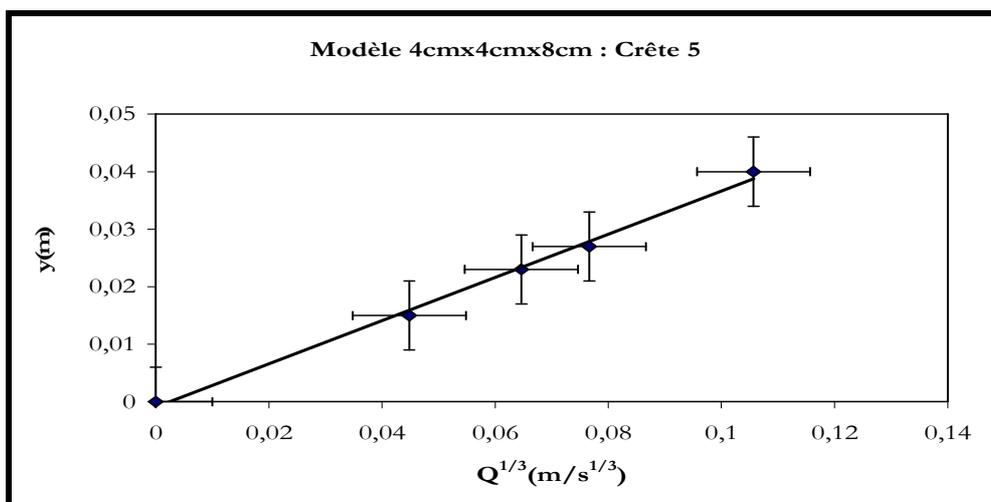


Figure II.28 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/3}$  : Crête 5

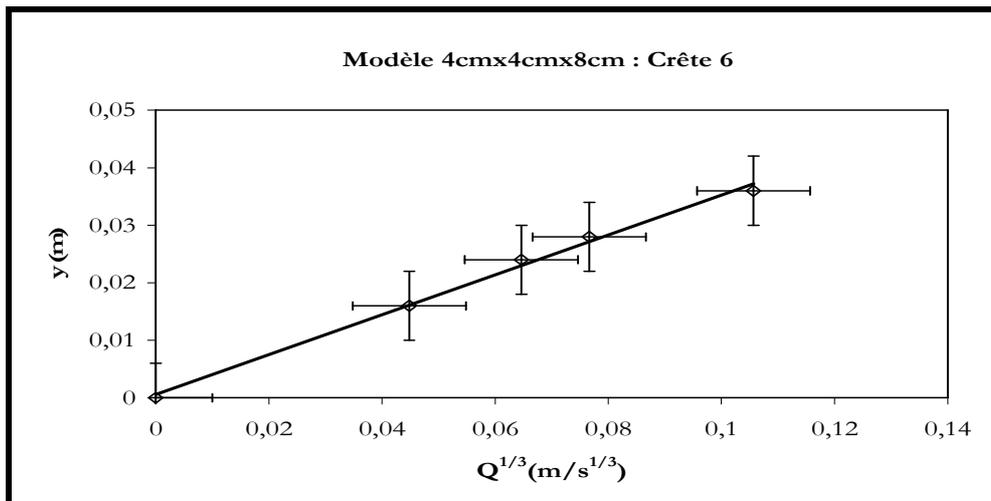


Figure II.29 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/3}$  : Crête 6

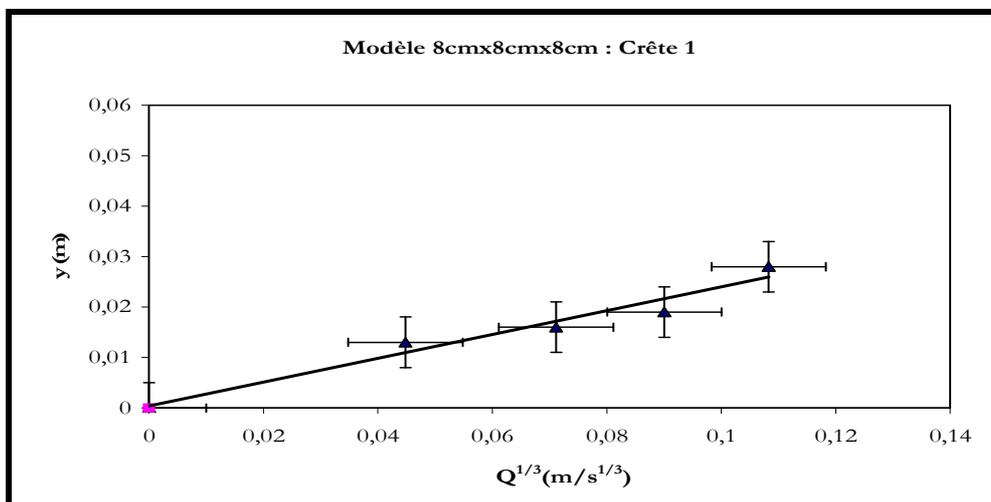


Figure II.30 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/3}$  : Crête 1

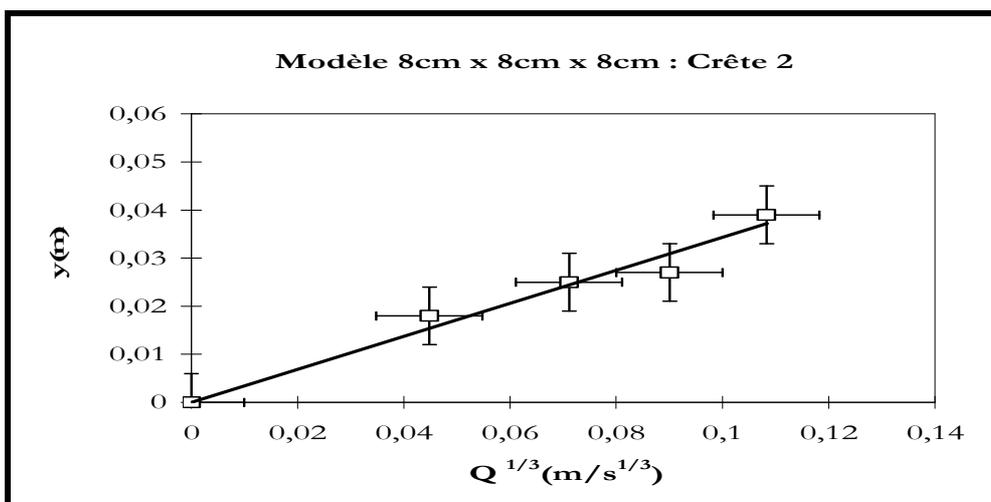


Figure II.31 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/3}$  : Crête 2

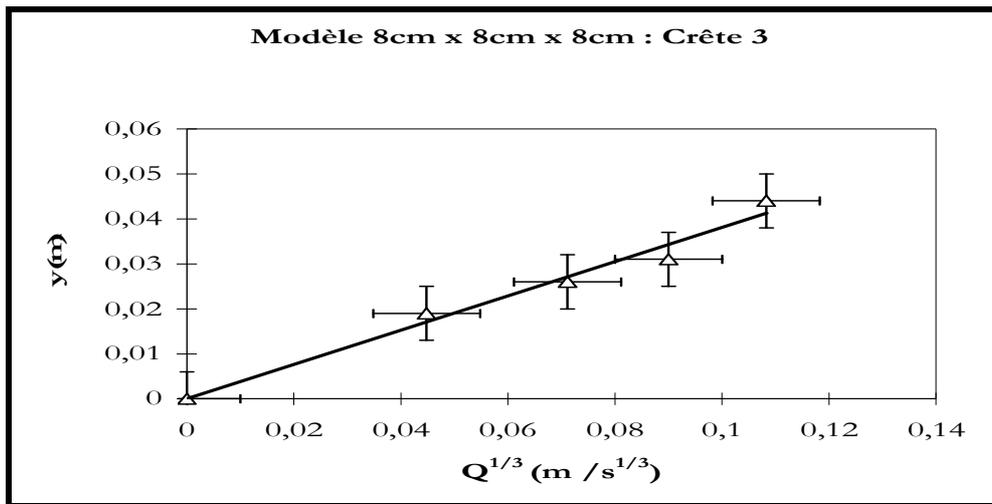


Figure II.32 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/3}$  : Crête 3

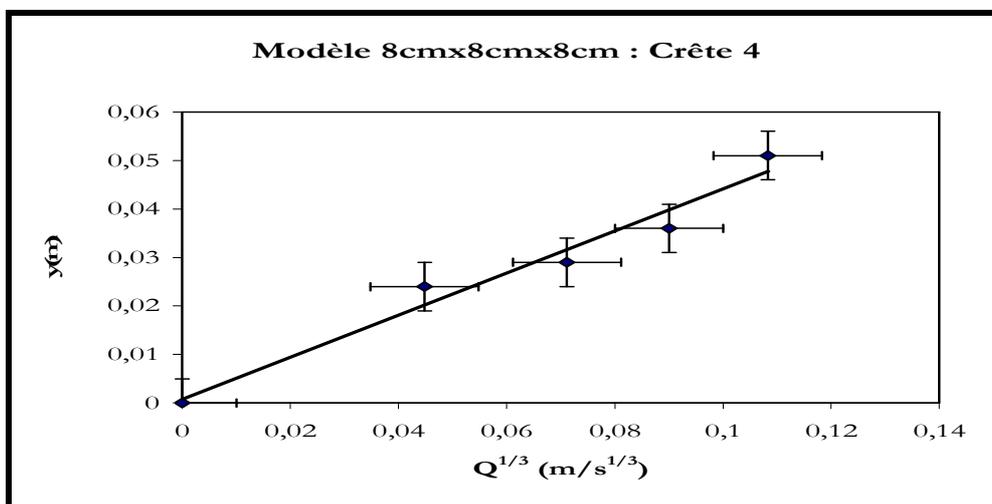


Figure II.33 : Variation de la profondeur en fonction de  $Q^{1/3}$  : Crête 4

Pour l'anamorphose  $y = f(Q^{1/3})$ , les points sont moins dispersés par rapport à la droite de lissage. Pour l'instant, nous pouvons dire que la loi d'écoulement pour un écoulement au dessus d'éléments triangulaire fixés sur le fond de canal est de la forme :  $y = f(Q^{a/3})$ .

## 2°/ Analyse des résultats sur les canaux à forte pente

### a. Détermination de la nature de l'écoulement

Les écoulements très turbulents apparaissent pour des débits plus élevés que les écoulements en nappe.

- L'écoulement en nappe avec ressaut pleinement développé se présente pour des débits plus petits que la valeur critique définie par :

- $\left(\frac{d_c}{h}\right)_{\text{début}} = 0,09 \left(\frac{h}{l}\right)^{-1,26}$  pour  $0,2 \leq \frac{h}{l} \leq 6$ .

- L'écoulement très turbulent apparaît pour les débits plus grands que la valeur critique définie par :  $\frac{(d_c)_{\text{début}}}{h} = 1,06 - 0,47 \frac{h}{l}$  pour  $0,2 < \frac{h}{l} < 1,25$ .  
avec,  $(d_c)_{\text{début}}$  hauteur critique pour le début d'écoulement très turbulent. L'écoulement turbulent a lieu pour  $d_c > (d_c)_{\text{début}}$ .

Pour les écoulements dans nos deux modèles en marches d'escaliers, les résultats sont donnés dans les tableaux II-3 et II-4 ci-dessous.

**Tableau II-3 :** Régimes d'écoulement dans le modèle à marches 4cm x 4cm x 8cm

	$\alpha = 20^\circ$				$\alpha = 41^\circ$			
q (l/s/ml)	23,9	11,4	08,0	02,8	23,9	14,5	04,5	02,7
$d_c$ (cm)	3,87	2,36	1,87	0,92	3,87	2,78	1,27	0,89
$d_c/h$	0,97	0,59	0,47	0,23	0,97	0,69	0,32	0,22
Observation	Eclt turbulent	Eclt en Nappe	Eclt en Nappe	Eclt en Nappe	Eclt turbulent	Eclt turbulent	Eclt en Nappe	Eclt en Nappe

**Tableau II-4 :** Régimes d'écoulement dans le modèle à marches 8cmx8cm x8cm

$\alpha = 40^\circ$							
q (l /s/ml)	25,0	17,5	13,6	12,5	11,3	06,9	
$d_c$ (cm)	3,99	3,15	2,66	2,52	2,35	1,69	
$d_c/h$	0,50	0,39	0,33	0,31	0,29	0,21	
Observation	Eclt en Nappe						

Dans le cas du modèle 4cmx4cmx4cm et pour la pente 20°, l'écoulement est caractérisé par un écoulement en nappe. Pour la pente 41°, l'écoulement est caractérisé par un écoulement en nappe pour les débits allant de 2,7l/s/ml à 4,5l/s/ml. Et il est représenté par un écoulement très turbulent pour les débits variant de 14,5l/s/ml à 23,9l/s/ml.

Dans le modèle 8cmx8cmx8cm l'écoulement n'a été caractérisé que par un écoulement en nappe. Il en ressort que les dimensions des marches ont une influence sur la nature du régime d'écoulement.

**b. Nature des ressauts**

Les résultats expérimentaux sont donnés dans les tableaux II-5 et II-6 ci-dessous pour les modèles.

**Tableau II-5** : Nature des ressauts dans le modèle à marches 4cm x 4cm x 8cm

	$\alpha = 20^\circ$			$\alpha = 41^\circ$	
	q (l/s/ml)	11,4	8,0	2,8	4,5
$d_c/h$	0,59	0,47	0,23	0,32	0,22
$(d_c/h)_{\text{début}}$	0,33	0,33	0,33	0,11	0,11
Observation	Ressaut Part. Développé	Ressaut Part. Développé	Ressaut plein. développé	Ressaut Part. développé	Ressaut Part. développé

L'écoulement en nappe est caractérisé par un ressaut pleinement développé, pour la pente de  $20^\circ$  et un débit de 2,8l/s/ml. Pour les débits allant de 8l/s/ml à 11,4l/s/ml, le ressaut est partiellement développé.

Pour la pente de  $41^\circ$ , l'écoulement en nappe est caractérisé par un ressaut partiellement développé.

**Tableau II-6** : Nature des ressauts dans le modèle à marches 8cm x 8cm x 8cm

	$\alpha = 40^\circ$					
	q (l/s/ml)	25,00	17,50	13,63	12,50	11,25
$d_c / h$	0,499	0,394	0,333	0,314	0,293	0,211
$(d_c / h)_{\text{début}}$	0,114	0,114	0,114	0,114	0,114	0,114
Observation	Ressaut part. développé					

L'écoulement en nappe est caractérisé par un ressaut partiellement développé.

**3°/ Entraînement d'air dans les écoulements très turbulents**

Les écoulements dans les canaux découverts sont caractérisés par la surface libre. En raison de la condition cinématique, la vitesse à l'interface eau - air est identique dans les deux fluides. Si la vitesse de surface de l'eau est faible et l'air stagnant, l'interface est définie. Par contre, si la vitesse de surface de l'eau est grande par rapport à la vitesse moyenne de l'air, on constate une surface rugueuse.

Une différence considérable des vitesses près d'une interface eau - air provoque un échange d'énergie. Plus particulièrement, des gouttes d'eau sont prises dans l'air et des bulles d'air peuvent être emprisonnées par l'eau. Par conséquent, un mélange d'eau et d'air s'ensuit et on parle d'une aération superficielle de l'eau. C'est le phénomène d'entraînement d'air naturel.

A la sortie du déversoir, l'écoulement est initialement peu turbulent. Ce dernier s'accélère, et une couche limite turbulente se développe jusqu'à atteindre la surface libre du fluide. A partir de ce point, les vitesses de fluctuations turbulentes deviennent suffisamment importantes pour entraîner de l'air dans l'écoulement.

Le point de début d'entraînement d'air est appelé : point d'inception ou point d'apparition de l'eau blanche. Les caractéristiques de ce dernier sont  $L_I$  (distance à la crête du déversoir) et  $d_I$  (profondeur d'eau en ce point).

- La distance séparant le point d'inception I et la crête du déversoir est donnée par :

$$\frac{L_I}{h \cos \alpha} = 9,72 F^{0,72} (\sin \alpha)^{0,08}$$

- La profondeur d'eau au point d'inception est exprimée par :

$$\frac{d_I}{h \cos \alpha} = \frac{0,40}{(\sin \alpha)^{0,04}} F^{0,59}$$

Lors de nos essais, nous avons obtenu un écoulement extrêmement turbulent que dans le modèle 1 avec une pente de  $20^\circ$  et pour un débit de 23,9l/s/ml et pour une pente de  $41^\circ$  et pour les débits  $Q = 23,9\text{l/s/ml}$  et  $Q = 14,5\text{l/s/ml}$ . Dans le tableau II-7 sont données les coordonnées des points d'inception.

**Tableau II-7** : Coordonnées des points d'inception

$q$ (l/s/ml)	14,5	23,9
F	1,08	1,78
$L_I$ (cm)	30,0	37,2
$d_I$ (cm)	1,30	1,74

Lorsque le débit augmente, le point d'inception s'éloigne de la crête du déversoir.

### III. CALCUL ANALYTIQUE DU POINT D'INCEPTION

Le long du canal, l'épaisseur de la couche limite se développera jusqu'à atteindre la surface libre.

Dans ce cas, il est possible d'égaliser le débit total au débit de la couche limite  $q_\delta$ . Ce dernier est obtenu en intégrant le profil des vitesses :

$$q_\delta = \int_0^\delta U dy \quad \text{avec, } U = U_\infty \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/n} \quad (\text{II-3})$$

$$\text{d'où : } q_\delta = \frac{n}{n+1} U_\infty \delta(x) \quad (\text{II-4})$$

L'épaisseur de la couche limite est donnée par (**Bacara**, 1991):

$$\delta(x) = \frac{a(n+2) \left[ (x \sin \alpha + h')^2 - h'^2 \right]}{2 \sin \alpha (x \sin \alpha + h')} \quad (\text{II-5})$$

Il en résulte :

$$q_\delta = \frac{an(n+2) \left[ (x \sin \alpha + h')^2 - h'^2 \right]}{(n+1)2 \sin \alpha (x \sin \alpha + h')} \sqrt{2g} (x \sin \alpha + h')^{1/2} \quad (\text{II-6})$$

Le débit total est :  $q_e = C_d \sqrt{2g} h'^{3/2}$  avec,  $C_d$  coefficient de débit.

Au point d'inception  $q_e = q_\delta$ , ceci nous donne :

$$C_d h'^{3/2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)2 \sin \alpha} a \frac{\left[ (x \sin \alpha + h')^2 - h'^2 \right]}{(x \sin \alpha + h')^{1/2}} \quad (\text{II-7})$$

$$h'^{3/2} (x \sin \alpha + h')^{1/2} C_d \frac{(n+1)2 \sin \alpha}{n(n+2)a} = \frac{(x \sin \alpha + h')^2}{(x \sin \alpha + h')^{1/2}} - \frac{h'^2}{(x \sin \alpha + h')^{1/2}} \quad (\text{II-8})$$

$$\text{Nous posons : } \beta = C_d \frac{(n+1)2 \sin \alpha}{n(n+2)a} \quad (\text{II-9})$$

$$h'^{3/2} \beta (x \sin \alpha + h')^{1/2} = (x \sin \alpha + h')^2 - h'^2$$

$$\left( \frac{x \sin \alpha + h'}{h'} \right)^2 - \beta \left( \frac{x \sin \alpha + h'}{h'} \right)^{1/2} = 1 \quad (\text{II-10})$$

En posant :  $y = \left( \frac{x \sin \alpha + h'}{h'} \right)^{1/2}$ , il en résulte une équation de la forme :

$$y^4 - \beta y = 1 \quad (\text{II-11})$$

#### Détermination du coefficient de débit

$$\text{Le débit total est donné par : } q_e = C_d \sqrt{2g} h''^{3/2} \quad (\text{II-12})$$

avec,  $h''$  charge égale à  $h' + V^2/2g$

Les résultats sont présentés dans le tableau II-8 ci-dessous.

Tableau II-8 : Coefficient de débit

	$\alpha = 20^\circ$				$\alpha = 41^\circ$			
q (l/s/ml)	23,9	11,38	08,00	02,75	23,9	14,50	04,50	2,63
h' (cm)	3,00	1,90	1,40	0,70	3,00	2,20	1,00	0,70
V <sup>2</sup> /2g (cm)	3,20	1,80	1,60	0,80	3,20	2,20	1,00	0,70
C <sub>d</sub>	0,349	0,359	0,339	0,344	0,349	0,355	0,352	0,353
C <sub>dmoy</sub>	0,348				0,352			

Détermination de la position du point d'inception L<sub>I</sub>

Les résultats sont présentés dans le tableau II-9.

Tableau II-9 : Position du point d'inception (calcul analytique)

	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 41^\circ$	
q (l/s/ml)	23,9	23,9	14,50
f	0,286	0,412	0,320
n	2,17	1,81	2,05
y	2,137	2,763	2,672
X <sub>i</sub> =L <sub>I</sub> (cm)	41,71	40,45	32,54

Les résultats analytiques donnés dans le tableau II-9 sont de même ordre de grandeur que les résultats expérimentaux donnés dans le tableau II-7 (**Benmamar, Kettab**, 1994).

**IV. DISSIPATION D'ENERGIE****1°/ Ecoulement en nappe**

L'énergie dissipée dans un écoulement en nappe est donnée par (**Chanson**, 1994) :

$$\frac{\Delta h}{H_{\max}} = 1 - \frac{0,54 \left( \frac{d_c}{h} \right)^{0,275} + \frac{3,43}{2} \left( \frac{d_c}{h} \right)^{-0,55}}{\frac{3}{2} + \frac{H_{\text{barrage}}}{d_c}}$$

**2°/ Ecoulement très turbulent**

L'énergie dissipée dans un écoulement très turbulent aéré est exprimée par (**Chanson**, 1994) :

$$\frac{\Delta H}{H_{\max}} = 1 - \left[ \left( \frac{f_e}{8 \sin \alpha} \right)^{1/3} \cos \alpha + \frac{1}{2} E_c \left( \frac{f_e}{8 \sin \alpha} \right)^{-2/3} \right] \frac{d_c}{H_{\text{barrage}}}$$

Les résultats expérimentaux pour nos deux modèles sont donnés dans les tableaux II-10 et II-11.

**Tableau II-10** : Taux de dissipation d'énergie dans le modèle 1 (4cm x 4cm x 8cm)

	Écoulement en nappe					Écoulement très turbulent						
						Écoulement non aéré			Écoulement aéré			
$d_c / h$	0,59	0,47	0,23	0,32	0,22							
						$f_e = 1$	$f_e = 1$	$f_e = 1$	$f_e = 0,56$	$f_e = 0,40$		
$\alpha$	$\alpha = 20^\circ$			$\alpha = 41^\circ$		$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 41^\circ$		$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 41^\circ$		
$H_{bar}/d_c$	13,60	17,10	34,8	25,20	36,00	8,30	8,30	11,5	8,30	8,30	11,5	
$\Delta H_{max}/H_{max}$	82%	84%	88%	86%	89%	70%	67%	72%	62%	35%	53%	

**Tableau II-11**: Taux de dissipation d'énergie dans le modèle 2 (8cm x 8cm x 8cm)

	Écoulement en nappe					
	$\alpha = 40^\circ$					
$d_c / h$	0,50	0,39	0,33	0,31	0,29	0,21
$H_{bar}/d_c$	8,02	10,16	12,03	12,70	13,62	18,93
$\Delta H_{max}/H_{max}$	69%	72%	74%	74,4%	75%	78,5%

Dans le cas de l'écoulement en nappe, le taux de dissipation augmente avec la diminution du débit. Et il n'y a aucune influence de la pente sur ce taux (tableaux II-10 et II-11). Pour l'écoulement turbulent, le taux de dissipation est plus important dans le cas d'un écoulement turbulent non aéré (tableau II-10).

### Conclusion

Nos essais ont bien mis en évidence les deux types d'écoulements : écoulement en nappe et écoulement très turbulent. L'écoulement en nappe a été caractérisé par des ressauts partiellement développés et pleinement développés. L'écoulement très turbulent a été représenté par des écoulements non aéré et aéré.

Nos résultats ont montré que :

- Le point d'inception s'éloigne de la crête du déversoir avec l'augmentation du débit.
- Le taux de dissipation dans l'écoulement en nappe est beaucoup plus important que dans le cas l'écoulement très turbulent.

Pour affirmer ces résultats, nous avons fait d'autres essais expérimentaux sur d'autres modèles réduits avec des échelles plus importantes.

## Chapitre III: Etude expérimentale des écoulements sur canal à motif périodique à faible et à forte pentes

### I. ETUDE EXPERIMENTALE DES ECOULEMENTS SUR CANAL A MOTIF PERIODIQUE A FAIBLE

L'étude de l'écoulement dans un canal en marches d'escalier mis en position horizontale ou à faible pente, est l'étude de l'écoulement au-dessus d'éléments triangulaires fixés sur le fond du canal.

Plusieurs études ont été menées sur les écoulements au-dessus d'éléments fixés sur le fond d'un canal. L'objet de ces études est généralement de déterminer une loi d'écoulement. Cette loi est donnée sous diverses formes.

#### A. ETUDES DES ECOULEMENTS AU-DESSUS D'ELEMENTS FIXES SUR FOND DE CANAL

**Raju** et **Garde** (1970), ont étudié les écoulements au-dessus de barres bidimensionnelles disposées dans un canal, pour les pentes de 0,075% et 0,2875%.

Des essais combinés en soufflerie ont permis d'évaluer les coefficients de traînée  $C_x$  des éléments.

Ils ont proposé la formule empirique suivante pour la détermination de la perte de charge :  $\frac{1}{\sqrt{C_x}} = C_1 \log \frac{h}{k_s} + C_2$  où,  $C_1$  et  $C_2$  varient avec l'espacement relatif à  $L/k_s$ .

Dans un élément situé à une distance  $L > 11k_s$  à l'aval d'un autre élément,  $C_x$  croît avec la distance  $L$  entre les deux éléments. Ces observations soulignent l'importance de l'espacement longitudinal.

Ainsi **Raju** et **Garde** ont classé l'écoulement en trois catégories :

\* *Ecoulement à rugosité isolée*

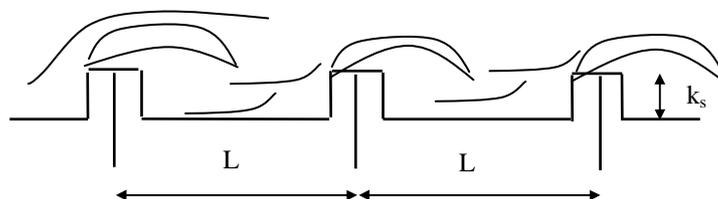
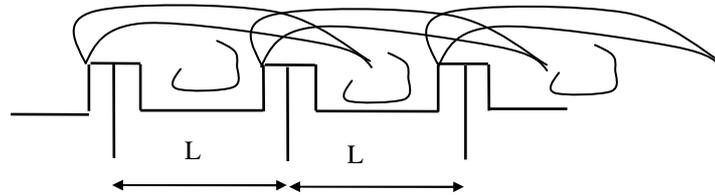


Figure III.1 : Ecoulement à rugosité isolée

Les éléments sont suffisamment éloignés pour que le sillage d'un élément situé en amont soit complètement développé puis dissipé avant d'atteindre l'élément suivant.

- *Ecoulement à "interférence de sillage"*

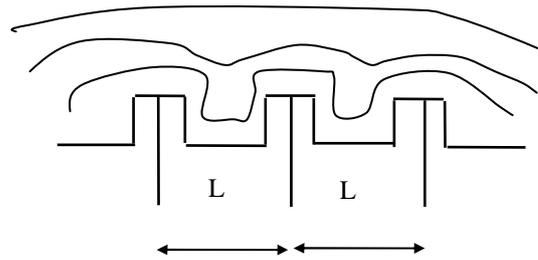
Si l'on rapproche les éléments, le sillage de chaque élément interfère avec ceux qui se développent à l'élément suivant créant des zones de forte turbulence et une forte perte de charge.



**Figure III.2 :** Ecoulement à interférence de sillage

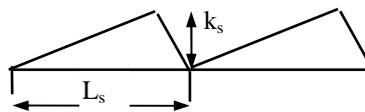
- *Ecoulement "quasi-lisse"*

Si l'on réduit plus la distance entre les éléments, l'écoulement va glisser au-dessus des éléments.



**Figure III.3 :** Ecoulement quasi-lisse

En 1977, **Vittal, Raga Raju, et Garde**, (1977) ont effectué des expériences sur des canaux ouverts munis d'une rugosité triangulaire bidimensionnelle (figure III.4).



**Figure III.4 :** Rugosité triangulaire

Pour une rugosité correspondant à un rapport hauteur sur longueur de 1/5, les auteurs présentent la formule suivante :

$$f = 1,44 \frac{k_s}{L_s} \left( \frac{y}{k_s} + \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{8}}$$

**Rajaratnam** et **Katapodis** ont développé en 1990 une comparaison entre les expériences sur les canaux en marches d'escalier et les expériences effectuées sur une passe à poissons (**Rajaratnam, Katopodis**, 1991).

Leurs analyses ont montré que les facteurs de frottement d'une passe à poissons sont de même ordre de grandeurs que ceux des canaux en marches d'escalier. Ils ont obtenu un facteur de frottement de l'ordre 0,4 à 4.

En 1992, **Gevorkyan** et **Kalantarova** ont considéré l'écoulement au delà des dents des marches opposées à l'écoulement.

Pour un rapport hauteur sur longueur de 1/4, ils ont obtenu la formule suivante :

$$f = 8g \left( \frac{1000}{52 - 5,1 \frac{y}{k_s}} \right)$$

En 1995, **Larinier** et **Chorda** ont étudié les écoulements au-dessus de barrettes bidimensionnelles régulièrement réparties dans un canal, pour des pentes allant de 1% à 5%. Ils ont proposé pour des canaux rectangulaires la loi d'écoulement suivante :

$$\frac{q}{\sqrt{g k^2}} = C_1 \left( \frac{h}{k} \right)^{C_2} I^{C_3} \left( \frac{L}{k} \right)^{C_4} + C_5 \quad \text{pour } \frac{h}{k} < 3$$

où,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  et  $C_5$  sont des constantes dépendant de la géométrie des rugosités.

**Puel** en 1995, a réalisé à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse des essais avec des rugosités artificielles consistant en des cylindres en bois disposés au fond du canal. Il décrit l'écoulement par une loi de la forme :

$$\text{Pour } \frac{h}{k_s} < 1 \quad Q_* = 0,41 \left( \frac{y}{k_s} \right)^{1,57} \left( \frac{L_s}{k_s} \right)^{0,16} I^{0,17} \quad \text{pour } I = 0,5\%, \quad 2\% \quad \text{et} \quad 3\%$$

$$Q_* = 0,07 \left( \frac{y}{k_s} \right)^{0,88} \left( \frac{L_s}{k_s} \right)^{0,70} \quad \text{pour } I = 5\%$$

$$\text{Pour } \left( \frac{h}{k_s} \right) > 1 \quad Q_* = 0,27 + 5,70 \left( \frac{y}{k_s} - 1 \right)^{1,23} \left( \frac{L_s}{k_s} \right)^{0,08} I^{0,40}$$

avec,  $Q_* = \frac{Q}{\sqrt{2g k^2}}$  débit adimensionnel.

---

**B. ETUDE EXPERIMENTALE**

Les essais que nous avons effectués sur les deux modèles de canaux en marches d'escalier (4cmx4cmx8cm) et (8cmx8cmx8cm), en position horizontale, nous ont donné un profil de la surface libre qui suit la géométrie du canal. C'est un écoulement quasi-lisse. Ceci nous a incité à faire d'autres essais sur un nouveau modèle à plus grande échelle.

**1°/ Installation**

Les études ont été menées dans le hall d'essais COUSTEX à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, sur un canal vitré de pente variable, constitué de treize motifs périodiques et dont les caractéristiques sont données ci-dessous.

- Largeur des motifs : 8cm X
- Hauteur des motifs : 8cm Y
- Longueur des motifs : 25cm Z

**2°/ Moyens de mesures**

Au cours des essais, deux mesures principales ont été effectuées, qui consistent en la mesure des débits et des hauteurs d'eau. Trois pentes ont été considérées :  $\text{tg } \alpha = 4,25 \%$ ,  $\text{tg } \alpha = 3 \%$ , et  $\text{tg } \alpha = 1,6 \%$ .

**a. Mesure du débit**

La mesure du débit est faite à l'aide d'un débitmètre électromagnétique Khrono qui indique directement la valeur du débit.

**b. Mesure de la profondeur d'eau**

La mesure du tirant d'eau, est faite à l'aide d'une réglette graduée. Ce moyen de mesure est apparu comme étant le moyen le mieux adapté au repérage de la position de la surface libre. Cette méthode peut sembler à première vue rustique mais :

- Des prises de pression de fond ne sont pas fiables dans des zones de recirculation.
- Un anémomètre à laser a été utilisé, mais la présence de bulle d'air a faussé les mesures rendant celles-ci non exploitables.

**3°/ Analyse des résultats**

Lors de nos essais, pour les faibles débits, la ligne d'eau prenait la forme du canal. Mais au fur et à mesure que nous augmentions le débit, cette ligne d'eau avait tendance à s'aplatir. Ceci nous a amené à essayer de proposer une loi d'écoulement en fonction de la profondeur moyenne.

**a. Variation de la hauteur moyenne**

Nous avons tracé sur les figures III.5 ÷ III.7 la variation de la hauteur moyenne de l'écoulement dans le canal à rugosité périodique en fonction du débit et pour chaque pente.

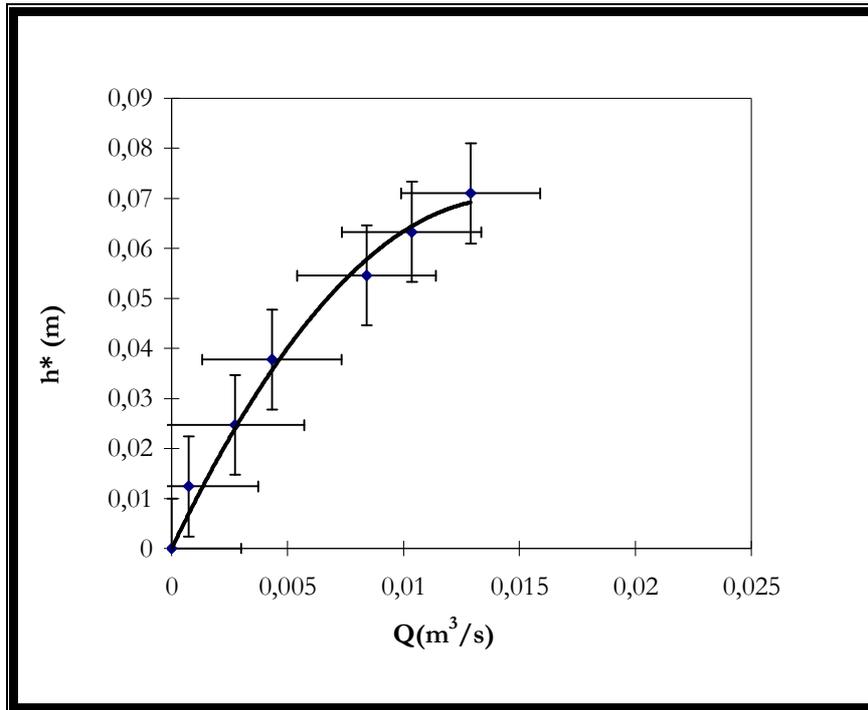


Figure III.5 : Variation de la hauteur moyenne de l'écoulement ( $h^*$ ) en fonction du débit pour  $\text{tg } \alpha = 1,6\%$

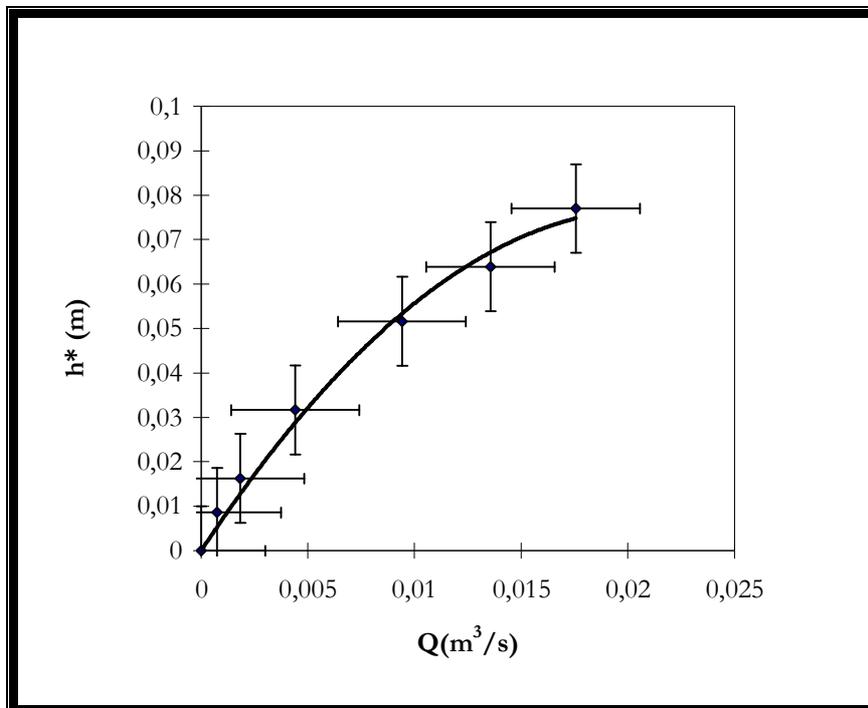


Figure III.6 : Variation de la hauteur moyenne de l'écoulement ( $h^*$ ) en fonction du débit pour  $\text{tg } \alpha = 3,0\%$

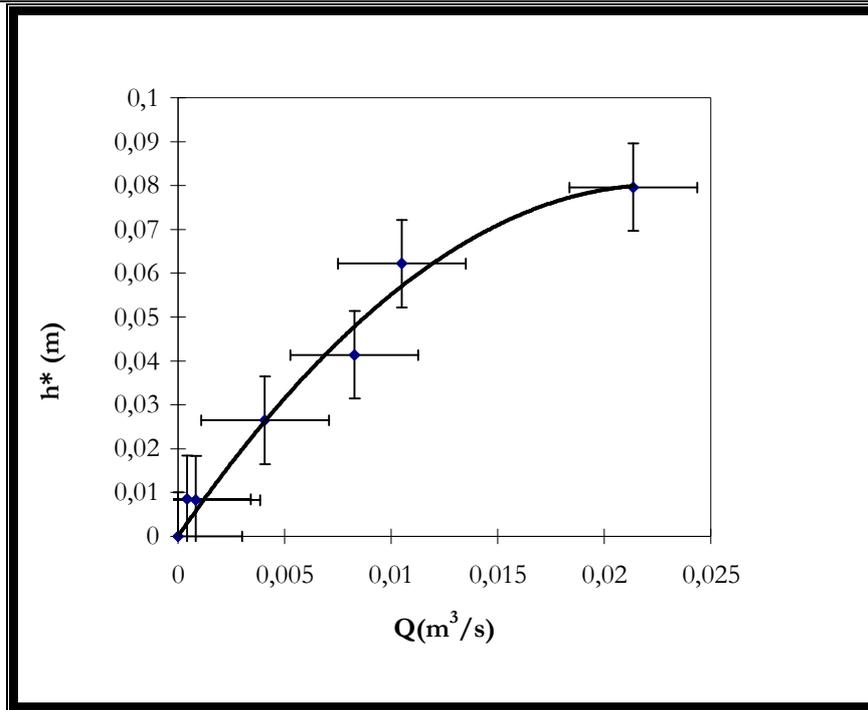


Figure III.6 : Variation de la hauteur moyenne de l'écoulement ( $h^*$ ) en fonction du débit pour  $\text{tg } \alpha = 4,25\%$

Nous avons porté dans le tableau III-1 les mesures de débit et de la profondeur d'écoulement pour les différentes pentes.

**Tableau III-1 :** Mesures de débit et de la profondeur d'écoulement pour les différentes pentes.

tg $\alpha = 1,6\%$		tg $\alpha = 3,0\%$		tg $\alpha = 4,25\%$	
Q (m³/s)	h* (m)	Q (m³/s)	h* (m)	Q (m³/s)	h* (m)
$\times 10^3$	$\times 10^2$	$\times 10^3$	$\times 10^2$	$\times 10^3$	$\times 10^2$
0,73	1,24	0,75	0,86	0,42	0,85
2,73	2,47	1,83	1,63	0,84	0,83
4,32	3,78	4,41	3,17	4,08	2,65
8,4	5,46	9,42	5,16	8,27	4,14
10,35	6,33	13,56	6,39	15,06	6,22
12,90	7,1	17,56	7,7	21,36	7,96

Les anamorphoses que nous avons proposé au chapitre II et la dispersion de points observée dans les figures III.5, III.6 et III.7, nous ont conduit à tracer  $h^{*5/3}$  en fonction du débit et pour chaque pente.

Nous avons représenté sur les figures III.8 ÷ III.10 la variation de  $h^{*5/3}$  en fonction du débit et pour chaque pente.

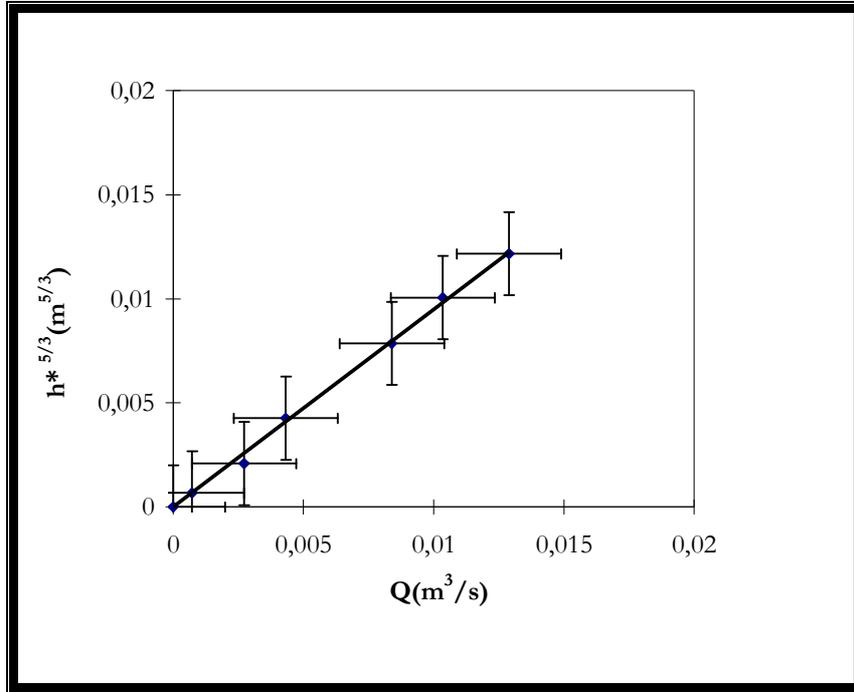


Figure III.8 : Variation de  $h^{*5/3}$  en fonction du débit pour  $\text{tg } \alpha = 1,6\%$

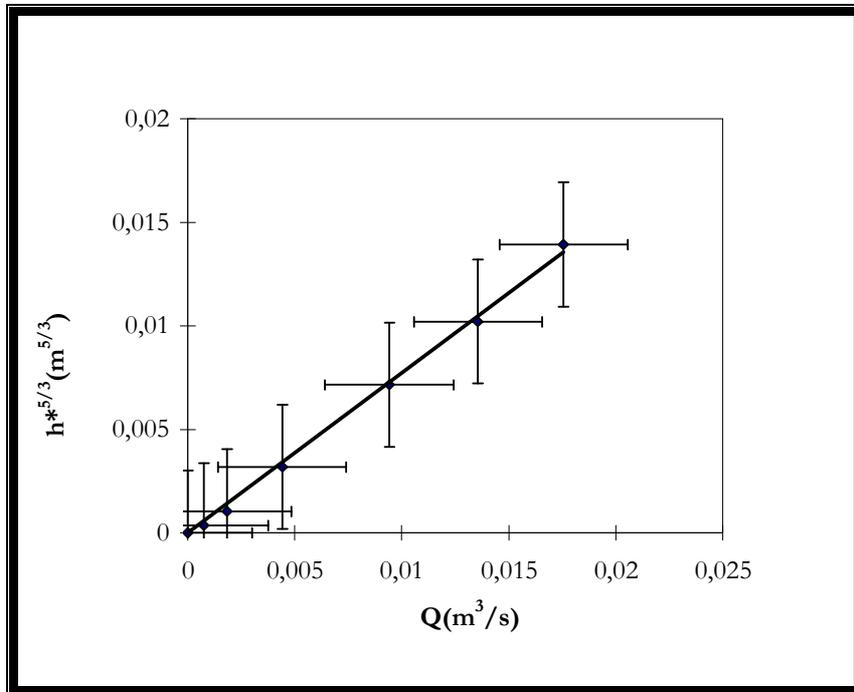


Figure III.8 : Variation de  $h^{*5/3}$  en fonction du débit pour  $\text{tg } \alpha = 3,0\%$

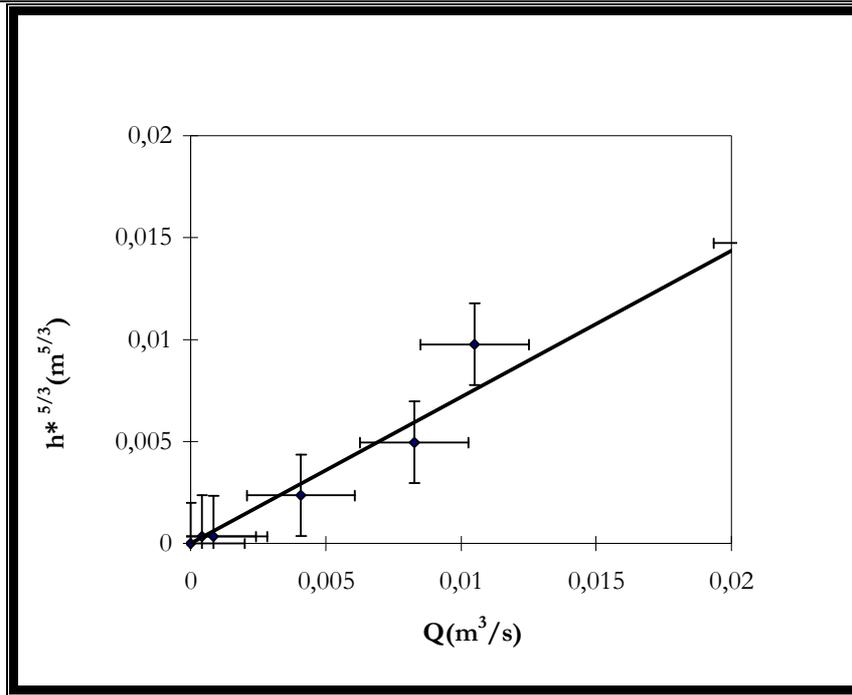


Figure III.10 : Variation de  $h^* 5/3$  en fonction du débit pour  $\text{tg } \alpha = 4,25\%$

Dans la figure III.11 est donnée la variation de  $h^* 5/3$  en fonction de  $(\text{tg } \alpha)^{1/2}$ .

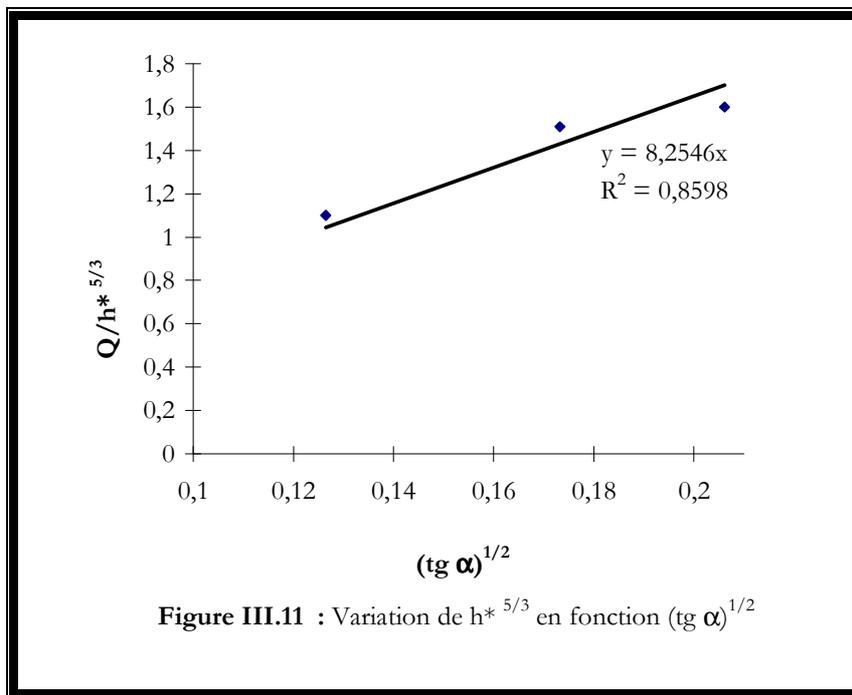


Figure III.11 : Variation de  $h^* 5/3$  en fonction  $(\text{tg } \alpha)^{1/2}$

La loi d'écoulement que nous proposons pour les écoulements au-dessus d'éléments triangulaires fixés sur le fond du canal est :

$$Q = 1,84h_*^{\frac{5}{3}} \sqrt{2g} \sqrt{\text{tg } \alpha} \tag{III-1}$$

**b. Variation de la pente Hydraulique**

La pente hydraulique est donnée par :  $J = \frac{\Delta H}{L}$  avec, L : distance entre deux éléments. Les résultats sont donnés dans les tableaux III-2 ÷ III-4.

