

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT **D'ELECTRONIQUE**

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**ETUDE DES PERTES
PAR RAYONNEMENT D'UN GUIDE
DIELECTRIQUE PERIODIQUEMENT
DEFORME DEPOSE SUR UN
SUBSTRAT METALLIQUE**

Proposé par :

Etudié par :

Dirigé par :

TRABELSI.M

TOUCHI Fatma

TRABELSI.M

الخدمة الوطنية للعلوم
المكتبة
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHÈQUE

PROMOTION :

Janvier 1985

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département d'Electronique

Filière d'Ingénieur en Electronique

PROJET DE FIN D'ETUDES

THEME

**ETUDE DES PERTES
PAR RAYONNEMENT D'UN GUIDE
DIÉLECTRIQUE PÉRIODIQUEMENT DÉFORMÉ
DÉPOSÉ SUR UN SUBSTRAT MÉTALLIQUE**

Proposé par :

TRABELSI

Etudié par :

TOUCHI Fatma

R E M E R C I E M E N T S .

Je tiens à remercier vivement mon promoteur
Monsieur , TRABELSI pour m'avoir proposé ce sujet et pour
m'avoir guidée et conseillée judicieusement le long de l'éla-
boration de ce travail.

S O M M A I R E
-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : LES EQUATIONS DE MAXWELL SOUS FORME COVARIANTE.	3
I-1 : Les équations de propagation des champs.	3
I-2 : Le théorème de Poynting en coordonnées curvilignes	6
CHAPITRE II : POSITION DU PROBLEME ET DEFINITIONS.	7
II-1 : Position du problème.	7
II-2 : Définitions.	8
CHAPITRE III: MISE EN EQUATION DU PROBLEME.	13
III-1 : Décomposition longitudinale des champs.	15
III-2 : Recherche d'une solution par une méthode de perturbations	16
III-3 : La résolution pour l'ordre zéro.	19
III-4 : La résolution pour l'ordre un.	27
CHAPITRE IV : BILAN ENERGETIQUE.	40
IV-1 : Puissance transmise à l'ordre zéro.	40
IV-2 : Puissance perdue à l'ordre un.	42
IV-3 : Le coefficient de pertes.	43
IV-4 : Résultats numériques.	45
CHAPITRE V : DEUXIEME METHODE RIGoureuse.	52
CONCLUSION :	56
ANNEXE :	58
BIBLIOGRAPHIE :	

EXTRA STE

B. F. H. B.

INTRODUCTION

DING

10

En communication optique, les fibres remplacent les fils en cuivre et les câbles coaxiaux de la communication électrique. Par similitude l'intégration optique remplacera divers composants électriques permettant à des fonctions comme commutation et modulation d'être exécutées en lumière.

L'intégration optique sera compatible avec la communication à fibres existante. Pour la communication à longue distance avec complexité d'un haut signal, l'avantage le plus important des fibres à présent est que les pertes de transmission sont faibles et la bande passante est large.

Pour un guide diélectrique parfait et plan, la propagation se fait sans rayonnement; les ondes à l'extérieur du guide étant évanescentes. Si l'on fait subir à ce guide une déformation, il devient susceptible de rayonner, ce rayonnement, en général considéré comme néfaste, peut cependant être recherché dans le cas où se pose le problème de l'extraction de l'énergie du guide.

L'absence de théories rigoureuses et générales est due à la difficulté d'écrire les conditions aux limites. L'utilisation des équations de Maxwell sous forme covariante permet de s'affranchir de cette difficulté car il est possible de choisir le système de coordonnées de manière que certaines surfaces de coordonnées coïncident avec les surfaces limitant le domaine de propagation. À l'aide de ce formalisme, nous avons développé une théorie rigoureuse permettant d'interpréter les phénomènes de propagation dans les guides périodiquement déformés.

Le but de ce travail est l'étude théorique des pertes par rayonnement dans un guide diélectrique périodiquement déformé, dont une face est limitée par un ~~ou~~ substrat métallique infiniment conducteur. Cette étude est faite à partir d'une méthode de perturbations. Nous utilisons un système de coordonnées non orthogonales dit "de translation" pour lequel les conditions aux limites s'expriment simplement sur des surfaces qui ne sont pas géométriquement simples.

Dans le chapitre I, nous donnons les équations de Maxwell sous forme covariante et nous en déduisons dans le chapitre II, la formulation du problème. Dans le chapitre III, en décomposant les champs suivant le théorème de FLOQUET-BLOCH, relatif à la propagation des ondes dans les structures périodiques, nous aboutissons à un système différentiel auquel nous appliquons la théorie des perturbations pour le résoudre. Dans le chapitre IV, nous faisons un bilan énergétique en déterminant l'énergie transmise et l'énergie perdue par rayonnement. Par la suite nous étudions le coefficient de pertes. Dans le chapitre V, nous donnons une deuxième méthode rigoureuse utilisant la méthode des valeurs propres.

EXTRA STRING

B. H. River

CHAPITRE I : Equations de Maxwell sous forme covariante

I-1: LES EQUATIONS DE PROPAGATION DES CHAMPS.

Pour une onde monochromatique de pulsation ω , en utilisant les amplitudes complexes pour lesquelles $d/dt = i\omega$ (avec $k = \omega/c$, $\epsilon \mu c^2 = 1$, c : vitesse de la lumière), les équations de propagation des champs électriques et magnétiques peuvent être obtenues à partir des équations de Maxwell sous forme covariante;

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k = - \frac{\partial B^i}{\partial t} \quad \text{I.1}$$

$$\partial_c B^i = 0 \quad \text{I.2}$$

$$\epsilon^{ijk} \partial_j H_k = \frac{\partial D^i}{\partial t} \quad \text{I.3}$$

$$\partial_c D^i = 0 \quad \text{I.4}$$

et les relations de milieu:

$$D^i = \epsilon^{ij} E_j \quad \text{I.5}$$

$$H_i = \chi_{ij} B^j \quad \text{I.6}$$

avec: $\epsilon^{ij} = \epsilon \sqrt{g} g^{ij} \quad \text{I.7}$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{g_{ij}}{\sqrt{g}} \quad \text{I.8}$$

$$g = |g_{ij}| = |(g^{ij})^{-1}| \quad \text{I.9}$$

où g_{ij} est le tenseur métrique du système de coordonnées.

ϵ étant la permittivité et μ la perméabilité du milieu considéré.

$$\varepsilon^{ijk} = \text{indicateur de Levi-Civita} = \begin{cases} 0 & \text{si deux indices sont \u00e9gaux.} \\ 1 & \text{si les indices sont obtenus au} \\ & \text{moyen d'un nbre pair de permuta-} \\ & \text{tions \u00e0 partir de 1, 2, 3.} \\ -1 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Dans l'\u00e9quation (I.3), rempla\u00e7ons H_k par sa valeur en fonction de B^k tir\u00e9e de (I.6) /:

$$\varepsilon^{ijk} \partial_j X_{kl} B^l = \frac{\partial D^i}{\partial t} \quad \text{I.10}$$

D\u00e9rivons cette \u00e9quation par rapport au temps, en supposant que les tenseurs du milieu sont ind\u00e9pendants du temps.

$$\varepsilon^{ijk} \partial_j X_{kl} \frac{\partial B^l}{\partial t} = \frac{\partial^2 D^i}{\partial t^2} \quad \text{I.11}$$

Reportons (I.5) et (I.1) dans cette derni\u00e8re relation:

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmn} \partial_j X_{kl} \partial_m E_n + \varepsilon^{ij} \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \quad \text{I.12}$$

Or $d^2/dt^2 = -\omega^2$; et avec les relations (I.7)(8) cette \u00e9quation devient:

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmn} \partial_j \frac{\partial_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m E_n - \omega^2 \varepsilon \sqrt{g} g^{ij} E_j = 0 \quad \text{I.13}$$

Ou encore:

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmn} \partial_j \frac{\partial_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m E_n - k^2 \sqrt{g} g^{ij} E_j = 0 \quad \text{I.14a}$$

En proc\u00e9dant de la m\u00eame mani\u00e8re pour les \u00e9quations relatives \u00e0 H_i , on obtient:

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmn} \partial_j \frac{\partial_{kl}}{\sqrt{g}} \partial_m H_n - k^2 \sqrt{g} g^{ij} H_j = 0 \quad \text{I.14b}$$

Chaque syst\u00e8me (I.14) donne trois \u00e9quations correspondant, aux trois valeurs possibles de l'indice i , pour $i=1$, il vient:

$$\begin{aligned} & \partial_2 \frac{g_{31}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2) + \partial_2 \frac{g_{32}}{\sqrt{g}} (\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3) + \partial_2 \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) \\ & + \partial_3 \frac{g_{21}}{\sqrt{g}} (\partial_3 E_2 - \partial_2 E_3) + \partial_3 \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_3 - \partial_3 E_1) + \partial_3 \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_1 - \partial_1 E_2) \\ & - k^2 \sqrt{g} g^{11} E_1 - k^2 \sqrt{g} g^{12} E_2 - k^2 \sqrt{g} g^{13} E_3 = 0 \end{aligned} \quad \text{I.15a}$$

Pour $i=2$, il vient:

5

$$\begin{aligned} & \partial_3 \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_1 - \partial_1 E_3) + \partial_3 \frac{g_{13}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) + \partial_3 \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_2 - \partial_3 E_2) \\ & + \partial_1 \frac{g_{32}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_3 - \partial_3 E_1) + \partial_1 \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_1 - \partial_1 E_2) + \partial_1 \frac{g_{31}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_3) \\ & - k^2 \sqrt{g} g^{22} E_2 - k^2 \sqrt{g} g^{23} E_3 - k^2 \sqrt{g} g^{21} E_1 = 0 \end{aligned} \quad \text{I.15b}$$

Pour $i=3$, il vient:

$$\begin{aligned} & \partial_1 \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1) + \partial_1 \frac{g_{21}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2) + \partial_1 \frac{g_{22}}{\sqrt{g}} (\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3) \\ & + \partial_2 \frac{g_{13}}{\sqrt{g}} (\partial_2 E_1 - \partial_1 E_2) + \partial_2 \frac{g_{11}}{\sqrt{g}} (\partial_3 E_2 - \partial_2 E_3) + \partial_2 \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} (\partial_1 E_3 - \partial_3 E_1) \\ & - k^2 \sqrt{g} g^{33} E_3 - k^2 \sqrt{g} g^{31} E_1 - k^2 \sqrt{g} g^{32} E_2 = 0 \end{aligned} \quad \text{I.15c}$$

On obtient les mêmes équations pour H .

Dans l'équation (I.1) on reporte les relations (I.6) et (I.8), on obtient la relation:

$$\varepsilon^{ijk} \partial_j E_k = -i \omega \mu \sqrt{g} g^{ij} H_j \quad \text{I.16}$$

De même, dans l'équation (I.3) on reporte les relations (I.5) et (I.7), on obtient la relation:

$$\varepsilon^{ijk} \partial_j H_k = i \omega \varepsilon \sqrt{g} g^{ij} E_j \quad \text{I.17}$$

I-2: LE THEOREME DE POYNTING EN COORDONNEES CURVILIGNES.

Définissons le vecteur de Poynting comme un pseudo-vecteur contravariant dont les composantes N^i sont données par la relation:

$$N^i = \varepsilon^{ijk} E_j H_k \quad \text{I.18}$$

Sur une surface S appartenant à une surface de coordonnées, le flux Φ du vecteur de Poynting prend une forme très simple.

Pour la surface $x^1 = \text{Cste}$:

$$\Phi(N) = \iint_S N^1 dx^2 dx^3 \quad \text{I.19}$$

REMARQUE:

Les équations de Maxwell sous forme covariante sont valables dans n'importe quel système de coordonnées (orthogonales ou non) de l'espace à trois dimensions. Leur forme analytique est indépendante du système de coordonnées, (ce sont des équations affines), contrairement au cas classique où le rotationnel, par exemple, en dépend dans ($\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$).

Par contre les relations des milieux dépendent du système de coordonnées. Ce sont des relations métriques.

IRA STRONG

F. H. Rives

CHAPITRE II : POSITION DU PROBLÈME ET DÉFINITIONS

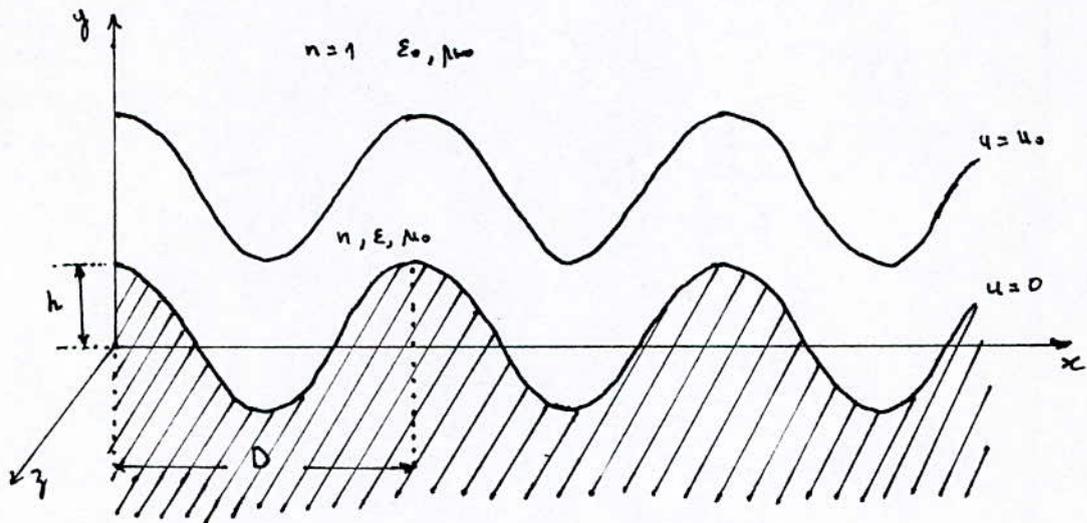
IRA STRONG

CHAPITRE II: POSITION DU PROBLEME ET DEFINITIONS.

II-1: POSITION DU PROBLEME:

Nous nous proposons d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique, fonction harmonique du temps dans un guide diélectrique d'indice n périodiquement déformé, dont une surface est limitée par un substrat métallique infiniment conducteur. Pour cela nous utilisons les équations de Maxwell sous forme covariante. Leur résolution nécessite au préalable, le choix d'un système de coordonnées pour pouvoir les projeter.

Le système de coordonnées dit de translation est le mieux adapté au problème défini ci-dessus.



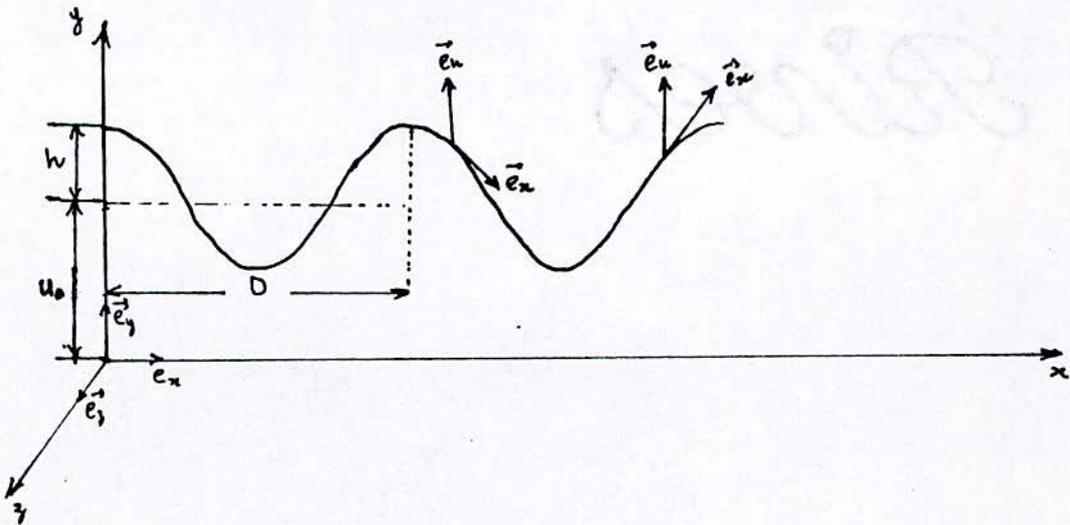
Les axes $OXYZ$ sont choisis comme l'indique la figure. Le guide est supposé infini dans la direction OZ . On considère donc le problème à deux dimensions $d/dz=0$.

L'onde se propage dans la direction OX . La période de la déformation est D , son amplitude est h et la largeur du guide est u_0 .

A partir du système Cartésien, on définit le système de coordonnées de translation en posant: $u = y - a(x)$, avec $a(x) = h \cos \beta x$ où $\beta = 2\pi/D$.

