

M0003/04A

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

**Ecole Nationale Polytechnique**  
Département Hydraulique  
Laboratoire de Recherche des Sciences de l'Eau

1952/04



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

**Mémoire de Magister**  
Présenté par

**M.BENTALHA Chakib**  
Ingénieur d'Etat en Hydraulique de l'ENP

( Thème )

Evolution de la couche limite turbulente dans  
des canaux à forte pente pour des géométries complexes

**Soutenu publiquement le 21 Mars 2004**

**Les membres du jury :**

Président :	Pr. KETTAB Ahmed	Professeur ENP
Directeurs du Mémoire :	Me BENMAMAR Saâdia	Chargée de Cours ENP
	Dr. BILEK Amar	Chargé de Cours ENP
Examineurs :	M. BARKANI Miloud	Chargé de Cours ENP
	M. BENZIADA Salim	Chargé de Cours ENP
	M. MOULOUDI Yahia	Chargé de Cours ENP

**Année Universitaire 2003/2004**

# REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier ma Directrice de mémoire Me BENMAMAR, Saâdia chargée de cours à l'ENP, de m'avoir proposé ce sujet et de m'avoir guidé tous le long de la préparation de ce mémoire.

Je suis aussi très reconnaissant à mon co-Directeur de mémoire, le Docteur BILEK Amar, chargé de cours à l'ENP pour son aide et ses précieux conseils.

J'adresse mes remerciement au Pr. KETTAB Ahmed directeur du Laboratoire de Recherche des Sciences de l'eau (LRS-EAU) d'avoir accepté de présider le jury.

J'adresse également mes remerciement à M. BARKANI Miloud, M. BENZIADA Salim et M. MOULOUDI Yahia d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et d'être membre du jury.

Enfin, mes sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin dans l'élaboration de ce mémoire.

الهدف الأساسي من هذا العمل هو القيام بدراسة رقمية للطبقة النهائية لسيلان هائج من أجل الوصول إلى الغايات التالية:

- تحديد نقطة بداية تهوئة الماء بتغيير درجة ميل القناة و تغيير سطحه بسطح مدرج وأخيرا بتغيير تدفق السائل.
- تأثير تدفق السائل و درجة ميل القناة و كذلك السطح المدرج للقناة في تطور السمك لمختلف خصائص الطبقة النهائية من سمك الانتقال و سمك كمية الحركة و سمك الطاقة.
- تحديد خصائص جريان السائل كالسرعة و الطاقة الحركية للسيلان و مجموع انسياب الطاقة مع تغيير تدفق السائل و درجة ميل القناة و كذلك سطح القناة

كلمات المفتاح: التهوئة- الطبقة- السمك- الهيجان- السرعة- الطاقة- انسياب- السيلان-

### Résumé

مدرج- أملس

L'objectif principal de notre travail est de simuler numériquement l'écoulement dans la couche limite pour atteindre les buts suivants :

- Localiser le point d'inception où le phénomène d'entraînement d'air commence en faisant varier le débit et la pente pour le cas d'un profil lisse et pour le cas d'un profil en marche escalier.
- L'influence du débit, de la pente et l'effet des marches sur l'évolution de la couche limite et des différentes épaisseurs de la couche limite à savoir l'épaisseur de déplacement, l'épaisseur de quantité de mouvement et l'épaisseur d'énergie.
- Déterminer les profils des variables de l'écoulement à savoir la vitesse, l'énergie cinétique turbulente et la dissipation d'énergie cinétique turbulente en faisant varier le débit et la pente pour le cas d'un profil lisse et pour le cas d'un profil en marche escalier.

Les équations de départ sont celles de Reynolds auxquelles on a joint deux équations de transport. La discrétisation est effectuée en différences finies.

Mots clef : Aération- Couche- Epaisseur- Turbulence- Vitesse- Energie- Dissipation- Lisse- Marche- Ecoulement

### Abstract

The main objective of our work is to numerically simulate the flow in the boundary layer to achieve the suivants goals:

- To locate the point of inception where the phenomenon of drive of air starts while varying the flow and the slope in the case of a smooth profile and in the case of a profile moving staircase.
- The influence of the flow, the slope and the effect of the steps on the evolution of the boundary layer and various thicknesses of boundary layer to knowing the thickness of displacement, the thickness of momentum, and the thickness of energy.
- To determine the profiles of the variables of the flow to knowing speed, the turbulent kinetic energy and the dissipation of turbulent kinetic energy while varying the flow and the slope in the case of a smooth profile and in the case of a profile moving staircase.

The starting equations are those of Reynolds to which one joined two transport equation. The discretization is carried out of differences finished

Key Words : Flow- Layer- Staircase- Smooth- Thicknesses- Turbulent- Speed- Energy- Dissipation- Aeration

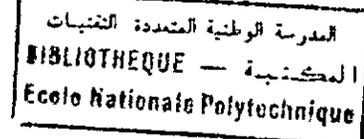
## NOTATIONS

A	Cohérence spatiale des sources des pressions [-]
B	Cohérence spatiale des sources des pressions [-]
b	Largeur du canal [m]
c	Célérité du son [m/s]
C	Coefficient de Chezy [-]
$C_f$	Coefficient de frottement [-]
$C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}$	Constantes du modèle de turbulence [-]
$C_\mu$	Constante du modèle de turbulence [-]
$D_h$	Diamètre hydraulique [m]
$E_d$	Energie d'une goutte [ $m^2/s^2$ ]
$E_{kin}$	Energie cinétique [ $m^2/s^2$ ]
$E_r$	Energie de surface [ $m^2/s^2$ ]
f	Coefficient de frottement de Darcy-Weisbach [-]
F	Nombre de Froude [-]
$F_x, F_y, F_z$	Forces de Volumes, respectivement suivant les axes x,y,z [ $m^2/s$ ]
g	Accélération de la pesanteur [ $m^2/s$ ]
h	Hauteur d'une marche [m]
$h_b$	Hauteur d'eau au bord d'une marche [m]
$h_c$	Hauteur critique [m]
$h_d$	La charge de dimensionnement [m]
$h_e$	Hauteur de l'écoulement [m]
$h_n$	Hauteur normale [m]
$H_s$	Distance à la verticale entre le plan de la charge en amont jusqu'à la surface libre [m]
$H_{amont}$	Charge totale à l'amont d'un barrage [m]
$H_{aval}$	Charge totale au pied aval d'un barrage [m]
$H_d$	Hauteur d'eau à l'amont d'un déversoir [m]
I	Pente du canal [-]
$I_f$	Pente de fond [-]
$I_c$	Pente critique [-]
$I_w$	Pente de la surface [-]
$I_p$	Nombre d'inception [-]
i	Indice de maillage suivant la direction x [-]
j	Indice de maillage suivant la direction y [-]
J	Pente hydraulique [m/m]
k	Rugosité absolue [mm]
K	Energie cinétique turbulente [ $m^2/s^2$ ]
$k_s$	Rugosité équivalente [mm]

$K_s$	Coefficient de Strickler [ $m^{1/3}/s$ ]
$l$	Largeur d'une marche [m]
$l_t$	Longueur de la turbulence [m]
$L_c$	Longueur caractéristiques [m]
$L_i$	Distance entre l'amont et le point d'inception [m]
$l_m$	Longueur de mélange [m]
$m_1$	Transfère de la massé au niveau de la pseudo base [-]
$m_E$	Transfère de la masse au bord supérieur de la couche limite [-].
$p$	Pression instantanée [Pa]
$p'$	Pression fluctuante [Pa]
$P$	Valeur Moyenne de la pression [Pa]
$P_m$	Périmètre mouillé [m]
$q$	Débit par unité de largeur [ $m^2/s$ ]
$q_d$	Débit d'eau à l'amont d'un déversoir [ $m^2/s$ ]
$Q$	Débit Volumique [ $m^3/s$ ]
$r_1$	Vecteur d'espace [-]
$r_3$	Vecteur d'espace [-]
$Re$	Nombre de Reynolds [-]
$Re_t$	Nombre de Reynolds de turbulence [-]
$R_h$	Rayon hydraulique [m]
$S_m$	Section mouillée [ $m^2$ ]
$t$	Variable temps [s]
$t_c$	Temps de convection [s]
$t_{ij}$	Tension turbulente suivant (i,j) [ $m^2/s^2$ ]
$t_v$	Temps de diffusion [s]
$u_t$	Echelle de la vitesse de turbulence
$U_l$	Vitesse de l'écoulement libre [m/s]
$U_c$	Vitesse caractéristique [m/s]
$u_*$	Vitesse de frottement [m/s]
$u^+$	Vitesse adimensionnelle [-]
$u, v, w$	Composantes axiales de la vitesse, respectivement, suivant les axes x,y,z [m/s]
$u', v', w'$	Valeurs fluctuantes des composantes u,v,w de la vitesse, respectivement [m/s]
$u_i$	Composante de la vitesse instantanée dans la direction i [m/s]
$U, V, W$	Valeurs moyennes des composantes u,v,w de la vitesse, respectivement [m/s]
$W_d$	Nombre de Weber [-]
$W_d^*$	Nombre de Weber critique [-]
$x$	Variable indépendante spatiale [m]
$y$	Variable indépendante spatiale [m]
$y^+$	Nombre de Froude adimensionnel [-]
$Y_c, \delta$	Epaisseur de la couche limite [m]

$z$	Variable indépendante spatiale [m]
$\alpha$	Angle d'inclinaison du canal [degrés]
$\alpha$	Une constante de proportionnalité [-]
$\beta$	Une constante de proportionnalité [-]
$\beta_1$	Une constante de proportionnalité [-]
$\beta_2$	Une constante de proportionnalité [-]
$\beta_3$	Une constante de proportionnalité [-]
$\delta_1$	Epaisseur de déplacement [m]
$\delta_2$	Epaisseur de quantité de mouvement [m]
$\delta_3$	Epaisseur d'énergie [m]
$\varepsilon$	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente [ $m^2/s^3$ ]
$\kappa$	Constante de Von Karman [-]
$\lambda_1$	Taille moyenne d'un remous extérieur [m]
$\mu$	Viscosité dynamique [kg/m.s]
$\mu_t$	Viscosité turbulente [kg/m.s]
$\nu$	Viscosité cinématique [ $m^2/s$ ]
$\rho$	Masse volumique de l'eau [ $kg/m^3$ ]
$\sigma$	Contrainte de cisaillement de la surface [Pa]
$\tau$	Contrainte de cisaillement [Pa]
$\tau_0$	Contrainte de cisaillement à la paroi [Pa]
$\sigma_k, \sigma_c$	Constante de cisaillement [Pa]
$\psi$	Fonction de courant [-]
$\psi_t$	Fonction de courant au bord supérieur de la couche limite [-].
$\psi_E$	Fonction de courant au niveau de la pseudo base [-].
$\omega$	Fonction de courant adimensionnelle [-]
$\Delta$	Opérateur Laplacien [-]
$\Gamma(\omega)$	Densité spectrale de puissance de la pression [-]
$\Delta x$	Pas de discrétisation suivant $x$ [m]
$\Delta \omega$	Pas de discrétisation suivant $\omega$ [m]

# Sommaire



<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>1</b>
<b>Chapitre I :</b>	
<b>GENERALITES SUR L'ECOULEMENT DANS LES CANAUX A FORTE PENTE</b>	
<b>Introduction</b> .....	<b>3</b>
<b>I. Ecoulement dans les canaux</b> .....	<b>3</b>
I.1 Types d'écoulement.....	5
I.2 Régimes d'écoulements.....	6
I.3 Pente critique.....	6
I.4 Evolution de l'écoulement dans les canaux à forte pente.....	8
<b>II. Notion de la couche limite</b> .....	<b>9</b>
II.1 Concept de la couche limite.....	11
II.2 Paramètres caractérisant l'épaisseur de la couche limite.....	11
II.2.1 Définition de l'épaisseur de la couche limite.....	11
II.2.2 Epaisseur de déplacement.....	11
II.2.3 Epaisseur de quantité de mouvement.....	12
II.2.4 Epaisseur d'énergie.....	12
II.3 Décollement de la couche limite.....	12
<b>III. Ecoulement turbulent</b> .....	<b>13</b>
III.1 Définition de la turbulence « l'écoulement turbulent ».....	13
III.2 Caractères des écoulements turbulents.....	14
III.3 Effet de la turbulence.....	14
<b>Chapitre II :</b>	
<b>ETAT DE CONNAISSANCE SUR L'EVOLUTION DE LA COUCHE LIMITE DANS LES ECOULEMENT TURBULENTS AU-DESSUS DE SINGULARITES</b>	
<b>Introduction</b> .....	<b>16</b>
<b>I. Travaux de BUTTE, J-N &amp; PICHON, J. (1970)</b> .....	<b>16</b>
I.1 Mesures des vitesses moyennes.....	16
I.2 Mesures des intensités de turbulence.....	17
I.3 Mesures des tensions de Reynolds.....	18
<b>II. Travaux des GANGADARAIH, T. &amp; NEGAR, S. &amp; RAO, L. (1970)</b> .....	<b>18</b>
<b>III. Travaux de LENCASTRE, A (1985)</b> .....	<b>23</b>
<b>IV. Travaux de LEDUCQ, D &amp; PERRET, R (1988)</b> .....	<b>24</b>
IV.1 L'équation de champ de pression.....	25
IV.2 La structure de la couche limite.....	25
IV.3 Modélisation de champ de pression.....	26
a. Modèle de Kraichnan.....	26

b. Représentation Spectrale en un point.....	27
c. Modèles spatio- fréquentiels.....	27
d. Modèles de types « éléments finies ou différence finies ».....	28
V. Etude de KASSOUL,M et BELORGEY, M.(1988).....	29
VI. Travaux de REIN,M. (1998).....	30
VII. Travaux de FREDERIC, V. (1998).....	32

### Chapitre III.

#### MODELISATION MATHEMATIQUE

III.1 Equations Fondamentales .....	35
III.1.1 Equation de continuité .....	35
III.1.2 Equations dynamiques (équation de NAVIER-STOKES) .....	35
III.2 Equations générales de l'écoulement turbulent .....	36
III.2.1 Approche directe .....	36
III.2.2 Approche statistique.....	37
III.3 Equation des écoulements turbulents.....	37
III.3.1 Equation de continuité.....	38
III.3.2 Equation de quantité de mouvement.....	38
III.4 Equations de la couche limite turbulente dans les canaux à forte pente.....	39
III.4.1 Hypothèses.....	39
III.4.2 Hypothèses de la couche limite turbulente.....	41
III.4.3 Equations de la couche limite.....	44
a. Critères des choix.....	45
b. Concept de la viscosité turbulente.....	45
c. Choix du modèle du turbulence.....	45
d. Modèles mathématiques finale.....	46

### Chapitre IV :

#### MODELISATION NUMERIQUES

IV.1 Méthode des différences finies .....	48
IV.2 Transformation des équations.....	49
IV.3 Discrétisation des équations.....	52
IV.3.1 Schéma explicite.....	53
IV.3.2 Schéma implicite.....	55
IV.3.3 Méthode de THOMAS.....	56
IV.4 Calcul des différentes épaisseurs de la couche limite.....	57
IV.4.1 Formules de plaque plane .....	57
IV.4.2 Formule de WOOD.....	57
IV.5 Calcul de la surface libre.....	58
IV.6 Conditions initiales et aux limites.....	58
IV.6.1 Conditions initiales.....	59
• Conditions initiales pour différentes épaisseurs de la couche limite.....	59
• Conditions initiales de la vitesse.....	59

• Conditions initiales de l'énergie cinétique turbulente .....	59
• Conditions initiales du taux de dissipation .....	60
IV.6.2 Conditions aux limites .....	61
IV.6.2.1 L'écoulement libre .....	61
IV.6.2.2 Conditions aux limites du fond (la paroi).....	61
• Fonction de paroi pour la vitesse.....	61
• Région interne- loi de paroi.....	62
• Région externe – loi de vitesse déficitaire.....	62
• Fonctions de paroi pour K et $\epsilon$ .....	64
IV.7 Organigrammes de calcul .....	64
IV.7.1 Organigramme de calcul élaboré sur la base du schéma explicite.....	65
IV.7.2 Organigramme de calcul élaboré sur la base du schéma implicite.....	67

## Chapitre V :

### EXPERIMENTATIONS NUMERIQUES

<b>V.1 Introduction .....</b>	<b>69</b>
<b>V.2 Validation des modèles numériques.....</b>	<b>69</b>
V.2.1 Présentation des modèles d'application .....	69
V.2.1.1 Evacuateur de crue à profil lisse.....	69
V.2.1.2 Modèle physique de Vercheval.....	69
V.2.2 Calcul des paramètres hydrauliques de l'écoulement.....	70
V.2.2.1 Vitesse de frottement.....	70
V.2.2.2 Coefficient de frottement.....	70
V.2.2.3 Hauteur d'eau au seuil du coursier.....	70
V.2.2.4 Hauteur d'eau normale.....	70
V.2.2.5 Hauteur d'eau critique .....	71
V.2.3 Choix du schéma numérique dans le cas d'un coursier à profil lisse.....	71
V.2.4 Choix du schéma numérique dans le cas d'un coursier en marches escalier.....	72
<b>V.3 Interprétation des résultats.....</b>	<b>73</b>
V.3.1 Paramètres influençant la localisation d'entraînement d'air .....	73
V.3.2 Influence du débit sur le développement de la couche limite.....	74
V.3.3 Influence de la pente sur le développement de la couche limite .....	76
V.3.4 Effet de la marche sur le développement de la couche limite.....	78
V.3.5 Profils de la vitesse d'écoulement.....	79
V.3.6 Profils de l'énergie cinétique turbulente.....	81
V.3.7 Profils du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.....	83
<b>CONCLUSION .....</b>	<b>85</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>87</b>

المدرسة الوطنية المتعددة الفتيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION

## INTRODUCTION

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Les barrages sont protégés par un système de décharge appelé évacuateur de crues. Généralement il s'agit d'un évacuateur de crues dit de surface. Un évacuateur de crues de surface est un déversoir situé en crête de barrage. Il comporte : une entrée, un coursier et un système de dissipation d'énergie. L'écoulement obtenu sur la rampe est un écoulement à surface libre supercritique (grand nombre de Froude).

Avec l'accroissement de la hauteur des barrages, les vitesses d'écoulement peuvent atteindre des valeurs maximales. Dans ces conditions, les dommages dus à l'érosion par cavitation sont inacceptables.

Pour prévenir ou ralentir cette érosion, il est possible d'utiliser des bétons spéciaux (à haute résistance), des revêtements d'acier et des surfaçages en résine polymère...etc. Ces solutions sont coûteuses et ne sont pas satisfaisantes pour des valeurs de vitesses très grandes.

Une autre méthode consiste à augmenter la compressibilité du fluide près de la surface du coursier en introduisant de l'air dans l'écoulement. Elle consiste à concevoir des marches d'escaliers le long du coursier. Cette conception permet de dissiper une grande partie de l'énergie cinétique engendrée par l'écoulement à grandes vitesses et par conséquent, réduit d'autant les dimensions des ouvrages de dissipation.

Dans le cas d'un écoulement turbulent sur les évacuateurs de crues en marches d'escaliers, l'entraînement d'air commence quand la couche limite atteint la surface libre.

Dans cet ordre d'idée, l'objectif principal de ce travail est de simuler numériquement l'écoulement dans la couche limite pour atteindre les buts suivants :

- Localiser le point d'inception où le phénomène d'entraînement d'air commence en faisant varier le débit et la pente pour le cas d'un profil lisse et pour le cas d'un profil en marches d'escaliers.
- Etudier l'influence du débit, de la pente et l'effet des marches sur l'évolution de la couche limite et de ses différentes épaisseurs à savoir : l'épaisseur de déplacement, l'épaisseur de quantité de mouvement et l'épaisseur d'énergie.
- Déterminer les profils des variables de l'écoulement à savoir : la vitesse, l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente en faisant varier le débit et la pente.

Brièvement, le plan d'étude que nous proposons comporte les étapes suivantes :

Les généralités sur les écoulements dans les canaux à forte pente sont données dans le chapitre I. Le chapitre II est consacré à la présentation des travaux de recherche effectués

dans le domaine. Dans le chapitre III est présenté les équations régissant l'écoulement dans la couche limite qui se développe à partir du seuil du déversoir.

Dans le chapitre IV, le système d'équations aux dérivées partielles établi, associé à des conditions aux frontières, est résolu en utilisant des schémas numériques appropriés dans le cadre de la méthode des différences finies. En outre, les organigrammes de calculs généraux ayant servi à la programmation y sont présentés.

Les différentes expérimentations numériques sont présentées au chapitre V. La première partie des applications est consacrée évidemment, à la validation de nos modèles par la confrontation des résultats qu'ils offrent à ceux provenant des autres études. Puis, dans un deuxième volet des applications sont effectuées.

En dernier lieu, une conclusion générale est donnée.

# Chapitre I

**GENERALITES SUR L'ECOULEMENT  
DANS LES CANAUX A FORTE PENTE**

## Chapitre I

# GENERALITES SUR LES ECOULEMENTS DANS LES CANAUX A FORTE PENTE

## INTRODUCTION

Pour comprendre l'évolution de l'écoulement dans les canaux à forte pente, on doit rappeler des notions générales sur l'écoulement dans les canaux naturelles et artificielles, ainsi que des notions générales sur la couche limite.

Généralement l'écoulement dans les canaux à forte pente est un écoulement turbulent, alors il est indispensable de définir ce genre de l'écoulement.

## I. ECOULEMENT DANS LES CANAUX

L'écoulement dans les canaux naturels et artificiels sont des écoulements à surface libre. Cette dernière est la surface de séparation de l'air et de l'eau. La pression y est égale à la pression atmosphérique.

L'écoulement à surface libre est du à la pente de fond du canal et non, comme pour les conduites en charge, à la différence de charge.

### I.1 Types d'écoulements

Une classification des écoulements peut se faire selon la variation de la profondeur,  $D_h$ , par rapport au temps et à l'espace :  $D_h = f(x, t)$

- **Variation dans le temps**

Le mouvement est permanent (figure I.1), si la vitesse moyenne,  $U$ , et ponctuelle,  $u$ , ainsi que la profondeur  $D_h$ , restent invariables dans le temps en grandeur et on a :  $US = Q$  entre les diverses sections du canal sans apport latéral [18].

Le mouvement est non permanent (figure I.1), si la profondeur,  $D_h$ , ainsi que les autres paramètres varient avec le temps, par conséquent, le débit n'est pas constant [18].

Au sens strict, l'écoulement dans les canaux est rarement permanent. Néanmoins, les variations temporelles sont souvent suffisamment lentes pour que l'écoulement puisse être considéré comme permanent, du moins dans des intervalles de temps relativement courts.

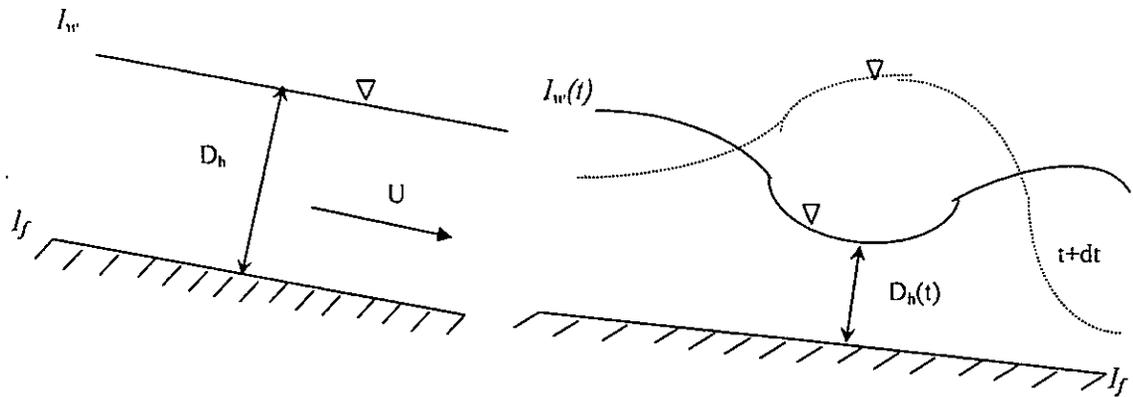


Figure I.1 : Schéma des écoulements permanents et non permanents

• Variabilité dans l'espace

Le mouvement est uniforme si la profondeur,  $D_h$ , ainsi que les autres paramètres, restent invariables dans les diverses sections, du canal. La ligne de la pente de fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre et l'on a :  $I_f = I_w$ .

Le mouvement est non uniforme ou varié si la profondeur,  $D_h(x)$ , ainsi que les autres paramètres, changent d'une section à l'autre. La pente de fond diffère alors de celle de la surface libre :  $I_f \neq I_w$  [18].

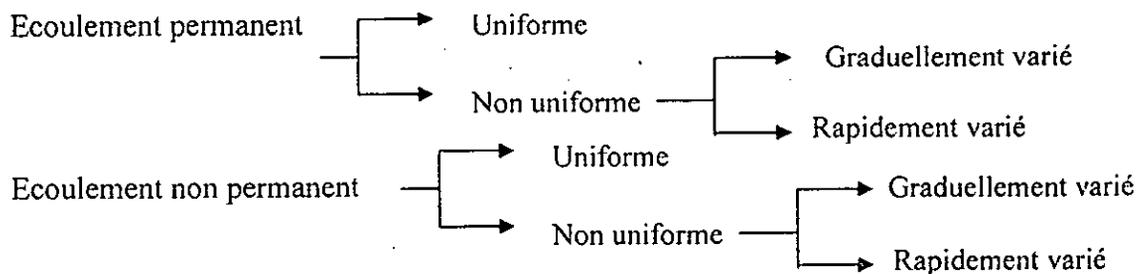
L'écoulement non uniforme peut être permanent ou non permanent.