**Tableau III-2** : Pente Hydraulique pour différents débits et pour  $\text{tg } \alpha = 1,6\%$ 

tg $\alpha = 1,6\%$										
Q (m <sup>3</sup> /s) x10 <sup>3</sup>	M4 J	M5 J	M6 J	M7 J	M8 J	M9 J	M10 J	M11 J	M12 J	h*(m) x10 <sup>2</sup>
0,73	0,0122	0,0093	0,0053	0,0031	0,0080	0,0097	0,0063	0,0112	0,0110	1,24
2,73	0,0080	0,0066	0,0068	0,0094	0,0102	0,0080	0,0080	0,0108	0,0095	2,47
4,32	0,0080	0,0046	0,0048	0,0070	0,008	0,0080	0,0091	0,0092	0,0129	3,78
8,40	0,0040	0,0098	0,0095	0,0061	0,0092	0,0127	0,0091	0,0099	0,0067	5,46
10,35	0,0043	0,0048	0,0095	0,0092	0,0086	0,0150	0,0094	0,0078	0,0072	6,33
12,90	0,0119	0,0017	0,0099	0,0109	0,0071	0,0140	0,0080	0,0082	0,0078	7,10

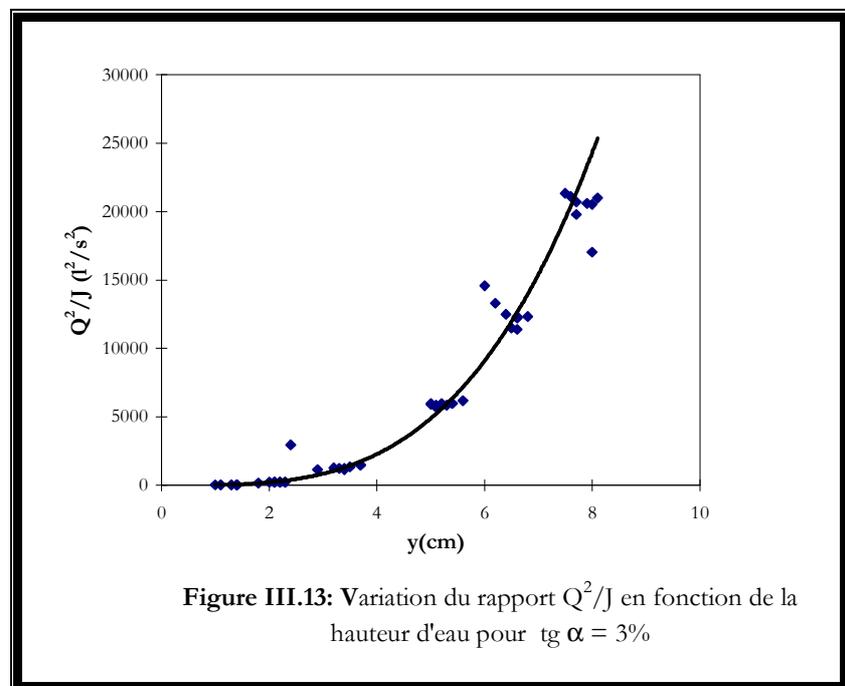
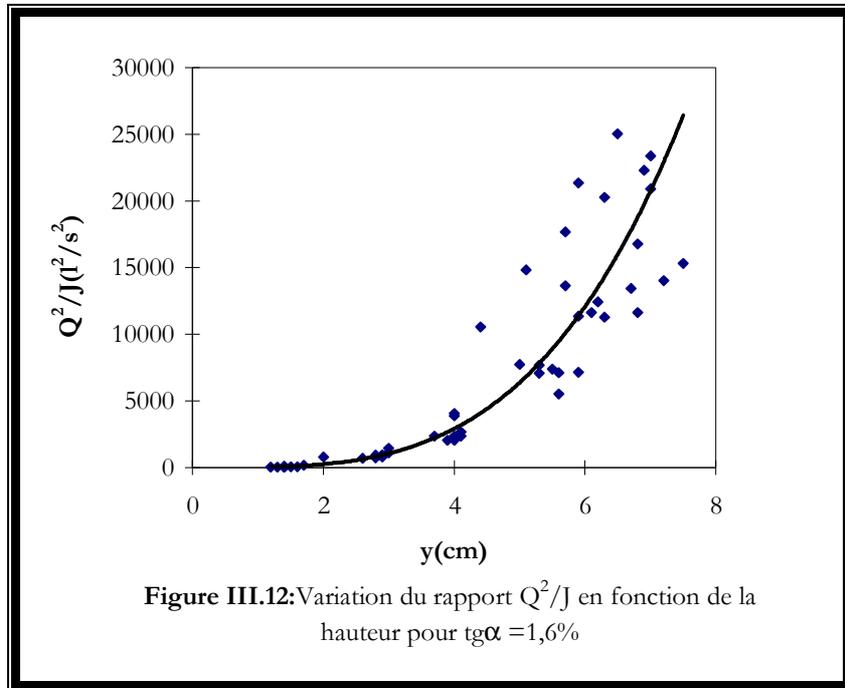
**Tableau III-3** : Pente Hydraulique pour différents débits et pour  $\text{tg } \alpha = 3,0\%$ 

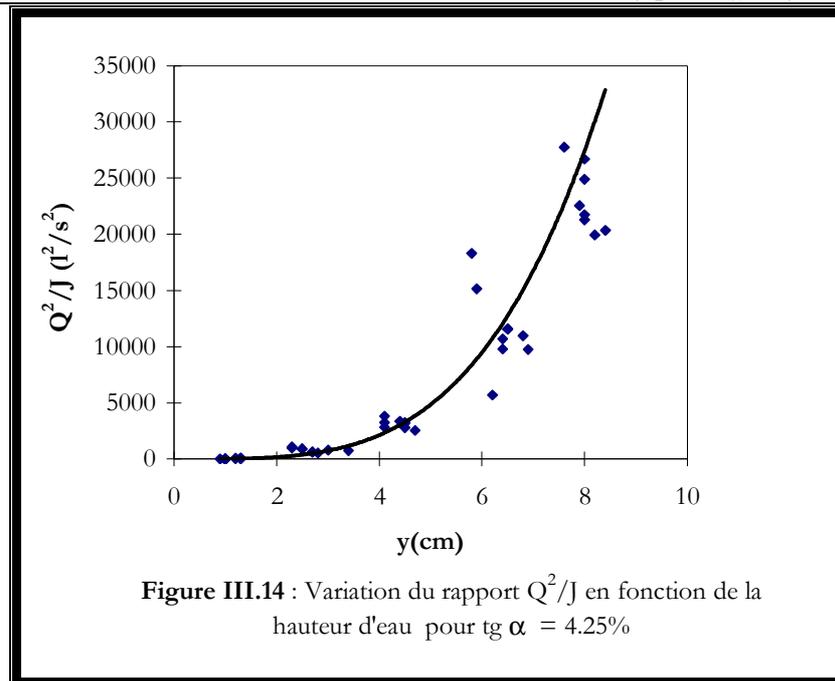
tg $\alpha = 3,0\%$										
Q (m <sup>3</sup> /s) x10 <sup>3</sup>	M4 J	M5 J	M6 J	M7 J	M8 J	M9 J	M10 J	M11 J	M12 J	h*(m) x10 <sup>2</sup>
0,9	0,0147	0,0147	0,0115	0,0127	0,0148	0,0136	0,0150	0,0164	0,0190	8,6
1,7	0,0141	0,0136	0,0142	0,0148	0,0138	0,0140	0,0139	0,0139	0,0190	1,63
3,5	0,0156	0,0130	0,0145	0,0168	0,0157	0,0130	0,0152	0,0169	0,0066	3,17
5,2	0,0148	0,0144	0,0151	0,0156	0,0149	0,0148	0,0148	0,0150	0,0152	5,16
6,6	0,0150	0,0160	0,0149	0,0138	0,0149	0,0161	0,0150	0,0147	0,0126	6,39
8,1	0,0144	0,0180	0,0156	0,0147	0,0150	0,0151	0,0146	0,0149	0,0114	7,7

**Tableau III-4** : Pente Hydraulique pour différents débits et pour  $\text{tg } \alpha = 4,25\%$ 

tg $\alpha = 4,25\%$										
Q (m <sup>3</sup> /s) x10 <sup>3</sup>	M4 J	M5 J	M6 J	M7 J	M8 J	M9 J	M10 J	M11 J	M12 J	h*(m) x10 <sup>2</sup>
0,42	0,0214	0,0210	0,0214	0,0212	0,0210	0,0212	0,0212	0,0227	0,0212	0,85
0,84	0,0214	0,0203	0,0214	0,0212	0,0210	0,0212	0,0221	0,0221	0,0212	0,83
4,08	0,0214	0,0312	0,0181	0,0183	0,0227	0,0171	0,0153	0,0276	0,0276	2,65
8,27	0,0268	0,0244	0,0203	0,0212	0,0215	0,0246	0,0212	0,0178	0,0043	4,14
15,06	0,0196	0,0398	0,0233	0,0232	0,0207	0,0212	0,0197	0,0150	0,0124	6,22
21,36	0,0171	0,0229	0,0214	0,0224	0,0210	0,0183	0,0202	0,0164	0,0057	7,96

Les figures III.12 ÷ III.14 représentent la variation du rapport  $Q^2/J$  en fonction de la profondeur d'écoulement sur les différents obstacles et pour chaque pente. Une certaine dispersion des points particulièrement pour la dernière marche du canal est constatée.





Suite à nos résultats expérimentaux, la loi de perte de charge que nous proposons est :

$$Q = 0,55 y^{7/4} \sqrt{2g} (\sin \alpha)^{0,6} \sqrt{J} \quad (\text{III-2})$$

L'objectif de cette partie de cette thèse est de proposer une loi d'écoulement concernant l'écoulement au-dessus d'éléments triangulaires fixés sur le fond du canal. Nous avons obtenu lors de nos essais un écoulement quasi-lisse. Ce dernier est régi par l'équation :

$$Q = 1,84 h_*^{5/3} \sqrt{2g} \sqrt{\text{tg} \alpha}$$

En augmentant le débit, la ligne d'eau a tendance à s'aplatir.

## **II. ETUDE EXPERIMENTALE DES ECOULEMENTS DANS LES CANAUX A MOTIF PERIODIQUE A FORTE PENTE**

Cette troisième partie expérimentale a été menée au laboratoire d'hydraulique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger sur trois modèles de canal en marche d'escaliers de différentes dimensions (*Gafsi, Benmamar, 1998*).

Les caractéristiques des modèles, et les moyens de mesure seront détaillés dans ce qui suit.

### **A. INSTALLATION**

#### **1°/ Description du dispositif expérimental**

Le dispositif expérimental est un circuit fermé, constitué de deux réservoirs d'un canal vitré réalisé en verre et à fond en acier et d'un modèle de canal en marches d'escaliers en plexiglass.

Un premier réservoir est relié à un canal rectangulaire. Ce dernier est relié à un canal en marches. L'eau est refoulée du premier réservoir aux deux canaux à l'aide d'une pompe vannée. Cette dernière permet la variation du débit. Le second réservoir permet l'évacuation de l'eau s'écoulant du canal en marche d'escalier. Celui-ci est muni d'une pompe refoulant l'eau vers le premier réservoir faisant ainsi de notre système un circuit fermé. Une guillotine est installée au niveau du canal en marches d'escalier et qui nous permet de faire varier la pente.

## 2°/ Description des modèles

Cette étude expérimentale nous l'avons effectuée sur trois modèles réduits de canal en marche d'escaliers en Plexiglass.

### a. Dimensions du modèle "I" : 11,5cm x 8,2cm x 8,0cm

Le modèle "I" est constitué d'un canal comprenant dix (10) marches de dimensions constantes : La hauteur  $h$  de la marche est égale à 11,5cm ; La longueur  $l$  de la marche est égale à : 8,2cm ; La largeur  $B$  de la marche est égale à 8,0cm (photo III.1).

### b. Dimensions du modèle "II" : 8,0cm x 8,0cm x 8,0cm

Le modèle "II" est constitué d'un canal comprenant treize (13) marches de dimensions constantes : La hauteur  $h$  de la marche est égale à : 8,0cm ; La longueur  $l$  de la marche est égale à : 8,0cm ; La largeur  $B$  de la marche est égale à : 8,0cm (Photo III.2)

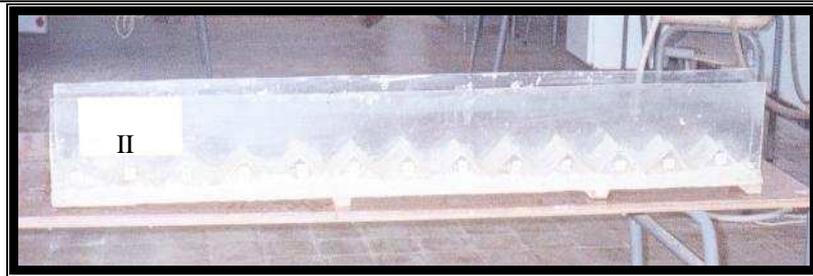
### c. Dimensions du modèle "III" : 5,75cm x 4,1cm x 4,0cm

Le modèle "III" est constitué d'un canal comprenant quinze (15) marches de dimensions constantes: La hauteur  $h$  de la marche est égale à : 5,75cm ; La longueur  $l$  de la marche est égale à : 4,1cm ; La largeur  $B$  de la marche est égale à : 4,0cm (photo III.3)



$h = 11,5\text{cm}$

Photo III.1 : Modèle I



h = 8,00cm

Photo III.2 : Modèle II



h = 5,75cm

Photo III.3 : Modèle III

Le motif de ce modèle est en similitude à l'échelle 1/2 avec le motif du modèle I.

### 3°/ Mesures

Au cours des essais, deux mesures principales ont été effectuées, qui consistent en la mesure des hauteurs d'eau et des débits.

#### a. Mesure des hauteurs d'eau

La mesure des tirants d'eau est faite par l'intégration visuelle du niveau moyen sur feuille millimétrée collée sur une des faces des modèles, et à l'aide d'un limnimètre à pointe dans le cas où la ligne d'eau était trop perturbée. Ces moyens sont apparus comme étant les mieux adoptés au repérage de la position de la surface libre.

#### b. Mesure des débits

Le débit alimentant le canal est mesuré à l'aide d'un déversoir rectangulaire à paroi mince. Nous avons procédé à un relevé des débits de fuite par la méthode volumétrique à l'aide d'un bac gradué et d'un chronomètre.

#### c. Mesure des pentes

La variation de la pente du modèle est obtenue grâce à la manipulation de la guillotine. Il y a lieu de signaler que la pente maximale étudiée est de  $42,2^\circ$ , du fait que l'installation expérimentale ne permettait pas d'aller plus loin.

#### d. Canevas de mesures

Le canevas de mesures a été réalisé comme suit :

- ◆ Nous fixons le modèle de canal en marches d'escalier avec le canal vitré.
- ◆ Nous accrochons un déversoir à paroi mince à l'intérieur du canal à 1,00m de l'entrée amont du canal.
- ◆ Nous actionnons le groupe motopompe.
- ◆ A l'aide du limnimètre à pointe :
  - Nous relevons les mesures de la charge  $H_{\text{amont}}$  à l'amont du canal en marches d'escalier ;
  - Nous notons la hauteur d'eau  $h_0$  à l'amont du déversoir à paroi mince à une distance au moins égale à  $2,5h_0$  du déversoir.
  - Pour chaque débit (ouverture de la vanne), nous relevons les tirants d'eau sur les marches.
- ◆ Nous changeons la pente en faisant coulisser la guillotine et nous refaisons le même canevas de mesure.

#### 4°/ Description des écoulements observés et mesures

Au cours de nos expériences, nous avons rencontré beaucoup de difficultés à effectuer les relevés nécessaires, surtout lorsque la pente et le débit devenaient importants. La grande perturbation de la surface libre rendait la mesure des hauteurs d'eau très difficiles.

Les essais nous ont permis de faire les observations suivantes :

- Dans le cas de faibles débits, l'épaisseur de la nappe est très réduite, l'écoulement adhère aux marches, caractérisant ainsi les écoulements en nappe, avec formation de petits ressauts pleinement développés.
- Au fur et à mesure que nous augmentions le débit, une formation de ressauts partiellement développés se fait remarquer.
- Contrairement au modèle I, dans les modèles II et III, les importants débits et les fortes pentes ont généré des écoulements très turbulents, caractérisés par un grand entraînement d'air.
- L'eau devenait blanche et on pouvait voir apparaître des rouleaux emprisonnés dans les creux des marches.
- Nous avons observé, dans le cas des forts débits et fortes pentes, des déviations du jet d'eau, ceci à partir de la première marche.

## B. ANALYSE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

### 1°/ Détermination du régime d'écoulement

Avant d'analyser les résultats expérimentaux obtenus, il est important pour nous de connaître le régime d'écoulement dans les différents modèles.

Les écoulements en nappe avec ressaut hydraulique pleinement développé se produisent pour des débits plus faibles que celui correspondant à la valeur critique définie par :

$$\frac{(d_c)_{\text{début}}}{h} = 0,09 \left( \frac{h}{l} \right)^{-1,28} \quad (\text{III-3})$$

L'écoulement en nappe avec ressaut pleinement développé se produit alors pour  $\frac{d_c}{h} < \frac{(d_c)_{\text{début}}}{h}$ . L'équation (III-3) a été obtenue pour :  $0,2 \leq \frac{h}{l} \leq 6$ .

Les écoulements très turbulents apparaissent pour des débits élevés. Ainsi, le début de l'écoulement très turbulent est fonction du débit, de la hauteur et de la longueur de la marche. Le régime d'écoulement très turbulent apparaît pour un débit supérieur à la valeur critique déduite comme suit :

$$\frac{(d_c)_{\text{début}}}{h} = 1,06 - 0,47 \frac{h}{l} \quad (\text{III-4})$$

Ainsi, l'écoulement très turbulent a lieu pour  $d_c < (d_c)_{\text{début}}$ . L'équation (III-4) est déduite pour  $0,2 \leq \frac{h}{l} \leq 1,25$ .

**Stephenson** (1991) a suggéré que la plupart des conditions appropriées à un écoulement en nappe sont (**White**, 1943) :

$$\text{tg } \alpha < 0,20 \quad (\text{III-5})$$

$$\frac{d_c}{h} < \frac{1}{3} \quad (\text{III-6})$$

Les points expérimentaux sont représentés pour chaque modèle sur les figures (III.15), (III.16) et (III.17). Ceci va nous permettre de déterminer le régime d'écoulement sur les différents modèles physiques élaborés.

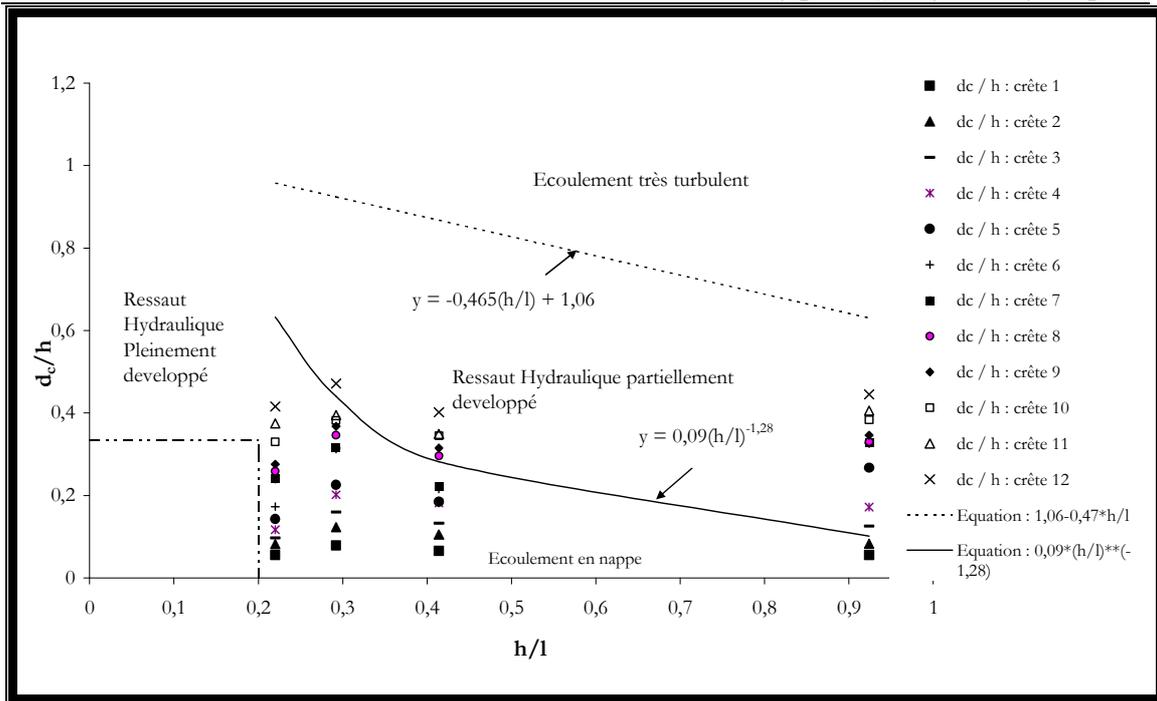


Figure III.15 : Détermination des régimes d'écoulement dans le modèle I

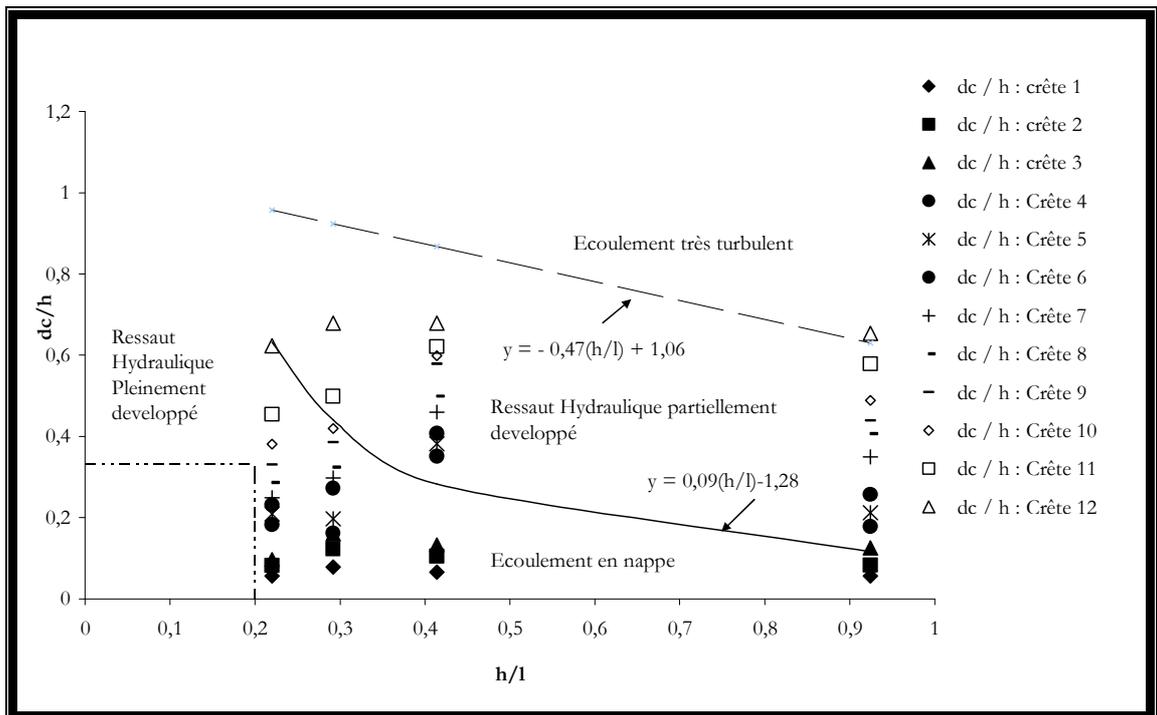


Figure III.16 : Détermination des régimes d'écoulement dans le modèle II

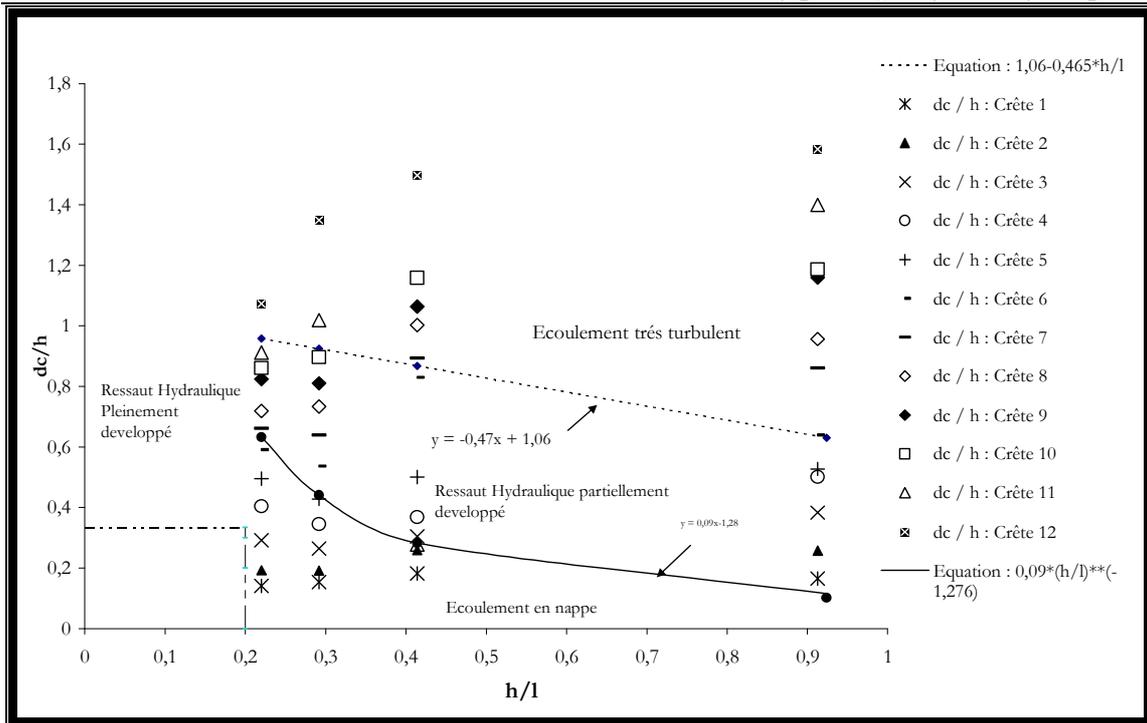


Figure III.17 : Détermination des régimes d'écoulement dans le modèle III

2°/ Résultats et observations

◆ Régimes d'écoulement dans le modèle "I"

Pour le modèle "I", Nous avons considéré quatre pentes :  $\alpha = 12,4^\circ$ ,  $\alpha = 16,3^\circ$ ,  $\alpha = 22,5^\circ$  et  $\alpha = 42,3^\circ$ .

Pour la pente  $12,4^\circ$ , l'écoulement est en nappe, et il est caractérisé par l'apparition de ressauts pleinement développés.

Pour la pente  $16,3^\circ$ , l'écoulement en nappe est caractérisé par l'apparition de ressauts pleinement développés pour des débits allant de 2,7 à 30,4(l/s/ml). Le ressaut partiellement développé apparaît pour le plus grand débit (39,5l/s/ml).

Lorsque la pente augmente à  $22,5^\circ$  et pour une variation du débit allant de 2,1l/s/ml à 31,2l/s/ml, l'écoulement en nappe reste prépondérant.

Pour les débits variants de 2,1 l/s/ml à 12,8l/s/ml, l'écoulement en nappe est caractérisé par des ressauts pleinement développés, et il est caractérisé par des ressauts partiellement développés pour les débits allant de 19,6l/s/ml à 31,2l/s/ml.

Pour la pente  $42,3^\circ$  et pour les débits variant de 1,6l/s/ml jusqu'à 36,2l/s/ml, l'écoulement reste en nappe.

Pour cette pente et pour les débits allant de 1,6 l/s/ml à 2,9l/s/ml, l'écoulement en nappe est caractérisé par des ressauts pleinement développés. Les ressauts deviennent partiellement développés à partir du débit égal à 5,5/s/ml.

---

Pour le modèle "I", l'écoulement est en nappe.

#### ◆ Régimes d'écoulement dans le modèle II

Pour le modèle « II », nous avons utilisé également quatre pentes différentes :  $\alpha = 12,4^\circ$ ,  $\alpha = 16,3^\circ$ ,  $\alpha = 22,5^\circ$  et  $\alpha = 39,8^\circ$ .

Pour la pente  $12,4^\circ$  et pour les débits variants de  $1,2\text{l/s/ml}$  à  $34,9\text{l/s/ml}$ , l'écoulement est en nappe. Pour cette pente, l'écoulement en nappe est caractérisé par l'apparition de ressauts pleinement développés.

En augmentant la pente à  $16,3^\circ$ , et pour les débits variants de  $1,0\text{l/s/ml}$  à  $39,7\text{l/s}$ , le régime d'écoulement est en nappe.

Pour cette pente et pour les débits allant de  $1,0$  à  $19,2\text{l/s/ml}$ , l'écoulement en nappe est caractérisé par l'apparition de ressauts pleinement développés. Pour les débits variants de  $25,0\text{ l/s/ml}$  à  $39,7\text{l/s/ml}$ , les ressauts deviennent partiellement développés.

Pour la pente  $22,5^\circ$  et pour une variation du débit allant de  $3,8\text{l/s/ml}$  à  $39,9\text{l/s/ml}$ , l'écoulement en nappe reste prépondérant.

Pour la pente  $22,5^\circ$  et pour les débits variants de  $3,8\text{l/s/ml}$  à  $9,6\text{l/s/ml}$ , l'écoulement en nappe est caractérisé par des ressauts pleinement développés, et par des ressauts partiellement développés pour les débits allant de  $14,7\text{l/s/ml}$  à  $39,9\text{l/s/ml}$ .

Pour la plus grande pente, l'écoulement est en nappe pour les débits variants de  $1,9\text{l/s/ml}$  jusqu'à  $31,3\text{l/s/ml}$ . Le plus fort débit de  $37,5\text{l/s/ml}$  donne lieu à un écoulement très turbulent.

Pour cette pente, l'écoulement en nappe est caractérisé par un ressaut pleinement développé pour le débit égal à  $1,9\text{l/s/ml}$ , et par des ressauts partiellement développés pour les débits variant de  $3,5$  à  $31,3\text{l/s/ml}$ .

#### ◆ Régimes d'écoulement dans le modèle III

Pour le modèle « III », quatre pentes ont été étudiées  $\alpha = 12,4^\circ$ ,  $\alpha = 16,3^\circ$ ,  $\alpha = 22,5^\circ$  et  $\alpha = 39,8^\circ$ .

Pour la pente  $12,4^\circ$  et pour les débits variants de  $2,3\text{l/s/ml}$  à  $39,0\text{l/s/ml}$  l'écoulement est en nappe. Le plus fort débit de  $47,4\text{l/s/ml}$  donne lieu à un écoulement très turbulent. Pour cette pente, l'écoulement en nappe est caractérisé par des ressauts pleinement développés pour les débits allant de  $2,3\text{l/s/ml}$  à  $19,4\text{l/s/ml}$ . Les ressauts deviennent partiellement développés à partir du débit  $22,9\text{l/s/ml}$ .

Concernant la pente  $16,3^\circ$ , l'écoulement en nappe persiste pour les débits allant de  $2,5\text{l/s/ml}$  à  $43,9\text{l/s/ml}$ . Pour le plus fort débit ( $66,8\text{l/s/ml}$ ), le régime d'écoulement

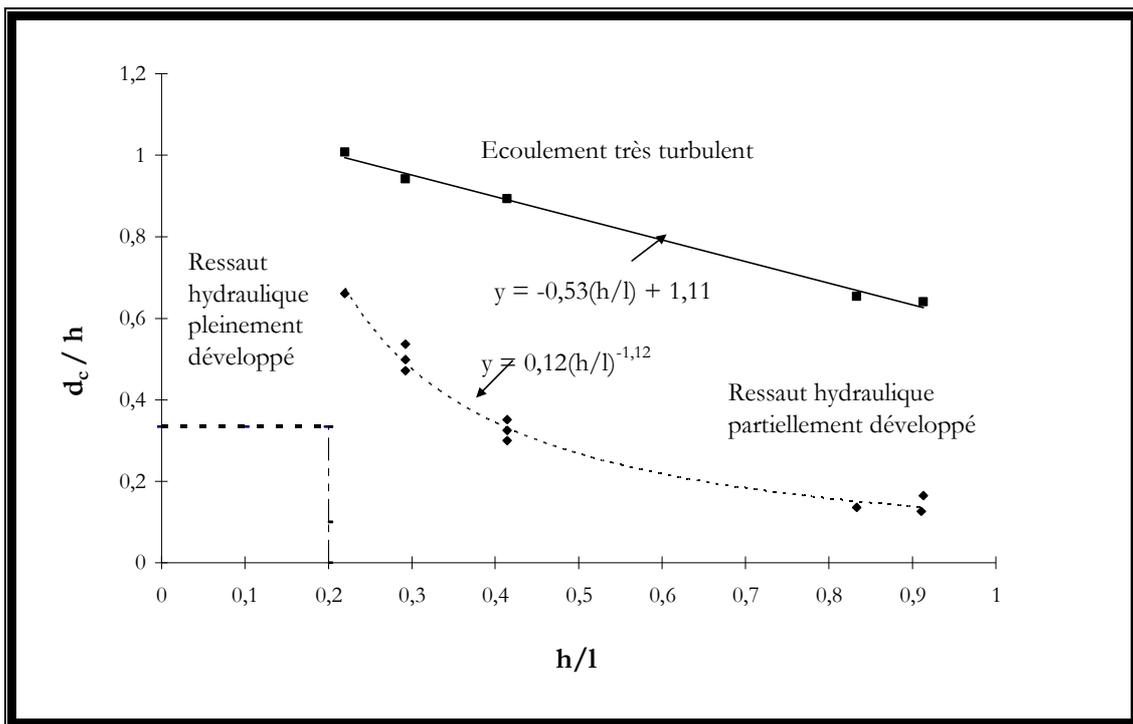
est très turbulent. L'écoulement en nappe est caractérisé par des ressauts pleinement développés pour les débits allant de 2,5 à 12,0l/s/ml. Les ressauts deviennent partiellement développés à partir du débit 16,72l/s/ml jusqu'au débit 36,2l/s/ml.

Pour la pente 22,5° et pour les débits variants de  $q = 3,3l/s/ml$  à  $q = 32,4l/s/ml$  l'écoulement reste en nappe. Pour les débits allant de  $q = 36l/s/ml$  jusqu'à  $q = 78l/s/ml$ , l'écoulement devient très turbulent. Pour cette pente et pour les débits allant de 3,3 et 5,7l/s/ml, les ressauts pleinement développés caractérisent l'écoulement en nappe. Les ressauts deviennent partiellement développés à partir du débit 7,2l/s/ml jusqu'au débit 33,0l/s/ml.

Concernant la plus forte pente (42,4°) et pour les faibles et moyens débits allant de 2,9l/s/ml jusqu'à 21,8l/s/ml, l'écoulement est en nappe. Ce dernier est caractérisé par des ressauts partiellement développés. Pour les forts débits, allant de 34,1l/s/ml jusqu'à 84,9/s/ml, l'écoulement devient très turbulent.

**3°/ Proposition de formules empiriques**

La figure III.18 donne la variation du rapport  $d_c/h$  en fonction de la pente du canal.



**Figure III.18 :** Détermination des limites des différents régimes d'écoulement dans les canaux en marches d'escalier

Il en ressort de cette figure les limites des différents régimes d'écoulement dans les canaux en marches d'escalier.

Le régime d'écoulement très turbulent apparaît pour un débit supérieur à la valeur critique déduite comme suit :

$$\frac{d_c}{h} = -0,53 \frac{h}{l} + 1,11 \quad (\text{III-7})$$

Les écoulements en nappe avec ressaut hydraulique pleinement développé se produisent pour des débits plus faibles que celui correspondant à la valeur critique définie par :

$$\frac{d_c}{h} = 0,12 \left( \frac{h}{l} \right)^{-1,12} \quad (\text{III-8})$$

#### 4°/ Dissipation d'énergie

##### a. Méthodologie de l'expérimentation

La dissipation d'énergie a été mesurée comme suit :

- ◆ Nous mesurons la hauteur du déversoir  $H_{dév}$  ;
- ◆ Nous mesurons le tirant d'eau à l'amont du déversoir  $d_{bar}$  ;
- ◆ Nous mesurons le tirant d'eau à l'amont du ressaut au pied du déversoir  $d_{av}$ .

La charge totale initiale de l'écoulement au-dessus du seuil  $H_{max}$  est donnée par :

$$H_{max} = H_{bar} + d_{bar}$$

La charge résiduelle  $H_{av}$  au pied du déversoir est exprimée par :  $H_{av} = d_{av} + \frac{V_E^2}{2g}$

où,  $V_E$  : vitesse d'écoulement dans la section considérée.

La perte de charge totale,  $\Delta H$ , le long d'un évacuateur de crue est égale à la différence entre la charge maximale ( $H_{max}$ ) disponible et la charge résiduelle au pied du canal  $H_{av}$ .

Nos mesures sont données respectivement dans les tableaux (III-5÷III-12).

##### • Détermination du taux de dissipation de l'énergie dans le modèle « I »

Pour ce modèle, nous donnons le taux de dissipation pour différents débits et différentes pentes dans les tableaux III-5 ÷ III-8.

**Tableau III-5** : Taux de dissipation d'énergie dans le modèle I avec la pente

$$\alpha = 12,4^\circ$$

$\alpha = 12,4^\circ$												
Type d'écoulement	Écoulement en nappe											
$d_c/h$	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,17	0,24	0,26	0,28	0,33	0,38	0,42
$H_{max}/d_c$	178,6	121,9	103,1	85,5	70,0	57,8	41,7	38,6	36,2	30,3	26,7	24,0
$\Delta H/H_{max}$ (%)	95,2	94,3	93,8	93,2	92,6	91,8	90,4	90,1	89,8	88,8	88,1	87,5

**Tableau III-6 :** Taux de dissipation d'énergie dans le modèle I avec la pente  $\alpha = 16,3^\circ$ 

$\alpha = 16,3^\circ$												
Type d'écoulement	Ecoulement en nappe											
$d_c/h$	0,08	0,12	0,16	0,20	0,23	0,31	0,32	0,35	0,37	0,38	0,40	0,47
$H_{\max}/d_c$	126,7	81,3	62,5	49,6	44,2	32,0	31,6	28,9	27,2	26,2	25,3	21,3
$\Delta H/H_{\max}$ (%)	94,4	93,1	92,1	91,2	90,7	89,1	89,0	88,6	88,2	88,0	87,8	86,6

**Tableau III-7 :** Taux de dissipation d'énergie dans le modèle I avec la pente  $\alpha = 22,5^\circ$ 

$\alpha = 22,5^\circ$												
Type d'écoulement	Ecoulement en nappe											
$d_c/h$	0,07	0,11	0,13	0,18	0,19	0,22	0,22	0,30	0,32	0,35	0,35	0,40
$H_{\max}/d_c$	151,5	95,3	75,2	54,9	54,1	46,3	45,0	33,8	31,8	29,0	28,7	24,9
$\Delta h/H_{\max}$ (%)	94,8	93,6	92,8	91,6	91,5	90,9	90,8	89,4	89,1	88,6	88,5	87,7

**Tableau III-8 :** Taux de dissipation d'énergie dans le modèle I avec la pente  $\alpha = 42,32^\circ$ 

$\alpha = 42,32^\circ$												
Type d'écoulement	Ecoulement en nappe											
$d_c/h$	0,06	0,08	0,13	0,17	0,27	0,33	0,33	0,33	0,35	0,38	0,41	0,45
$H_{\max}/d_c$	178,6	120,5	79,4	58,1	37,5	30,7	30,5	30,3	28,9	26,1	24,6	22,5
$\Delta H/H_{\max}$ (%)	95,2	94,2	93,0	91,9	89,9	88,9	88,8	88,7	88,6	88,0	87,6	87,0

Nous constatons que pour une pente donnée, le taux de dissipation d'énergie diminue progressivement avec l'augmentation du débit. D'où l'énergie de dissipation atteint son maximum pour les faibles débits

- **Détermination du taux de dissipation de l'énergie dans Modèle « II »**

Pour ce modèle, nous donnons le taux de dissipation pour différents débits et différentes pentes dans les tableaux III-9 ÷ III-12.

**Tableau III-9** : Taux de dissipation d'énergie dans le modèle II avec la pente  $\alpha = 12,4^\circ$ 

$\alpha = 12,4^\circ$												
Type d'écoulement	Ecoulement en nappe											
$d_c/h$	0,066	0,115	0,170	0,183	0,209	0,232	0,249	0,286	0,331	0,381	0,455	0,623
$H_{\max}/d_c$	197,0	113,0	76,5	71,0	62,2	56,0	52,2	45,5	39,3	34,1	28,6	20,9
$\Delta H/H_{\max}(\%)$	96,0	94,8	93,8	93,5	93,1	92,7	92,5	91,9	91,3	90,7	89,8	87,9

**Tableau III-10** : Taux de dissipation d'énergie dans le modèle II avec la pente  $\alpha = 16,3^\circ$ 

$\alpha = 16,3^\circ$												
Type d'écoulement	Ecoulement en nappe											
$d_c/h$	0,06	0,10	0,12	0,16	0,20	0,27	0,30	0,32	0,39	0,42	0,50	0,68
$H_{\max}/d_c$	224,1	135,4	111,1	80,3	66,0	47,6	43,6	40,1	33,7	31,0	26,1	19,1
$\Delta H/H_{\max}(\%)$	96,3	95,3	94,8	93,9	93,3	92,1	91,7	91,34	90,6	90,2	85,0	87,4

**Tableau III-11** : Taux de dissipation d'énergie dans le modèle II avec la pente  $\alpha = 22,5^\circ$ 

$\alpha = 22,5^\circ$												
Type d'écoulement	Ecoulement en nappe											
$d_c/h$	0,14	0,22	0,26	0,35	0,38	0,41	0,46	0,50	0,58	0,60	0,62	0,68
$H_{\max}/d_c$	91,6	60,2	49,2	37,0	34,0	31,9	28,3	26,1	22,5	21,7	20,9	19,1
$\Delta H/H_{\max}(\%)$	94,2	92,9	92,2	91,0	90,6	90,3	89,7	89,3	88,4	88,2	88,0	87,4

**Tableau III-12** : Taux de dissipation d'énergie dans le modèle II avec la pente  $\alpha = 39,8^\circ$ 

$\alpha = 39,8^\circ$												
Type d'écoulement	Écoulement en nappe											Écoulement Turbulent
$d_c/h$	0,09	0,14	0,14	0,18	0,21	0,26	0,35	0,41	0,44	0,49	0,58	
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$f_c = 0,42$
$H_{\max}/d_c$	144,4	95,6	94,4	73,0	61,3	50,6	37,1	31,9	29,6	26,6	22,5	19,9
$\Delta H/H_{\max}$ (%)	95,40	94,38	94,36	93,6	93,03	92,33	91,05	90,33	89,95	89,37	88,39	74,32

Nous pouvons faire les observations suivantes pour ce modèle :

- ◆ Le taux de dissipation d'énergie diminue progressivement avec l'augmentation du débit. L'énergie de dissipation atteint son maximum pour les faibles débits
- ◆ Au delà d'un certain débit, nous avons un écoulement extrêmement turbulent et le taux de dissipation d'énergie chute considérablement.

• **Détermination de la dissipation d'énergie dans le modèle « III »**

Pour ce modèle, nous donnons le taux de dissipation pour différents débits et différentes pentes dans les tableaux III-13 ÷ III-16.

**Tableau III-13** : Taux de dissipation d'énergie dans le modèle III avec la pente  $\alpha = 12,4^\circ$ 

$\alpha = 12,4^\circ$												
Type d'écoulement	Écoulement en nappe											Écoulement turbulent
$d_c/h$	0,14	0,19	0,29	0,40	0,50	0,59	0,66	0,72	0,82	0,86	0,94	Écoulement aéré
$f_c$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,93
$H_{\max}/d_c$	106,5	77,7	51,4	37,1	30,3	25,4	22,7	20,9	18,2	17,4	15,9	14,0
$\Delta H/H_{\max}$ (%)	95,0	94,2	92,9	92,7	90,7	89,7	89,1	88,6	87,7	87,4	86,8	79,5

**Tableau III-14 :** Taux de dissipation d'énergie dans le modèle III avec la pente  $\alpha = 16,3^\circ$

$\alpha = 16,3^\circ$												
Type d'écoulement	Ecoulement en nappe											Ecoulement turbulent
$d_c/h$	0,15	0,19	0,26	0,35	0,43	0,54	0,94	0,73	0,81	0,90	1,02	Eclt aéré
$f_e$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,85
$H_{\max}/d_c$	98,1	78,2	56,8	43,5	35,1	28,0	23,5	20,4	18,5	16,7	14,7	11,12
$\Delta H / H_{\max}(\%)$	94,8	94,2	93,2	92,3	91,3	90,3	89,3	88,5	87,8	87,1	86,2	78,3

**Tableau III-15 :** Taux de dissipation d'énergie dans le modèle III avec la pente  $\alpha = 22,5^\circ$

$\alpha = 22,5^\circ$													
Type d'écoulement	Ecoulement en nappe						Ecoulement très turbulent						
$d_c/h$	0,18	0,26	0,31	0,37	0,50	0,83	Eclt aéré	Eclt aéré	Eclt aéré	Eclt aéré	Eclt aéré	Eclt aéré	Eclt aéré
$f_e$	-	-	-	-	-	-	0,72	0,72	0,72	0,72	0,72	0,72	0,72
$H_{\max}/d_c$	82,4	57,7	49,2	40,8	29,9	18,1	16,8	15,0	14,1	13,0	11,7	10,0	10,0
$\Delta H/H_{\max}(\%)$	94,4	93,3	92,7	92,0	90,6	87,7	82,5	80,4	79,2	77,3	75,0	70,7	70,7

**Tableau III-16 :** Taux de dissipation d'énergie dans le modèle III avec la pente  $\alpha = 39,8^\circ$

$\alpha = 39,8^\circ$													
Type d'écoulement	Ecoulement en nappe						Ecoulement très turbulent						
$d_c/h$	0,17	0,26	0,38	0,50	0,53	0,64	Eclt aéré	Eclt aéré	Eclt aéré	Eclt aéré	Eclt aéré	Eclt aéré	Eclt aéré
$f_e$	-	-	-	-	-	-	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38
$H_{\max}/d_c$	91,0	58,4	39,2	29,9	28,5	23,5	17,4	15,7	12,9	12,6	10,7	9,5	9,5
$\Delta H/H_{\max}(\%)$	94,6	93,3	91,6	90,6	90,3	89,3	67,9	64,4	56,8	55,9	47,9	41,1	41,1

A travers nos résultats, nous pouvons conclure que :

L'écoulement en nappe dissipe plus d'énergie que l'écoulement très turbulent ; ceci est dû au fait que l'écoulement en nappe est caractérisé par des ressauts hydrauliques pleinement ou partiellement développés.

### 5°/ **Commentaires**

Sur le modèle "I", l'écoulement reste en nappe, même dans le cas de forte pente ( $\alpha = 42,3^\circ$ ) et de fort débit ( $q = 36,2 \text{ l/s/ml}$ ). Cela peut être expliqué par l'effet que les dimensions des marches (de hauteur  $h = 11,5\text{cm}$  et de longueur  $l = 8 \text{ cm}$ ) soient relativement importantes par rapport aux modèles "II" et "III", ainsi que par l'importance du débit fourni. Une éventuelle augmentation de celui-ci, pouvait nous permettre l'obtention d'un écoulement très turbulent.

Les écoulements en nappe, pour le modèle "I", se caractérisent par des ressauts pleinement développés pour les faibles pentes ( $12,4^\circ$ ), même dans le cas de forts débits. Les ressauts deviennent partiellement développés en augmentant la pente et les débits.

Concernant ce modèle, la dissipation d'énergie est assez importante, dans l'ordre de 95,2%, celle-ci diminue légèrement avec l'augmentation des débits.

Sur le modèle "II" (de hauteur  $h = 8\text{cm}$  et de longueur  $l = 8\text{cm}$ ), l'écoulement en nappe est prépondérant. Cependant, l'écoulement très turbulent est apparu pour le plus fort débit ( $37,5\text{l/s/ml}$ ), correspondant à la plus forte pente ( $39,8^\circ$ ). Les écoulements en nappe sont caractérisés par des ressauts pleinement développés pour les pentes douces, même dans le cas de forts débits. Les ressauts deviennent partiellement développés, au fur et à mesure que nous augmentons la pente et le débit.

Sur le modèle "III", dont la hauteur des marches est de  $5,7\text{cm}$  et de longueur  $l = 4\text{cm}$ , on remarque l'existence des deux régimes d'écoulement (écoulement en nappe et écoulement très turbulent) pour les différents débits et les différentes pentes. Pour les faibles pentes, l'écoulement en nappe est le plus présent. Par contre, nous observons l'écoulement très turbulent en augmentant les débits et les pentes.

### 6°/ **Détermination empirique du point d'inception**

Le point du début d'entraînement d'air est appelé "Point d'inception" ou "Point d'apparition de l'eau blanche". Les caractéristiques de ce point sont :  $L_I$ , distance à la crête du déversoir et  $d_I$  : profondeur de l'eau en ce point.

La distance séparant le point d'inception I et la crête du déversoir est donnée par :

$$\frac{L_I}{k_s} = 9,72 F_r^{0,72} (\sin \alpha)^{0,08} \quad (\text{III-9})$$

La profondeur d'eau au point d'inception est exprimée par la formule suivante :

$$\frac{d_I}{k_s} = \frac{0,40}{(\sin \alpha)^{0,04}} F_r^{0,59} \tag{III-10}$$

Les calculs et les mesures des caractéristiques des points d'inception sont donnés dans le tableau III-17.

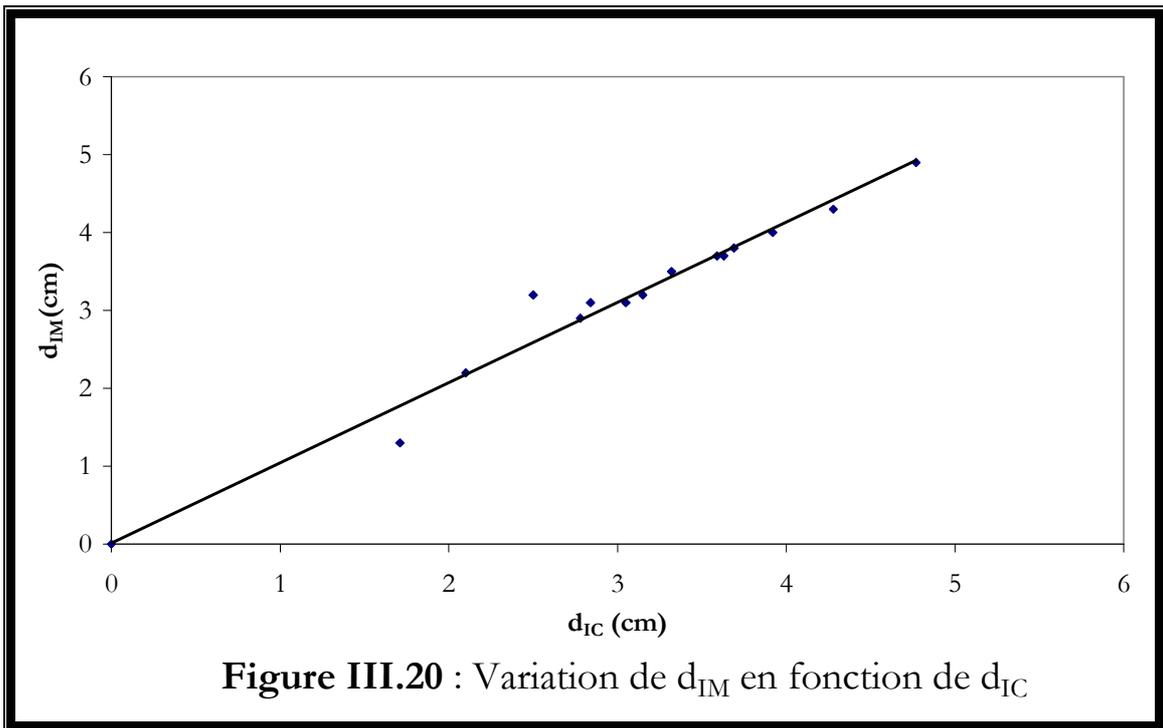
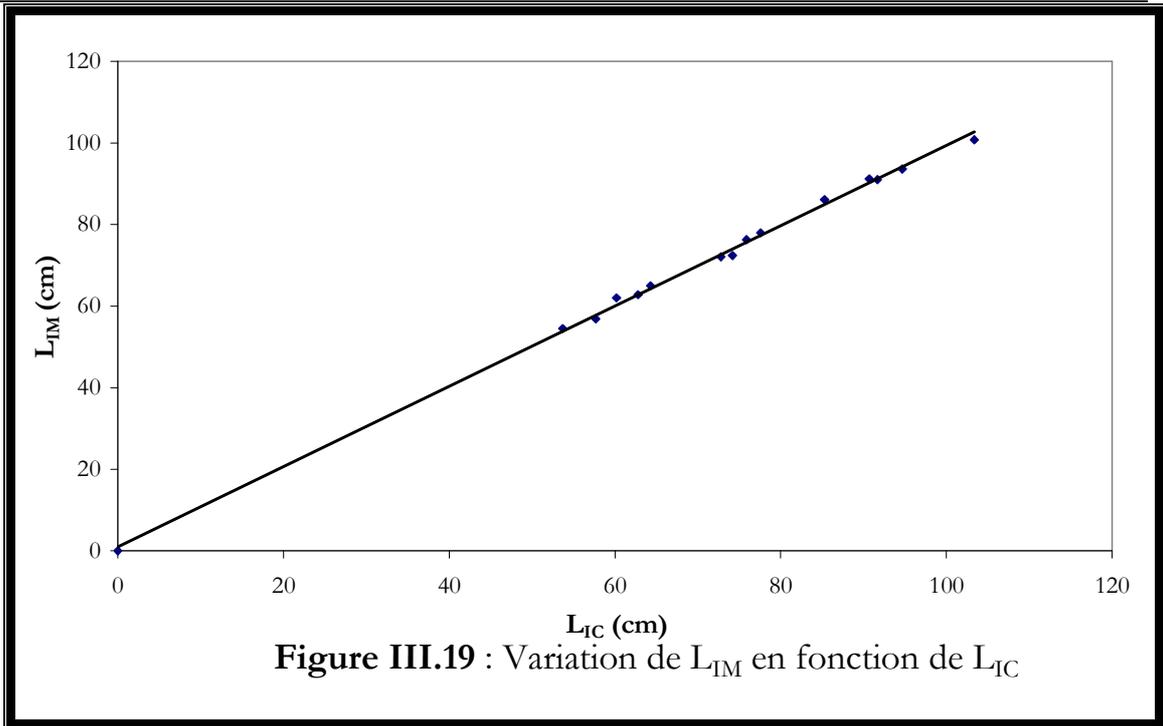
**Tableau III-17 :** Caractéristiques des points d'inception

	II	III													
q (l/s/ml)	37,5	47,4	66,8	36,0	42,8	46,8	53,2	61,6	78,0	34,1	39,9	53,3	55,0	70,6	84,9
α (degré)	39,8	12,40	16,3	22,5	22,5	22,5	22,5	22,5	22,5	42,4	42,4	42,4	42,4	42,4	42,4
F	0,98	2,48	3,15	1,53	1,82	1,99	2,27	2,63	3,33	1,53	1,79	2,40	2,48	3,18	3,82
L <sub>I</sub> <sup>C</sup> (cm)	57,69	91,69	62,8	64,3	72,8	77,6	85,3	94,7	112,1	53,7	60,2	74,2	75,9	90,7	103,4
d <sub>I</sub> <sup>C</sup> (cm)	2,50	1,71	2,10	2,84	3,15	3,32	3,59	3,92	4,50	2,78	3,05	3,63	3,69	4,28	4,77
L <sub>I</sub> <sup>M</sup> (cm)	56,90	91,0	62,8	65,0	72,1	78,0	86,1	93,6	-	54,5	62,0	72,4	76,3	91,2	100,8
d <sub>I</sub> <sup>M</sup> (cm)	3,20	1,30	2,20	3,10	3,20	3,50	3,70	4,0	-	2,90	3,10	3,70	3,80	4,30	4,90

Avec, L<sub>I</sub><sup>C</sup> : distance à la crête du déversoir calculée, d<sub>I</sub><sup>C</sup> : profondeur de l'eau au point d'inception calculée, L<sub>I</sub><sup>M</sup> distance à la crête du déversoir mesurée et d<sub>I</sub><sup>M</sup> profondeur de l'eau au point d'inception mesurée.