II-2: DEFINITIONS.

- DEFINITION D'UN NOUVEAU SYSTEME DE COORDONNEES:



A partir du système Cartésien ($x^1 = x$, $x^2 = y$ et $x^3 = z$), nous définissons un nouveau système par: $x^1 = x$, $x^2 = u$, $x^3 = z$.

Avec: $x^2 = u = x^2 - a(x)$, soit $u = y - a(x)$.

Où $a(x)$ est une fonction périodique qui définit la déformation de la lame.

La surface supérieure correspond à $u = u_0 = y - a(x)$.

La surface inférieure correspond à $u = 0 = y - a(x)$.

- MATRICES DE CHANGEMENT DE BASE.

Les matrices de changement de base s'écrivent :

$$(A_{i'}^{j'}) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right) = \begin{bmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} & A_3^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} & A_3^{2'} \\ A_1^{3'} & A_2^{3'} & A_3^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dot{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{II.1}$$

$$(A_{i'}^j) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right) = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dot{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{II.2}$$

- CALCUL DU TENSEUR METRIQUE.

Le calcul du tenseur métrique se fait à partir des matrices de changement de base ci-dessus et de la relation:

$$g^{ij} = \sum_{i',j'} A_{i'}^{i,j} \cdot g_{i'j'} = \sum_{i'} \sum_{j'} A_{i'}^i \cdot A_{j'}^j \cdot g_{i'j'} \quad \text{II.3}$$

Avec : $g_{i'j'} = \vec{e}_{i'} \cdot \vec{e}_{j'}$, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base orthonormée $\Rightarrow g_{i'j'} = \delta_{i'j'}$.

$$(g_{i'j'}) = \begin{bmatrix} 1 + \dot{a}^2 & \dot{a} & 0 \\ \dot{a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{II.4}$$

On a : $(g_{i'j'}) (g^{i'j'}) = I$; $g^{i'j'} = (g_{i'j'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\dot{a} & 0 \\ -\dot{a} & 1 + \dot{a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{II.5}$

Soit : $g = \det(g_{i'j'}) = 1$.

Après avoir reporté les éléments du tenseur métrique dans les équations (I.15) avec ($E_1 = E_x$, $E_2 = E_u$, $E_3 = E_z$), on obtient les équations suivantes pour les trois valeurs de $i \in \{1; 2; 3\}$.

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial E_u}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \dot{a} \left(\frac{\partial E_u}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) - k^2 E_x + k^2 \dot{a} E_u = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (1 + \dot{a}^2) \left(\frac{\partial E_z}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \dot{a} \left(\frac{\partial E_u}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial x} \right) - k^2 (1 + \dot{a}^2) E_u + k^2 \dot{a} E_x = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{a} \left(\frac{\partial E_z}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial u} (1 + \dot{a}^2) \left(\frac{\partial E_u}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \dot{a} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

$$- k^2 E_z = 0 \quad \text{II.6}$$

Puisqu'on a considéré le problème à deux dimensions $d/dz=0$, ce système devient:

$$\frac{\partial^2 E_u}{\partial x \partial u} + k^2 \dot{a} E_u = \frac{\partial^2 E_x}{\partial u^2} + k^2 E_x$$

$$\frac{\partial^2 E_u}{\partial x^2} + k^2 (1 + \dot{a}^2) E_u = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial u} + k^2 \dot{a} E_x \quad \text{II.7}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + (1 + \dot{a}^2) \frac{\partial^2 E_z}{\partial u^2} - 2\dot{a} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial u} - \ddot{a} \frac{\partial E_z}{\partial u} + k^2 E_z = 0$$

Où $\dot{a} = d(a)/dx$; $\ddot{a} = d^2 a/dx^2$.

La relation (II.7c) est indépendante des deux autres.

Il existe deux types de ~~solutions~~ solutions:

Polarisation E (mode TE): ($E_x = E_u = 0$; $E = E_z$, le champ électrique est parallèle à la lame).

Polarisation H (mode TM): ($E_z = 0$; $H = H_z$, le champ magnétique est parallèle à la lame).

Considérons maintenant les deux types de polarisations:

Polarisation E//:

En coordonnées de translation, comme en coordonnées Cartésiennes, seules ~~deux~~ trois des six composantes des champs E et H ne sont pas nulles.

Posons :

$$\begin{cases} E_x = E_u = 0 \\ E_z = F \end{cases} \quad \begin{cases} H_x = G/Z ; H_u \neq 0 \\ H_z = 0 \end{cases}$$

Avec : Z est l'impédance du milieu.

Nous allons donc chercher un système de deux équations aux dérivées partielles où E_z et H_x (c'est à dire F et G) sont des fonctions inconnues. La première relation pour E_z (ou F) est donnée par l'équation (II.7c):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + k^2 F + \dot{\alpha}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\dot{\alpha} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} - \ddot{\alpha} \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad \text{II.8}$$

La seconde relation pour H_x (ou G) est obtenue à partir de l'équation (I.16), ce qui donne, compte tenu de l'expression du tenseur métrique:

$$\partial_2 E_3 = -i\omega \mu H_1 + i\omega \mu \dot{\alpha} H_2 \quad \text{II.9a}$$

$$-\partial_1 E_3 = i\omega \mu H_1 - i\omega (1 + \dot{\alpha}^2) \mu H_2 \quad \text{II.9b}$$

Et, avec une combinaison linéaire de ces deux relations on obtient:

$$(1 + \dot{\alpha}^2) \partial_2 E_3 - \dot{\alpha} \partial_1 E_3 = -i\omega \mu H_1 \quad \text{II.10}$$

On a: $E_3 = E_z = F$ et $H_1 = H_x = G/Z$, cette dernière relation s'écrit donc:

$$bG = i(1 + \dot{\alpha}^2) \frac{\partial F}{\partial u} - i\dot{\alpha} \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{II.11}$$

Reprenons les notations employées pour la polarisation E// en posant:

$$\begin{cases} E_x = -G; & E_u \neq 0 \\ E_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_x = H_u = 0 \\ H_z = F/Z \end{cases}$$

L'équation de propagation relative à $H_z = F/Z$ étant identique à celle de E_z pour E// ; nous pouvons la conserver pour H//.

La seconde relation est obtenue à partir de l'équation (I.14), ce qui donne compte-tenu du tenseur métrique:

$$(1 + \dot{\alpha}^2) \partial_z H_z - \dot{\alpha} \partial_x H_z = i\omega \epsilon E_x \quad \text{II.12}$$

Ou encore:

$$bG = i(1 + \dot{\alpha}^2) \frac{\partial F}{\partial u} - i\dot{\alpha} \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{II.13}$$

D'où: quelque soit le type de polarisation, il suffit de résoudre le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} bG = i(1 + \dot{\alpha}^2) \frac{\partial F}{\partial u} - i\dot{\alpha} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + b^2 F + \dot{\alpha}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\dot{\alpha} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} - \ddot{\alpha} \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \end{cases} \quad \text{II.14}$$

Avec : $F = E_z$, $G = ZH_x$ pour la polarisation E// (mode TE).

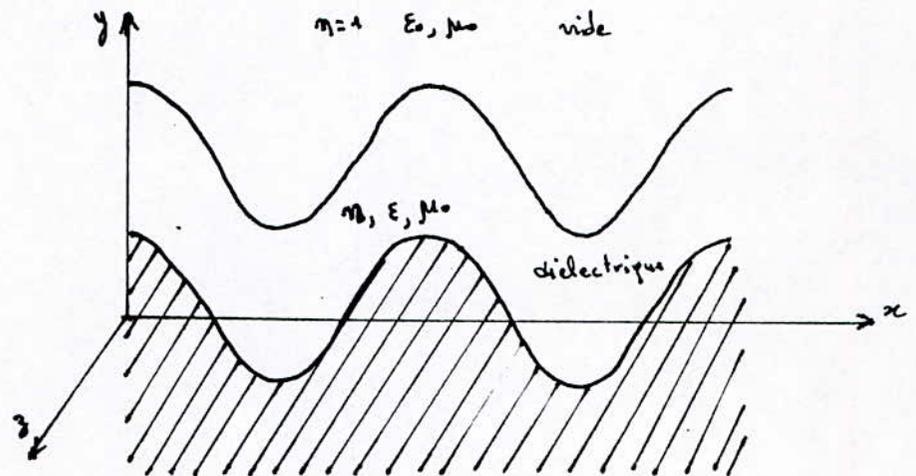
$F = ZH_z$, $G = -E_x$ pour la polarisation H// (mode TM) .

J. J. G. G. G.

EXTRA STRO

CHAPITRE III: MISE EN EQUATION DU PROBLEME

Nous recherchons une onde monochromatique ($d/dt = i\omega$), possédant la symétrie plane ($\partial/\partial z = 0$), se propageant dans la direction OX. La période de la déformation est D , son amplitude h et la largeur du guide est U_0 .



Comme nous avons montré précédemment qu'en coordonnées de translation, pour les problèmes à deux dimensions, la forme générale des équations de Maxwell permettant le calcul simultané de l'amplitude des champs dans chaque milieu en mode TE et en mode TM est:

$$\begin{cases} bG = i(1 + \alpha^2) \frac{\partial F}{\partial u} - i\alpha \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + b^2 F + \alpha^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial u} - \ddot{\alpha} \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \end{cases}$$

Avec

Avec : en mode TE : $F = E_z$ et $G = ZH_x$.

et en mode TM : $F = ZH_z$ et $G = -E_x$.

Où $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}}$.

Dans ce qui suit, l'amplitude des champs est représentée par des lettres primées dans le diélectrique et non primées dans le vide avec $Z = nZ'$ et $k' = nk$ (si $\mu = \mu_0$).

- CONDITIONS AUX LIMITES :

- A l'infini, l'amplitude des champs doit rester finie.
- Pour $u = u_0$ à l'interface diélectrique-vide, il y a conservation des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique.
- Pour $u = 0$ la composante tangentielle du champ électrique est nulle sur le métal.

La continuité des composantes tangentielles de E et H sur une surface $u = \text{constante}$ conduit à celle des composantes covariantes E_x , E_z , H_x et H_z c'est à dire F et G/Z pour la polarisation TE ; et F/Z et G pour la polarisation TM.

Ces conditions sont résumées dans le tableau suivant:

	Mode TE	Mode TM
$u = 0$	$F'(0) = 0$	$G'(0) = 0$
$u = u_0$	$F'(u_0) = F(u_0)$ $G'(u_0)/Z' = G(u_0)/Z$	$F(u_0)/Z' = F(u_0)/Z$ $G'(u_0) = G(u_0)$

III - 1: DECOMPOSITION LONGITUDINALE DES CHAMPS.

D'après le théorème de FLOQUET-BLOCH, relatif à la propagation des ondes dans les structures périodiques, les composantes des champs dépendent de x par une fonction de la forme:

$$f(x) = g(x) \cdot e^{-i(\gamma_0 - i\eta)x} \quad \text{III.1}$$

$\gamma_0 = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ désignant la constante de propagation, où λ_g est la longueur d'onde guidée, η est le coefficient de pertes relatives à la déformation de la structure. $g(x)$ est une fonction périodique de même période D que la structure, nous pouvons donc décomposer $g(x)$ en série de Fourier à termes complexes.

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m \cdot e^{-im\beta x} \quad \text{III.2}$$

Soit encore pour F et G .

$$F(u, x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} F_m(u) \cdot e^{-im\beta x} \cdot e^{-i(\gamma_0 - i\eta)x}$$

$$F(u, x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} F_m(u) \cdot e^{-i(\gamma_m - i\eta)x} \quad \text{III.3}$$

$$G(u, x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} i G_m(u) e^{-i(\gamma_m - i\eta)x} \quad \text{III.4}$$

Avec : $\gamma_m = \gamma_0 + m\beta$

γ_m est la constante de propagation de l'harmonique d'espace d'ordre m celui-ci se propage à la vitesse $V_{pm} = \omega/\gamma_m = \omega D / (D\gamma_0 + 2\pi m)$ III.5

$$a(x) = h \cos \beta x = \frac{h}{2} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) \quad \text{III.6a}$$

$$a'(x) = i \frac{h\beta}{2} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) \quad \text{III.6b}$$

$$a''(x) = -\frac{h\beta^2}{2} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) \quad \text{III.6c}$$

$$a'''(x) = -\left(\frac{h\beta}{2}\right)^2 (e^{2i\beta x} + e^{-2i\beta x} - 2) \quad \text{III.6d}$$

On projette le système (II.14) sur la base des fonctions $e^{-i(\gamma_m - i\eta)x}$.
Le détail du calcul est reporté en annexe A1.

On trouve:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 F_m}{du^2} + \alpha_m^2 F_m + \frac{h\beta}{2} (\gamma_m + \gamma_{m-1} - 2i\eta) \frac{dF_{m-1}}{du} - \frac{h\beta}{2} (\gamma_m + \gamma_{m+1} - 2i\eta) \frac{dF_{m+1}}{du} \\ \quad + \frac{h^2 \beta^2}{2} \frac{d^2 F_m}{du^2} - \frac{h^2 \beta^2}{4} \frac{d^2}{du^2} (F_{m-2} + F_{m+2}) = 0 \\ b G_m = \frac{dF_m}{du} + \frac{h\beta}{2} (\gamma_{m-1} - i\eta) F_{m-1} - \frac{h\beta}{2} (\gamma_{m+1} - i\eta) F_{m+1} + \frac{h^2 \beta^2}{2} \frac{dF_m}{du} \\ \quad - \frac{h^2 \beta^2}{4} \frac{d}{du} (F_{m-2} + F_{m+2}) \end{array} \right. \quad \text{III.7}$$

Avec: $\alpha_m^2 = k^2 - (\gamma_m - i\eta)^2$.

III - 2 : RECHERCHE D'UNE SOLUTION PAR UNE METHODE DE PERTURBATIONS.

On désire obtenir une solution approchée du système différentiel (III - 7) par une méthode de perturbations, en posant comme paramètre: $\alpha = \frac{h\beta}{2} = \pi \frac{h}{D}$.

On recherche la solution F_m , G_m sous la forme d'une série entière du paramètre α :

$$F_m(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n F_{mn}(u) \quad \text{III.8a}$$

$$G_m(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n G_{mn}(u) \quad \text{III.8b}$$

$$\chi_m^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \chi_{mn}^2 \quad \text{III.8c}$$

$$\gamma_m - i\eta = \gamma_m - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \eta_n \quad \text{III.8d}$$

Après avoir reporté les expressions précédentes dans le système différentiel (III - 7) et identifié les termes de même ordre en α , on trouve:

Ordre zéro: $n = 0$

Le système (III - 7) devient:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{m0}}{du^2} + \chi_{m0}^2 F_{m0} = 0 \\ k G_{m0} = \frac{d F_{m0}}{du} \end{cases} \quad (\text{III - 9})$$

C'est le cas du guide lisse.

Ordre un: $n = 1$

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{m1}}{du^2} + \chi_{m0}^2 F_{m1} = -\chi_{m1}^2 F_{m0} - (\gamma_m + \gamma_{m-1}) \frac{d F_{m-10}}{du} + (\gamma_m + \gamma_{m+1}) \frac{d F_{m+10}}{du} \\ k G_{m1} = \frac{d F_{m1}}{du} + \gamma_{m-1} F_{m-10} - \gamma_{m+1} F_{m+10} \end{cases} \quad \text{III.10}$$

Ordre deux: $n = 2$

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{m2}}{du^2} + \chi_{m0}^2 F_{m2} + \chi_{m1}^2 F_{m1} + \chi_{m2}^2 F_{m0} = -(\gamma_m + \gamma_{m-1}) \frac{d F_{m+11}}{du} \dots \\ + (\gamma_{m+1} + \gamma_m) \frac{d F_{m+11}}{du} + 2i\eta \frac{d}{du} (F_{m-10} - F_{m+10}) - 2 \frac{d^2 F_{m0}}{du^2} - \frac{d^2}{du^2} (F_{m-20} + F_{m+20}) \\ k G_{m2} = \frac{d F_{m2}}{du} + \gamma_{m-1} F_{m-11} + \gamma_{m+1} F_{m+11} + 2 \frac{d F_{m0}}{du} - \frac{d}{du} (F_{m+20} + F_{m-20}) \dots \\ - i\eta (F_{m-10} - F_{m+10}) \end{cases} \quad \text{III.11}$$

A partir de cet ordre on peut déduire d'une façon générale le système différentiel (III - 12) pour l'ordre $n \geq 2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 F_{mn}}{du^2} + \sum_{j=0}^n \chi_{mj} F_{mn-j} = -(\gamma_{m-1} + \gamma_m) \frac{dF_{m-1, n-1}}{du} + (\gamma_{m+1} + \gamma_m) \frac{dF_{m+1, n-1}}{du} \\ \dots - 2 \frac{d^2 F_{m, n-2}}{du^2} + 2i \sum_{j=2}^n \eta_{j-1} \frac{d}{du} (F_{m-1, n-j} - F_{m+1, n-j}) + \frac{d^2}{du^2} (F_{m-2, n-2} + F_{m+2, n-2}) \\ k G_{mn} = \frac{dF_{mn}}{du} + \gamma_{m-1} F_{m+1, n-1} - \gamma_{m+1} F_{m-1, n-1} + 2 \frac{dF_{m, n-2}}{du} - \frac{dF_{m+2, n-2}}{du} \dots \\ \dots - \frac{dF_{m-2, n-2}}{du} - i \sum_{j=2}^n \eta_{j-1} (F_{m-1, n-j} - F_{m+1, n-j}). \end{array} \right.$$

III. 12.

III - 3: LA RESOLUTION POUR L'ORDRE ZERO.