Un mouvement varié peut être accéléré,  $\frac{dU}{dx} > 0$  ou décéléré  $\frac{dU}{dx} < 0$ , suivant que la vitesse croît ou décroît dans le sens du mouvement.

Lorsque le mouvement est graduellement varié, la profondeur  $D_h(x) \equiv D_h$ , ainsi que les autres paramètres, ne changent que très lentement d'une section à l'autre. On peut donc admettre que l'écoulement est quasiment constant.

Lorsque le mouvement est rapidement varié, la profondeur,  $D_h(x)$ , ainsi que les autres paramètres changent brusquement, parfois avec des discontinuités. Cela se manifeste en général au voisinage d'une singularité tels qu'un déversoir, un rétrécissement, un ressaut hydraulique ou une chute brusque [18].

Les types d'écoulements qu'on rencontre en hydraulique fluviale (figure I.2) peuvent être résumés ainsi :



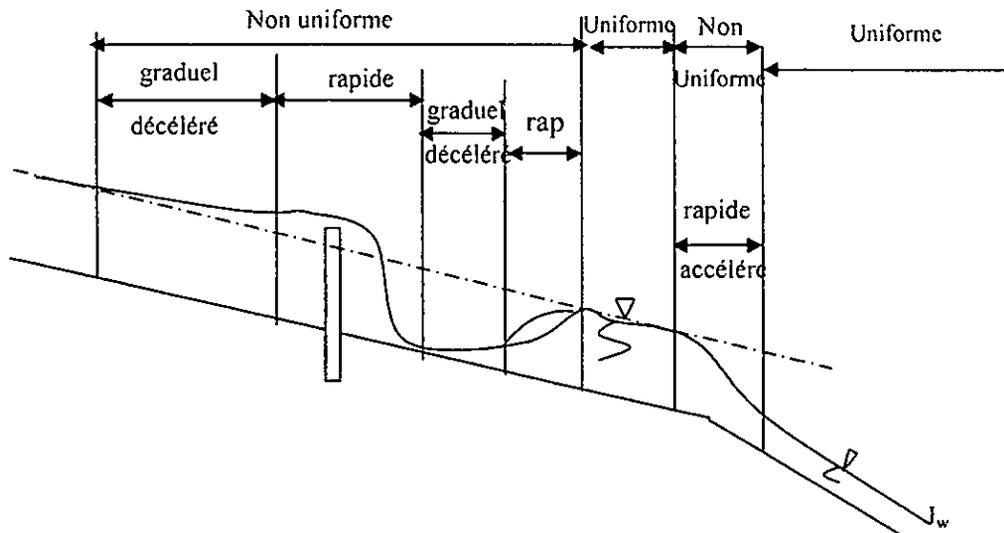


Figure I. 2 : Schéma des écoulements permanent, uniforme et varié

### I.2 Régimes d'écoulements

L'écoulement d'un fluide réel dans un canal à surface libre engendre les forces suivantes :

1. Forces d'inertie
2. Forces de gravité
3. Forces de frottement (viscosité ou rugosité)

Les équations réduites du mouvement font intervenir les coefficients ou les nombres adimensionnels suivants :

a) Nombre de Froude, qui est le rapport entre les forces de gravité et celles d'inertie :

$$\frac{\rho g}{\rho U_c^2 / L_c} = \frac{gL_c}{U_c^2} = Fr^2$$

$$d'où : Fr = \frac{U_c}{\sqrt{gL_c}} \quad (I-1)$$

b) Nombre de Reynolds, qui est le rapport entre les forces de frottement et celles d'inertie :

$$\frac{\mu \left( U_c / L_c^2 \right)}{\rho U_c^2 / L_c} = \frac{\nu}{U_c L_c} = Re^{-1}$$

$$d'où : Re = \frac{U_c L_c}{\nu} \quad (I-2)$$

$U_c$  et  $L_c$  représentent une vitesse et une longueur caractéristique.

A ces deux nombres s'ajoute encore :

- c) La rugosité relative, qui est le rapport entre la hauteur de la rugosité,  $k_s$  et une longueur caractéristique  $L_c$  :  $k_s/L_s$ .

### **I.3 Pente critique**

La pente critique d'un canal, quelle qu'en soit sa forme, peut être calculée par :

$$I_c = \frac{gS}{C^2 BR_h} \quad (I-3)$$

Ceci est fonction de la profondeur d'eau  $h$ , qui définit une pente de manière que cette profondeur soit à la fois profondeur normale  $h_n$ , et profondeur critique  $h_c$  quel que soit le débit [18].

La notion de pente critique joue un rôle important comme paramètre de référence dans l'étude de l'écoulement graduellement varié.

1. Si la pente du fond du canal pour un débit  $Q$  et un coefficient de rugosité  $n$  donnés est inférieure à la pente critique, la profondeur normale sera supérieure à la profondeur critique. on écrit :  $I_f < I_c$  ;  $h_n > h_c$

Le canal est dit à faible pente.

L'écoulement uniforme correspondant à la profondeur normale sera en régime sous critique ou fluvial [18].

2. Si la pente du fond du canal est supérieure à la pente critique, la profondeur normale sera inférieure à la profondeur critique, on écrit :  $I_f > I_c$  ;  $h_n < h_c$ .

Le canal est dit à forte pente.

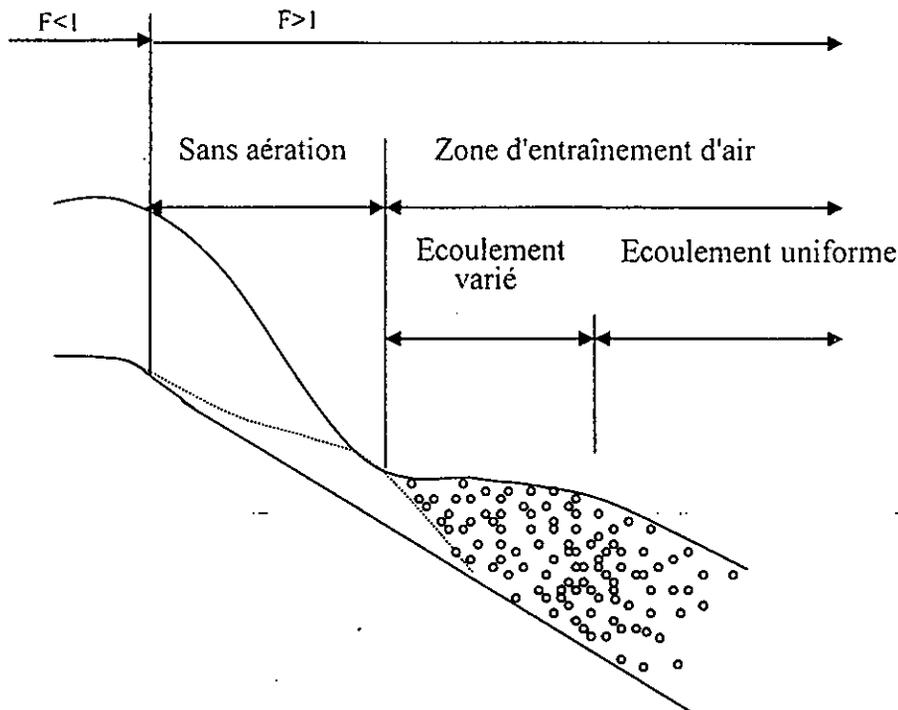
L'écoulement uniforme correspondant à la profondeur normale sera en régime sur-critique ou torrentiel [18].

### **I.4 Evolution de l'écoulement dans les canaux à forte pente**

Comme représenté à la figure (I.3), l'écoulement dans un long canal à pente du radier forte et constante détermine plusieurs zones [6, 40].

Dans le tronçon amont du canal existe une zone d'écoulement non aéré avec une couche limite turbulente qui s'épaissit dans le sens de l'écoulement. Au moment où cette dernière atteint la surface libre le mécanisme d'entraînement d'air, décrit sous la figure (3), se développe. L'épaisseur de la lame d'eau aérée s'accroît en direction de l'écoulement (zone d'écoulement non uniforme aéré). Si le canal est suffisamment long, l'écoulement du mélange devient uniforme et atteint la hauteur normale du mélange  $h_{NM}$  (zone d'écoulement uniforme aéré) [6, 40].

La longueur des zones d'écoulement non aéré, respectivement non uniforme aéré, n'est pas clairement définie à l'heure actuelle.



**Figure I.3 : Développement d'un écoulement biphasique dans un long canal à forte pente**

A l'aval d'un déversoir, prolongé par un canal à forte pente constante, l'épaisseur de la lame d'eau diminue suivant une courbe de remous dans le domaine torrentiel. Sans tenir compte des effets d'aération superficiels, la hauteur uniforme de l'eau pure sera atteinte à une distance assez grande. Toutefois, la couche limite turbulente s'accroît fortement pour atteindre la surface libre à une certaine distance  $S$  du déversoir, où se trouve le point initial de l'aération superficielle (figure I.4). Pour une disposition d'ouvrage et un débit donné se pose donc la question de la position du point à partir duquel l'eau écumeuse caractérise la surface [6, 40].

D'après Gangadaraiah et ses collaborateurs [17, 40]; il faut satisfaire deux conditions pour que l'entraînement d'air commence :

- L'énergie cinétique des vortex superficiels doit permettre de surmonter la tension superficielle,
- La couche limite turbulente doit être entièrement développée.

Keller et Rastogi [22, 40] ont retenu seulement la deuxième de ces conditions. Ils font une distinction entre la zone d'écoulement potentiel et la zone à couche limite turbulente, comme représenté sur la figure ci-dessous.

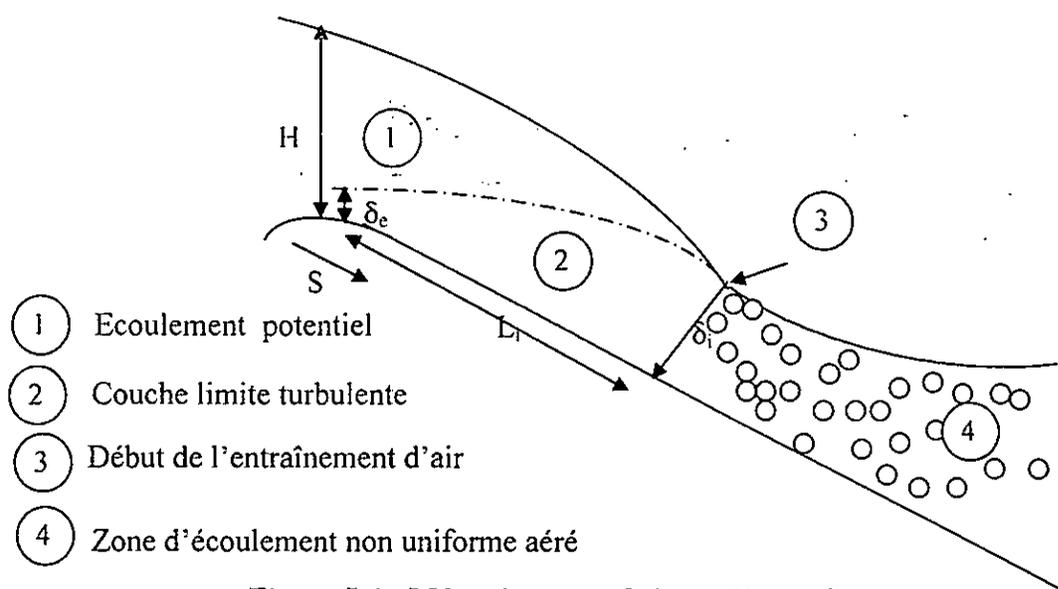


Figure I.4 : Mécanisme conduisant l'entraînement d'air

L'épaisseur de la couche limite  $\delta = \delta(s)$  mesurée perpendiculairement par rapport au fond, croît de sa valeur initiale à la crête  $\delta(s = 0) = \delta_0$  vers l'aval lorsqu'elle atteint la surface libre, l'épaisseur de cette couche devient égale à la hauteur d'eau,  $\delta(s) = h(L_i)$ . Pour  $s > L_i$ , l'aération superficielle apparaît et c'est le mélange d'eau et d'air qui s'écoule. Les essais ainsi que les calculs montrent que  $L_i$  croît avec le débit d'eau pure  $q_c$  par unité de largeur pour une rugosité et une pente du radier du coursier données.

## II NOTION DE LA COUCHE LIMITE

Dans la théorie des fluides parfaits incompressibles, on a trouvé que la répartition des vitesses ou des pressions ainsi que la forme des lignes de courant sont déterminées par la géométrie des parois limitant l'écoulement et ne dépendent pas de la nature des fluides étudiés [10].

Si on étudie les fluides réels, on constate que les solutions proposées par la théorie précédente sont conformes aux données expérimentales quand on considère des zones éloignées des parois, mais dans le voisinage de celles-ci, elles ne conviennent plus du tout [10].

Dans les deux cas, les équations et les conditions aux limites sont différentes. S'il s'agit d'un fluide visqueux, les équations du mouvement sont celles de Navier-Stokes, qui diffèrent de celles d'un fluide parfait « équations d'Euler » par le terme  $\mu \Delta \vec{U}$  qui représente l'effet de viscosité. Les conditions aux limites étant différentes dans les deux cas, on admet qu'il y a un glissement des particules sur les parois pour un fluide parfait. Alors qu'en fluide réel, on admet qu'il y a une adhérence (figure I.5).



Couche limite laminaire

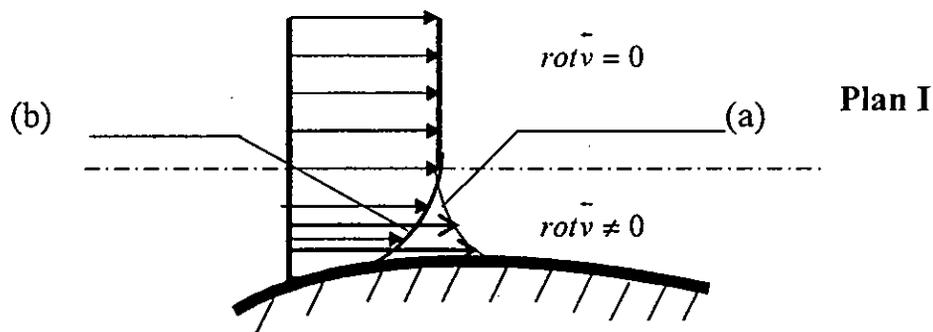


Figure I.5 : Développement de la couche limite

*On remarque qu'au dessus du plan I* la courbe (a) a la même allure que la courbe (b) ce qui signifie que l'effet de la viscosité est négligeable.

*Alors qu'on remarque qu'au dessous du plan I*, il y a un défaut de vitesse entre (a) et (b) au voisinage de la paroi, dans une zone qui dépend des conditions aux écoulements :  $\text{rot } \vec{v} \neq 0$ . Cette zone est appelée *la couche limite*.

### II.1 Concept de la couche limite

Si le nombre de Reynolds est grand, il existe une zone au voisinage des parois où les forces de viscosité sont de même ordre de grandeur que les forces d'inertie. La taille de cette zone est définie par l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  ; on dira que  $\delta$  est une échelle de longueur caractéristique des phénomènes visqueux. En dehors de la couche limite, on peut en effet négliger les effets de la viscosité. Bien que la viscosité existe quand même puisque c'est

une propriété du fluide. Si on analyse de plus près l'hypothèse de couche limite, on voit apparaître la notion d'échelle de temps [11].

Deux temps caractéristiques sont en présence : celui relatif à la convection et celui relatif à la diffusion (figure I.6).

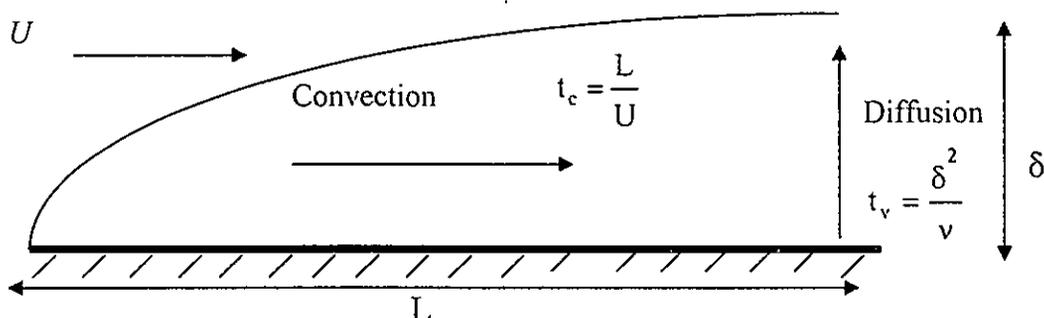


Figure I.6 : Temps de transport caractéristiques dans une couche limite laminaire

- Temps de diffusion

Le transport par diffusion s'effectue essentiellement suivant la normale à la paroi. La paroi crée un déficit de quantité de mouvement ( puisque la vitesse  $y$  est nulle) qui diffuse vers l'extérieur dans l'épaisseur de la couche limite (le transfert de quantité de mouvement par diffusion s'effectue vers la paroi). Le temps associé est :  $t_v = \delta^2/v$ . Il représente le temps nécessaire pour que l'effet de la paroi soit transmis à la distance  $\delta$  [11].

- Temps de convection

D'autre part, l'ordre de grandeur du temps mis par une particule fluide pour parcourir la distance séparant l'origine de la couche limite et le point à la distance  $L$ . L'épaisseur de la couche limite est  $\delta$ , est caractéristique de la convection, il est donné par  $t_c = L/U$ .

L'hypothèse de la couche limite exprime que les échelles de temps de convection et de la

$$\text{diffusion sont égales : } \frac{L}{U} \approx \frac{\delta^2}{v} \quad (\text{I-4})$$

$$\text{d'où l'on tire : } \frac{\delta}{L} \approx \left( \frac{UL}{v} \right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (\text{I-5})$$

On peut y retrouver cette relation, si on exprime les équations de mouvement en variables réduites, en prenant  $L$  et  $U$  comme références caractéristiques dans la direction  $x$ . Dans la direction  $y$  on prend l'épaisseur de la couche limite  $\delta$  comme référence, tel que  $\frac{\delta}{L}$  est de l'ordre « e » infiniment petit devant 1 [11].

## II.2 Paramètres caractérisant l'épaisseur de la couche limite

### II.2.1 Définition de l'épaisseur de la couche limite

Si on considère que le fluide est parfait en dehors de la couche limite, la pression totale est constante " $P + \rho z + \rho U^2/2 = \text{Constante}$ ". Par contre, elle diminue dans la couche limite par suite des effets de viscosité (Figure I.7), et on pourrait définir  $\delta$  comme la distance à la paroi où la pression totale diffère de sa valeur dans l'écoulement libre 2%. La définition de  $\delta$  ne peut pas être précise, car il n'y a pas de zone claire de démarcation entre la région où l'effet de viscosité peut ou ne peut pas être négligé [20].

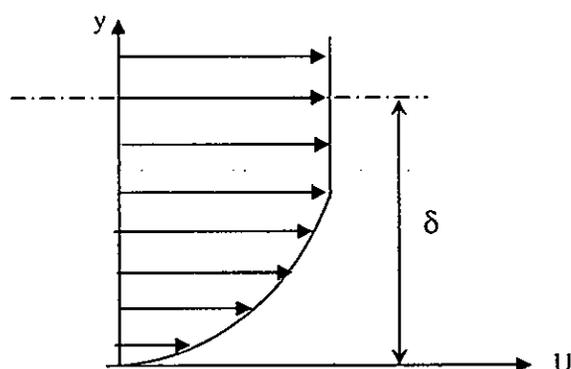


Figure I.7 : Epaisseur de la couche limite

### II.2.2 Epaisseur de déplacement

L'épaisseur de déplacement représente le déplacement que devrait subir chaque point de la paroi pour qu'un écoulement fictif à vitesse constante  $U$  s'effectuant entre  $y = \delta_1$  et l'infini donne le même débit que l'écoulement réel s'effectuant entre  $y = 0$  et l'infini (figure I.8) [20].

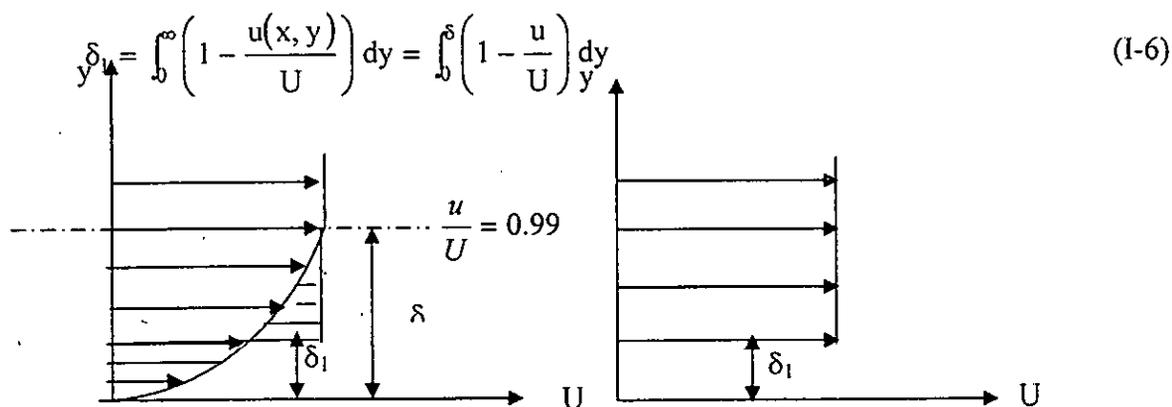


Figure I.8 : Epaisseur de déplacement

### II.2.3 Epaisseur de quantité de mouvement

Le ralentissement de l'écoulement par suite de la viscosité dans la couche limite entraîne une réduction du débit de quantité de mouvement.  $\delta_2$  est définie comme l'épaisseur de la couche limite du fluide ayant une vitesse  $U$ , pour laquelle le débit de quantité de mouvement est égal à celui qui est perdu dans une section donnée de la couche [20]. Dans le cas bidimensionnel, on a :

$$\delta_2 = \int_b^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (I-7)$$

### II.2.4 Epaisseur d'énergie

Le ralentissement de l'écoulement dû à la viscosité dans la couche limite cause nécessairement une réduction du flux d'énergie.  $\delta_3$  est définie comme l'épaisseur d'une couche limite ayant une vitesse  $U$  pour laquelle le flux d'énergie est égal à celui qui est perdu dans une section donnée [20]. En écoulement bidimensionnel, on a :

$$\delta_3 = \int_b^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) dy \quad (I-8)$$

Un paramètre fréquemment utilisé est *le facteur de forme* de la couche limite:  $H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ .

Deux autres paramètres reliés à ces épaisseurs sont définis par :

- La contrainte tangentielle à la paroi :  $\tau_0 = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$
- Le coefficient de frottement pariétal :  $C_f = \frac{2 \tau_0}{\rho U^2}$

### II.3 Décollement de la couche limite

Dans le fluide libre, on a :  $P + \rho \left( U^2/2 \right) = \text{cte}$ , soit le long d'une ligne de courant :

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (I-9)$$

- Si  $U$  croît dans le sens de l'écoulement  $\frac{\partial U}{\partial x} > 0$  par suite  $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$ , la pression diminue. Il s'ensuit qu'au voisinage de la surface solide, dans la couche limite où la pression est sensiblement constante, le fluide a tendance à s'écouler le long de la paroi (Figure I.9). Le défaut de vitesse est diminué.

- Si  $U$  décroît, on a de même  $\frac{\partial U}{\partial x} < 0$ , par suite  $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ , le fluide peut être ralenti à la paroi ; Le défaut de vitesse augmente (figure I.9). Si le gradient de pression est fort, il se produit un écoulement dans le sens opposé à  $U$  : la notion de couche limite perd alors toute sa signification, car la vitesse ne reste plus parallèle à la paroi [10, 11, 20].