Nous avons comparé nos points expérimentaux aux points donnés par les formules empiriques III-7 et III-8. Nous constatons que sur le modèle «III», pour la pente 22,5° et pour le débit 78l/s/ml, il n'y a pas de point d'inception. L'écoulement est non aéré.

Les figures III.19 et III.20 représentent la variation de L<sub>I</sub><sup>M</sup> en fonction de L<sub>I</sub><sup>C</sup> et la variation de d<sub>I</sub><sup>M</sup> en fonction de d<sub>I</sub><sup>C</sup>.



Nous obtenons des droites d'équations :

$$L_I^M = 0,98 L_I^C + 0,97$$

et

$$d_I^M = 1,03 d_I^C + 0,01$$

$$D'où : \frac{L_I}{k_s} = 9,52 F_r^{0,71} (\sin \alpha)^{0,08} \quad (III-11)$$

$$\frac{d_I}{k_s} = \frac{0,42}{\sin \alpha^{0,04}} F_r^{0,59} \quad (III-12)$$

### Conclusion

A travers les résultats obtenus, nous pouvons conclure que :

- Les écoulements en nappe sont caractérisés par des ressauts hydrauliques. Un ressaut hydraulique pleinement développé se produit pour des débits plus faibles que celui correspondant à la valeur critique définie par :  $\frac{(d_c)_{\text{debut}}}{h} = 0,12 \left(\frac{h}{l}\right)^{-1,12}$  et que l'écoulement très turbulent apparaît pour un débit supérieur à la valeur critique déduite par :  $\frac{(d_c)_{\text{debut}}}{h} = 1,11 - 0,53 \frac{h}{l}$ .
- Les dimensions des marches influencent la nature de l'écoulement.
- Dans le cas de l'écoulement en nappe, l'augmentation de la pente n'influe nullement sur le taux de dissipation.
- L'augmentation de la pente et du débit change la nature du phénomène hydraulique qu'est le ressaut.
- L'augmentation du débit diminue le taux de dissipation
- L'apparition de l'écoulement très turbulent est fonction des dimensions des marches, des débits et des pentes.
- L'écoulement en nappe dissipe plus d'énergie, chose tout à fait normale, du fait qu'il est caractérisé par des ressauts hydrauliques.
- Dans l'écoulement très turbulent, un phénomène d'entraînement d'air peut se produire. Il commence en un point où apparaît l'eau blanche. Ce point est caractérisé par la distance le séparant de la crête du déversoir et de la profondeur de l'écoulement d'eau. Ces caractéristiques peuvent être déterminées respectivement par :

$$\frac{L_I}{k_s} = 9,52 F_r^{0,72} (\sin \alpha)^{0,08}$$

$$\frac{d_I}{k_s} = \frac{0,42}{\sin \alpha^{0,04}} F_r^{0,59}$$

## **Chapitre IV: Approche numérique du calcul du point d'inception dans les canaux en marches d'escaliers**

L'expérience a montré que les vitesses d'écoulement sur le coursier d'un évacuateur de crues peuvent atteindre 50m/s (**Chanson, 1989**). Dans ces conditions les dommages dus à l'érosion par cavitation sont importants. Pour parvenir à ralentir cette érosion, il est possible d'utiliser des bétons spéciaux, des revêtements en acier, etc. Malheureusement ces solutions sont coûteuses et ne sont pas satisfaisantes pour des vitesses supérieures à 30m/s.

Dans les canaux lisses à forte pente, il a été observé l'apparition, à une certaine distance de la crête, de l'eau fortement aérée. Cette présence d'air dans l'écoulement permet de réduire l'effet de l'énergie libérée par l'implosion des cavités. Sur un fond rugueux, on observe un taux d'entraînement d'air ( $\partial C_{\text{mean}}/\partial x$ ) plus important que sur un fond lisse (**Chanson, 1994**) et (**Matos, 2000**). D'où l'intérêt de placer des marches le long du coursier qui forment une macro – rugosité et accélèrent le processus d'entraînement d'air. Ainsi le point d'apparition de l'écoulement aéré est plus haut dans le coursier en marches d'escaliers que dans le coursier lisse.

La détermination de la position du point d'apparition de l'eau blanche, appelé point d'inception est aussi importante que complexe.

Nos expériences sur les différents modèles ont indiqué que les coordonnées du point d'inception sont données par les formules :

$$\frac{L_I}{k_s} = 9,52 F_r^{0,72} (\sin \alpha)^{0,08} \quad \text{où, } F_r = \frac{q}{\sqrt{g \sin \alpha (h \cos \alpha)^3}} \quad (\text{IV-1})$$

$$\frac{d_I}{k_s} = \frac{0,42}{\sin \alpha^{0,04}} F_r^{0,59} \quad (\text{IV-2})$$

$F_r$ , nombre de Froude,  $h$ , hauteur de la marche et  $\alpha$ , Pente du canal (figure IV.1).

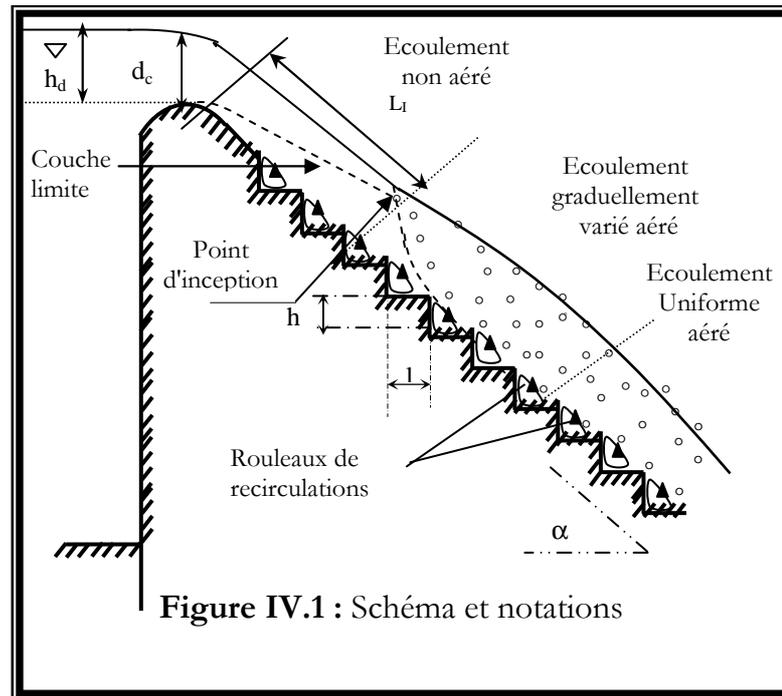


Figure IV.1 : Schéma et notations

Les analyses statistiques des données de plusieurs chercheurs ont indiqué que les propriétés de l'écoulement sont bien représentées par les formules suivantes (*Chanson, 1993*) :

$$\frac{L_I}{k_s} = 9,72 (\sin \alpha)^{0,08} (F_r)^{0,71} \quad (\text{IV-3})$$

$$\frac{d_I}{k_s} = \frac{0,40}{(\sin \alpha)^{0,04}} (F_r)^{0,6} \quad (\text{IV-4})$$

Dans le présent chapitre, nous développons un modèle numérique permettant la résolution du système d'équations non linéaire gouvernant l'écoulement à couche limite laminaire dans les canaux à forte pente en marches d'escaliers.

La répartition des vitesses ainsi que l'épaisseur de la couche limite peuvent être déterminées pour chaque section du canal et permettent ainsi le calcul de la ligne d'eau et la position du point d'inception.

## I. MODELE MATHEMATIQUE

Les travaux de **Lane** (1939), **Hickox** (1945), **Halbronn** (1952) et **Halbronn, Durand, Cohen de Lara** (1953) ont montré que le phénomène d'entraînement d'air commence à partir du point où la couche limite atteint la surface libre de l'écoulement. L'écoulement de l'eau sur un canal en marche d'escalier, peut être assimilé à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible sur un profil rugueux et

par conséquent régit par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

### 1°/ Hypothèses de calculs

Pour les besoins de l'étude des hypothèses ont été émises.

- Ecoulement est considéré permanent ( $\partial/\partial t=0$ ).
- Nous considérons la pression constante à l'intérieur de la couche limite, ceci signifie que le gradient de pression selon l'axe du canal x est nul (**Cousteix**, 1989);
- Ecoulement est bidimensionnel (effet de parois négligeable).

### 2°/ Equations régissant l'écoulement dans la couche limite

En nous basant sur la théorie de la couche limite et les hypothèses ci-dessus, l'écoulement est régit par le système suivant :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{IV-5})$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV-6})$$

avec,  $\nu$  : viscosité cinématique du fluide

## II. MODELE NUMERIQUE

La résolution numérique du problème nécessite une discrétisation de la formulation différentielle ci-dessus.

### 1°/ Discrétisation des équations

Pour les problèmes du type couche limite, **Schlichting** (1968) propose un schéma aux différences en trois points (figure IV.2) :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{3U(i+1,j) - 4U(i,j) + U(i-1,j)}{2\Delta x} \quad (\text{IV-7})$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U(i+1,j+1) - U(i+1,j-1)}{2\Delta y} \quad (\text{IV-8})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U(i+1,j+1) - 2U(i+1,j) + U(i+1,j-1)}{(\Delta y)^2} \quad (\text{IV-9})$$

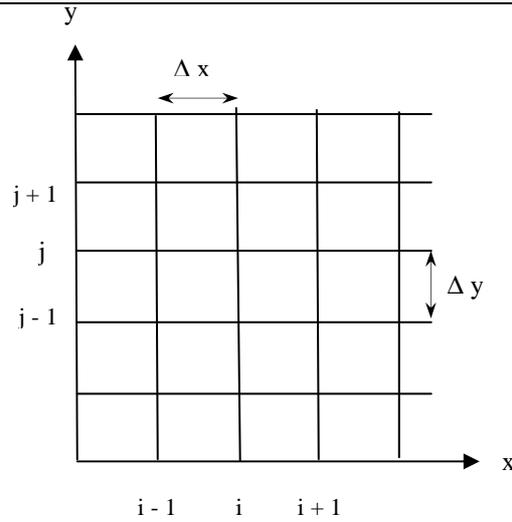


Figure IV.2 : Maillage

L'utilisation d'un schéma en trois points implique une erreur de troncature de l'ordre de  $(\Delta x)^2$  dans la direction  $ox$  et  $(\Delta y)^2$  dans la direction  $oy$ .

Pour le traitement des termes non linéaires, nous utilisons l'expression :

$$U(i+1, j) = 2U(i, j) - U(i-1, j) \quad (\text{IV-10})$$

Dans leur forme linéarisée, les expressions du type  $U \frac{\partial U}{\partial x}$  deviennent :

$$[2U(i, j) - U(i-1, j)] \left[ \frac{3U(i+1, j) - 4U(i, j) + U(i-1, j)}{2\Delta x} \right]$$

L'équation à résoudre est transformée en un système linéaire donné par l'expression :

$$A(j)U(i+1, j-1) + B(j)U(i+1, j) + C(j)U(i+1, j+1) = F(j) \quad (\text{IV-11})$$

où :

$$A(j) = -\frac{\Delta x}{2\Delta y} (2V(i, j) - V(i-1, j)) - v \frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}$$

$$B(j) = \frac{3}{2} [2U(i, j) - U(i-1, j)] + v \frac{2\Delta x}{(\Delta y)^2}$$

$$C(j) = \frac{\Delta x}{2\Delta y} (2V(i, j) - V(i-1, j)) - \chi \frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}$$

$$F(j) = \frac{1}{2} [2U(i, j) - U(i-1, j)] [4U(i, j) - U(i-1, j)] + g \sin \alpha \Delta x$$

L'expression (IV-11) constitue un système d'équations linéaires, où le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations. Le problème de la résolution de l'équation aux dérivées partielles se trouve alors, transféré en la résolution d'un système algébrique linéaire pour chaque pas  $\Delta x$ . Ce dernier a la forme suivante :

$$[M] \{U_{(j+1)}\} = \{q_j\} \quad (IV-12)$$

La matrice  $[M]$  est tridiagonale, elle a la forme suivante :

$$M = \begin{bmatrix} B_1 C_1 & & & & \\ & A_2 B_2 C_2 & & & \\ & & A_j B_j C_j & & \\ & & & & A_{n-1} B_{n-1} \\ & & & & \end{bmatrix} \quad (IV-13)$$

Le vecteur est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1 - U(i+1,0)A_1 \\ F_2 \\ F_j \\ F_{n-1} - U(i+1,n)C_{n-1} \end{array} \right\} \quad (IV-14)$$

Dans le calcul de la distribution de la composante horizontale de la vitesse dans chaque section (i), nous aurons besoin de la distribution de la composante transversale en chaque section (i -1). Pour cela, l'équation de continuité est discrétisée par le schéma aux différences suivant :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(i+1,j) - U(i,j)}{\Delta x} \quad (IV-15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{V(i+1,j) - V(i+1,j-1)}{\Delta y} \quad (IV-16)$$

D'où :

$$V_{(i+1,j)} = V_{(i+1,j-1)} - \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) [U_{(i+1,j)} - U_{(i,j)}] \quad (IV-17)$$

## 2°/ Condition aux limites

Les conditions aux limites considérées sont :

- **A la paroi**

A la paroi la tension visqueuse est beaucoup plus importante que la tension turbulente, c'est sa contribution le long de la surface des marches qui fournit la traînée de frottement. Souvent on utilise la quantité  $U_*$  appelée vitesse de frottement ; elle est liée à la contrainte pariétale et au coefficient de frottement par (*Cousteix*, 1989) :

$$U = U_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$$

avec,  $\tau_0$  : la contrainte de cisaillement définie par :  $\tau_0 = f \rho U_0^2/8$ , où  $U_0$ , est la vitesse de l'écoulement uniforme, et  $f$ , le coefficient de frottement pris égal à 0,2 pour des écoulements extrêmement rugueux (*Chanson, Yasuda et Ohtsu*, 2000).

- **En dehors de la couche limite**

- Pour  $y > \delta$ , on a :  $U = U_1(x)$  et  $V = 0$ .

où,  $U_1$  : vitesse de l'écoulement libre donnée par :  $U_1 = \sqrt{2g(x \sin \alpha + h)}$ .

- Pour  $x = 0$ , nous avons  $U = U_1(0)$  et  $V = 0$ .

### 3°/ Calcul de l'épaisseur de la couche limite

Nous définissons, dans une section quelconque, l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite comme la distance à la paroi du point où la vitesse atteint 99% de la valeur de la vitesse extérieure  $u_1$  dans la section correspondante (*Cousteix*, 1989). Par définition donc :

Pour  $y = \delta$ ,  $U = 0,99 U_1$ .

### 4°/ Calcul de la ligne d'eau

La distribution des vitesses étant déterminée en chaque section (i), la ligne d'eau sera calculée par :

$$H = \frac{q - \int_0^\delta U dy}{U_\infty} + \delta \quad (\text{IV-18})$$

## III. APPLICATIONS ET RESULTATS

Les relevés expérimentaux sur la mesure de la position du point d'inception que nous avons utilisé pour valider le modèle, proviennent des travaux réalisés à l'université de Liège sur le modèle réduit de l'évacuateur de crues de barrage M'Bali en république Centrafricaine à l'échelle 1/21,33 (*Vercheval*, 1992).

Le coursier de l'évacuateur de crues de ce barrage est en marches d'escalier. Il a une forme rectangulaire, très large et de forte pente. Ces principales caractéristiques se résument comme suit :

- La pente du coursier est  $\alpha = 51,34^\circ$
- Le coefficient de rugosité est  $K_s = 50$ .
- Le profil du déversoir de l'évacuateur de crue du barrage M'Bali est du type Creager, dont le coefficient de débit est pris constant et égal à :  $C_d = 0,52$ .
- Hauteur de la marche est  $h = 0,8\text{m}$ .

Plusieurs débits ont été simulés. Les résultats expérimentaux sont donnés dans le tableau IV-1.

**Tableau IV-1 :** Résultats expérimentaux de la Position du point d'inception

q (m <sup>2</sup> /s)	10,00	13,44	15,32	17,40	26,41	36,97
L <sub>I</sub> (m)	15,83	18,10	19,23	20,36	26,02	32,00

Les valeurs de la position du point d'inception calculée par la formule proposée (IV-1) sont données dans le tableau IV-2.

**Tableau IV-2 :** Position du point d'inception calculée par la formule proposée

q (m <sup>2</sup> /s)	10,00	13,44	15,32	17,40	26,41	36,97
L <sub>I</sub> (m)	24,34	30,51	33,87	37,11	50,13	63,86

Les valeurs de la position du point d'inception calculées par la corrélation proposée par **H. Chanson** (1994) sont reportées dans le tableau IV-3.

**Tableau IV-3 :** Position du point d'inception calculées par la corrélation proposée par **H. Chanson**

q (m <sup>2</sup> /s)	10,00	13,44	15,32	17,40	26,41	36,97
L <sub>I</sub> (m)	24,26	29,83	32,7	35,75	47,87	60,58

L'exécution du programme que nous avons élaboré a donné les résultats suivants pour la position du point d'inception (tableau IV-4) :

**Tableau IV-4 :** Position du point d'inception calculée avec le modèle numérique

q (m <sup>2</sup> /s)	10,00	13,44	15,32	17,40	26,41	36,97
L <sub>I</sub> (m)	14,98	17,87	19,19	20,60	26,47	34,0

Pour chaque débit simulé, les pas d'intégrations suivant les deux axes x et y ont été déterminés et raffinés. En dehors des faibles débits les valeurs de la position du

point d'inception calculées numériquement sont plus proches des valeurs expérimentales que celles obtenues par la formule proposée par **Chanson** (1994) basée sur plusieurs modèles.

La Figure IV.3 montre pour le cas étudié, que la position du point d'inception évolue selon une loi de puissance.

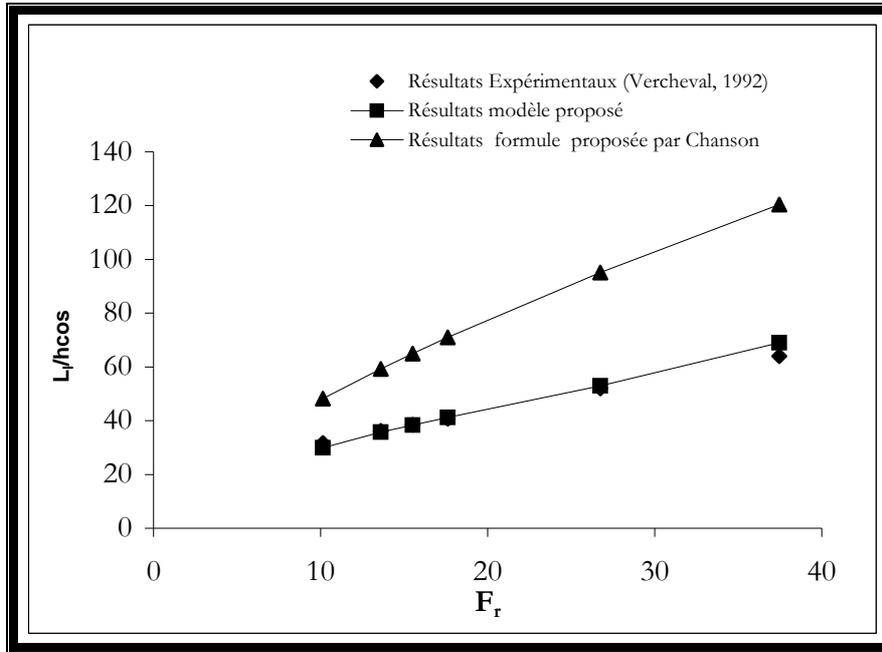


Figure IV.3 : Validation du modèle numérique

Nous constatons que le point d'inception s'éloigne de la crête du déversoir au fur et à mesure que le débit augmente.

Nous avons présenté sur la figure IV.4 l'évolution de couche limite et le tracé de la ligne d'eau le long du coursier pour un débit donné ( $26,41\text{m}^2/\text{s}$ ). L'intersection des deux courbes donne bien la position du point d'inception, et ceci conformément à la définition donnée à ce point (**Chanson**, 1989).

A l'amont du point d'inception, l'allure de la ligne d'eau montre que l'écoulement est accéléré et le développement de la couche limite devient de plus en plus important.

A l'aval de ce point, l'écoulement devient aéré et le modèle numérique que nous avons élaboré ne peut être appliqué.

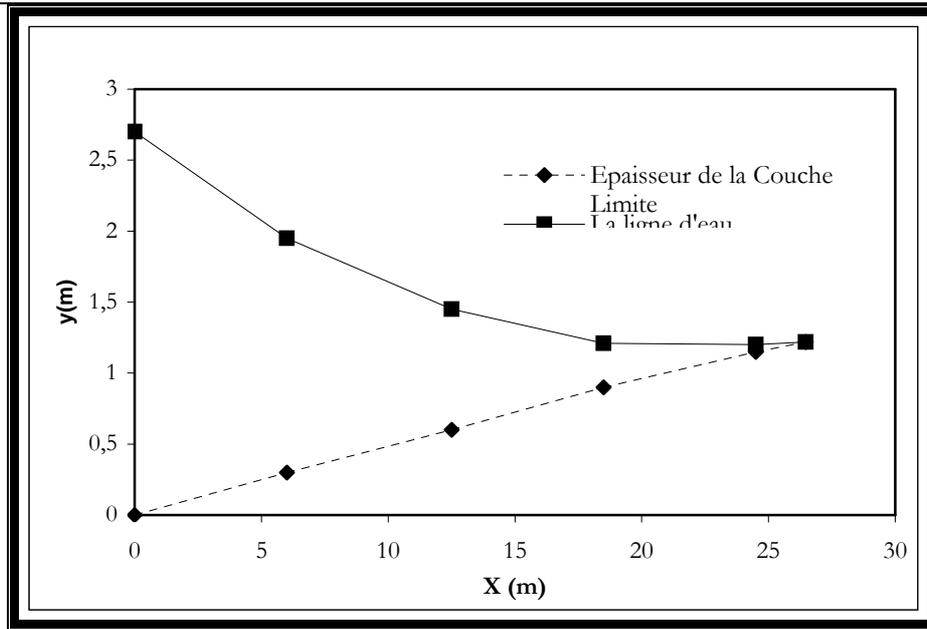


Figure IV.4 : Détermination du point d'inception pour un débit  $q = 26,41 \text{ m}^2/\text{s}$

Nous constatons dans la figure IV.5 l'accroissement, de plus en plus, de l'épaisseur de la couche limite avec l'augmentation du débit. Lorsque le nombre de Reynolds  $R_{ex}$  prend une valeur très élevée, la couche limite elle-même devient instable et turbulente : le transport de quantité de mouvement par convection turbulente fait augmenter  $\delta$  beaucoup plus rapidement que dans le cas laminaire (Guyon, Hulin et Petit, 1991).

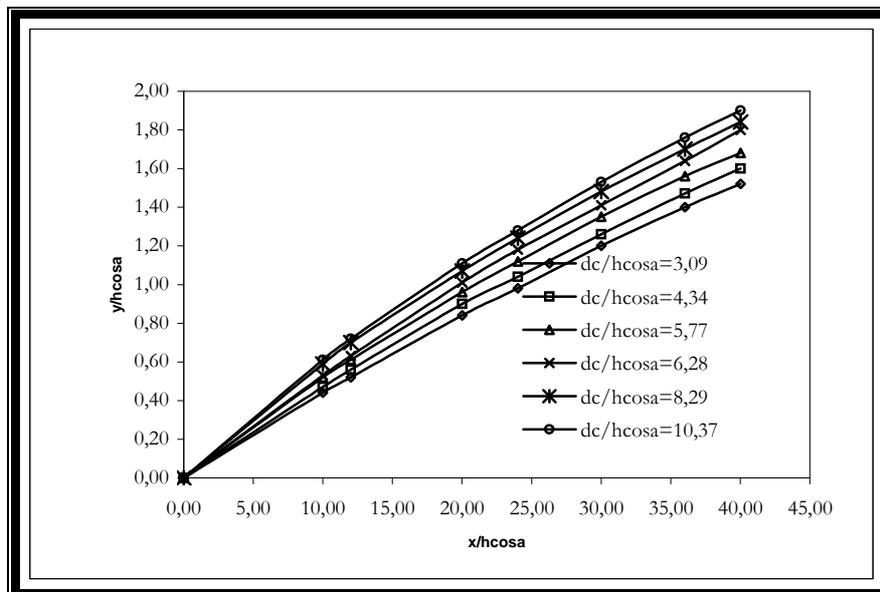


Figure IV.5 : Influence du débit sur l'épaisseur de la couche limite

Pour tous les débits simulés, la couche limite à une forme qui s'approche de celle d'une parabole.

En s'éloignant de la crête du déversoir Creager, la forme de la couche limite devient presque linéaire et son épaisseur croit rapidement.

### **Conclusions**

Un modèle numérique de l'écoulement extrêmement rugueux bidimensionnel à couche limite et non linéaire dans les canaux à forte pente ( $\alpha > 20^\circ$ ) et en marches d'escalier a été développé en vue de la détermination de la position du point d'inception.

Comparativement au modèle basé sur l'analyse statistique des données d'autres chercheurs, les résultats numériques obtenus concordent mieux avec les résultats expérimentaux pour les moyens à grands débits.

La résolution numérique pour plusieurs débits nous a révélé que :

1. Pour le cas d'étude considéré, les positions du point d'inception évoluent suivant une loi de puissance.
2. L'épaisseur de la couche limite croit rapidement avec l'augmentation du débit et ceci est dû au fait que le transport de quantité de mouvement par convection augmente l'épaisseur de la couche limite;
3. La position du point d'inception s'éloigne de la crête type Creager du déversoir avec l'accroissement du débit.

Le modèle numérique développé est recommandé pour le calcul de la position du point d'inception dans les canaux à forte pente ( $\alpha > 20^\circ$ ) en marches d'escalier.

Le modèle reste valable pour une crête de déversoir lisse suivi de petites marches. Par contre, avec une géométrie complexe de la crête, l'analyse du développement de la couche limite devient extrêmement difficile.

## **Chapitre V: Equations des écoulements turbulents dans des conduits**

Avant de poursuivre notre réflexion sur la nature des écoulements dans les canaux en marches d'escalier, introduisons le cadre mathématique. Les équations gouvernant sont les équations de continuité et de Navier- Stokes. Ces équations, pierre angulaire de toute la mécanique des fluides, ne sont somme toute qu'une forme adaptée aux fluides de la relation fondamentale de la dynamique. L'établissement de ces équations a cependant été fort long puisqu'il s'est écoulé près de deux siècles entre la publication des travaux de Newton en 1687 et l'écriture par Sir Gabriel Stokes des équations fondamentales de l'hydrodynamique qui honorent son nom et celui de l'ingénieur français Henri Navier. La théorie d'élasticité et le calcul tensoriel ont entre autres, été des préalables à une écriture correcte des équations de Navier – Stokes. L'énorme littérature publiée depuis montre à la fois l'importance de ces équations dans de nombreux domaines de la science et la difficulté de résolution due en particulier au phénomène de la turbulence.

Nous allons ci-après établir ces équations et effectuer leur moyenne sur le temps pour obtenir les équations de Reynolds, qui seront résolues dans les chapitres suivants.

### **I. EQUATIONS REGISSANT LES ECOULEMENTS DES FLUIDES NEWTONIENS**

Nous établirons l'équation de continuité qui exprime la conservation de la masse de fluide, et l'équation de quantité de mouvement qui est en fait issue de la relation fondamentale de la dynamique.

Soit  $\rho$  la masse volumique du fluide, et  $\vec{U}$  le vecteur vitesse, de composante U, V et W.

La conservation de la masse fluide contenue dans un domaine  $\Omega$  s'exprime :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} (\rho \, d\Omega) \right) = 0 \quad (V-1)$$

Le théorème de Leibnitz décompose ce terme en variations observées à l'intérieur du domaine et flux aux frontières :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} (\rho \, d\Omega) \right) = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{U} \vec{n} \, d\Gamma \quad (V-2)$$

Le flux aux frontières  $\int_{\Gamma} \rho \vec{U} \vec{n} d\Gamma$  est alors ramené à une intégrale de volume  $\int_{\Omega} \text{div}(\rho \vec{U}) d\Omega$  par le théorème de Gauss, et en reconnaissant que la conservation de la masse doit être assurée pour n'importe quel domaine  $\Omega$  ; nous obtenons une expression locale de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (\text{V-3})$$

Il nous faut maintenant formuler pour un fluide ce qui s'écrit  $\vec{f} = m \frac{d\vec{U}}{dt}$  pour un solide. Cette forme la plus connue de la deuxième loi de Newton doit être en fait écrite plus rigoureusement  $\vec{f} = \frac{d(m\vec{U})}{dt}$  car pour un fluide la masse volumique est a priori variable. L'équivalent de  $\frac{d(m\vec{U})}{dt}$  sera écrit  $\frac{d}{dt}(\int_{\Omega} \rho \vec{U} d\Omega)$ , dérivée en temps de la quantité de mouvement contenue dans le domaine  $\Omega$ . Comme pour la masse, cette équation s'écrit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{U} \vec{U} \vec{n} d\Gamma \quad (\text{V-4})$$

ou encore

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) d\Gamma \quad (\text{V-5})$$

$\otimes$  désigne le produit extérieur entre deux tenseurs d'ordre 1 et  $\nabla$  est l'opérateur tensoriel « nabra ».

La force  $\vec{f}$  est la somme des forces extérieures qui s'appliquent directement dans la masse du fluide, et des forces de contact, qui s'appliquent sur la surface.

Les forces extérieures seront notées  $\vec{F}$ .

Si  $d\Gamma$  est un élément de surface du domaine  $\Omega$  dont la normale extérieure est  $\vec{n}$ , l'élément de force de contact appliqué à  $d\Gamma$  est :  $d\vec{F} = \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} d\Gamma$  où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes.

Les forces appliquées à notre domaine  $\Omega$  sont par conséquent :

$$\int_{\Omega} \rho(\vec{F}) d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} d\Gamma \quad (\text{V-6})$$

Soit encore :  $\int_{\Omega} (\vec{F}) d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) d\Omega$

Nous obtenons donc pour finir :

$$\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) = \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{F} \quad (\text{V-7})$$

Nous venons d'établir les équations de Navier Stokes sous forme dite « conservative » qui se résume donc classiquement sous la forme :

□ **Continuité**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad (\text{V-8})$$

□ **Quantité de mouvement**

$$\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) = \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \vec{F} \quad (\text{V-9})$$

Il faut maintenant choisir de traiter uniquement les fluides newtoniens, pour lesquels le tenseur de contraintes s'exprime, dans le cas incompressible, sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{\delta}} + 2\mu \underline{\underline{D}}$$

où,  $p$  est la pression exprimée en pascal,  $\underline{\underline{\delta}}$  est le tenseur d'identité,  $\mu$  viscosité dynamique et  $\underline{\underline{D}}$ , le tenseur de déformation.

Les variations de la masse volumique seront dues soit à la température, soit à la présence de substance dans l'eau. Dans tous les cas, nous considérerons désormais que ces variations sont suffisamment faible pour que nous puissions utilisés une équation de continuité sous forme incompressible.

Nous arrivons finalement à l'écriture suivante :

□ Continuité :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 3 \quad (\text{VI-10})$$

où,  $\rho$  est la masse volumique du fluide et  $U$  est la vitesse des particules fluide.

□ **Quantité de mouvement**

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + U_j \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad i, j = 1, 3 \quad (\text{V-11})$$

où :  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) représente les forces extérieures de volume.

Dans le cas où nous considérons l'écoulement bidimensionnel et turbulent d'un fluide incompressible et non pesant, les équations régissant cet écoulement s'écrivent sous la forme suivante :

- **Equation dynamique**

$$\rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (V-12)$$

- **Equation de continuité**

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (V-13)$$

L'étude de l'écoulement turbulent dans un conduit à géométrie complexe pourrait se faire, du moins en principe, par la résolution directe des équations (V-12) et (V-13).

Cette approche directe nécessite de puissants moyens informatiques. Elle ne peut être conduite actuellement que sur des écoulements en géométrie relativement simple et pour des nombres de Reynolds peu élevés.

Les équations du mouvement présentent des fluctuations irrégulières dans l'espace et dans le temps. Devant cet aspect désordonné des évaluations turbulentes et cette apparente complexité du phénomène, l'attitude naturelle et la plus utilisée a été d'introduire des méthodes statistiques.

### 1°/ Décomposition statistique

La décomposition d'une grandeur caractéristique instantanée de l'écoulement turbulent en une partie macroscopique (moyenne) et une partie turbulente d'apparence aléatoire permet de développer un traitement statistique des équations du mouvement.

Vitesse et pression sont traitées comme des fonctions aléatoires de l'espace et du temps, dont nous décomposons les valeurs instantanées en (**Chassaing**, 2000) :

$$U_i(x_j, t) = \bar{U}_i(x_j, t) + u_i(x_j, t) \quad (V-14)$$

$$P(x_j, t) = \bar{P}(x_j, t) + p(x_j, t) \quad (V-15)$$

Le symbole  $\bar{(\quad)}$  représente l'opérateur de moyenne statistique ou moyenne d'ensemble et les lettres minuscules, les fluctuations ou écarts par rapport à la moyenne.

Par définition, les fluctuations sont centrées, de sorte que nous avons identiquement:

$$\bar{u}_i(x_j, t) = 0 \quad \text{et} \quad \bar{p}(x_j, t) = 0$$

**2°/ Les deux types d'advection**

Une décomposition binaire en valeur moyenne et fluctuations fut, à l'origine, introduite par Reynolds en 1894. Ses implications sur l'analyse sont beaucoup plus profondes qu'il n'y apparaît à première vue comme nous pouvons nous en rendre compte en considérant le terme de transport d'une propriété  $M$  dépendant de la vitesse à savoir (**Chassaing**, 2000) :

$$U_j \frac{\partial}{\partial x_j} M(U_i) \quad (V-17)$$

Dans une telle expression, la vitesse intervient à la fois en tant qu'agent d'advection -  $U_j$  - mais aussi comme grandeur transportée, à travers  $M(U_i)$ .

En appliquant à la vitesse agent d'advection, la décomposition (V-14) revient à distinguer au niveau macroscopique, un transport advectif par le mouvement moyen et un autre par le mouvement fluctuant conformément à l'identité :

$$U_j \frac{\partial M}{\partial x_j} = \bar{U}_j \frac{\partial M}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial M}{\partial x_j} \quad (V-18)$$

**3°/ Evolution moyenne**

La décomposition de  $M$  en grandeur moyenne et fluctuante, donne :

$$M = \bar{M} + m \quad \text{avec, } \bar{m} = 0 \quad (V-19)$$

L'équation (V-13) conduit, en prenant la moyenne membre à membre à :

$$U_j \frac{\partial M}{\partial x_j} = \bar{U}_j \frac{\partial \bar{M}}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial M}{\partial x_j}} \quad (V-20)$$

Compte tenu du caractère centré des fluctuations, nous noterons que :

$$\overline{u_j \frac{\partial M}{\partial x_j}} \equiv \overline{u_j \frac{\partial m}{\partial x_j}} \quad (V-21)$$

L'équation (V-20) permet de définir l'évolution moyenne de toute grandeur moyenne  $G$  par la variation particulière suivante :

$$\frac{D}{Dt}(\bar{M}) \equiv \frac{\partial \bar{M}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{M}}{\partial x_j} \quad (V-22)$$

c'est l'opérateur de dérivation particulière défini en suivant le mouvement moyen (**Chassaing**, 2000).

En fait, nous avons :

$$\frac{d(\overline{M})}{dt} \equiv \frac{\partial(\overline{M})}{\partial t} + U_j \frac{\partial(\overline{M})}{\partial x_j} = \frac{D(\overline{M})}{Dt} + u_j \frac{\partial(\overline{M})}{\partial x_j} \quad (V-23)$$

## II. EQUATIONS DU MOUVEMENT MOYEN

Pour les grands nombres de Reynolds, c'est-à-dire pour l'écrasante majorité des cas d'application, les solutions régulières ou laminaires ne sont plus stables et font place à des solutions chaotiques dont le détail est imprévisible. On renonce à décrire ces fluctuations pour ne s'intéresser qu'à des valeurs moyennes. Ces moyennes peuvent être des moyennes en temps (cas d'un écoulement stationnaire), des moyennes sur un certain nombre de réalisations de la même expérience (cas d'un écoulement instationnaire), ou des moyennes spatiales (cas d'un écoulement homogène). Malheureusement, en raison de la non linéarité des termes de convection, l'écoulement moyen n'est plus solution des équations de Navier Stokes et on nomme « équations de Reynolds » les équations de ce mouvement moyen.

### 1°/ Equation de continuité

Par raison de linéarité, nous déduisons de l'équation (V-19) en introduisant la relation (V-20) que :

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (V-24)$$

L'opérateur de moyenne d'ensemble appliqué à cette équation fournit la relation suivante :

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (V-25)$$

En situation isovolume, le champ de vitesse moyenne est donc sinusoidal tout comme l'est, à tout instant, le champ de vitesse fluctuante, puisque par soustraction directe des deux équations précédentes, nous avons également :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (V-26)$$

### 2°/ Equation dynamique du mouvement moyen : Equations de Reynolds

Tous les opérateurs de l'équation (V-12) sont linéaires à l'exception de celui du terme d'advection pour lequel les équations (V-20) et (V-21) s'appliquent. Nous obtenons l'équation moyenne suivante :

$$\rho \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right) = F_i - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (V-27)$$

En utilisant la relation (V.26), nous pouvons écrire :

$$\overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial (\overline{u_i u_j})}{\partial x_j} \quad (V-28)$$

qui introduit le tenseur des corrélations des fluctuations de vitesse  $\overline{u_i u_j}$ .

D'où l'équation dynamique du mouvement moyen est :

$$\rho \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right) = F_i - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_i u_j}) \quad (V-29)$$

Les termes  $-\overline{\rho u_i u_j}$  donnent naissance aux tensions de Reynolds, ils proviennent de la non linéarité des équations de Navier Stokes. Ils traduisent l'interaction entre le mouvement moyen et le mouvement fluctuant.

Le système d'équations ainsi obtenu admet plus d'inconnues que d'équations, c'est un système ouvert. La transformation qui lui est appliquée afin de pallier cet obstacle est appelée « fermeture ».

Le fait d'avoir pris la moyenne d'une équation instantanée conduit à une perte d'informations, il convient alors de choisir judicieusement les schémas de fermeture pour qu'il réintroduisent les informations perdues dans un nouveau système, fermé celui-ci, que l'on pourra résoudre numériquement.

***Schématiquement, le problème ici, est donc celui de la liaison entre le champ moyen et les tensions de Reynolds  $-\overline{\rho u_i u_j}$ . La modélisation de ces dernières constitue un modèle de turbulence.***

### **III. MODELES DE LA TURBULENCE**

La modélisation de la turbulence, du fait de l'étendue des échelles spatiale significatives peut être abordée de diverses façons.

Le but des modèles de turbulence est pratique, c'est la prévision numérique des écoulements turbulents, il n'est pas d'expliquer la turbulence. Les modèles de turbulence ne peuvent donner qu'une description approchée et ils ne sont applicables qu'à une certaine classe d'écoulements (*Schiestel*, 1993).

Les qualités que l'on pourra rechercher dans un modèle de turbulence pourront être : le domaine d'application, la précision des prévisions qu'il permet, la simplicité de mise en oeuvre, l'économie en temps de calcul. Toutefois, le modèle le plus universel n'est pas le mieux adopté à un problème précis. Un choix doit être fait.

#### **1°/ Classification des modèles en un point**

Pour pouvoir donc résoudre les équations de Reynolds, il faut fermer le problème, c'est-à-dire exprimer le tenseur  $-\overline{\rho u_i u_j}$  en fonction de grandeurs physiques

moyennes à l'aide d'un modèle de turbulence qui peut être une relation algébrique (modèle à zéro équation), une combinaison d'une relation algébrique et d'une équation (modèle à une équation) ou deux équations de transport – diffusion (modèle à deux équations). Dans tous les cas, il ne s'agira que d'une modélisation, fondée sur des considérations de dimension, sur l'empirisme, ou sur une interprétation des phénomènes physiques en jeu et leur importance respective.

Nous allons maintenant examiner, par ordre de complexité, les différents modèles de turbulence utilisés en hydrodynamique à surface libre. Nous aborderons les modèles dits à « zéro équation », à « une équation » et à « deux équations », puis nous verrons le modèle à deux équations actuellement le plus répandu : le modèle  $k - \epsilon$ .

### a. Concept de viscosité turbulente

Le concept de la viscosité turbulente, est apparu tout d'abord dans les travaux J. **Boussinesq** (1877), en proposant en analogie de celle de Newton pour les contraintes de viscosité moléculaire :

$$\overline{-u v} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (\text{V-30})$$

où, le coefficient de proportionnalité  $\nu_t$  représente la viscosité cinématique turbulente.

La généralisation du même concept au niveau tensoriel par Reynolds a conduit à :

$$\overline{-u_i u_j} = -R_{ij} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \text{ à laquelle } \mathbf{Hinze} \text{ (1975) a effectué une}$$

$$\text{correction : } \overline{-u_i u_j} = -R_{ij} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \text{ avec, } i, j = 1, 3$$

où, le terme  $\frac{2}{3} k \delta_{ij}$  est analogue à une pression dynamique par agitation turbulente.

La viscosité turbulente  $\nu_t$ , contrairement à la viscosité moléculaire, n'est pas une propriété du fluide, mais de l'écoulement, variant d'un point à l'autre de celui-ci. Le problème de la détermination des tensions de Reynolds est donc transféré sur l'évaluation de cette quantité. Et on peut effectuer une classification des modèles de ce type, suivant le nombre d'équations de transport utilisées pour la décrire.

#### • Modèles à viscosité turbulente algébrique

Les modèles à viscosité turbulente algébrique ne font appel à aucune équation de transport puisque, comme leur nom l'indique,  $\nu_t$  est donnée par une expression algébrique.

D'après la théorie cinétique des gaz, la viscosité moléculaire  $\nu$  est égale au produit de la vitesse moyenne des molécules par leur libre parcours moyen. Par analogie,

**Prandtl** (1945) suggéra que la viscosité turbulente  $\nu_t$  puisse, elle aussi être mise sous la forme de produit d'une vitesse et d'une longueur, mais cette fois caractéristique du mouvement turbulent.

L'analyse du cas d'une particule de fluide soumise à un seul gradient de vitesse moyenne conduit à exprimer la vitesse caractéristique en fonction de la longueur

caractéristique  $l_m$  dite longueur du mélange :  $V = l_m \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$ , ce qui conduit à

l'expression suivante de la viscosité turbulente :  $\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$ , dont la généralisation

aux écoulements quelconques est :

$$\nu_t = l_m^2 \sqrt{\left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad i, j = 1, 3$$

Pour un écoulement complexe quelconque, la formule de longueur de mélange appropriée ne peut généralement s'obtenir qu'à partir de résultats expérimentaux. L'intérêt d'une simulation numérique en est évidemment beaucoup diminué.

- **Modèle à une équation de transport**

Le plus grand reproche qui peut être formulé à propos des modèles à viscosité turbulente algébrique est qu'ils ignorent complètement le caractère non local de la turbulence qui ne peut être pris en compte qu'en introduisant dans la définition de  $\nu_t$ , au moins une grandeur turbulente décrite par une équation d'évolution.

Le modèle à une équation de transport, proposé indépendamment par **Kolmogorov** (1942) et **Prandtl** (1945), découle naturellement de l'expression de  $\nu_t$  en fonction d'une longueur et d'une vitesse caractéristiques, la racine carrée de l'énergie cinétique moyenne de la turbulence  $k$  constituant le meilleur candidat pour cette dernière :

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{k} l$$

où :  $C_\mu$ , constante numérique pure,  $l$ , représente une échelle de longueur qui est donnée algébriquement et  $k$ , l'énergie cinétique turbulente.

Le transport de la turbulence est cette fois pris en compte grâce à l'équation d'évolution de  $k$ , mais le problème de la détermination de la longueur caractéristique reste entier. On peut donc formuler les mêmes réserves pour ce modèle que pour le modèle de longueur de mélange, quant à l'application aux écoulements à géométrie complexe.

- **Modèles à deux équations de transport**

Le problème de la détermination de l'échelle de longueur caractéristique  $l$  (longueur caractéristique des grandes structures turbulentes) peut être résolu en notant que  $l$ , comme  $k$ , doit pouvoir être décrite par une équation de transport (**Rodi, 1980**), (les structures turbulentes sont convectées par l'écoulement moyen et leur taille varie sous l'effet de la dissipation visqueuse et de phénomènes du type étirement de filets tourbillonnaires). En fait, choisir  $l$  comme variable associée à  $k$  n'est pas fondamental. Toute combinaison de la forme  $k^m l^n$  (permettant de déduire  $l$  connaissant  $k$ ) convient aussi bien. De nombreux modèles à deux (02) équations de transport, ne différant que par le choix du couple d'exposant  $(m, n)$ , ont aussi vu le jour (modèle  $k-k^{1/2} l^{-1}$  (**Jaeger, 1990**), modèle  $k-kl$  (**Rotta, 1951**), modèle  $k-kl^{-2}$  (**Saffman, 1970**), modèle  $k-k^{3/2} l^{-1}$  (**Harlow, Nakayama, 1967**). L'équation de transport supplémentaire conserve la même forme générale, quelque soit le choix du couple  $(m, n)$ , mais c'est pour la variable  $k^{3/2} l^{-1}$  que cette équation est la plus simple. C'est en partie, pour cette raison, que ce modèle est devenu plus célèbre que les autres, et c'est actuellement le modèle à deux (02) équations de transport, et même plus généralement le modèle statistique en un point, le plus employé. En fait, ce modèle est plutôt connu sous la dénomination de modèle  $k-\epsilon$ .

### b. Modèle aux tensions de Reynolds

Le modèle aux tensions de Reynolds ne fait pas appel à la notion de viscosité turbulente, chacune des six tensions de Reynolds étant déterminée par la résolution d'une équation de transport.

L'inconvénient du modèle aux tension de Reynolds est qu'il nécessite la résolution de sept (07) équations de transport pour décrire l'aspect turbulent de l'écoulement (06 équations pour les tensions de Reynolds et l'équation de transport de  $\epsilon$ ), soit par rapport au modèle  $k-\epsilon$ , 05 équations supplémentaires. Il ne constitue pas, par conséquent, pas un candidat intéressant quand à notre sélection d'un modèle pour les écoulements à géométrie complexe. Cependant, en sacrifiant l'aspect « prise en compte de transport des tensions de Reynolds », un modèle à deux (02) équations de transport seulement peut être construit. Grâce à une modélisation adéquate des termes de transport, qui permet de transformer les six (06) équations sur les tensions de Reynolds en simples relations algébriques (A.S.M.), sont évidentes puisque, tout en ne présentant pas d'inconvénients d'une modélisation par viscosité turbulente isotrope, le nombre d'équations de transport à résoudre n'est pas plus grand que pour le modèle  $k-\epsilon$ .

### 2°/ Choix d'un modèle de turbulence

Le choix d'un modèle de turbulence adapté au modèle hydrodynamique que nous considérons et à nos propres exigences est primordial. Il doit être guidé par les objectifs de modélisation. Il faut reconnaître que ce choix prend également en compte les capacités de calcul dont nous pouvons disposer.

Lorsque nous cherchons à définir le modèle de turbulence le plus adapté à un modèle mathématique destiné à étudier l'écoulement dans les conduits à géométrie complexe, qu'exigeons nous de la part du modèle de turbulence ? Nous voudrions qu'il permette, à la fois, de reproduire l'hydrodynamique moyenne, d'estimer le brassage turbulent et d'évaluer les cisaillements pariétaux.

Notre choix s'est tourné vers un modèle de turbulence basé sur la représentation des contraintes de turbulence suivant le concept de la viscosité turbulente.

### 3°/ Modèle de turbulence k-ε

Le modèle k-ε est le plus souvent utilisé dans une version qui s'obtient avec l'hypothèse des grands nombres de Reynolds. La viscosité turbulente est définie par :

$\nu_t = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\epsilon}}$ , où  $\bar{k}$  et  $\bar{\epsilon}$  sont donnés par la résolution de deux équations de

transport, obtenues en simplifiant les équations d'évolution exacte de k et ε.

L'équation d'évolution exacte de k s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = -R_{ij} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u_j \frac{u_i u_i}{2}} + \frac{\bar{p}}{\rho} u_j - \nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (V-31)$$

L'équation d'évolution exacte de ε s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_j} = & -2\nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) - 2\nu \left( \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_k}} \right) \\ & - 2\nu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{u_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2} \right) - 2 \frac{\nu}{\rho} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x_i \partial x_k} \right) \\ & + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}}{\partial x_j^2} \right) - 2\nu^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 \quad i, j, k = 1, 3 \end{aligned} \quad (V-32)$$

En introduisant l'hypothèse des grands nombres de Reynolds dans l'équation (V-31),

le terme de diffusion moléculaire  $\nu \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial x_j^2}$  peut être négligé, et les deux autres

termes sont modélisés par une hypothèse de diffusion en gradient (**Gosse, Schiestel**, 1978).

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u_j \frac{u_i u_i}{2}} + \frac{\bar{p} u_j}{\rho} \right] = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] \quad i, j = 1, 3 \quad (V-33)$$

avec,  $\sigma_k$  : constante numérique.

La même hypothèse permet aussi de négliger les : premier, second, troisième, sixième et septième termes du membre de droite de l'équation (V-32) (**Lumley**, 1983). L'hypothèse de diffusion en gradient permet de modéliser le quatrième terme (terme de diffusion restant) par :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{v u_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2} \right] = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad i, j, k = 1, 3 \quad (V-34)$$

avec,  $\sigma_\varepsilon$  : constante numérique.

Les quatrième et dernier termes sont des termes de production- destruction. Chacun d'eux tend vers l'infini avec le nombre de Reynolds, mais leur somme reste bornée (**Lumley**, 1983). Il convient donc de les modéliser ensemble.

La modélisation utilisée pour le quatrième terme est celle proposée par **Launder**, **Reece** et **Rodi** (1975), qui donne :

$$-2 \nu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] - 2 \nu^2 \left[ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right]^2 = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_r - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (V-35)$$

avec,  $i, j, k = 1, 3$  et  $C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$  : constantes numériques.

En remplaçant les tensions de Reynolds par leurs expressions en fonction des taux de déformation moyens (équation de viscosité turbulente), et les différents termes modélisés, les équations de  $k$  et  $\varepsilon$  s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = \frac{C_\mu}{2} \frac{\bar{k}^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \bar{\varepsilon} \quad \text{avec } i, j = 1, 3 \quad (V-36)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{C_\mu}{2} \bar{k} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} \quad (V-37)$$

#### a. Calage des constantes du modèle de turbulence $k - \varepsilon$

- Détermination de la constante  $C_{\varepsilon 2}$

Cette constante est la seule qui subsiste en situation de turbulence homogène et isotrope. Dans ce cas, les équations de fermeture du modèle se réduisent à :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} = -\bar{\varepsilon} \quad (V-38)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} \quad (\text{V-39})$$

La valeur de la constante se déduit directement du taux de croissance énergétique en turbulence homogène isotrope à partir de la relation :

$$C_{\varepsilon 2} = k \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial t^2} / \left( \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} \right)^2 \quad (\text{V-40})$$

où,  $\bar{k} = At^n$ , loi de décroissance énergétique, avec  $n$  pour exposant  $n$ , une valeur comprise entre - 1.25 selon **Comte – Bellot** et **Corrsin** (1966) et -1 selon **Batchelor** (1953). L'expression (VI-30) fournit alors :

$$C_{\varepsilon 2} = \frac{n-1}{n} \quad (\text{V-41})$$

ce qui conduit à une valeur de  $C_{\varepsilon 2}$  de l'ordre 1.8 à 2.0. L'indication de 1.92 comme "valeur standard" intègre en réalité un effet "d'optimisation par l'usage".