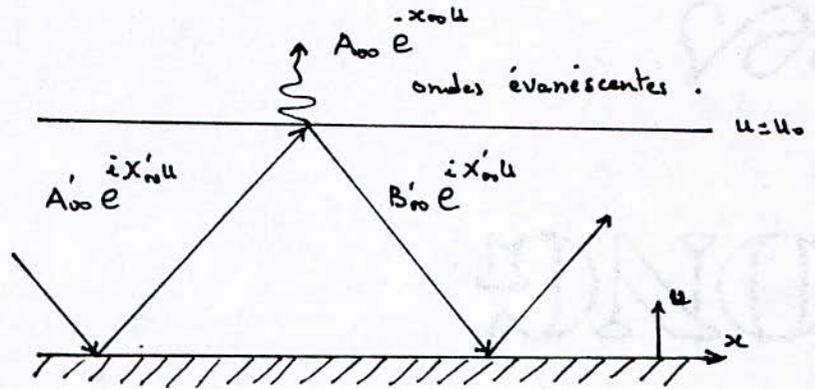
C'est le cas du guide lisse. ($F_{m0} = 0$ pour $m \neq 0$).

Le système différentiel est le suivant:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{00}}{du^2} + \chi_{00}^2 F_{00} = 0 \\ k G_{00} = \frac{dF_{00}}{du} \end{cases}$$

III.13

$\exp i(\omega t - \delta x)$
ondes guidées.



Pour qu'il y ait propagation guidée sans pertes, la constante δ_0 doit satisfaire la condition $k < \delta_0 < k'$; ($k' = nk$), k dans le vide et k' dans le diélectrique.

REMARQUE: Si $\delta_0 < k$ on a affaire à un mode de fuite.

Si $\delta_0 > nk$ la propagation n'est plus possible (au delà de la coupure).

Si $u > u_0$ milieu vide.

On a $\chi_{00}^2 = -\alpha_{00}^2 < 0$; avec α_{00} réel.

Le système d'équations différentielles devient:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{00}}{du^2} - \alpha_{00}^2 F_{00} = 0 \\ k G_{00} = \frac{dF_{00}}{du} \end{cases}$$

III.14

La solution de la première équation est de la forme:

$$F_{oo}(u) = A_{oo} e^{-\chi_{oo} u} + B_{oo} e^{\chi_{oo} u}$$

A l'infini, l'amplitude du champ doit rester finie, donc le deuxième terme de la solution n'est pas acceptable physiquement et la solution est de la forme:

$$\begin{cases} F_{oo}(u) = A_{oo} e^{-\chi_{oo} u} \\ k G_{oo}(u) = -\chi_{oo} A_{oo} e^{-\chi_{oo} u} \end{cases} \quad \text{III.15}$$

A_{oo} est une constante d'intégration.

Si $0 < u < u_0$: milieu diélectrique.

Dans ce cas on a : $\chi_{oo}^2 = \chi_{oo}^{\prime 2} > 0$

La solution du système (III -13) est comme suit :

$$\begin{cases} F'_{oo}(u) = A'_{oo} e^{i\chi'_{oo} u} + B'_{oo} e^{-i\chi'_{oo} u} \\ k' G'_{oo}(u) = +i\chi'_{oo} (A'_{oo} e^{i\chi'_{oo} u} - B'_{oo} e^{-i\chi'_{oo} u}) \end{cases} \quad \text{III.16}$$

A'_{oo} et B'_{oo} sont des constantes d'intégrations.

A - Mode transverse électrique (TE).

$$F = E_z, \quad G = ZH_x$$

A -1 : Conditions aux limites:

$$\text{Pour } u = 0 ; F'_{oo}(0) = 0.$$

$$\text{Pour } u = u_0 : \begin{cases} F_{oo}(u_0) = F'_{oo}(u_0) \\ kG_{oo}(u_0) = k'G'_{oo}(u_0). \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{00} e^{-x_{00} u_0} - A'_{00} e^{i \chi'_{00} u_0} - B'_{00} e^{-i \chi'_{00} u_0} = 0 \\ -x_{00} A_{00} e^{-x_{00} u_0} - i \chi'_{00} A'_{00} e^{i \chi'_{00} u_0} + i \chi'_{00} B'_{00} e^{-i \chi'_{00} u_0} = 0 \\ A'_{00} + B'_{00} = 0 \end{array} \right.$$

On a un système de trois équations à trois inconnues et on a des solutions non nulles si et seulement si le déterminant du système est nul (système linéaire est homogène), ce qui nous donne l'équation de dispersion suivante:

$$\operatorname{tg} \chi'_{00} u_0 = - \frac{\chi'_{00}}{x_{00}} \quad \text{III.17}$$

Ou encore: $\operatorname{tg} (\chi'_{00} u_0 - N\pi) = - \frac{\chi'_{00}}{x_{00}} \quad \text{avec } N \in \mathbb{Z} \quad \text{III.18}$

A - 2 : Calcul des champs:

Les conditions aux limites nous ont permis de trouver que:

$$A'_{00} = - B'_{00}$$

ET $A_{00} = 2 i A'_{00} \sin \chi'_{00} u_0 \cdot e^{x_{00} u_0} = A_{00} \sin \chi'_{00} u_0 e^{x_{00} u_0}$

D'où :

Pour $u > u_0$: milieu vide:
$$\left\{ \begin{array}{l} F_{00}(u) = A_{00} \sin \chi'_{00} u_0 \cdot e^{x_{00}(u-u)} \\ k G_{00}(u) = -x_{00} A_{00} \sin \chi'_{00} u_0 \cdot e^{x_{00}(u-u)} \end{array} \right. \quad \text{III.19}$$

Pour $0 < u < u_0$: milieu diélect:
$$\left\{ \begin{array}{l} F'_{00}(u) = A_{00} \sin \chi'_{00} u \\ k G'_{00}(u) = A_{00} \chi'_{00} \cos \chi'_{00} u \end{array} \right. \quad \text{III.20}$$

Ce mode est un mode antisymétrique.

A - 3 : Equation de dispersion.

$$\operatorname{tg} (X'_{00} u_0 - N\pi) = -\frac{X'_{00}}{x_{00}} \quad \text{ou encore.}$$

$$\operatorname{tg} (X'_{00} u_0 - (2N+1)\frac{\pi}{2}) = \frac{x_{00}}{X'_{00}} \quad \text{II 2.1}$$

En remplaçant x_{00} et X'_{00} par leur expression, il vient:

$$\operatorname{tg} \left(\sqrt{1 - \frac{\gamma_0^2}{n^2 k^2}} \cdot 2\pi n \frac{u_0}{\lambda} - (2N+1)\frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{\frac{\frac{\gamma_0^2}{n^2 k^2} - 1}{1 - \frac{\gamma_0^2}{n^2 k^2}}}$$

Ce qui donne l'équation:

$$\frac{u_0}{\lambda} = \left(\operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{\frac{\gamma_0^2}{n^2 k^2} - 1}{1 - \frac{\gamma_0^2}{n^2 k^2}}} + (2N+1)\frac{\pi}{2} \right) / 2\pi n \sqrt{1 - \frac{\gamma_0^2}{n^2 k^2}} \quad \text{III 2.2}$$

B - Mode transverse magnétique (TM).

$$F = ZH_z \quad \text{et} \quad G = -E_x.$$

B - 1 : Conditions aux limites:

$$\text{Pour } u = 0 : G'_{00}(0) = 0.$$

$$\text{Pour } u = u_0 : \begin{cases} G'_{00}(u_0) = G'_{00}(u_0) \\ \frac{F'_{00}(u)}{Z'} = \frac{F'_{00}(u_0)}{Z} \end{cases}$$

Ce qui se traduit par:

$$\begin{cases} A'_{00n} X'_{00} - X'_{00} B'_{00n} = 0 \\ -x_{00} n A_{00n} e^{-x_{00} u_0} - i X'_{00} A'_{00n} e^{i X'_{00} u_0} + i X'_{00} B'_{00n} e^{-i X'_{00} u_0} = 0 \\ A_{00n} e^{-x_{00} u_0} - n A'_{00n} e^{i X'_{00} u_0} - n B'_{00n} e^{-i X'_{00} u_0} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Avec: } Z = \sqrt{\frac{N_0}{\epsilon_0}} = nZ' \quad \text{et} \quad k' = nk \quad (k = \omega/v).$$

De même qu'au mode TE, on a trois équations à trois inconnues et on a des solutions non nulles si et seulement si le déterminant est nul ; ce qui nous donne l'équation de dispersion suivante:

$$\operatorname{tg} \chi'_{00} u_0 = n^2 \frac{\chi_{00}}{\chi'_{00}} \quad \text{III.23}$$

Ou encore:
$$\operatorname{tg} (\chi'_{00} u_0 - N\pi) = n^2 \frac{\chi_{00}}{\chi'_{00}} \quad N \in \mathbb{Z} \quad \text{III.24}$$

B - 2 : Calcul des champs:

Les conditions aux limites nous ont permis de trouver que:

$$A'_{00n} = B'_{00n}$$

Et:
$$A_{00n} = 2n A'_{00n} \cos \chi'_{00} u_0 \cdot e^{\chi_{00} u_0} = n A_{00n} \cos \chi_{00} u_0 \cdot e^{\chi_{00} u_0}$$

D'où :

Pour $u > u_0$: milieu vide :
$$\begin{cases} F_{00}(u) = n A_{00n} \cos \chi'_{00} u_0 \cdot e^{\chi_{00}(u-u)} \\ k G_{00}(u) = -n \chi_{00} A_{00n} \cos \chi'_{00} u_0 \cdot e^{\chi_{00}(u-u)} \end{cases} \quad \text{III.25}$$

Pour $0 < u < u_0$: milieu diélect:
$$\begin{cases} F'_{00}(u) = A_{00n} \cos \chi'_{00} u \\ k' G'_{00}(u) = -A_{00n} \chi'_{00} \sin \chi'_{00} u \end{cases} \quad \text{III.26}$$

Ce mode est un mode symétrique.

B - 3 : Equation de dispersion:

$$\operatorname{tg} (\chi'_{00} u_0 - N\pi) = n^2 \frac{\chi_{00}}{\chi'_{00}}$$

En remplaçant χ_{00} et χ'_{00} par leur expression, il vient:

$$\frac{u_0}{\lambda} = \left(\operatorname{Arctg} n^2 \sqrt{\frac{\chi_1^2 - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{\chi_1^2}{n^2 k^2}}} + N\pi \right) / 2\pi n \sqrt{1 - \frac{\chi_1^2}{n^2 k^2}} \quad \text{III.27}$$

Soit un guide diélectrique d'indice $n = 1,414$, la condition de propagation guidée est: $k < \gamma_0 < nk$; soit $1/n < \gamma_0/nk < 1$.

C'est à dire: $0,707 < \gamma_0/nk < 1$.

Pour les modes TE, les graphes de dispersion ont pour équation:

$$\frac{u_0}{\lambda} = \left(\text{Arctg} \sqrt{\frac{\frac{\gamma_0^2}{n^2 k^2} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{\gamma_0^2}{n^2 k^2}}} + (2N+1)\frac{\pi}{2} \right) / 2\pi n \sqrt{1 - \frac{\gamma_0^2}{n^2 k^2}}.$$

Le rapport u_0/λ est défini sur l'intervalle $]0,707; 1[$.

Pour les modes TM, les graphes de dispersion ont pour équation:

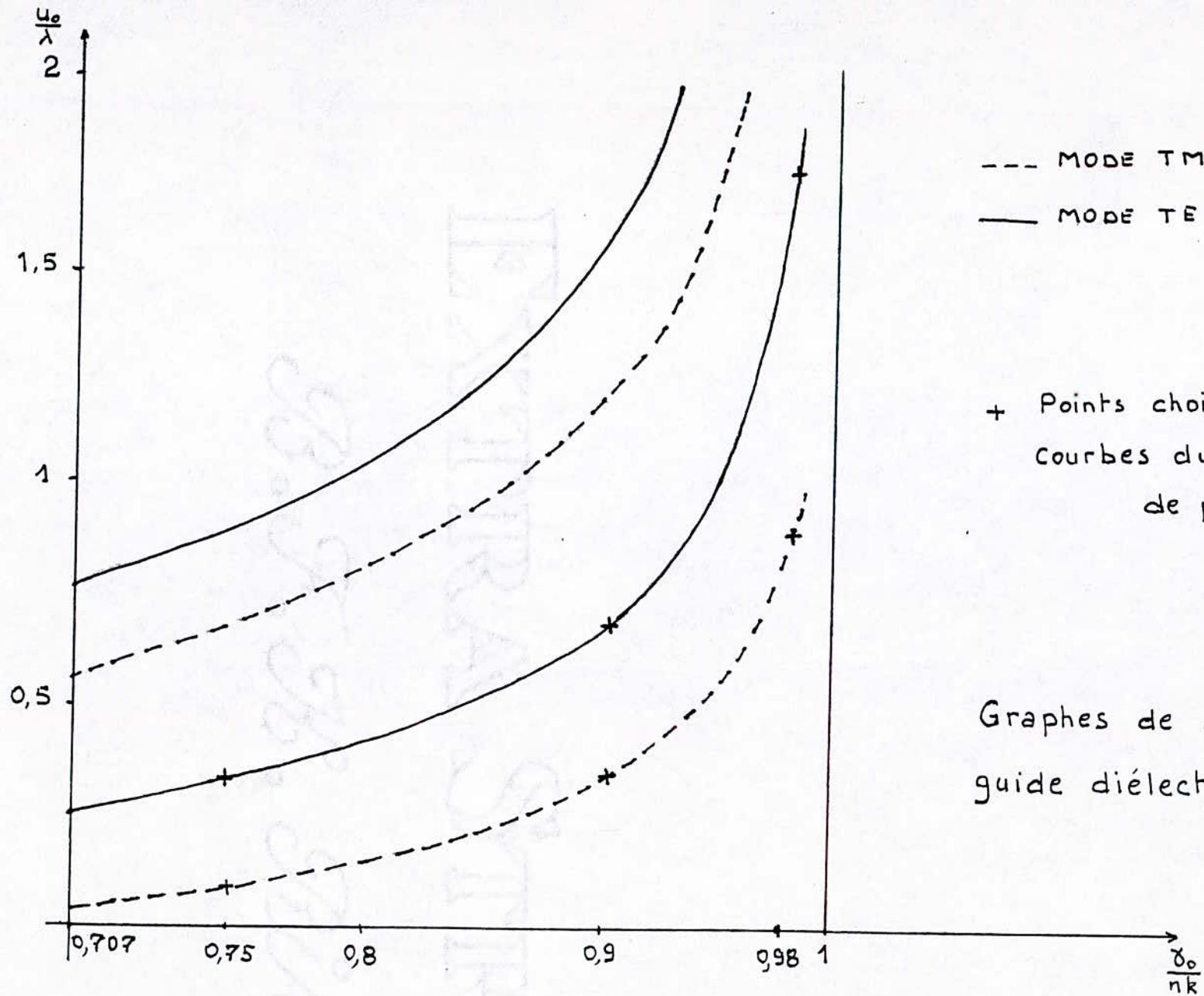
$$\frac{u_0}{\lambda} = \left(\text{Arctg} \sqrt{\frac{\frac{\gamma_0^2}{n^2 k^2} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{\gamma_0^2}{n^2 k^2}}} + N\pi \right) / 2\pi n \sqrt{1 - \frac{\gamma_0^2}{n^2 k^2}}.$$

Le rapport u_0/λ est défini aussi sur l'intervalle $]0,707; 1[$.

Le fondamental pour chaque mode est donné par $N=0$.