On appelle point de décollement sur la paroi, le point de la frontière au voisinage immédiat

duquel le fluide est au repos, ce qui s'exprime par :  $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$  (I-10)

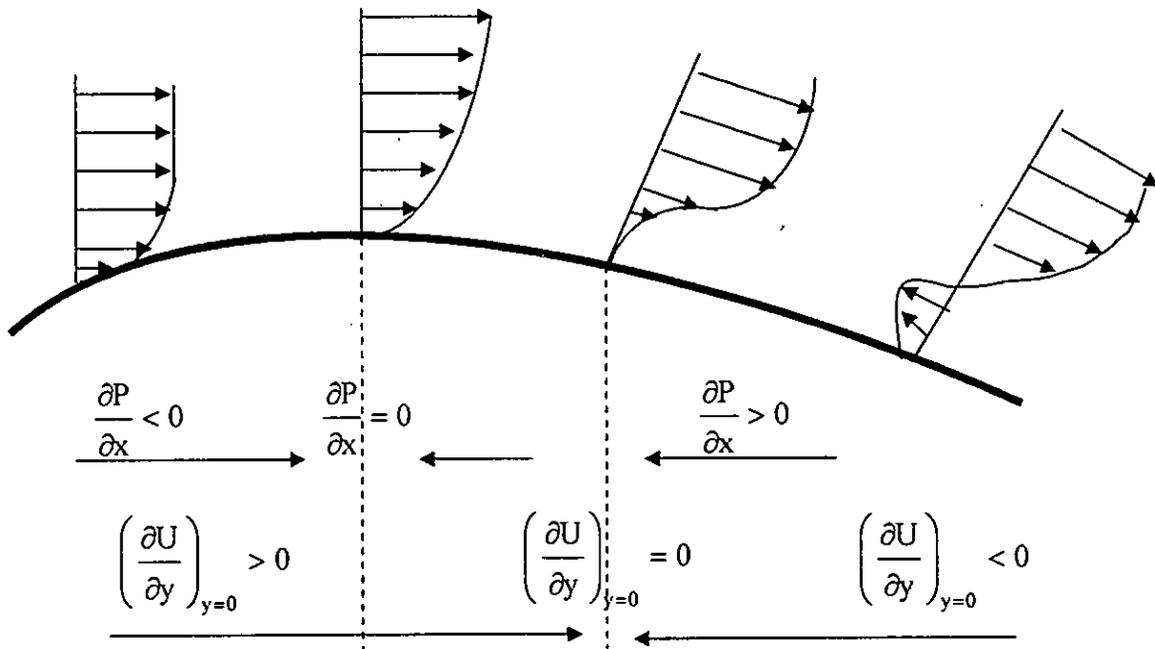


Figure I. 9 : Evolution du profil des vitesses dans la couche limite

### III. ECOULEMENT TURBULENT

Il n'existe pas de définition de la turbulence en milieu fluide ni d'ailleurs de théorie générale de la turbulence.

#### III.1 Définition de la turbulence « l'écoulement turbulent »

Selon Landau et Lifchitz, «le mouvement turbulent d'un fluide est caractérisé par l'existence d'une variation extrêmement irrégulière chaotique de la vitesse au cours des temps dans chaque point du flux» [36].

L'écoulement s'accompagne d'un brassage intense du fluide. Les particules de ce dernier se déplacent dans toutes les directions d'une manière aléatoire et leurs trajectoires sont souvent des courbes de formes très compliquées.

La turbulence est caractérisée par un certain nombre de propriétés observables que nous allons préciser ci-après.

### **III.2 Caractères des écoulements turbulents**

#### **a) Aspect aléatoire**

Les paramètres physiques de l'écoulement turbulent tels que la vitesse et la pression varient de façon aléatoires dans le temps et dans l'espace [36].

#### **b) Aspect rotationnel**

Un écoulement turbulent présente des fluctuations du rotationnel de vitesse [36].

#### **c) Aspect tridimensionnel**

Les écoulements turbulents sont toujours tridimensionnels et instationnaires. Sauf pour Certain cas spécifiques, ils sont bidimensionnels [36].

#### **d) Aspect non linéaire**

Dans un écoulement turbulent, le transfert d'énergie des fluctuations des vitesses à grande échelle vers les fluctuations à plus petite échelle est du même ordre de grandeur, que l'énergie dissipée en chaleur par de la viscosité. Ce phénomène est lié aux interactions non linéaires, qui sont représentées par les termes d'inertie dans les équations des écoulements turbulents [36].

#### **e) Aspect dissipatif**

L'énergie dissipée dans les écoulements turbulents est beaucoup plus importante que celle dans les écoulements laminaires du fait de la viscosité et de la présence de forts gradients de vitesse [36].

#### **f) Aspect diffusif**

Le milieu turbulent diffuse toute quantité de matière ou d'énergie transportable a un ordre de grandeur qui dépasse celui de la diffusion moléculaire. Cette diffusion est due aux termes de convection au niveau [36].

#### **g) Aspect d'imprédictibilité des trajectoires**

Les trajectoires des particules ne dépendent pas des conditions initiales sur de longues périodes. Ce qui explique les difficultés de la prévision à long terme : c'est le phénomène d'imprédictibilité [36].

### **III.3 Effet de la turbulence**

#### **a) Effet sur le transport de masse**

Dans un mélange de fluides, la turbulence provoque un transport de masse par diffusion turbulente. Cette diffusion, fait en sorte que le mélange devient homogène. Par exemple, une goutte de colorant se disperse très lentement dans une masse liquide immobile

sous la seule action de la diffusion moléculaire. Il suffit de provoquer une agitation turbulente pour obtenir une dispersion rapide du colorant qui se répartie de façon homogène dans tout le volume du liquide.

**b) Effet sur la quantité de mouvement et l'énergie cinétique**

Les tensions de Reynolds qui s'ajoutent dans l'équation dynamique sont la conséquence de la diffusion turbulente de quantité de mouvement et la viscosité.

Dans l'équation de l'énergie cinétique, la turbulence introduit des termes de diffusion et des termes de production de fluctuation de l'énergie cinétique.

# Chapitre II

ETAT DE CONNAISSANCE SUR L'EVOLUTION  
DE LA COUCHE LIMITE  
DANS LES ECOULEMENT TURBULENTS AU-DESSUS  
DE SINGULARITE

## Chapitre II

# L'EVOLUTION DE LA COUCHE LIMITE DANS LES ECOULEMENTS TURBULENTS AU- DESSUS DE SINGULARITES

## INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présenterons les différents travaux de recherche sur l'évolution de la couche limite dans les écoulements turbulents au dessus de singularités.

Ayant pris connaissance de tout ce qui a été fait dans le domaine, ce chapitre va servir en premier lieu à donner une orientation générale à notre travail, et également choisir les méthodes de traitement appropriées.

### **I TRAVAUX DE BUTTE, J. N. & PICHON, J. (1970)**

L'objectif des travaux de Butte et Pichon a été de préciser la structure de l'écoulement turbulent au-dessus d'une singularité en forme d'une marche d'escalier à partir d'une série d'expériences. Une chaîne d'anémomètres à film chaud a été utilisée [4].

Le canal de mesure est un canal horizontal, de section carrée ( $51 \times 51 \text{ cm}$ ) et de longueur  $9 \text{ m}$ .

#### **I.1. Mesure des vitesses moyennes**

La sonde utilisée pour ces mesures est une sonde cylindrique verticale.

Deux types d'écoulement ont été étudiés : le premier cas A, correspond à un débit  $Q=9 \text{ l/s}$ , et le deuxième cas B correspond à un débit double  $Q=18,2 \text{ l/s}$ .

Pour une même hauteur d'eau au-dessus de la marche, ils ont mesuré dans les deux cas, les composantes longitudinales des vitesses moyennes.

Les auteurs constatent que pour un même profil les répartitions des vitesses sont analogues dans les deux cas. Seule l'intensité varie. Les lignes de vitesse nulle sont identiques. Elles partent de l'arête de la marche et aboutissent aux alentours du point de recollement de la ligne du jet (figure II-1). Ces lignes marquent une séparation entre les domaines des vitesses moyennes positives et négatives.

Les vitesses négatives correspondent au courant de retour, sous la ligne du jet.

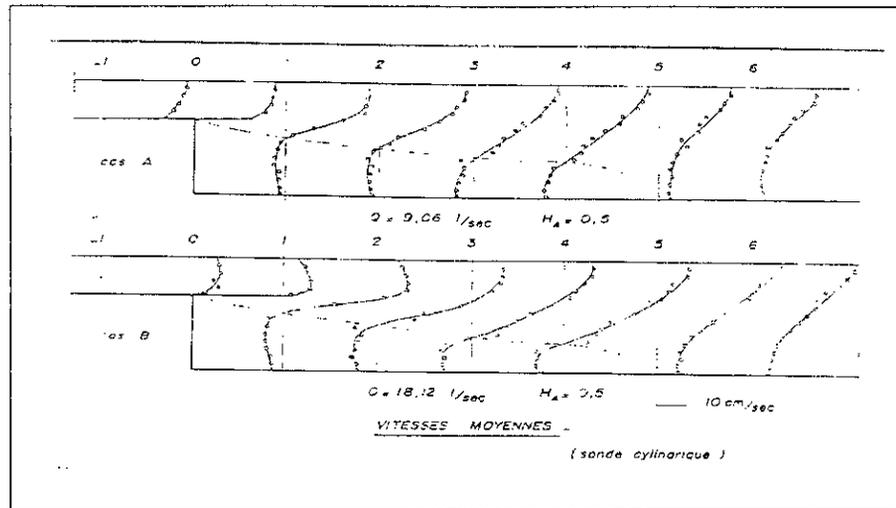


Figure II.1 : Vitesse moyennes [4]

### I.2 Mesure des intensités de turbulence

La sonde utilisée pour ces mesures est une sonde cylindrique verticale. Les intensités de turbulence mesurées ont été corrigées.

Les auteurs remarquent que, quel que soit le cas étudié, les courbes d'intensités de turbulence, pour un même profil sont sensiblement identiques, en forme et en intensité, au-dessus de la ligne (c) d'intensités (figure II-2). Au-dessous de cette ligne, les formes des courbes sont analogues mais les intensités sont supérieures dans le cas (B).

Quant aux lignes (a) et (b), identiques dans les deux cas, elles délimitent la zone de mélange de l'écoulement.

Au-dessus de la ligne (a) la courbe d'intensités est semblable à celle du profil « 0 » et « 1 ». Entre les lignes (a) et (b) l'intensité de la turbulence croît brusquement jusqu'à atteindre le maximum puis décroît brusquement sur la ligne (b).

Il existe aussi une singularité au-dessous de la ligne (b), cette singularité est provoquée par l'écoulement de retour, sous la ligne du jet.

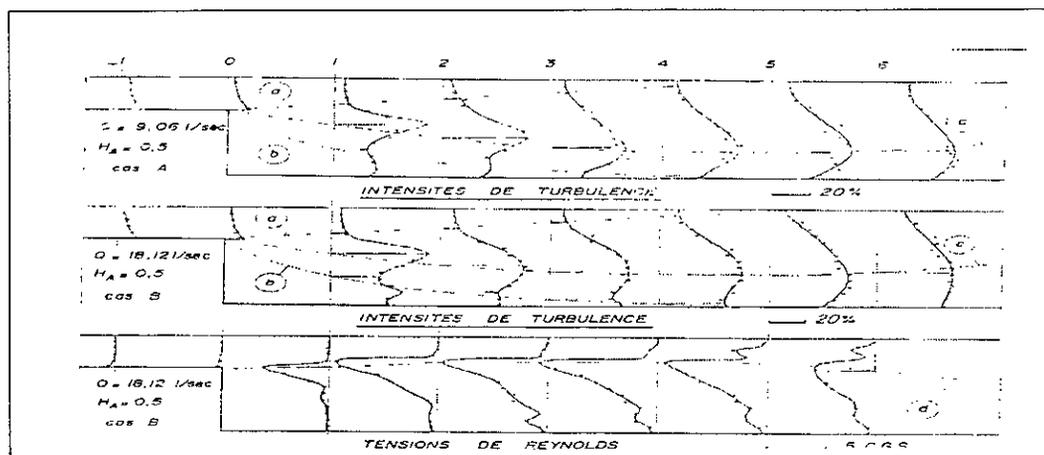


Figure II.2 : Intensité de turbulence et tensions de Reynolds [4]

### I.3 Mesure des tensions de Reynolds

La sonde utilisée pour ces mesures est une sonde en X.

Sur la figure (II-2), les auteurs ont remarqué l'existence d'une ligne de cisaillement maximum (ligne d) qui s'élève au-dessus du niveau de la marche et s'abaisse après le profil «5».

Contrairement à ce que trouvent certains chercheurs dans un écoulement en charge, les tensions de cisaillement maximales ne se situent pas au même niveau que les intensités de turbulence maximales (les lignes (c) et (d) sont différentes). Ceci les auteurs l'expliquent par le fait que les intensités de turbulence sont relatives à  $u_1$  (égales  $\sqrt{U_1^2 / \bar{U}}$ ) alors que les tensions de cisaillement sont proportionnelles à  $u_1$  et  $u_2$ .

Les tensions de cisaillement croissent jusqu'au profil « 4 ». Elles décroissent ensuite nettement lorsqu'on s'éloigne vers l'aval.

Il est intéressant de remarquer l'existence de singularités aux parties supérieures et inférieures des courbes de tensions. Ces singularités pourraient correspondre aux limites de la zone de mélange.

### Conclusion

- La couche limite se décolle lorsque la vitesse devient négative.
- Les tensions de cisaillement sont très fortes dans la zone de mélange, leur maximum se situe dans la partie supérieure de cette zone.

Tout près des parois, les tensions de Reynolds ont une valeur constante.

## **II TRAVAUX DU GANGADARAIH, T. & NEGAR, S. & RAO, L. (1970)**

Les travaux des Gangadaraih, Negar et Rao [17] sont basés sur le début de l'aération naturelle des écoulements dans les déversoirs et sur l'entraînement de l'air.

Les conditions pour que le commencement de l'aération se produise sont :

- L'énergie cinétique des remous extérieurs soit plus grande que l'énergie de tension superficielle.
- La couche limite turbulente doit être entièrement développée.

Pour justifier ces critères, les auteurs ont fait une série d'expériences sur un modèle d'un canal à forte pente.

L'existence d'une surface libre turbulente est un préalable au commencement de l'entraînement de l'air. Les auteurs ont utilisé la lumière stroboscopique sur l'écoulement dans la zone de commencement de l'aération dans un canal à forte pente.

Ils ont observé que la turbulence provoque une aération naturelle de l'écoulement qui rend l'eau bouillante et blanche. Ce phénomène trouve son origine dans les grandes vitesses

acquises par le fluide, il en résulte une éjection de gouttelettes d'eau dans l'air, en retombant dans l'écoulement, la goutte ouvre la surface de l'eau et la referme sous l'action de la tension superficielle. La goutte entraîne avec elle une bulle d'air qui se trouve ainsi emprisonnée dans l'écoulement [17].

La taille moyenne ( $\lambda_1$ ) d'un remous extérieur, sous forme de gouttelette de l'eau s'éjectant dans l'atmosphère est déterminée par la formule suivante :

$$\lambda_1 = \pi\lambda = \chi\pi \sqrt{\frac{vh}{u_*}} \quad (\text{II-1})$$

Le calcul de l'énergie cinétique ( $E_{kin}$ ) de remous qui essaye de projeter hors de la surface libre se fait à partir de l'équation suivante :

$$E_{kin} = \frac{\rho}{2} \frac{4}{3} \pi \left( \frac{\lambda_1}{2} \right)^3 \left[ \sqrt{(v')^2} \right]^2 = \beta_1 \left[ \rho \left( \frac{vh}{u_*} \right)^{3/2} \bar{U}^2 \right] \quad (\text{II-2})$$

tel que  $\sqrt{(v')^2} = \beta\bar{U}$  où  $\bar{U}$  : la vitesse moyenne,  $\beta$  : une constante de proportionnalité.

$$\beta_1 = (\pi^4 \chi^2 \beta^2) / 12 \quad (\text{II-3})$$

La relation pour l'énergie de la tension superficielle  $E_\sigma$  d'un remous peut s'écrire sous la forme suivante :

$$E_\sigma = \pi\lambda_1^2\sigma = \beta_2 \left( \frac{vh}{v_*} \sigma \right) \quad (\text{II-4})$$

avec,  $\sigma$  : la tension de surface

Pour qu'une gouttelette de l'eau soit projetée hors de la surface libre, il faut que :  $E_{kin} > E_\sigma$

$$\text{soit } \frac{E_{kin}}{E_\sigma} = \frac{I}{\beta_3} > 1 \text{ ou } I > \beta_3 \quad (\text{II-5})$$

tel que :

$$\left\{ I_p = (\rho H \bar{U}^2 / \sigma) / (v_* H / v)^{1/2} \right\}$$

$$\beta_3 = \beta_2 / \beta_1$$

La quantité  $I_p$  est le nombre d'inception. Elle devrait avoir une valeur critique pour que l'entraînement d'air commence. La valeur critique de  $I$  est 56, ce nombre est basé sur les résultats expérimentaux.

La méthode d'emplacement d'une couche limite dans les coursiers évacuateurs de crue à forte pente a été effectuée par **Bauer, Campbell** [17] et ses collaborateurs (1968), en tenant compte de l'effet de la charge de dimensionnement ainsi que de la rugosité moyenne du lit.

La méthode a été conçue pour localiser la zone turbulente entièrement développée, en utilisant les résultats de Sharma [17].

Sharma a effectué des expériences sur un modèle d'évacuateur de crues avec une surface de fond en ciment dont la rugosité moyenne,  $k$  était 0.0011.

La figure (II-3) donne la variation du terme  $(q_d/q)(\delta/l)$  en fonction  $(l/k)$  avec,  $q_d$  : la charge de dimensionnement,  $q$  : le débit d'écoulement,  $\delta$  : l'épaisseur de la couche limite,  $l$  : la longueur et  $k$  : la rugosité.

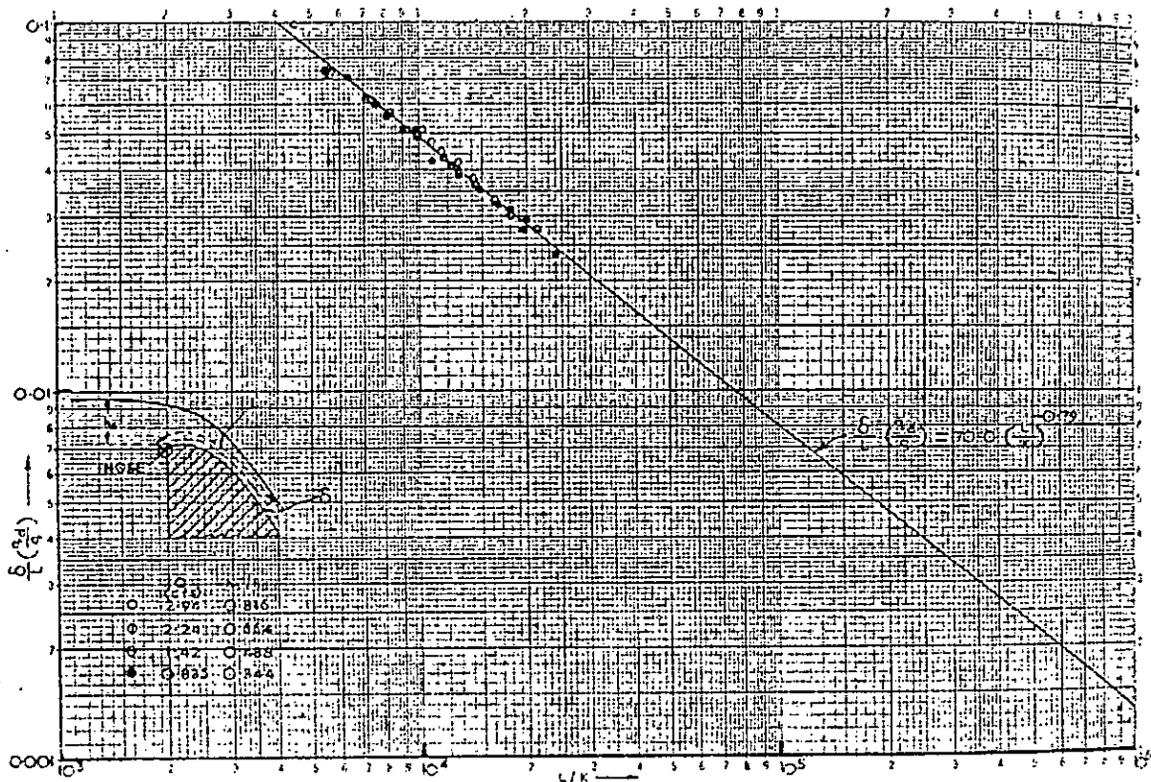


Figure II.3 : Relation entre la rugosité  $k$ , l'épaisseur de la couche limite et la longueur  $l$  pour différents débits [17]

L'équation de la courbe obtenue est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\delta}{l} \left( \frac{q_d}{q} \right) = 70 \left( \frac{l}{k} \right)^{0.79} \quad (\text{II-6})$$

On peut écrire cette relation en utilisant la charge de dimensionnement  $h_d$  tel que :

$$\frac{\delta}{h_d} = \left[ 70 \left( \frac{q}{q_d} \right) \left( \frac{k}{h_d} \right)^{0.79} \right] \left( \frac{l}{h_d} \right)^{0.21} \quad (\text{II-7})$$

Cette équation est liée à la distance  $l$  à laquelle l'épaisseur de la couche limite est égale à la hauteur de l'écoulement pour n'importe quelle valeur de  $k/h_d$ .

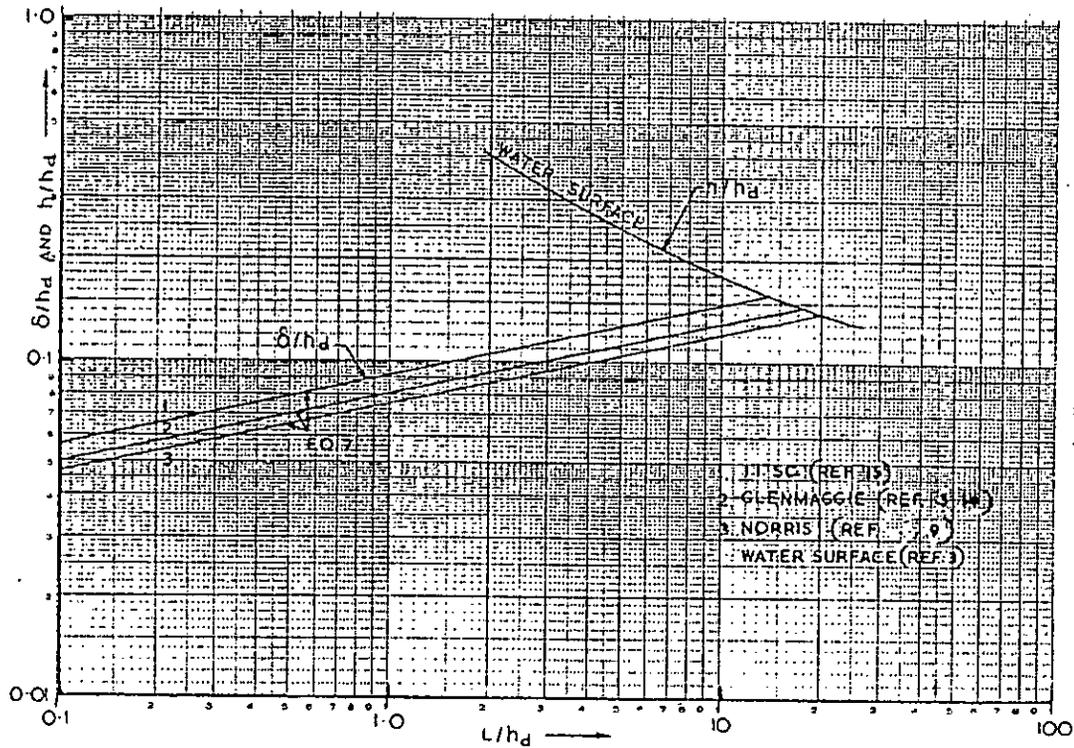


Figure II.4 : L'intersection de la couche limite turbulente avec la surface de l'eau [17]

Les expressions de  $(h_s/h_d)$  et  $(L_i/h_d)$  sont des équations de droite, ayant un point d'intersection sur l'axe d'ordonnée pour différents déversoirs (figure II-5). »

$$\frac{h_s}{h_d} = A \frac{L_i}{h_d} - 0.035 \tag{II-8}$$

avec, A : fonction de  $(h_s/h_d)$ .

On peut avoir A et  $L_i$  en remplaçant la valeur de  $h_d$  ou la valeur de  $(h_s/h_d)$  dans l'équation (II-7)

Pour trouver l'emplacement de point d'inception, on peut utiliser la figure (II-5) pour différentes valeurs du débit au-dessus du déversoir.

Chaque valeur de  $h_s/h_d$  correspond à la valeur de  $L_i/h_d$ .