- Détermination de  $C'_{\mu}$

Considérons la situation de couche limite turbulente en écoulement bidimensionnel plan en moyenne. L'expression du cisaillement turbulent donne :

$$C'_{\mu} = \frac{\bar{\varepsilon}}{k^2} \frac{-\overline{uv}}{\partial \bar{U} / \partial y} \quad (\text{V-42})$$

Appliquant cette expression à la région d'équilibre énergétique entre « production » et « dissipation » de  $\bar{k}$ , il vient :  $-\overline{uv} \partial \bar{U} / \partial y = \bar{\varepsilon}$

Qui par substitution du gradient de vitesse moyenne conduit à :  $C'_{\mu} = \frac{(\overline{uv})^2}{\bar{k}^2}$

En référence aux données expérimentales dans cette configuration, **Bradshaw, Ferris, et Atwell**, (1967) ont conclu à une valeur sensiblement constante du rapport  $\frac{\overline{uv}}{k}$ , de l'ordre de 0,3. Il en résulte :  $C'_{\mu} \approx (0,3)^2 = 0,09$  ;

- Détermination  $C_{\varepsilon 1}$

Le calage de cette constante fait référence à la région logarithmique de l'écoulement de couche limite. En négligeant les termes d'advection et de diffusion moléculaire, l'équation modèle de la dissipation s'écrit :

$$0 = C_{\varepsilon 1} v_t \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_t}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k}$$

Considérant que, dans cette région, les profils de  $\bar{U}$ ,  $\bar{k}$  et  $\bar{\varepsilon}$  peuvent être représentés par :

$$\frac{\bar{U}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C ; \quad \bar{k} = u_*^2 / \sqrt{C'_\mu} \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{u_*^3}{\kappa y}$$

L'équation précédente, avec  $v_t = \kappa u_* y$ , conduit à (*Gosse, Schiestel, 1978*) :

$$C_{\varepsilon 1} \approx C_{\varepsilon 2} - \frac{\kappa^2}{\sigma_\varepsilon \sqrt{C'_\mu}} \quad \text{où, } \kappa \text{ constante de Von Karman.} \quad (\text{V-43})$$

Pour un nombre de Prandtl et Schmidt de dissipation  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ , cette expression conduit à  $C_{\varepsilon 1} = 1,49$ .

Les valeurs indiquées sont considérées comme une recommandation tenant compte de nombreuses "optimisations numériques.

### b. Conditions aux limites pour $k$ et $\varepsilon$

Les conditions aux limites pour  $\bar{k}$  et  $\bar{\varepsilon}$  sont obtenues en utilisant le fait que, dans la zone pleinement turbulente, convection et diffusion sont négligeables. L'équation de  $\bar{k}$  se réduit alors à :  $\bar{\varepsilon} = P$ .

Ce que l'on traduit en disant que la zone pleinement turbulente est une région d'équilibre (la production  $y$  est égale à la dissipation). La production  $P$  est donnée par :

$$P = -\overline{u v} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \quad (\text{V-44})$$

Comme,  $-\overline{u v} = (u_*)^2$  et  $u^+ = \frac{1}{\kappa} u_* \ln y + \text{constante}$

$$\text{Nous obtenons : } \bar{\varepsilon} = P = \frac{u_*^3}{\kappa y} = \frac{u_*^4}{\kappa v y^+}$$

Quant à la condition sur  $\bar{k}$ , elle s'obtient en remplaçant dans l'équation (V-44) la tension de Reynolds par l'expression que donne le modèle  $k - \varepsilon$  standard :

$$P = -\overline{u v} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = \frac{C_\mu \bar{k}^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^2$$

$$\text{d'où : } \bar{k} = \frac{\kappa \varepsilon y}{C_\mu^{1/2} u_*} = \frac{u_*^2}{C_\mu^{1/2}} \quad (\text{V-45})$$

## Conclusion

L'écoulement turbulent est régi par le système d'équations où les contraintes de Reynolds  $(\overline{u_i u_j})$  apparaissent comme des inconnues supplémentaires, ce qui confère au système un caractère ouvert.

Le problème central de l'analyse statistique des écoulements turbulents consiste en la modélisation de ces contraintes, les hypothèses de fermeture destinées à obtenir un système comportant autant d'équations que d'inconnues utilisées en pratique sont très variées, car il n'existe pas de représentation unique de ces contraintes. Ces hypothèses sont appelées des modèles de turbulence.

La principale restriction des modèles de turbulence est qu'ils sont valables pour des configurations bien précises, correspondant aux conditions expérimentales à partir desquelles leurs différents coefficients empiriques ont été obtenus.

En fait, il faut reconnaître que la modélisation de la turbulence est encore actuellement un problème non parfaitement résolu, et les modèles existants ont tous des restrictions d'utilisation.

Nous allons essayer de voir dans ce qui suit si le modèle de turbulence  $k-\epsilon$  répond au mieux à l'écoulement turbulent dans un canal en marches d'escalier et ceci tout en étudiant les autres variables.

***Chapitre VI* : Modélisation mathématique de l'écoulement extrêmement turbulent dans un canal en marches d'escalier**

**INTRODUCTION**

Le présent chapitre va porter sur l'étude d'un écoulement très turbulent dans un canal à ciel ouvert de forte pente dont la géométrie du fond est en forme de marches d'escalier (Photo VI.1).



**Photo VI.1** : Canal à forte pente avec fond en marches d'escalier

Dans le chapitre I, nous avons illustré les trois zones d'écoulement distinctes qui peuvent avoir lieu dans un écoulement extrêmement turbulent sur un canal en marches d'escalier, à savoir, la zone d'écoulement lisse, la zone d'écoulement graduellement varié et la zone d'écoulement uniforme aéré. Les deux premières zones sont départagées par le point d'inception qui apparaît lorsque la couche limite se développant à partir du seuil atteint la surface libre de l'écoulement.

Précisément, nous consacrerons la première partie de ce chapitre à l'établissement du modèle mathématique qui régit l'écoulement dans la couche limite de la zone lisse du canal. Nous pouvons assimilé un tel écoulement à celui d'un fluide visqueux incompressible turbulent sur un profil rugueux.

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous établirons le modèle mathématique de l'écoulement extrêmement turbulent à l'aval du point d'inception.

## I. ELABORATION DU MODELE MATHÉMATIQUE RÉGISSANT L'ÉCOULEMENT A L'AMONT DU POINT D'INCEPTION

Dans le chapitre V, nous avons présenté le modèle mathématique régissant les écoulements turbulents, à savoir :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right) = F_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VI-1})$$

### 1°/ Présentation des hypothèses de base et du schéma descriptif

La résolution du système d'équations (VI-1) dans sa forme la plus générale est très complexe si elle n'est pas impossible. Pour cela, il est donc nécessaire de considérer certaines hypothèses qui négligent et simplifient les phénomènes physiques secondaires.

#### a. Hypothèses de base

Pour les besoins de l'étude, nous avons émis les hypothèses suivantes :

- Le canal est suffisamment large pour que l'écoulement ne soit pas influencé par les parois latérales. L'écoulement sera par conséquent régi par les seules variables spatiales  $x$  et  $y$  (figure VI.1).
- Le fluide est supposé incompressible.
- L'écoulement est considéré permanent, ce qui signifie que les variables moyennes de l'écoulement sont maintenues constantes dans le temps, soit :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} = 0$$

- Concernant les forces de volume, nous considérons que l'effet du champ magnétique est négligeable pour ne tenir compte que des forces gravitationnelles. Les projections sur les axes de coordonnées, donnent :

$$F_x = g \sin \alpha \quad \text{et} \quad F_y = g \cos \alpha$$

#### b. Schéma de calcul et choix des axes

La présente étude va porter sur un écoulement turbulent à surface libre bidimensionnel en régime permanent dans un canal à forte pente. La géométrie du fond du canal est conçue sous forme de marches d'escalier. Le choix des axes du système orthogonal est lié au sens prédominant de l'écoulement dans le canal, de manière qu'il coïncide avec l'axe des abscisses (figure VI.1).

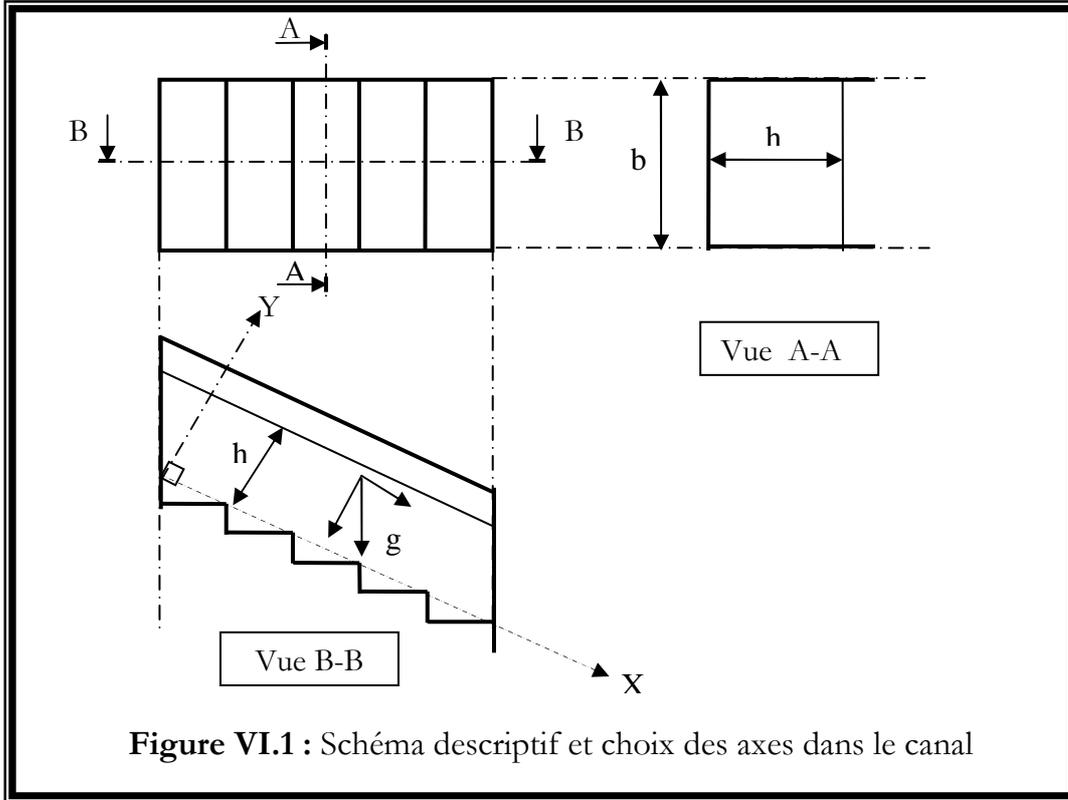


Figure VI.1 : Schéma descriptif et choix des axes dans le canal

2°/ Modèle de turbulence

L'écoulement étant turbulent, il est régi par les équations de Reynolds définies auparavant. En tenant compte des hypothèses ci-dessus, le système d'équations (VI-1) peut être simplifié pour être réécrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{U} - \left( \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v}}{\partial y} \right) \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \nu \Delta \bar{V} - \left( \frac{\partial \bar{u} \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (VI-2)$$

Le système (VI-2) est un système ouvert. Pour sa fermeture, le modèle de turbulence k-ε présenté dans le chapitre V est utilisé.

- L'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente, définie comme suit :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \bar{u}_i \bar{u}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \epsilon \quad (VI-3)$$

- L'équation de transport de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente, est définie comme suit :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{VI-4})$$

dans lesquelles :  $v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$  est la viscosité turbulente avec,  $k$  : l'énergie cinétique turbulente ;  $\varepsilon$  : Le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente et  $C_{\varepsilon_1}, C_{\varepsilon_2}, C_\mu, \sigma_k$  et  $\sigma_\varepsilon$  : sont des constantes numériques.

### 3°/ Modèle mathématique final

Le modèle mathématique de l'écoulement dans la couche limite de la zone lisse du canal, écrit en terme des variables de l'écoulement  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{P}$  et des variables du modèle de turbulence  $k, \varepsilon$  se résume finalement au système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + v \Delta \bar{U} - \left( \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \right) \\ \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + v \Delta \bar{V} - \left( \frac{\partial \overline{uv}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0 \\ \bar{U} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial k}{\partial y} \right) + (-\overline{uv}) \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \varepsilon \\ \bar{U} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + (-\overline{uv}) C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{array} \right. \quad (\text{VI-5})$$

En outre des hypothèses déjà introduites, l'analyse et la comparaison entre les ordres de grandeur des paramètres de l'écoulement peuvent nous conduire à négliger certains termes du système d'équations (VI-5), ainsi :

- Il est d'usage de considérer que l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  est souvent nettement inférieur à celui de la distance  $x$  lui correspondant, mesurée à partir du bord d'attaque. Par conséquent, les variations longitudinales des composantes de la vitesse de l'écoulement sont considérées négligeables devant les variations transversales (*Graf*, 1993), (*Midoux*, 1993), (*Padet*, 1991). Il s'en suit que :

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} \ll \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y}; \quad \frac{\partial \bar{u}v}{\partial x} \ll \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y}$$

• La composante transversale de la vitesse  $V$  est très petite devant la composante longitudinale  $U$ . Par conséquent, les termes de l'équation de Reynolds suivant la direction  $y$  qui font intervenir la variation de la composante  $V$  sont négligeables. Il s'en suit, l'expression de la pression suivante :  $\bar{P} = \rho g y \cos\alpha - \rho \bar{v}^2$

De même, dans cette expression, nous éliminons le deuxième terme traduisant une tension supplémentaire qui est souvent négligeable devant le terme de la pression hydrostatique. D'où l'hypothèse de la répartition hydrostatique des pressions :  $\bar{P} = \rho g y \cos\alpha$

• Afin de simplifier les notations dans les sections et les chapitres qui suivent, nous écrirons, désormais, les termes des différentes variables dépendantes de l'écoulement sans le symbole "barre" en dessus.

En intégrant les hypothèses ci-dessus dans le système (VI-5), le modèle mathématique final régissant l'écoulement dans la couche limite dans un canal large à forte pente, peut être exprimé selon le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin\alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial (\overline{-uv})}{\partial y} \\ P = \rho g y (\cos\alpha) \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{VI-6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial k}{\partial y} \right) + (\overline{-uv}) \frac{\partial U}{\partial y} - \varepsilon \\ U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + (\overline{-uv}) C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial U}{\partial y} - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{array} \right.$$

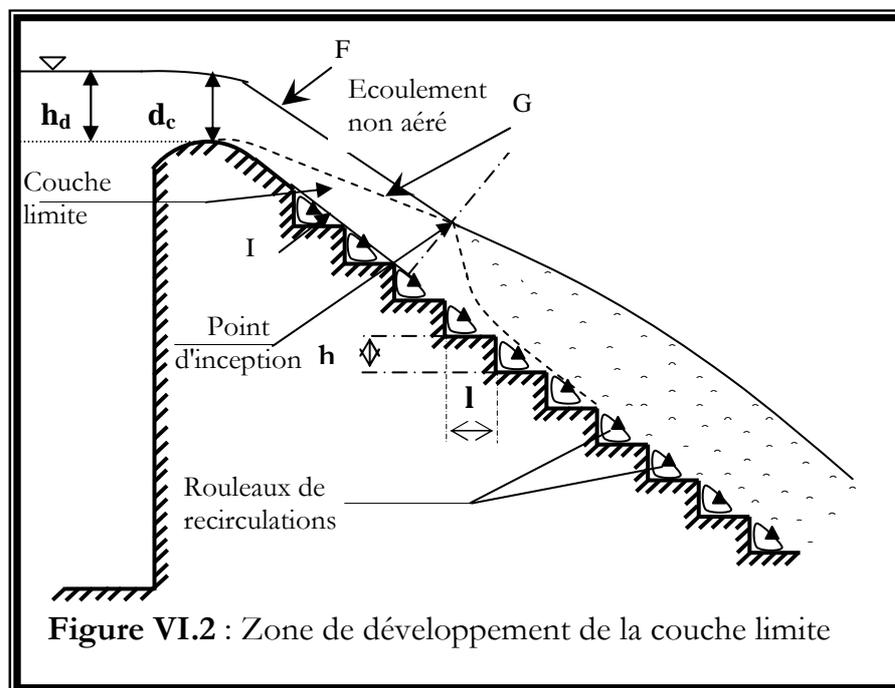
avec,  $(\overline{-uv}) = \frac{1}{\rho} \mu_t \frac{\partial U}{\partial y}$  et  $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$

Les constantes du système d'équations sont (*Cousteix, 1989*), (*Schiestel, 1998*) :  $C_\mu = 0,09$  ;  $C_{\varepsilon_1} = 1,43$  ;  $C_{\varepsilon_2} = 1,92$  ;  $\sigma_k = 1,0$  et  $\sigma_\varepsilon = 1,30$ .

4°/ Écriture du modèle mathématique en fonction de la variable adimensionnelle  $\omega$

Sur la figure VI.2, nous pouvons aisément distinguer deux régions dans la zone où se développe la couche limite ; la première est limitée par le fond du coursier, limite I, et le bord supérieur de la couche limite, limite G, tandis que la seconde est limitée par la limite G et la surface libre, limite F.

L'utilisation de la méthode des différences finies impose d'opérer une transformation de variables pour passer du domaine de l'écoulement physique irrégulier à un domaine de calcul régulier.



La similitude entre les équations de transports constituant le système (VI-6) peut nous mener à une écriture sous la forme générale suivante :

$$U \frac{\partial \phi}{\partial x} + V \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_\phi \quad (VI-7)$$

où,  $\phi$  désigne les variables de l'écoulement  $U, k, \epsilon$ , dont les caractéristiques suivantes :

$$\phi = U \Rightarrow \sigma_U = 1 ; \quad S_U = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\phi = k \quad \Rightarrow \quad \sigma_k = 1 ; \quad S_k = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon$$

$$\phi = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma_\varepsilon = 1,30 ; \quad S_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Les transformations de Von Mises utilisées dans la méthode de Patankar et Spalding, nous permettent d'écrire le système d'équations en coordonnées  $(x, y)$  sous le système en coordonnées  $(x, \omega)$ , où  $\omega$  est la fonction de courant adimensionnelle définie comme suit (**Keller, Rastogi**, 1977) :

$$\omega = \frac{\Psi - \Psi_I}{\Psi_G - \Psi_I} \quad (\text{VI-8})$$

avec,  $\Psi_G$ , la fonction de courant au bord supérieur de la couche limite ;

$\Psi_I$ , la fonction de courant au niveau de la pseudo -base.

Ainsi,  $\omega$  varie toujours de 0 au niveau de la limite I à 1 au niveau de la limite G.

Le changement de variables proposé se fait du système  $(x, y)$  au système  $(x, \omega)$ , nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (\text{VI-9})$$

Etant donné que la fonction de courant adimensionnelle est :

$$\omega = \frac{\Psi - \Psi_I}{\Psi_G - \Psi_I} = \frac{1}{\Delta \Psi} \Psi - \frac{\Psi_I}{\Delta \Psi}$$

avec,  $\Delta \Psi = \Psi_G - \Psi_I$ , il s'en suit que :  $\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\Delta \Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial y}$

sachant que les expressions de la fonction de courant sont :  $-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \rho V$ ,

$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \rho U$ , il vient que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{U \rho}{\Delta \Psi} \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \quad (\text{VI-10})$$

La fonction de courant est :  $\Psi = \omega(\Psi_G - \Psi_I) + \Psi_I$

d'où :

$$\rho V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{d\psi}{dx} = \omega \left( -\frac{d\psi_G}{dx} + \frac{d\psi_I}{dx} \right) - \frac{d\psi_I}{dx}$$

Sachant que les taux de transfert de masse à travers les limites I et G sont respectivement :  $\dot{m}_I = -\frac{d\psi_I}{dx}$  et  $\dot{m}_G = -\frac{d\psi_G}{dx}$ , il en résulte que :

$$V = \frac{1}{\rho} \left[ (1-\omega) \dot{m}_I + \dot{m}_G \omega \right] \quad (\text{VI-11})$$

En divisant l'équation (VI-9) par  $U$  et en y substituant les expressions (VI-10) et (VI-11), nous obtenons les équations du modèle dans le système  $(x, \omega)$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(1-\omega) \dot{m}_I + \omega \dot{m}_G}{\Delta \psi} \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\mu_t \rho U}{\sigma_\phi (\Delta \psi)^2} \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\mu \rho U}{(\Delta \psi)^2} \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) + S'_\phi \quad (\text{VI-12})$$

avec,  $S'_\phi = \frac{S_\phi}{U}$

Au niveau de la pseudo -base, nous considérons le taux de transfert de masse nul.

En exprimant les constantes  $S'_\phi$  dans le système  $(x, \omega)$  et en prenant :  $b = \frac{\dot{m}_G}{\Delta \psi}$ ,

$$C_\phi = \frac{\mu_t \rho U}{\sigma_\phi (\Delta \psi)^2} \text{ et } e = \frac{\mu \rho U}{(\Delta \psi)^2}$$

Le système des équations de transport s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} + b_\omega \frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( C_U \frac{\partial U}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( e \frac{\partial U}{\partial \omega} \right) + \frac{g}{U} \sin \alpha - \frac{1}{U \rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial k}{\partial x} + b_\omega \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( C_k \frac{\partial k}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( e \frac{\partial k}{\partial \omega} \right) + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{U \rho^2}{(\Delta \psi)^2} \left( \frac{\partial U}{\partial \omega} \right)^2 - \frac{\varepsilon}{U} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + b_\omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( C_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( e \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right) + C_{\varepsilon_1} C_\mu k \frac{U \rho^2}{(\Delta \psi)^2} \left( \frac{\partial U}{\partial \omega} \right)^2 - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k U} \end{array} \right. \quad (\text{VI-13})$$

En appliquant l'équation (VI-12) au voisinage supérieur de la limite G, où est enregistré un gradient de vitesse nul à travers la section, il en résulte :  $\frac{\partial U}{\partial x} = S'_U$ .

Et si cette égalité est applicable au voisinage inférieur de la même limite, en supposant la diffusion moléculaire négligeable, nous pouvons également écrire que :

$$b\omega \frac{\partial U}{\partial \omega} \Big|_{NG} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( C_U \frac{\partial U}{\partial \omega} \right) \Big|_{NG}$$

NG, représente le point à la limite proche de G.

Avec,  $\omega = 1$ , il en résulte l'expression suivante :

$$b = \frac{\left( C_U \frac{\partial U}{\partial \omega} \right)_G - \left( C_U \frac{\partial U}{\partial \omega} \right)_{NG}}{U_G - U_{NG}}$$

Comme  $b = \frac{\dot{m}_G}{\Delta \psi}$ , il s'en suit :

$$\dot{m}_G = \frac{\Delta \psi \left[ \left( C_U \frac{\partial U}{\partial \omega} \right)_G - \left( C_U \frac{\partial U}{\partial \omega} \right)_{NG} \right]}{U_G - U_{NG}} \quad (VI-14)$$

### 5°/ Construction des profils initiaux des variables de l'écoulement

Les conditions aux limites qui caractérisent le fond ainsi que la limite de l'écoulement libre du domaine à traiter, ne nous suffisent pas pour enclencher le processus de calcul numérique de l'écoulement. Il importe de définir les profils des différentes variables de l'écoulement au niveau de la première section (conditions initiales) donnés par des expressions générales. Ceci fera l'objet du développement qui suit.

#### a. Distribution de la vitesse

Le profil initial de la répartition des vitesses est déterminé soit expérimentalement soit en utilisant des formulations empiriques. **Chen** a montré que pour des écoulements dans les canaux hydrauliques très rugueux, le profil de vitesse dans la couche limite peut être représenté par la loi de puissance suivante (**Chen**, 1990) :

$$\frac{U}{U_1} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/N} \quad (VI-15)$$

où :  $U_1$  est la vitesse de l'écoulement libre,  $\delta$ , l'épaisseur de la couche limite,  $y$ , l'ordonnée du point considéré et  $N = \kappa \sqrt{8/f}$  est le facteur de puissance où  $\kappa = 0.41$ , représente la constante de Von Karman. Pour le calcul du coefficient de frottement dans le cas des évacuateurs en marches d'escalier, **Rajaratnam**, (1990) a proposé la formule suivante :

$$f = \frac{8 h_n^3 g \sin \alpha}{q^2} \quad (\text{VI-16})$$

dans laquelle,  $h_n$ , est la hauteur normale de l'écoulement,  $g$ , l'accélération de la pesanteur,  $\alpha$ , l'angle d'inclinaison du canal et  $q$  le débit unitaire.

L'estimation de l'épaisseur de la couche limite au niveau du seuil se fait par la méthode de **Henderson** (1966), selon l'expression suivante :

$$\delta_{\text{initial}} = -H_d (0,0055 h_d^{-0,3}) \quad (\text{VI-17})$$

avec,

$$H_d = \frac{d_c}{0,755} \text{ la charge d'eau amont définie par Keller, Rastogi, (1975).}$$

### b. Distribution de l'énergie cinétique turbulente

Les travaux expérimentaux de **Klebenoff** ont montré que le paramètre  $\sqrt{k}/U_1$  varie linéairement de 8 % près de la paroi à 0 % au niveau de la limite G. En connaissant la vitesse libre  $U_1$ , le profil de l'énergie cinétique turbulente  $k$  est obtenu aisément à partir de ces dernières indications (**Klebenoff**, 1953) :

$$k = U_1^2 0,08 \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2 \quad (\text{VI-18})$$

### c. Distribution du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

Le profil initial du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente est obtenu, des expressions de la viscosité turbulente définies ainsi :  $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$  et  $\mu_t = \rho k^{1/2} l_m$

$$\text{d'où : } \varepsilon = \frac{C_\mu k^{3/2}}{l_m} \quad (\text{VI-19})$$

La longueur de mélange de la turbulence  $l_m$ , est déterminée selon **Schlichting** (1979) comme suit :

$$\begin{aligned} y < 0,22\delta & \quad l_m = 0,42 y \\ y \geq 0,22\delta & \quad l_m = 0,09 \delta \end{aligned}$$

### d. Calcul de la ligne d'eau

En se rapportant à l'équation de l'énergie et à l'équation de continuité de l'écoulement, le profil de la ligne d'eau peut être déterminé par l'équation

différentielle du mouvement graduellement varié dans un canal uniforme définie ainsi :

$$\frac{dh_e}{dx} = I \frac{1 - \left( (Q/S_m)^2 / C^2 R_h I \right)}{1 - \left( (Q/S_m)^2 / (g S_m / b_c) \right)} \quad (\text{VI-20})$$

où,  $h_e$  est la hauteur de l'écoulement,  $I$ , la pente du canal,  $Q$ , le débit volumique,  $S_m$ , la section mouillée,  $C$ , le coefficient de Chezy,  $R_h$ , le rayon hydraulique et  $b_c$ , la largeur du canal.

L'hypothèse d'un écoulement bidimensionnel (canal infiniment large) conduit à déduire les caractéristiques suivantes :

Le rayon hydraulique est égal :  $R_h = \frac{S_m}{P_m} = d$  ;

La surface mouillée est égale à :  $S_m = d$

La profondeur normale est donnée par :  $h_n^3 = \frac{q^2}{C^2 I}$  ;

L'expression de la profondeur critique est :  $d_c^3 = \frac{q^2}{g}$

En substituant ces éléments dans l'équation de base (VI-20), il en résulte l'expression suivante :

$$\frac{dh_e}{dx} = I \frac{1 - (h_n/d)^3}{1 - (d_c/d)^3} \quad (\text{VI-21})$$

## 6°/ Conditions aux limites

Il y a lieu de distinguer entre deux types de conditions aux limites, celles qui caractérisent le fond ou la paroi du canal et celles de l'écoulement potentiel (libre).

### a. L'écoulement libre

Le bord supérieur de la couche limite constitue aussi une des frontières de l'écoulement libre dont la vitesse longitudinale  $U_1$  dépend de la hauteur de la lame d'eau ainsi que de la position longitudinale.

Selon **Keller** et **Rastogi**, la vitesse libre de l'écoulement répond à l'équation suivante (**Keller, Rastogi**, 1975, 1977) :

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} = g \sin \alpha \quad (\text{VI-22})$$

L'énergie cinétique turbulente  $k$  et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulent  $\varepsilon$ , sont considérées nuls le long de la frontière supérieure de la couche limite.

### b. Traitement de la paroi

Le modèle mathématique adopté pour l'écoulement, ne s'applique qu'au domaine où le nombre de Reynolds est élevé. A proximité de la paroi cette approche n'est plus valable. Pour surmonter cette irrégularité, nous devons faire appel à des lois qui régissent la distribution des différentes variables de l'écoulement dans les zones près des parois. Le calcul détaillé à l'intérieur de ces zones où règnent des gradients internes, nécessite l'introduction d'un nombre élevé de points de discrétisation. Une méthode pratique pour pallier à cet inconvénient est de faire un raccordement à une loi universelle de paroi qui est une approche économique basée sur une formulation globale. A cet effet, de nombreux chercheurs ont proposé des modèles de fonctions de calcul des propriétés de l'écoulement près de la paroi.

#### i. Fonction de paroi pour la vitesse

Les fonctions de paroi pour les vitesses permettent d'avoir l'expression du profil des vitesses en fonction de la distance normale à la paroi. Dans bien des cas, la tension de cisaillement totale peut être supposée constante le long de l'épaisseur de la couche de paroi. Avec cette hypothèse, il existe un profil universel des vitesses, défini par la vitesse  $u^+$  et le nombre de Froude  $y^+$  qui sont des paramètres adimensionnels :  $U^+ = f(y^+)$ .

Nous choisissons la formulation basée sur les variables de Prandtl définies par :

$$U^+ = \frac{U}{U_*} \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{y U_*}{\nu}$$

qui introduisent la notion de la vitesse de frottement  $U_*$  donnée par l'expression

$$\text{suivante : } (U_*)^2 = \frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{u v} \quad (\text{VI-23})$$

où,  $\overline{(-uv)}$  est la tension de Reynolds,  $\nu$ , la viscosité cinématique,  $\tau$ , la contrainte de cisaillement et  $\rho$ , la masse volumique de l'eau.

Une analyse fine de l'aspect global de l'écoulement permet de mettre en évidence deux zones assez distinctes dans la couche limite turbulente, une couche externe et une couche interne.

#### ii. Couche externe

Elle représente approximativement 80 à 90 % de l'épaisseur totale de la couche limite  $\delta$ . Le gradient de vitesse  $\partial U / \partial y$  y est faible et la distribution de vitesse  $u(y)$  n'est pas fortement influencée par les conditions de la paroi, elle dépend

essentiellement du fluide et de l'écoulement libre. Le transport turbulent  $y$  est prépondérant et la distribution de vitesse est représentée par une loi qui introduit la notion de la vitesse déficitaire ( $U_1 - u$ ). Selon **Padet** (1991), nous avons :

$$\frac{U_1 - U}{U_*} = -2,5 \text{Ln} y^+ + 1,34 (1 + \cos \pi y^+) \quad (\text{VI-24})$$

### iii. Couche interne

Son épaisseur est de l'ordre de 10 à 20 % de  $\delta$ . A l'inverse de la couche externe, l'écoulement dépend ici, principalement, des conditions aux limites de la paroi et, bien évidemment, de la nature du fluide. C'est dans cette zone que la loi de vitesse est dénommée loi de la paroi. Un examen attentif conduit encore à distinguer trois sous-couches dans cette couche interne, la sous couche visqueuse, la zone intermédiaire ou la zone tampon et la zone logarithmique.

- **La sous couche visqueuse ( $y^+ < 10$ )**

C'est la zone la plus proche de la paroi où le transport turbulent peut être négligé devant le transport moléculaire donc  $(U_*)^2 = \delta \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ , ce qui donne la formule

universelle suivante :  $U^+ = y^+ \quad (\text{VI-25})$

- **La zone intermédiaire ou la zone tampon ( $10 < y^+ < 40$ )**

Dans cette zone, le transport turbulent et le transport moléculaire sont du même ordre, donc  $(U_*)^2 = \delta \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \overline{u v}$ . Ce qui donne la formule universelle suivant :

$$U^+ = 5 \text{Ln} y^+ - 3,05 \quad (\text{VI-26})$$

Les deux zones précédentes associées correspondent à une couche de l'ordre de 1% de  $\delta$ .

- **La zone logarithmique ( $40 < y^+ < 500$ )**

Dans cette zone, le transport moléculaire peut être négligé devant le transport turbulent donc  $(U_*)^2 = -\overline{u v}$ . Dans ce cas les mesures expérimentales suggèrent un profil de **vitesse** de forme logarithmique, dont l'expression est la suivante :

$$U^+ = 2,5 \text{Ln} y^+ + 5,56 \quad (\text{VI-27})$$

La valeur  $y^+ = 500$  est approximativement de l'ordre de 5 à 20 % de l'épaisseur de  $\delta$ .

Lorsque la paroi est rugueuse, les expériences montrent que le profil universel de distribution des vitesses est toujours valable, indépendant de la rugosité de la paroi,

toutefois, la constante  $C = 5,56$  dans la loi précédente devient une fonction de  $k^+$  et de la géométrie de la protubérance, avec,  $k^+ = \frac{k_s \mu_t}{\nu}$ , et dont  $k_s$  est la rugosité uniforme.

Pour  $k_s > 70$ , une région brute où les protubérances sont hors de la couche visqueuse, **Ryhming** (1985) propose l'expression suivante :

$$U^+ = 2,54 \ln \left( \frac{y}{k_s} \right) + 8,5 \quad (\text{VI-28})$$

#### iv. Fonctions de paroi pour $k$ et $\varepsilon$

Concernant l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente, **Kim et Chen**, (1988) et **Sajjadi et Aldridge**, (1993). (voir aussi **Violet, Chabard, Esposito, et Laurence**, 1998) ont proposé les expressions suivantes :

$$k = \frac{U_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (\text{VI-29})$$

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (\text{VI-30})$$

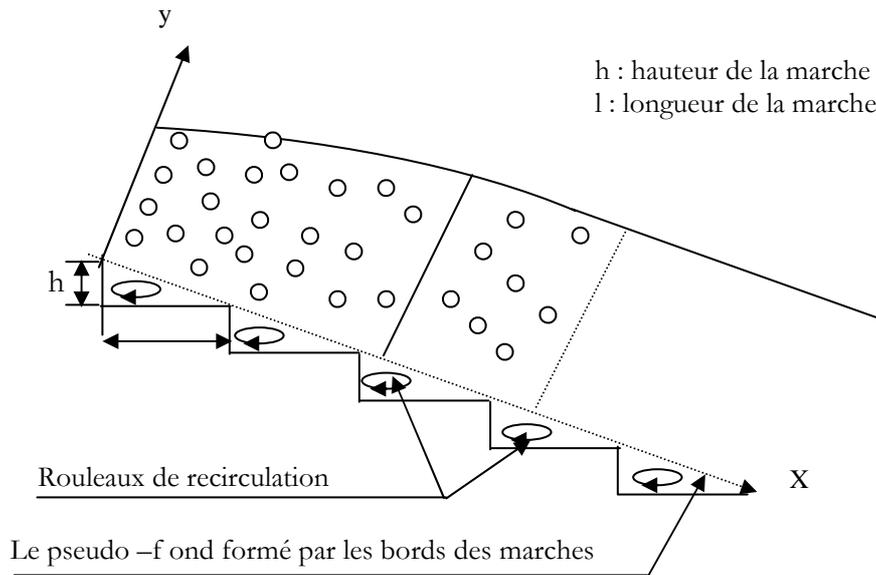
## II. MODELISATION MATHÉMATIQUE DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT A L'AVANT DU POINT D'INCEPTION

Nous avons vu au cours des premiers chapitres que le phénomène d'entraînement d'air commence à partir du point d'inception pour donner naissance à un écoulement turbulent du mélange air - eau.

Partant de là, nous allons essayer de mettre en équation l'écoulement très turbulent le long d'un canal en marches d'escalier et de proposer une modélisation de ce dernier pour aboutir à une solution numérique qui s'avère très délicate, car nous nous trouvons contraint de traiter avec les équations de Navier-Stokes.

### 1°/ Schéma du canal d'étude

L'étude se porte sur l'écoulement turbulent sur un canal en marches d'escalier schématisé comme suit :



**Figure VI.3 :** Représentation du canal d'étude (canal en marches d'escalier)

## 2°/ Hypothèses

Dans le but d'évaluer les paramètres des écoulements aérés, nous avons utilisé la théorie des écoulements homogènes. Elle est basée sur un modèle homogène qui fournit une technique simple d'analyse et qui exige à priori la détermination des paramètres moyens (tirant d'eau, vitesse, concentration en air...) afin de traiter le mélange air - eau comme un pseudo fluide obéissant aux équations usuelles d'un écoulement à une seule phase, en l'occurrence l'eau. C'est donc avec un modèle global que nous allons travailler et qui ne s'intéresse à aucune description détaillée de l'écoulement diphasique.

Afin de bien mener l'étude de l'écoulement turbulent sur un canal en marches d'escalier, les hypothèses suivantes sont posées :

- Le canal est suffisamment large pour que dans l'axe le phénomène soit peu modifié par la présence des parois latérales,
- L'écoulement est turbulent graduellement varié aéré et bidimensionnel,
- Le fluide est Newtonien incompressible, à propriétés physiques constantes,
- La masse volumique considérée est celle du mélange air-eau ( $\rho_m$ ). Cette dernière est fonction de la concentration moyenne en air ( $C_{moy}$ ). Plusieurs formules ont été proposées pour le calcul de la masse volumique du mélange ( $\rho_m$ ) en fonction de la concentration moyenne en air ( $C_{moy}$ ) outre celle que nous avons utilisé :

$$\rho_m = \rho_e (1 - C_{moy}) \quad (VI-31)$$

- Dans le cas d'un évacuateur de crue, nous considérons que le débit reste constant au cours du temps ; l'écoulement est stationnaire et les dérivées partielles par rapport au temps sont donc nulles,
- La distribution de la pression est hydrostatique. Elle est donnée par :

$$P(y) = \rho_e g \cos \alpha (d - y) \quad (\text{VI-32})$$

avec,  $d$  : la hauteur de l'écoulement à la surface libre (m),

### 3°/ Equations de l'écoulement turbulent

Après modélisation du tenseur de Reynolds, en utilisant comme modèle de turbulence le modèle  $k-\varepsilon$ , le système d'équations décrivant l'écoulement loin de la paroi devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ P(y) = \rho g (d - y) \cos \alpha \\ U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \varepsilon \\ U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\partial}{\partial y} \left( v_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) - c_{\varepsilon 2} \end{array} \right. \quad (\text{VI-33})$$

avec,  $v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$  et  $c_\mu = 0,09$ ,  $c_{\varepsilon 1} = 1,44$ ,  $c_{\varepsilon 2} = 1,92$ ,  $\sigma_k = 1,0$  et  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ .

Au voisinage de la paroi, la loi de paroi nous fournit le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^+ = \frac{1}{\kappa} \text{Ln} \left( \frac{y}{k_s} \right) + 8,5 \\ k = \frac{U_*^2}{\sqrt{c_\mu}} \\ \varepsilon = \frac{c_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \end{array} \right. \quad (\text{VI-34})$$

La résolution de ce système d'équation permettrait la détermination des variables de l'écoulement  $U$ ,  $V$ ,  $P$ ,  $k$  et  $\varepsilon$ .

**4°/ Modèle mathématique final de l'écoulement graduellement varié aéré**

Pour déterminer le modèle mathématique final de l'écoulement à l'aval du point d'inception, il y a lieu de rajouter au système d'équations (VI-33) l'équation de la concentration d'air et l'équation de la surface libre.

**a. Equation de la conservation de la masse pour la phase air**

En aval du point d'inception, l'équation de conservation de la masse pour la phase air s'écrit :

$$\frac{d}{dx} q_{\text{air}} = V_e(x) - C_{\text{moy}}(x) u_r \cos \alpha \quad (\text{VI-35})$$

où,  $u_r$  : la vitesse limite d'ascension des bulles d'air,  $V_e$  : la vitesse d'entraînement d'air.

En utilisant la limite de l'équation (VI-32), pour la région d'écoulement uniforme, nous avons :

$$V_{\text{en}} - C_n u_r \cos \alpha = 0 \quad (\text{VI-36})$$

avec,  $V_{\text{en}}$  : est la vitesse d'entraînement d'air pour un écoulement uniforme.

L'équation (VI-32) peut être réécrite :

$$\frac{d}{dx} q_{\text{air}} = (V_e(x) - V_{\text{en}}) + (C_n - C_{\text{moy}}(x)) u_r \cos \alpha \quad (\text{VI-37})$$

En supposant que la vitesse d'entraînement d'air est identique pour un écoulement graduellement varié comme pour l'écoulement uniforme, nous pouvons négliger le premier terme de l'équation (VI-37) et devient :

$$\frac{d}{dx} q_{\text{air}} = (C_n - C_{\text{moy}}(x)) u_r \cos \alpha \quad (\text{VI-38})$$

La forme de cette équation indique que, pour une concentration en air moyenne,  $C_{\text{moy}}$ , inférieure à la concentration en air d'équilibre  $C_n$ , l'écoulement est aéré. Dans le cas contraire, l'écoulement est désaéré.

En 1988, **Chanson** a montré que la quantité d'air entraînée dans l'écoulement peut être écrite sous la forme :

$$q_{\text{air}} = \frac{C_{\text{moy}}}{1 - C_{\text{moy}}} q_{\text{eau}} \quad (\text{VI-39})$$

Avec ces approximations, l'équation (VI-38) s'écrit alors :

$$q_{\text{eau}} \frac{d}{dx} \left( \frac{C_{\text{moy}}}{1 - C_{\text{moy}}} \right) + \left( \frac{C_{\text{moy}}}{1 - C_{\text{moy}}} \right) \frac{q_{\text{eau}}}{B} \left( \frac{dB}{dx} \right) = (C_n - C_{\text{moy}}(x)) u_r \cos \alpha \quad (\text{VI-40})$$

Pour un canal de largeur (B) constante, l'équation (VI-40) s'écrit :

$$q_{\text{eau}} \frac{1}{(1 - C_{\text{moy}}(x))^2} \frac{d}{dx} C_{\text{moy}}(x) = (C_n - C_{\text{moy}}(x)) u_r \cos \alpha \quad (\text{VI-41})$$

Soit encore :

$$\frac{d}{dx} C_{\text{moy}}(x) = (1 - C_{\text{moy}}(x))^2 (C_n - C_{\text{moy}}(x)) \frac{u_r \cos \alpha}{q_{\text{eau}}} \quad (\text{VI-42})$$

L'intégration de l'équation (VI-38) conduit à :

$$\frac{1}{(1 - C_n)^2} \text{Ln} \left( \frac{1 - C_{\text{moy}}(x)}{C_n - C_{\text{moy}}(x)} \right) - \frac{1}{(1 - C_n)(1 - C_{\text{moy}}(x))} = O_x + O_0 \quad (\text{VI-43})$$

avec,  $O_0$  : est une constante d'intégration déterminée pour  $C_{\text{moy}} = C_*$  à  $x = 0$

$$O_0 = \frac{1}{(1 - C_n)} \left( \text{Ln} \left( \frac{1}{(1 - C_n)} \frac{1 - C_{\text{moy}}(x)}{C_n - C_{\text{moy}}(x)} \right) - \frac{1}{(1 - C_n)} \right) \quad (\text{VI-44})$$

$$O = \frac{u_r \cos \alpha}{q_{\text{eau}}} \quad (\text{VI-45})$$

La seule valeur de vitesse limite d'ascension d'une bulle d'air, obtenue sur prototype, est le résultat calculé à partir des mesures de **Cain** (1978) sur le barrage d'Aviemore pour un écoulement à aération naturelle. Cette valeur de vitesse est utilisée pour le calcul des écoulements graduellement variés :  $u_r = 40 \text{ cm/s}$

Finalement, en considérant la vitesse limite d'ascension des bulles d'air comme une constante locale variant lentement, l'équation (VI-41) peut être réécrite en termes adimensionnels :

$$\frac{d}{dx'} C_{\text{moy}}(x) = (1 - C_{\text{moy}}(x))^2 (C_n - C_{\text{moy}}(x)) \frac{u_r d^* \cos \alpha}{q_{\text{eau}}} \quad (\text{VI-46})$$

avec,  $d^*$  : est la profondeur de référence pour  $x = 0$  et  $x' = x / d^*$

L'équation (VI-46) permet, donc, de calculer la concentration en air moyenne  $C_{\text{moy}}$ , en fonction de la distance  $x$  au long du coursier indépendamment de la vitesse, de la rugosité et de la profondeur.

### b. Equation de conservation de l'énergie

L'équation de la conservation de l'énergie est donnée par :

$$H = Z + h \cos \alpha + E \frac{h}{2} F_r^2 \quad (\text{VI-47})$$

avec,  $F_r$  : le nombre de Froude :  $F_r = \frac{U}{\sqrt{g d}}$  et  $E$  : le coefficient de correction de

l'énergie cinétique définie par :

$$E = (1 - C_{\text{moy}})^2 \frac{\int_{c=0}^{c=90\%} (1-C) y'^{2/6} dy'}{\left( \int_{c=0}^{c=90\%} (1-C) y'^{1/6} dy' \right)^3} \quad (\text{VI-48})$$

où,  $y' = \frac{y}{y_{90}}$  et  $C$  est calculée à partir de l'équation.

Les mesures prises sur le barrage d'Aviemore montre que le coefficient  $E$  est indépendant de  $C$  et a une valeur de 1,05.

En supposant que la distribution des pressions est quasi hydrostatique, pour un écoulement graduellement varié sur un canal avec des variations lentes de la pente et de la largeur, l'équation (VI-47) devient :

$$\frac{d}{dx} H = -S_f \quad (\text{VI-49})$$

où  $S_f$  : est la pente de la ligne de charge donnée par :

$$S_f = \frac{q f}{8 g d} \left( \frac{f_e}{f} \right) \quad (\text{VI-50})$$

En combinant les équations (VI-49) et (VI-50), nous obtenons :

$$\frac{d}{dx} d = \frac{\sin \alpha \left( 1 + d \frac{d\alpha}{dx} \right) - S_f + \frac{E d}{B} F_r^2 \frac{dB}{dx}}{\cos \alpha - E F_r^2} \quad (\text{VI-51})$$

L'équation (VI-51) peut être réécrite en termes adimensionnels :

$$\frac{d}{dx'} h' = \frac{\sin \alpha \left( 1 + h' \frac{d\alpha}{dx'} \right) - S_f + \frac{E}{B'} \frac{F_{r*}^2}{h'^2} \frac{dB'}{dx'}}{\cos \alpha - E \frac{F_{r*}^2}{h'^3}} \quad (\text{VI-52})$$

avec,  $d = d_*$  pour  $x = 0$ , nous avons :  $x' = x/d_*$ ,  $h' = d/d_*$ ,  $B' = B/d_*$  et

$$F_{r*} = \frac{U}{\sqrt{g d_*}}$$

Pour un canal de largeur infini et à pente constante, l'équation (VI-51) devient :

---

$$\frac{d}{dx} d = \frac{\sin \alpha - S_f}{\cos \alpha - 1,05F_r^2} \quad (\text{VI-53})$$

**Conclusion**

Les modèles mathématiques étant établi, il faut passer à leur résolution numérique. Ceci permettrait non seulement de déterminer le point de début d'entraînement d'air et la concentration d'air dans les écoulements extrêmement turbulents dans les canaux en marches d'escalier, mais également d'analyser les variables d'écoulement,  $U$ ,  $V$ ,  $P$ ,  $k$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu_t$  à l'amont et à l'aval du point d'inception.

## **Chapitre VII: Modélisation numérique de l'écoulement turbulent dans un canal en marches d'escalier**

Bien que certaines simplifications négligeant des phénomènes physiques d'ordres secondaires aient été introduites dans l'élaboration des modèles mathématiques au chapitre précédent, notre écoulement demeure toujours régi par un système d'équations couplées, non linéaires et de type parabolique. De tels systèmes ne peuvent être résolus analytiquement que dans des cas particuliers rarement retrouvés dans la réalité. Il y a lieu, par conséquent, de recourir à l'ultime outil qui n'est autre que la modélisation et la résolution numérique. Faudrait-il rappeler, par ailleurs, que de plus en plus, la modélisation par les équations aux dérivées partielles suivie d'une analyse théorique et numérique devient une démarche de base pour les scientifiques. Cette voie de recherche est en plein essor à cause des difficultés techniques et des coûts prohibitifs nécessaires pour réaliser certaines expériences. Les équations aux dérivées partielles peuvent donc être remplacées par des systèmes d'équations algébriques linéaires à l'aide du développement en séries de Taylor.

Ce chapitre sera consacré à l'élaboration des modèles numériques et à la présentation de la méthode de résolution des modèles mathématiques préétablis associés aux conditions aux limites, de la paroi et de l'écoulement libre ainsi qu'aux profils initiaux des différentes variables de l'écoulement.

Différentes méthodes numériques existent pour résoudre ces équations différentielles partielles. Entre autres, les procédures de résolution en différences finies sont beaucoup utilisées et s'adaptent, généralement, bien aux écoulements à surfaces libres dans les canaux artificiels et naturels.

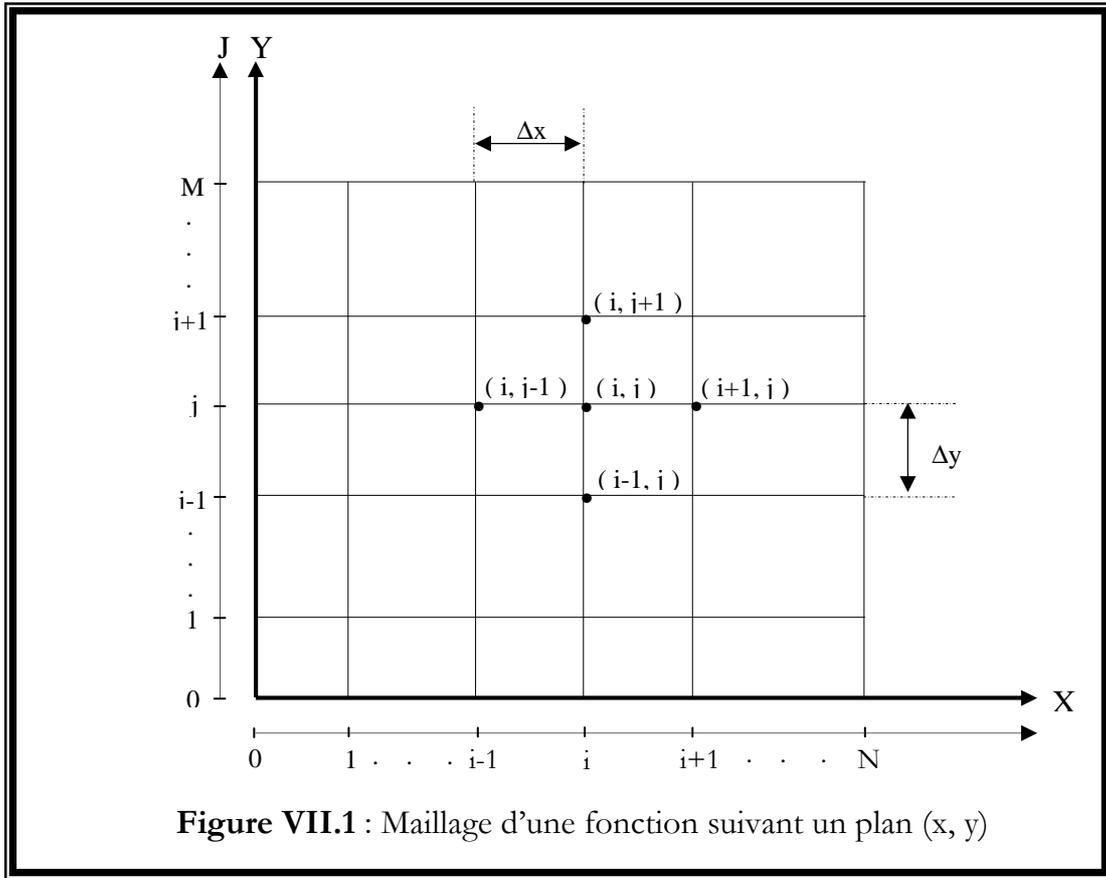
### **I. METHODE DES DIFFERENCES FINIES**

La méthode des différences finies consiste à estimer par approximation les valeurs d'une ou de plusieurs variables d'une équation ou d'un système d'équations associés à des conditions aux frontières. Elle permet de fournir une solution approchée en remplaçant les opérateurs différentiels par des opérateurs en différences finies qui donneront sur un système d'équations algébriques linéaires à résoudre numériquement.