Nous donnons ci-joint les graphes de dispersion tracés par programme BASIC à l'aide d'un micro-ordinateur.

```
10 CL:
20 A=.5 :B=1 :C=1
30 LOCATE 25,20 :PRINT"GRAPHES DE DISPERSION DU GUIDE LISSE"
40 LINE (60,208)-(639,208)
50 LINE (60,0)-(60,208)
60 LINE (175,208)-(175,210)
70 LINE (290,208)-(290,210)
80 LINE (410,0)-(410,208)
90 FOR N=0 TO 2 STEP 1
100 FOR S=425 TO 590 STEP A
110 T=S/600
120 W=(SOR((T*T-.5)/(1-T*T)))*B
130 U=ATN(W)+1.57*(2*N+C)
140 V=W*(3.57*SOR(1-T*T))
150 X=2*S-T*90
160 Y=208-104*V
170 PSET (X,Y)
180 NEXT S
190 NEXT N
200 A=1 :B=S+1 :C=0
210 IF B > 2 THEN END
220 GOTO 90
```



La solution de la première équation différentielle de ce système est la somme de deux solutions dont l'une est la solution de l'équation homogène sans second membre, et l'autre est la solution particulière de l'équation.

Solution de l'équation homogène sans second membre:

$$F_{01h}(u) = A_{01} e^{-x_{00}u} + B_{01} e^{x_{00}u}.$$

On trouve tout de suite que B_{01} est nul car l'amplitude des champs, devant être finie à l'infini, le deuxième terme de la solution n'est pas acceptable physiquement d'où:

$$F_{01h}(u) = A_{01} e^{-x_{00}u}$$

Solution particulière de l'équation:

La solution particulière de l'équation différentielle est de la forme:

$$F_{01p}(u) = C_{01} u e^{-x_{00}u}$$

Pour déterminer C_{01} , il suffit de remplacer F_{01} dans l'équation différentielle par la solution particulière F_{01p} , on trouve:

$$C_{01} = \frac{\chi_{01}^2}{2x_{00}} A_{00} \sin \chi'_{00} u_0 \cdot e^{x_{00}u_0}$$

Et la solution s'écrit:

$$\begin{cases} F_{01}(u) = \left(A_{01} + u \frac{\chi_{01}^2}{2x_{00}} A_{00} \sin \chi'_{00} u_0 \cdot e^{x_{00}u_0} \right) e^{-x_{00}u} \\ k G_{01}(u) = \left(-x_{00} A_{01} + \frac{\chi_{01}^2}{2x_{00}} A_{00} \sin \chi'_{00} u_0 \cdot (1 - u x_{00}) e^{x_{00}u_0 - x_{00}u} \right) e \end{cases} \quad \text{II.30}$$

Où A_{00} est donnée et A_{01} une constante d'intégration à déterminer.

Si $0 < u < u_0$: milieu diélectrique: on a : $\chi_{00}^2 = \chi_{00}'^2 > 0$

Le système s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{01}'}{du^2} + \chi_{00}'^2 F_{01}' = -\chi_{00}'^2 A_{00} \sin \chi_{00}' u \\ \epsilon G_{01}' = \frac{dF_{01}'}{du} \end{cases}$$

Solution de l'équation homogène: $\frac{d^2 F_{01}'}{du^2} + \chi_{00}'^2 F_{01}' = 0$.

$$F_{01h}'(u) = A_{01}' e^{i\chi_{00}' u} + B_{01}' e^{-i\chi_{00}' u}$$

Solution particulière de l'équation :

La solution particulière est de la forme:

$$F_{01p}'(u) = u (C_{01}' \cos \chi_{00}' u + D_{01}' \sin \chi_{00}' u)$$

qu'on reporte dans l'équation différentielle pour trouver les constantes C_{01}' et D_{01}' , on aboutit à:

$$2(-\chi_{00}' C_{01}' \sin \chi_{00}' u + \chi_{00}' D_{01}' \cos \chi_{00}' u) = -\chi_{00}'^2 A_{00} \sin \chi_{00}' u.$$

On trouve donc que:

$$C_{01}' = \frac{\chi_{00}'^2 A_{00}}{2\chi_{00}'}, \quad D_{01}' = 0$$

D'où la solution particulière: $F_{01p}'(u) = \frac{\chi_{00}'^2 A_{00}}{2\chi_{00}'} u \cos \chi_{00}' u$.

Et la solution du système s'écrit alors:

$$\begin{cases} F_{01}'(u) = A_{01}' e^{i\chi_{00}' u} + B_{01}' e^{-i\chi_{00}' u} + \frac{\chi_{00}'^2 A_{00}}{2\chi_{00}'} u \cos \chi_{00}' u. \\ \epsilon G_{01}'(u) = i\chi_{00}' (A_{01}' e^{i\chi_{00}' u} - B_{01}' e^{-i\chi_{00}' u}) + \frac{\chi_{00}'}{2\chi_{00}'} A_{00} \cos \chi_{00}' u - \frac{\chi_{00}'^2 A_{00}}{2} u \sin \chi_{00}' u. \end{cases} \quad \text{III.31}$$

Où A_{00} est donnée, A_{01}' et B_{01}' sont des constantes d'intégration à déterminer. Les conditions aux limites nous permettent de déterminer les constantes A_{01}' , A_{00} et B_{01}' .

CONDITIONS AUX LIMITES.

Le raccordement des champs pour $u = u_0$ et la condition $F'_{01}(0) = 0$, nous permettent d'écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(A_{01} + u_0 \frac{\chi_{01}^2}{2\chi_{00}} A_{00} \sin \chi'_{00} u_0 \cdot e^{x_{00} u_0} \right) e^{-x_{00} u_0} = A'_{01} e^{i\chi'_{00} u_0} + B'_{01} e^{-i\chi'_{00} u_0} + \frac{\chi_{01}^2}{2\chi'_{00}} A_{00} u_0 \cos \chi'_{00} u_0 \\ \left(-x_{00} A_{01} + \frac{\chi_{01}^2}{2\chi_{00}} A_{00} \sin \chi'_{00} u_0 (1 - x_{00} u_0) e^{x_{00} u_0} \right) e^{-x_{00} u_0} = i\chi'_{00} (A'_{01} e^{i\chi'_{00} u_0} - B'_{01} e^{-i\chi'_{00} u_0}) + \\ \quad + \frac{\chi_{01}^2}{2\chi'_{00}} A_{00} \cos \chi'_{00} u_0 - \frac{\chi_{01}^2}{2} A_{00} u_0 \sin \chi'_{00} u_0 \\ A'_{01} + B'_{01} = 0 \end{array} \right. \quad \text{III.32}$$

De la dernière équation on tire: $B'_{01} = -A'_{01}$

Reportons ceci dans les deux premières équations du système (III-32) nous obtenons le système:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{01} e^{-x_{00} u_0} - A'_{01} 2i \sin \chi'_{00} u_0 = -\frac{\chi_{01}^2}{2\chi_{00}} u_0 A_{00} \sin \chi'_{00} u_0 + \frac{\chi_{01}^2}{2\chi'_{00}} A_{00} u_0 \cos \chi'_{00} u_0 \\ x_{00} A_{01} e^{-x_{00} u_0} + A'_{01} 2i \chi'_{00} \cos \chi'_{00} u_0 = \frac{\chi_{01}^2}{2\chi_{00}} A_{00} (1 - x_{00} u_0) \sin \chi'_{00} u_0 - \frac{\chi_{01}^2}{2\chi'_{00}} A_{00} \cos \chi'_{00} u_0 \\ \quad + \frac{\chi_{01}^2}{2} A_{00} u_0 \sin \chi'_{00} u_0 \end{array} \right.$$

III.33

On a donc un système de deux équations à deux inconnues dont le déterminant est:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2i \chi'_{00} \cos \chi'_{00} u_0 \cdot e^{-x_{00} u_0} + 2i \sin \chi'_{00} u_0 \cdot e^{-x_{00} u_0} \cdot x_{00} \\ \Delta &= 2i e^{-x_{00} u_0} (\chi'_{00} + x_{00} \operatorname{tg} \chi'_{00} u_0) \cos \chi'_{00} u_0 \end{aligned}$$

Or l'équation de dispersion à l'ordre zéro pour ce mode est:

$\text{tg } \chi_{00}' u_0 = - \frac{\chi_{00}'}{\chi_{00}}$, le déterminant est donc nul et il n'existe qu'une solution possible, qui est la proportionnalité des coefficients.

On multiplie l'équation (III -33a) par χ_{00} et on égalise les deuxièmes membres des deux équations du système (III -33), on aboutit à l'équation suivante:

$$\chi_{01}'^2 (\chi_{00}^3 u_0 + \chi_{00}^2 + \chi_{00}'^2 u_0 \chi_{00}) + \chi_{01}^2 \chi_{00}'^2 = 0$$

qui n'est vérifiée que si $\chi_{01}'^2 = \chi_{01}^2 = 0$.

On conclue donc que pour le fondamental, le système différentiel s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{01}}{du^2} + \chi_{00}^2 F_{01} = 0 \\ k G_{01} = \frac{dF_{01}}{du} \end{cases} \quad \text{III.34.}$$

dont la solution est identique à celle du cas de l'ordre zéro.
 On obtient les mêmes résultats pour le mode TM.

4 - 2 : L'harmonique $m = 1$:

Le système (III - 10) s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{11}}{du^2} + \chi_{10}^2 F_{11} = -(\gamma_0 + \gamma_1) \frac{dF_{00}}{du} \\ k G_{11} = \frac{dF_{11}}{du} + \gamma_0 F_{00} \end{cases}$$

4 - 2 - 1 : MODE TE :

Si $u > u_0$: milieu vide : on a : $\chi_{10}^2 = k^2 - (\gamma_0 + \beta)^2 = -\chi_{10}^2 < 0$

Le système différentiel s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{11}}{du^2} - \chi_{10}^2 F_{11} = (\gamma_0 + \gamma_1) \chi_{00} A_{00} \sin \chi'_{00} u_0 \cdot e^{\chi_{00}(u_0 - u)} \\ k G_{11} = \frac{dF_{11}}{du} + \gamma_0 A_{00} \sin \chi'_{00} u_0 \cdot e^{\chi_{00}(u_0 - u)} \end{cases}$$

Et la solution s'écrit:

$$\begin{cases} F_{11}(u) = A_{11} e^{-\chi_{10} u} - \frac{\chi_{00} A_{00} \sin \chi'_{00} u_0}{\beta} e^{\chi_{00}(u_0 - u)} \\ k G_{11}(u) = -\chi_{10} A_{11} e^{-\chi_{10} u} + A_{00} \left(\frac{\chi_{00}^2}{\beta} + \gamma_0 \right) \sin \chi'_{00} u_0 \cdot e^{\chi_{00}(u_0 - u)} \end{cases} \quad \text{III.35}$$

Si $0 < u < u_0$: milieu diélectrique : on a : $\chi_{10}^2 = \chi_{10}^{\prime 2} > 0$

Le système différentiel s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F'_{11}}{du^2} + \chi_{10}^{\prime 2} F'_{11} = -(\gamma_0 + \gamma_1) \chi'_{00} A_{00} \cos \chi'_{00} u \\ k G'_{11} = \frac{dF'_{11}}{du} + \gamma_0 A_{00} \sin \chi'_{00} u \end{cases}$$

Et la solution s'écrit:

$$\begin{cases} F'_{11}(u) = A'_{11} e^{i\chi_{10} u} + B'_{11} e^{-i\chi_{10} u} + \frac{\chi'_{00} A_{00} \cos \chi'_{00} u}{\beta} \\ k G'_{11}(u) = i\chi_{10} (A'_{11} e^{i\chi_{10} u} - B'_{11} e^{-i\chi_{10} u}) + A_{00} \left(-\frac{\chi_{00}^2}{\beta} + \gamma_0 \right) \sin \chi'_{00} u \end{cases} \quad \text{III.36}$$

CONDITIONS AUX LIMITES.

Le raccordement des champs pour $u = u_0$ et la condition $F'_{11}(0) = 0$, nous donnent:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} e^{-x_{10} u_0} - A'_{11} e^{i x'_{10} u_0} - B'_{11} e^{-i x'_{10} u_0} = 0 \\ -x_{10} A_{11} e^{-x_{10} u_0} - i x'_{10} A'_{11} e^{i x'_{10} u_0} + i x'_{10} B'_{11} e^{-i x'_{10} u_0} = -\frac{A_{00}}{\beta} k^2 (n^2 - 1) \sin \chi'_{00} u_0 \\ -A'_{11} - B'_{11} = \frac{\chi'_{00}}{\beta} A_{00} \end{array} \right. \quad \text{III.37}$$

On a un système de trois équations à trois inconnues; de l'équation

(III -37c) on tire: $B'_{11} = -\left(A'_{11} + \frac{\chi'_{00}}{\beta} A_{00} \right)$

qu'on remplace dans (III -37a) et (III -37b), on aura donc le système:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} e^{-x_{10} u_0} - A'_{11} 2i \sin \chi'_{10} u_0 = -\frac{\chi'_{00}}{\beta} A_{00} e^{-i x'_{10} u_0} \\ -x_{10} A_{11} e^{-x_{10} u_0} - A'_{11} 2i x'_{10} \cos \chi'_{10} u_0 = -\frac{A_{00}}{\beta} \left[k^2 (n^2 - 1) \sin \chi'_{00} u_0 - i x'_{10} \chi'_{00} e^{-i x'_{10} u_0} \right] \end{array} \right.$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues (système linéaire non homogène). Il existe une solution à ce système si son déterminant est

différent de zéro; c'est à dire: $\operatorname{tg} \chi'_{10} u_0 \neq -\frac{\chi'_{10}}{x_{10}}$.

Si cette condition est vérifiée on trouve:

$$A'_{11} = -i \frac{A_{00}}{2\beta} \frac{k^2 (n^2 - 1) \sin \chi'_{00} u_0 + \chi'_{00} (x_{10} - i \chi'_{10}) e^{-i x'_{10} u_0}}{x_{10} \sin \chi'_{10} u_0 + \chi'_{10} \cos \chi'_{10} u_0} \quad \text{III.38}$$

$$A_{11} = \frac{A_{00}}{\beta} \frac{k^2 (n^2 - 1) \sin \chi'_{00} u_0 \sin \chi'_{10} u_0 - \chi'_{00} \chi'_{10} e^{-x_{10} u_0}}{x_{10} \sin \chi'_{10} u_0 + \chi'_{10} \cos \chi'_{10} u_0} \quad \text{III.39}$$

4 - 2 - 2 : MODE TM .

Si $u > u_0$: milieu vide : on a : $\chi_{10}^2 = -\chi_{10}^2 < 0$

Le système différentiel s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{11}}{du^2} - \chi_{10}^2 F_{11} = -(\gamma_0 + \gamma_1) n A_{00n} \cos \chi'_{00} u_0 \cdot \chi_{00} e^{\chi_{00}(u_0 - u)} \\ k G_{11} = \frac{dF_{11}}{du} + \gamma_0 n A_{00n} \cos \chi'_{00} u_0 \cdot e^{\chi_{00}(u_0 - u)} \end{cases}$$

Et la solution s'écrit:

$$\begin{cases} F_{11}(u) = A_{11n} e^{-\chi_{10} u} - \frac{\chi_{00} n A_{00n} \cos \chi'_{00} u_0}{\beta} e^{\chi_{00}(u_0 - u)} \\ k G_{11}(u) = -\chi_{10} A_{11n} e^{-\chi_{10} u} + n A_{00n} \left(\frac{\chi_{00}^2}{\beta} + \gamma_0 \right) \cos \chi'_{00} u_0 \cdot e^{\chi_{00}(u_0 - u)} \end{cases} \quad \text{III.40}$$

Si $0 < u < u_0$: milieu diélectrique: on a : $\chi_{10}^2 = \chi_{10}^2 > 0$.

Le système différentiel s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{11}}{du^2} + \chi_{10}^2 F_{11} = (\gamma_0 + \gamma_1) \chi'_{00} A_{00n} \cos \chi'_{00} u \\ k G_{11} = \frac{dF_{11}}{du} + \gamma_0 A_{00n} \sin \chi'_{00} u \end{cases}$$

Et la solution s'écrit:

$$\begin{cases} F_{11}'(u) = A_{11n}' e^{i\chi'_{10} u} + B_{11n}' e^{-i\chi'_{10} u} - \frac{\chi'_{00}}{\beta} A_{00n} \sin \chi'_{00} u \\ k G_{11}'(u) = i\chi'_{10} (A_{11n}' e^{i\chi'_{10} u} - B_{11n}' e^{-i\chi'_{10} u}) + A_{00n} \left(-\frac{\chi'_{00}}{\beta} + \gamma_0 \right) \cos \chi'_{00} u \end{cases} \quad \text{III.41}$$

CONDITION AUX LIMITES .