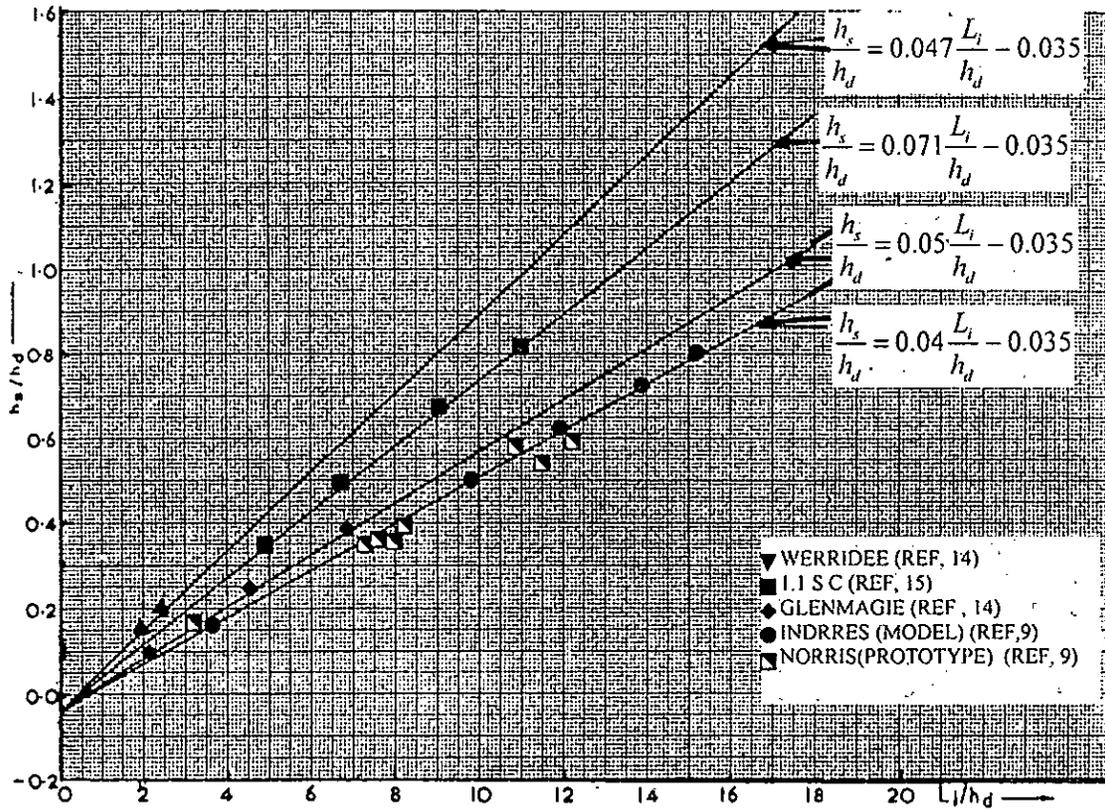


Figure II.5.-Relation entre  $h_s$ ,  $h_d$ ,  $L_i$  pour différents évacuateurs de crues[17]

La figure (II-6) donne une relation entre  $\delta_i/L_i (q_d/q)$  et  $L_i/k$  sous la forme suivante :

$$\frac{\delta_i}{L_i} \left( \frac{q_d}{q} \right) = 2.24(10^6) \left( \frac{L_i}{k} \right)^{-1.73} \quad (II-9)$$

où,  $\delta_i$  : représente l'épaisseur de la couche limite au point d'inception pour différents débits au-dessus du déversoir.

En connaissant  $(\delta_i, L_i)$ , l'équation (II-9) permet de localiser le point d'inception.

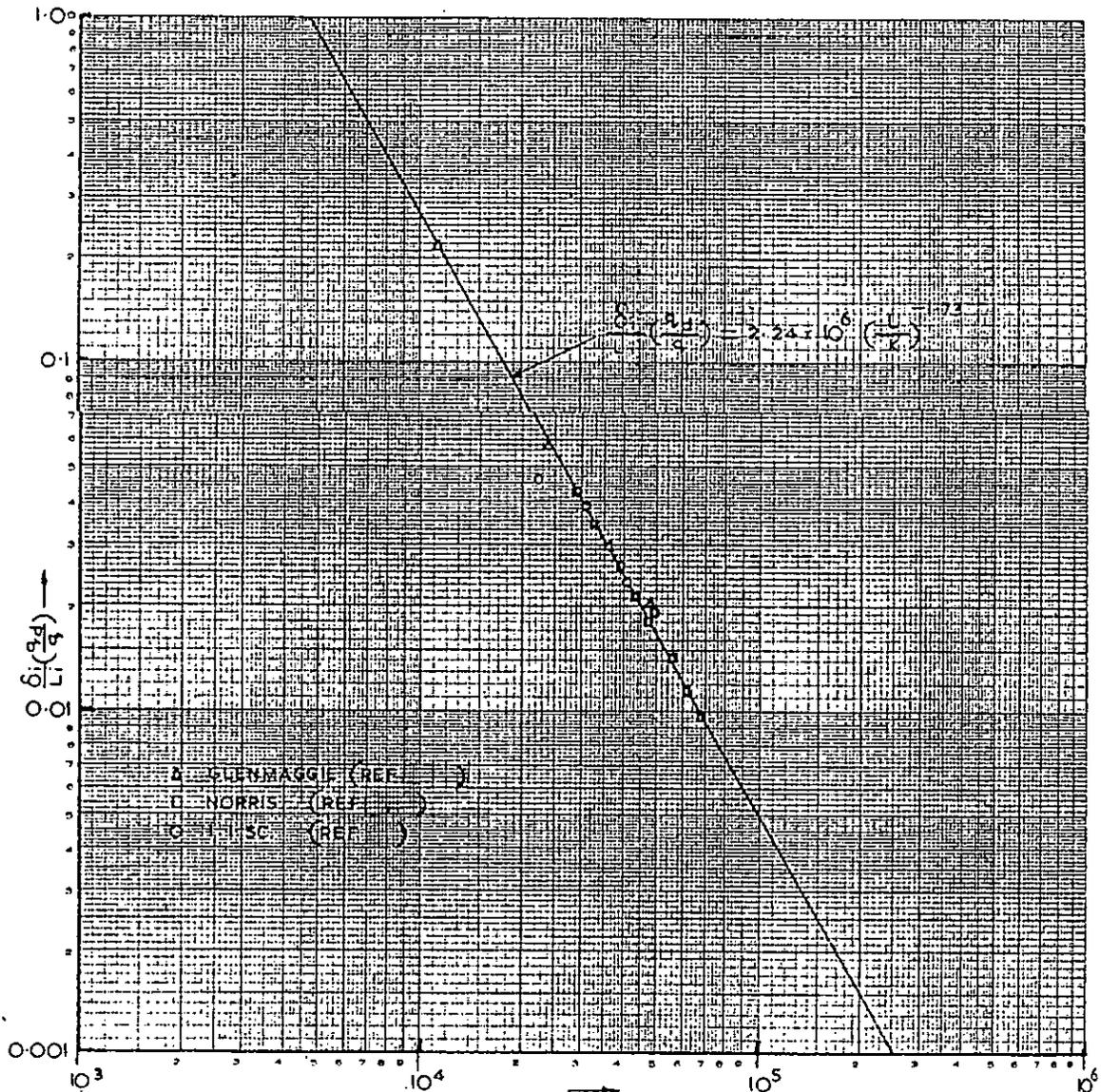


Figure II-6 : Relation entre  $\delta_i$ ,  $L_i$  et  $k$  pour différents débits et pour différents évacuateurs de crues [17]

### III. TRAVAUX DE LENCASTRE, A. (1985)

Dans son article, l'auteur donne un bref aperçu sur l'état de connaissances des dimensionnements des déversoirs, compte tenu de leur évolution et analyse à partir des organes d'entrée, la zone en aval de l'entrée et la dissipation d'énergie [27].

Pour ce dernier point, le calcul des pertes d'énergie au long des seuils des barrages, des canaux est effectué moyennant la détermination des pertes d'énergie durant le développement de la couche limite à partir de la ligne de raccordement de parement amont et en ajoutant ces pertes d'énergie à celles qui se produisent à partir de la section qui contient le point d'affleurement. Autrement dit, à partir de la section où l'écoulement est totalement en couche limite.

Dans le cas des seuils de barrages déversants, la valeur de  $(\delta)$  peut être obtenue à partir de la formule suivante :

$$\frac{\delta}{L} = 0.08 \times \left( \frac{L}{k} \right)^{-0.023} \quad (\text{II-10})$$

Il y a une autre formule qui est plus générale, pour le développement de la couche limite. Cette formule est due à Wood [45]

$$\frac{\delta}{L} = 0.0212 \times \left( \frac{L}{h_s} \right)^{0.11} \times \left( \frac{L}{k} \right)^{-0.10} \quad (\text{II-11})$$

où,  $\delta$  l'épaisseur de la couche limite ;  $k$  la rugosité absolue ;  $L$  est distance entre la section de la ligne de raccordement du parement amont et la courbe qui définit le seuil de contrôle ; et  $h_s$  est la distance à la verticale entre le plan de la charge en amont jusqu'à la surface libre d'écoulement dans la section correspondant à la distance  $l$  (figure II.7).

De l'analyse de l'expression due à Wood, il en résulte que l'épaisseur de la couche limite augmente linéairement avec la distance  $l$ , la rugosité  $k$ , et diminue avec l'accélération qui est quantifiée par  $h_s$ .

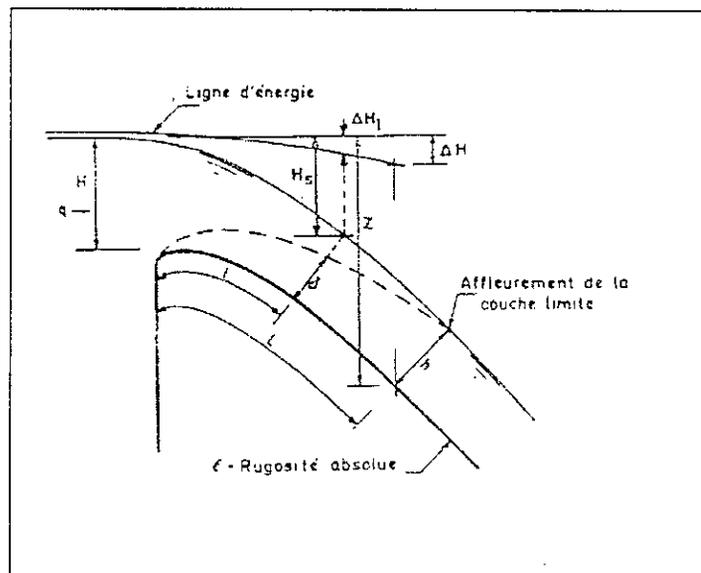


Figure II.7 : Couche limite le long d'un seuil

#### IV. TRAVAUX DE LEDUCQ, D. & PERRET, R. (1988)

L'idée essentielle de cette étude est que la couche limite est le siège de mouvement hydrodynamique fluctuant qui crée des fluctuations de pression au-dessus de la paroi où ils se produisent. Les fluctuations intégrées sur la surface ou elles sont cohérentes, vont produire un champ de forces aléatoires convectée avec l'écoulement qui va exciter les vibrations de la structure [28].

**IV.1. L'équation du champ de pression**

A partir des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, associées à une équation d'état, on obtient l'équation classique de Lightill [28] :

$$\nabla p^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 \rho U_i U_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{II-12})$$

où,  $p$  est la pression instantanée,  $\rho$  la densité,  $c$  : la célérité du son,  $U_i$  la composante de la vitesse instantanée dans la direction  $i$ .

Les vitesses d'écoulement sont faibles par rapport à la vitesse du son  $c \approx 1500 \text{ m/s}$ .

L'effet de compressibilité peut être négligé ; l'équation (II-12) devient :

$$\nabla p^2 = - \frac{\partial^2 \rho U_i U_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (\text{II-13})$$

dans la couche limite, avec une vitesse moyenne d'écoulement  $U$ ,  $u_i = U + u'$  est une vitesse normale à la paroi  $u_2 = v'$  l'équation (II-13) devient :

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = -2 \frac{\partial U \partial v'}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [u'v' - \overline{u'v'}] \quad (\text{II-14})$$

C'est l'équation (II-13) qui intégrée pour  $u=0$ , donne le champ de pressions en parois.

On peut écrire l'équation (II-14) sous une autre forme :

$$\text{div}(\overline{\text{grad } p}) = - \frac{2\tau}{u} \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\rho u'v' - \overline{\rho u'v'}) \quad (\text{II-15})$$

Les termes (1) et (2) sont les termes sources du champ exciteur. Le terme (1) représente l'interaction du cisaillement pariétal avec les fluctuations de vitesse verticales. Le terme (2) représente les fluctuations spatiales des tensions de Reynolds instantanées. L'intégration de (3) nécessite donc la connaissance de la structure de la couche limite.

**IV.2. Structure de la couche limite**

On rencontre entre la paroi et sa limite supérieure plusieurs zones présentant un certain degré d'organisation, caractérisé par l'intermittence, rapport du temps où l'écoulement est turbulent au temps où l'écoulement est laminaire.

La figures (II-8) présentent une vue schématique de cette structure. On remarque deux zones importantes.

- a) La sous couche visqueuse de très faible épaisseur, parcourue par «des tourbillons de Kline» structures très régulières connectées à la vitesse locale [taille de l'ordre  $(5\delta/100)$ , vitesse  $(5U_c/100)$ ].

- b) La couche de sillage, parcourue par des structures dont la dimension caractéristique est de l'ordre de l'épaisseur de couche limite  $\delta$  et sont convectées à une vitesse voisine de celle de l'écoulement moyen ( $U \approx 0.6$  à  $0.8U_c$ ).

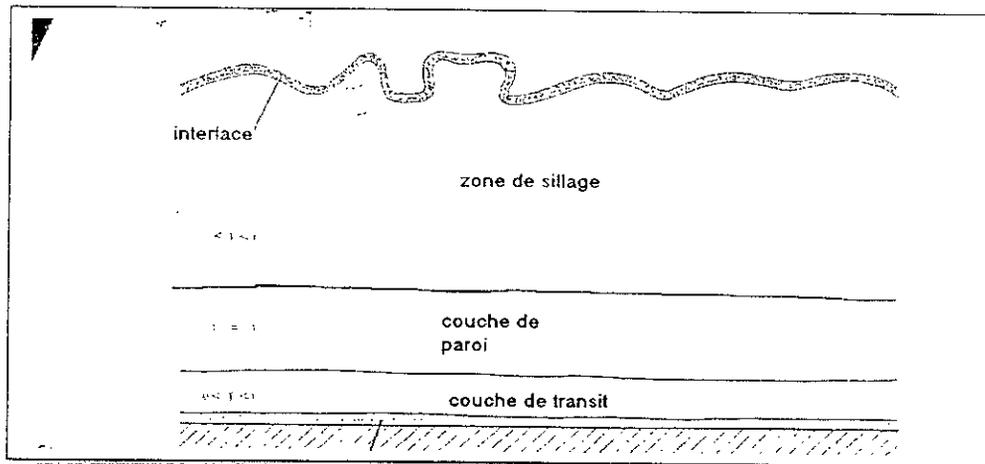


Figure II-8 : Structure de la couche limite.

### IV.3. Modélisation du champ de pression

Elle consiste à quantifier le champ des forces aléatoires convectées avec l'écoulement pour obtenir :

- ☞ Soit le niveau global en un point ;
- ☞ Soit le spectre fréquentiel en un point ;
- ☞ Soit la structure spatio-temporelle ou spatio-fréquentielle sur un domaine donné.

#### a. Modèle de Kraichnan [28]

Kraichnan admet que le terme  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (u'v' - \overline{u'v'})$  de l'équation (II-15) est négligeable

devant le terme d'interaction turbulente cisaillement moyen  $\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x}$ .

L'équation (II-14) s'écrit alors :

$$\nabla^2 p = -2\rho \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial x} \quad (\text{II-16})$$

En partant de cette équation, Kraichnan aboutit à une expression de l'écart type de la pression à la paroi en fonction de la tension de cisaillement à la paroi  $\tau_0$  :

$$\sqrt{p'^2} = \alpha \tau_0 \quad (\text{II-17})$$

Il faut cependant signaler que d'après Corcos[28] l'approximation réalisée n'est pas très bonne et que dans certains cas, la contribution du terme d'interaction turbulence - turbulence peut atteindre 35 à 40% de la fluctuation totale de la pression.

**b. Représentation spectrale en un point**

L'analyse dimensionnelle montre que les résultats peuvent se mettre de façon synthétique sous la forme :

$$\frac{\Gamma(\omega)U_\infty}{1/2\rho U_\infty \delta^*} = f\left(\frac{\omega\delta^*}{U_\infty}\right) \quad (\text{II-18})$$

où :  $\Gamma(\omega)$  est la densité spectrale de puissance de la pression

$\delta^*$  : l'épaisseur de déplacement de la couche limite.

$\omega = 2\pi f$  la fréquence circulaire.

On voit que pour un projet pratique, ce spectre peut se schématiser par la représentation suivante :

- Jusqu'à une fréquence de l'ordre de  $U/\delta = U/\omega\delta^* \cong 1$

$$\Gamma(\omega) = p_0^2 = \text{cte.} \quad (\text{II-19})$$

- Au-delà, le spectre décroît en  $1/f^m$ ,  $m \cong 3$  « l'exposant  $m$  dépend de l'état de surface »

En faisant intervenir le coefficient de frottement  $C_f$  et le coefficient de Kraichnan, on obtient :

$$\overline{\Gamma(\omega)} = \frac{\Gamma(\omega)U_\infty}{(1/2\rho U_\infty^2)^2 \delta^*} = \frac{n-1}{n} \hat{\alpha}^2 C_f^2 \frac{1}{\omega_0} \quad \overline{\omega} \leq \overline{\omega_0} \quad (\text{II-20})$$

$$\overline{\Gamma(\omega)} = \frac{n-1}{n} \hat{\alpha}^2 C_f^2 \left(\frac{\overline{\omega_0}}{\omega}\right)^n \frac{1}{\omega_0} \quad \overline{\omega} \geq \overline{\omega_0} \quad (\text{II-21})$$

**c. Modèles spatio-fréquentiels**

- Modèle de Corcos

C'est le modèle le plus utilisé en pratique quand on veut étudier la réponse vibratoire d'une structure excitée par une couche limite turbulente.

Corcos considère la transformée de Fourier fréquentielles de l'intercorrélation  $\Phi_{pp}(r_1, r_3, \omega)$  et la met sous la forme :

$$\Phi_{pp}(r_1, r_3, \omega) = \Phi_{pp}(\omega) \exp(i\omega r_1 / U_c) A(\omega r_1 / U_c) B(\omega r_3 / U_c) \quad (\text{II-22})$$

A et B traduisent la cohérence spatiale des sources de pressions.

La confrontation avec les résultats expérimentaux donne :

$$A = e^{-(y_1 r \omega / v_c)} \quad \text{tel que } y_1 \in [0.1 - 0.4]$$

$$B = e^{-(y_3 r_3 \omega / v_c)} \quad \text{tel que } y_3 \approx 0.7$$

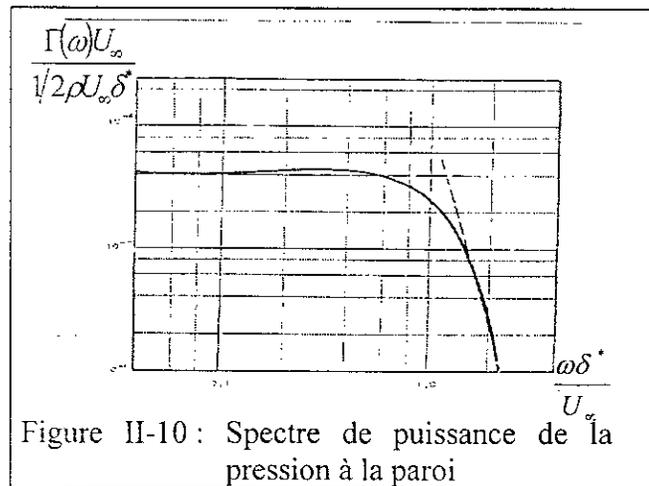
- Passage dans le domaine fréquence- nombre d'ondes

Le vecteur nombre d'ondes s'obtient par la transformation de Fourier à partir du vecteur d'espace  $(r_1, r_3)$ . La relation (II-22) se transpose alors sous la forme :

$$\Phi_{pp}(\vec{k}, \omega) = \Phi_{pp}(\omega) \varphi_1(k_1) \varphi_3(k_3) \Phi_m\left(k_1 - \frac{\omega}{U_0}\right) \quad (II-23)$$

qui s'écrit, avec les hypothèses de Corcos.

$$\Phi_{pp}(\vec{k}, \omega) = \frac{[\Phi_{pp}(\omega)]}{\pi^2} J_1 J_3 \left(\frac{\omega \delta^*}{U_c}\right)^2 \delta^{*2} \left\{ \left[ \left(\frac{y_3 \omega \delta^*}{U_c}\right)^2 + (k_3 \delta^*)^2 \right] \times \left[ \left(\frac{y_1 \omega \delta^*}{U_c}\right)^2 + \left(k_1 \delta^* - \frac{\omega \delta^*}{U_c}\right)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (II-24)$$



d. Modèles de type « éléments finis ou différences finies »

Parmi les modèles qui étudient ce genre de problème, le modèle de **Schumann**, basé sur la résolution des équations de Navier-Stokes en bidimensionnel avec une modélisation de la turbulence de type SGS (« sub.grid.scale ») : On suppose la turbulence définie par ses caractéristiques moyennes au-delà d'une certaine échelle, de l'ordre de l'échelle intégrale de la turbulence. On modélise ainsi le champ de pression en paroi à chaque instant.

**V. ETUDE DE KASSOUL, M. & BELORGEY, M. (1988)**

Dans cette étude, les auteurs ont travaillé sur un canal à flux continu (figure II-11) pour déterminer la zone de naissance de la turbulence. Cette étude permet d'analyser les caractéristiques de la couche limite [21].

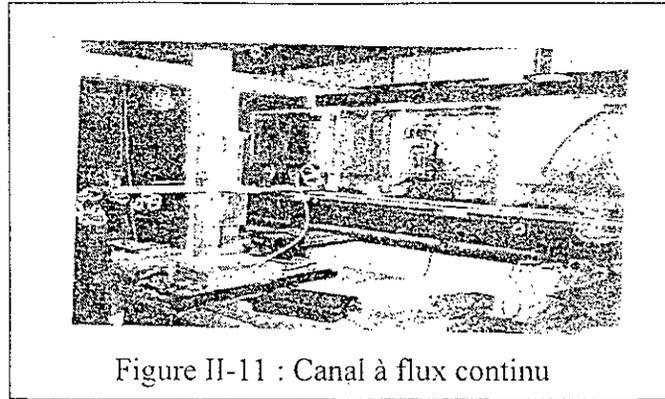


Figure II-11 : Canal à flux continu

Après une série d'expériences sur un canal à flux continu, ils ont tracé l'évolution de la couche limite à laquelle apparaît la vitesse maximale  $U_{\max}$  en fonction de la distance  $x$ . La couche limite présente trois formes d'évolution (figure II-12).

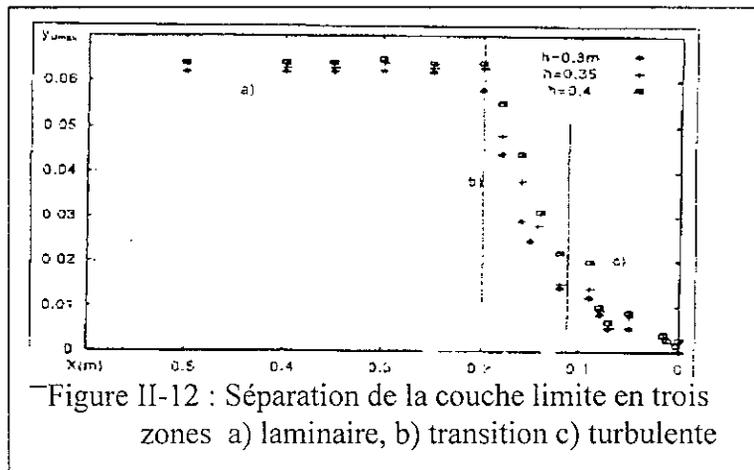


Figure II-12 : Séparation de la couche limite en trois zones a) laminaire, b) transition c) turbulente

- ❖ Un écoulement de canal (laminaire) plus en amont où la buse n'a aucun effet sur les profils de vitesse, zone (a)
- ❖ Une zone de transition, zone (b) qui permet le passage du régime établi en canal au régime perturbé par la buse.
- ❖ Un régime turbulent où la couche limite varie considérablement sous l'influence unique de l'ouverture de fond, zone © qui crée un phénomène d'aspiration.

Afin de déterminer l'origine de la couche limite turbulente, les auteurs ont été amenés à tracer l'évolution des caractéristiques  $(\delta_1/d)$  et  $(\delta_2/d)$  en fonction de  $(x/h)$  pour chaque hauteur d'eau, où  $(\delta_1)$  épaisseur de déplacement et  $(\delta_2)$  épaisseur de quantité de mouvement. Ils ont remarqué un changement significatif de l'évolution des caractéristiques de la couche limite en fonction de  $x$ . Cette variation brusque intervient aux alentours de  $[L/h \approx 0.3]$ .

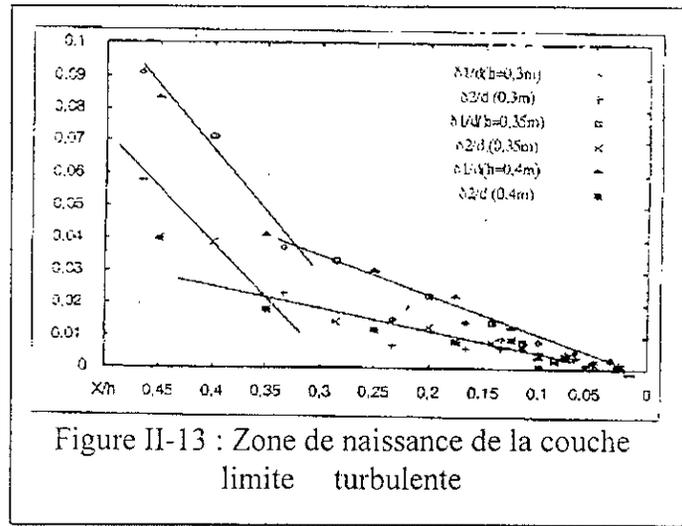
L'abscisse de ce changement étant proportionnelle à la hauteur d'eau  $h$  dans le canal, on peut donc caractériser l'écoulement à l'aval de cette position par le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{U_{\max} L}{\nu} \quad (\text{II-25})$$

$$L = 0.3h$$

(II-26)

Ainsi la couche limite turbulente prend naissance à partir de la distance  $x_0 = 0.3$  fois la hauteur d'eau dans l'ouvrage.