Considérons une fonction  $f(x, y)$  qui peut être dérivée dans les deux directions un nombre suffisant de fois. La valeur de la fonction  $f$  au point  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  peut être obtenue à partir de celle du point  $(x, y)$  en appliquant le développement en série de Taylor :

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) + \frac{1}{2!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left( \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(x, y) + R_n$$

où, le reste  $R_n$  est de l'ordre de  $n$ , il est noté habituellement :  $R_n = O \left[ (|\Delta x| + |\Delta y|)^n \right]$ .



Considérons le point de maillage  $(i, j)$  qui est entouré par d'autres nœuds comme indiqués sur la figure VII.1. En appliquant le développement en série de Taylor autour de ce point, on obtient les expressions suivantes :

$$f_{i-1,j} = f_{i,j} - \Delta x \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (\text{VII-1})$$

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \Delta x \frac{\partial f_{i,j}}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (\text{VII-2})$$

$$f_{i,j-1} = f_{i,j} - \Delta y \frac{\partial f_{i,j}}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial y^2} - \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 f_{i,j}}{\partial y^3} + \dots \quad (\text{VII-3})$$

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} + \Delta y \frac{\partial f_{i,j}}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{(\Delta y)^3}{3!} \frac{\partial^3 f_{i,j}}{\partial y^3} + \dots \quad (\text{VII-4})$$

Toutes les dérivées sont évaluées au nœud  $(i, j)$ .

### **Schéma explicite - Schéma implicite**

Il existe plusieurs schémas aux différences finies, les deux principaux : les schémas implicites et explicites.

- Un schéma est dit "explicite", si chaque valeur approchée de la solution à  $x + \Delta x$ , est écrite à partir des valeurs de la solution précédente à  $x$ . Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs connues, déjà calculées.

Ce type de schéma connaît une limitation en pas spatial  $\Delta x$ .

- Si la valeur approchée, en un point  $x + \Delta x$  est écrite en fonction de la solution précédente au pas  $x$ , et des valeurs voisines au pas  $x + \Delta x$ , on parle alors d'un schéma implicite qui relie entre toutes les valeurs au pas  $x + \Delta x$  implicitement.

Un avantage essentiel de cette méthode est qu'elle est universellement stable.

## **II. APPLICATION DES SCHEMAS NUMERIQUES AU MODELE MATHEMATIQUE DE L'ECOULEMENT TRES TURBULENT EN AMONT DU POINT D'INCEPTION**

Divers schémas numériques aux différences finies sont utilisés dans les études de l'ingénieur. Le schéma le plus adapté à un système d'équations dépend, essentiellement, de la nature du problème physique à traiter et du type d'équations (elliptiques, paraboliques ou hyperboliques). Notre choix est porté sur l'application de deux schémas, le schéma implicite de Laasonen et le schéma explicite simple qui s'adaptent, généralement, bien aux écoulements à surfaces libres.

### **1°/ Schéma explicite**

Les équations du mouvement écrites sous une forme générale en coordonnées  $(x, \omega)$  sont :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + b\omega \frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( C_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( e \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) + S'_\phi \quad \text{avec, } \phi = u, k, \varepsilon$$

Un schéma est dit explicite si chaque valeur approchée de la solution au point  $(i + 1, j)$  est écrite à partir des valeurs de la solution à la section  $(i)$  précédent. Cette valeur est donc explicitement une fonction des valeurs déjà calculées est s'obtient directement pour chaque pas  $\Delta x$ .

L'application du schéma explicite aux différents termes des équations donne :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi(i+1, j) - \phi(i, j)}{\Delta x} \quad (\text{VII-5})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\phi(i, j+1) - \phi(i, j)}{\Delta \omega} \quad (\text{VII-6})$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left( C_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) = \frac{C_\phi(i, j+1)\phi(i, j+1) - 2C_\phi(i, j)\phi(i, j) + C_\phi(i, j-1)\phi(i, j-1)}{(\Delta \omega)^2} \quad (\text{VII-7})$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left( e \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) = \frac{e(i, j+1)\phi(i, j+1) - 2e(i, j)\phi(i, j) + e(i, j-1)\phi(i, j-1)}{(\Delta \omega)^2} \quad (\text{VII-8})$$

La substitution des différents termes discrétisés dans le modèle mathématique aboutie au système suivant :

- **Equation de la vitesse**

$$\begin{aligned} \frac{U(i+1, j) - U(i, j)}{\Delta x} + b(i) \omega(j) \left( \frac{U(i, j+1) - U(i, j)}{\Delta \omega} \right) &= \frac{c_U(i, j+1)U(i, j+1)}{(\Delta \omega)^2} \\ &- \frac{2c_U(i, j)U(i, j)}{(\Delta \omega)^2} + \frac{c_U(i, j-1)U(i, j)}{(\Delta \omega)^2} \\ &+ \frac{e(i, j+1)U(i, j+1) - 2e(i, j)U(i, j) + e(i, j-1)U(i, j-1)}{(\Delta \omega)^2} \\ &+ g \frac{\sin \alpha}{U(i, j)} - \frac{1}{\rho U(i, j)} \frac{P(i+1, j) - P(i, j)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (\text{VII-9})$$

- **Equation de l'énergie cinétique turbulente**

$$\begin{aligned} \frac{k(i+1, j) - k(i, j)}{\Delta x} + b(i) \omega(j) \left( \frac{k(i, j+1) - k(i, j)}{\Delta \omega} \right) &= \frac{c_k(i, j+1)k(i, j+1)}{(\Delta \omega)^2} - \frac{2c_k(i, j)k(i, j)}{(\Delta \omega)^2} \\ &+ \frac{c_k(i, j-1)k(i, j-1)}{(\Delta \omega)^2} + \frac{e(i, j+1)k(i, j+1) - 2e(i, j)k(i, j) + e(i, j-1)k(i, j-1)}{(\Delta \omega)^2} \\ &+ \frac{C_\mu}{(\Delta \psi(i))^2} \frac{(k(i, j))^2 \rho^2 u(i, j)}{\varepsilon(i, j)} \left( \frac{(u(i, j+1) - u(i, j))}{\Delta \omega} \right)^2 - \frac{\varepsilon}{u(i, j)} \end{aligned} \quad (\text{VII-10})$$

- Equation du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(i+1,j) - \varepsilon(i,j)}{\Delta x} + b(i)\omega(j) \left( \frac{\varepsilon(i,j+1) - \varepsilon(i,j)}{\Delta \omega} \right) &= \frac{c_\varepsilon(i,j+1)\varepsilon(i,j+1) - 2c_\varepsilon(i,j)\varepsilon(i,j)}{(\Delta \omega)^2} \\ + \frac{c_\varepsilon(i,j-1)\varepsilon(i,j-1)}{(\Delta \omega)^2} + \frac{e(i,j+1)\varepsilon(i,j+1) - 2e(i,j)\varepsilon(i,j) + e(i,j-1)\varepsilon(i,j-1)}{(\Delta \omega)^2} \\ + c_{\varepsilon_1} c_\mu \frac{k(i,j)\rho^2 U(i,j)}{(\Delta \psi(i))^2} \left( \frac{U(i,j+1) - U(i,j)}{\Delta \omega} \right)^2 - c_{\varepsilon_2} \frac{(\varepsilon(i,j))^2}{k(i,j)U(i,j)} \end{aligned} \quad (\text{VII-11})$$

En posant  $\theta = \frac{\Delta x}{(\Delta \omega)^2}$ , il en résulte les expressions suivantes :

- Equation de la vitesse

$$\begin{aligned} U(i+1,j) &= \theta (c_U(i,j+1)U(i,j+1)) - 2\theta c_U(i,j)U(i,j) + \theta c_U(i,j-1)U(i,j-1) \\ &\quad - \theta (2e(i,j)U(i,j)) + \theta e(i,j+1)U(i,j+1) + \theta e(i,j-1)U(i,j-1) \\ &\quad - \theta b(i)\omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta \omega} (U(i,j+1) - U(i,j)) + \frac{g \Delta x \sin \alpha}{U(i,j)} \\ &\quad - \frac{1}{\rho} (P(i,j+1) - P(i,j)) + U(i,j) \end{aligned} \quad (\text{VII-12})$$

- Equation de l'énergie cinétique turbulente

$$\begin{aligned} k(i+1,j) &= \theta c_k(i,j+1)k(i,j+1) - 2\theta c_k(i,j)k(i,j) + \theta c_k(i,j-1)k(i,j-1) \\ &\quad - 2\theta e(i,j)k(i,j) + \theta e(i,j+1)k(i,j+1) + \theta e(i,j-1)k(i,j-1) \\ &\quad - b(i)\omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta \omega} (k(i,j+1) - k(i,j)) + k(i,j) \\ &\quad + \frac{\theta c_\mu}{(\Delta \psi(i))^2} \frac{(k(i,j))^2 \rho^2 U(i,j)}{\varepsilon(i,j)} (U(i,j+1) - U(i,j))^2 - \frac{\varepsilon(i,j)}{u(i,j)} \Delta x \end{aligned} \quad (\text{VII-13})$$

- Equation du taux de dissipation de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned}
\varepsilon(i+1,j) = & \theta c_\varepsilon(i,j+1)\varepsilon(i,j+1) - 2\theta c_\varepsilon(i,j)\varepsilon(i,j) + \theta c_\varepsilon(i,j-1)\varepsilon(i,j-1) \\
& - 2\theta e(i,j)\varepsilon(i,j) + \theta e(i,j+1)\varepsilon(i,j+1) + \theta e(i,j-1)\varepsilon(i,j-1) \\
& + \theta(e(i,j+1)\varepsilon(i,j+1) + e(i,j-1)\varepsilon(i,j-1)) \\
& - b(i)\omega(i) \frac{\Delta x}{\Delta \omega} (\varepsilon(i,j+1) - \varepsilon(i,j)) + \varepsilon(i,j) \\
& + \frac{\theta c_{\varepsilon_1} c_\mu}{(\Delta \psi(i))^2} k(i,j) \rho^2 U(i,j)(U(i,j+1) - U(i,j))^2 - c_{\varepsilon_2} \Delta x \frac{(\varepsilon(i,j))^2}{U(i,j)k(i,j)}
\end{aligned} \tag{VII-14}$$

## 2°/ Schéma implicite

Un schéma est dit implicite si la valeur approchée de la solution au point  $(i+1, j)$  est écrite à partir des valeurs de la solution calculée à la section précédente  $(i)$  et des valeurs voisines calculées à la même section  $(i+1)$ . Il s'agit donc d'une liaison implicite entre toutes les valeurs au point  $(i+1, j)$  qui seront résolues globalement. Dans ce cas, il y a lieu de recourir à une méthode pour l'inversion des matrices.

L'application du schéma implicite aux différents termes des équations donne :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi(i+1,j) - \phi(i,j)}{\Delta x} \tag{VII-15}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\phi(i+1,j+1) - \phi(i+1,j)}{\Delta \omega} \tag{VII-16}$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left( C_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) = \frac{C_\phi(i,j+1)\phi(i+1,j+1) - 2C_\phi(i,j)\phi(i+1,j) + C_\phi(i,j-1)\phi(i+1,j-1)}{(\Delta \omega)^2} \tag{VII-17}$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left( e \frac{\partial \phi}{\partial \omega} \right) = \frac{e(i,j+1)\phi(i+1,j+1) - 2e(i,j)\phi(i+1,j) + e(i,j-1)\phi(i+1,j-1)}{(\Delta \omega)^2} \tag{VII-18}$$

La substitution des différents termes discrétisés dans le modèle mathématique aboutie au système suivant :

$$\begin{aligned}
\bullet \frac{U(i+1,j) - U(i,j)}{\Delta x} + b(i)\omega(j) \left( \frac{U(i+1,j+1) - U(i+1,j)}{\Delta \omega} \right) = & \frac{c_U(i,j+1)U(i+1,j+1)}{(\Delta \omega)^2} \\
+ \frac{c_U(i,j-1)U(i+1,j-1) - 2c_U(i,j)U(i+1,j)}{(\Delta \omega)^2} + & \frac{e(i,j+1)U(i+1,j+1) - 2de(i,j)U(i+1,j)}{(\Delta \omega)^2} \\
+ \frac{e(i,j-1)U(i+1,j-1)}{(\Delta \omega)^2} - \frac{1}{\rho U(i,j)} \frac{P(i+1,j) - P(i,j)}{\Delta x} + g \frac{\sin \alpha}{U(i,j)} & \tag{VII-19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{k(i+1,j)-k(i,j)}{\Delta x} + b(i)\omega(j) \left( \frac{k(i+1,j+1)-k(i+1,j)}{\Delta \omega} \right) = \frac{c_k(i,j+1)k(i+1,j+1)}{(\Delta \omega)^2} \\
& + \frac{c_k(i,j-1)k(i+1,j-1) - 2c_k(i,j)k(i+1,j)}{(\Delta \omega)^2} + \frac{e(i,j+1)k(i+1,j+1) - 2e(i,j)k(i+1,j)}{(\Delta \omega)^2} \\
& + \frac{e(i,j-1)k(i+1,j-1)}{(\Delta \omega)^2} + \frac{c_\mu}{(\Delta \psi(i))^2} \frac{(k(i,j))^2 \rho^2 u(i+1,j)}{\varepsilon(i,j)} \left( \frac{(u(i+1,j+1) - u(i+1,j))}{\Delta \omega} \right)^2 \\
& \quad - \frac{\varepsilon}{u(i+1,j)} \tag{VII-20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \frac{\varepsilon(i+1,j)-\varepsilon(i,j)}{\Delta x} + b(i)\omega(j) \left( \frac{\varepsilon(i+1,j+1)-\varepsilon(i+1,j)}{\Delta \omega} \right) = \frac{c_\varepsilon(i,j+1)\varepsilon(i+1,j+1)}{(\Delta \omega)^2} \\
& + \frac{c_\varepsilon(i,j-1)\varepsilon(i+1,j-1) - 2c_\varepsilon(i,j)\varepsilon(i+1,j)}{(\Delta \omega)^2} + \frac{e(i,j+1)\varepsilon(i+1,j+1) - 2e(i,j)\varepsilon(i+1,j)}{(\Delta \omega)^2} \\
& + \frac{e(i,j-1)\varepsilon(i+1,j-1)}{(\Delta \omega)^2} + c_{\varepsilon 1} c_\mu \frac{k(i+1,j)\rho^2 U(i+1,j)}{(\Delta \psi(i))^2} \left( \frac{U(i+1,j+1) - U(i+1,j)}{\Delta \omega} \right)^2 \\
& \quad - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon(i,j)}{k(i+1,j)u(i+1,j)} \tag{VII-21}
\end{aligned}$$

En posant  $\theta = \frac{\Delta x}{(\Delta \omega)^2}$ , il en résulte les équations suivantes :

• Equation de la vitesse

$$\begin{aligned}
& -\theta(c_U(i,j-1) + d(i,j-1))U(i+1,j-1) + \left( 1 + 2\theta c_U(i,j) + 2\theta e(i,j) - b(i)\omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta \omega} \right) U(i+1,j) \\
& + \left( b(i)\omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta \omega} - \theta c_U(i,j+1) - \theta e(i,j+1) \right) U(i+1,j+1) = U(i,j) \\
& \quad - \frac{P(i+1,j) - \theta c_U(i,j)}{\rho \cdot u(i,j)} + g \Delta x \frac{\sin \alpha}{U(i,j)} \tag{VII-22}
\end{aligned}$$

• Equation de l'énergie cinétique turbulente

$$\begin{aligned}
& -\theta(c_k(i,j-1) + d(i,j-1))k(i+1,j-1) + \left( 1 + 2\theta c_k(i,j) + 2\theta d(i,j) - b(i)\omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta \omega} \right) k(i+1,j) \\
& + \left( b(i)\omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta \omega} - \theta c_k(i,j+1) - \theta d(i,j+1) \right) k(i+1,j+1) = k(i,j) - \frac{\varepsilon(i,j)}{u(i+1,j)} \Delta x \\
& + \frac{c_\mu \rho^2}{(\Delta \psi(i))^2} \frac{(k(i,j))^2 U(i+1,j)}{\varepsilon(i,j)} \Delta x \left( \frac{(U(i+1,j+1) - U(i+1,j))}{\Delta \omega} \right)^2 \tag{VII-23}
\end{aligned}$$

• Equation du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente

$$\begin{aligned}
& -\theta(c_\varepsilon(i,j-1)+d(i,j-1))\varepsilon(i+1,j-1)+\left(1+2\theta c_\varepsilon(i,j)+2\theta d(i,j)-b(i)\omega(j)\frac{\Delta x}{\Delta\omega}\right)\varepsilon(i+1,j) \\
& +\left(b(i)\omega(j)\frac{\Delta x}{\Delta\omega}-\theta c_\varepsilon(i,j+1)-\theta d(i,j+1)\right)\varepsilon(i+1,j+1)=\varepsilon(i,j)-c_{\varepsilon 2}\frac{(\varepsilon(i,j))^2}{k(i+1,j)U(i+1,j)}\Delta x \\
& +c_{\varepsilon 1}c_\mu\rho^2\frac{k(i+1,j)U(i+1,j)}{(\Delta\psi(i))^2}\Delta x\left(\frac{U(i+1,j+1)-U(i+1,j)}{\Delta\omega}\right)^2
\end{aligned} \tag{VII-24}$$

### 3°/ Calcul de la ligne d'eau

L'équation de la ligne d'eau est donnée par :

$$\frac{dh_e}{dx} = I \frac{1-(h_n/d)^3}{1-(d_c/d)^3} \tag{VII-25}$$

La discrétisation explicite en différences finies nous donne :

$$h_e(i+1) = h_e(i) + \Delta x \left[ \operatorname{tg}\alpha \frac{1-(h_n/d(i))^3}{1-(h_c/d(i))^3} \right] \tag{VII-26}$$

Pour éviter l'indétermination au premier point, nous nous donnons une valeur arbitraire  $d(1)$  de la profondeur proche de  $d(0)$ , tel que :  $d(0) > d(1)$ .

### 4°/ Calcul du point d'inception

Le point de début de l'aération naturelle de l'écoulement est défini comme étant le lieu d'intersection de la frontière supérieure de la couche limite avec la surface libre de l'eau. Cette dernière est déterminée par l'équation différentielle du mouvement graduellement varié, alors que l'épaisseur de la couche limite s'obtient à partir du champ des vitesses résultant du modèle, en combinant les formules de la fonction de courant  $\psi$  et celle de la fonction de courant adimensionnelle  $\omega$ , suivantes :

$$\omega = \frac{\psi - \psi_I}{\psi_E - \psi_I} \quad \text{et} \quad \rho U = \frac{d\psi}{dy}$$

$$d'où : \quad dy = \frac{\Delta\psi}{\rho U} d\omega \tag{VII-27}$$

Le calcul de l'intégration se fait numériquement à l'aide de la méthode des trapèzes généralisée. Nous utilisons la même procédure pour le calcul de la variation de la fonction de courant  $\Delta\psi$  selon la formulation suivante :  $d\psi = \rho U dy$ .

### Intégration d'une fonction par la méthode des trapèzes

Soit une fonction  $y = f(x)$  définie sur l'intervalle  $[a, b]$ .

---

L'intégrale  $S = \int_a^b f(x) dx$  représente l'aire comprise entre la courbe représentative  $f(x)$ , l'axe des abscisses et les verticales des abscisses  $a$  et  $b$ .

Si l'intervalle  $[a, b]$  est décomposé en segments de longueurs  $dx$ , l'aire  $S$  peut être définie comme étant égale à la somme des aires partielles  $ds$  :  $S = \sum_a^b ds$ .

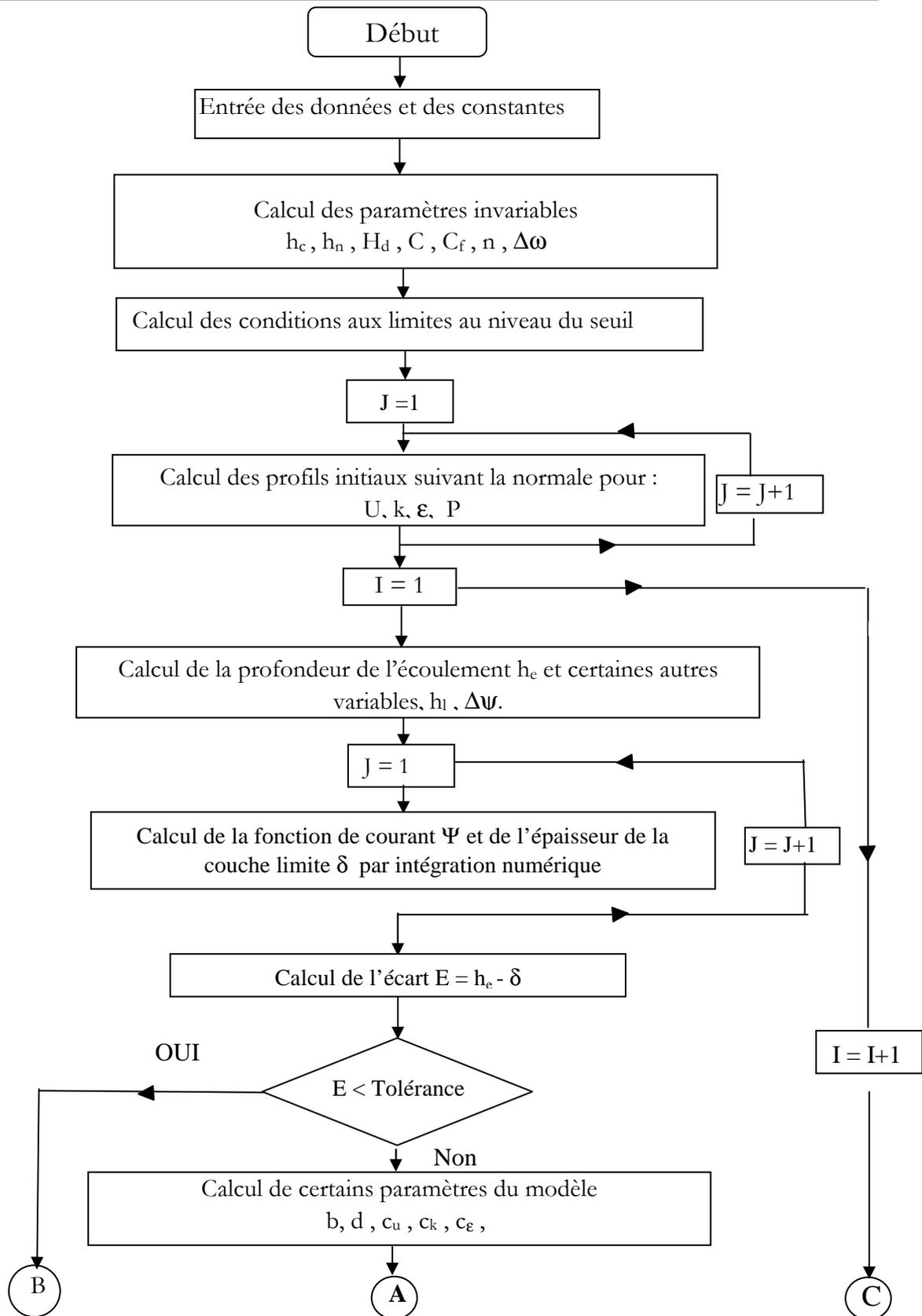
Pour  $dx$  suffisamment petit,  $ds$  peut être calculé par l'expression suivante :

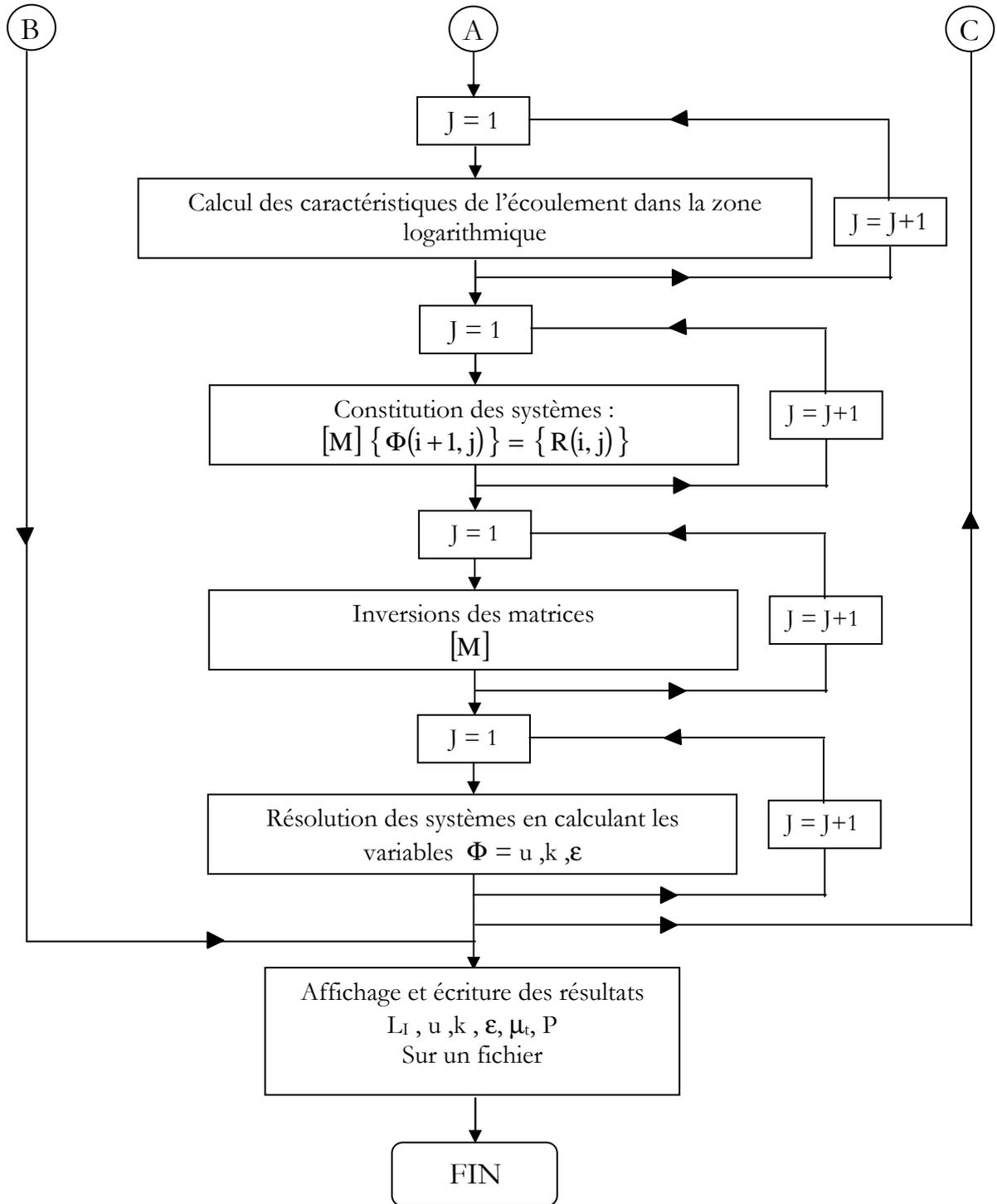
$$ds = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} dx$$

### 5°/ Organigrammes de calculs

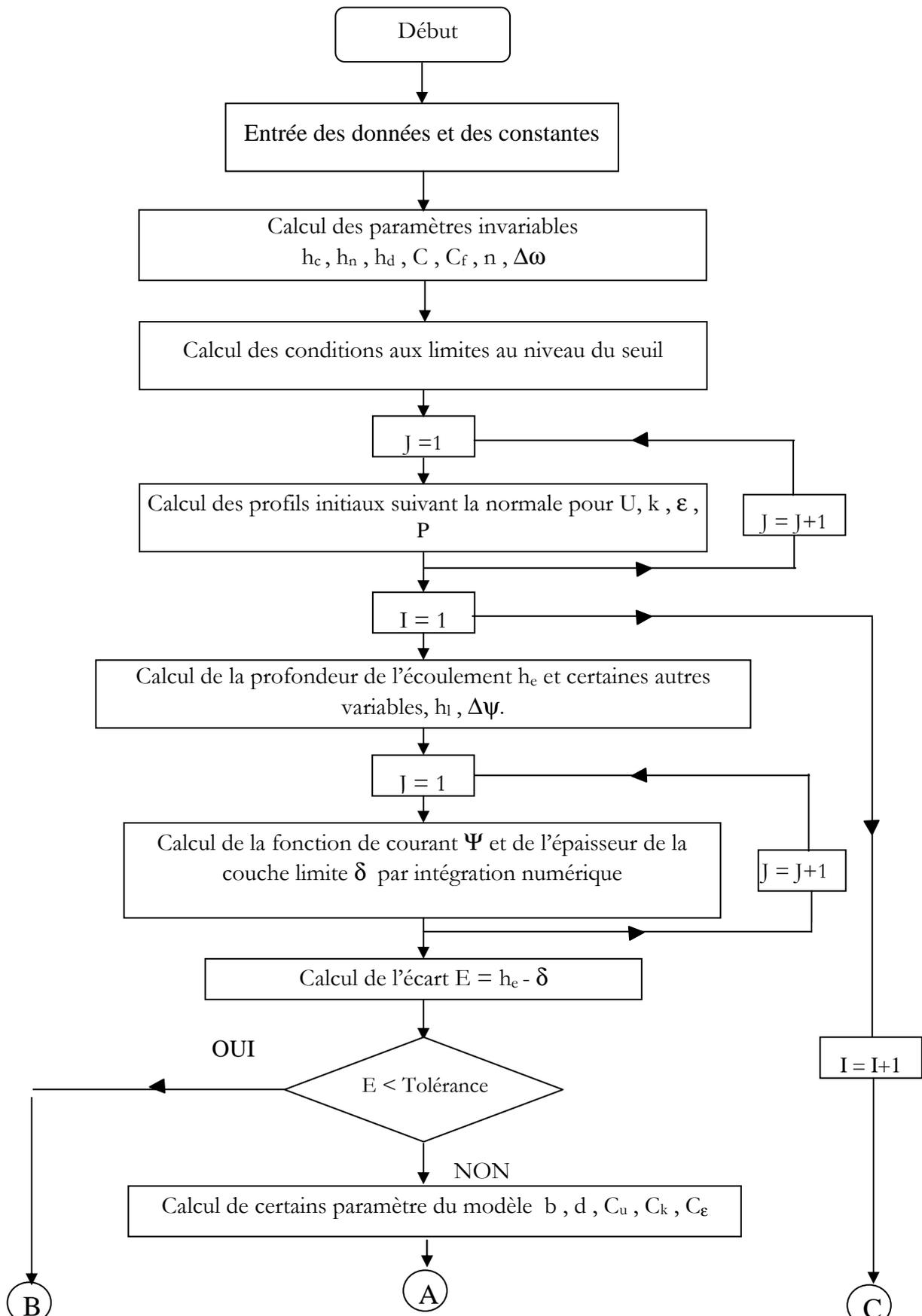
Sur la base des schémas numériques choisis et développés précédemment, nous avons élaboré quatre programmes de calculs en langage Fortran (Powerstation) pour les différents cas d'évacuateurs, à savoir, l'évacuateur de crues en marches d'escalier et l'évacuateur à profil lisse. Les principales étapes de calcul sont présentées dans les organigrammes suivants :

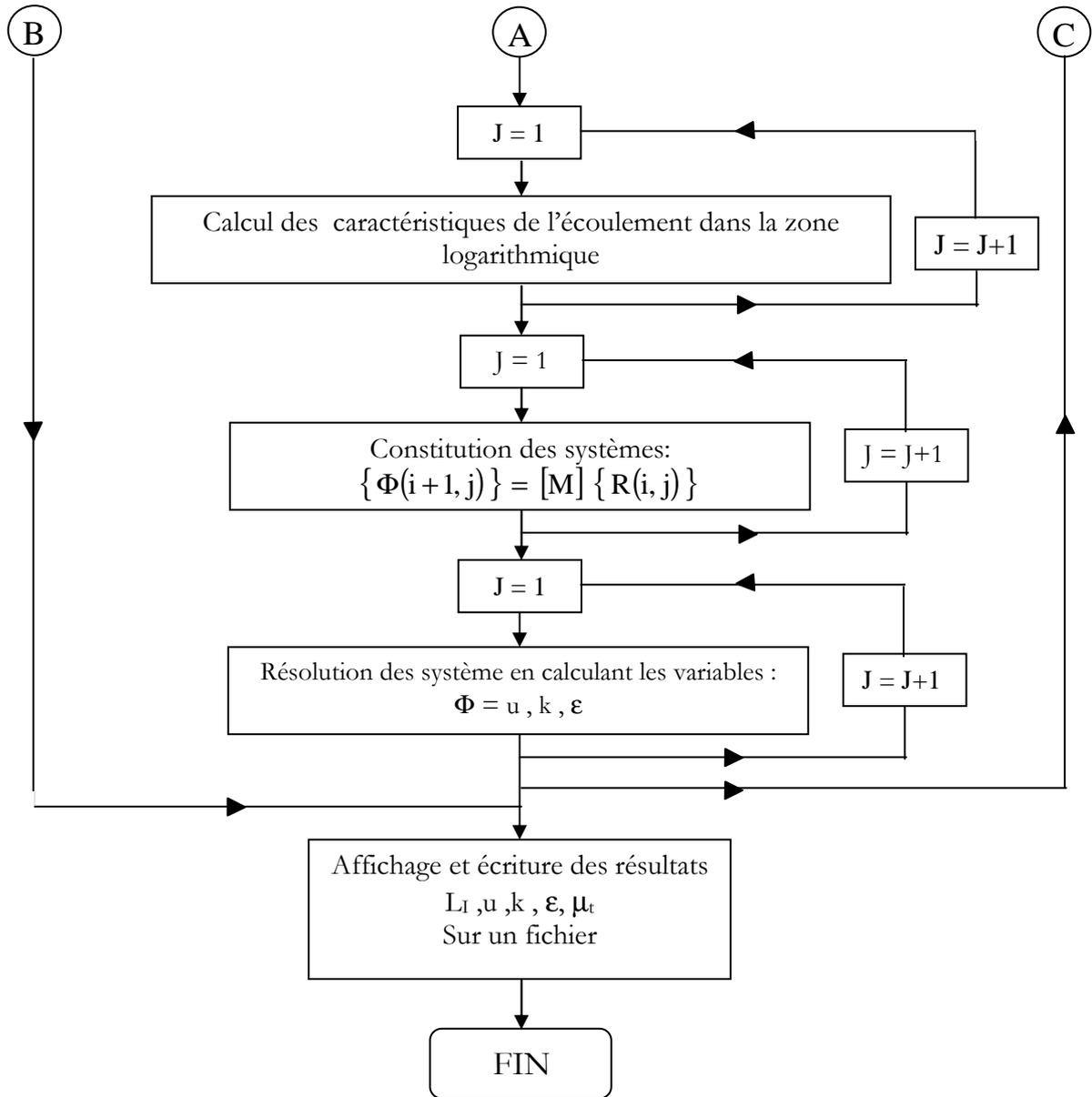
#### **a. Organigramme de calcul de l'évacuateur de crues à marches élaboré à base du schéma implicite de Laasonen**





b. Organigramme de calcul de l'évacuateur de crues à profil lisse élaboré à base du schéma explicite





### III. DISCRETISATION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT GRADUELLEMENT VARIE AERE

Connaissant les caractéristiques de l'écoulement au point d'inception, qui marque le début du phénomène d'entraînement d'air.

On est amené à modéliser numériquement les équations différentielles caractérisant la région d'écoulement turbulent graduellement varié aéré par un schéma aux différences finies implicite simple.

Rappelons tout d'abord le système d'équations régissant l'écoulement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dC_{\text{moy}}}{dx} = (1 - C_{\text{moy}})^2 (C_n - C_{\text{moy}}) u_r \cos \alpha / q \quad (\text{VII-28}) \\ \frac{d}{dx} d = \frac{\sin \alpha h^3 - f (q^2 / 8g) \left( \frac{f_e}{f} \right)}{\cos \alpha d^3 - 1,05 (q^2 / g)} \quad (\text{VII-29}) \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{VII-30}) \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho_m(x)} \frac{\partial P}{\partial x} + v(x) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + v_t \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (\text{VII-31}) \\ P(y) = \rho_m g (d - y) \cos \alpha \quad (\text{VII-32}) \\ U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + v(x) \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} + v_t \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \varepsilon \quad (\text{VII-33}) \\ U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + v(x) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + c_1 \frac{\varepsilon}{k} v_t \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{VII-34}) \end{array} \right.$$

avec,  $v_t$  : viscosité cinématique turbulente donnée par :  $v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$

$\rho_m$  : masse volumique du mélange air - eau donnée par :  $\rho_m(x) = \rho (1 - C_{\text{moy}}(x))$ .

### 1°/ Equation de la concentration en air moyenne

L'équation donnant la concentration moyenne en air est discrétisée suivant un schéma aux différences finies décentré vers l'avant comme suit :

$$\frac{dC_{\text{moy}}}{dx} = (1 - C_{\text{moy}})^2 (C_n - C_{\text{moy}}) u_r \cos \alpha / q \quad (\text{VII-35})$$

$$C_{\text{moy}}(i) = C_{\text{moy}}(i-1) + \Delta x \left[ \left( 1 - C_{\text{moy}}(i-1) \right)^2 \left( C_n - C_{\text{moy}}(i-1) \right) \frac{u_r \cos \alpha}{q} \right] \quad (\text{VII-36})$$

Cette équation exige une concentration initiale  $C_*$  qui n'est que la concentration en air moyenne au point d'inception.  $C_{\text{moy}}(x=0) = C_*$ , et une concentration en air limite représentée par la concentration en air moyenne dans la région de l'écoulement uniforme :  $C_{\text{moy}}(x=x_{\text{unif}}) = C_n$ .

2°/ Equation de la conservation de l'énergie

La connaissance de la profondeur de l'eau pure  $d(x)$  définie au chapitre I en chaque section de l'écoulement, met en évidence le gonflement de la lame d'eau due à l'insufflation de l'air atmosphérique dans l'écoulement; ceci dit, on se ramène donc à la résolution de l'équation différentielle (VII-29) conformément au même modèle numérique utilisé pour le calcul de la concentration moyenne:

$$d_i = d_{i-1} + \Delta x \frac{\sin \alpha d_{i-1}^3 - f \left( \frac{f_e}{f} \right)_i}{\cos \alpha d_{i-1}^3 - 1,05 \left( \frac{q^2}{g} \right)} \quad (\text{VII-37})$$

Pour le calcul du coefficient de frottement de l'écoulement non aéré  $f$ , **Rajaratnam** a proposé la formule suivante (**Rajaratnam**, 1990) :

$$f = \frac{8 g h_n^3 \sin \alpha}{q^2}$$

avec,  $h_n$ : hauteur normale de l'écoulement non aéré donnée par :

$$h_n = \left( \frac{q^2}{K_s^2 \sin \alpha} \right)^{3/10}$$

Le terme implicite  $\left( \frac{f_e}{f} \right)_i$  est donné par la relation suivante :

$$\left( \frac{f_e}{f} \right)_i = \frac{1}{\left( 1 - 3,2 \sqrt{f} \log_{10} \left( 1 - C_{\text{moy}}(i) \right) \right)^2} \quad (\text{VII-38})$$

Ce processus de calcul (équation VII-38) exige aussi une hauteur initiale,  $d(x=0) = h_* = d_I$ , avec,  $h_*$  la hauteur de l'eau au point d'inception.

Par la suite, la profondeur et la vitesse de référence respectivement  $y_{90}$  et  $U_{90}$  sont déduit, par les relations suivantes :

$$y_{90}(i) = \frac{d(i)}{1 - C_{\text{moy}}(i)} \quad (\text{VII-39})$$

$$\frac{q}{y_{90}(i) U_{90}(i)} = -0,883 C_{\text{moy}}(i) + 0,835 \quad (\text{VII-40})$$

**3°/ Discrétisation des équations du mouvement**

Pour la résolution des équations du mouvement par différences finies, nous avons opté pour un schéma implicite simple, afin d'assurer une meilleure convergence de ce dernier.

Les termes des équations sont donc discrétisés comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U(i+1, j) - U(i, j)}{\Delta x} \quad (\text{VII-41})$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U(i+1, j+1) - U(i+1, j-1)}{2 \Delta y} \quad (\text{VII-42})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U(i+1, j+1) - 2U(i+1, j) + U(i+1, j-1)}{\Delta y^2} \quad (\text{VII-43})$$

La même discrétisation est adoptée pour les deux équations de transport, de l'énergie cinétique turbulente,  $k$ , et du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente,  $\varepsilon$ .

Tout calcul fait, les équations à résoudre sont transformées en un système linéaire dont la forme des équations est la suivante :

$$A_F(j) F_{j-1}^{i+1} + B_F(j) F_j^{i+1} + C_F(j) F_{j+1}^{i+1} = D_F(j) \quad (\text{VII-44})$$

Les expressions de  $A_F(j)$ ,  $B_F(j)$ ,  $C_F(j)$  et  $D_F(j)$  sont données par :

→ Pour  $U$ , nous avons :

$$A_U(j) = -\frac{\Delta x}{2 \Delta y(i+1)} V(i, j) - \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} v(i+1) - \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} c_\mu \frac{k^2(i, j)}{\varepsilon(i, j)} \quad (\text{VII-44.a})$$

$$B_U(j) = U(i, j) + 2 \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} v(i+1) + 2 \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} c_\mu \frac{k^2(i, j)}{\varepsilon(i, j)} \quad (\text{VII-44.b})$$

$$C_U(j) = \frac{\Delta x}{2 \Delta y(i+1)} V(i, j) - \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} v(i+1) - \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} c_\mu \frac{k^2(i, j)}{\varepsilon(i, j)} \quad (\text{VII-44.c})$$

$$D_U(j) = U^2(i, j) + g \sin \alpha - \frac{1}{\rho_m(i+1)} (P(i+1, j) - P(i, j)) \quad (\text{VII-44.d})$$

→ Pour  $k$ , nous avons :

$$A_k(j) = -\frac{\Delta x}{2 \Delta y(i+1)} V(i, j) - \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} v(i+1) - \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} c_\mu \frac{k^2(i, j)}{\varepsilon(i, j)} \quad (\text{VII-45.a})$$

$$B_k(j) = U(i,j) + 2 \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} v(i+1) + 2 \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} c_\mu \frac{k^2(i,j)}{\varepsilon(i,j)} \quad (\text{VII-45.b})$$

$$C_k(j) = \frac{\Delta x}{2 \Delta y(i+1)} V(i,j) - \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} v(i+1) - \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} c_\mu \frac{k^2(i,j)}{\varepsilon(i,j)} \quad (\text{VII-45.c})$$

$$D_U(j) = U(i,j)k(i,j) - \Delta x \varepsilon(i,j) + \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} c_\mu \frac{k^2(i,j)}{\varepsilon(i,j)} \\ (U(i+1,j+1) - 2U(i+1,j) + U(i+1,j-1)) \quad (\text{VII-45.d})$$

→ Pour  $\varepsilon$ , nous avons :

$$A_\varepsilon(j) = -\frac{\Delta x}{2 \Delta y(i+1)} V(i,j) - \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} v(i+1) - \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} c_\mu \frac{k^2(i,j)}{\varepsilon(i,j)} \quad (\text{VII-46.a})$$

$$B_\varepsilon(j) = U(i,j) + 2 \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} v(i+1) + 2 \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} c_\mu \frac{k^2(i,j)}{\varepsilon(i,j)} \quad (\text{VII-46.b})$$

$$C_\varepsilon(j) = \frac{\Delta x}{2 \Delta y(i+1)} V(i,j) - \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} v(i+1) - \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} c_\mu \frac{k^2(i,j)}{\varepsilon(i,j)} \quad (\text{VII-46.c})$$

$$D_\varepsilon(j) = U(i,j) \varepsilon(i,j) - \Delta x c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2(i,j)}{k(i,j)} + \frac{\Delta x}{(\Delta y(i+1))^2} c_\mu c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon(i,j)}{k(i,j)} \frac{k^2(i,j)}{\varepsilon(i,j)} \\ (U(i+1,j+1) - 2U(i+1,j) + U(i+1,j-1)) \quad (\text{VIII-46.d})$$

Ce système peut s'écrire, finalement, sous forme matricielle :

$$[M] \{F\} = \{D_F(j)\} \quad (\text{VII-47})$$

La matrice [M] est triangulaire, elle a la forme suivante :

$$[M] = \begin{bmatrix} B_F(1) & C_F(1) & & & \\ A_F(1) & B_F(2) & C_F(2) & & \\ & A_F(j) & B_F(j) & C_F(j) & \\ & & A_F(n-1) & B_F(n-1) & \end{bmatrix}$$

Le vecteur  $\{D_F(j)\}$  est donné par :

$$D_F(j) = \begin{cases} D_F(1) - A_F(1) F(i+1,0) \\ D_F(2) \\ \dots \\ D_F(j) \\ \dots \\ D_F(n-1) - C_F(n-1) F(i+1,n) \end{cases}$$

La matrice [ M ] comporte un élément diagonal,  $B_F(j)$ , un élément sub-diagonal,  $A_F(j)$  et un élément super diagonal  $C_F(j)$ .

La résolution de ce système se fera par élimination Gaussienne, dont l'algorithme est le suivant :  $F_{n-1} = \gamma_{n-1}$  (VII-48)

$$F_j = \gamma_j - \frac{C_j F_{j+1}}{\beta_j} \quad j = n - 2, n - 3, \dots, 2 \quad (VII-49)$$

où, les paramètres  $\beta_j$  et  $\gamma_j$  sont les paramètres d'inversion calculés avec les formules suivantes:

$$\beta_2 = B_{F_2}, \quad \gamma_2 = \frac{D_{F_2}}{\beta_2}, \quad \beta_j = B_{F_j} - \frac{A_{F_j} C_{F_{j-1}}}{\beta_{j-1}} \quad j = 3, 4, \dots, n - 1 \quad (VII-50)$$

$$\gamma_j = D_{F_j} - \frac{A_{F_j} \gamma_{j-1}}{\beta_j} \quad j = 3, 4, \dots, n - 1 \quad (VII-51)$$

**4°/ Conditions aux limites**

Pour simplifier la résolution, on choisit un repère suivant la pente du canal à partir du point d'inception et en passant par le pseudo -fond formé par les têtes des marches comme représenté sur la figure VII.2 ci-dessous :

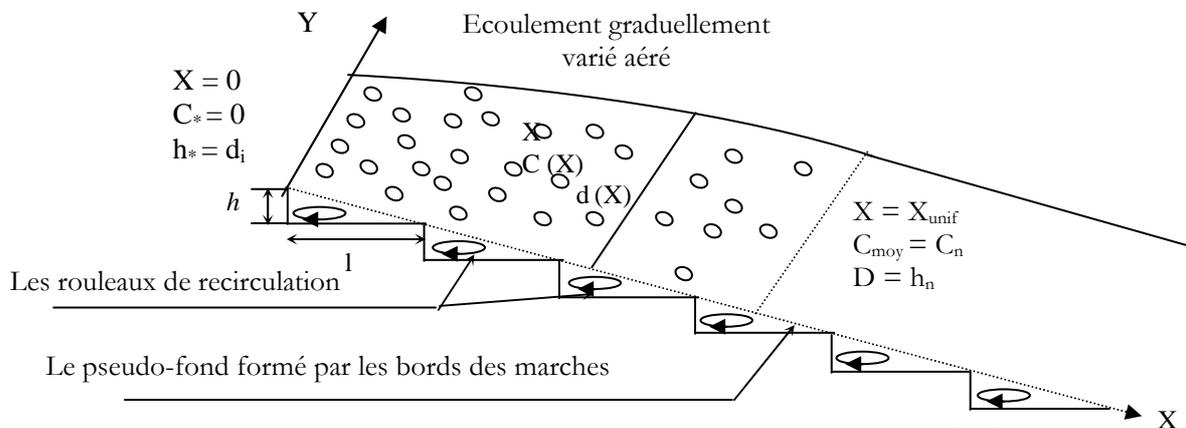


Figure VII.2 : Représentation des conditions aux limites

*i. Au niveau de la paroi*

Au niveau de la paroi :  $y = 0$ , la vitesse moyenne de l'écoulement est la vitesse de frottement à la paroi :  $U = U_*$  (condition d'adhérence) et  $V = 0$

avec,  $U_*$  : désigne la vitesse de frottement donnée par :  $U_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$  ;

$\tau_0$  : contrainte de frottement à la paroi exprimée par :  $\tau_0 = f \rho U_1^2 / 8$  ;

$f$  : coefficient de frottement pour un écoulement non aéré ;

$U_1$  : vitesse moyenne de l'écoulement:  $U_1 = \frac{q}{d}$ .

*ii. A la surface libre*

Au niveau de la surface libre,  $y = d$ , la vitesse de l'écoulement est la vitesse moyenne:  $U = U_1$ .

**Celik** et **Rodi** (1984, 1991) imposent aux écoulements à surface libre des conditions à la surface pour l'énergie turbulente ( $k$ ) et la dissipation ( $\epsilon$ ) les formules suivantes:

$$\frac{\partial k}{\partial y} = 0 \text{ et } \epsilon = \frac{k^{3/2}}{0,43 d}$$

*iii. Région de paroi*

Le calcul détaillé de l'écoulement près d'une paroi nécessite un traitement particulier. Le maillage au lieu de s'étendre jusqu'à la paroi, s'achève à une certaine distance de celle-ci, de façon à ce que tous les points de sa frontière se situent dans la zone pleinement turbulente.

Les formulations choisies pour caractériser cette région et donnant la vitesse ( $U$ ), l'énergie ( $k$ ) ainsi que la dissipation de l'énergie cinétique turbulente ( $\epsilon$ ) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} U^+ = \frac{1}{\kappa} \text{Ln} \left( \frac{y}{k_s} \right) + 8,5 \\ k = \frac{U_*^2}{\sqrt{c_\mu}} \\ \epsilon = \frac{c_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \end{array} \right.$$

avec,  $k_s$  : Rugosité uniforme du canal donnée par  $k_s = h \cos \alpha$  où,  $h$ : hauteur de la marche (m) ;  $\kappa$  : Constante de **Von Karman** égale à 0,41.

**5°/ Conditions initiales**

Dans le cas d'un canal lisse, les profils initiaux de vitesse et d'énergie obtenus à partir des résultats expérimentaux (*Lauder, Spalding*, 1972) (*Keller, Lai et Wood*, 1974), sont donnés par :

$$\frac{U}{U_1(0)} = \left( \frac{y}{d(0)} \right)^{1/N}$$

avec,  $U_1(0)$  : la vitesse moyenne de l'écoulement au point d'inception et  $h(0)$ , la profondeur de l'écoulement en ce point :  $U_1(0) = q/d(0)$

Pour la composante  $V$  de la vitesse, dans la première section ( $x = 0$ ), elle est généralement prise égale à zéro.