Le raccordement des champs pour $u = u_0$ et la condition $G_{11}'(0) = 0$ nous donnent:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11n} e^{-x_{10} u_0} - n A'_{11n} e^{i X'_{10} u_0} - n B'_{11n} e^{-i X'_{10} u_0} = n \frac{A_{00n} x_{00} (1-n^2) \cos X'_{10} u_0}{\beta} \\ -n x_{10} A_{11n} e^{-x_{10} u_0} - i X'_{10} A'_{11n} e^{i X'_{10} u_0} + i X'_{10} B'_{11n} e^{-i X'_{10} u_0} = A_{00n} \gamma_0 \delta_1 (1-n^2) \cos X'_{10} u_0 \\ i X'_{10} A'_{11n} - i X'_{10} B'_{11n} = -A_{00n} \left(\gamma_0 - \frac{X'_{00}{}^2}{\beta} \right) \end{array} \right. \quad \text{III.42}$$

Ce système de trois équations à trois inconnues (système linéaire non homogène), admet une solution si son déterminant est différent de zéro; c'est à dire: $\operatorname{tg} X'_{10} u_0 \neq n^2 \frac{x_{10}}{X'_{10}}$

Si cette condition est vérifiée; on cherche les inconnues A_{11n} , A'_{11n} et B'_{11n} .

De l'équation (III-42c), on tire la relation:

$$B'_{11n} = A'_{11n} - i \frac{A_{00n}}{X'_{10}} \left(\gamma_0 - \frac{X'_{00}{}^2}{\beta} \right)$$

On remplace dans (III-42a) et (III-42b) B'_{11n} par sa valeur, on trouvera le système:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11n} e^{-x_{10} u_0} - 2 A'_{11n} n \cos X'_{10} u_0 = -i n \frac{A_{00n}}{X'_{10}} \left(\gamma_0 - \frac{X'_{00}{}^2}{\beta} \right) e^{-i X'_{10} u_0} + n \frac{A_{00n} x_{00} (1-n^2) \cos X'_{10} u_0}{\beta} \\ -n x_{10} A_{11n} e^{-x_{10} u_0} + 2 A'_{11n} X'_{10} \sin X'_{10} u_0 = -A_{00n} \left(\gamma_0 - \frac{X'_{00}{}^2}{\beta} \right) e^{-i X'_{10} u_0} + \frac{A_{00n} \gamma_0 \delta_1 (1-n^2) \cos X'_{10} u_0}{\beta} \end{array} \right.$$

L' résolution de ce système nous donne:

$$A'_{11n} = \frac{A_{00n}}{2\beta} \frac{(X'_{00}{}^2 - \beta \gamma_0) \left(1 + i n \frac{x_{10}}{X'_{10}} \right) e^{-i X'_{10} u_0} + (1-n^2) (\gamma_0 \delta_1 + n^2 x_{10} x_{00}) \cos X'_{10} u_0}{X'_{10} \sin X'_{10} u_0 - n^2 x_{10} \cos X'_{10} u_0} \quad \text{III.43}$$

$$A_{11n} = \frac{n A_{00n}}{\beta} \frac{(X'_{00}{}^2 - \beta \gamma_0) + (1-n^2) (x_{00} X'_{10} \sin X'_{10} u_0 + \gamma_0 \delta_1 \cos X'_{10} u_0) \cos X'_{10} u_0}{X'_{10} \sin X'_{10} u_0 - n^2 x_{10} \cos X'_{10} u_0} e^{-x_{10} u_0} \quad \text{III.44}$$

4 - 3 : L'harmonique $m = -1$.

Le système (III -10) s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{-1}}{du^2} + \chi_{-1,0}^2 F_{-1} = (\gamma_0 + \gamma_1) \frac{dF_{00}}{du} \\ k G_{-1} = \frac{dF_{-1}}{du} - \gamma_0 F_{00} \end{cases}$$

On considère le cas où cette harmonique se propage aussi dans le vide c'est à dire le cas où $\chi_{-1,0}^2 = k^2 - (\gamma_0 - \beta)^2$ soit positif, et ceci revient à choisir la valeur de β . soit de D .

4 - 3 - 1 : MODE TE.

Si $0 < u < u_0$: milieu vide : on a : $\chi_{-1,0}^2 > 0$

Le système différentiel s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F_{-1}}{du^2} + \chi_{-1,0}^2 F_{-1} = -(\gamma_0 + \gamma_1) \chi_{00} A_{00} \sin \chi_{00} u_0 e^{x_{00}(u_0 - u)} \\ k G_{-1} = \frac{dF_{-1}}{du} - \gamma_0 A_{00} \sin \chi_{00}' u_0 e^{x_{00}(u_0 - u)} \end{cases}$$

Et la solution s'écrit donc:

$$\begin{cases} F_{-1}(u) = A_{-1} e^{-i\chi_{-1,0} u} - \frac{\chi_{00} A_{00} \sin \chi_{00}' u_0}{\beta} e^{x_{00}(u_0 - u)} \\ k G_{-1}(u) = -i\chi_{-1,0} A_{-1} e^{-i\chi_{-1,0} u} + \frac{A_{00} (\chi_{00}^2 - \beta\gamma_0) \sin \chi_{00}' u_0}{\beta} e^{x_{00}(u_0 - u)} \end{cases} \quad \text{III.45}$$

Si $0 < u < u_0$: milieu diélectrique: on a: $\chi_{-1,0}^2 = \chi_{-1,0}'^2 > 0$

Le système différentiel s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{d^2 F'_{-11}}{du^2} + \chi'_{-10} F'_{-11} = -(\gamma_0 + \gamma_1) \chi'_{00} A_{00} \cos \chi'_{00} u. \\ k G'_{-11} = \frac{dF'_{-11}}{du} + \gamma_0 A_{00} \sin \chi'_{00} u \end{cases}$$

Et la solution s'écrit:

$$\begin{cases} F'_{-11}(u) = A'_{-11} e^{i\chi'_{-10} u} + B'_{-11} e^{-i\chi'_{-10} u} + \frac{\chi'_{00}}{\beta} A_{00} \cos \chi'_{00} u \\ k G'_{-11}(u) = i\chi'_{-10} (A'_{-11} e^{i\chi'_{-10} u} - B'_{-11} e^{-i\chi'_{-10} u}) + \frac{A_{00}}{\beta} (-\chi'^2_{00} - \beta\gamma_0) \sin \chi'_{00} u \end{cases} \quad \text{III.46}$$

CONDITIONS AUX LIMITES.

$$\text{Pour } u = u_0: \begin{cases} F'_{-11}(u_0) = F'_{11}(u_0) \\ k G'_{-11}(u_0) = k' G'_{11}(u_0) \end{cases}$$

$$\text{Pour } u = 0: F'_{11}(0) = 0$$

C'est à dire:

$$\begin{cases} A'_{-11} e^{-i\chi'_{-10} u_0} - A'_{-11} e^{i\chi'_{-10} u_0} - B'_{-11} e^{-i\chi'_{-10} u_0} = 0 \\ i\chi'_{-10} A'_{-11} e^{-i\chi'_{-10} u_0} - i\chi'_{-10} A'_{-11} e^{i\chi'_{-10} u_0} + i\chi'_{-10} B'_{-11} e^{-i\chi'_{-10} u_0} = \frac{A_{00}}{\beta} k^2 (n^2 - 1) \sin \chi'_{00} u_0 \\ A'_{-11} + B'_{-11} = -\frac{\chi'_{00}}{\beta} A_{00}. \end{cases} \quad \text{II.47.}$$

On a un système de trois équations à trois inconnues. Ce système admet des solutions si son déterminant est différent de zéro; c'est à dire:

$$\text{tg } \chi'_{-10} u_0 \neq i \frac{\chi'_{-10}}{\chi'_{00}}$$

Si cette condition est vérifiée, on trouve:

$$B'_{-11} = - \left(A'_{-11} + \frac{X'_{10}}{\beta} A_{00} \right) \quad \text{III.48}$$

$$A'_{-11} = -i \frac{A_{00}}{2\beta} \frac{k^2 (n^2 - 1) \sin X'_{00} u_0 + i X'_{00} (X_{-10} - X'_{-10}) e^{-i X'_{-10} u_0}}{X'_{-10} \cos X'_{-10} u_0 + i X_{-10} \sin X'_{-10} u_0} \quad \text{III.49}$$

$$A_{-11} = \frac{A_{00}}{\beta} \frac{k^2 (n^2 - 1) \sin X'_{00} u_0 \cdot \sin X'_{-10} u_0 - X'_{00} X'_{-10} e^{-i X'_{-10} u_0}}{X'_{-10} \cos X'_{-10} u_0 + i X_{-10} \sin X'_{-10} u_0} \quad \text{III.50}$$

4 - 3 - 2 : MODE TM.

Si $u > u_0$: milieu vide:

La solution du système (III -10) s'écrit:

$$F_{-11}(u) = A_{-11n} e^{-i X_{-10} u} - \frac{X_{00}}{\beta} n A_{00n} \cos X'_{00} u_0 \cdot e^{X_{00}(u_0 - u)} \quad \text{III.51}$$

$$k G_{-11}(u) = -i X_{-10} A_{-11n} e^{-i X_{-10} u} + n A_{00n} \left(\frac{X_{00}^2}{\beta} + \gamma_0 \right) \cos X'_{00} u \cdot e^{X_{00}(u_0 - u)}$$

Si $0 < u < u_0$: milieu diélectrique:

De même la solution s'écrit:

$$\begin{cases} F'_{-11}(u) = A'_{-11n} e^{i X'_{-10} u} + B'_{-11n} e^{-i X'_{-10} u} - \frac{A_{00n}}{\beta} X_{00} \sin X'_{00} u \\ k G'_{-11}(u) = i X'_{-10} (A'_{-11n} e^{i X'_{-10} u} - B'_{-11n} e^{-i X'_{-10} u}) - A_{00n} \left(\frac{X_{00}^2}{\beta} + \gamma_0 \right) \cos X'_{00} u \end{cases} \quad \text{III.52}$$

CONDITIONS AUX LIMITES.

$$\text{Pour } u = u_0 : \begin{cases} \frac{F_{-11}(u_0)}{Z} = \frac{F'_{-11}(u_0)}{Z'} \\ G_{-11}(u_0) = G'_{-11}(u_0) \end{cases}$$

Pour $u = 0$: $G'_{-11}(0) = 0$.

Avec le même raisonnement qu'au mode TE, le système obtenu admet de solutions si son déterminant est différent de zéro; c'est à dire:

$$\operatorname{tg} \chi'_{-10} u_0 \neq i \frac{\chi'_{-10}}{n^2 \chi'_{-10}}.$$

Si cette condition est vérifiée on trouve:

$$B'_{-11n} = A'_{-11n} + i \frac{A_{00n}}{\beta \chi'_{-10}} (\chi'^2_{00} + \beta \gamma_0) \quad \text{III.53}$$

$$A'_{-11n} = \frac{A_{00}}{2\beta} \frac{(1-n^2) \cos \chi'_{00} u_0 \cdot (\gamma_0 \gamma_{-1} + n^2 \chi'_{-10} \chi'_{00}) + (\chi'^2_{00} + \beta \gamma_0) (1-n^2 \frac{\chi'_{-10}}{\chi'_{00}}) e^{-i \chi'_{-10} u_0}}{\chi'_{-10} \sin \chi'_{-10} u_0 - i n^2 \chi'_{-10} \cos \chi'_{-10} u_0} \quad \text{III.54}$$

$$A_{-11n} = n \frac{A_{00}}{\beta} \frac{[(1-n^2) \cos \chi'_{00} u_0 [\chi'_{00} \chi'_{-10} \sin \chi'_{-10} u_0 + \gamma_0 \gamma_{-1} \cos \chi'_{-10} u_0] + (1-n^2 \gamma_0 \gamma_{-1}) e^{i \chi'_{00} u_0}}{\chi'_{-10} \sin \chi'_{-10} u_0 - i n^2 \chi'_{-10} \cos \chi'_{-10} u_0} \quad \text{III.55}$$

CHAPITRE IV: BILAN ENERGETIQUE

CHAPITRE IV : BILAN ENERGETIQUE.

IV - 1 : PUISSANCE TRANSMISE A L'ORDRE ZERO.

Pour déterminer cette puissance, il faut calculer le vecteur de Poynting, donc il faut connaître les composantes des champs.

A partir des équations de Maxwell sous forme covariante, (I.16) et (I.17) on détermine H_y en fonction de E_z pour le mode TE et E_y en fonction de H_z pour le mode TM, donc on a:

Pour le mode TE : $i \mu \omega H_y = -i \gamma_0 E_z$ IV.1

Pour le mode TM : $i \epsilon \omega E_y = i \gamma_0 H_z$ IV.2.

Les composantes N^i du vecteur de Poynting sont données par la relation:

$$N^i = \epsilon^{ijk} E_j H_k \quad \text{I.18}$$

Pour la puissance transmise, c'est la composante N^x qui nous intéresse.

$$N^x = E_u H_z - H_u E_z \quad \text{IV.3}$$

La valeur moyenne de N^x est donnée par:

$$\bar{N}^x = \frac{1}{2} \text{Re} (E_u H_z^* - H_u^* E_z) \quad \text{IV.4}$$

et la puissance transmise par unité de largeur du guide ($z = 1$) est:

$$\mathcal{P}_t = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{N}^x du dz = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{N}^x du \quad \text{IV.5}$$

Où encore pour notre cas:

$$\mathcal{P}_t = \int_0^{u_0} \bar{N}_{\text{dilatée}}^x du + \int_{u_0}^{\infty} \bar{N}_{\text{vide}}^x du \quad \text{IV.6}$$

Pour le mode TE :

$$\bar{N}^x = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (H_u^* E_z) = \frac{\gamma_0}{2\mu\omega} |E_z|^2 = \frac{\gamma_0}{2kz} |E_z|^2 \quad \text{IV. 7.}$$

Les expressions des champs pour ce mode s'écrivent:

$$E_z = F_{00} e^{i(\omega t - \gamma_0 x)} = A_{00} \sin \chi'_{00} u_0 \cdot e^{-\chi_{00}(u-u_0)} \cdot e^{i(\omega t - \gamma_0 x)}$$

$$E'_z = F'_{00} e^{i(\omega t - \gamma_0 x)} = A_{00} \sin \chi'_{00} u \cdot e^{i(\omega t - \gamma_0 x)}$$

$$\mathcal{P}_t = \frac{\gamma_0}{2kz} \left[\int_0^{u_0} |A_{00}|^2 \sin^2 \chi'_{00} u \, du + \int_{u_0}^{\infty} |A_{00}|^2 \sin^2 \chi'_{00} u_0 \cdot e^{-2\chi_{00}(u-u_0)} \, du \right]$$

$$= |A_{00}|^2 \frac{\gamma_0}{4kz} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(u - \frac{\sin 2\chi'_{00} u}{2\chi'_{00}} \right) \right]_0^{u_0} + \sin^2 \chi'_{00} u_0 \cdot \frac{e^{-2\chi_{00}(u-u_0)}}{-2\chi_{00}} \Big|_{u_0}^{\infty} \right\}$$

$$= |A_{00}|^2 \frac{\gamma_0}{4kz} \left[u_0 - \frac{\sin 2\chi'_{00} u_0}{2\chi'_{00}} + \sin^2 \chi'_{00} u_0 \right]$$

$$= \frac{|A_{00}|^2}{\chi_{00}} \frac{\gamma_0}{4kz} \left[u_0 \chi_{00} + \cot \chi'_{00} \chi_{00} \cos \chi'_{00} u_0 \cdot \sin \chi'_{00} u_0 + \sin^2 \chi'_{00} u_0 \right]$$

$$\mathcal{P}_t = \frac{\gamma_0}{4kz} \frac{|A_{00}|^2}{\chi_{00}} (1 + u_0 \chi_{00}). \quad \text{IV. 8}$$

Pour le mode TM :

$$\bar{N}^x = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_u H_z^*) = \frac{\gamma_0}{2\varepsilon\omega} |H_z|^2 = \frac{\gamma_0 z}{2k} |H_z|^2.$$

Les expressions des champs pour ce mode s'écrivent:

$$H_z = \frac{F_{z0}}{Z} e^{i(\omega t - \gamma_0 x)} = \frac{n}{Z} A_{\text{norm}} \cos \chi_{\text{no}}' u_0 \cdot e^{-\chi_{\text{no}}(u-u_0)} e^{i(\omega t - \gamma_0 x)}$$

$$H_z' = \frac{F_{z0}'}{Z} e^{i(\omega t - \gamma_0 x)} = \frac{A_{\text{norm}}}{Z} \cos \chi_{\text{no}}' u_0 \cdot e^{i(\omega t - \gamma_0 x)}$$

Et avec le même raisonnement qu'au mode TE, on trouve :

$$\mathcal{P}_E = \frac{\gamma_0}{4kZ} \frac{|A_{\text{norm}}|^2}{\chi_{\text{no}}} \left(u_0 \chi_{\text{no}} + n^2 \frac{\chi_{\text{no}}^2 + \chi_{\text{no}}'^2}{\chi_{\text{no}}'^2 + n^4 \chi_{\text{no}}^2} \right)$$

Ou encore :

$$\mathcal{P}_E = \frac{\gamma_0}{4kZ} \frac{|A_{\text{norm}}|^2}{\chi_{\text{no}}} \left(u_0 \chi_{\text{no}} + \frac{1}{\frac{(n^2+1)\gamma_0}{n^2 k^2} - 1} \right) \quad \text{IV.9}$$

IV - 2 : PUISSANCE PERDUE.