### VI. TRAVAUX DE REIN, M. (1998)

En 1998, Rein s'est intéressé à la formation des gouttes d'eau dans l'écoulement à surface libre (figure II.14) [33].

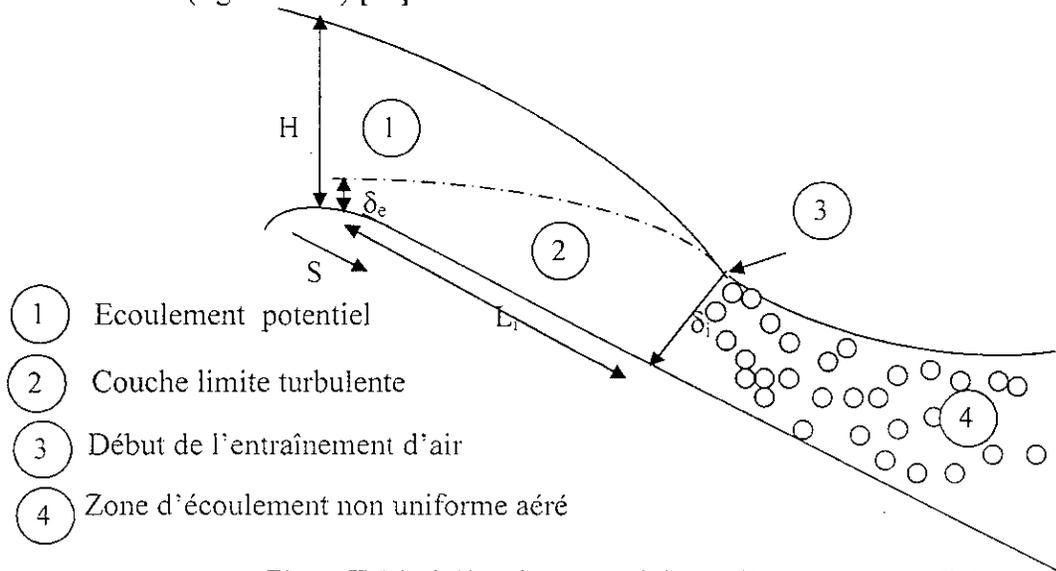


Figure II.14 : Mécanisme conduisant l'entraînement d'air

L'auteur propose une formulation sur le bilan énergétique qui relie l'énergie d'une goutte  $E_d$  avec l'énergie de surface  $E_\sigma$  et l'énergie cinétique  $E_{km}$  des gouttes.

$$E_d = E_\sigma + E_{km} \tag{II-27}$$

$$\text{soit : } \frac{\pi}{6} D^3 \rho \frac{1}{2} u'^2 = \pi D^2 \sigma + \frac{\pi}{6} D^3 \rho \frac{1}{2} v^2 \tag{II-28}$$

avec,  $v$  : vitesse initiale des gouttes.

La formule peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{u'}{v} = \left(1 + 12 \frac{1}{W_d}\right)^{1/2} \quad (\text{II-29})$$

$W_d$  est le nombre de Weber tel que :  $W_d = \frac{\rho v^2 D}{\sigma}$

Dans la zone de la turbulence atténuée près de la surface libre, la vitesse de fluctuation est égale à la vitesse de Frottement. Cette approche est justifiée par les résultats de Davies (1972). Alors :

$$\frac{u'}{v} = \frac{u_*}{v} = \left(1 + 12 \frac{1}{W_d}\right)^{1/2} \quad (\text{II-30})$$

Pour que l'air soit entraîné dans l'eau, il faut que le nombre de Weber  $W_d$ , dépasse la valeur critique 60 ( $W_d^* = 60$ ).

Pour qu'il y ait la formation de gouttes d'eau, il faut que la vitesse de frottement satisfait :

$$u_* \geq \left(\frac{W_d^* \sigma}{\rho D}\right)^{1/2} \quad (\text{II-31})$$

où,  $W_d \geq W_d^*$

Dans le cas des écoulements sur des canaux ouverts, la vitesse  $U$  de l'écoulement et la vitesse de frottement sont reliées par la loi de paroi :

$$U = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{y u_*}{v}\right) \quad (\text{II-32})$$

$\kappa$  : constante de Von karman

$v$ : viscosité cinématique.

La limite supérieure de la vitesse de frottement  $u_*$  est alors donnée par (II-32), où  $y = h_e$  avec  $h_e$  est la profondeur du liquide.

En remplaçant la vitesse de frottement par son expression (II-31) dans l'équation (II-32), nous obtenons :

$$U = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{W_d^* \sigma}{\rho D}\right)^{1/2} \ln\left[\frac{h_e}{v} \left(\frac{W_d^* \sigma}{\rho D}\right)^{1/2}\right] \quad (\text{II-33})$$

Lorsqu'on prend la valeur maximale, les gouttes sont séparées sous forme de bloc au-dessus de l'écoulement. Dans ce cas, la hauteur d'eau est égale à :  $h = v_0^2 / 2g$  avec,  $v_0$  : la vitesse initiale.

D'après la figure (II-15), les gouttes qui sont éjectées du liquide en bloc contribuent à l'entraînement d'air, ce sont des gouttes de Rayon minimum pour des hauteurs maximum.

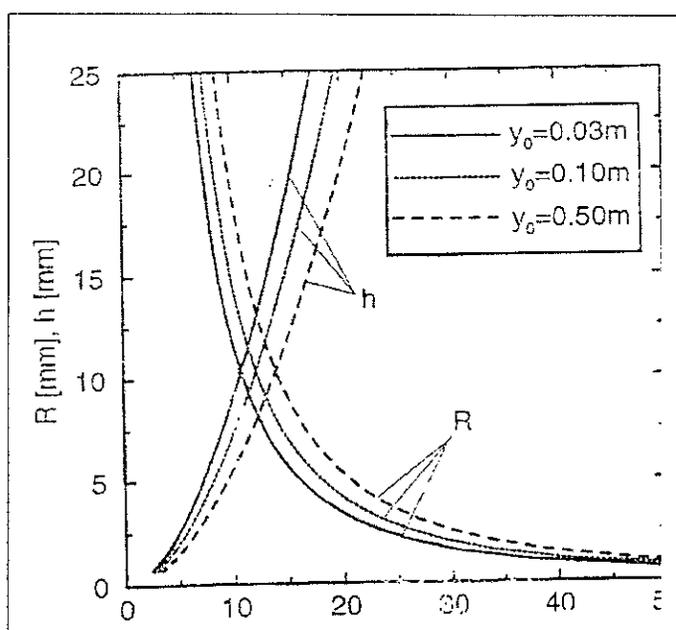


Figure II-15 : L'intersection de la hauteur d'eau avec le rayon des gouttes

## VII. TRAVAUX DE FREDERIC, V. (1998)

L'objectif dans ce travail est de développer des méthodes d'éléments finis stabilisées pour les équations de Navier-Stokes incompressible, satisfaisant aux conditions aux limites équivalentes (loi de paroi) imposées sur une partie des contours du domaine.

Les lois de paroi sont des conditions aux limites équivalentes imposées sur une surface régulière introduite à l'intérieur du domaine ayant pour objectif de simuler l'influence de la paroi (lisse ou rugueuse) sur l'écoulement [15].

L'intérêt est de retirer du domaine de calcul une partie de la couche limite ainsi que les rugosités afin de diminuer le coût de calcul.

De nouvelles lois de paroi (d'ordre 1 et d'ordre 2) pour des domaines lisse et rugueux ont été développées et analysées récemment pour les équations de Navier-Stokes incompressible à partir d'une méthode de décomposition de domaine ou en utilisant des développement asymptotique à deux échelles.

Pour simuler l'influence de rugosités sur l'écoulement, l'auteur a choisi deux lois de paroi, différentes par l'ordre avec lequel les effets rugueux sont approchés. Pour une approximation à l'ordre 1, il impose sur  $\Gamma_2$  les conditions aux limites suivantes :

$$\alpha'U' + \frac{\partial U'}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (\text{II-34})$$

$$U'' = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (\text{II-35})$$

et pour une approximation d'ordre deux, il impose

$$\alpha' U' + \frac{\partial U'}{\partial y} + \frac{\beta}{\nu} \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma \frac{\partial U'}{\partial x} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (\text{II-36})$$

$$\theta U'' + \frac{\partial U''}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (\text{II-37})$$

où  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\theta$  sont des constantes positives, simulant l'influence des rugosités sur l'écoulement.

Dans la plupart des problèmes d'intérêt pratiques, on impose à l'entrée du domaine (et souvent à la sortie) des conditions de DIRICHLET pour la vitesse. Souvent ces conditions aux limites correspondent à des profils de vitesse venus de problèmes expérimentaux. Alors, l'emploi des lois de paroi sur une partie du bord, crée une importante zone de discontinuité, en raison de changement de type de condition aux limites. En fonction de l'importance de cette discontinuité, des instabilités numériques peuvent être créées et se propagent à l'intérieur du domaine.

Le domaine de calcul est défini dans la figure II.16.

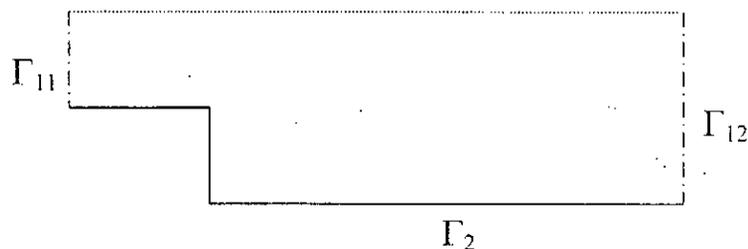


Figure II.16 : Domaine de calcul

On impose à l'entrée  $\Gamma_{11}$  un profil de vitesse  $U=(1,0)$  à la sortie,  $\Gamma_{12}$  des conditions de NEUMAN homogènes et sur  $\Gamma_2$  les lois de paroi d'ordre 1 et 2. Ce nombre de Reynolds est fixé à  $Re=300$  et les lois de paroi sont imposées à une distance  $d=5 \cdot 10^{-3}$  de la paroi. Les constantes contenues dans les parois sont les suivantes.

$$\alpha' = \frac{1}{\delta}, \quad \beta = \frac{2}{\delta^2}, \quad \gamma = 0$$

$$\theta = \frac{1}{2\delta}, \quad \theta = 0$$

On effectue le calcul direct ( $U=0$ , à la paroi) et les calculs avec les lois de paroi d'ordre 1 et 2 (figure II-16) sur un maillage contenant 1200 éléments. Les formulations stabilisées pour les lois de paroi d'ordre 1 et d'ordre 2 corrigent parfaitement les oscillations dues au changement du type des conditions aux limites (figure II-17) pour la loi de paroi d'ordre 1 et la figure (II-18) pour celle au deuxième ordre.

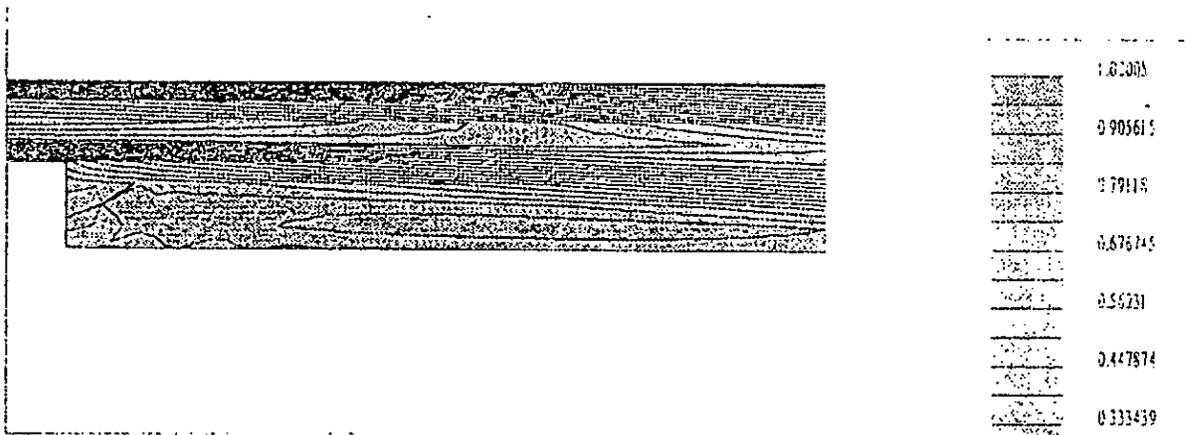


Figure II.17 : La loi de paroi d'ordre 1

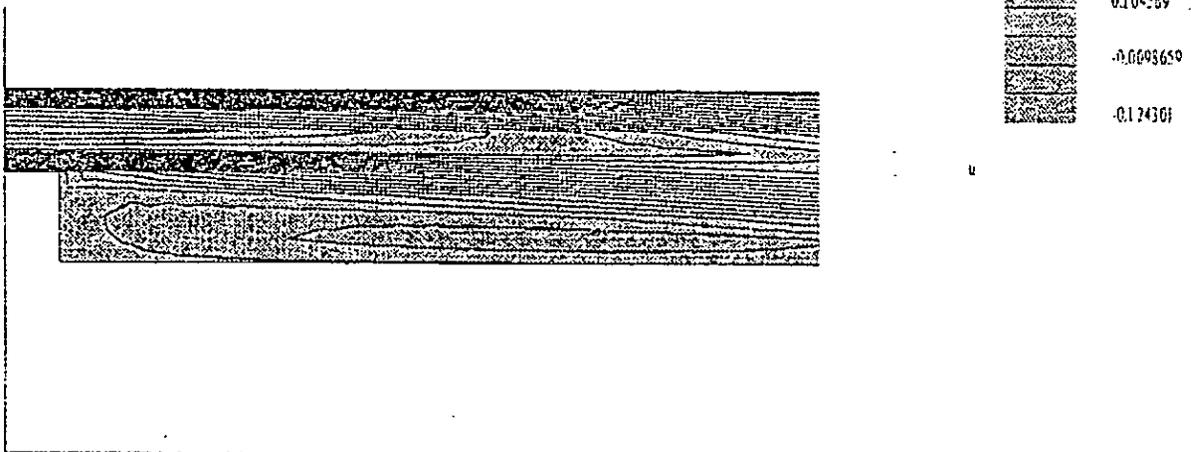


Figure II.18 : La loi de paroi d'ordre 2

### Conclusion

A travers la lecture des travaux de recherches présentées précédemment et qui portent essentiellement sur les divers aspects caractérisant les écoulements la couche limite au-dessus de singularité.

Dans la mesure d'apporter une contribution à cet axe d'étude, nous nous sommes fixés l'objectif de simuler l'écoulement lisse qui se produit dans la partie supérieure des évacuateurs de crue en marches d'escalier, par un modèle mathématique adéquat, en vue d'évaluer numériquement certaines caractéristiques importantes, notamment le développement de la couche limite turbulente, le point de début de l'auto-aération des caractéristiques de l'écoulements.

# Chapitre III

**MODELISATION MATHEMATIQUE**

## Chapitre III

### MODELISATION MATHEMATIQUE

Pour maîtriser parfaitement le comportement d'une masse fluide, il serait indispensable de déterminer en chaque point de celle-ci, les six fonctions suivantes.

1. La vitesse  $V$  définie par les trois composantes  $u, v, w$  suivant les axes de coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ , respectivement ;
2. La masse volumique  $\rho$ ;
3. La pression  $p$ .

La résolution de tels problèmes nécessite de disposer d'un nombre d'équations équivalent. Celles-ci découlent, généralement, des lois fondamentales de la physique des milieux continus en l'occurrence : la loi de conservation de la masse, la loi de conservation de la quantité de mouvement, la loi de conservation de l'énergie et une des lois de la thermodynamique.

#### III-1 EQUATIONS FONDAMENTALES

##### III-1-1 Equation de continuité

L'équation de continuité traduit le principe de la conservation de la masse. Elle exprime la continuité du fluide, ce qui signifie que la variation d'une masse fluide enfermée dans un volume pendant un certain temps doit être égale à la somme des masses fluides qui y entrent diminuée de celles qui en sortent. Son expression est la suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0 \quad (\text{III-1})$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, elle se réduit à :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{III-2})$$

où, le terme  $\operatorname{div} \vec{V}$ , représente le divergent du vecteur vitesse,  $t$ , est la variable temporelle. Les autres termes ont été définis plus haut.

##### III-1-2 Equations dynamiques (équation de Navier- Stokes)

Les équations dynamiques s'obtiennent en appliquant le principe de la conservation de la quantité de mouvement à un volume élémentaire donné.

Ce principe énonce que «la variation de quantité de mouvement dans l'élément de volume pendant un intervalle de temps, doit être égale à la somme de l'accroissement de la quantité de mouvement et de la somme des forces extérieures appliquées sur l'élément de volume pendant le même intervalle de temps».

Suivant les trois axes de coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ , les équations dynamiques peuvent s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = -F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\Delta u) \quad (\text{III-3-a})$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} = -F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu(\Delta v) \quad (\text{III-3-b})$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu(\Delta w) \quad (\text{III-3-c})$$

où,  $F_x, F_y, F_z$  sont respectivement, les forces de volumes par unité suivant les directions  $x, y$  et  $z$  ;  $\mu$  est la viscosité dynamique ;  $\Delta$ , est l'opérateur Laplacien, appliqué aux composantes du vecteur vitesse, on a :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{III-4})$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (\text{III-5})$$

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (\text{III-6})$$

## III-2 EQUATIONS GENERALES DE L'ECOULEMENT TURBULENT

Il n'existe pas de théorie générale explicative du phénomène de turbulence, mais il y a des théories partielles et incomplètes. Les approches sont nombreuses et diverses.

### III.2.1 Approche directe

La plupart des approches de la turbulence supposent que le mouvement instantané du fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes. Le fluide est considéré comme un continuum par rapport à l'échelle moléculaire. Selon ce point de vue, on connaît donc les équations de la turbulence et certaines recherches, se sont orientées vers l'étude de « solutions turbulentes » des équations de Navier-Stokes. L'étude de tout écoulement

turbulent pourrait donc se faire, de moins en principe, par la résolution directe des équations de Navier-Stokes. Cette vue consisterait à faire un calcul direct du mouvement turbulent pour une ou plusieurs réalisations avec des conditions aux limites aléatoires et faire ensuite un traitement statistique sur les solutions obtenues. Toutefois, le nombre de points de discrétisation nécessaire pour représenter les plus petites échelles de la turbulence atteint des valeurs faramineuses [11, 36].

Cette approche directe nécessite de puissants moyens informatiques, elle ne peut être conduite actuellement que sur des écoulements en géométrie relativement simple et pour des nombres de Reynolds peu élevés.

### III.2.2 Approche statistique

Les équations du mouvement turbulent présentent des fluctuations irrégulières, dans l'espace et dans le temps. Cette complexité a causé l'introduction des méthodes statistiques [11, 36].

O. Reynolds [36] a introduit la notion d'écoulement moyen. Il a proposé la décomposition des grandeurs physiques (vitesse, pression) de l'écoulement en deux composantes. Une moyenne et l'autre fluctuante. La moyenne doit vérifier les règles dites «règles de Reynolds».

Cette décomposition permet de développer un traitement statistique des équations du mouvement.

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g} \quad (\text{III-7})$$

$$\overline{a f} = a \overline{f} \quad (\text{III-8})$$

$$\overline{f g} = \overline{f} \overline{g} \quad (\text{III-9})$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial s} \quad \text{où, } s \text{ désigne la variable d'espace ou de temps.}$$

## III. 3 EQUATIONS DES ECOULEMENTS TURBULENTS

Pour décrire l'écoulement turbulent du fluide, nous avons choisi l'approche statistique en un point. Cette approche consiste à décomposer les paramètres de l'écoulement en grandeurs moyennes et fluctuantes.

$$u = U + u' ; v = V + v' ; w = W + w' ; p = P + p' \quad (\text{III-10})$$

avec,  $u, v, w, p$  sont les valeurs instantanées des grandeurs,  
 $U, V, W, P$  sont les valeurs moyennes des grandeurs,  
 $u', v', w', p'$  sont les valeurs fluctuantes des grandeurs.

### III.3.1 Equation de continuité

En substituant les valeurs instantanées (III-10) dans l'équation de continuité d'un fluide incompressible désigné par l'équation (III-1), il s'ensuit

$$\frac{\partial(U + u')}{\partial x} + \frac{\partial(V + v')}{\partial y} + \frac{\partial(W + w')}{\partial z} = 0 \quad (\text{III-11})$$

et en prenant la moyenne, il vient :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} = 0 \quad (\text{III-12})$$

$$\text{or : } \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} = 0 \quad (\text{III-13})$$

donc l'équation de continuité d'un écoulement turbulent s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = 0$$

(III-14)

On peut de même déduire l'expression de continuité du mouvement fluctuant qui est la suivante :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (\text{III-15})$$

### III.3.2 Equations de la quantité du mouvement

En adaptant les conventions d'Einstein, les équations de Navier-stokes d'un fluide incompressible (III-2) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (\text{III-16})$$

avec,  $i = 1, 2, 3$  sont des chiffres qui correspondent respectivement, au coordonnées  $x, y, z$ , du système cartésien.

$$u_i = U_i + u'_i \quad \text{et} \quad p = P + p'_i$$

En substituant ces équations dans l'équation ( III-16), il s'ensuit :

$$\frac{\partial(U + u_i')}{\partial t} + (U + u_i') \frac{\partial(U + u_i')}{\partial x_j} = -F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(P + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(U + u_i')}{\partial x_j \partial x_j} \quad (\text{III-17})$$

après simplification, l'équation devient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{\frac{\partial u_i' u_j'}{\partial x_j}} \quad (\text{III-18})$$

où,  $\nu$  est la viscosité cinématique.

Dans le système de coordonnées cartésiennes, l'équation (III-18) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U - \left( \overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial u'w'}{\partial z}} \right) \quad (\text{III-19-a})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V - \left( \overline{\frac{\partial u'v'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v'^2}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial v'w'}{\partial z}} \right) \quad (\text{III-19-b})$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta W - \left( \overline{\frac{\partial u'w'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial v'w'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial w'^2}{\partial z}} \right) \quad (\text{III-19-c})$$

Les équations (III-19) sont appelées équations de Reynolds, les termes  $\overline{\rho u'^2}$ ,  $\overline{\rho u'v'}$  .... etc, sont les tensions de Reynolds appelées encore les tensions supplémentaires.

### III.4. EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE TURBULENTE DANS LES CANAUX A FORTE PENTE

#### III.4.1 Hypothèses

Pour le besoin de l'étude, on admet que le coursier est suffisamment large (à la limite cinq fois plus grand que la hauteur d'eau pour que l'écoulement ne soit pas influencé par les parois latérales). L'écoulement sera par conséquent régi par les seules variables  $x$  et  $y$  [18].

- ❖ Le fluide est supposé incompressible (la masse volumique est constante).
- ❖ L'écoulement est considéré permanent, ce qui signifie que les variables de l'écoulement sont maintenues constantes dans le temps, soit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad (\text{III-20})$$

- ❖ Concernant les forces de volume, on tient compte que des forces gravitationnelles. Les projections sur les axes de coordonnées, donnent

$$F_x = g \cdot \sin \alpha \text{ et } F_y = g \cdot \cos \alpha . \quad (\text{III-21})$$

A l'aide de ces hypothèses le système d'équations devient :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-22-a})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U - \left( \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right) \quad (\text{III-22-b})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \cdot \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V - \left( \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \right) \quad (\text{III-22-c})$$

### Remarques

Le choix des axes du système orthogonal est lié au sens prédominant de l'écoulement dans le canal, de manière qu'il coïncide avec l'axe des abscisses, (figures (III-1) et (III.2) ci-dessous).