L'énergie cinétique turbulente est donnée par :

$$k = U_1^2(0) 0,08 \left( 1 - \frac{y}{d(0)} \right)^2$$

La dissipation de l'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon$ , est fonction de l'échelle de longueur de turbulence,  $L$  déterminée par la distribution suivante:

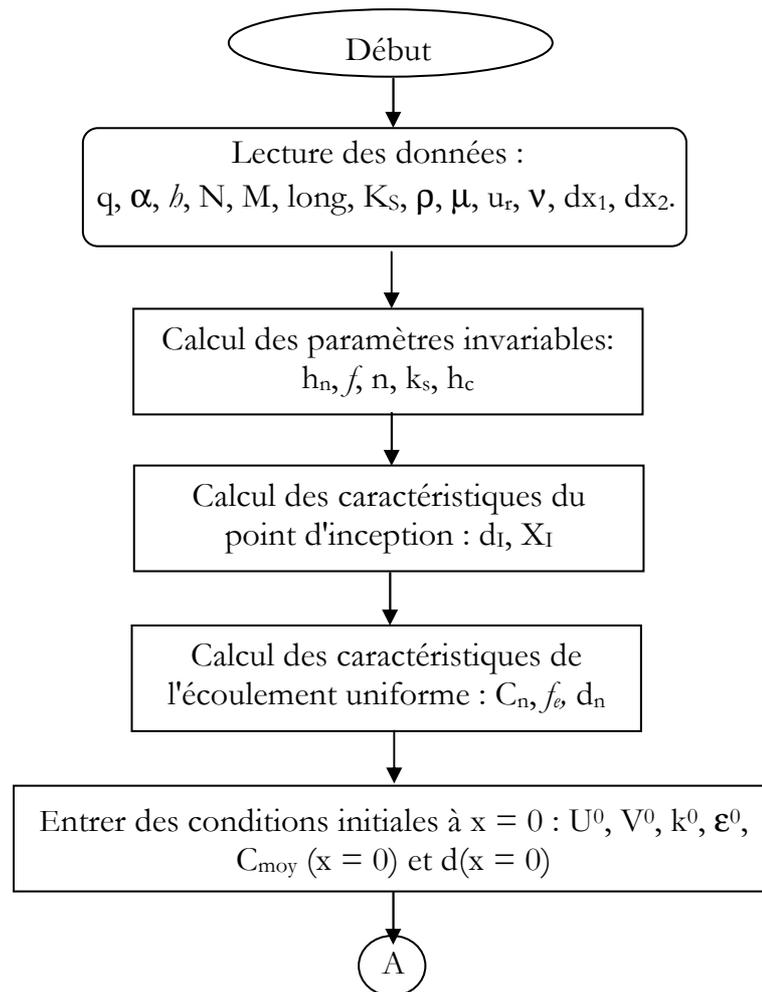
$$\begin{cases} L = \kappa y & 0 < y \leq c_\mu h(0)/\kappa \\ L = 0,09 d(0) & y > c_\mu h(0)/\kappa \end{cases}$$

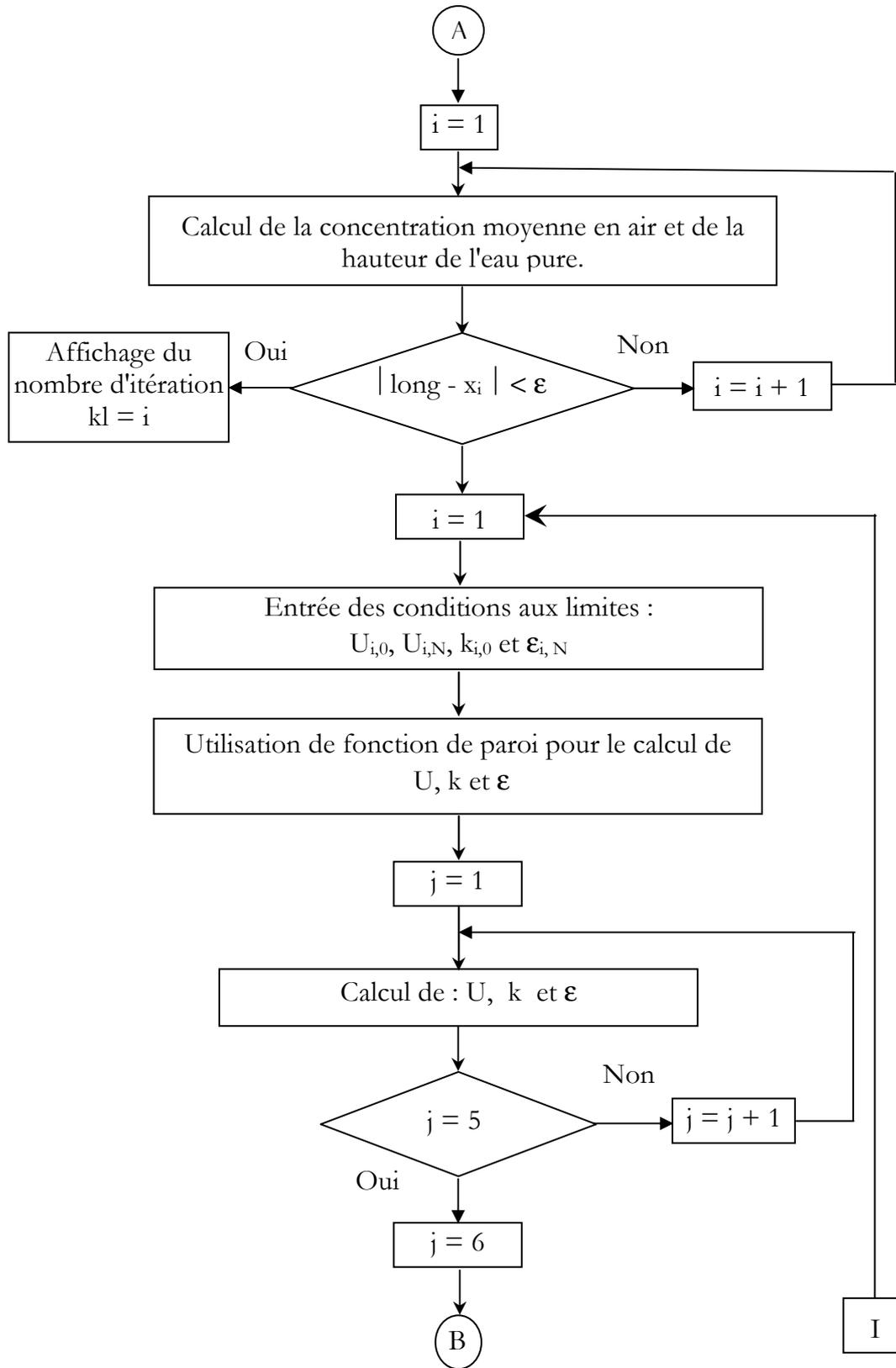
La dissipation est alors donnée par :  $\varepsilon = \frac{c_\mu k^{3/2}}{L}$

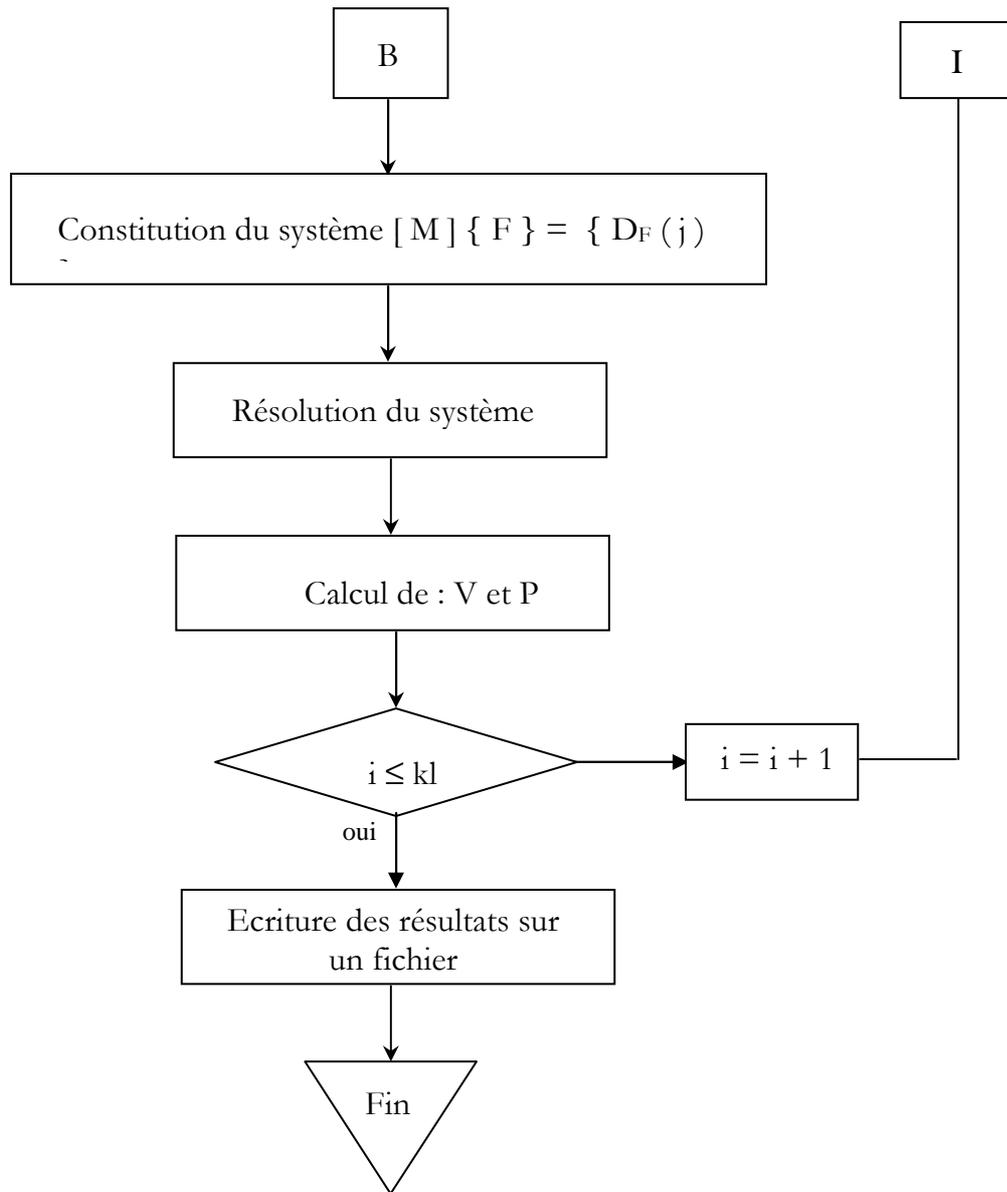
Dans le cas d'un canal en marches d'escalier, les mêmes profils initiaux sont utilisés.

**6°/ Mise en œuvre numérique**

Les principales étapes de calcul sont représentées dans l'organigramme suivant :







## Chapitre VIII : Les expérimentations numériques

Le chapitre précédent a été consacré à l'élaboration des programmes de calcul qui nous permettent de fournir les champs des différentes variables de l'écoulement en se basant sur le modèle mathématique établi. Signalons, toutefois, qu'un programme de calcul, même opérationnel, demeurera toujours non valable tant qu'il n'a pas été validé par la comparaison et la confrontation des résultats qu'il offre à ceux provenant, soit d'observations sur des ouvrages réels, soit des relevés d'expériences sur modèles physiques ou encore des codes de calcul déjà validés.

C'est dans cet ordre d'idées que s'inscrit la première partie du présent chapitre dans laquelle nous allons tester l'aptitude des modèles élaborés à simuler les écoulements sur les coursiers évacuateurs de crues à marches d'escaliers et à profils lisses en faisant des comparaisons avec d'autres résultats de recherches. Dans la deuxième partie nous présentons les expérimentations numériques sur différents cas d'études.

### I. CALCUL DES PARAMETRES HYDRAULIQUES DE L'ÉCOULEMENT

Afin de pouvoir entamer les procédures de calculs dans les modèles, il y a lieu de déterminer certains paramètres hydrauliques qui caractérisent l'écoulement.

#### 1°/ Épaisseur de la lame d'eau au seuil du coursier

Le calcul de la lame d'eau déversante se fait à partir de la formule de débit suivante :

$$q = C_d \sqrt{2g} h_e^{3/2} \quad (\text{VIII-1})$$

avec,  $q$  le débit unitaire et  $C_d$  le coefficient de débit.

D'où l'épaisseur de la lame d'eau au seuil du coursier est donnée par:

$$h_e = \sqrt[3]{\frac{q^2}{2g C_d^2}} \quad (\text{VIII-2})$$

#### 2°/ Hauteur d'eau normale

Le débit de l'écoulement d'un canal à surface libre peut être donné par formule de Manning- Strickler :  $Q = K_s R_h^{2/3} J^{1/2} S_m$  (VIII-3)

où,  $K_s$  : est le coefficient de rugosité de Strickler ;  $J$  : la pente de la ligne d'eau ;  $S_m$  : la section mouillée ;  $R_h$  : le rayon hydraulique donné par le rapport de la surface mouillée sur le périmètre mouillé.

Le canal considéré étant large et rectangulaire, il s'ensuit que le rayon hydraulique est égal à la profondeur d'écoulement :  $R_h = h_e$

Aussi, pour un écoulement uniforme, nous avons la pente hydraulique est égale à la pente géométrique :  $J = I = \text{tg } \alpha$ . La profondeur de l'écoulement est égale à la profondeur normale :  $h_e = h_n$

En considérant un débit unitaire  $q = Q/B$ , nous aboutissons, alors, à l'expression de la hauteur d'eau uniforme suivante : 
$$h_n = \left( \frac{q^2}{K_s^2 \text{tg } \alpha} \right)^{3/10} \quad (\text{VIII-4})$$

### 3°/ Hauteur d'eau critique

La hauteur d'eau critique dans un canal rectangulaire est donnée par la formule suivante : 
$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (\text{VIII-5})$$

### 4°/ Vitesse de frottement

La vitesse de frottement est donnée par l'expression suivante :

$$U_* = \sqrt{f \frac{U_1^2}{8}} \quad (\text{VIII-6})$$

où,  $f$  est le coefficient de frottement et  $U_1$  la vitesse de l'écoulement libre.

### 5°/ Coefficient de frottement

- Dans le cas d'un coursier en marches d'escalier, Rajaratnam propose pour le calcul du coefficient de frottement l'expression suivante :

$$f = \frac{8 g \sin \alpha h_n^3}{q^2} \quad (\text{VIII-7})$$

- Dans le cas d'un coursier à profil lisse, l'expression du coefficient de frottement est : 
$$f = 8 \frac{g}{C^2} \quad (\text{VIII-8})$$

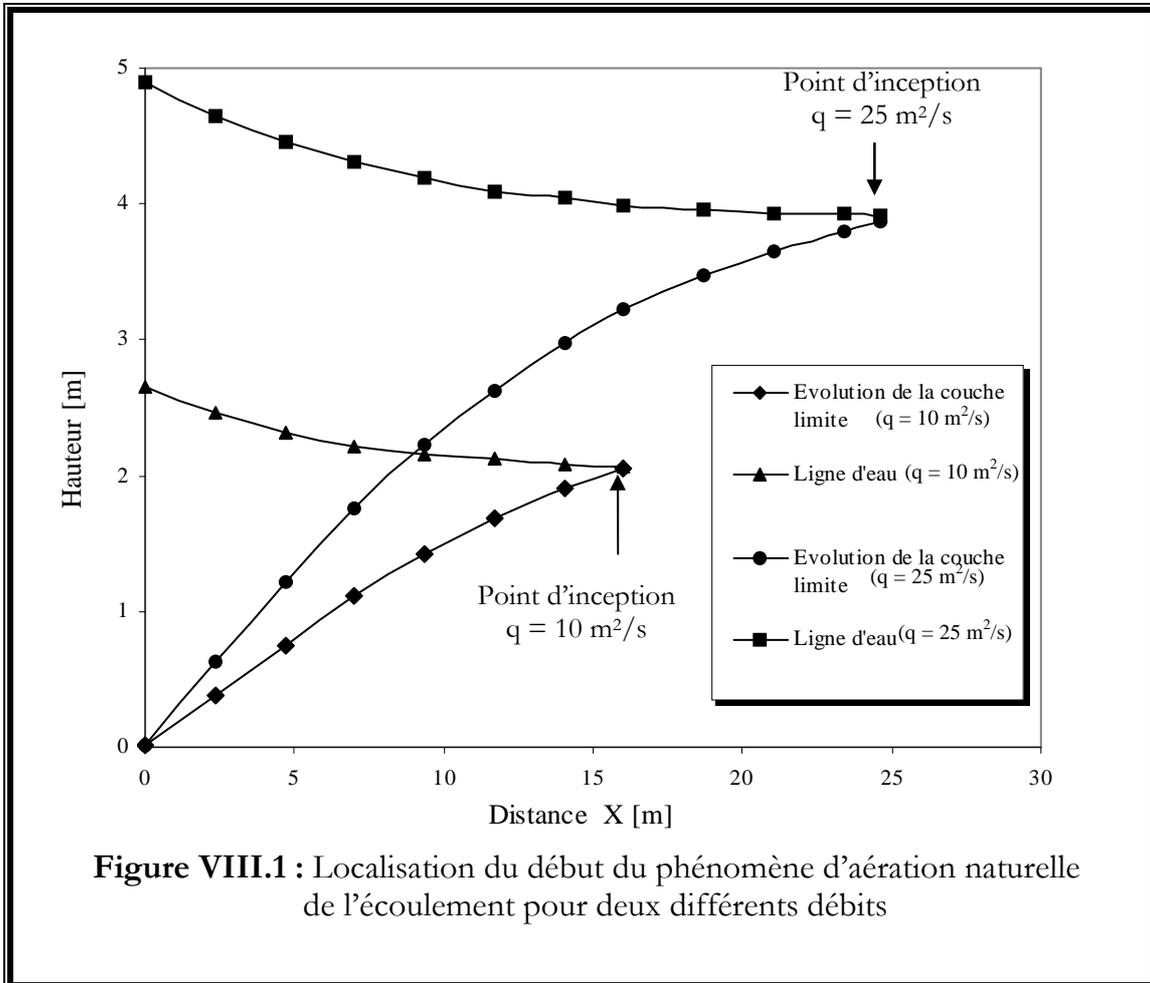
avec :  $C$ , le coefficient de Chezy, donné par :  $C = K_s h_n^{1/6}$

## II. LOCALISATION DU POINT D'INCEPTION

Le début du phénomène d'entraînement d'air a lieu au point d'intersection de la surface libre de l'écoulement avec le bord supérieur de la couche limite qui se

développe à partir du seuil de l'ouvrage correspondant à l'origine de l'axe des abscisses.

Pour plus de clarté, nous avons représenté sur la figure VIII.1 l'évolution de la ligne d'eau et de la couche limite pour deux débits, à savoir :  $q = 10 \text{ m}^2/\text{s}$  et  $25 \text{ m}^2/\text{s}$ .



Ces courbes ont un point d'intersection et celui-ci se déplace vers l'aval en augmentant le débit.

### III. VALIDATION DES MODELES NUMERIQUES

#### 1°/ Présentation des modèles d'applications

Les modèles numériques élaborés ne peuvent être testés que sur la base de la confrontation des résultats qu'ils offrent à ceux provenant des autres travaux de recherches. Pour cela, nous disposons, d'une part, des résultats de Keller obtenus par l'application d'un modèle numérique à un évacuateur à profil lisse et, d'autre part, nous disposons des résultats de Vercheval obtenus par la modélisation physique d'un évacuateur de crues en marches d'escalier.

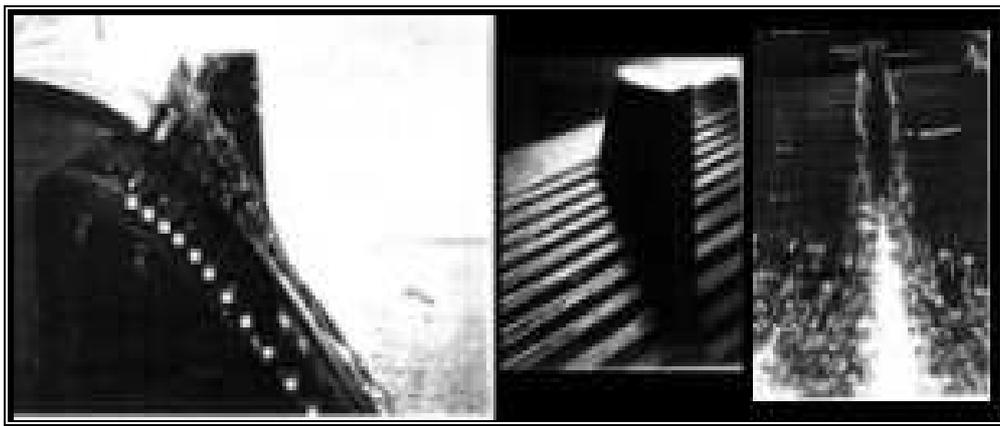
### • Résultats de Keller et Rastogi

Les résultats mis à notre disposition sont ceux de **Keller** et **Rastogi** (1975, 1976). Les auteurs ont élaboré un modèle numérique pour simuler l'écoulement et calculer le point d' inception dans le cas des évacuateurs de crues à profils lisses (**Keller, Rastogi**, 1975, 1976). L'application du modèle a été faite sur le coursier de l'évacuateur de du barrage de Glenmaggie, dont les caractéristiques sont les suivantes :

- La pente du coursier est :  $\alpha = 55^\circ$  ;
- Le coefficient de rugosité de Strickler est :  $K_s = 80$  ;
- Le profil du déversoir est du type Creager, caractérisé par un coefficient de débit  $C_d=0,50$ .

### • Le modèle physique de Vercheval

Les résultats de Vercheval proviennent des travaux de recherches réalisés à l'université de Liège en Belgique sur le modèle réduit de l'évacuateur de crues du barrage de M'Bali (photo VIII.1) en République Centre Africaine à l'échelle 1/21,33 (**Vercheval**, 1991).



**Photo VIII.1** : Evacuateur de crues du barrage M'Bali

Le coursier de l'évacuateur de crues du barrage de M'Bali est de forme rectangulaire, très large et de forte pente. Ses principales caractéristiques sont les suivantes :

- La pente du coursier de l'évacuateur est  $\alpha = 51,34^\circ$  ;
- Le coefficient de rugosité de Strickler est :  $K_s = 50$  ;
- Le profil du déversoir est du type Creager, caractérisé par un coefficient de débit  $C_d=0,52$ ;
- La largeur du coursier est égale à 60 m.
- La longueur totale du coursier est de 37 m,
- Le nombre de marches est de 36,
- La hauteur de la marche est :  $h = 0,8$  m.

## 2°/ Stabilité du schéma numérique explicite aux différences finies

Le modèle mathématique final régissant l'écoulement est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type parabolique. La résolution numérique de tels systèmes se fait en mettant leurs équations sous forme algébriques linéaires. Les systèmes obtenus ne donnent jamais une solution exacte mais une solution approchée des équations du problème. Ceci est dû :

- D'une part, à l'accumulation des erreurs d'arrondis commises à chaque étape de calcul pour un grand nombre d'opérations algébriques ;
- D'autre part, aux erreurs engendrées par le remplacement des opérateurs différentiels par les opérateurs en différences finies.

Si l'évolution de ces erreurs n'est pas contrôlée à défaut d'une mauvaise discrétisation ou lorsque le schéma numérique choisi n'est pas approprié, leurs accumulations excessives peuvent mener à des instabilités dans les calculs.

Il s'avère donc, nécessaire, de procéder à la vérification de la stabilité de tous les schémas numériques avant leurs exploitations. Parmi les méthodes utilisées pour le calcul de la condition de stabilité, nous citons la méthode de Von Newman qui est une procédure analytique. Vu la complexité du système d'équations, l'utilisation de cette méthode est pratiquement impossible ; pour surmonter cette difficulté nous allons recourir à une étude expérimentale de la stabilité de notre schéma numérique.

Le principe de l'étude consiste à introduire des perturbations dans les profils initiaux des variables de l'écoulement et à enregistrer leurs effets sur la solution du modèle à différentes sections, en comparant les résultats donnés par les profils perturbés à ceux des profils non perturbés.

Le tableau VIII-1 donne les mesures de la vitesse longitudinale  $U$ , obtenues par le modèle au niveau de trois sections suite à différentes perturbations, à savoir :

- Perturbation des profils initiaux de la variable de l'écoulement  $U$  suivant des ordres de grandeur différents.
- Perturbation des profils initiaux des trois variables de l'écoulement  $U$ ,  $k$  et  $\epsilon$  simultanément, selon des ordres de grandeurs différents.

Cette opération de déstabilisation des variables de l'écoulement a induit des écarts entre les résultats du modèle obtenus par les profils perturbés et les résultats obtenus par le même modèle sans perturbation des variables de départ, au niveau d'une même section.

D'une manière générale, l'ordre de grandeur des erreurs varie de  $10^{-5}$  à  $1,0$  selon les différents cas. Sur le tableau VIII-2, nous reportons l'ordre des erreurs enregistrées pour les différentes perturbations au niveau des trois sections.

Tableau VIII-1 : Résultats de la vitesse U (m/s) suite à la perturbation des variables initiales.

$\omega$ (%)	U	U + 0,0001	U + 0,001	U + 0,1	U + 0,001 k + 0,001 $\epsilon$ + 0,001	U + 0,01 k + 0,01 $\epsilon$ + 0,01	U + 0,1 k + 0,01 $\epsilon$ + 0,01	U + 0,1 k + 0,1 $\epsilon$ + 0,1
	Section 1 (X = 3,51 m)							
0	2,043246	2,043271	2,043497	2,068456	2,042701	2,045644	2,068025	2,091036
8	5,323939	5,323998	5,324497	5,380299	5,325176	5,334634	5,385431	5,402534
16	5,546735	5,5468	5,547364	5,610076	5,548578	5,56211	5,619118	5,649189
24	5,70409	5,704156	5,704745	5,770891	5,706427	5,72323	5,783313	5,822424
32	5,829089	5,829162	5,829785	5,898126	5,831918	5,851835	5,913877	5,964499
40	5,934298	5,934366	5,934998	6,0049	5,937563	5,960398	6,023819	6,084759
48	6,026027	6,0261	6,026734	6,097837	6,029727	6,055349	6,119802	6,191006
56	6,107894	6,107965	6,108611	6,18066	6,112022	6,140343	6,205629	6,287018
64	6,18218	6,182256	6,182915	6,255734	6,186714	6,217791	6,283761	6,374158
72	6,250433	6,250507	6,251167	6,324647	6,255388	6,289433	6,355973	6,450467
80	6,313773	6,313842	6,314516	6,388535	6,319187	6,356458	6,42346	6,515659
88	6,372971	6,373044	6,373714	6,448229	6,379044	6,414511	6,481927	6,583254
96	6,42867	6,428744	6,429423	6,504346	6,432643	6,468527	6,538002	6,291599
Section 2 (X = 5,85 m)								
0	2,213152	2,213181	2,213425	2,240371	2,21569	2,236835	2,260897	2,34559
8	5,333777	5,333836	5,334334	5,390102	5,335486	5,347807	5,398542	5,426255
16	5,565568	5,565634	5,566197	5,628829	5,568339	5,587501	5,644386	5,695583
24	5,7312	5,731265	5,731853	5,797881	5,734881	5,759819	5,819692	5,889322
32	5,86399	5,864066	5,864691	5,932868	5,868545	5,898909	5,960688	6,050446
40	5,976605	5,976672	5,977303	6,047002	5,981951	6,017418	6,080511	6,18859
48	6,075417	6,07549	6,076123	6,146983	6,081546	6,121861	6,185927	6,311789
56	6,164114	6,164185	6,164828	6,236608	6,170994	6,215989	6,280838	6,423972
64	6,244998	6,245074	6,24573	6,318245	6,252604	6,302244	6,36773	6,526628
72	6,319656	6,319729	6,320389	6,393539	6,327983	6,382409	6,448426	6,617903
80	6,389226	6,38929	6,389964	6,463626	6,398299	6,457719	6,524157	6,69766

88	6,454488	6,454561	6,455216	6,529362	6,464517	6,523766	6,590591	6,779333
96	6,516104	6,51618	6,516856	6,591374	6,524263	6,585669	6,654591	6,507389
<b>Section 3 ( X = 11,7m )</b>								
0	2,442121	2,44215	2,442415	2,471422	2,455244	2,550354	2,574927	3,372952
8	5,351471	5,35153	5,352031	5,40771	5,354569	5,376657	5,427101	5,560636
16	5,599977	5,600041	5,600604	5,663064	5,605536	5,644815	5,701111	5,980502
24	5,780857	5,780918	5,781505	5,847299	5,788618	5,842885	5,901849	6,303855
32	5,927868	5,927941	5,928564	5,996418	5,937662	6,005818	6,066401	6,580192
40	6,053915	6,053977	6,054602	6,123893	6,065609	6,146677	6,208345	6,823044
48	6,165509	6,165581	6,166208	6,236598	6,179019	6,272299	6,334715	7,042676
56	6,266443	6,266515	6,26716	6,338414	6,28169	6,386627	6,44958	7,244476
64	6,35912	6,359192	6,359849	6,43177	6,376021	6,49218	6,555602	7,431163
72	6,445136	6,445211	6,445868	6,518389	6,463665	6,59091	6,654666	7,602186
80	6,525714	6,525779	6,526449	6,599432	6,545846	6,68409	6,748121	7,758316
88	6,601656	6,601726	6,602386	6,675798	6,623565	6,767466	6,831723	7,911993
96	6,673642	6,67371	6,674388	6,748141	6,694469	6,846287	6,912521	7,76012

L'examen du tableau VIII-2 nous a fait ressortir les observations suivantes :

- ◆ Les ordres de grandeurs des erreurs de la vitesse  $u$  enregistrées à différentes sections sont proportionnels aux perturbations introduites dans les profils initiaux.
- ◆ Parfois, les erreurs ont tendance à augmenter en allant dans le sens de l'écoulement. Ceci est dû à l'évolution cumulative des erreurs, d'un pas à l'autre.
- ◆ La perturbation simultanée des trois variables de l'écoulement  $U$ ,  $k$ ,  $\epsilon$ , engendre plus d'erreurs que la perturbation de la seule variable  $U$ .

Au vu de ces différentes observations, il nous convient de dire que le modèle basé sur le schéma numérique explicite est stable. Il contrôle convenablement les différentes erreurs cumulées au cours du processus de calcul.

**Tableau VIII-2 :** Ordres de grandeurs des erreurs de la vitesse U à différentes sections

Perturbations	Ordres de grandeurs des erreurs de la vitesse U (m/s)		
	Section 1 (3,51m)	Section 2 (5,85 m)	Section 3 (11,7m)
U + 10 <sup>-4</sup> m/s	10 <sup>-4</sup> à 10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-4</sup> à 10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-4</sup> à 10 <sup>-5</sup>
U + 10 <sup>-3</sup> m/s	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-4</sup>
U + 10 <sup>-1</sup> m/s	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-2</sup>
U + 10 <sup>-3</sup> m/s k + 10 <sup>-3</sup> m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ε + 10 <sup>-3</sup> m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	10 <sup>-3</sup> à 10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-2</sup>
U + 10 <sup>-2</sup> m/s k + 10 <sup>-2</sup> m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ε + 10 <sup>-2</sup> m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-1</sup>
U + 10 <sup>-1</sup> m/s k + 10 <sup>-2</sup> m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ε + 10 <sup>-2</sup> m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	10 <sup>-1</sup> à 10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-1</sup> à 10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-1</sup>
U + 10 <sup>-1</sup> m/s k + 10 <sup>-1</sup> m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ε + 10 <sup>-1</sup> m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	10 <sup>-1</sup> à 10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-1</sup>	1.0

Par ailleurs, nous avons effectué plusieurs expérimentations numériques en faisant varier les pas de discrétisation  $\Delta x$  et  $\Delta \omega$ , respectivement, selon l'axe des abscisses x et l'axe des ordonnées  $\omega$  et à travers lesquelles, nous avons pu déduire la condition

$$\text{de stabilité suivante : } \frac{\Delta x}{\Delta \omega} \leq 0,0001$$

### 3°/ Résultats des applications et analyses

La validité du modèle mathématique est testée en appliquant le code de calculs basé sur les différents schémas aux écoulements dans les deux cas de modèles d'applications présentés plus haut.

#### a. Choix du schéma numérique dans le cas d'un coursier à profil lisse

Dans le cas de l'application sur l'évacuateur à profil lisse, les résultats obtenus à base des deux schémas numériques sont comparés aux résultats de Keller.

- **Résultats du modèle basé sur le schéma implicite, appliqué au barrage de Glenmaggie**

La figure VIII.2 présente les différentes positions du point d'inception en fonction du débit, données par le modèle numérique de Keller et par l'application de notre modèle basé sur le schéma numérique implicite, au coursier à profil lisse de l'évacuateur de crues du barrage de Glenmaggie. La comparaison des résultats montre une concordance satisfaisante.

- **Résultats du modèle basé sur le schéma explicite, appliqué au barrage de Glenmaggie**

L'application du modèle basé sur le schéma explicite au barrage de Glenmaggie a enregistré une divergence très rapide dans l'exécution du programme. Par ailleurs, le barrage de Glenmaggie fait déverser de faibles débits ne dépassant pas les 3 m<sup>2</sup>/s. Ceci nous a conduit à faire d'autres essais similaires sur un évacuateur à profil lisse d'un barrage fictif déversant de moyens à forts débits et ayant les mêmes caractéristiques que l'évacuateur de crues du barrage de M'Bali.

- **Résultats du modèle basé sur les deux schémas explicite et implicite, appliqué au barrage de M'Bali.**

A la différence des applications sur le barrage de Glenmaggie, les applications du modèle avec les deux schémas sur un barrage fictif à profil lisse présentant les mêmes caractéristiques que le barrage de M'Bali, enregistre cette fois-ci, l'exécution des deux programmes de calculs respectifs.

La figure VIII.3 illustre les graphiques du point d'inception en fonction du débit correspondant aux deux applications ci-dessus. L'examen des allures conduit à soulever deux remarques importantes :

- La première, est que les écarts enregistrés entre les valeurs des positions du point d'inception des deux courbes sont notablement grands ;
- La seconde, concerne le programme du schéma explicite qui ne s'exécute que pour un intervalle de débits allant de 10 à 40 m<sup>2</sup>/s, alors qu'il diverge pour toutes les autres valeurs de débit testées se situant en dehors de cet intervalle.

A la lumière de ces différentes observations, nous pouvons conclure que dans le cas des évacuateurs de crues à profils lisses, seul le modèle numérique basé sur le schéma implicite est valable.

#### **b. Choix du schéma numérique dans le cas d'un coursier en marches d'escalier**

La figure VIII.4 présente les graphiques des positions du point d'inception en fonction du débit, résultant de notre modèle avec les deux schémas, implicite et explicite, appliqué au coursier de l'évacuateur à marches du barrage de M'Bali ainsi

que le graphique des mesures expérimentales relevées par Vercheval sur le modèle réduit de l'évacuateur de crues du même barrage.

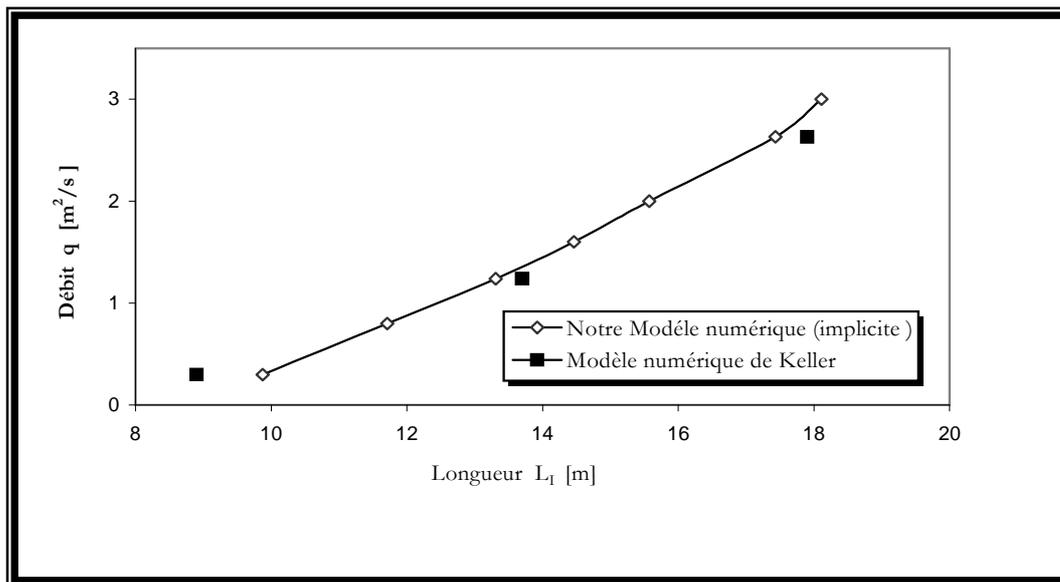
La comparaison entre les allures des trois graphes nous renseigne sur ce qui suit :

- D'une part, les graphiques tracés avec les résultats des deux schémas numériques, implicite et explicite, sont totalement confondus.
- D'autre part, un assez bon rapprochement est obtenu entre les allures des mêmes graphiques et l'allure des relevés expérimentaux de Vercheval, ceci pour une gamme de débits allant de 5 à 40 m<sup>2</sup>/s.

C'est sur la base de ces constats que nous pouvons affirmer la validité des deux programmes de calcul dans le cas des évacuateurs de crues en marches d'escalier.

Doit-on rappeler, cependant, que les schémas numériques implicites présentent l'avantage d'être, inconditionnellement stable à la différence des schémas numériques explicites auxquels il faudra toujours imposer une condition de stabilité. La concordance des résultats des deux schémas pour le cas de l'évacuateur en marches d'escaliers, nous laisse un libre choix quant à leur utilisation.

Nous optons finalement, pour le schéma implicite qui donne des résultats satisfaisants dans tous les cas de figures (profil lisse et profil en marches d'escaliers).



**Figure VIII.2** : Comparaison des résultats numériques de Keller à ceux du schéma implicite de notre modèle (Evacuateur lisse du barrage de Glenmaggie)

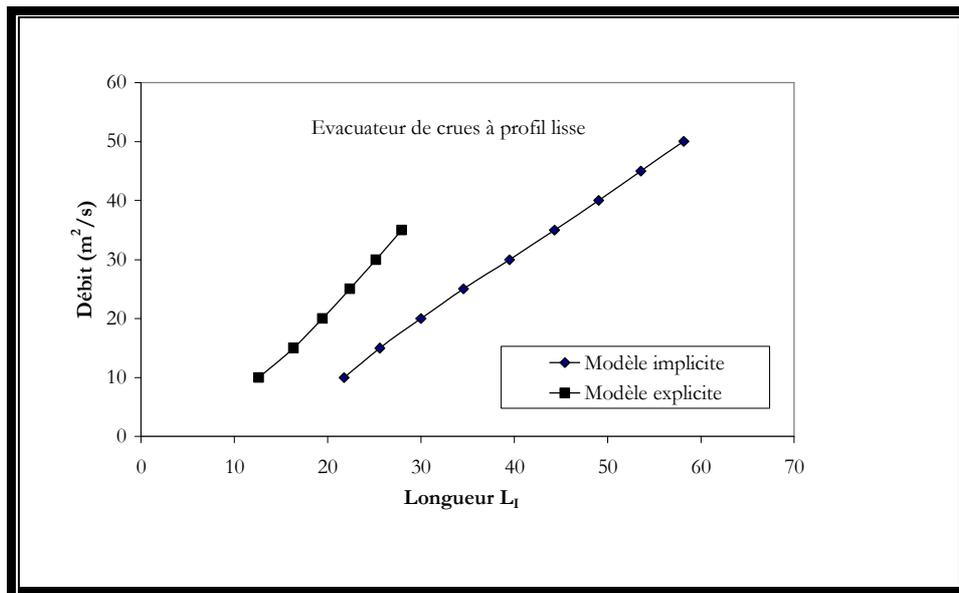


Figure VIII.3 : Comparaison des résultats numériques obtenus avec le schéma explicite à ceux obtenus avec schéma implicite (cas de l'évacuateur de crues lisse du barrage de Glenmaggie)

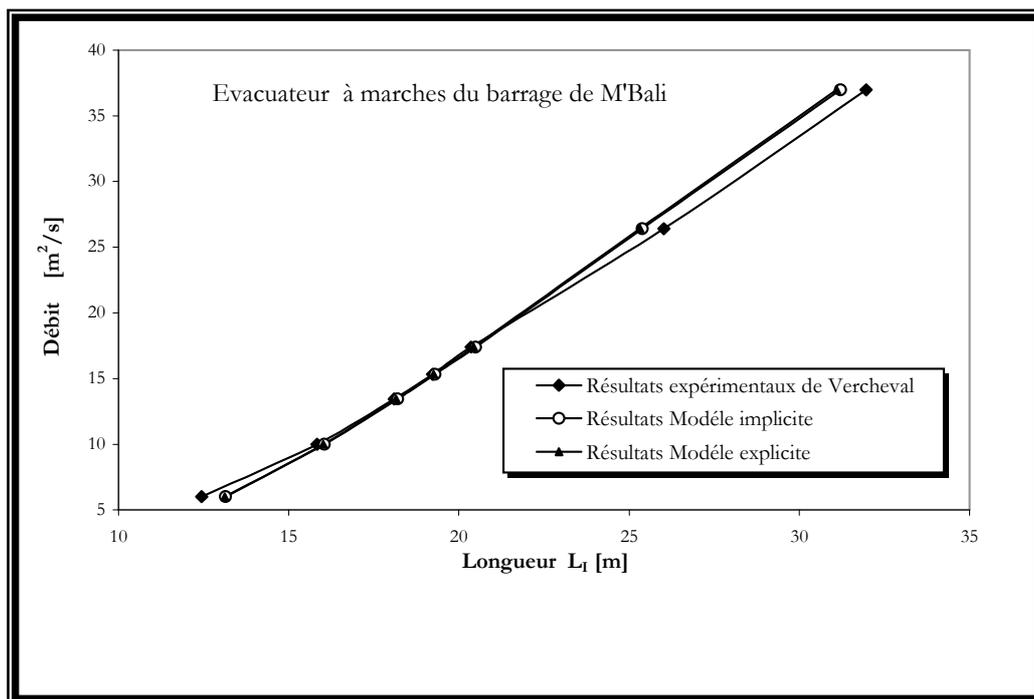


Figure V III.4 : Comparaison des résultats expérimentaux de Vercheval à ceux des schémas implicite et explicite de notre modèle

#### IV. ESSAIS NUMERIQUES

Après avoir validé le modèle numérique basé sur le schéma implicite aux différences finies, nous allons entamer des séries d'expérimentation afin :

- D'étudier, d'abord, l'impact des marches d'escalier sur l'apparition du phénomène d'aération naturelle ainsi que l'influence du débit et du changement de pente sur le développement de la couche limite ;
- Et puis, d'analyser les différents paramètres physiques intervenant dans un écoulement turbulent bidimensionnel dans une couche limite.

##### 1°/ Effet des marches sur l'apparition de l'aération naturelle

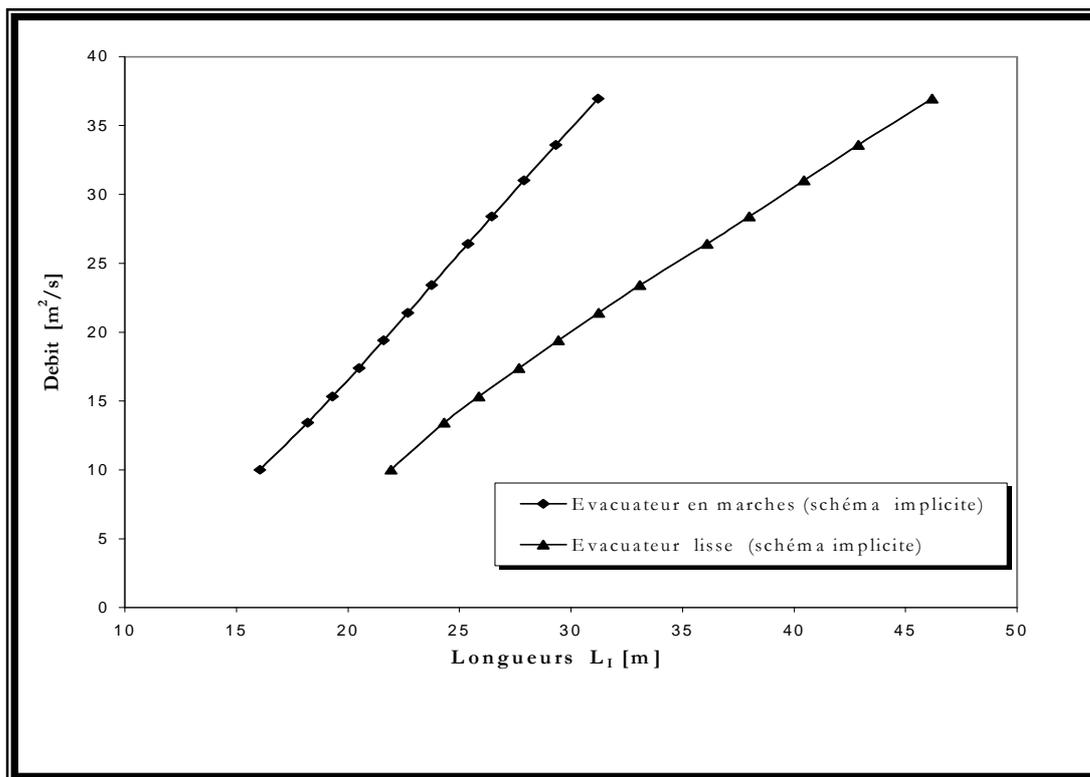
Dans le souci de voir l'effet des marches d'escalier sur le phénomène de l'aération naturelle de l'écoulement, nous avons effectué des expérimentations en appliquant le modèle numérique validé dans les sections précédentes, à l'évacuateur de crues du barrage de M'Bali, selon différentes configurations géométriques du coursier.

Les résultats d'applications sont illustrés sur la figure VIII.5 qui donne les différentes positions du point d'inception en fonction du débit pour un fond de coursier lisse ainsi que pour un fond de coursier en marches d'escalier.

L'analyse des résultats permet d'affirmer que la zone de l'écoulement aéré apparaît nettement plus rapprochée du seuil du coursier dans le cas d'un évacuateur en marches d'escalier que dans le cas d'un évacuateur à profil lisse et, par conséquent, l'ouvrage est d'autant moins agressé par le phénomène de cavitation.

Ceci explique clairement que la macro-rugosité constituée par des éléments en marches d'escalier favorise et accélère le processus de l'aération naturelle de l'écoulement. Sans doute, se fait trouve son origine dans l'accroissement ou l'ascension plus rapide de la couche limite qui se développe à partir du seuil pour atteindre la surface libre à l'endroit où le phénomène d'aération est enclenché.

De même, la figure VIII.5 indique que le point d'apparition de l'eau blanche dans les deux cas de coursier traités, est proportionnel au débit de l'écoulement. Il est d'autant plus éloigné du seuil du coursier que le débit est important. Egalement, nous pouvons relever que le point d'inception a tendance à évoluer linéairement avec le débit.



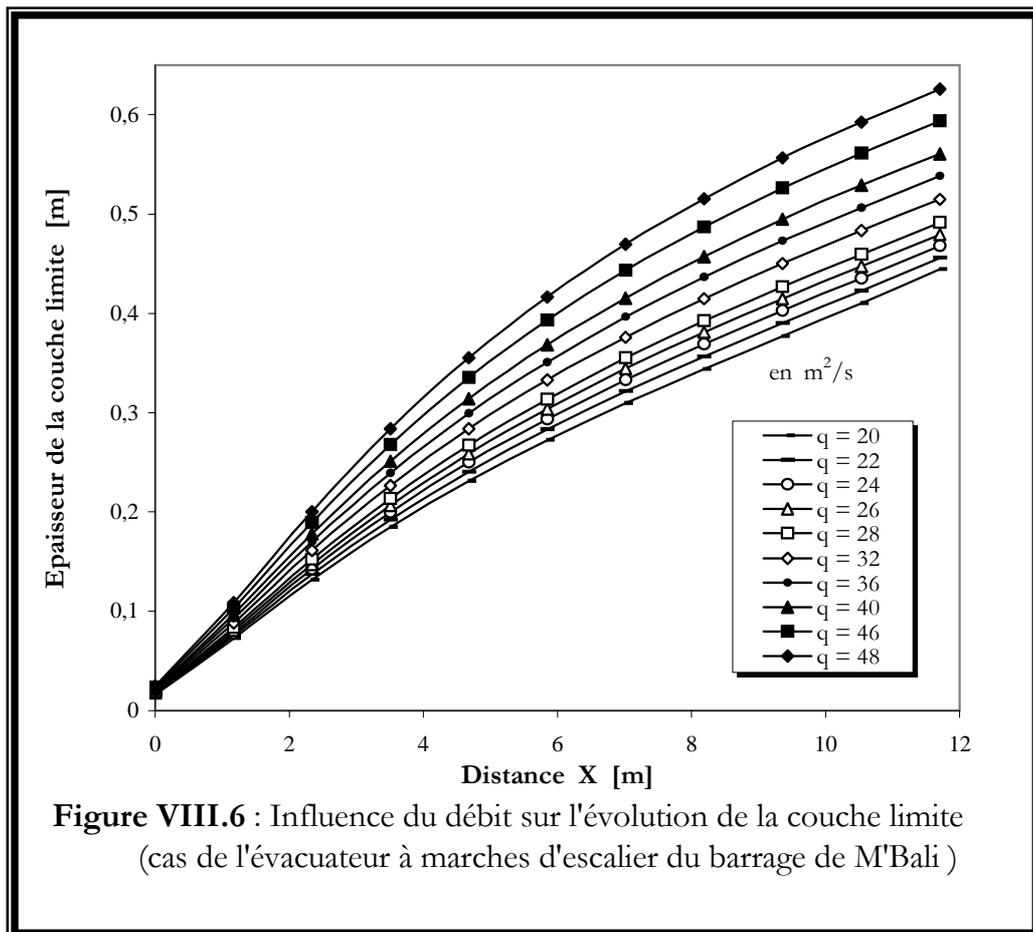
**Figure VIII.5 :** Effet des marches sur l'apparition de l'aération naturelle de l'écoulement

## 2°/ Influence du débit et du changement de pente sur le développement de la couche limite dans l'écoulement

### a. Influence du débit

La figure VIII.6 regroupe une série de graphes qui illustrent l'évolution de la couche limite le long du coursier pour des débits variant de 20 à 48 m<sup>2</sup>/s, résultant de l'application du modèle au coursier de l'évacuateur de crues à marches du barrage de M'Bali.

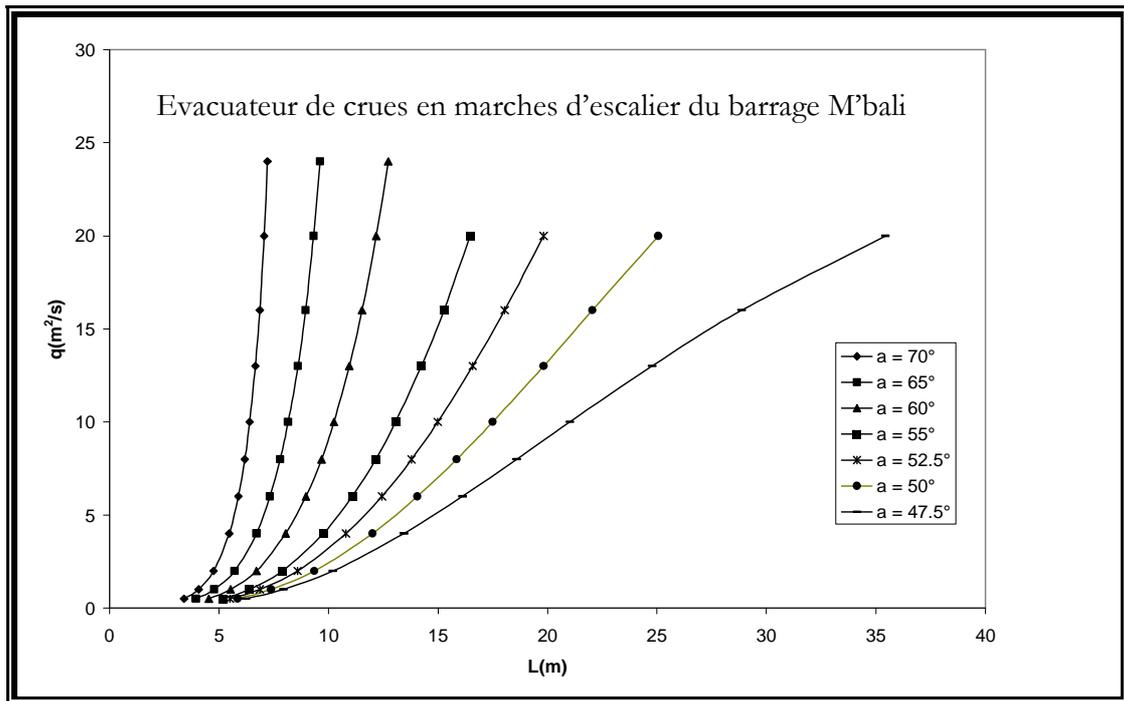
Les graphes mettent en évidence l'influence du débit sur le développement de la couche limite. Nous remarquons l'accroissement de l'épaisseur de la couche limite proportionnellement à l'augmentation du débit.