Nous avons considéré le cas où l'harmonique $m = -1$ rayonne dans le vide, ce rayonnement provoque une perte de puissance.

Pour la puissance perdue c'est la composante N^u du vecteur de Poynting qui nous intéresse.

$$N^u = E_z H_x - E_x H_z \quad \text{IV.10}$$

Avec la valeur moyenne : $\bar{N}^u = \frac{1}{2} \text{Re} (E_z H_x^* - E_x H_z^*) \quad \text{IV.11}$

Pour le mode TE :

On a : $N^u = E_z H_x$ et $\bar{N}^u = \frac{1}{2} \text{Re} (E_z H_x^*)$

Avec :

$$E_z = \alpha F_{\text{no}} e^{i(\omega t - \gamma_0 x)} \quad \text{et} \quad H_x = \alpha \frac{i G_{\text{no}}}{Z} e^{i(\omega t - \gamma_0 x)}$$

Lorsque u tend vers l'infini on trouve : $\bar{N}^u = \frac{\alpha^2}{2kZ} \chi_{\text{no}}' |A_{\text{no}}|^2 \quad \text{IV.12}$

Cette valeur est indépendante de x et de z , donc la puissance rayonnée par unité de surface au guide ($x = 1, z = 1$) est égale à \bar{N}^u .

$$\bar{N}^u = \frac{\alpha^2}{2bz} \chi_{-10} \frac{|A_{00}|^2}{\beta^2} \frac{[k^2(n^2-1) \sin \chi'_{00} u_0 \sin \chi'_{-10} u_0 - \chi'_{00} \chi'_{-10}]^2}{\chi_{-10}^2 \cos^2 \chi'_{-10} u_0 + \chi_{-10}^2 \sin^2 \chi'_{-10} u_0} \quad \text{IV.13}$$

Pour le mode TM.

On a : $\bar{N}^u = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (-E_x H_z^*)$

Avec :

$$E_x = -i\alpha G_{-11} e^{i(\omega t - \gamma_{-1} x)} ; \quad H_z = \alpha \frac{F_{-11}}{z} e^{i(\omega t - \gamma_{-1} x)}$$

Lorsque u tend vers l'infini on trouve la puissance perdue.

$$\bar{N}^u = \frac{\alpha^2}{2bz} \chi_{-10} |A_{-11n}|^2$$

$$\bar{N}^u = \frac{\alpha^2}{2bz} \chi_{-10} \frac{|A_{00}|^2 n^2 (1-n^2) (\chi'_{-10} \chi_{00} \sin \chi'_{-10} u_0 + \gamma_0 \gamma_{-1} \cos \chi'_{-10}) \cos \chi'_{00} u_0 + k^2 - \gamma_0 \gamma_{-1}}{\chi_{-10}^2 \sin^2 \chi'_{-10} u_0 + n^4 \chi_{-10} \cos^2 \chi'_{-10} u_0} \quad \text{IV.14.}$$

IV - 3 : COEFFICIENT DE PERTES.

La puissance transmise P_t est fonction quadratique des champs donc l'expression de P_t contiendra le facteur $\exp(-2\eta x)$, ce qui signifie que la variation de P_t sur un élément dx est telle que :

$$dP_t / dx = -2\eta P_t.$$

η est le coefficient de pertes.

La variation dP_t / dx exprime l'atténuation que subit l'énergie transmise lorsqu'elle parcourt Ox . Donc cette variation est égale aux pertes par rayonnement en supposant que les autres sources de pertes sont négligeables.

$$\text{Donc : } N^u = - \frac{dP_t}{dx} = 2 \eta P_t.$$

On en déduit le coefficient de pertes en nepers / mètre .

$$\eta = \frac{\bar{N}^u}{2 P_t} \quad \text{IV.15}$$

Le coefficient de pertes η est le rapport de la puissance perdue sur la puissance transmise.

La puissance transmise à l'ordre un, étant fonction quadratique de α , elle est très faible devant celle de l'ordre zéro.

Pour le mode TE :

$$\eta = \frac{\alpha^2}{2kz} \chi_{-10} \frac{x_{00} 4kz}{2\gamma_0 |A_{00}|^2} \frac{|A_{-11}|^2}{1+x_{00}u_0}.$$

$$\eta = \frac{h^2 \chi_{-10} x_{00}}{4\gamma_0 (1+u_0 x_{00})} \frac{[\chi'_{00} \chi'_{-10} - k^2 (n^2-1) \sin \chi'_{00} u_0 \sin \chi'_{-10} u_0]^2}{(\chi'_{-10}{}^2 \cos^2 \chi'_{-10} u_0 + \chi_{-10}^2 \sin^2 \chi'_{-10} u_0)} \quad \text{IV.16}$$

Pour le mode TM :

$$\eta = \frac{\alpha^2}{2kz} \chi_{-10} \frac{x_{00} 4kz}{2\gamma_0 |A_{00}|^2} \frac{|A_{-11}|^2}{u_0 x_{00} + h^2 \frac{x_{00}^2 + \chi_{-10}^2}{\chi_{-10}^2 + n^4 x_{00}^2}}$$

$$\eta = \frac{h^2 n^2 \chi_{-10}}{4\gamma_0 u_0} \frac{[(1-n^2)(\chi'_{-10} x_{00} \sin \chi'_{-10} u_0 + \gamma_0 \chi_{-10} \cos \chi'_{-10} u_0) \cos \chi'_{00} u_0 + n^2 k^2 - \gamma_0 \chi_{-10}]^2}{(1 + \frac{k^2 (n^2-1) \sin^2 \chi'_{-10} u_0}{n^2 x_{00}^2 u_0}) (\chi_{-10}^2 \sin^2 \chi'_{-10} u_0 + \chi_{-10}^2 \cos^2 \chi'_{-10} u_0)} \quad \text{IV.17}$$

REMARQUE:

On peut obtenir le coefficient de pertes par la méthode de perturbations au deuxième ordre.

IV - 4 : RESULTATS NUMERIQUES.

Pour chaque mode nous avons tracé trois courbes donnant η_{u_0} en décibels, en fonction de λ/D pour un guide diélectrique d'indice $n = 1,414$ et d'amplitude relative $h/u_0 = 0,1$. Chaque courbe correspond à un point de fonctionnement choisi sur le mode fondamental. Pour chacun de ces points, u_0/λ étant donné, la courbe de dispersion (page 26) permet de déterminer γ_0/nk , (ou réciproquement), et par suite, les limites de variation de λ/D , pour qu'il y ait rayonnement au premier ordre de perturbations.

$$\gamma_0/k' - 1/n < \lambda/D < \gamma_0/k' + 1/n$$

On obtient le tableau suivant:

	Courbe	γ_0/nk	u_0/λ	Limite inf λ/D	Limites sup λ/D
Mode TE	1	0,75	0,329	0,050	1,400
	2	0,90	0,640	0,194	1,600
	3	0,98	1,617	0,280	1,680
Mode TM	4	0,75	0,110	0,050	1,400
	5	0,90	0,309	0,194	1,600
	6	0,98	0,807	0,280	1,680

A l'examen de ces courbes, on constate que pour un point de fonctionnement donné, les pertes apparaissent très vite lorsque λ/D est voisin de ses bornes pour le mode TE, et lorsque λ/D est voisin de sa limite supérieure $\lambda/D = \gamma_0/nk + \frac{1}{n}$ pour le mode TM.

De plus elles augmentent rapidement avec γ_0/nk lorsque le point de fonctionnement s'éloigne du mode de fuite ($\gamma_0/k = 1$), l'allure des courbes dépendent étroitement du point choisi. On constate aussi que l'amplitude du coefficient de pertes est plus grande pour le mode TE que pour le mode TM .

Les courbes du mode TE représentent une symétrie par rapport au milieu de l'intervalle défini ci-dessus.

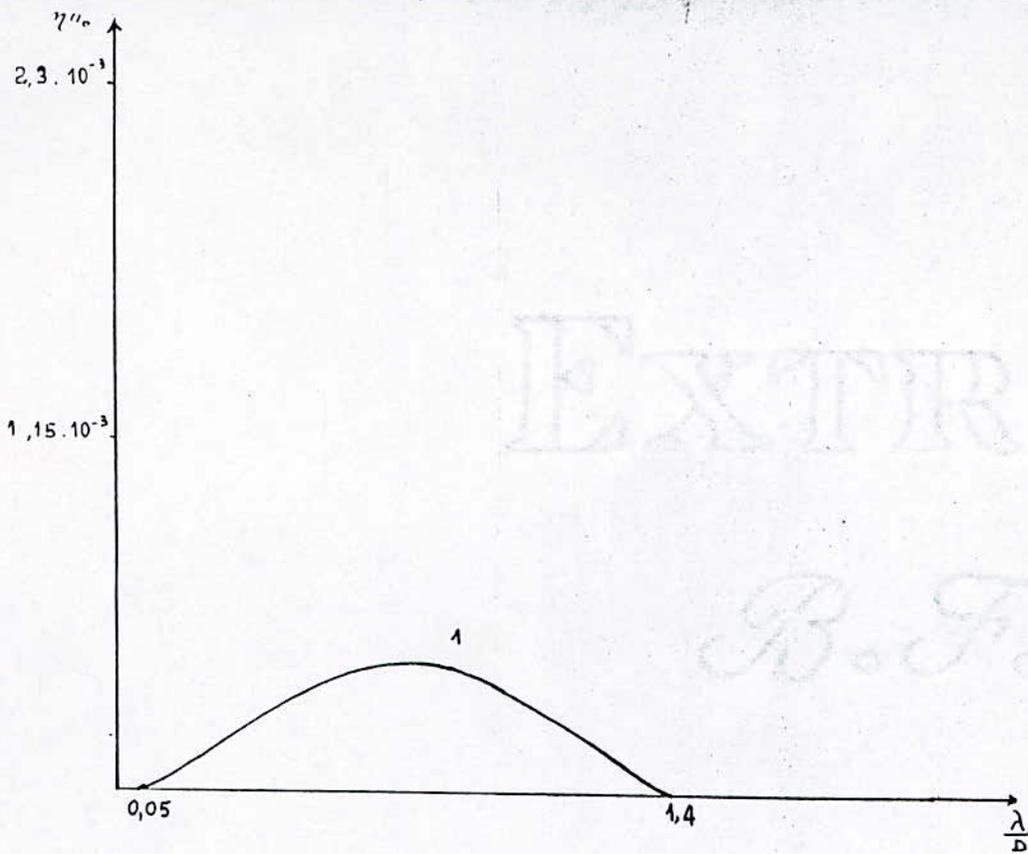
A cause de leur très grande différence d'amplitude, on a tracé les courbes de façon à les comparer successivement, la courbe 1 avec la courbe 2 et celle-ci avec la courbe 3, même chose pour le mode TM .

```
10 CLS
20 I=1
30 A=.75 :F=.0146 :E=2.067 :N=5 :M=140
40 LOCATE 25,10 PRINT " COURBES DU COEF DE PERTE DU GUIDE DIELE ONDULE (TEI)"
50 LINE (60,208)-(639,208)
60 LINE (60,0)-(60,208)
70 FOR S=N TO M STEP .5
80 U=S/100
90 T=A-U
100 B=E+SQR(1-A*A)
110 C=E+SQR(1-T*T)
120 D=SIN(E)
130 H=SIN(C)
140 G=COS(C)
150 Z=B*C/(E^2)
160 L=SQR((2*A*A-1)*(1-2*T*T))
170 P=F+L*((Z-.5+D+H)^2)
180 R=1+.707*E+SQR(2*A*A-1)
190 U=P/(R*(1-T*T)*(G^2)+(1.5-T*T)*(H^2))
200 X=Z+U*60
210 Y=208-9000*U
220 PSET (X,Y)
230 NEXT S
240 I=I+1
250 IF I>3 THEN 260
260 A=.9 :F=9.000001E-02 :E=4.02 :N=20 :M=160
270 GOTO 70
280 A=.98 :F=1.337 :E=10.159 :N=28 :M=165
290 IF I>3 THEN END
300 GOTO 70
```

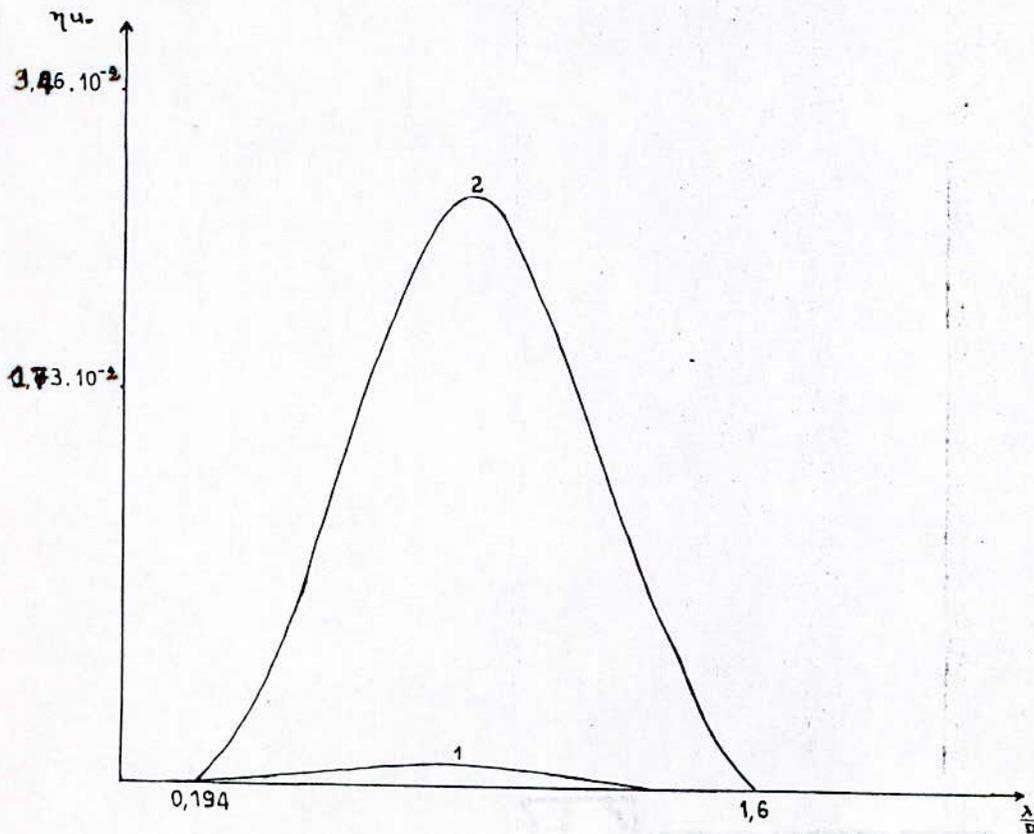
```

10 CLS
20 I=1
30 A=.75 :B=.001 :E=.6911 :N=5 :M=140
40 LOCATE 25,10 PRINT " COURBES DU COEF DE PERTE DU GUIDE DIELECTRIQUE (TMP)
50 LINE (60,208)-(639,208)
60 LINE (60,0)-(60,208)
70 FOR S=N TO M STEP .5
80 U=S/100
90 T=A-U
100 B=E*SQRT(1-A*A)
110 C=E*SQRT(1-T*T)
120 D=COS(B)
130 H=COS(C)
140 G=SIN(B)
150 Q=SIN(C)
160 Z=SQRT(A*A-.5)*(1-T*T)
170 L=E*SQRT(1-2*T*T)
180 P=L/(1+(Q^2)/(2+E*(2*A+A-1)^1.5))
190 T=P*((1-A*T-(Z*Q-A*T*H)*D)^2)
200 W=T/(1-T+D^2)+(1-T+T)*(H^2)
210 X=2*G*G0
220 Y=208-10*G*U
230 PSET(X,Y)
240 NEXT S
250 I=I+1
260 IF I>2 THEN 290
270 A=.9 :B=.01 :E=1.941 :N=20 :M=160
280 GOTO 70
290 A=.98 :B=.065 :E=5.07 :N=28 :M=168
300 IF I>3 THEN 310
310 GOTO 70

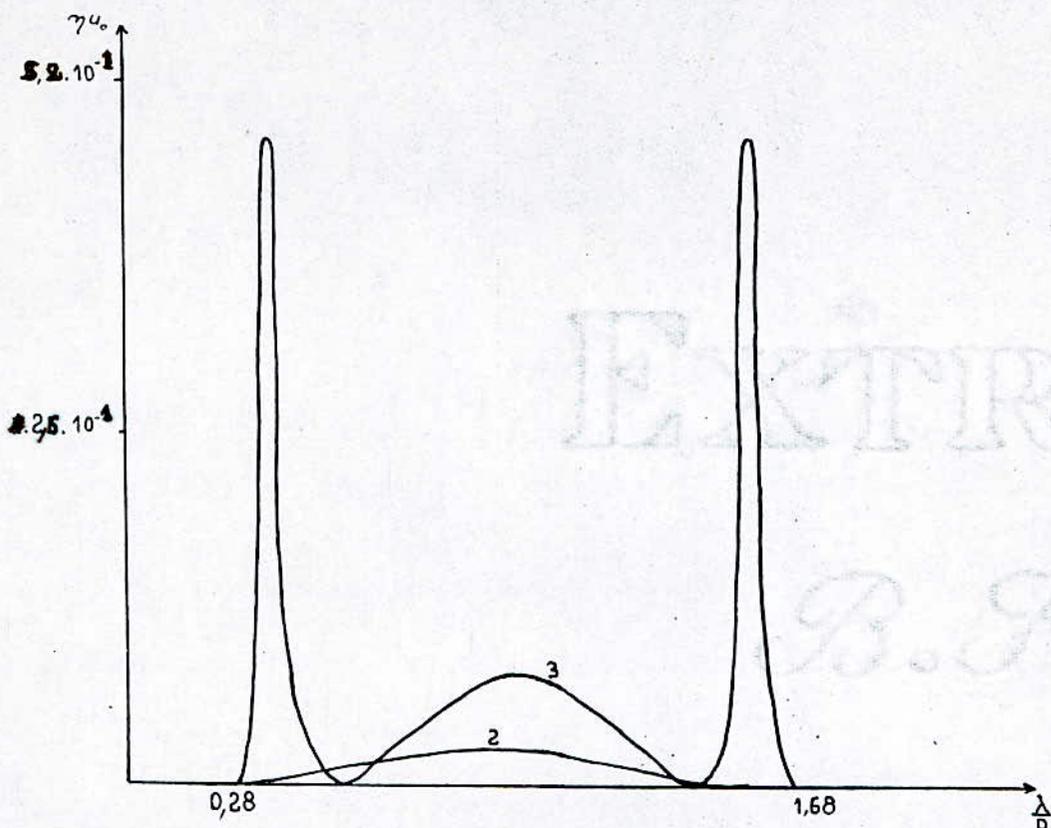
```