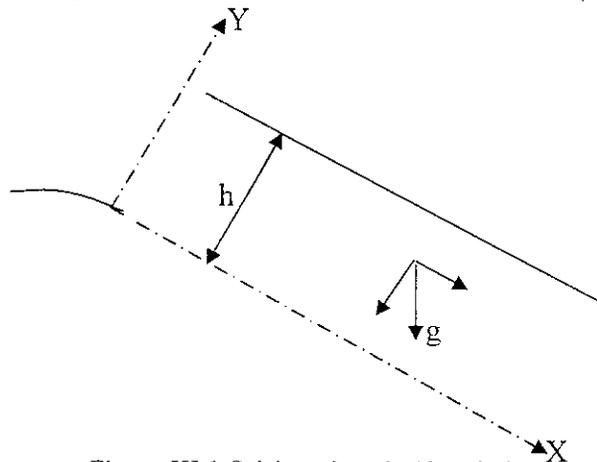


Figure III.1-Schéma descriptif et choix des axes dans un évacuateur de crue à profile lisse

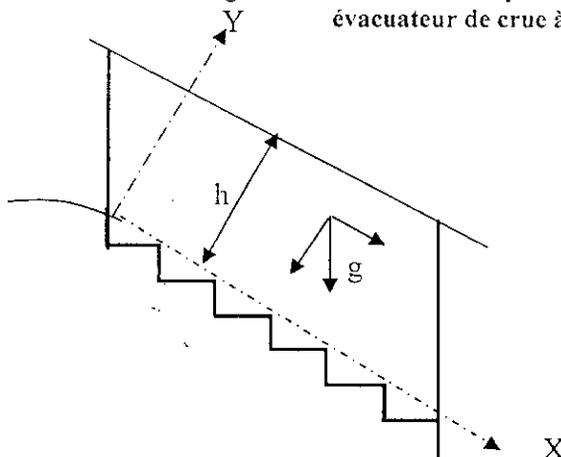


Figure III.2-Schéma descriptif et choix des axes dans un évacuateur de crue à marche escalier

### III.4.2 Hypothèses de la couche limite turbulente

La couche limite peut être étudiée à l'aide des équations (III-22) mais des hypothèses supplémentaires apportent des simplifications considérables [10, 11, 20]. Leur justification complète est liée à une connaissance approfondie des propriétés de la couche limite

1. On appelle  $u$  et  $l$  les échelles de vitesse et de longueur de la turbulence et  $R_l$  le nombre de

$$\text{Reynolds de turbulence : } R_l = \frac{u_t l_t}{\nu}$$

2. La vitesse générale de l'écoulement moyen est  $U_0$  et la longueur de développement de la

$$\text{couche limite } L. \text{ On forme le nombre de Reynolds } R_L : R_L = \frac{U_0 L}{\nu}.$$

3. L'échelle de longueur a même ordre de grandeur que l'épaisseur de couche limite  $\delta$ . Or

$$\text{d'après la loi empirique de Blasius : } \frac{\delta}{L} = \frac{0,38}{R_L^{1/5}} \Rightarrow \frac{\delta}{L} \cong 2\%, \text{ ainsi } \frac{u_t}{U_0} \cong 10\% \quad (\text{III-23})$$

4. D'après l'expérience, les tensions de Reynolds « turbulentes » sont de même ordre :

$$-\langle u'v' \rangle \approx u_t^2 \quad (\text{III-24-a})$$

$$-\langle u'^2 \rangle \approx u_t^2 \quad (\text{III-24-b})$$

$$-\langle v'^2 \rangle \approx u_t^2 \quad (\text{III-24-c})$$

5. Une hypothèse propre à la couche limite consiste à supposer que :  $l \ll L$ .

On admet également que l'évolution des tensions turbulentes suivant  $x$  est lente devant l'évolution suivant  $y$ . Si  $t_{ij}$  est l'une des tensions, on estime ses dérivées à l'aide :

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x} \approx \frac{u_t^2}{L}, \quad \frac{\partial t_{ij}}{\partial y} \approx \frac{u_t^2}{l_t} \quad (\text{III-25})$$

Dans les équations, on négligera donc les termes  $\frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x}$  devant

$$\frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y}.$$

L'ordre de grandeur des dérivées de la vitesse moyenne  $U$  est plus délicat à estimer. Comme pour des écoulements turbulents plus généraux, on admet que l'échelle de temps du mouvement moyen est égale à celle de la turbulence. Or le terme de cisaillement  $\frac{\partial U}{\partial y}$  est

$$\text{principalement à l'origine de la turbulence, on pose donc : } \frac{\partial U}{\partial y} \approx \frac{u_t}{l_t} \quad (\text{III-26})$$

Cette relation permet de comparer les tensions  $-\langle u'v' \rangle$  et  $\nu \frac{\partial U}{\partial y}$  :

$$\frac{-\langle u'v' \rangle}{\nu \frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{u_t L}{\nu} = R_e \quad (\text{III-27})$$

Si l'écoulement est pleinement turbulent, le nombre de Reynolds  $R_l$  est grand et la contrainte visqueuse est négligeable. Toutefois, au voisinage de la paroi,  $R_l$  est faible car  $u$  et  $l$  tendent vers zéro, à la paroi. De fait, l'expérience montre qu'il existe une zone voisine de la paroi appelée sous-couche visqueuse, où les tensions visqueuses sont prépondérantes.

En dehors de cette région, si on admet que  $u$  et  $l$  varient assez peu, une intégration grossière de l'équation (III-26) à partir de la frontière de la couche limite donne :

$$U_e - U \approx u_t \quad (\text{III-28})$$

où  $U_e$ , est la vitesse à la frontière.  $U_e$  est du même ordre que  $U_0$ .

$$\text{Au premier ordre, on a : } \frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{\partial U_e}{\partial x} \quad (\text{III-29})$$

$$\text{alors : } \frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{U_0}{L} \quad (\text{III-30})$$

Pour que l'équation de continuité ne soit pas triviale, ses deux termes doivent être du même ordre. On déduit l'ordre de grandeur de la vitesse verticale :  $V \approx \frac{U_0}{L} l_t$  (III-31)

$$\text{On a aussi : } \frac{\partial V}{\partial y} \approx \frac{U_0}{L} \quad (\text{III-32})$$

$$\text{et } \frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{U_0 l_t}{L L} \quad (\text{III-33})$$

On admet encore que la pression  $p$  est de l'ordre  $\rho U_0^2$  et que :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \approx \frac{U_0^2}{L} \quad (\text{III-34-a})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \approx \frac{U_0^2}{l_t} \tag{III-34-b}$$

L'ordre de grandeur des différents termes des équations est donc le suivant :

Les termes d'équation (III-22)	$\frac{\partial U}{\partial x}$	$\frac{\partial V}{\partial y}$
Grandeur adimensionnelle	$\frac{U_0}{l_t}$	$\frac{1}{l_t} \frac{l_t}{L} U_0$

Les termes de l'équation (III-23)	$\frac{\partial U}{\partial t}$	$U \frac{\partial U}{\partial x}$	$V \frac{\partial U}{\partial y}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$	$v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$	$v \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$	$\overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}}$	$\overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}}$
Grandeur adimensionnelle	$\frac{U_0}{L} U_0$	$U_0 \frac{U_0}{L}$	$\frac{U_0}{L} \frac{l_t}{l_t} \frac{u_t}{l_t}$	$\frac{U_0^2}{L}$	$v \frac{1}{L} \frac{U_0}{L}$	$v \frac{1}{l_t} \frac{U_0}{l_t}$	$\frac{u_t^2}{L}$	$\frac{u_t^2}{l_t}$

Les termes d'équation (III-24)	$\frac{\partial V}{\partial t}$	$U \frac{\partial V}{\partial x}$	$V \frac{\partial V}{\partial y}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$	$v \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$	$v \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$	$\overline{\frac{\partial u'v'}{\partial x}}$	$\overline{\frac{\partial v'^2}{\partial y}}$
Grandeur adimensionnelle	$\frac{U_0}{L} \frac{l_t}{L} U_0$	$U_0 \frac{1}{L} \frac{l_t}{L} U_0$	$\frac{l_t}{L} U_0 \frac{1}{l_t} \frac{l_t}{L} U_0$	$\frac{U_0^2}{l_t}$	$\frac{v}{L^2} \frac{l_t}{L} U_0$	$\frac{v}{l_t^2} \frac{l_t}{L} U_0$	$\frac{u_t^2}{L}$	$\frac{u_t^2}{l_t}$

L'équation de quantité de mouvement suivant x fait intervenir d'une part un terme d'ordre

$\frac{u_t^2}{l_t}$  et d'autre part les termes  $\frac{\partial U}{\partial t}$ ,  $U \frac{\partial U}{\partial x}$  et  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$  d'ordre  $\frac{U_0^2}{L}$ . Pour que l'équation ne soit

pas triviale, on doit admettre que la somme de ces trois derniers termes est d'ordre de  $\frac{u_t^2}{l_t}$ ,

soit : 
$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \approx \frac{u_t^2}{l_t} \tag{III-35}$$

35)

L'équation (III-35) se réduit à : 
$$\frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \tag{III-36}$$

on obtient alors :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(U - U_e)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(U + U_e)(U - U_e)}{\partial x} \quad (\text{III-37})$$

l'ordre de grandeur de  $U_e - U$  étant  $u_t$ , on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(U - U_e) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(U + U_e)(U - U_e) \approx \frac{U_0}{L} u_t \quad (\text{III-38})$$

suivant la relation (III-35), il faut que :

$$\frac{U_0 u}{L} = \frac{u_t^2}{l_t} \Rightarrow \frac{U_0}{L} = \frac{u_t}{l_t} \quad (\text{III-39})$$

Cette relation est une hypothèse de la couche limite car elle exprime que le temps de diffusion par la turbulence est égal au temps de convection.

### III.4.3 Equations de couche limite

Les hypothèses développées précédemment permettant de simplifier les équations (III-22) à

l'aide de deux hypothèses :  $\frac{u_t}{l_t} = \frac{U_0}{L}$  et  $l_t \ll L$ .

Le système d'équations final est :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-40-a})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin(\alpha) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial(-u'v')}{\partial y} \quad (\text{III-40-b})$$

$$P = \rho g y \cos(\alpha) \quad (\text{III-40-c})$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} \quad (\text{III-40-d})$$

Le système (III-40) comporte plus d'inconnues que d'équations, c'est un système ouvert. Le fait de prendre la moyenne d'une équation instantanée conduit à une perte d'information, qu'il faudra réintroduire sous forme d'hypothèses physiques, ce qui est communément appelée lois de fermeture.

L'introduction des hypothèses de fermetures qui traduisent le comportement du milieu turbulent permet alors d'obtenir un nombre d'équations égale à celui des inconnues et ces équations peuvent par la suite être résolues par les méthodes numériques. Le problème

posé donc, est celui relatif à la liaison entre le champ moyen et les tensions de Reynolds. Ces dernières qui constituent des inconnues supplémentaires doivent être calculées à l'aide d'un modèle de turbulence.

#### a) Critères des choix

Un « bon » modèle doit :

- ❖ Etre capable de relever les traits caractéristiques de l'écoulement ;
- ❖ Contenir un maximum de constantes ou fonctions empiriques ;
- ❖ Conférer aux constantes ou fonctions empiriques un degré d'universalité maximum ;
- ❖ Avoir une mise en œuvre « simple » et une résolution numérique « économique » ;
- ❖ Donner des résultats précis ;
- ❖ Avoir un champ d'application aussi vaste que possible ;

Les modèles aux tensions de Reynolds présentent, probablement, le niveau optimal de fermeture pour s'appliquer à une large gamme d'écoulements turbulents.

Parmi les fermetures simplifiées couramment utilisées, on peut citer les modèles à une seule équation et les modèles à deux équations qui font appel à un coefficient de viscosité isotrope de la turbulence.

#### b) Concept de la viscosité turbulente

En cherchant à modéliser les tensions de Reynolds en faisant l'analogie à la loi de Newton pour les contraintes d'agitation moléculaire, Boussinesq propose l'expression suivante :

$$\tau = -\rho \overline{(u_i u_j)} = \mu_t \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \quad (\text{III-41})$$

avec :  $\tau$  la contrainte de cisaillement et  $\mu_t$ , la viscosité turbulente ou tourbillonnaire.

La viscosité turbulente à la différence de la viscosité moléculaire est une propriété de l'écoulement et non pas du fluide. Lorsque le régime d'écoulement est turbulent, l'influence de la turbulence est prépondérante par rapport à celle de la viscosité moléculaire. La viscosité turbulente prend une valeur importante. Cette dernière dépend des coordonnées du point choisi, des conditions initiales aux limites et d'une façon générale de tous les paramètres du problème.

La formule (III-41) montre que le problème de la détermination des tensions de Reynolds est transféré à celui de l'évaluation de la viscosité turbulente.

c) Choix du modèle de turbulence

Notre choix est porté sur le modèle de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente (k-ε), qui est un modèle à deux équations de transport. Il y a lieu de noter que les modèles à deux équations sont largement utilisés dans des configurations variées et ils offrent un compromis intéressant entre universalité et précision pour la prédétermination globale des paramètres de l'écoulement. k et ε sont donnés par la résolution de deux équations de transport, à savoir

- L'équation de transport de l'énergie cinétique, définie comme suit :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + U_i \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (\text{III-42})$$

- l'équation de transport de la dissipation de l'énergie cinétique, définie comme suit :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - C_\varepsilon \frac{\varepsilon}{K} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (\text{III-43})$$

dans lesquelles :  $\nu_t = C_u \frac{K}{\varepsilon^2}$  est la viscosité turbulente avec :

K : l'énergie cinétique turbulente ;

ε : le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.

$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_u, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$  : sont des constantes numériques.

d) Modèle mathématique final

Le modèle mathématique final régissant l'écoulement dans la couche limite dans un canal large a forte pente auquel nous tenterons d'apporter une solution, peut être exprimé selon le système d'équation suivant :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin(\alpha) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial \overline{(-u'v')}}{\partial y}$$

$$P = \rho g y \cos(\alpha)$$

$$U \frac{\partial K}{\partial x} + V \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial K}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial K}{\partial y} \right) + \overline{(-u'v')} \frac{\partial U}{\partial y} - \varepsilon$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \left( -\overline{u'v'} \right) C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \frac{\partial U}{\partial y} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$

$$\text{avec, } \left( -\overline{u'v'} \right) = \frac{1}{\rho} \mu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{et} \quad \mu_t = \rho C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}$$

Les constantes du système d'équations sont déduites des résultats d'expériences simples. On adopte généralement, les valeurs universelles recommandées par LAUNDER et SPALDING [36] :

$$C_\mu = 0.09 ; C_{\varepsilon 1} = 1.43 ; C_{\varepsilon 2} = 1.92 ; \sigma_k = 1.0 ; \sigma_\varepsilon = 1.30$$

# Chapitre IV

**MODELISATION NUMERIQUES**

## Chapitre IV

### MODELISATION NUMERIQUE

Dans le chapitre précédent un modèle mathématique régissant l'écoulement dans la couche limite dans un canal large à forte pente a été élaboré.

Ce chapitre sera consacré à l'élaboration des modèles numériques et à la présentation de la méthode de résolution du modèle mathématique préétabli associé aux conditions aux limites, de la paroi et de l'écoulement libre qu'aux profils initiaux des différentes variables de l'écoulement.

#### IV-1 La méthode des différences finies

La méthode des différences finies est basée sur l'approximation d'une fonction par son développement de Taylor autour d'un point. Elle permet de remplacer les équations aux dérivées partielles par des équations algébriques linéaires à résoudre numériquement.

Les approximations plus précises d'ordre supérieur sont obtenues, soit en augmentant le nombre de points dans l'expression de dérivée, soit en utilisant des formules implicites.

Plusieurs méthodes de différences finies spécifiques à la résolution des équations du mouvement en variables primitives ont été développées.

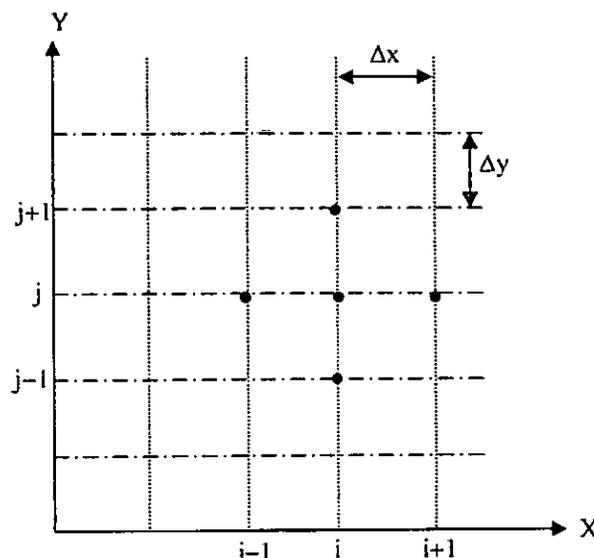


Figure IV.1- Maillage d'un domaine suivant un plan (x, y)

Considérons le point de maillage (i, j) qui est entouré par d'autres nœuds comme indiqué sur la figure (IV.1) ci-dessus. En appliquant le développement en série de Taylor autour de ce point, on obtient les expressions suivantes :

$$f_{i-1,j} = f_{i,j} - \Delta x \cdot f_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f_{xxx} + \dots \quad (\text{IV-1})$$

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \Delta x f_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f_{xxx} + \dots \quad (\text{IV-2})$$

$$\text{Dans lesquelles : } f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ et } f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}. \quad (\text{IV-3})$$

Toutes les dérivées sont évaluées au nœud (i, j). Par addition ou soustraction de ces deux dernières équations, on peut obtenir les expressions en différences finies ci-dessous, ainsi que les ordres de troncature qui leurs correspondent :

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$  différence directe
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x)$  différence inverse
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$  différence centrale
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$  différence centrale

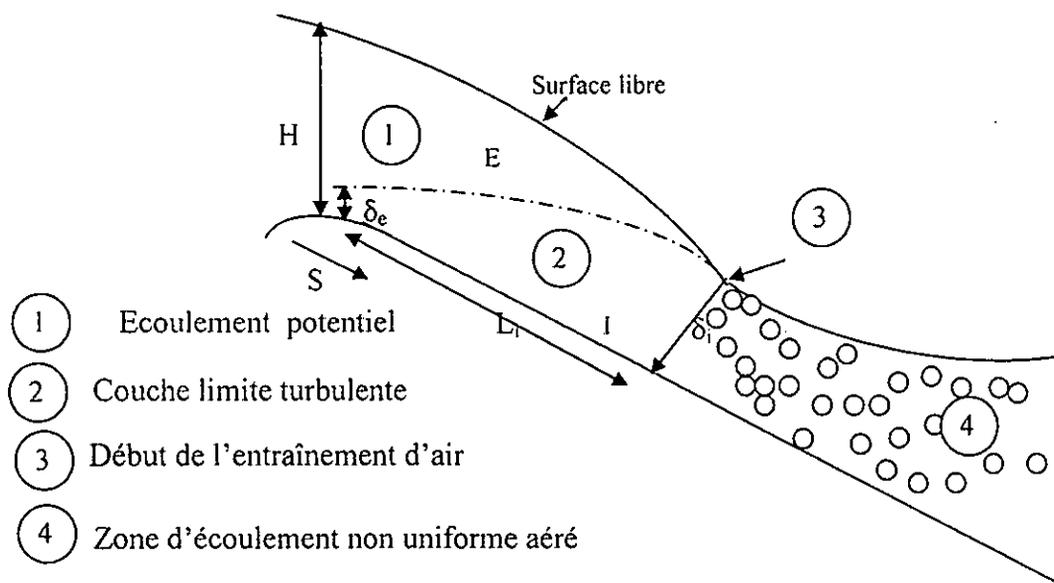
Des formules similaires pour  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  peuvent être obtenues. Par ailleurs, l'expression :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + O(\Delta x^2) \quad (\text{IV-4})$$

est aussi aisément déduite.

#### IV-2 Transformation des équations

L'utilisation de la méthode des différences finies nous impose d'opérer une transformation géométrique pour passer du domaine de l'écoulement physique irrégulier à un domaine de calcul régulier.



**Figure IV.2 : Mécanisme conduisant à l'entraînement**

Sur la figure (IV.2), nous distinguons deux régions différentes : la première région est limitée par le bord inférieur de la couche limite I et le bord supérieur de la couche limite E et la deuxième région est limitée par le bord supérieur de la couche limite E et la surface libre.

Les transformations de Von mises utilisées dans la méthode de Patankar et Spalding nous permettent d'écrire le système d'équations en coordonnées  $(x, y)$  sous le système en coordonnées  $(x, \omega)$  où  $\omega$ , est la fonction de courant adimensionnelle définie comme suit [36] :

$$\omega = \frac{\psi - \psi_I}{\psi_E - \psi_I} \quad (\text{IV-5})$$

avec,  $\psi_E$  : fonction de courant au bord supérieur de la couche limite ;

$\psi_I$  : fonction de courant au niveau de la pseudo base.

Ainsi  $\omega$  varie de 0 au niveau de la limite I à 1 au niveau de la limite E.

Pour avoir les équations différentielles du problème dans le nouveau système de coordonnées  $(x, \omega)$ , il faut remplacer les dérivées en  $(x, y)$  par les dérivées en  $(x, \omega)$ .

• Les dérivées premières sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{IV-6-a})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (\text{IV-6-b})$$

Etant donnée que la fonction de courant adimensionnelle est:

$$\omega = \frac{\psi - \psi_I}{\psi_E - \psi_I} = \frac{1}{\Delta\psi} \psi - \frac{\psi_I}{\Delta\psi} \quad (\text{IV-7})$$

avec,  $\Delta\psi = \psi_E - \psi_I$ , il s'en suit que :  $\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\Delta\psi} \frac{\partial \psi}{\partial y}$  (IV-8)

et sachant que:  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u$ , il vient que :  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\rho u}{\Delta\psi} \frac{\partial f}{\partial \omega}$ .

les dérivées premières avec les nouvelles coordonnées sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{IV-9-a})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\rho u}{\Delta\psi} \frac{\partial f}{\partial \omega} \quad (\text{IV-9-b})$$

- Les dérivées seconde sont données par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (\text{IV-10-a})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho u}{\Delta\psi} \frac{\partial f}{\partial \omega} \right) = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\rho u}{\Delta\psi} \frac{\partial g}{\partial \omega} \quad \text{tel que : } g = \frac{\rho u}{\Delta\psi} \frac{\partial f}{\partial \omega}, \text{ il vient que:}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left( \frac{\rho u}{\Delta\psi} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}. \quad (\text{IV-10-b})$$

Le taux de transfert de masse à travers les limites I et E sont respectivement définies par :

$$m_I = -\frac{d\psi_I}{dx} \quad \text{et} \quad m_E = \frac{d\psi_E}{dx} \quad (\text{IV-11})$$

et les expressions de la fonction de courant sont :

$$\rho u = \frac{d\psi}{dy} \quad \text{et} \quad \rho v = -\frac{d\psi}{dx} \quad (\text{IV-12})$$

Au niveau de la pseudo-base, on considère que le taux de transfert de masse est nul, alors :

$$m_I = 0 \quad (\text{IV-13})$$

#### Remarque

On peut évaluer l'équation de la vitesse transversale à partir de la fonction de courant tel que:

$$\psi = \omega (\psi_E - \psi_I) + \psi_I \quad (\text{IV-14})$$

d'où :  $\rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \omega \left( -\frac{\partial \psi_E}{\partial x} + \frac{\partial \psi_I}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi_I}{\partial x}$ , on déduit que :

$$v = \frac{1}{\rho} [(1 - \omega)m_I + m_E \omega].$$

Sachant que :  $m_I = 0$ , on a :

$$v = \frac{1}{\rho} \omega m_E \quad (\text{IV-15})$$

En introduisant les équations (IV-9), (IV-10) et (IV-15) dans le modèle mathématique (III-50), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + b\omega \frac{\partial U}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left( C_u \frac{\partial U}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( d \frac{\partial U}{\partial \omega} \right) + \frac{g}{U} \sin \alpha - \frac{1}{U\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial K}{\partial x} + b\omega \frac{\partial K}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left( C_k \frac{\partial K}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( d \frac{\partial K}{\partial \omega} \right) + C_\mu \frac{K^2 U \rho^2}{\varepsilon \Delta \psi^2} \left( \frac{\partial U}{\partial \omega} \right)^2 - \frac{\varepsilon}{U} \end{aligned} \quad (\text{IV-16})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + b\omega \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( C_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( d \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right) + C_\mu C_{\varepsilon 1} K \frac{U \rho^2}{\Delta \psi^2} \left( \frac{\partial U}{\partial \omega} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{KU}$$

$$\text{d'où: } b = \frac{m_E}{\Delta \psi}, \quad C_u = \frac{\mu_I \rho U}{\sigma_u \Delta \psi^2}, \quad C_k = \frac{\mu_I \rho K}{\sigma_k \Delta \psi^2}, \quad C_\varepsilon = \frac{\mu_I \rho \varepsilon}{\sigma_\varepsilon \Delta \psi^2}, \quad d = \frac{\mu \rho U}{\Delta \psi^2}$$

### IV-3 Discrétisation des équations

Les équations du problème sont discrétisées par un schéma explicite et un schéma implicite.

#### IV-3-1 Le schéma explicite

Un schéma est dit explicite si chaque valeur approchée de la solution au point  $(i+1, j)$  est écrite à partir des valeurs de la solution à la section  $i$ . Cette valeur est donc explicitement une fonction des valeurs déjà calculées et s'obtient directement pour chaque pas  $\Delta x$ .