### b. Influence de la pente du coursier

En vue de quantifier et de voir l'influence de la pente sur l'apparition du phénomène d'aération naturelle de l'écoulement, nous avons procédé à l'application du modèle de calcul au coursier de l'évacuateur de crues en marches d'escaliers du barrage de M'Bali en faisant varier la pente dans l'intervalle de 45 à 70 degrés.

Les graphiques des résultats reportés sur la figure VIII.7 montrent bien l'effet important du changement de pente d'un évacuateur. En fait, on constate que le point de début de l'aération naturelle de l'écoulement s'éloigne vers l'aval du seuil du coursier au fur et à mesure que l'on diminue la pente de celui-ci. Cette tendance semble s'accroître en adoucissant la pente avec des proportions de plus en plus importantes.



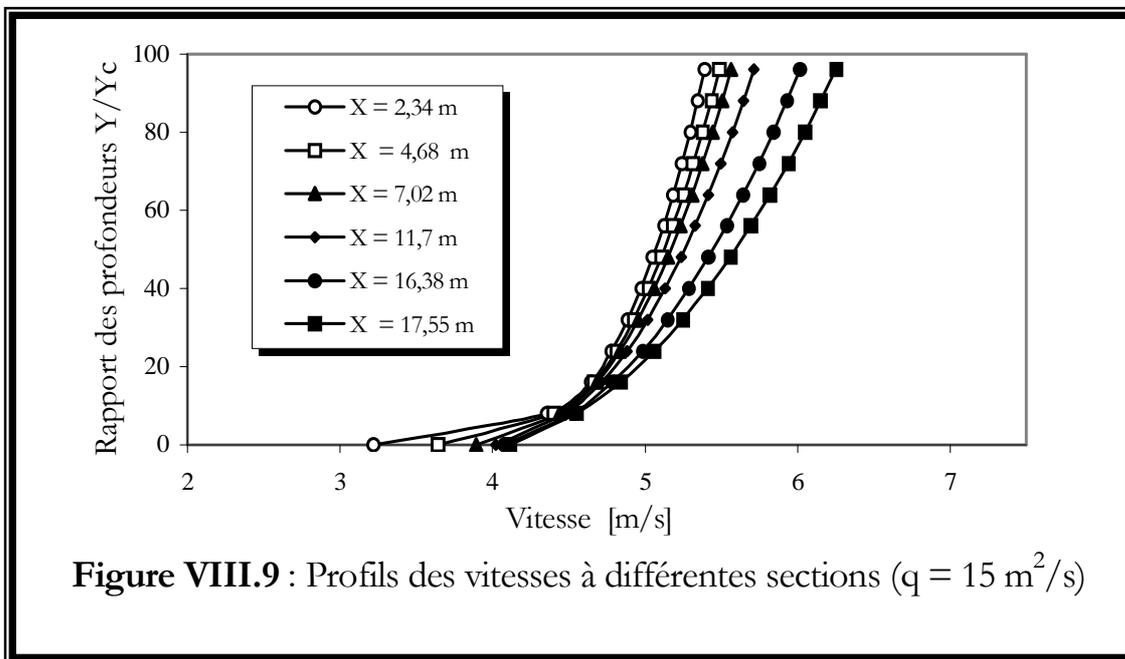
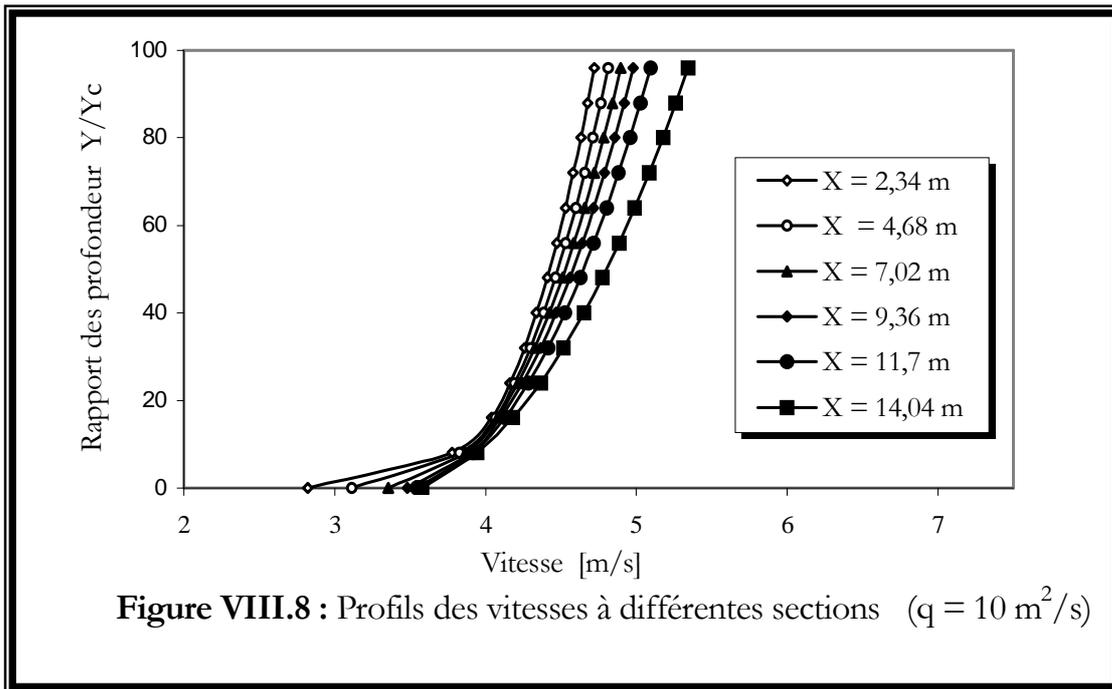
**Figure VIII.7 :** Influence de la pente du coursier sur l'apparition de l'aération de l'écoulement

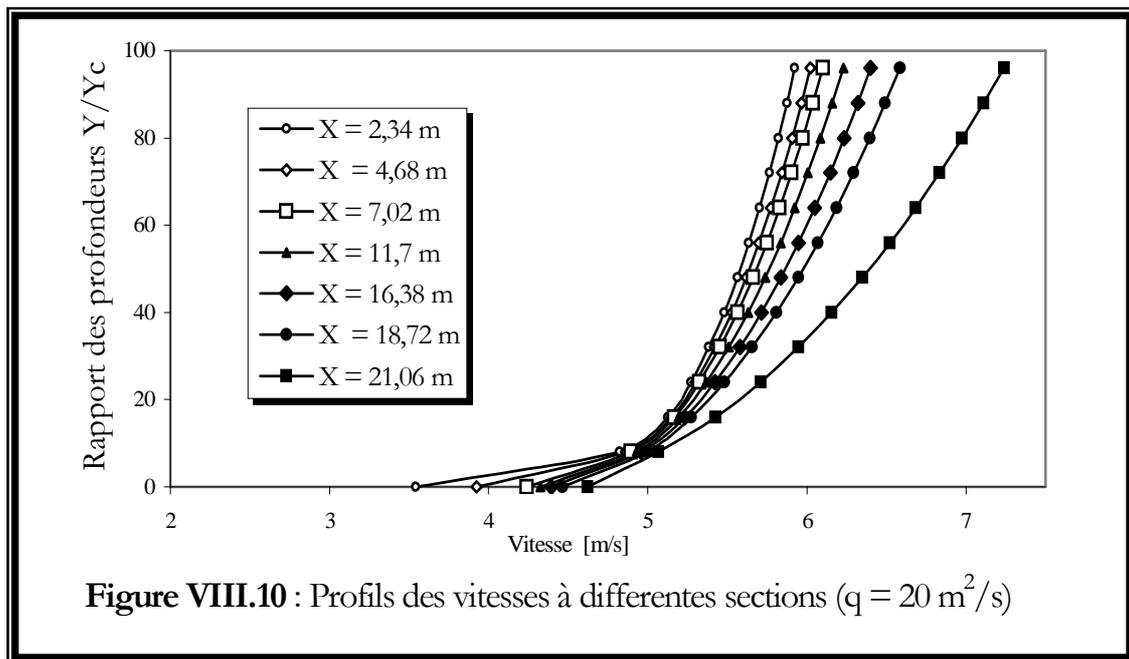
### 3°/ Profils des variables de l'écoulement

La recherche de l'effet des marches d'escalier sur le phénomène de l'aération naturelle de l'écoulement constitue l'objectif principal de notre travail. Pour y arriver, il a fallu calculer en chaque points du domaine discrétisé les valeurs des variables de l'écoulement introduites dans la modélisation mathématique, à savoir, la composante longitudinale de la vitesse d'écoulement  $U$ , l'énergie cinétique turbulente  $k$ , le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente  $\epsilon$  et la viscosité turbulente  $\mu_t$ . C'est ainsi que nous avons pensé visualiser la distribution de ces variables à travers l'espace du domaine d'étude en traçant leurs profils à différentes sections choisies le long du coursier.

#### a. Profils des vitesses de l'écoulement

Les figures VIII.8 ÷ VIII.10 reportent les profils de distribution de la vitesse de l'écoulement suivant l'épaisseur de la couche limite à différentes sections, calculés par le modèle, respectivement, pour les débits  $q = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $q = 15 \text{ m}^2/\text{s}$  et  $q = 20 \text{ m}^2/\text{s}$ . L'allure paraît rapide à proximité de la paroi, marquant un point d'inflexion à partir duquel elle devient de plus en plus lente et tendant asymptotiquement à la vitesse de l'écoulement libre  $U_1$  lorsque l'on s'éloigne du fond. Ceci est, bien évidemment, dû au fait que le domaine de l'écoulement modélisé est une couche limite caractérisée par des gradients de vitesses très élevés.





D'une manière plus précise, nous pouvons séparer les profils en deux régions distinctes :

- La première correspond approximativement à l'intervalle  $0 < \frac{Y}{Y_c} < 10 \%$ .
- La seconde correspond approximativement à l'intervalle  $10 \% < \frac{Y}{Y_c} < 100 \%$ .

Conformément au développement consacré à la décomposition de la couche limite dans le chapitre précédent, la première région correspond à la zone interne de la couche limite où l'effet moléculaire est prépondérant alors que la deuxième correspond à la zone externe de la couche limite où l'effet de la paroi tend à diminuer au fur et à mesure que l'on se rapproche de la limite de l'écoulement libre.

Notons aussi, que les vitesses au niveau de l'axe des abscisses ne sont pas nulles étant donné que la référence considérée est la pseudo-base liant les bords extrêmes des marches et à travers laquelle nous enregistrons un mouvement. Les vitesses s'accroissent sensiblement avec l'augmentation du débit de l'écoulement et s'accroissent de plus en plus que l'on se dirige vers l'aval.

#### **b. Profils de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente**

Sur les figures VIII.11 ÷ VIII.13 sont tracés les profils de distribution de l'énergie cinétique turbulente, respectivement, pour les débits :  $q = 10 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $q = 15 \text{ m}^2/\text{s}$  et  $q = 20 \text{ m}^2/\text{s}$ . De même, les figures VIII.14 ÷ VIII.16 présentent les profils de

distribution du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente pour les mêmes débits respectifs.

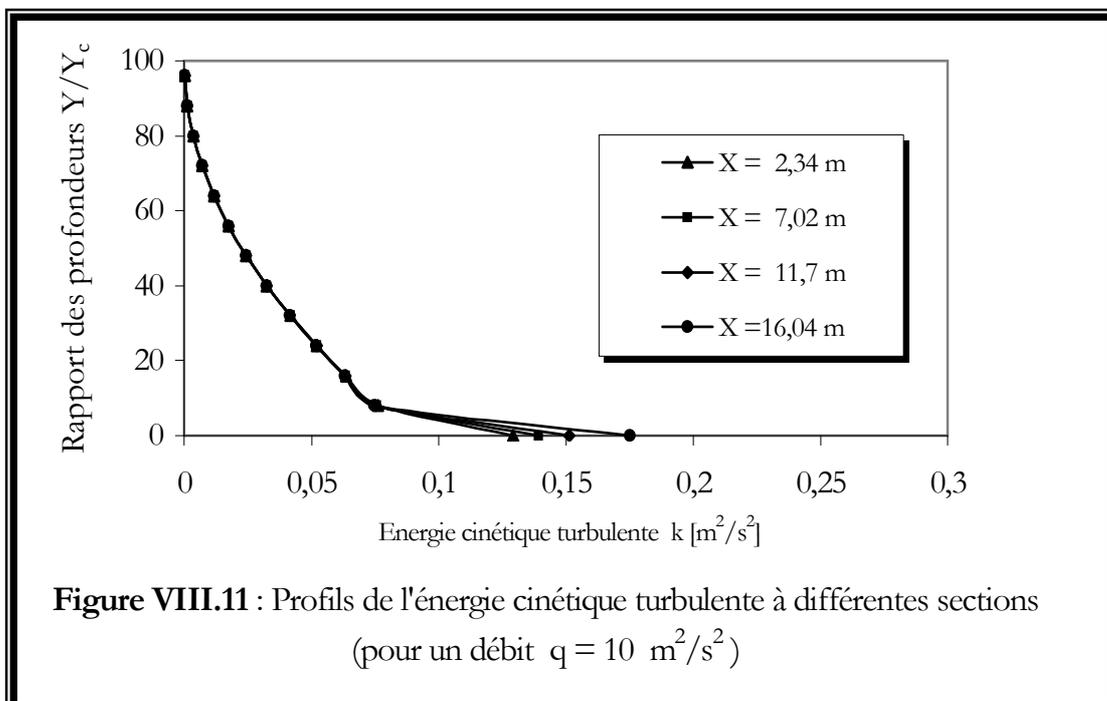
Ne disposant pas de mesures expérimentales comparables, nous proposons comme première analyse de commenter brièvement la distribution des différentes variables.

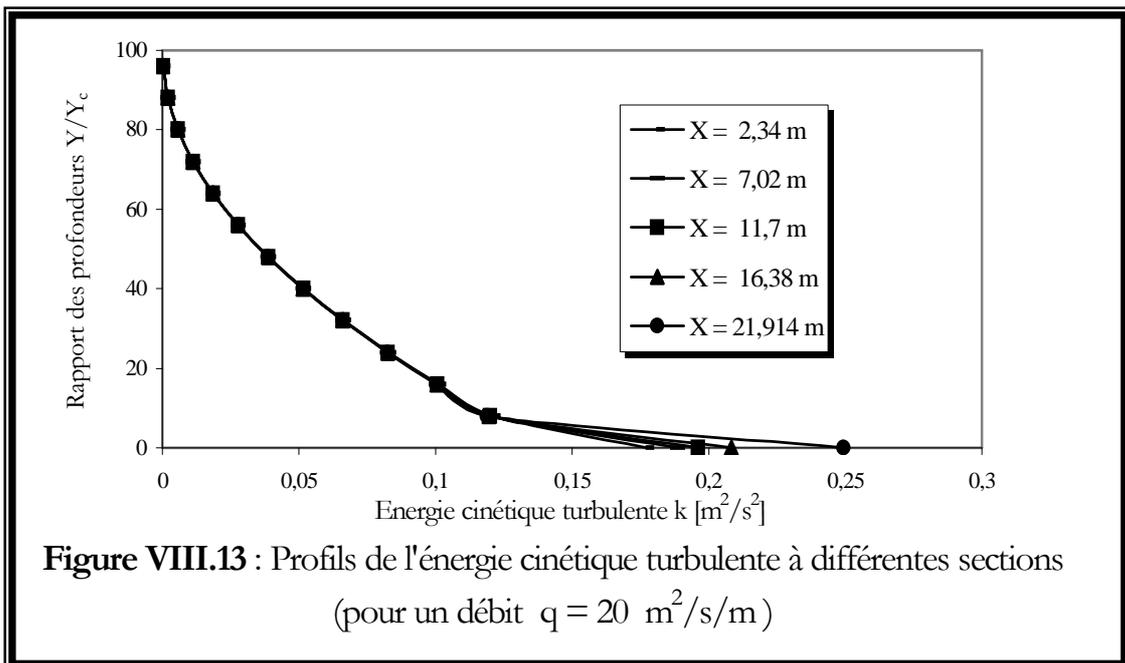
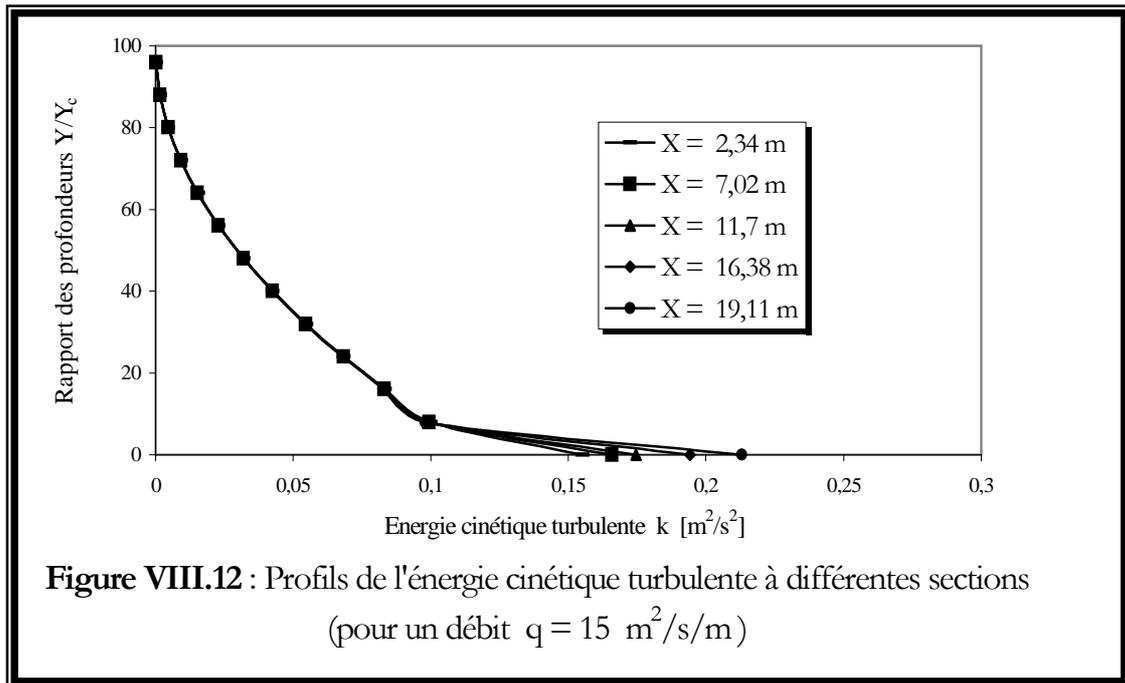
Il y a lieu de relever, d'abord, que les allures générales des profils de distribution de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente suivant l'épaisseur de la couche limite sont similaires mais inversement proportionnelles à la distribution des vitesses présentés plus haut.

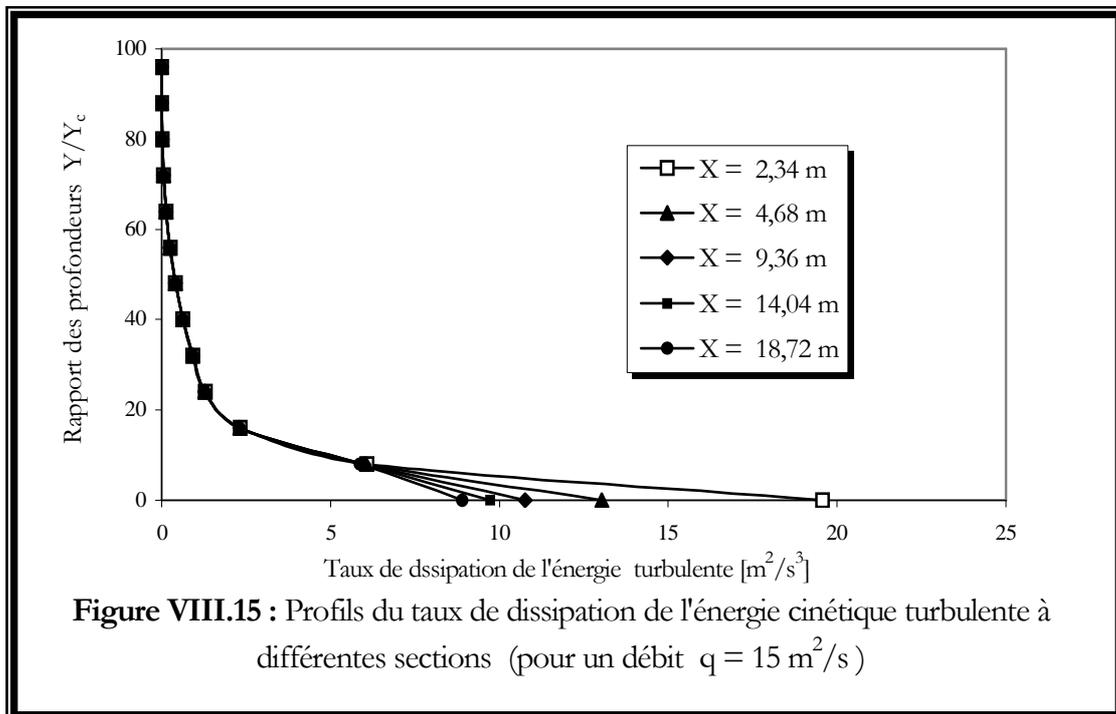
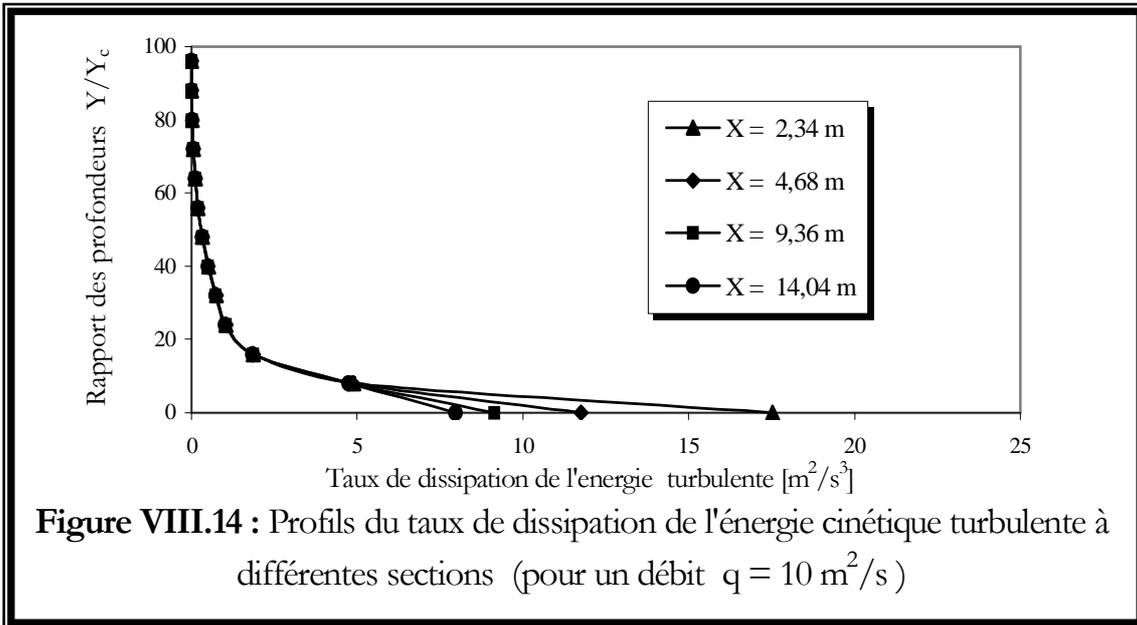
En fait, des valeurs maximales sont enregistrées au niveau de la pseudo-base à partir desquelles, les allures diminuent très rapidement jusqu'à certaines hauteurs de l'ordre de 8 à 10 % de  $Y/Y_C$  pour l'énergie turbulente et de l'ordre de 18 à 22 % de  $Y/Y_C$  pour la dissipation de l'énergie turbulente. Par la suite, la variation devient de plus en plus lente tendant à s'annuler progressivement en se rapprochant de la limite de l'écoulement libre.

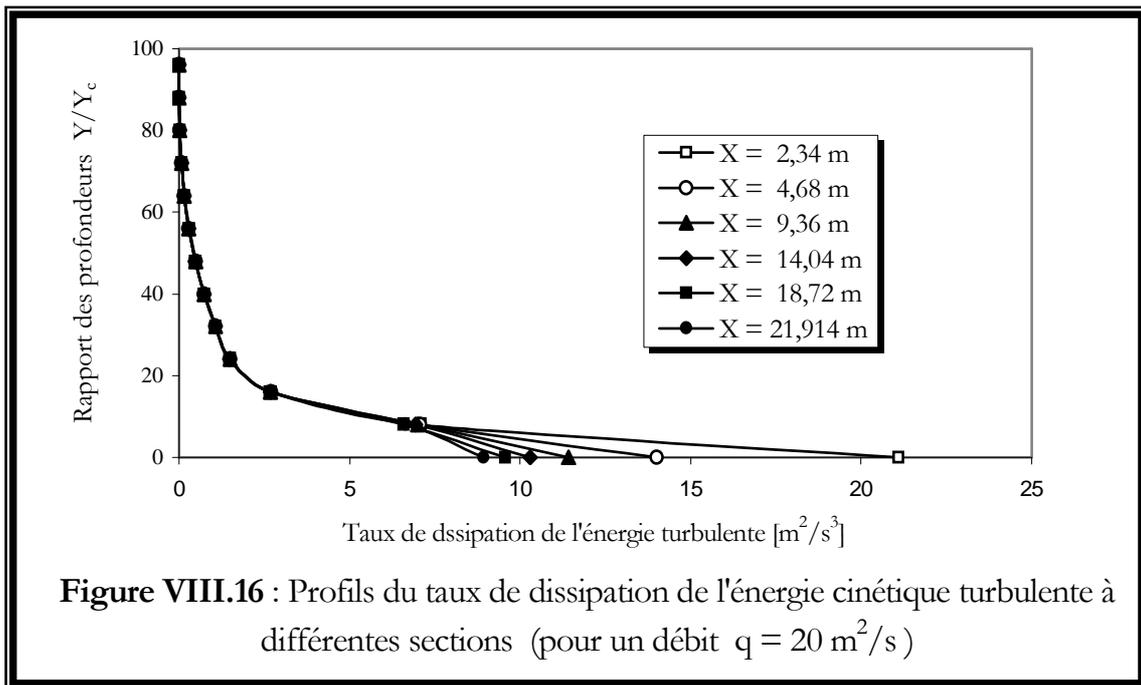
Bien que les profils semblent être confondus à partir d'une certaine hauteur, dans la zone près de la paroi, nous observons que l'énergie cinétique turbulente augmente d'une section à l'autre en allant dans le sens de l'écoulement, alors que nous enregistrons un effet inverse s'agissant de la dissipation de l'énergie turbulente.

Enfin, la comparaison des différentes figures tracées, met en évidence la variation des deux grandeurs dans le sens de la variation du débit de l'écoulement.



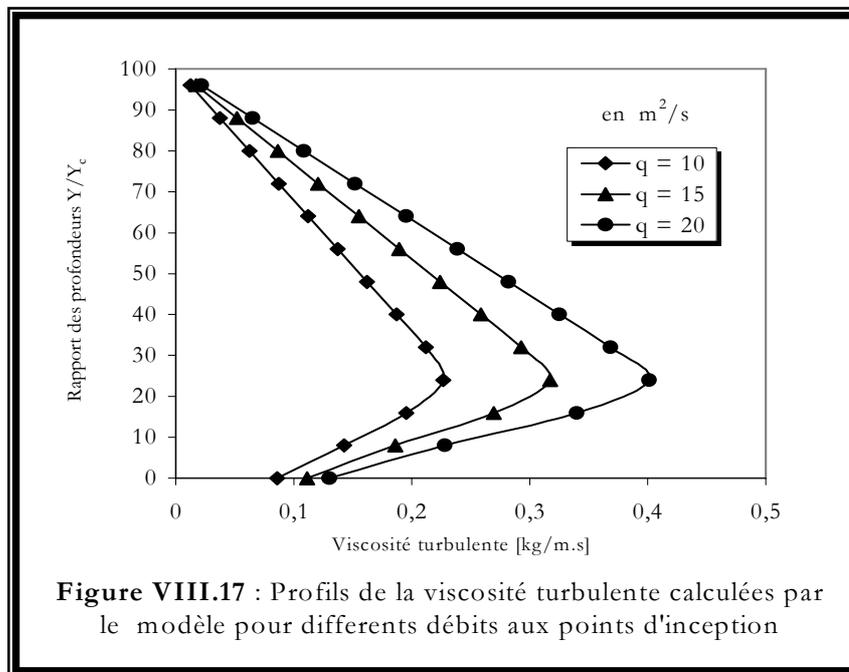






**c. Profils de la viscosité turbulente**

Sur la figure VIII.17, nous présentons les profils de distribution de la viscosité turbulente en fonction de la profondeur, enregistrés au niveau des sections des points d'inception de différents débits, à savoir :  $q = 15 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $q = 20 \text{ m}^2/\text{s}$  et  $q = 30 \text{ m}^2/\text{s}$ .



Ne disposant, également pas, d'autres mesures qui puissent nous servir de référence pour la comparaison, nous allons tenter de commenter succinctement les résultats obtenus.

Les allures générales de distribution de la viscosité turbulente selon les trois cas de débits, paraissent analogues. Les valeurs augmentent rapidement de la pseudo-base jusqu'à atteindre le maximum à proximité de 25 % de l'épaisseur de la couche limite, puis, elles diminuent linéairement avec une pente moins accentuée pour tendre à s'annuler, enfin, à la limite de l'écoulement libre.

Un examen attentif de la distribution conduit à relever que pour tous les débits, la valeur maximale de la viscosité turbulente est enregistrée approximativement à la partie basse de la couche externe où l'effet de la paroi est pratiquement atténué comparativement à la couche interne.

### **Conclusion**

La validité du modèle mathématique proposé associé aux deux schémas numériques implicite et explicite a été testée par des applications sur des cas de barrages déjà traités dans d'autres travaux. Les comparaisons entre les résultats obtenus, nous ont permis d'affirmer l'aptitude de notre modèle, basé sur les deux schémas, à simuler l'écoulement sur les évacuateurs à marches d'escaliers, contrairement, au cas des évacuateurs à profils lisses où le schéma explicite présente de flagrantes anomalies. D'où le choix du schéma numérique implicite.

Les écarts enregistrés entre les résultats calculés numériquement et les mesures expérimentales sont dus à de multiples raisons, citons entre autres, la précision des prélèvements sur les modèles physiques, l'accumulation des différentes erreurs numériques et également, les hypothèses considérées dans la modélisation mathématique. Parmi ces dernières, l'hypothèse de la répartition hydrostatique des pressions est faussée par le fait que le domaine de l'écoulement à traiter est soumis à des perturbations turbulentes (tensions supplémentaires).

Les expérimentations numériques conduites suite à l'opération de validation du modèle, ont fait ressortir qu'en outre de l'effet positif qu'ils offrent par rapport à la dissipation d'énergie, mis en évidence par de nombreux chercheurs, les évacuateurs en marches d'escalier agissent également en faveur de l'apparition du phénomène de l'aération naturelle de l'écoulement. En fait, les marches qui constituent une forte rugosité font que la couche limite croit très rapidement pour atteindre la surface libre très tôt comparativement aux évacuateurs de crues à profils lisses.

## V. DETERMINATION DE LA CONCENTRATION MOYENNE D'AIR DANS LA REGION TRES TURBULENT GRADUELLEMENT VARIE AERE

Le code de calcul élaboré nous permet en premier lieu de calculer la position du point d'inception, d'étudier les caractéristiques de l'écoulement et de déterminer les profils de la concentration moyenne en air et de la vitesse dans la région d'écoulement graduellement varié aéré.

Afin d'assurer la validité du code concernant la détermination de la concentration d'air, nous l'avons utilisé en premier lieu sur l'évacuateur des crues lisse du barrage d'Aviemore en Nouvelle Zélande dont nous disposons des résultats expérimentaux de concentrations (*Cain*, 1978).

Nous avons ensuite appliqué le code sur le coursier d'évacuateurs de crue en marches d'escaliers du barrage de M'Bali.

### 1°/ Présentation du Coursier de l'évacuateur des crues du barrage d'Aviemore

Le coursier lisse du prototype de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore situé en Nouvelle Zélande est un canal rectangulaire large de pente raide et constante. Ces caractéristiques se résument comme suit :

- La Pente du coursier est de  $45^\circ$ ,
- La longueur du coursier est de 32m,
- La rugosité uniforme du canal est de 1 mm (Béton de moyenne qualité),
- Le coefficient de rugosité de Strickler est :  $K_s = 70$ .

Sur ce coursier, *Cain* en 1978, a effectué des mesures sur le phénomène d'entraînement d'air.

### 2°/ Etude de l'écoulement sur le coursier lisse de l'évacuateur de crue du barrage d'Aviemore

#### **a. Evaluation de la concentration moyenne en air et de la hauteur de l'eau pure**

Le processus de calcul de la concentration moyenne en air ( $C_{moy}$ ) et de la hauteur d'eau pure ( $d$ ) exige des valeurs initiales de concentration moyenne en air et une hauteur d'eau prises au point d'inception pour un pas de discrétisation de  $\Delta x = 10^{-2}$ . Ces valeurs sont de :  $C_{moy}(x = 0) = 0$  et  $d(x = 0) = d_i$ .

La variation de la concentration moyenne en air et de la hauteur d'eau pure pour les débits unitaires :  $q = 2,16 \text{ m}^2/\text{s}$  ;  $2,34 \text{ m}^2/\text{s}$  et  $3,15 \text{ m}^2/\text{s}$  a été mise en évidence sur les figures VIII.18 à VIII.20 respectivement.

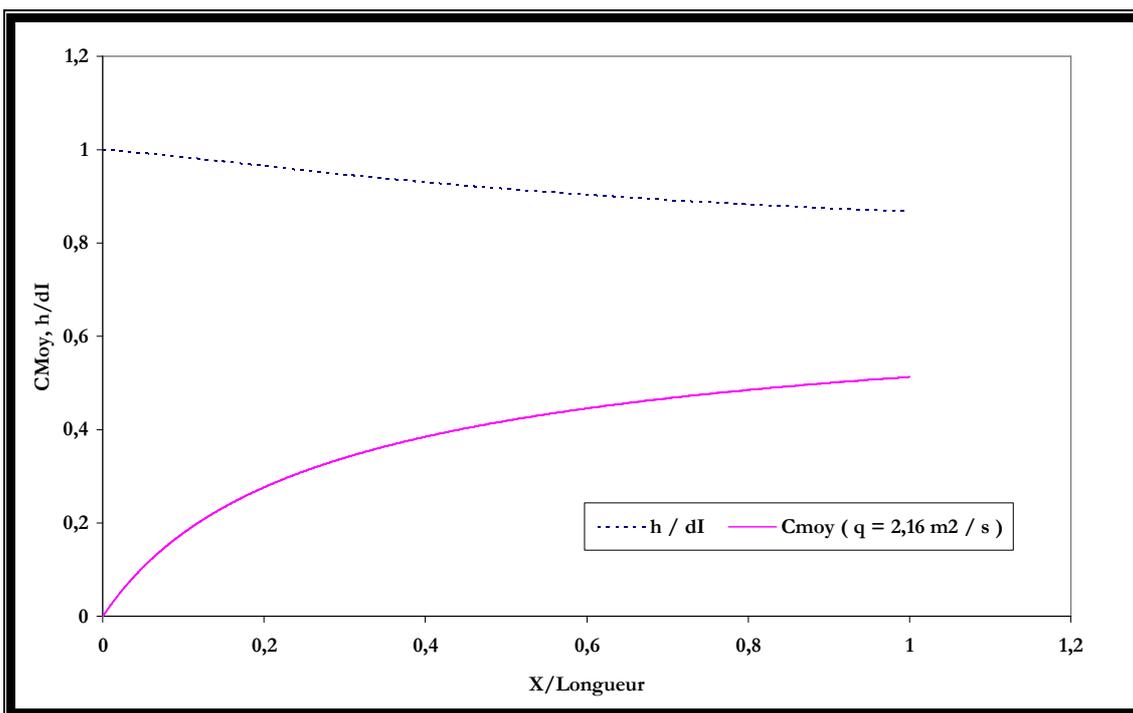


Figure VIII.18 : Profil de la concentration et de la ligne d'eau pour  $q = 2,16 \text{ m}^2/\text{s}$

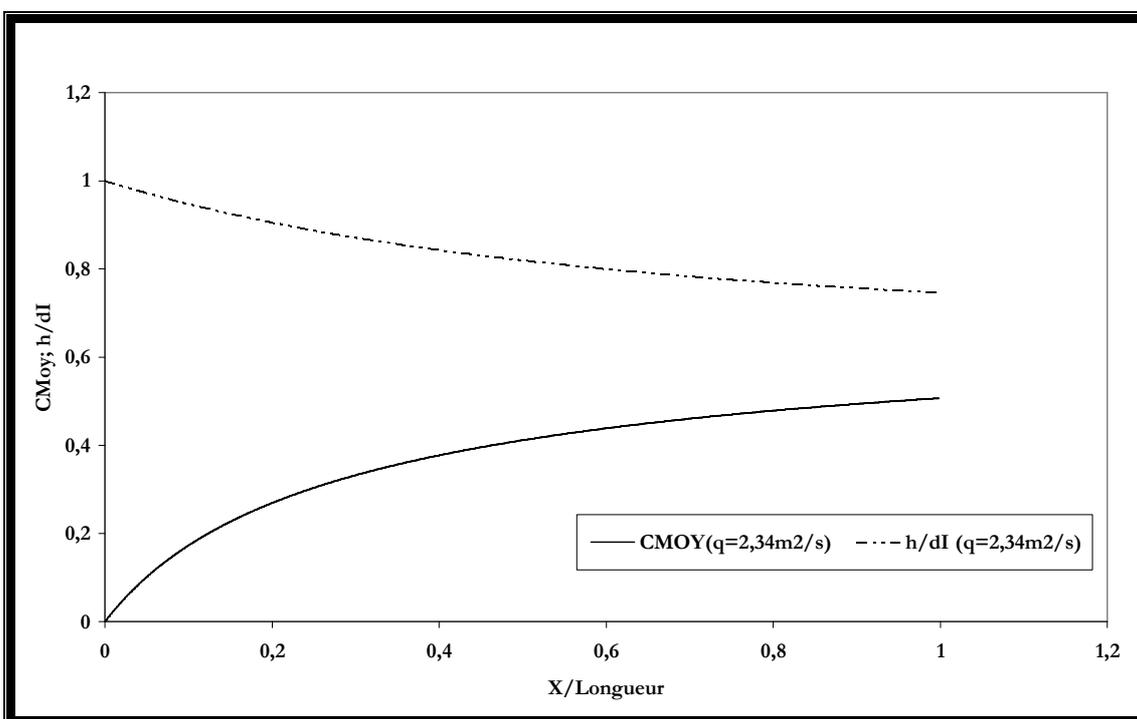


Figure VIII.19 : Profil de la concentration et de la ligne d'eau pour  $q = 2,34 \text{ m}^2/\text{s}$

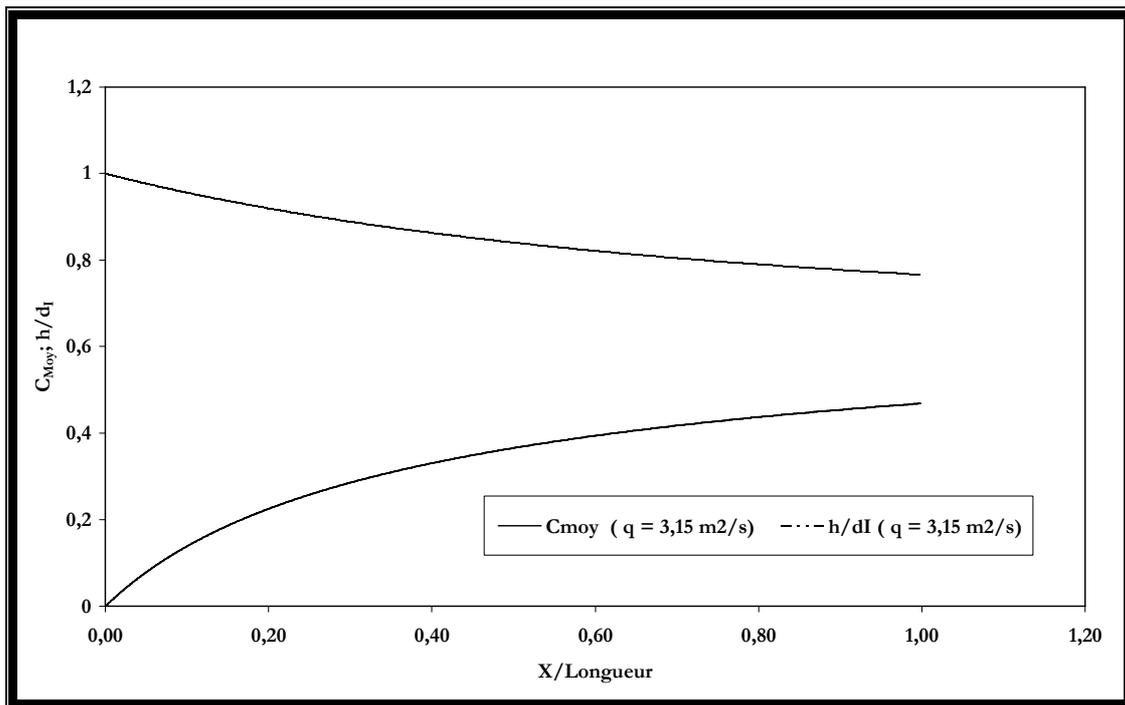


Figure VIII.20 : Profil de la concentration et de la ligne d'eau pour  $q = 3,15 \text{ m}^2/\text{s}$

Nous remarquons que :

- ◆ La quantité d'air entraînée varie plus lentement loin du point d'inception qu'à sa proximité. Ceci est tout à fait normal puisque plus loin le phénomène d'auto-aération tend à se stabiliser et à s'équilibrer pour atteindre la région d'écoulement uniforme.
- ◆ Pour les trois débits, la concentration uniforme n'est pas atteinte, ceci peut être expliqué par le fait que le coursier du barrage d'Aviemore n'est pas assez long (longueur de 32 m) pour qu'un régime uniforme s'installe.
- ◆ La croissance de la concentration moyenne en air est accompagnée par le rétrécissement de la ligne d'eau claire. Ce phénomène peut être lié à l'accélération de l'écoulement due à la chute d'altitude. Les deux courbes convergent vers la région d'écoulement uniforme.
- ◆ La ligne d'eau tend à atteindre le profil de concentration plus rapidement pour les faibles débits, du fait que pour ces derniers le point d'inception est plus proche de la crête ce qui permet au phénomène d'aération de commencer plutôt pour prendre par la suite de l'ampleur le long du coursier.

Sur la figure VIII.21, nous avons représenté les profils de concentration moyenne en air et de la hauteur d'eau pure ainsi que les points expérimentaux obtenus par Cain (1978) pour un débit  $q = 2,16 \text{ m}^2 / \text{s}$  sur le coursier du barrage d'Aviemore. Nous

voilà clairement la concordance entre les résultats numériques et expérimentaux, ce qui met en évidence la fiabilité et la validité du programme numérique élaboré.

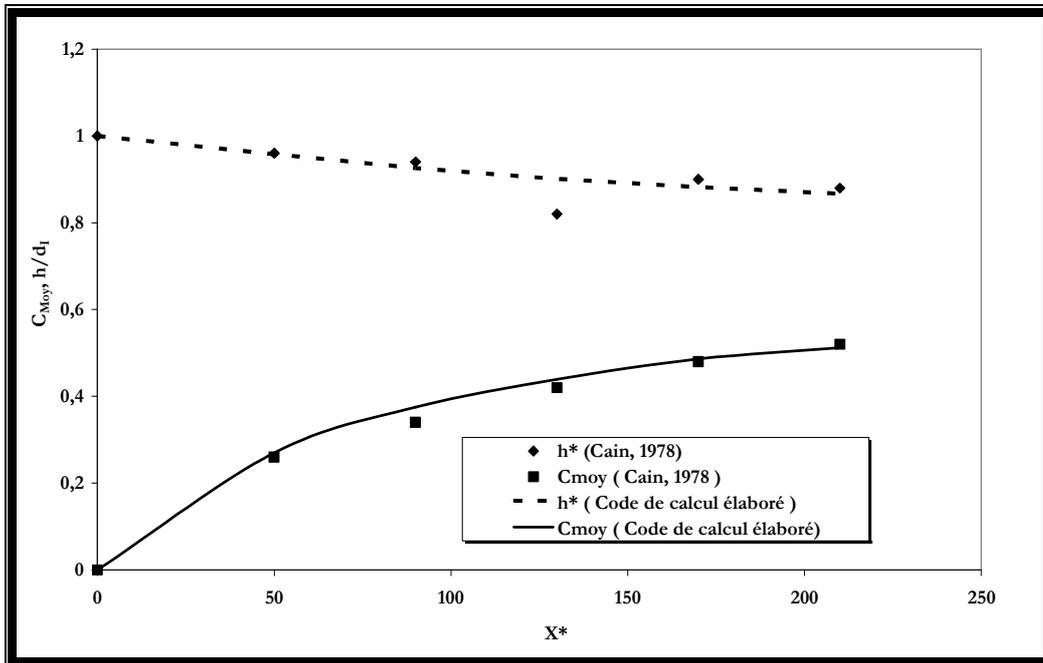


Figure VIII.21 : Profils de concentration moyenne en air et de la hauteur d'eau pure pour  $q = 2,16 \text{ m}^2/\text{s}$

### b. Profils de vitesse

Les mesures de vitesses de **Cain** (1978) sur l'évacuateur de crues lisse du barrage d'Aviemore pour des concentration moyenne en air de 0 à 50 % ont conduit **Cain** et **Wood** en 1981 à approximer la distribution adimensionnelle de la vitesse par :

$$\frac{U}{U_{90}} = \left( \frac{y}{y_{90}} \right)^{0,1584} \quad (\text{VIII-9})$$

Nous avons représenté pour trois débits et à différentes distances du coursier, les profils de vitesse sur les figures VIII.22 à VIII.24 pour un pas de discrétisation de  $\Delta x = 10^{-7}$  et regroupé sur la figure VIII.25 les différents profils.

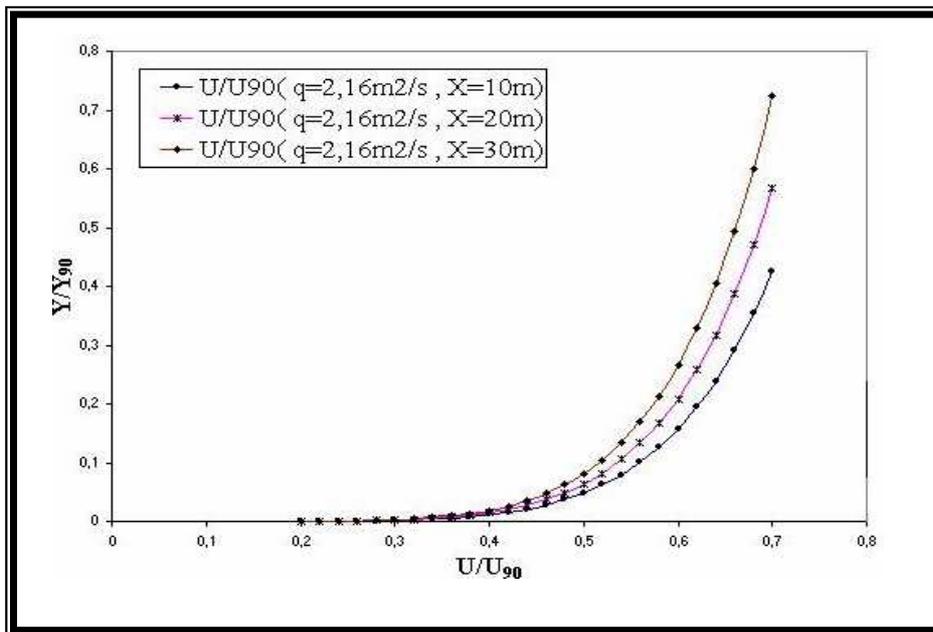


Figure VIII.22 : Profil de la vitesse à différentes sections pour  $q = 2,16\text{m}^2/\text{s}$

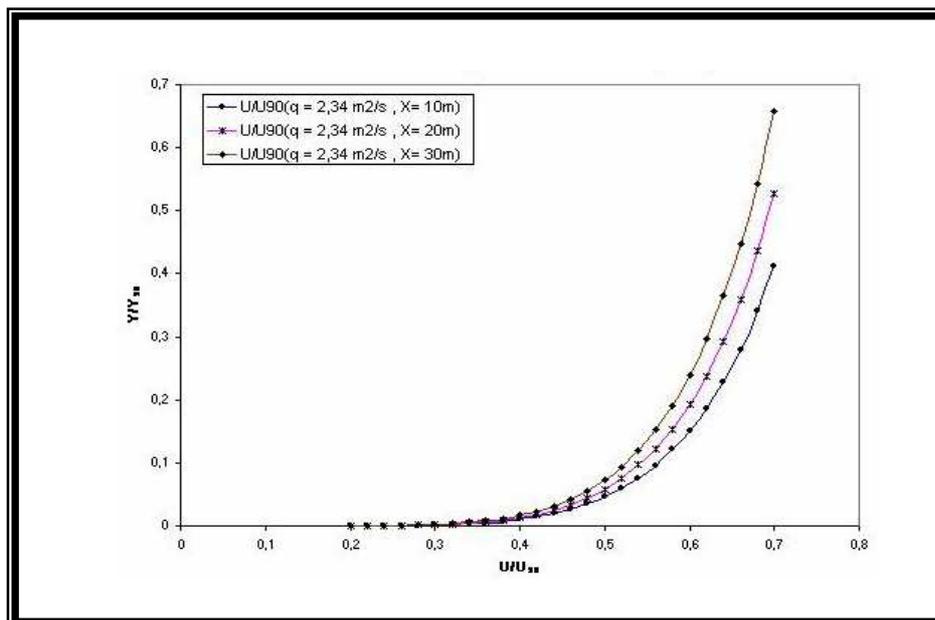


Figure VIII.23 : Profil de la vitesse à différentes sections pour  $q = 2,34\text{m}^2/\text{s}$

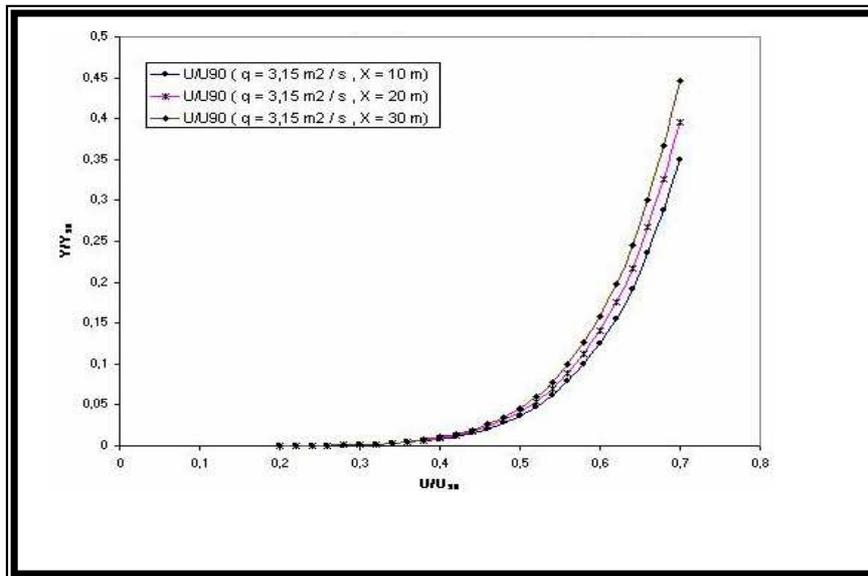


Figure VIII.24 : Profil de la vitesse à différentes sections pour  $q = 3,15 \text{ m}^2/\text{s}$

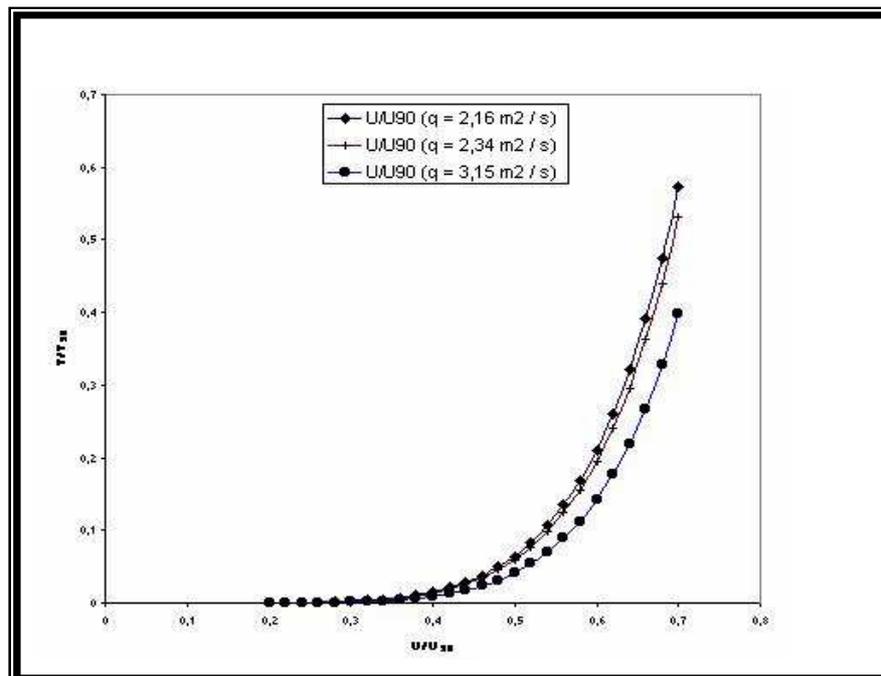


Figure VIII.25: Profils de la vitesse pour différents débits

Pour les trois débits, nous remarquons clairement que les distributions de vitesse suivent une loi puissance de la forme  $\left( \frac{U}{U_{90}} = \left( \frac{y}{y_{90}} \right)^{1/n} \right)$ , approché par un profil moyen donné par la relation adimensionnelle suivante :

$$\frac{U}{U_{90}} = 0,78 \left( \frac{y}{y_{90}} \right)^{0,152} \quad (\text{VIII-10})$$

Ce profil est comparé sur la figure VIII.26 à celui obtenu par **Cain et Wood** (1981).