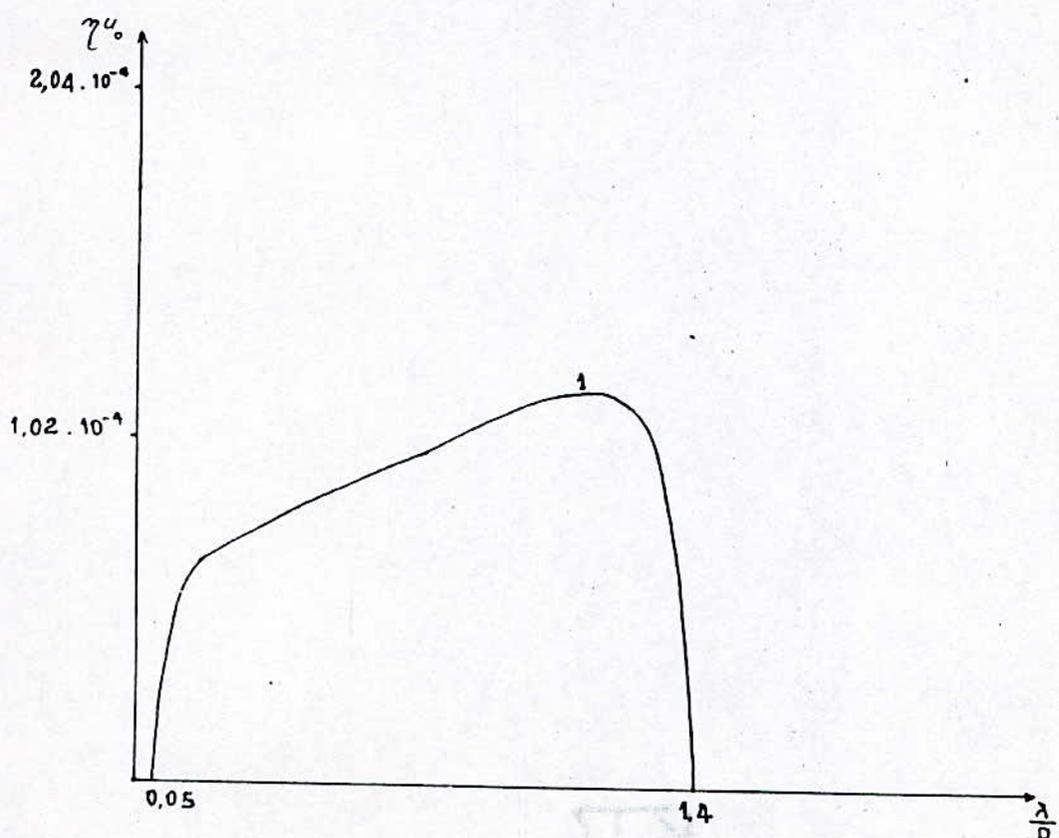
Courbe du coefficient de pertes du guide diel. ondulé (TE₁)



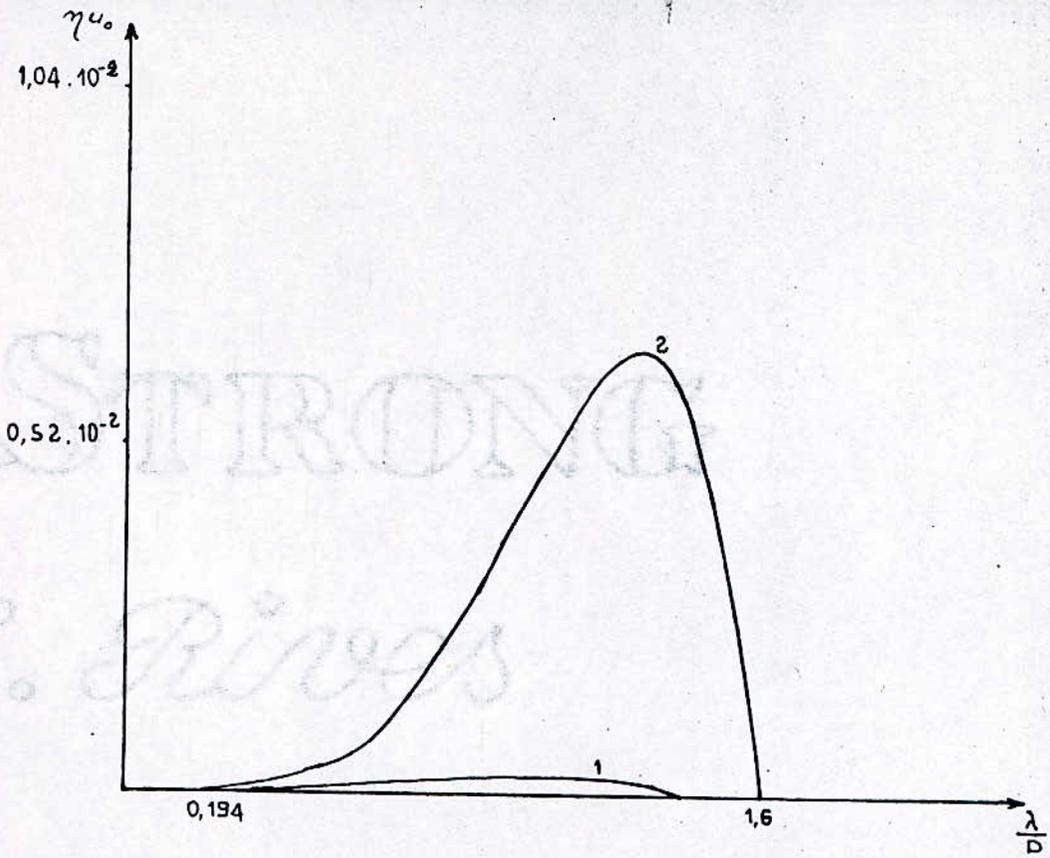
Courbes du coefficient de Pertes du guide diel ondulé (TE₁)



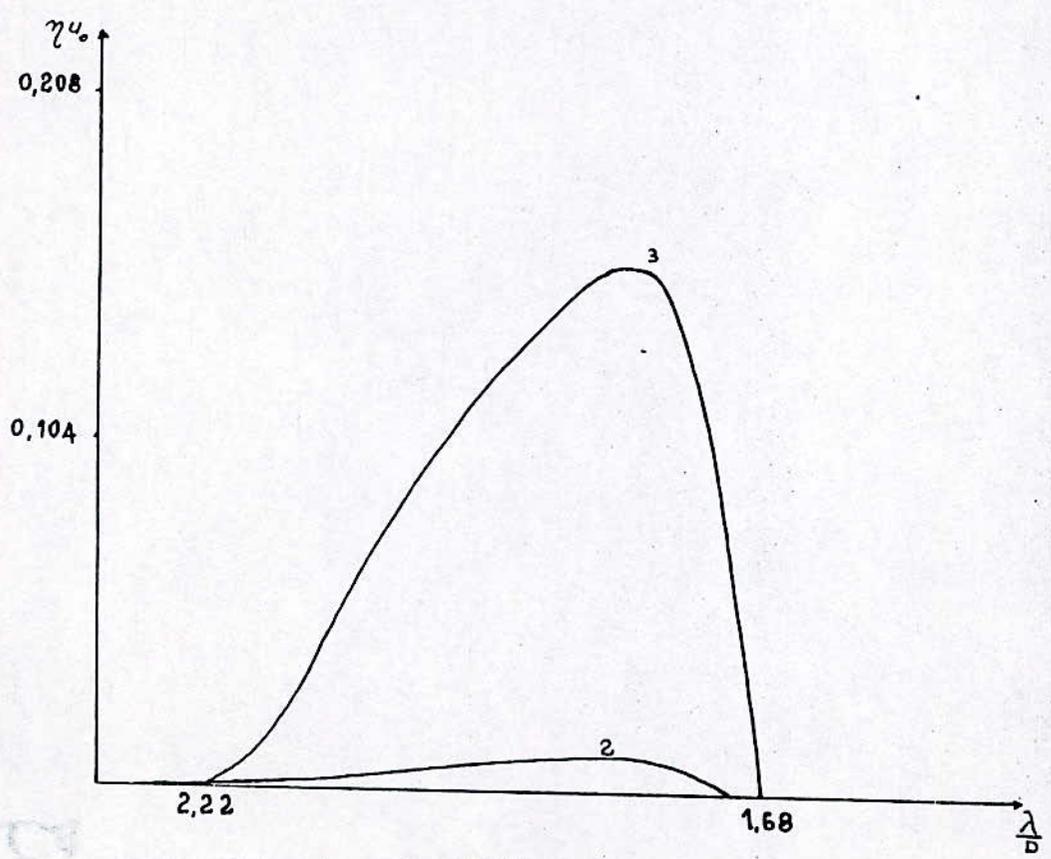
Courbes du coefficient de pertes du guide diel. ondulé (TE1)



Courbe du coefficient de pertes du guide diel. ondulé (TM0)



Courbes du coefficient de pertes du guide diel. ondulé (TMP)



Courbes du coefficient de pertes du guide diel. ondulé (TMP)

EXTRA ST

B. F. H. I

CHAPITRE V : Deuxième méthode rigoureuse

EXTRA ST

Le système (II.14) peut être résolu par rapport à ses dérivées premières en u . Pour cela, on tire de (II.14a) la valeur de $\partial F / \partial u$ que l'on reporte dans (II.14b) :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} = -i \frac{1}{1+a^2} kG + \frac{a}{1+a^2} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial kG}{\partial u} = -i \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1+a^2} \frac{\partial F}{\partial x} - i k^2 F + \frac{\partial}{\partial x} \frac{a}{1+a^2} kG \end{cases} \quad \text{V-1}$$

De l'examen des équations (V-1), il ressort que seules interviennent explicitement les deux fonctions $C(x)$ et $d(x)$ avec:

$$C(x) = \frac{1}{1+a^2} \quad \text{V.2a}$$

$$d(x) = \frac{a}{1+a^2} \quad \text{V.2b}$$

- RESOLUTION DES EQUATIONS.

La fonction $a(x)$ est une fonction périodique de période D :

$$a(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p e^{-ip \frac{2\pi x}{D}} \quad \text{V.3}$$

Les fonctions $C(x)$ et $d(x)$ sont elles-mêmes périodiques.

Nous pouvons donc poser:

$$C(x) = \frac{1}{1+a^2} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p e^{-ip \frac{2\pi x}{D}} \quad \text{V.4}$$

$$d(x) = \frac{a}{1+a^2} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} d_p e^{-ip \frac{2\pi x}{D}}. \quad \text{V.5}$$

En raison de la périodicité du problème par rapport à la variable x , d'après le théorème de FLOQUET-BLOCH, il faut chercher les solutions du système (V-1) sous la forme suivante:

$$F = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m(u) e^{-i\gamma_m x}. \quad \text{V.6a}$$

$$G = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_m(u) e^{-i\gamma_m x}. \quad \text{V.6b}$$

Avec: $\gamma_m = \gamma_0 + m \frac{2\pi}{D} = k \left(\sin \theta + m \frac{\lambda}{D} \right).$ V.7

En posant: $\gamma_0 = k \sin \theta.$ V.8

Après avoir reporté ces valeurs dans le système (V-1) et projeté sur la base des fonctions $\exp(-i\gamma_m x)$, on obtient le système différentiel infini suivant du premier ordre à coefficients constants:

$$\forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \frac{i}{k} \frac{dF_m}{du} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left[\left(\sin \theta + p \frac{\lambda}{D} \right) d_{m-p} F_p + C_{m-p} G_p \right] & \text{V.9a} \\ \frac{i}{k} \frac{dG_m}{du} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ - \left[\left(\sin \theta + p \frac{\lambda}{D} \right) \left(\sin \theta + m \frac{\lambda}{D} \right) C_{m-p} - \delta_{mp} \right] F_p \right. \\ \left. + \left(\sin \theta + m \frac{\lambda}{D} \right) d_{m-p} G_p \right\}. & \text{V.9b} \end{cases}$$

Où δ_{mp} est le symbole de Kronecker.

Les solutions élémentaires d'un tel système sont de la forme:

$$F_m(u) = F_{mn} e^{-ik\gamma_n u}, \quad \text{V.10a}$$

$$G_m(u) = G_{mn} e^{-ik\gamma_n u}. \quad \text{V.10b}$$

La solution générale étant une combinaison linéaire des solutions élémentaires.

Il est commode de résoudre ce système différentiel par une méthode aux valeurs propres et vecteurs propres.

Pour cela introduisons un vecteur fonction d'onde $\vec{\Psi}(u)$ composé de deux sous-vecteurs $\vec{f}(u)$ et $\vec{g}(u)$ ayant respectivement un nombre infini de composantes $F_m(u)$ et $G_m(u)$.

Le système (V-9) peut alors s'écrire sous la forme symbolique suivante:

$$\frac{i}{k} \cdot \frac{d\vec{\Psi}(u)}{du} = T \vec{\Psi}(u) \quad \text{V.10}$$

Avec:
$$\vec{\Psi}(u) = \begin{bmatrix} \vec{f}(u) \\ \vec{g}(u) \end{bmatrix}$$

T est une matrice infini, caractéristique du milieu et du système de coordonnées, composée de quatre sous-matrices A, B, C, D , elles mêmes infinies.