La discrétisation des équations par un schéma explicite est comme suit :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{U(i+1, j) - U(i, j)}{\Delta x} + b(i) \omega(j) \left( \frac{U(i, j+1) - U(i, j)}{\Delta \omega} \right) &= \frac{C_u(i, j+1)U(i, j+1) - 2C_u(i, j)U(i, j)}{(\Delta \omega)^2} \\ &+ \frac{C_u(i, j-1)U(i, j-1)}{(\Delta \omega)^2} + \frac{d(i, j+1)U(i, j+1) - 2d(i, j)U(i, j) + d(i, j-1)U(i, j-1)}{(\Delta \omega)^2} \\ &+ g \frac{\sin \alpha}{U(i, j)} - \frac{1}{\rho U(i, j)} \frac{P(i+1, j) - P(i, j)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (\text{IV-17})$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{K(i+1, j) - K(i, j)}{\Delta x} + b(i) \omega(j) \left( \frac{K(i, j+1) - K(i, j)}{\Delta \omega} \right) &= \frac{C_k(i, j+1)K(i, j+1) - 2C_k(i, j)K(i, j)}{(\Delta \omega)^2} \\ &+ \frac{C_k(i, j-1)K(i, j-1)}{(\Delta \omega)^2} + \frac{d(i, j+1)K(i, j+1) - 2d(i, j)K(i, j) + d(i, j-1)K(i, j-1)}{(\Delta \omega)^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{C_\mu}{(\Delta\psi(i))^2} \frac{(K(i,j))^2 \rho^2 U(i,j) (U(i,j+1) - U(i,j))^2}{\varepsilon(i,j) \Delta\omega^2} - \frac{\varepsilon}{U(i,j)} \quad (IV-18)$$

$$\begin{aligned} \diamond \quad & \frac{\varepsilon(i+1,j) - \varepsilon(i,j)}{\Delta x} + b(i) \omega(j) \left( \frac{\varepsilon(i,j+1) - \varepsilon(i,j)}{\Delta\omega} \right) = \frac{C_\varepsilon(i,j+1)\varepsilon(i,j+1) - 2C_\varepsilon(i,j)\varepsilon(i,j)}{(\Delta\omega)^2} \\ & + \frac{C_\varepsilon(i,j-1)\varepsilon(i,j-1)}{(\Delta\omega)^2} + \frac{d(i,j+1)\varepsilon(i,j+1) - 2d(i,j)\varepsilon(i,j) + d(i,j-1)\varepsilon(i,j-1)}{(\Delta\omega)^2} \\ & + C_{\varepsilon 1} C_\mu \frac{K(i,j) \rho^2 U(i,j) \left( \frac{U(i,j+1) - U(i,j)}{\Delta\omega} \right)^2}{(\Delta\psi(i))^2} - C_{\varepsilon 2} \frac{(\varepsilon(i,j))^2}{K(i,j) U(i,j)} \end{aligned} \quad (IV-19)$$

Si on pose :  $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta\omega^2}$ , on déduit les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \diamond \quad & U(i+1,j) = U(i,j) + \beta (C_u(i,j+1)U(i,j+1) - 2C_u(i,j)U(i,j) + C_u(i,j-1)U(i,j-1)) \\ & + \beta (d(i,j+1)U(i,j+1) - 2d(i,j)U(i,j) + d(i,j-1)U(i,j-1)) - b(i)\omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta\omega} (U(i,j+1) - U(i,j)) \\ & + \frac{g \Delta x \sin \alpha}{U(i,j)} - \frac{1}{\rho} (P(i,j+1) - P(i,j)) \end{aligned} \quad (IV-20)$$

$$\begin{aligned} \diamond \quad & K(i+1,j) = K(i,j) + \beta (C_k(i,j+1)K(i,j+1) - 2C_k(i,j)K(i,j) + C_k(i,j-1)K(i,j-1)) \\ & + \beta (d(i,j+1)K(i,j+1) - 2d(i,j)K(i,j) + d(i,j-1)K(i,j-1)) - b(i)\omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta\omega} (K(i,j+1) - K(i,j)) \\ & + \frac{\beta C_\mu}{(\Delta\psi(i))^2} \frac{(K(i,j))^2 \rho^2 U(i,j)}{\varepsilon(i,j)} (U(i+1,j) - U(i,j))^2 - \frac{\varepsilon(i,j)}{U(i,j)} \Delta x \end{aligned} \quad (IV-21)$$

$$\begin{aligned} \diamond \quad & \varepsilon(i+1,j) = \varepsilon(i,j) + \beta (C_\varepsilon(i,j+1)\varepsilon(i,j+1) - 2C_\varepsilon(i,j)\varepsilon(i,j) + C_\varepsilon(i,j-1)\varepsilon(i,j-1)) \\ & + \beta (d(i,j+1)\varepsilon(i,j+1) - 2d(i,j)\varepsilon(i,j) + d(i,j-1)\varepsilon(i,j-1)) - b(i)\omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta\omega} (\varepsilon(i,j+1) - \varepsilon(i,j)) \\ & + \frac{\beta C_{\varepsilon 1} C_\mu}{(\Delta\psi(i))^2} K(i,j) \rho^2 U(i,j) (U(i,j+1) - U(i,j))^2 - C_{\varepsilon 2} \Delta x \frac{(\varepsilon(i,j))^2}{U(i,j) K(i,j)} \end{aligned} \quad (IV-22)$$

#### IV-3-2 Schéma implicite

Un schéma est dit implicite si la valeur approchée de la solution au point  $(i+1,j)$  est écrite à partir des valeurs de la solution calculées à la section précédente  $i$  et des valeurs voisines calculées à la même section  $i+1$ . Il s'agit donc d'une liaison implicite entre toutes les valeurs au point  $(i+1,j)$  qui seront résolus globalement. Dans ce cas, il y a lieu de recourir à une méthode pour l'inversion des matrices.

La discrétisation des équations par un schéma implicite est comme suit:

$$\begin{aligned}
\blacklozenge \quad & \frac{U(i+1, j) - U(i, j)}{\Delta x} + b(i) \omega(j) \left( \frac{U(i+1, j+1) - U(i+1, j)}{\Delta \omega} \right) = \frac{C_u(i, j+1)U(i+1, j+1) - 2C_u(i, j)U(i+1, j)}{(\Delta \omega)^2} \\
& + \frac{C_u(i, j-1)U(i+1, j-1)}{(\Delta \omega)^2} + \frac{d(i, j+1)U(i+1, j+1) - 2d(i, j)U(i+1, j) + d(i, j-1)U(i+1, j-1)}{(\Delta \omega)^2} \\
& + g \frac{\sin \alpha}{U(i, j)} - \frac{1}{\rho U(i, j)} \frac{P(i+1, j) - P(i, j)}{\Delta x} \quad (IV-23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacklozenge \quad & \frac{K(i+1, j) - K(i, j)}{\Delta x} + b(i) \omega(j) \left( \frac{K(i+1, j+1) - K(i+1, j)}{\Delta \omega} \right) = \frac{C_k(i, j+1)K(i+1, j+1) - 2C_k(i, j)K(i+1, j)}{(\Delta \omega)^2} \\
& + \frac{C_k(i, j-1)K(i+1, j-1)}{(\Delta \omega)^2} + \frac{d(i, j+1)K(i+1, j+1) - 2d(i, j)K(i+1, j) + d(i, j-1)K(i+1, j-1)}{(\Delta \omega)^2} \\
& + \frac{C_\mu}{(\Delta \psi(i))^2} \frac{(K(i+1, j))^2 \rho^2 U(i+1, j) (U(i+1, j+1) - U(i+1, j))^2}{\varepsilon(i, j) \Delta \omega^2} - \frac{\varepsilon(i, j)}{U(i+1, j)} \quad (IV-24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacklozenge \quad & \frac{\varepsilon(i+1, j) - \varepsilon(i, j)}{\Delta x} + b(i) \omega(j) \left( \frac{\varepsilon(i+1, j+1) - \varepsilon(i+1, j)}{\Delta \omega} \right) = \frac{C_\varepsilon(i, j+1)\varepsilon(i+1, j+1) - 2C_\varepsilon(i, j)\varepsilon(i+1, j)}{(\Delta \omega)^2} \\
& + \frac{C_\varepsilon(i, j-1)\varepsilon(i+1, j-1)}{(\Delta \omega)^2} + \frac{d(i, j+1)\varepsilon(i+1, j+1) - 2d(i, j)\varepsilon(i+1, j) + d(i, j-1)\varepsilon(i+1, j-1)}{(\Delta \omega)^2} \\
& + C_{\varepsilon 1} C_\mu \frac{K(i+1, j) \rho^2 U(i+1, j) \left( \frac{U(i+1, j+1) - U(i+1, j)}{\Delta \omega} \right)}{(\Delta \psi(i))^2} \\
& - C_{\varepsilon 2} \frac{(\varepsilon(i+1, j))^2}{K(i+1, j) U(i+1, j)} \quad (IV-25)
\end{aligned}$$

Si on pose:  $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta \omega^2}$ , on déduit les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
\blacklozenge \quad & -\beta(C_u(i, j-1) + d(i, j-1))U(i+1, j-1) + \left( 1 + 2\beta C_u(i, j) + 2\beta d(i, j) - b(i) \omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta \omega} \right) U(i+1, j) \\
& + \left( b(i) \omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta \omega} - \beta C_u(i, j+1) - \beta d(i, j+1) \right) U(i+1, j+1) = U(i, j) - \frac{P(i+1, j) - P(i, j)}{\rho U(i, j)} \\
& + g \Delta x \frac{\sin \alpha}{U(i, j)} \quad (IV-26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacklozenge \quad & -\beta(C_k(i, j-1) + d(i, j-1))K(i+1, j-1) + \left( 1 + 2\beta C_k(i, j) + 2\beta d(i, j) - b(i) \omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta \omega} \right) K(i+1, j) \\
& + \left( b(i) \omega(j) \frac{\Delta x}{\Delta \omega} - \beta C_k(i, j+1) - \beta d(i, j+1) \right) K(i+1, j+1) = K(i, j) - \frac{\varepsilon(i, j)}{U(i+1, j)} \Delta x + \frac{C_\mu \rho^2}{(\Delta \psi(i))^2}
\end{aligned}$$



- ◆ Résolution du système à matrice bidiagonale (cas particulier d'un système à matrice triangulaire supérieure).

$$x_n = \beta_n \quad (IV-33)$$

$$x_i = \beta_i - \gamma_i x_{i+1} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (IV-34)$$

#### IV-4 Calcul des différentes épaisseurs de la couche limite

- L'épaisseur de la couche limite s'obtient à partir du champ des vitesses résultant du modèle, en combinant les formules de la fonction de courant  $\psi$  et celle de la fonction de courant adimensionnelle  $\omega$ , suivantes :

$$\omega = \frac{\psi - \psi_I}{\psi_E - \psi_I} \quad \text{et} \quad \rho u = \frac{d\psi}{d\delta}$$

$$d'où : d\delta = \frac{\Delta\psi}{-\rho u} d\omega \quad (IV-35)$$

- L'épaisseur de déplacement est déterminée par l'équation différentielle suivante :

$$d\delta_1 = \left(1 - \frac{U}{U_1}\right) dy \quad (IV-36)$$

- L'épaisseur de quantité de mouvement est déterminée par l'équation suivante :

$$d\delta_2 = \frac{U}{U_1} \left(1 - \frac{U}{U_1}\right) dy \quad (IV-37)$$

- L'épaisseur d'énergie est déterminée par l'équation suivante :

$$d\delta_3 = \left(\frac{U}{U_1}\right)^2 \left(1 - \frac{U}{U_1}\right)^2 \quad (IV-38)$$

tel que :

1.  $U$  : est la vitesse résultant du modèle de la couche limite.
2.  $U_1$  : est la vitesse libre.

Le calcul de l'intégration se fait numériquement à l'aide de la méthode de trapèze généralisée.

- Le calcul de facteur de forme se fait à partir de sa définition tel que :

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (IV-39)$$

#### IV-4-1 Formules de plaque plane

Il y a d'autres équations qui calculent l'épaisseur de la couche limite, l'épaisseur de déplacement, l'épaisseur de quantité de mouvement et l'épaisseur d'énergie ainsi le coefficient de frottement et le facteur de forme.

Ces lois sont déduites à partir des propriétés de l'écoulement de conduite qui est étendues à l'écoulement de plaque plane en remplaçant le rayon  $R$  par l'épaisseur de la couche limite  $\delta$ . Les formules de plaque plane sont :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.38}{Re^{1/5}} \quad (IV-40)$$

$$\frac{\delta_1}{x} = \frac{0.0477}{Re^{1/5}} \quad (IV-41)$$

$$\frac{\delta_2}{x} = \frac{0.037}{Re^{1/5}} \quad (IV-42)$$

$$\frac{\delta_3}{x} = \frac{0.0823}{Re^{1/5}} \quad (IV-43)$$

$$C_f = \frac{0.0594}{Re^{1/5}} \quad (IV-44)$$

#### IV-4-2 Formule de WOOD

Il y a une autre formule qui est plus générale, pour le développement de la couche limite. Cette formule est due à WOOD.

$$\frac{\delta}{x} = 0.0212 (\sin \alpha)^{-0.11} \left[ \frac{x}{k_s} \right]^{-0.10} \quad (IV-45)$$

#### IV.5 Calcul de la surface libre

Le problème qui se pose dans l'étude d'un écoulement graduellement varié est de déterminer la position,  $x$ , et la forme  $h(x)$ , de la surface libre pour un débit,  $Q$  et une forme géométrique de section  $S$  donnés.

L'équation de la surface libre est établie à partir de l'équation de l'énergie et l'équation de continuité tel que :

$$\frac{dh_c}{dx} = 1 - \frac{1 - \left( (Q/S_m)^2 / C^2 R_h I \right)}{1 - \left( (Q/S_m)^2 / (g S_m / b) \right)} \quad (IV-46)$$

où :  $h_e$  est la hauteur de l'écoulement,  $I$ , la pente du canal,  $Q$ , le débit volumique,  $S_m$ , la section mouillée,  $C$ , le coefficient de Chézy,  $R_h$ , le rayon hydraulique et  $b$ , la largeur du canal.

L'intégration de l'équation de la surface d'eau est nécessaire pour procéder aux calculs et à la construction exacte des formes de la surface libre. On peut distinguer trois méthodes.

1. La méthode par approximations successives ;
2. La méthode par intégration directe ;
3. La méthode par intégration graphique.

Il est toutefois évident que la position de cette ligne d'eau n'est pas arbitraire ; pour la situer, il s'impose alors obligatoirement de connaître l'un de ses points, ce sera le point de contrôle. Ce point est généralement calculable à partir des propriétés hydrauliques d'une singularité qui est à l'origine d'un écoulement graduellement varié, cela peut être une chute, un déversoir ou une vanne.

Dans notre étude, nous choisissons la première méthode. L'hypothèse d'un écoulement bidimensionnel conduit à déduire les caractéristiques suivantes :

Le rayon hydraulique :  $R_h = h$  ; la surface mouillée :  $S = h$ , la profondeur normale :

$$h_n^3 = \frac{q^2}{C^2 I} \text{ et la profondeur critique : } h_c^3 = \frac{q^2}{g}$$

En substituant ces éléments dans l'équation de base (IV-46), on obtient l'équation suivante [5, 18] :

$$\frac{dh_c}{dx} = I \frac{1 - (h_n/h)^3}{1 - (h_c/h)^3} \quad (\text{IV-47})$$

La discrétisation en différences finies donne :

$$h_c(i+1) = h_c(i) + \Delta x \left( \operatorname{tg} \alpha \frac{1 - (h_n/h(i))^3}{1 - (h_c/h(i))^3} \right) \quad (\text{IV-48})$$

Pour éviter l'indétermination au premier point, on se donne une valeur arbitraire  $h(1)$  de la profondeur proche de  $h(0)$  tel que :  $h(0) > h(1)$

## **IV-6 Conditions initiales et aux limites**

### **IV-6-1 Conditions initiales**

- *Conditions initiales pour les différentes épaisseurs de la couche limite*

➤ L'estimation de l'épaisseur de la couche limite au niveau du seuil se fait par la méthode de HENDERSON [19].

$$\delta_1 = -H_d \left( 0.0055 \times H_d^{-0.3} \right) \quad (\text{IV-49})$$

où :  $H_d = \frac{h_c}{0.755}$  (IV-50)

➤ Par définition des épaisseurs de déplacement, de quantité de mouvement et d'énergie dans le cas où le profil de vitesse représenté par la loi en puissance, on tire :

$$\delta_1 = \frac{1}{n+1} \delta_1, \quad (\text{IV-51})$$

$$\delta_2 = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \delta_1, \quad (\text{IV-52})$$

$$\delta_3 = \frac{2.n}{(1+n)(3+n)} \delta_1, \quad (\text{IV-53})$$

$$CF = \frac{n+2}{n} \quad (\text{IV-54})$$

$n=7$  pour le profil lisse

$n = 3.5$  pour la marche d'escalier

- **Conditions initiales de la vitesse**

Les conditions initiales pour la vitesse sont déterminées soit expérimentalement soit en utilisant des formules empiriques.

Selon Chen, le profil de vitesse dans la couche limite peut être représenté par la loi de puissance suivante :

$$\frac{u}{U_1} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/n} \quad (\text{IV-55})$$

$U_1$  : la vitesse de l'écoulement libre ;  $\delta$  : l'épaisseur de la couche limite ;  $n = \kappa \sqrt{8/f}$  est le facteur de puissance dont  $\kappa = 0.41$  représente la constante de Von Karman.

- **Conditions initiales de l'énergie cinétique turbulente**

D'après les expériences de KLEBNOFF, le profil initiale de l'énergie cinétique obéit à la loi suivante [25] :

$$K = U_{11}^2 \left( 0.08 - 0.08 \frac{y}{\delta} \right)^2 \quad (\text{IV-56})$$

tel que :  $K=0.08U_1^2$  pour  $y = 0$

$$K = 0 \quad \text{pour} \quad y = \delta$$

- **Conditions initiales du taux de dissipation**

Pour obtenir le profil initial de taux de dissipation «  $\epsilon$  », on utilise les expressions de la viscosité turbulente :

$$\mu_t = \rho C_u \frac{K^2}{\epsilon} \quad \text{et} \quad \mu_t = \rho K^{1/2} L$$

$$\text{alors : } \epsilon = \frac{C_u K^{3/2}}{L} \quad (\text{IV-57})$$

avec,  $L$  : la longueur de mélange de la turbulence.

De nombreuses expressions empiriques ont été proposées [36, 38] :

1. L'hypothèse de VON KARMAN :  $l_m = C \frac{\partial \bar{u} / \partial y}{\partial^2 \bar{u} / \partial y^2}$  (IV-58)

2. L'hypothèse de ESCUDIER M.P (1966) s'écrit :

$$\frac{l}{\delta} = \kappa \frac{y}{\delta} \quad \text{pour} \quad \frac{y}{\delta} \leq \frac{\lambda}{\kappa} \quad (\text{IV-59})$$

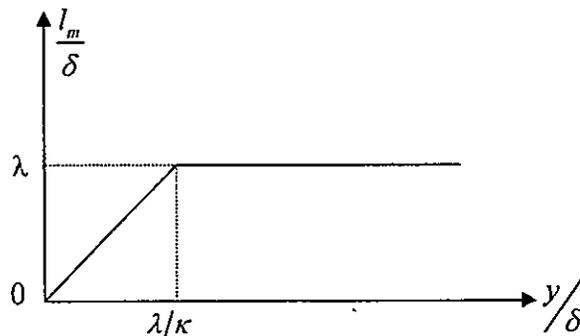
$$\frac{l}{\delta} = \lambda \quad \text{pour} \quad \frac{y}{\delta} > \frac{\lambda}{\kappa} \quad (\text{IV-60})$$

$$\kappa = 0.43 \quad \lambda = 0.09$$

Pour notre étude, nous utilisons la dernière hypothèse :

$$y < 0.09 \frac{\delta}{0.43} \quad l = 0.43 y \quad (\text{IV-61})$$

$$y \geq 0.09 \frac{\delta}{0.43} \quad l = 0.09 \delta \quad (\text{IV-62})$$



#### IV-6-2 Conditions aux limites

Il y a lieu de distinguer entre deux types de conditions aux limites, celles qui caractérisent le fond de la paroi du canal et celles de l'écoulement potentiel (libre).

IV-6-2-1 *L'écoulement libre*

Le bord supérieur de la couche limite constitue aussi une des frontières de l'écoulement libre dont la vitesse longitudinale  $U_1$  dépend de la hauteur de la lame d'eau ainsi que de la position longitudinale.

Selon Keller [22], la vitesse d'écoulement répond à l'équation suivante.

$$U_1 \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) = g \sin \alpha \quad (\text{IV-63})$$

L'énergie cinétique  $K$  et le taux de dissipation  $\epsilon$ , sont considérées nulles le long de la frontière supérieure de la couche limite.

IV-6-2-2 *Conditions aux limites du fond « la paroi »*

Les effets d'une paroi sur le champ turbulent sont nombreux et complexes, on peut cependant en dégager les principaux :

1. La réduction des échelles de longueur.
2. La contribution réfléchie des corrélations pression-déformation.
3. La création d'une zone adjacente à la paroi dans laquelle la viscosité moléculaire est dominante.
4. Le caractère fortement anisotrope de la turbulence près de la paroi.
5. Le caractère fortement non homogène du champ turbulent.

Ces effets ont des conséquences importantes sur les propriétés de transfert de l'écoulement, en particulier les frottements et la diffusion thermique.

La difficulté de représenter le profil des vitesses avec une bonne précision dans toute l'épaisseur de la couche limite provient de l'existence de la paroi qui, à cause de la viscosité, impose la condition de non-glissement [11, 36, 38].

De ce fait, il existe au moins deux régions dans la couche limite. L'une, loin de la paroi, est contrôlée par la turbulence et l'autre, près de la paroi est dominée par la viscosité.

Le profil des vitesses dans une couche limite a deux comportements indépendants dans la région interne et dans la région externe. Il existe une région de raccordement qui appartient à la fois à l'une et l'autre de ces régions ; cette région est appelée région logarithmique.

- Fonction de paroi pour la vitesse

Le calcul des propriétés de l'écoulement dans la zone adjacente de la paroi nécessite l'introduction des points de discrétisation en nombre élevé.

Une méthode pratique pour palier cet inconvénient est de faire un raccordement à une loi universelle. Pour cette raison de nombreux chercheurs ont proposé des modèles de

fonction pour calculer les propriétés de l'écoulement dans la zone de paroi, ceci nous permet d'avoir les conditions aux limites. Parmi ces modèles, il existe un profil universel des vitesses, défini par la vitesse  $u^+$  et le nombre de FROUDE  $y^+$  qui sont des paramètres adimensionnels :  $u^+ = f(y^+)$ .

Notre choix est basé sur les variables de PRANDTL définies par :

$$u^+ = \frac{u}{u_*} \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{yu_*}{\nu}$$

qui introduisent la notion de la vitesse de frottement  $U_*$  donnée par l'expression suivante :

$$(u_*)^2 = \frac{\tau}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'}$$

où :  $(-\overline{u'v'})$  est la tension de Reynolds,  $\nu$ , la viscosité cinématique,  $\tau$ , la contrainte de cisaillement et  $\rho$ , la masse volumique de l'eau. Une analyse fine de l'aspect global de l'écoulement permet de mettre en évidence deux zones assez distinctes dans la couche limite turbulente, une couche externe et une couche interne.

#### La région interne- loi de paroi

Si la région de paroi est d'épaisseur suffisamment faible, on peut raisonnablement supposer que le frottement total  $y$  reste approximativement égal au frottement de paroi, soit

$$\tau = -\rho \langle u'v' \rangle + \mu \frac{\partial U}{\partial y} = \tau_p \quad (\text{IV-64})$$

Dans ces conditions, on admet que dans cette région le profil de vitesse est complètement déterminé par la valeur de  $\tau_p$  et des caractéristiques du fluide  $\rho$  et  $U$ .

Son épaisseur est de l'ordre 10 à 20 % de  $\delta$ .

Un examen attentif conduit encore à distinguer trois sous-couches dans cette couche interne, la sous couche visqueuse, la zone intermédiaire ou la zone de tampon et la zone logarithmique.

#### ♦ La sous couche visqueuse ( $y^+ < 10$ )

C'est la zone la plus proche de la paroi où le transport turbulent peut être négligé devant le transport moléculaire soit :

$$\nu \frac{\partial U}{\partial y} \gg \overline{u'v'} \quad (\text{IV-65})$$

$$\text{donc : } (u_*)^2 = \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (\text{IV-66})$$

Ce qui conduit à :  $u^+ = y^+$  (IV-67)

♦ **La zone intermédiaire ou la zone tampon** ( $10 < y^+ < 40$ )

Dans cette zone, le transport turbulent et le transport moléculaire sont du même ordre, donc :  $(u_*)^2 = \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \overline{u'v'}$ . On aboutit à la formule universelle suivante :

$$u^+ = 5 \ln y^+ - 3.05 \quad (IV-68)$$

Les deux zones précédentes associées correspondent à une couche de l'ordre 1% de  $\delta$ .

♦ **La zone logarithmique** ( $40 < y^+ < 500$ )

Dans cette zone, le transport moléculaire peut être négligé devant le transport turbulent donc :  $(u_*)^2 = -\overline{u'v'}$ . Dans ce cas, les mesures expérimentales suggèrent un profil de vitesse de forme logarithmique dont l'expression est la suivante :

$$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.56 \quad (IV-69)$$

La valeur  $y^+ = 500$  est approximativement de l'ordre de 5 à 20% de l'épaisseur de  $\delta$ .

♦ **Paroi rugueuse**

Dans la discussion précédente la paroi a été supposée parfaitement lisse. Que deviennent les lois de paroi dans le cas où la paroi serait rugueuse ?

Si on introduit un paramètre  $k_s$  qui représente la hauteur moyenne des rugosités de paroi et si

on définit un nombre de Reynolds de rugosité :  $Re_s^+ = \frac{k_s u_*}{\nu}$ .