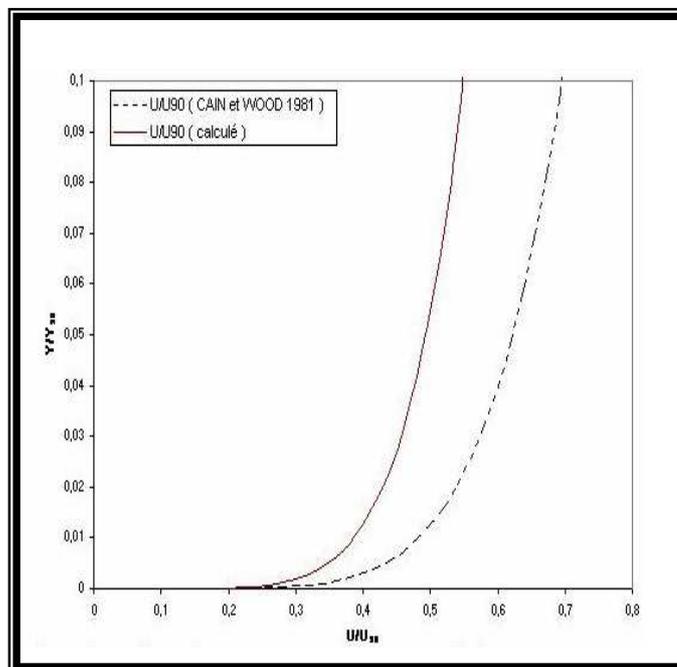


Figure VIII.26 : Comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux de Cain et Wood

### 3°/ Etude de l'écoulement sur le coursier en marches d'escalier de l'évacuateur de crue du barrage de M'Bali

#### a. Evaluation de la concentration moyenne en air ( $C_{moy}$ ) et de la hauteur de l'eau pure

En prenant les mêmes conditions initiales pour la concentration moyenne en air et la hauteur d'eau pure que celles prises pour le coursier lisse d'Aviemoire, nous avons tracé sur les figures VIII.27 à VIII.29 la variation de la concentration moyenne en air et de la hauteur de l'eau pure pour les trois débits :  $q = 6\text{m}^2/\text{s}$ ,  $9\text{m}^2/\text{s}$  et  $11\text{m}^2/\text{s}$ .

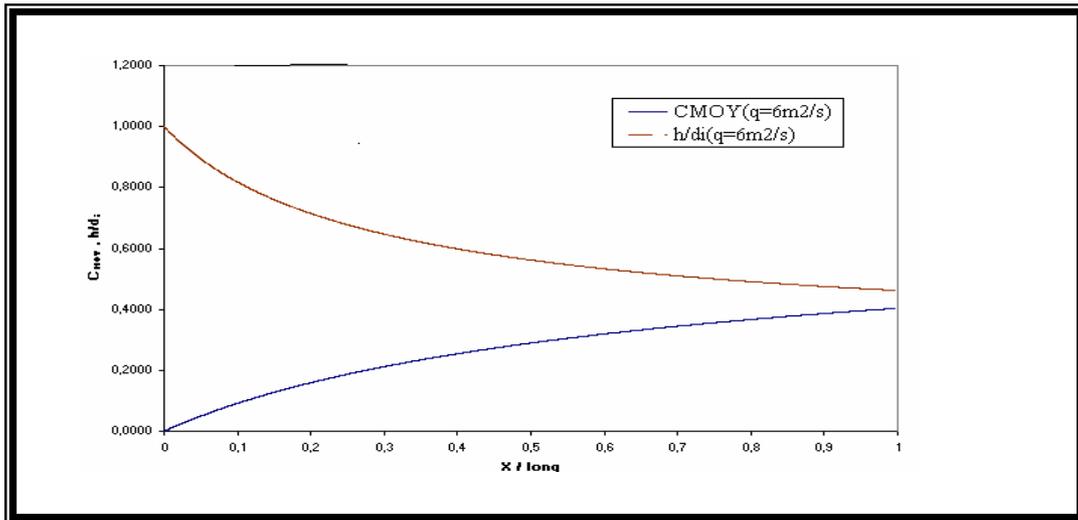


Figure VIII.27 : Profil de la concentration et de la ligne d'eau pour  $q = 6\text{m}^2/\text{s}$

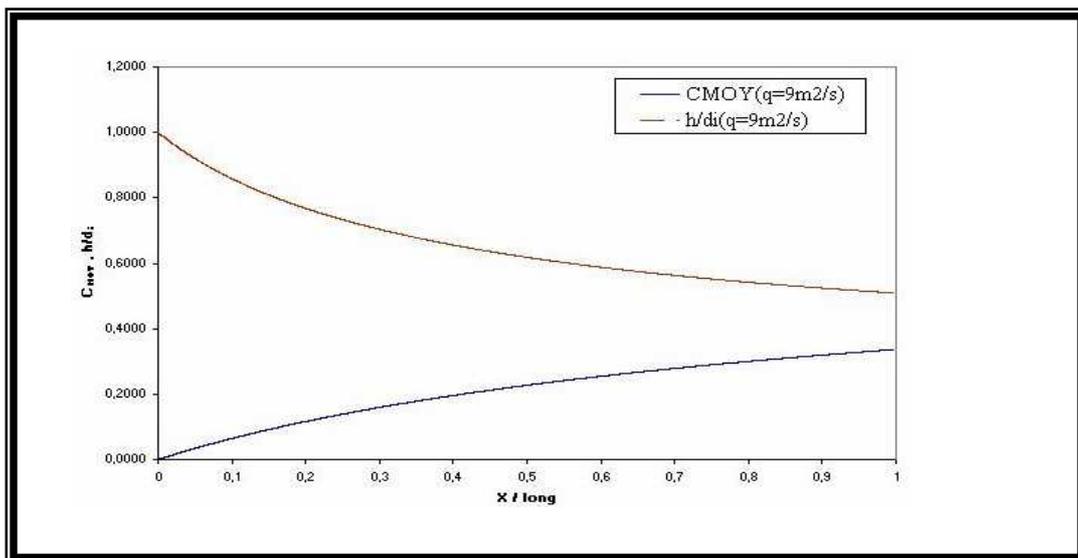


Figure VIII.28 : Profil de la concentration et de la ligne d'eau pour  $q = 9\text{m}^2/\text{s}$

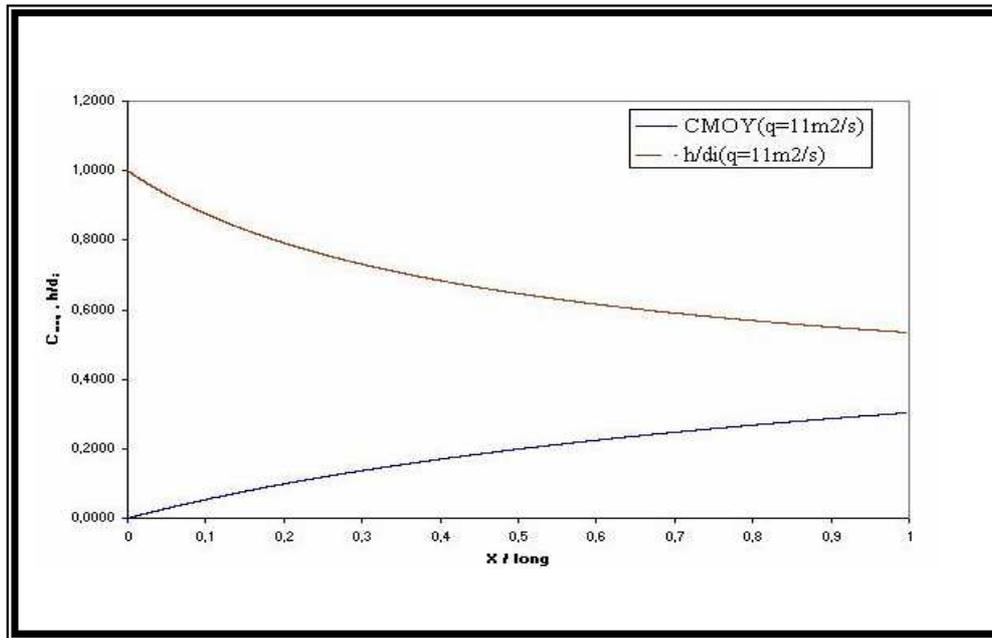


Figure VIII.29 : Profil de la concentration et de la ligne d'eau pour  $q = 11 \text{ m}^2/\text{s}$

Des constatations semblables à celles du coursier lisse sont tirées :

- ◆ L'augmentation de la concentration moyenne en air est accompagnée par la diminution de la hauteur d'eau pure,
- ◆ La variation de la concentration moyenne en air est plus rapide à proximité du point d'inception pour s'équilibrer en s'approchant de la région d'écoulement uniforme,
- ◆ Pour les trois débits, la concentration uniforme n'est pas atteinte, par le fait que la longueur du coursier du barrage de M'Bali ne le permet pas (longueur égale à 37 m).

#### b. Profils de vitesse

La variation de la vitesse le long du coursier en marches d'escalier de l'évacuateur de crues du barrage de M'Bali est présentée pour les débits unitaires  $q = 6 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $9 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $11 \text{ m}^2/\text{s}$ , sur les figures VIII.30 à VIII-32, respectivement.

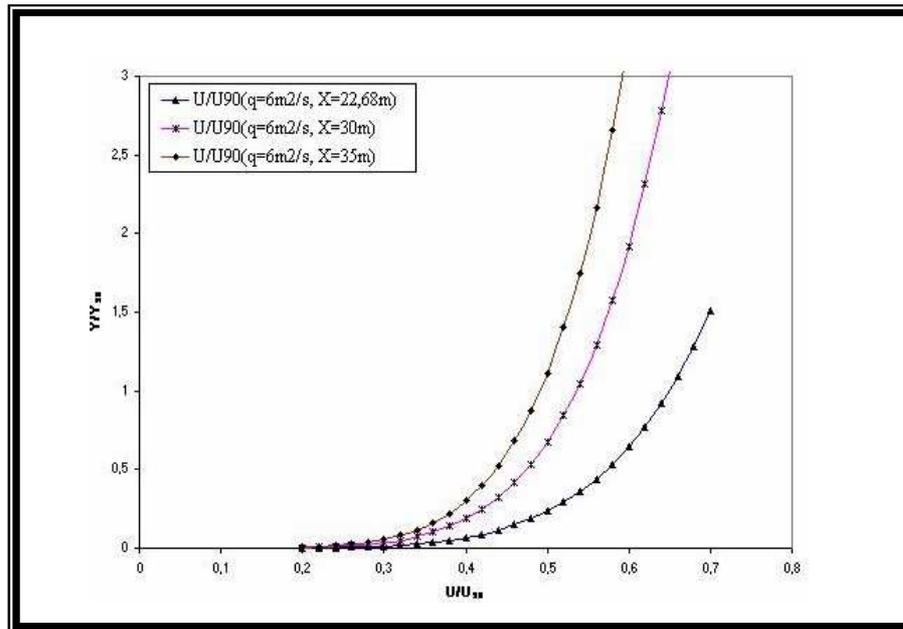


Figure VIII.30 : Profil de la vitesse à différentes sections pour  $q = 6\text{m}^2/\text{s}$

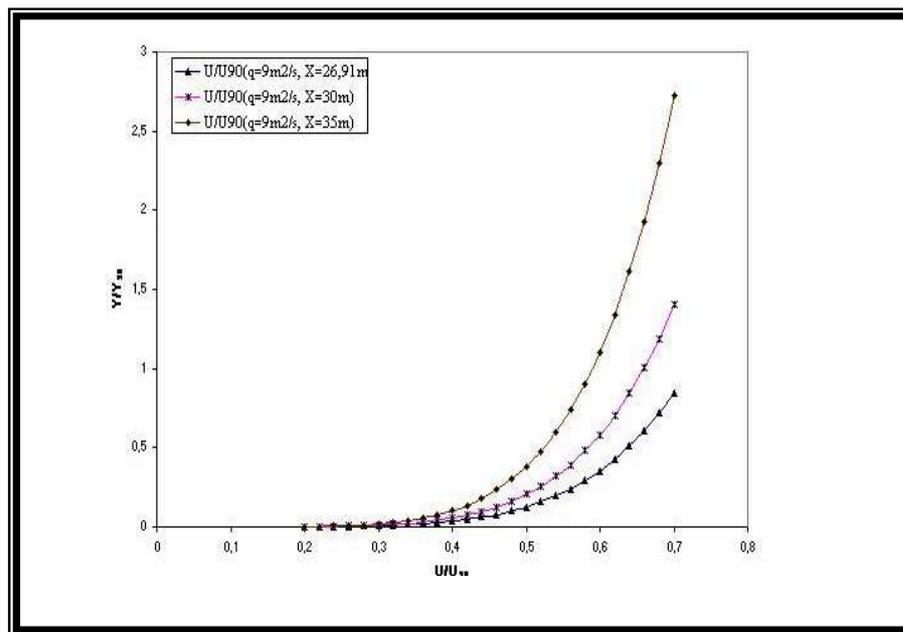


Figure VIII.31 : Profil de la vitesse à différentes sections pour  $q = 9\text{m}^2/\text{s}$

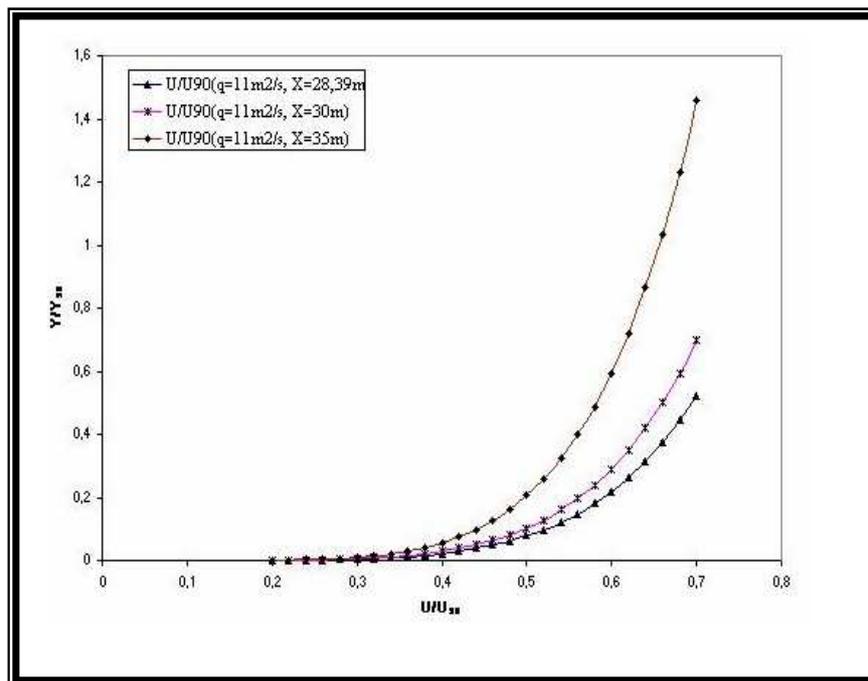


Figure VIII.32 : Profil de la vitesse à différentes sections pour  $q = 11 \text{ m}^2/\text{s}$

Nous avons fait les constatations suivantes :

- ◆ L'application de la loi universelle de vitesse (fonction de paroi) sur une faible distance de la paroi nous a donné des vitesses négatives ( $y = 0 - 0,01 \text{ m}$ ). Elles sont provoquées par la présence de rouleaux de recirculation dans cette zone.
- ◆ Le profil de vitesse pour les différentes applications suit toujours une loi de puissance qui peut être approchée par la relation adimensionnelle suivante :

$$\frac{U}{U_{90}} = 0,65 \left( \frac{y}{y_{90}} \right)^{0,172}$$

#### 4°/ Comparaison entre le coursier lisse et le coursier en marches d'escaliers

La comparaison entre les résultats des applications sur le coursier lisse d'Aviemore et le coursier en marches d'escalier de M'Bali, nous a conduit aux constatations suivantes :

- La variation de la concentration moyenne en air et celle de la hauteur d'eau pure sont les mêmes pour le coursier lisse et le coursier en marches d'escaliers. Dans les deux cas, l'augmentation de la concentration moyenne en air est accompagnée par une diminution de la hauteur d'eau pure et les deux courbes convergent vers la région d'écoulement uniforme.
- La comparaison entre la variation de la vitesse sur un coursier lisse et un coursier en marches d'escalier montre clairement que les deux profils suivent

une loi puissance de type :  $\frac{U}{U_{90}} = a \left( \frac{y}{y_{90}} \right)^{1/N}$  et que la différence entre les deux cas réside dans la valeur de l'exposant N de la loi de vitesse qui est plus petit pour un évacuateur en marches d'escalier et dans la valeur de la constante numérique a.

### Conclusion

Les deux applications sur le coursier lisse de l'évacuateur de crues du barrage d'Aviemore et sur le coursier en marches d'escalier de l'évacuateur de crues du barrage de M'Bali, conduisent aux conclusions suivantes :

- L'augmentation du débit engendre l'éloignement du point d'inception et donc le retard que prend le phénomène de l'entraînement d'air pour se produire.
- La présence des marches favorise l'installation plus rapide du phénomène d'entraînement d'air et du gonflement plus apparent de l'écoulement.
- Le phénomène d'auto-aération tend à se stabiliser pour atteindre la région d'écoulement uniforme aéré où la concentration moyenne en air et la hauteur d'eau pure atteignent leurs valeurs uniformes,  $C_n$  et  $h_n$  respectivement.
- La distribution de vitesse est de type puissance pour les deux cas tel que :

– Pour le coursier lisse :  $\frac{U}{U_{90}} = 0,78 \left( \frac{y}{y_{90}} \right)^{0,152}$  ,

– Pour le coursier en marches d'escalier :  $\frac{U}{U_{90}} = 0,65 \left( \frac{y}{y_{90}} \right)^{0,172}$

## Conclusion générale

Prenons maintenant un certain recul face au travail que nous venons d'exposer afin de tirer les conclusions essentielles.

De nombreuses études ont porté et portent encore sur les écoulements dans les canaux en marches d'escalier. Or si celles-ci continuent à se multiplier c'est que les phénomènes intervenant sont très complexes et qu'il reste un grand nombre de points mal décrits.

Ce modeste travail a eu donc comme objectif d'analyser les écoulements dans les canaux en marches d'escalier. Ce type de canal offre une prédissipation importante de l'énergie cinétique de l'écoulement sur les marches qui permet une réduction des dimensions du bassin de dissipation et de l'effet destructeur de cette eau.

Lors de nos essais expérimentaux, il en est ressorti qu'effectivement il existe différents régimes d'écoulement dans les canaux en marche d'escalier. L'écoulement en nappe a été caractérisé par des ressauts partiellement développés et pleinement développés. L'écoulement turbulent est caractérisé par un écoulement non aéré et aéré.

Nos observations et nos résultats expérimentaux nous ont permis de proposer des lois empiriques permettant d'étudier ces écoulements.

Le régime d'écoulement très turbulent apparaît pour un débit supérieur à la valeur critique déduite comme suit :  $\frac{d_c}{h} = - 0,53 \frac{h}{l} + 1,11$ .

Les écoulements en nappe avec ressaut hydraulique pleinement développé se produisent pour des débits plus faibles que celui correspondant à la valeur critique définie par :  $\frac{d_c}{h} = 0,12 \left( \frac{h}{l} \right)^{-1,12}$ .

L'analyse des points expérimentaux a permis de compléter les formules empiriques de détermination des caractéristiques du point d'apparition de l'eau blanche. Ces caractéristiques peuvent être déterminées respectivement par :

$$\frac{L_I}{k_s} = 9,52 F_r^{0,72} (\sin \alpha)^{0,08} \quad \text{et} \quad \frac{d_I}{k_s} = \frac{0,42}{\sin \alpha^{0,04}} F_r^{0,59}$$

Nous pouvons dire que l'écoulement en nappe dissipe plus d'énergie que l'écoulement très turbulent du fait de la présence des ressauts hydrauliques dans les écoulements en nappe. Les dimensions des marches influencent la nature de

l'écoulement. Dans le cas de l'écoulement en nappe, l'augmentation de la pente n'influe nullement sur le taux de dissipation. L'augmentation de la pente et du débit change la nature du phénomène hydraulique qu'est le ressaut hydraulique. L'augmentation du débit diminue le taux de dissipation.

L'apparition de l'écoulement extrêmement turbulent est fonction des dimensions des marches, des débits et des pentes.

Une étude expérimentale sur l'écoulement au-dessus d'éléments triangulaires fixés sur le fond du canal a été faite. Ce dernier est régi par l'équation :

$$Q = 1,84h_*^{5/3} \sqrt{2g} \sqrt{\text{tg}\alpha}$$

Un écoulement extrêmement turbulent sur un canal en marches d'escalier est illustré par trois zones, à savoir, la zone d'écoulement lisse, la zone d'écoulement graduellement varié et la zone d'écoulement uniforme aéré. Les deux premières zones sont départagées par le point d'inception qui apparaît lorsque la couche limite se développant à partir du seuil atteint la surface libre de l'écoulement.

L'écoulement extrêmement turbulent est régi par un système d'équations couplées, non linéaires et de type parabolique.

Un modèle numérique permettant de déterminer le point d'inception et la concentration d'air a été élaboré.

La validité du modèle mathématique proposé associé au schéma numérique a été testée par des applications sur des cas de barrages déjà traités dans d'autres travaux.

Le modèle numérique établi a satisfait nos critères déterminés comme fondamentaux au départ :

- Permet une réponse opérationnelle à la gestion du phénomène d'aération ;
- Adaptable à tout les canaux en marches d'escalier.

## Références Bibliographiques

- BaCaRa (1991). Etude de la dissipation d'énergie sur les évacuateurs à marches ». Rapport d'Essais, Projet National BaCaRa, CEMAGREF-SCP. Aix en Provence, octobre, 111pages.
- Bailly, C. & Comte-Bellot G. (2003). «Turbulence». CNRS Edition, 376 pages.
- Bakhmeteff, B.A. (1932). «Hydraulics of open channels». McGraw-Hill, New York, USA, 1<sup>st</sup> edition, 329 pages.
- Batchelor, G.K. (1953). «The theory of Homogenous Turbulence». Cambridge University Press, 195 pages
- Bayat, H. O. (1991). «Stepped spillway feasibility investigation». Proceeding 17th ICOLD Congress, Vienna, Austria, Q. 66, R. 98, pp. 1803-1817.
- Ben Chie Yen, (1973). «Open channel flow equation revisited». Journal Engineering Mechanic Division, volume 91, N°EM5, October, pp. 979-1009.
- Benmamar, S.** & Dartus, D. & Kettab, A. & Thirriot, C. (1995). «Etude de l'écoulement dans des conduites à motifs périodiques». Actes du 5<sup>ème</sup> Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur, Rabat, Maroc, du 21 au 23 novembre, pp. 517- 522.
- Benmamar, S.** & Kettab, A. (1994). « Développement de l'équation de la couche limite dans un écoulement turbulent ». Premier séminaire national sur l'hydraulique, Biskra Novembre 1994, pp. .
- Benmamar, S.** & Kettab, A. & Thirriot, C. (1996). «Etude expérimentale des écoulements à surface libre dans des conduits à géométrie périodique ». Deuxième séminaire national sur l'hydraulique, Biskra, 2-3 décembre, volume 2, pp. .
- Benmamar, S.** & N. Smakghi, (1998). « Approche numérique du calcul du point d'inception dans les canaux à motifs périodiques ». Annales Magrébines de l'ingénieur, volume 12, Tome 2 : Actes 6<sup>ème</sup> colloque maghrébin sur les modèles numériques de l'ingénieur, Tunis 24-26 Novembre, pp. 579-579.
- Benmamar, S.** & Kettab, A. & Thirriot, C. (2003). «Numerical Simulation of turbulent flow an upstream of the inception point in stepped channel». XXX IAHR Congress, 24-29 August, Thessaloniki, Greece.
- Benmamar, S.** & Smakghi, N. & Kettab, A. (2004). «Approche numérique du calcul du point d'inception dans les canaux en marche d'escalier ». La Houille Blanche, Revue Internationale de l'Eau, N°1, pp. 83-87.
- Bindo, M. & Gautier, J. & Lacroix, F. (1993). « The Stepped Spillway of M'Bali Dam». International Water Power and Dam Construction, volume 45, N°1, pp. 35-36.

- Boumahrat, M. & A. Gourdin, (1989). «Méthodes numériques appliquées». Edition Tec et Doc , Paris, France, 440 pages.
- Bradshaw, P. & Ferris, D.H. & Atwell, N. P. (1967). «Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation». *Journal Fluid Mechanic*, volume 28, part 3 : pp. 593-616.
- Cain, P. & Wood, I. R. (1981). «Measurements of Self-Aerated Flow on a Spillway». *Journal of Hydraulic Division, ASCE*, 107, HY11, pp. 1425-1444.
- Carlier, M. (1986). «Hydraulique générale et appliquée». Edition Eyrolles, Paris, France, 565 pages.
- Chamani, M. R. & Rajaratnam, N. (1994). «Jet flow on stepped spillways». *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, volume 120, N° 2, February, pp.254-259.
- Chamani, M. R. & Rajaratnam, N. (1999). «Characteristics of skimming flow over stepped spillways». *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, volume 125, N°4, pp. 361-368.
- Chamani, M. R. & Rajaratnam, N. (1999). «Onset of skimming flow on stepped spillways». *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, volume 125, N°9, pp. .
- Chanson, H. (1988). «A study of air entrainment and aeration devices on a spillway model». Thèse P.H.D, ref. 88-8 Department of Civil Engineering, University of Canterbury, New Zealand.
- Chanson, H. (1989). «Study of air entrainment and aeration devices». *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, volume 27, N°3, pp. 301-319.
- Chanson, H. (1989). «Etude des phénomènes d'entraînement d'air, application aux évacuateurs de crues». *Journal La Houille Blanche*, volume 44, N°6, pp. 441-462.
- Chanson, H. (1992). «Air entraînement in chutes and spillways ». Research report N°CE 133, Department of Civil Engineering, University of Queensland, Australia, February, 85 pages.
- Chanson, H. (1992). «Reduction of Cavitations on Spillway by induced Air Entrainment-Discussion. » *Canadian Journal of Civil Engineering*, volume 20, October, pp. 926-928.
- Chanson, H. (1992). «Entraînement d'air dans les écoulements à surface libre, application aux évacuateurs de crues de barrages». *La Houille Blanche*, N°4, pp 277-286.
- Chanson H. (1993a). «Self-Aerated Flows on Chutes and Spillways». *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, volume 119, N°2, pp. 220-243. Discussion: volume 120, N°6, pp. 778-782.
- Chanson, H. (1993b). «Velocity measurements within high velocity air - water jets». *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, volume 31, N°3.

- Chanson, H. (1993). «Stepped spillway flows and air entrainment». *Canadian Journal of Civil Engineering*, volume 20, N°3, pp. 422-435.
- Chanson, H. (1994). «Hydraulic Design of Stepped Cascades, Channels, Weirs and Spillways». Pergamon, Oxford, UK, Jan. 292 pages.
- Chanson, H. (1996). «Prediction of the transition nappe/skimming flow on a stepped channel». *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, volume 34, N° 3, pp. 421-429.
- Chanson, H. (1997). «Air Bubble Entrainment in Free-Surface Turbulent Shear Flows». Academic Press, London, UK, 401 pages.
- Chanson, H. (1998). «Le développement historique des cascades et fontaines en gradins». *Journal La Houille Blanche*, N°7/8, pp. 76-84.
- Chanson, H. (2000). «Forum article. Hydraulics of Stepped Spillways: Current Status». *Journal of Engineering, ASCE*, Volume 126, No. 9, pp. 636-637.
- Chanson, H. & Yasuda, Y. & Ohtsu, I. (2000). «Flow Resistance In Skimming Flow: A Critical Review». *International Workshop on Hydraulics of Stepped Spillways*, Zurich, H.E. Minor & W. H. Hager Editors, Balkema, Publication, pp. 95-102.
- Chanson, H. & Toombes, L. (2002). «Air- Water Flows down Stepped chutes: Turbulence and Flow Structures Observation». *International of Multiphase Flow*, volume 27, N°11, pp. 1737-1761.
- Chassaing, P. (2000). «Turbulence en mécanique des fluides : Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur». *Collection Polytechnic, CEPADUES-Edition*, 625 pages.
- Chen, C. L. (1990). «Unified Theory on Power Laws for Flow Resistance». *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, volume 117, N°3, Mars, pp. 371-389.
- Chien, K.Y. (1982). «Predictions of channel and boundary – layer flows with a low–Reynolds– number model ». *A.I.A.A. Journal*, volume 20, N°1, pp. 33-38.
- Christodoulou, G. C. (1993). «Energy dissipation on stepped spillways». *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, volume 119, N°5, May, pp. 644-650.
- Comte-Bellot G. & Corrsin S. (1966). «The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence». *Journal of Fluid Mechanic*, volume 25, part 4, pp. 657-682.
- Cousteix, J. (1989). «Turbulence et couche limite - Aérodynamique». Edition CEPADUES, Toulouse, 627 pages.
- Dean, R.B. (1978). «Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two dimensional rectangular duct flow». *ASME, Journal of Fluids Engineering*, volume 100, pp. 215-223.

- Degoutte, G. & Peyras, L. & Royet, P. (1992). «Skimming flow in stepped spillways». Discussions. Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, volume 118, N°1, pp. 111-114.
- Dender, G. & Manson, R. & Ervine, D. A. (1993). «Application of two-equation turbulence models to flows in two-stage-channels». Proceeding of the 5<sup>th</sup> international symposium of renified flow modelling and turbulence measurements, Paris, 7<sup>th</sup>- 10<sup>th</sup> September.
- Diez-Cascon, J. & Blanco, J. L. & Revilla, J. & Garcia, R. (1991). «Studies on the hydraulic behaviour of stepped spillways». Water Power & Dam Construction, volume 43, N°9, September, pp. 22-26.
- Djaroud, M. & Remini, B. & **Benmamar, S.** (2001). «Etude Numérique des écoulements turbulents dans les évacuateurs de crues en marches d'escalier » Mémoire de magistère, Ecole Nationale Supérieure de Hydraulique, Blida, Algérie, 107 pages.
- Djaroud, M. & **Benmamar, S.** & Remini, B. (2002). «Localisation du début d'aération naturelle dans les canaux en marches d'escalier par la modélisation numérique». 2<sup>ème</sup> Colloque Méditerranéen sur l'Eau et l'Environnement, 8-9 octobre, Alger, Algérie, pp. 186-197.
- Elena, M. (1975). «Etude des structures dynamiques et thermiques d'un écoulement turbulent en conduite avec aspiration à la paroi.» Thèse de docteur Es. Sciences physique, Université Aix Marseille II, juillet.
- Ervin, D. A. & Baird, J. I. (1982). «Rating curves for rivers with overbankflow». Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, Institute of Civil Engineers, pp. 465-472.
- Essery, I.T.S. & Horner, M.W. (1978). «The hydraulic design of stepped spillways». CIRIA Report N°33, 2nd Edition, London, U.K.
- Euvrard, D. (1988). «Résolution numérique des équations aux dérivées partielles ; Différences finies -Eléments finis ». Edition Masson, 344pages.
- Euvrard, D. (1994). «Résolution numérique des équations aux dérivées partielles ». Edition Masson, 326 pages.
- Favre, A. & Kovasznay, L.S.G. & Dumas, R. & Gaviglio, J. & Coantic, M. (1976). «Turbulence en mécanique des fluides» Paris : Gauthier Villard, 411pages.
- Fletcher, C. A. J. (1991). «Computational techniques for fluid dynamics». Volume 1, Springer Verlag, second edition, 401pages.
- Fletcher, C. A. J. (1991). «Computational techniques for fluid dynamics». Volume 2, Springer Verlag, second édition, 493 pages.
- Gafsi, M. & **Benmamar, S.** (1998). «Etude expérimentale des écoulements dans les canaux à motifs périodiques». Thèse de magistère, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie, 120 pages.

- Garg, V. K. & Magi, P. K. (1988). «Laminar flow and heat transfer in a periodically converging-diverging channel». *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, volume 8, pp. 579-597.
- Gosse, J. & Schiestel, R. (1978). «Thermal convection in the wavy tubes of a heat exchanger». *International Chemical Engineering*, volume 18, N°1, pp. .
- Goubet, A. (1992). «Evacuateurs de crues en marches d'escaliers». *Journal La Houille Blanche*, N° 2/3, pp. 159-162. Discussion : N° 2/3, pp. 247-248.
- Graf, W. H. (1993). «Hydraulique fluviale : Ecoulement permanent uniforme et non uniforme ». *Traité de Génie civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne*, volume 16, tome 1, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 259 pages.
- Graf, W. H. & Altinakar, M.S. (1995), «Hydrodynamique». *Traité de Génie civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne*, volume 14, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 481 pages.
- Graham, L. J. W. & Bremhorst, K. (1993). «Application of the k- $\epsilon$  turbulence model to the simulation of a fully pulsed free air jet». *Journal of Fluids Engineering*, volume 115, march, pp. 70-74.
- Hager, W. H. (1991). «Uniform aerated chute flow». *Journal of Hydraulic Engineering*, volume 117, N°4, pp. 528-533.
- Hager, W. H. (1992). «Spillways, shockwaves and air entrainment, review and recommendations». *ICOLD bulletin*, N° 81, 117 pages.
- Halbron, G. (1952). «Etude de la mise en Régime des Ecoulements sur les Ouvrages à Forte pente. Applications au problème d'Entraînement d'Air. ». *Study of the Setting up of the Flow Regime on High Gradient Structure. Application to Air Entrainment Problem.*” *Journal La Houille Blanche*, N° 1, pp 21-40; N°3, pp 347-371; N°5, pp. 702-722 (in French).
- Halbron, G. & Durand, R. & Cohen de Lara, G., (1953). «Air Entrainment in Steeply Sloping Flumes». *Proceeding 5<sup>th</sup> IAHR Congress, IAHR-ASCE, Minneapolis, USA*, pp. 455-466.
- Ha Minh, H. (1989). «Une démarche de modélisation de la turbulence dans les moteurs d'aviation». *Rapport final DRET*.
- Hanjalic, K. & Launder, B.E. (1972). «A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flow ». *Journal of fluid Mechanic*, volume 52, part 4, pp. 609-638.
- Hanjalic, K. & Launder, B.E. (1976). «Contribution towards a Reynolds stress closure for low Reynolds number turbulence». *Journal of fluid Mechanic*, volume 74, part 4, pp. 593- 610.

- Hanjalic, K. & Launder, B.E. (1980). « Sensitising the Dissipation equation to irrotational strains». *Journal of fluid Engineering*, part 102, pp. 34- 40.
- Harlow, F.H. & Nakayama, P.J. (1967). « Turbulence Transport Equations». *Physicals Fluids*, 10, 11, pp. 2323-2332.
- Henderson, F. M. (1966). «Open channel flow». MacMillan Company, New York, U.S.A.
- Hickox, G. H. (1945). «Air Entrainment in Spillway Flow». *Civil Engineering*, Volume 15, N°12, 562 pages.
- Hinze, J.O. (1975). «Turbulence ». McGraw-Hill Book Company, Second Edition, 790pages.
- Hoffman, G.H. (1975). « Improved form of the low Reynolds number  $k - \epsilon$  turbulence model». *The Physic of fluids*, volume 18, N°3, pp. 309÷312.
- Houston, K. L. & Richardson, A. T. (1988). «Energy dissipation characteristics of stepped spillways for an RC dam». *Proceeding The International Symposium on Hydraulics for High Dams, Beijing, China*, pp. 91-98.
- Hsu, S. T. & Kennedy, J. F. (1971). «Turbulent flow in wavy pipes». *Journal Fluid Mechanics*, volume 47, pp. 481-502.
- Huang, G. & Kawahara, Y. & Tamai, N. (1993). «Numerical investigation of buoyant shear flow with a multiple-time-scale turbulence model». *Proceeding of the 5<sup>th</sup> international symposium, September, Paris, France*.
- Hug, M. (1975). «Mécanique des fluides appliquée». Edition Eyrolles, Paris, France, 1195pages.
- Jaeger, M. (1990). «Simulation numérique d'écoulements turbulents incompressibles et isothermes de fluides newtoniens par éléments finis tridimensionnels». *Thèse de Doctorat de l'Université de technologie de Compiègne*, 293 pages.
- Keller, R. J. & Lai, K.K. & Wood, I. R. (1974). «Developing region in self - aerated flows». *Journal of the Hydraulic Division*, volume 100, N°HY4, pp. 553- 568.
- Keller, R.J. & Rastogi, A.K. (1975). «Prediction of flow development on spillways». *Journal of the Hydraulics Division*, volume 101, N° HY 9, pp. 1171-1183.
- Keller, R. J. & Rastogi, A.K. (1977). « Design chart for predicting critical point on spillways». *Journal of the Hydraulics Division*, volume103, N°HY12, pp. 1417-1429.
- Kim, S.W. & Chen Y.S. (1988). «A finite element computation of turbulent boundary layer flows with an algebraic stress turbulence model». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (ISSN 0045-7825)*, volume 66, p. 45-63.
- Klaus, A. H. (1989). «Computation fluid dynamics for engineers». *Engineering Education System*, 78713, Texas, U.S.A.

- Klebanoff, D. S. (1953). « Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient ». National Advisory Council for Aeronautics, T.N 3178.
- Kolmogorov, N. A. (1942). « Equations of turbulent motion of an incompressible fluid ». *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Séria Fizicheskaya*, 6, pp. 56-58, (Traduction anglaise : Imperial College, Mechanics Engineering Dept. Report ON/6, 1986).
- Landau, L. D. & Lifshitz, E.M. (1959), « Fluid Mechanics ». Pergamon Press, Oxford.
- Lane, E. W. (1939). « Entrainment of Air in Swiftly Flowing Water ». *Civil Engineering, ASCE*, volume 9, N°2, pp. 88-91.
- Larinier, M. & Chorda, J. (1995). « Prise en Compte de la Migration du Poisson lors de la Conception des Ouvrages de Rétablissement des Ecoulements Naturels dans les Aménagements Routiers ou Autoroutes ». CEMAGREF, CSP, INPT, GHARPPE, Toulouse, France.
- Launder, B.E. & Spalding, D. B. (1972). « Mathematical models of turbulence ». Academic Press, London.
- Launder, B.E. & Spalding, D. B. (1974). « The numerical computation of turbulent flows ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, volume 3, N°2, pp. 269-289.
- Launder, B.E. & Reece, G.J. & Rodi, W. (1975). « Progress in the development of the Reynolds stress turbulence closure ». *Journal of Fluid Mechanics*, volume 68, part 3, pp. 537-566.
- Lesieur, M. (1982). « La turbulence développée ». *La Recherche*, volume 139, pp. 1412-1425.
- Lesieur, M. (1994). « La turbulence ». Presses Universitaires de Grenoble, 262 pages.
- Lumley, J. L. (1983). « Turbulence Modelling ». *ASME, Journal of Applied Mechanics*, volume 50, pp. 1097-1103.
- Marchi, E. (1993). « On the free-Overfall ». *Journal of Hydraulic Research, IAHR*, volume 31, N°6, pp. 777-790.
- Matos, J. (2000). « Hydraulic Design of Stepped Spillways over RCC ». *International Workshop on Hydraulics of Stepped Spillways*, Minor & Hager Editors, Balkema, Rotterdam, pp. 187-194.
- Messaoudi, S. & **Benmamar, S.** (1995). « Etude de l'entraînement de l'air dans les écoulements à surface libre ». Thèse de magistère, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie, 93 pages.
- Midoux, N. (1985). « Mécanique et rhéologie des fluides ». Edition Tec & doc, Paris, France, 512 pages.

- Moore, W. L. (1943). «Energy loss at the base of a free overfall». Transactions, ASCE, volume 108, pp. 1343
- Nagano, Y. & Hishida, M. (1987). «Improved form of the  $k - \epsilon$  model for wall turbulent shear flows». ASME Journal of Fluids Engineering, volume 109, pp. 156-160, June.
- Nezu, I. & Nakagawa, H. (1993). «Three dimensional structures of coherent vortices generated behind dunes in turbulent free surface flows». Proceeding of the 5<sup>th</sup> international symposium of renified flow modelling and turbulence measurements, Paris, 7<sup>th</sup>- 10<sup>th</sup> September.
- Nezu, I. & Nakagawa, H. (1993). «Turbulent structures and bursting phenomena over roughness discontinuity in open channel flows». Proceeding of the 5<sup>th</sup> international symposium of renified flow modelling and turbulence measurements, Paris, 7<sup>th</sup>- 10<sup>th</sup> September.
- Nishimura, T. & Ohori, Y. & Kajimoto, Y. & Kawamura, Y. (1985). «Mass transfer characteristics in a channel with symmetric wavy wall for steady flow». Journal of Chemical Engineering Japan 18, pp. 550-555.
- Ohtsu, I. O. & Yasuda, Y. (1997). «Characteristics of Flow Conditions on Stepped Channels». Proceeding 27<sup>th</sup> IAHR Biennial Congress, San Francisco, USA, Theme D, pp. 583-588.
- Ouabbas, Y. & **Benmamar, S.** & Kettab, A. (2001). «Modélisation numérique d'un écoulement très turbulent sur un canal en marche d'escalier – Approche Monophasique». Mémoire de Magister à l'Université Mira Abderrahmane, Bejaia, Algeria, 83 pages.
- Ouabbas, Y. & **Benmamar, S.** & Kettab, A. (2002). «Entraînement d'air dans les écoulements à surface libre – Application aux évacuateurs de crues lisse». Proceeding Watmed 2002, Monastir, Tunisie, pp. 900-904.
- Ouillon, S. (1993). «Modélisation mathématique de l'hydrodynamique à surface libre et du transport en suspension de sédiments non cohésifs aide à l'interprétation d'images spatiales». Thèse de Doctorat à l'INP Toulouse, 280 pages.
- Padet, J. (1991). «Fluide en écoulement : Méthodes et modèle». Edition Masson, Paris, France, 359 pages.
- Patankar, S.V. & Spalding, D. B. (1967). «A finite difference procedure for solving the equations of the two-dimensional boundary layer». International journal Heat Mass Transfer 10, pp. 13-89.
- Patankar, S.V. & Spalding, D. B. (1970). «Heat and mass transfer in boundary layers, a general calculation procedure». 2d edition, Intertext Books, London.
- Patankar, S.V. & Spalding, D. B. (1972). «A calculation procedure for heat, mass and moment transfer in three-dimensional parabolic flows». International Journal of Heat and Mass Transfer, volume 15, N°10, pp.1787-1806.

- Patankar, S.V. & Pratap, V.S. & Spalding D.B. (1975). «Prediction of turbulent flow in curved pipes». *Journal of Fluid Mechanics*, volume 67, part 3, pp. 583 -595.
- Patankar, S.V. & Liu, C. H. & Sparrow, E.M. (1977). «Fully developed flow and heat transfer in ducts having stream wise periodic variation of cross sectional area». *Journal of Heat Transfer*, volume 99, pp. 180-186.
- Patankar, S.V. (1980). «Numerical heat transfer and fluid flow». Hemisphere Publishing corporation, 193 pages.
- Pergam Geoffry, G. S. & Officer, A. K. & Mottram S. R. (1999). «Hydraulics of skimming flow on modelled stepped spillways". *Journal of Hydraulic Engineering*, volume 125, N°5.
- Peyras, L. & Royet, P. & Degoutte, G. (1991). «Ecoulement et dissipation sur les déversoirs en gradins de gabions». *Journal La Houille Blanche*, N°1, pp. 37-47.
- Peyras, L. & Royet, P. & Degoutte, G. (1992). «Flow and energy dissipation over stepped Gabion weirs». *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, volume 188, N°5, pp. 707-717.
- Prandtl, L. (1945). «Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz». *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.- Phys. K1*, pp. 6-19.
- Prinos, P. (1993). «Three dimensional flow in compound open channels». *Proceeding of the 5<sup>th</sup> international symposium of renified flow modelling and turbulence measurements, Paris, 7<sup>th</sup>- 10th September.*
- Puel, P. (1995). «Ecoulement à Surface Libre au-dessus de Macro rugosité». D.E.A. Physique et Chimie de l'Environnement, Université Paul Sabatier Toulouse, France.
- Rajaratnam, N. (1990). «Skimming flow in stepped spillways». *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, volume 116, N°4, pp. 587-591. Discussion : volume 118, N°1, pp. 111-114.
- Rajaratnam, N. & Katopodis, C. (1991). «Hydraulics of Steeppass Fishways». *Canadian Journal of Civil Engineering, Volume 18*, pp. 1024-1032.
- Rand, W. (1955), «Flow geometry at straight drop spillways». *Proceeding ASCE*, volume 81, Paper 791, pp. 1-13.
- Rice, C. E. & Kadavy, K. C. (1996). «Model study of roller compacted concrete stepped spillway». *Journal of Hydraulic Engineering*, volume 122, N°6, June, pp. 292-297.
- Rhyning, I. L. (1985). «Dynamique des fluides». Edition Presse Polytechnique et Universitaire Romandes, Lausanne, Suisse, deuxième édition, 462 pages.
- Rodi, W. (1976). «A New Algebraic Relation for calculation the Reynolds Stresses". *Zs. Angew. Math. Mech.*, 56, pp. 219-221.

- Rodi, W. (1980). «Turbulence models and their application in hydraulics». A State of the art review, University of Karlsruhe, 101 pages.
- Rodi, W. (1983). «Turbulence models and their application in hydraulics». A state of the art Review, (2<sup>nd</sup> edition), International Association of Hydraulic Research- Publication Delft.
- Rotta, J. C. (1951). «Statistisch Theorie Nichthomogener Turbulenz». Zs. Phys.,129, pp. 547- 572.
- Ruff, J.F. & Fizell, K. H. (1994). «Air concentration measurements in highly turbulent flow on a steeply sloping chute». Proceeding Hydraulic engineering conference, ASCE, Buffalo, USA, volume 2, pp. 999-1003.
- Saadjian, E. (1993). «Phénomènes de transport et leurs résolutions numérique». Ed. Polytechnica, Paris.
- Saffman, P. G. (1970). «A Model for Inhomogeneous Turbulent Flow». Proceeding Roy. Soc., Serie A, 317, pp. 417-433.
- Sajjadi, S. G. & Aldridge, J. N. (1993). «Second- moment closure modelling of turbulent flow over sand ripples». Proceeding of the 5<sup>th</sup> international symposium of renified flow modelling and turbulence measurements, Paris, 7<sup>th</sup>- 10th September, pp. 49-56.
- Schiestel, R. (1993). «Modélisation et simulation des écoulements turbulents». Traité des nouvelles Technologies, Edition Hermes, 442 pages.
- Schiestel, R. (1998). «Les écoulements turbulents : Modélisation et simulation». Edition Hermès, Paris, France, 504 pages.
- Schlichting, H. (1979). «Boundary layer theory». Edition McGraw-Hill Book Comp, seventh edition, New York, U.S.A, 817 pages.
- Sinniger, R. O. & Hager, W. H. (1989). «Constructions hydrauliques – Ecoulements stationnaire». Edition Presse Polytechnique Romandes, Lausanne, Suisse, volume 15, 439 pages.
- Sorensen, R. M. (1985). «Stepped spillway hydraulic model investigation». Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, Volume 111, N°2, pp. 1461-1472.
- Sparrow, E.M. & Prata, A. T. (1983). «Numerical solution for laminar flow and heat transfer in a periodically converging – diverging tube with experimental confirmation». Numerical Heat Transfer 6, pp. 441-461.
- Sparrow, E. M. & Comb, J. W. (1983). «Effet of interwall spacing fluid flow inlet condition on a corrugated wall heat exchanger». International journal of Heat Mass transfer 26, 993-1005.
- Stephenson, D. (1979). «Gabion energy dissipaters». Proceeding 13th ICOLD Congress, New Delhi, India, Q.50, R.3, pp. 33-43.

- Stephenson, D. (1991). «Energy dissipation down stepped spillways». *Water Power & Dam Construction*, volume 43, N°9, September, pp 27-30.
- Straub, L.G. & Lamb, O.P. (1953). «Experimental studies of air entrainment in open channel flows». *Proceeding 5th IAHR Congress, IAHR-ASCE, Minneapolis, USA*, pp. 425-437.
- Straub, L.G. and Anderson, A. G. (1958). «Experiments on self-aerated flow in open channels». *Journal of hydraulic division, ASCE*, volume 84, N°HY7, pp. 1-35.
- Thirriot, C. (1995). «Peut-on parler de nombre de Reynolds pour l'écoulement dans une conduite à variation de section périodique». *Rapport interne CT860 IMF Toulouse*, mars.
- Vercheval, M. (1991). «Contribution à l'étude expérimentale de l'écoulement des évacuateurs à marches». *Thèse d'ingénieur en civil des constructions, Université de Liège, Belgique*, 98 pages.
- Versteeg, H.K. & Malalasekera, W. (1995). «An introduction to computational fluid dynamics ». *Longmon Edition*, 257 pages.
- Viollet, P. L. & Chabard, J. P. & Esposito, P. & Laurence, D. (2003). «Mécanique des fluides appliquée». *Presse des ponts et chaussées, Paris, France*, 367 pages.
- Vittal, N. & Raga Raju, K. G., & Garde, R. J. (1977). «Resistance of Two Dimensional triangular roughness». *Journal of Hydraulic Research, AIRH*, volume 15, N°1, pp. 19-36.
- Welch, J. E. & Harlow, F. & Shannon, J. P. et Daly, B. J. (1966). «The MAC method, a computing technique for solving viscous incompressible transient fluid flow problems in evolving free surfaces». *Los Alamos Rep. LA3425*.
- White, M. P. (1943). «Energy loss at the base of a free overfall- Discussion». *Transaction, ASCE*, volume 108, pp. 1361-1364.
- Wood, I. R. (1983). «Uniform region of self-aerated flow». *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, volume 109, N°3, pp. 447-461.
- Wood, I. & Ackers, P. & Loveless, J. (1983). «General method for critical point on spillways" *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, volume.109, N°2, may pp. 308- 312.
- Wood, I. R. (1984). «Air Entrainment in High Speed Flows». *Proceeding International Symp. On scale effect in modelling structures, IAHR, Esslingen, Germany*, H. Kobus editor, paper 4.1.
- Wood, I. R. (1985). «Air Water Flows». *21<sup>st</sup> IAHR Congress, Melbourne, Australia*, Keynote address, pp. 18 - 29.
- Zilker, D. P. & Cook, G. W. & Hanratty, T. J. (1977). «Influence of the amplitude of a solid wavy on a turbulent flow. Part 1. Non-separated flows». *Journal Fluid Mechanic*, volume 82, part 1, pp. 29-51.

## Annexe

Présentation des graphes de variation de la hauteur d'eau en fonction des débits pour chaque creux et crête des deux modèles en marches d'escalier.

◆ **Modèle réduit en marches d'escalier 4cmx4cmx8cm :**