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Avec:
$$A_{mp} = \left(\sin \theta + p \frac{\lambda}{D} \right) d_{m-p}$$

$$B_{mp} = C_{m-p}$$

V.11

$$C_{mp} = \delta_{mp} - \left(\sin \theta + m \frac{\lambda}{D} \right) \left(\sin \theta + p \frac{\lambda}{D} \right) C_{m-p}$$

$$D_{mp} = \left(\sin \theta + m \frac{\lambda}{D} \right) d_{m-p}$$

La résolution du système (V-10) se ramène à la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice T en posant:

$$\vec{\Psi}(u) = \vec{\varphi} \exp(-i k r u) \quad \text{V.12}$$

Ce qui conduit à l'équation aux valeurs propres: $r \vec{\varphi} = T \vec{\varphi} \quad \text{V.13}$

Le vecteur propre $\vec{\varphi}_q = \begin{bmatrix} \vec{\delta}_q \\ \vec{g}_q \end{bmatrix}$ associé à la valeur propre r_q est tel que:

$$r_q \vec{\varphi}_q = T \vec{\varphi}_q .$$

La solution générale du système (V - 9) est une combinaison linéaire de solutions élémentaires (V - 12) soit:

$$\vec{\Psi}(u) = \sum_{q=1}^{\infty} b_q \vec{\varphi}_q \exp(-ik r_q u) . \quad \text{V. 14}$$

Les b_q , coefficients de la combinaison linéaire, sont des constantes d'intégration à déterminer, à partir des différentes conditions aux limites.

REMARQUE:

Cette méthode est rigoureusement utilisée pour les réseaux, elle conduit à résoudre dans chaque milieu un système différentiel du premier ordre à coefficients constants.

EXTRA STRONG

B. F. F. Rives

CONCLUSION

EXTRA STRONG

CONCLUSION.

L'utilisation des équations de Maxwell sous forme covariante et d'un système de coordonnées non orthogonales dit de translation adapté à la géométrie du guide nous a permis d'écrire de manière analytiquement simple les conditions aux limites. On pourrait penser que l'introduction de coordonnées non orthogonales pour la mise en équation de problèmes aux dérivées partielles avec conditions aux limites complique inutilement la résolution. En réalité la complexité des équations n'est que le reflet de celle des conditions aux limites, et l'utilisation de ces coordonnées semble être la voie naturelle pour résoudre ces types de problèmes.

Le système de coordonnées a été défini à partir du système classique cartésien dans lequel on connaît la solution des équations de Maxwell. Si on considère $a(x)$ comme une fonction perturbatrice, il est possible de rechercher les solutions par une méthode de perturbations, sous la forme de série entières d'un paramètre, pris en général comme égal à l'amplitude de la déformation.

Cette méthode possède l'avantage d'être analytique, et permet de passer continuellement du cas non perturbé au cas perturbé.

Nous avons limité les calculs au premier ordre, et nous avons terminé notre étude par le tracé des courbes du coefficient de pertes pour mettre en évidence sa variation en fonction de λ/D (rapport entre longueur d'onde dans le diélectrique et la période de déformation du guide).

Notre méthode apporte une contribution à la résolution des problèmes de propagation des ondes électromagnétiques dans les guides périodiquement déformés qui ont de nombreuses applications en hyperfréquences: tubes à ondes progressives, lignes à retard, accélérateurs linéaire de particules, etc.

Une autre méthode rigoureuse qui consiste à rechercher les vecteurs et valeurs propres d'une matrice caractéristique des coordonnées et du milieu, est envisagée à la fin de ~~ce~~ mémoire.

ANNEXE

ANNUAIRE 1900

ANNUAIRE 1900

ANNEXE A0.

LES EQUATIONS DE MAXWELL SOUS FORME COVARIANTE.

Dans l'espace quadri-dimensionnel espace-temps, le champ électromagnétique est caractérisé par un tenseur antisymétrique F représentant le couple (\vec{E}, \vec{B}) et un pseudo-tenseur antisymétrique \mathcal{G} représentant le couple (\vec{D}, \vec{H}) .

Dans tout système de coordonnées (x^λ) de cet espace, les équations de Maxwell sous forme tensorielle covariante, reliant les composantes de F ou de \mathcal{G} , s'écrivent, en l'absence de charges et de courants:

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_\alpha F_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda F_{\sigma\alpha} + \partial_\sigma F_{\alpha\lambda} = 0 \\ \partial_\nu \mathcal{G}^{\lambda\nu} = 0 \end{cases}$$

Les indices en lettres grecques étant réservés à l'espace-temps: $\lambda, \nu, \alpha = 0, 1, 2, 3$, avec $x^0 = t$. L'écriture de ces équations utilise la convention d'Einstein qui sous-entend la sommation pour les indices répétés dans le même monôme, soit:

$$\partial_\nu \mathcal{G}^{\lambda\nu} = \sum_{\nu=0}^3 \partial_\nu \mathcal{G}^{\lambda\nu}.$$

Les propriétés électromagnétiques du milieu sont caractérisées par un pseudo-tenseur χ , reliant les tenseurs F et \mathcal{G} :

$$(2) \quad \mathcal{G}^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} \chi^{\lambda\nu\sigma\alpha} F_{\sigma\alpha}.$$

Les équations (1) sont covariantes (elles conservent le même aspect formel) dans toute transformation holonôme de coordonnées faisant passer d'un système (x^λ) à un système $(x^{\lambda'})$, les relations de passage d'un système à l'autre pour les composantes des différents tenseurs s'écrivent:

$$(3) \quad F_{\lambda'\sigma'} = A^\lambda_{\lambda'} A^\sigma_{\sigma'} F_{\lambda\sigma},$$

$$(4) \quad |A^\mu_{\mu'}| \mathcal{G}^{\lambda'\nu'} = A^\lambda_{\lambda'} A^\nu_{\nu'} \mathcal{G}^{\lambda\nu},$$

$$(5) \quad |A^\mu_{\mu'}| \chi^{\lambda'\nu'\sigma'\alpha'} = A^\lambda_{\lambda'} A^\nu_{\nu'} A^\sigma_{\sigma'} A^{\alpha'}_{\alpha} \chi^{\lambda\nu\sigma\alpha};$$

Avec:

$$(6) \quad A_{\lambda}^{\lambda'} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \quad \text{et} \quad A_{\lambda'}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}$$

$|A_{\mu}^{\mu'}|$ représentant le déterminant de la matrice dont les éléments sont $A_{\mu}^{\mu'}$.

Une transformation de coordonnées est holonôme si:

$$(7) \quad \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\lambda}} = \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\lambda}} ; \quad (\lambda, \lambda', \lambda'' = 0, 1, 2, 3).$$

Ce formalisme général est très puissant mais lourd à utiliser pour la résolution des problèmes de propagation électromagnétique. un formalisme plus léger et plus commode (et voisin de la forme classique des équations de Maxwell), mais conservant les propriétés fondamentales du précédent peut être obtenu à partir de celui-ci de la manière suivante:

À partir des composantes du tenseur électromagnétique F et G de l'espace quadri-dimensionnel. on définit dans l'espace à trois dimensions, les composantes de deux vecteurs covariants E et H et de deux pseudo-tenseurs contravariants B et D par les relations:

$$(8) \quad \begin{cases} E_i = F_{0i} & , \quad B^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk} ; \\ D_i = G_{0i} & , \quad H^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} G^{jk} ; \end{cases}$$

Les indices en lettres latines étant réservés à l'espace à trois dimensions:

$i, j, k = 1, 2, 3$; ε^{ijk} et ε_{ijk} désignant les indicateurs de Levi-Cevita:

$$\varepsilon^{ijk} \text{ ou } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{Si deux indices sont égaux,} \\ 1 & \text{Si les indices sont obtenus au moyen d'un nombre} \\ & \text{pair de permutations à partir de } 1, 2, 3, \\ -1 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Avec ces nouvelles définitions, les équations de Maxwell (1) deviennent:

$$(9) \quad \begin{cases} \varepsilon^{ijk} \partial_j E_k = - \frac{\partial B^i}{\partial t} ; & \varepsilon^{ijk} \partial_j H_k = \frac{\partial D^i}{\partial t} \\ \partial_i B^i = 0 & ; \quad \partial_i D^i = 0 \end{cases}$$

Écrites sous cette forme, ces équations sont covariants dans toute transformation de coordonnées n'affectant pas la variable temps, les relations de passage s'écrivant alors:

$$(10) \begin{cases} E_{i'} = A_{i'}^i E_i & ; \quad B^{i'} = |A_{i'}^i| A_i^{i'} B^i, \\ H_{i'} = A_{i'}^i H_i & ; \quad D^{i'} = |A_{i'}^i| A_i^{i'} D^i, \end{cases} \quad i, i' = 1, 2, 3.$$

Le pseudo-tenseur χ (quatre fois contravariant) caractérisant le milieu donne naissance, dans ce nouveau formalisme, à deux pseudo-tenseurs; l'un (deux fois contravariant) de composantes $\epsilon^{ij} = \chi^{0i0j}$; l'autre (deux fois covariant) de composantes $\chi_{ij} = \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \chi^{klmn}$; tenseurs au moyen desquels les relations de milieu peuvent être écrites:

$$(11) \begin{cases} D^i = \epsilon^{ij} E_j, \\ H_i = \chi_{ij} B^j. \end{cases}$$

Ces relations sont à rapprocher, dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, des relations de l'électromagnétisme classique:

$$(12) \begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \\ \vec{H} = \vec{B}/\mu, \end{cases}$$

où ϵ et μ sont des constantes, indépendantes du système de coordonnées. Par contre, dans le formalisme covariant, les pseudo-tenseurs de milieu ϵ^{ij} et χ_{ij} sont fonctions du système de coordonnées, mais l'écriture des équations de Maxwell (9) en est indépendante, ce qui est d'une grande commodité en coordonnées non orthogonales.

$$\begin{cases} kG = i(1 + \dot{a}^2) \frac{\partial F}{\partial u} - i \dot{a} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k^2 F + \dot{a}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\dot{a} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x} - \ddot{a} \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \end{cases} \quad \text{II.14.}$$

$$F(u, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m(u) e^{-i(\delta_m - i\eta)x} ; \quad G(u, x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i G_m(u) e^{-i(\delta_m - i\eta)x}$$

$$\delta_m = \delta_0 + m\beta. \quad \beta = \frac{2\pi}{D}$$

$$a(x) = \frac{h}{2} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) ; \quad \dot{a}(x) = i \frac{h\beta}{2} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x})$$

$$\dot{a}^2(x) = -\left(\frac{h\beta}{2}\right)^2 (e^{2i\beta x} + e^{-2i\beta x} - 2) ; \quad \ddot{a}(x) = -\frac{h\beta^2}{2} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x})$$

On projette le système (II.14) sur la base des fonctions $e^{-i(\delta_m - i\eta)x}$:

$$\begin{aligned} k \sum_{m=-\infty}^{\infty} i G_m e^{-i(\delta_m - i\eta)x} &= i \left[1 - \left(\frac{h\beta}{2}\right)^2 (e^{2i\beta x} + e^{-2i\beta x} - 2) \right] \frac{\partial}{\partial u} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{-i(\delta_m - i\eta)x} \\ &+ \frac{h\beta}{2} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{-i(\delta_m - i\eta)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k \sum_{m=-\infty}^{\infty} i G_m e^{-i(\delta_m - i\eta)x} &= i \left\{ \left[1 + \left(\frac{h\beta}{2}\right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial u} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{-i(\delta_m - i\eta)x} - \left(\frac{h\beta}{2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial u} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (F_m e^{-i(\delta_{m-2} - i\eta)x} \right. \right. \\ &\left. \left. + F_m e^{-i(\delta_{m+2} - i\eta)x}) - i \frac{h\beta}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [(\delta_{m-1} - i\eta) F_m e^{-i(\delta_{m-1} - i\eta)x} - (\delta_{m-1} - i\eta) F_m e^{-i(\delta_{m+1} - i\eta)x}] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\delta_m - i\eta) F_m e^{-i(\delta_{m \mp j} - i\eta)x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\delta_{m \mp j} - i\eta) F_{m \mp j} e^{-i(\delta_m - i\eta)x}$$

$$\begin{aligned} k \sum_{m=-\infty}^{\infty} i G_m e^{-i(\delta_m - i\eta)x} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} i \left\{ \left(1 + \left(\frac{h\beta}{2}\right)^2 \right) \frac{\partial}{\partial u} F_m e^{-i(\delta_m - i\eta)x} - \left(\frac{h\beta}{2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial u} (F_{m+2} + F_{m-2}) e^{-i(\delta_m - i\eta)x} \right. \\ &\left. - \frac{h\beta}{2} [(\delta_{m+1} - i\eta) F_{m+1} - (\delta_{m-1} - i\eta) F_{m-1}] e^{-i(\delta_m - i\eta)x} \right\} \end{aligned}$$

D'où on tire :

62

$$KG_m = \frac{dF_m}{du} + \frac{(h\beta)^2}{2} \frac{dF_u}{du} - \left(\frac{h\beta}{2}\right)^2 \left(\frac{dF_{u+2}}{du} + \frac{dF_{u-2}}{du}\right) + \frac{h\beta}{2} [(\gamma_{m-1} - i\eta)F_{u-1} - (\gamma_{m+1} - i\eta)F_{u+1}].$$

De la même manière on représente la deuxième équation différentielle du système (II.14) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{-i(\gamma_m - i\eta)u} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_u e^{-i(\gamma_m - i\eta)u} + k^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{-i(\gamma_m - i\eta)u} \\ & + \frac{h^2\beta^2}{4} [2 - (e^{2i\beta x} + e^{-2i\beta x})] \frac{\partial^2}{\partial u^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_u e^{-i(\gamma_m - i\eta)u} - 2i \frac{h\beta}{2} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) \frac{\partial}{\partial u \partial x} \cdot \\ & \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_u e^{-i(\gamma_m - i\eta)u} + \frac{h\beta^2}{2} (e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) \frac{\partial}{\partial u} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_u e^{-i(\gamma_m - i\eta)u} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial u^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_u e^{-i(\gamma_m - i\eta)u} + [k^2 - (\gamma_m - i\eta)^2] \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_u e^{-i(\gamma_m - i\eta)u} + \frac{h^2\beta^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_u e^{-i(\gamma_m - i\eta)u} \\ & - \frac{h^2\beta^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (F_{u+2} e^{-i(\gamma_{m+2} - i\eta)u} + F_{u-2} e^{-i(\gamma_{m-2} - i\eta)u}) - h\beta(\gamma_{m+1} - i\eta) \frac{\partial}{\partial u} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{u+1} e^{-i(\gamma_m - i\eta)u} \\ & + h\beta(\gamma_{m-1} - i\eta) \frac{\partial}{\partial u} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{u-1} e^{-i(\gamma_m - i\eta)u} + \frac{h\beta^2}{2} \frac{\partial}{\partial u} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i(\gamma_m - i\eta)u} (F_{m-1} + F_{m+1}) = 0. \end{aligned}$$

On pose $\chi_m^2 = k^2 - (\gamma_m - i\eta)^2$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 F_m}{du^2} + \chi_m^2 F_u + \frac{h^2\beta^2}{2} \frac{d^2 F_m}{du^2} - \frac{h^2\beta^2}{4} \frac{d^2}{du^2} (F_{u+2} + F_{u-2}) - \frac{h\beta}{2} (2\gamma_{m+1} - 2i\eta) \frac{dF_{u+1}}{du} \\ & + \frac{h\beta}{2} (2\gamma_{m-1} - 2i\eta) \frac{dF_{u-1}}{du} + \frac{h\beta^2}{2} \frac{d}{du} (F_{u-1} + F_{u+1}) = 0 \end{aligned}$$

On a : $2\gamma_{m+1} - \beta = \gamma_{m+1} + \gamma_m$ et $2\gamma_{m-1} + \beta = \gamma_m + \gamma_{m-1}$; on obtient finalement :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 F_u}{du^2} + \chi_m^2 F_u + \frac{h\beta}{2} (\gamma_{m-1} + \gamma_m - 2i\eta) \frac{dF_{u-1}}{du} - \frac{h\beta}{2} (\gamma_{m+1} + \gamma_m - 2i\eta) \frac{dF_{u+1}}{du} \\ & + \frac{h^2\beta^2}{2} \frac{d^2 F_u}{du^2} - \frac{h^2\beta^2}{4} \frac{d^2}{du^2} (F_{u+2} + F_{u-2}) = 0. \end{aligned}$$

B I B L I O G R A P H I E
-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-0-

- 1 - ANGOT " Compléments de mathématiques " (Masson Paris, 1972)
- 2 - BRILLOUIN L. " Les tenseurs en mécanique et en élasticité "
(Masson Paris, 1946)
- 3 - " " " Propagation des ondes dans les milieux périodiques"
(Masson Paris, 1956)
- 4 - CHANDEZON J. " Les équations de Maxwell sous forme covariante
et leurs applications" These d'état Clermont Fd 79
- 5 - MIDWINDER. " Optical Fiber for transmission " 1979
- 6 - DIETRICH MARCUSE. " Light transmission optics " 1972
- 7 - PETIT R. " Electromagnetic Theory of Gratings " 1980
- 9 - PAUL F.COMBES. " Transmission en espace libre et sur les lignes"
(Dunod 1983)
- 10 - STRATTON. " Electromagnetic Theory " (New York and London, 1941)