On dit qu'un écoulement est pleinement rugueux pour des valeurs de  $Re_s$  supérieur à 70 dans ce cas, le profil logarithmique s'écrit selon SCHLICHTING [38] :

$$u^+ = 2.54 \ln \left( \frac{y}{k_s} \right) + 8.5 \quad Re_s = \frac{k_s u_*}{\nu} \geq 70 \quad (IV-70)$$

Région externe- loi de vitesse déficitaire

La région externe est contrôlée par la vitesse externe  $U_1(x)$ , par l'épaisseur de couche limite  $\delta(x)$  et par la turbulence ( $u_*$ ), la viscosité est négligeable. La recherche d'une loi universelle dans cette région est basée sur l'écart de vitesse par rapport à  $U_c(x)$ , on aura donc une expression de ce déficit de la forme :

$$U_1(x) - U(x, y) = F(y, \delta(x), u_*) \quad (IV-71)$$

soit sous forme adimensionnelle :

$$\frac{U_1(x) - U(x, y)}{u_*} = F\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) \quad (\text{IV-72})$$

Selon PADET [32], on peut adopter les valeurs suivantes

$$\frac{U_1 - u}{u_*} = -2.5 \ln y^+ + 1.34 \left(1 + \cos \pi y^+\right) \quad (\text{IV-73})$$

- **Les fonctions de paroi pour k et ε :**

Concernant l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente, Kim [24] et Sajjadi [37] proposent les formules suivantes :

$$K = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_u}} \quad (\text{IV-74})$$

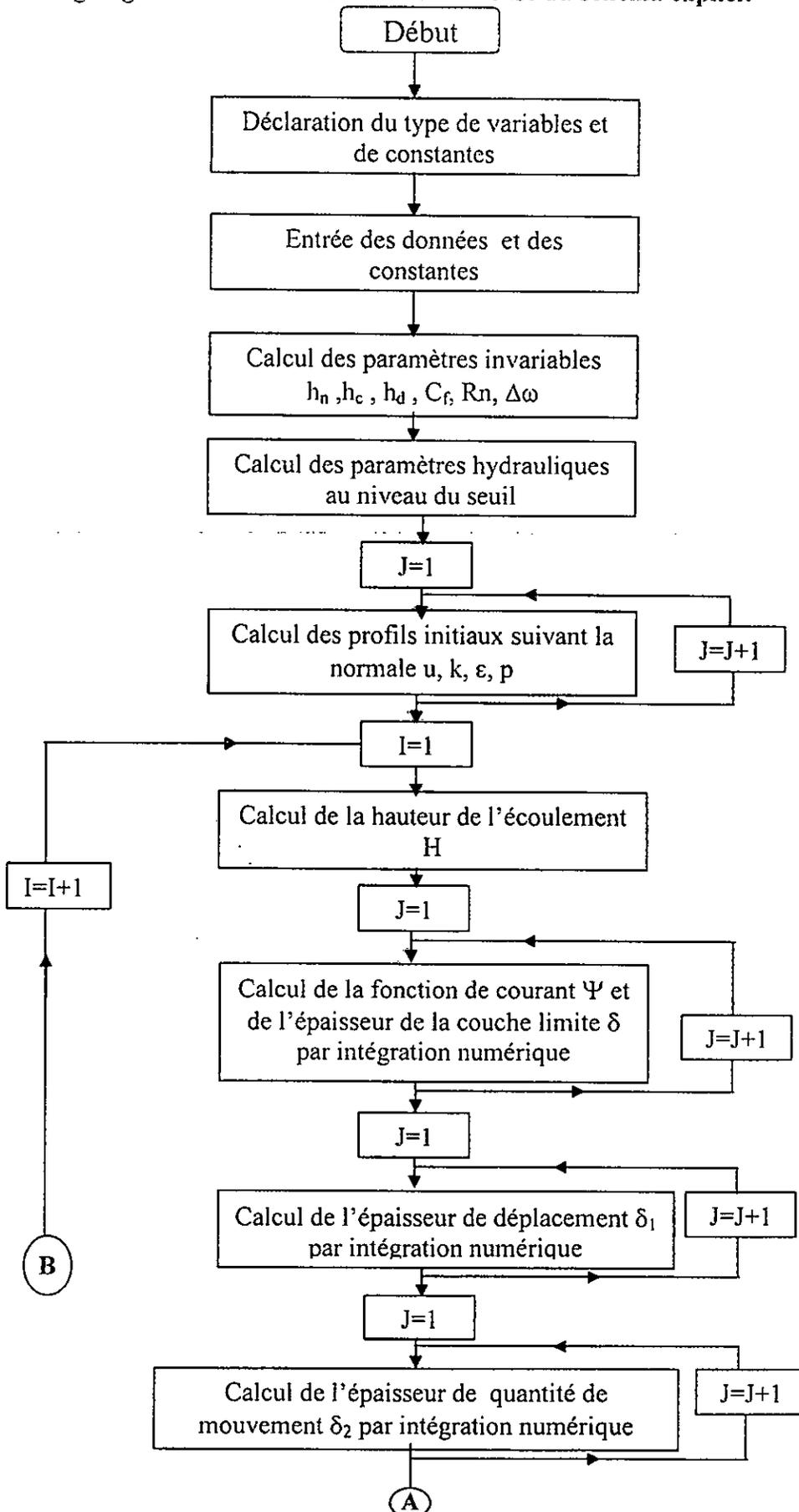
$$\varepsilon = \frac{C_u^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (\text{IV-75})$$

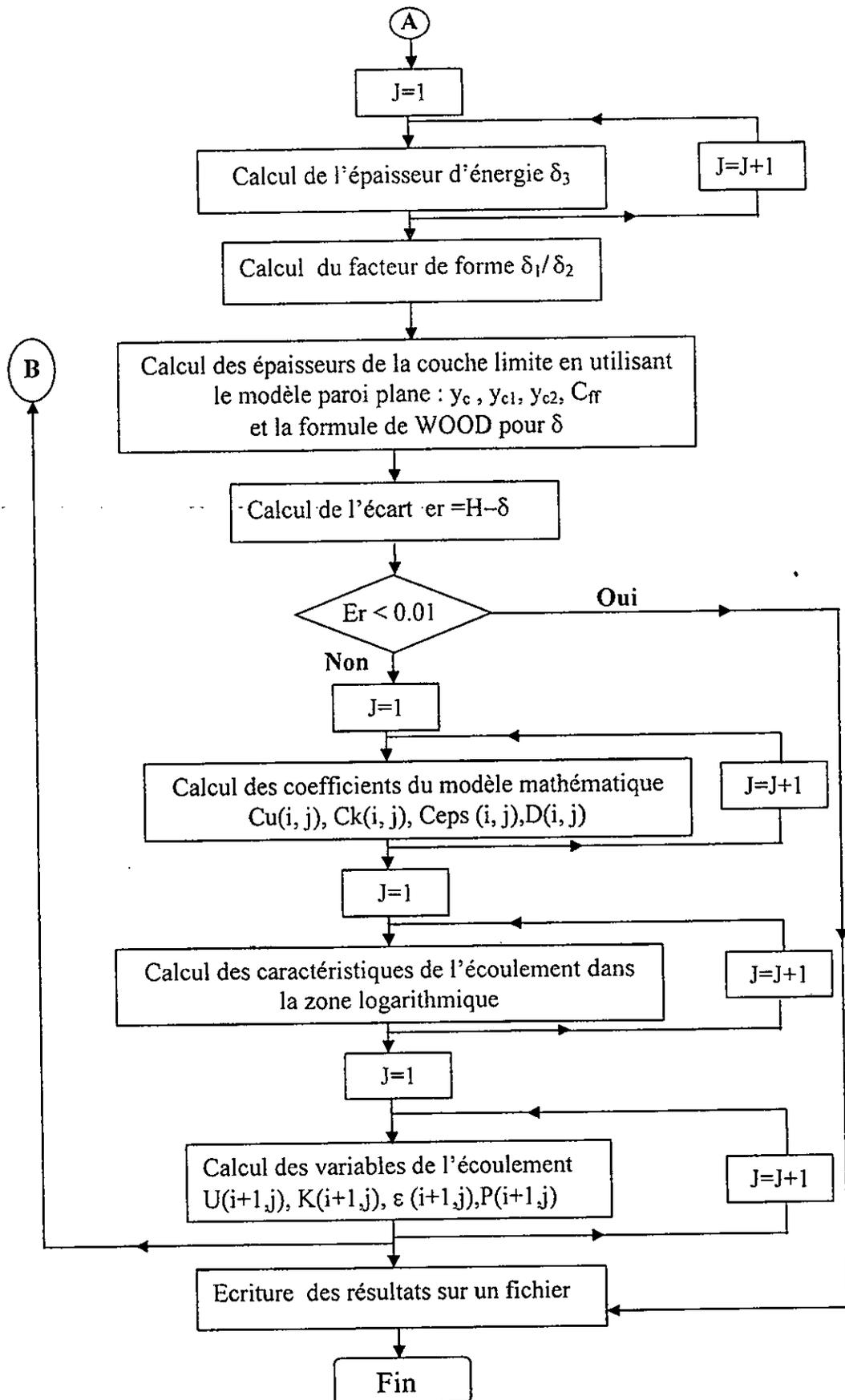
dans lesquelles : K, est l'énergie cinétique, ε, est le taux de dissipation de l'énergie cinétique et κ, la constante de Von Karman (κ = 0.41).

#### IV.7 Organigrammes de calculs

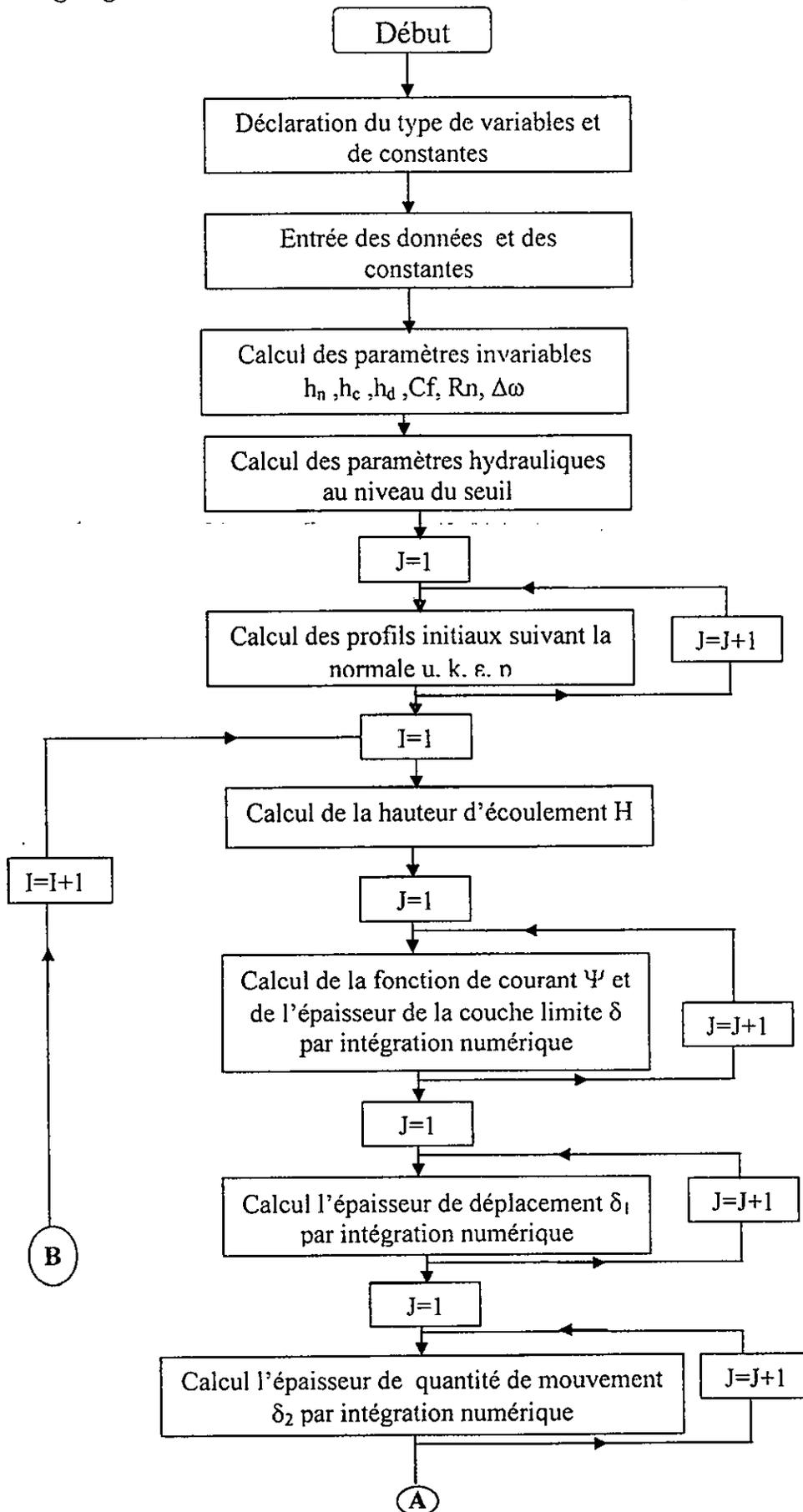
Sur la base des schémas numériques choisis et développés précédemment, nous avons élaboré quatre programmes de calculs en langage Fortran (Powerstation version 1993) pour les différents cas d'évacuateurs à savoir, l'évacuateur de crues en marches d'escaliers et l'évacuateur à profil lisse. Les principales étapes de calcul sont présentées dans les organigrammes suivants :

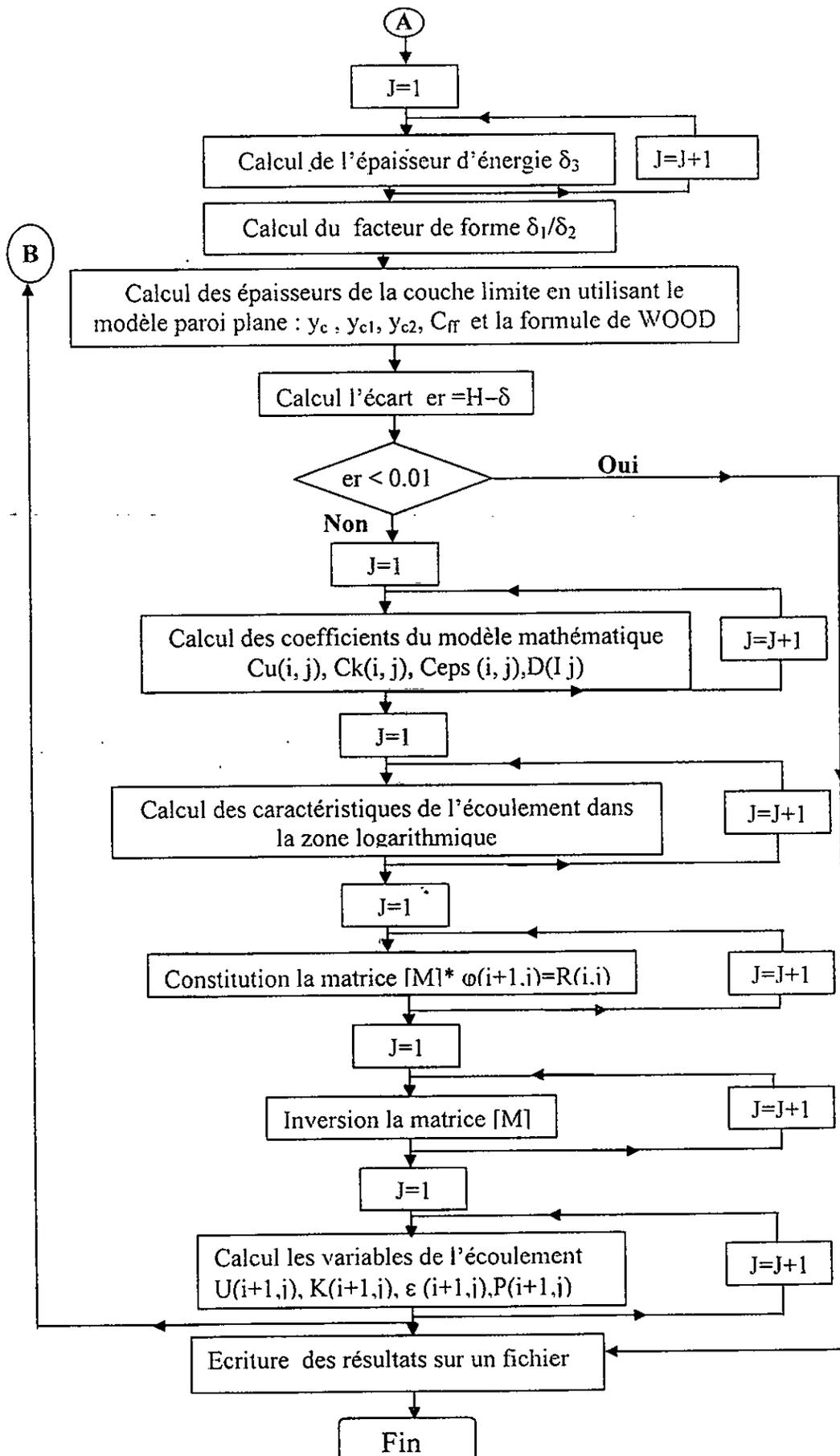
## IV.7.1 Organigramme de calcul élaboré sur la base du schéma explicite





## IV.7.2 Organigramme de calcul élaboré sur la base du schéma implicite





# Chapitre V

**LES EXPERIMENTATIONS NUMERIQUES**

## Chapitre V

# LES EXPERIMENTATIONS NUMERIQUES

## V.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent des programmes de calcul permettant de déterminer les profils de toutes les variables, qui concernent d'une part la couche limite et d'autre part les variables de l'écoulement tels que la vitesse, l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente, ont été élaborés.

Ce chapitre est consacré tout d'abord à la validation des modèles numériques sur un coursier lisse et un coursier en marches d'escaliers.

Après la validation, nous entamerons les expérimentations numériques en appliquant notre modèle à différents cas d'étude et puis nous interpréterons les résultats afin de tirer certaines conclusions du travail.

## V.2 VALIDATION DES MODELES NUMERIQUES

### V.2.1 Présentation des modèles d'application

Nous ne pouvons utiliser nos modèles numériques que s'ils sont testés avec d'autres travaux de recherche.

Pour cela, nous disposons d'une part, des résultats obtenus par l'application d'un modèle numérique sur un évacuateur de crues à profil lisse et, d'autre part, des résultats expérimentaux de Vercheval obtenus par la modélisation physique d'un évacuateur de crues en marches d'escaliers.

#### V.2.1.1 Evacuateur de crues à profil lisse

Dans le cas d'un évacuateur de crues à profil lisse, nous utilisons la méthode de KELLER et RASTOGI [22]. Les résultats qui sont à notre disposition sont ceux obtenus sur l'évacuateur de crues du barrage de Glenmagie dont les caractéristiques sont les suivantes :

- La pente du coursier  $\alpha=55^\circ$
- Le coefficient de rugosité de Strickler  $K_s=80$
- Le profil du déversoir est du type de Creager, caractérisé par un coefficient de débit  $C=0.5$

#### V.2.1.2 Modèle physique de l'évacuateur de crues du barrage de M'Bali

Les résultats de Vercheval proviennent des travaux de recherches réalisés sur un modèle réduit de l'évacuateur de crues du barrage de M'Bali dont les caractéristiques sont les suivantes [44] :

La pente du coursier  $\alpha=51.34^\circ$  ;

- Le coefficient de rugosité de Strickler  $K_s= 50$  ;
- Le profil du déversoir est du type Creager, caractérisé par un coefficient de débit  $C=0.52$  ;
- La largeur du coursier est égale à 60m.

On teste la validité du modèle mathématique en appliquant les programmes informatiques des différents schémas numériques aux écoulements dans les deux cas de modèles d'applications présentés plus haut.

### V.2.2 Calcul des paramètres hydrauliques de l'écoulement

Nos modèles numériques ont besoin de certains paramètres pour entamer les expérimentations numériques.

#### V.2.2.1 Vitesse de frottement

La vitesse de frottement est donnée par l'expression suivante :

$$u_* = \sqrt{f \frac{U_l^2}{8}}$$

où :  $f$ , est le coefficient de frottement et  $U_l$ , la vitesse de l'écoulement libre.

#### V.2.2.2 Coefficient de frottement

- Dans le cas d'un coursier à profil lisse, l'expression du coefficient de frottement est la

suivante :  $f = 8 \frac{g}{C^2}$

avec :  $C$ , le coefficient de Chezy, donné par :  $C = K_s \cdot h_n^{1/6}$

- Dans le cas d'un coursier en marches d'escaliers, Rajaratman propose l'expression

suivante :  $f = \frac{8 \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot h_n^3}{q^2}$

#### V.2.2.3 Hauteur d'eau au seuil du coursier

La hauteur de la lame d'eau déversante peut être donnée par la formule de débit suivante :

$$q = C_d \sqrt{2 \cdot g} \cdot h_e^{3/2}$$

avec,  $q$  le débit unitaire et  $C_d$  le coefficient de débit.

D'où :  $h_e = \sqrt[3]{\frac{q^2}{2 \cdot g \cdot C_d^2}}$

#### V.2.2.4 Hauteur d'eau normale

Le calcul du débit de l'écoulement d'un canal à surface libre se fait à partir de la formule suivante :

$$Q = K_s \cdot R_h^{2/3} \cdot J^{1/2} \cdot S_m$$

où :  $K_s$  : est le coefficient de rugosité de Strickler ;  $J$  : pente de la ligne d'eau ;  $S_m$  : section mouillée et  $R_h$  : rayon hydraulique donné par le rapport de la surface mouillée sur le périmètre mouillé.

En considérant que le canal est large et rectangulaire, il s'ensuit que  $R_h = h_e$ ,  $S_m = b \cdot h_e$  où  $b$ , est la largeur du canal.

Pour un écoulement uniforme, nous avons :  $J = I = \text{tg}\alpha$  et  $h_e = h_n$ ,

avec,  $I$ , la pente du canal,  $\alpha$ , l'angle d'inclinaison et  $h_n$  la hauteur d'eau normale de l'écoulement.

En considérant un débit unitaire  $q = Q/b$ , nous aboutissons, alors, à l'expression de la hauteur d'eau uniforme suivante :

$$h_n = \left( \frac{q^2}{K_s^2 \cdot \text{tg}\alpha} \right)^{3/10}$$

#### V.2.2.5 Hauteur d'eau critique

Le calcul de la hauteur d'eau critique se fait à partir de la formule suivante :

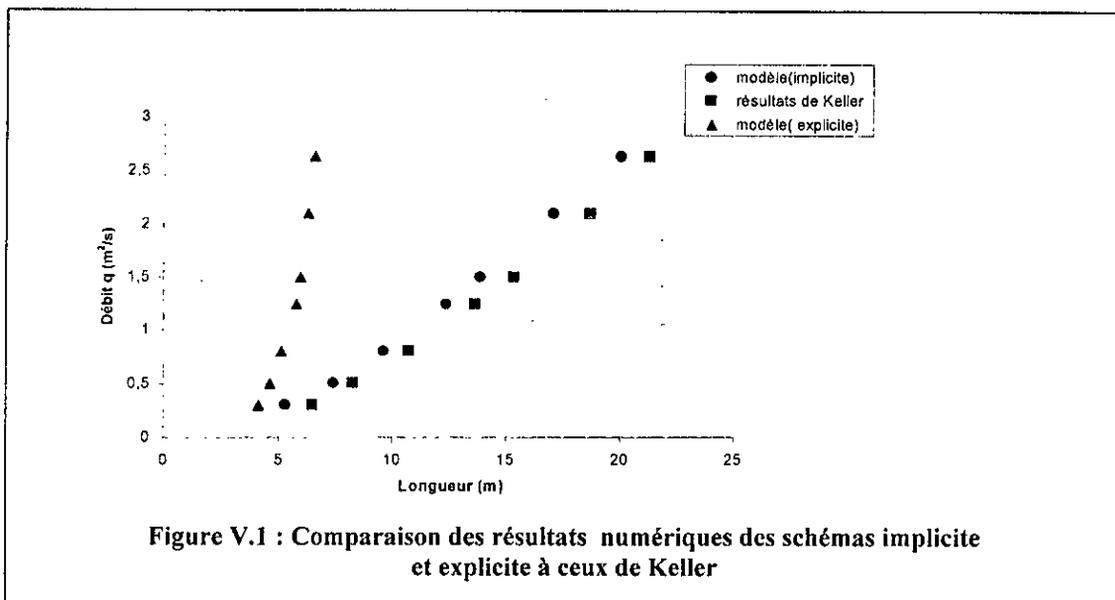
$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

#### V.2.3 Choix du schéma numérique dans le cas d'un coursier à profil lisse

La figure (V.1) présente les différentes positions du point d'inception en fonction du débit, données par le modèle mathématique de Keller et par l'application de nos modèles basés sur les schémas numériques explicite et implicite, au coursier à profil lisse de l'évacuateur de crues du barrage de Glenmagie.

La comparaison des résultats montre une concordance satisfaisante pour le schéma implicite. Par contre, il y a une divergence remarquable pour le schéma explicite.

A la lumière de ces différentes observations, on peut conclure que dans le cas des évacuateurs de crues à profil lisse, seul le modèle numérique basé sur le schéma implicite est valable.

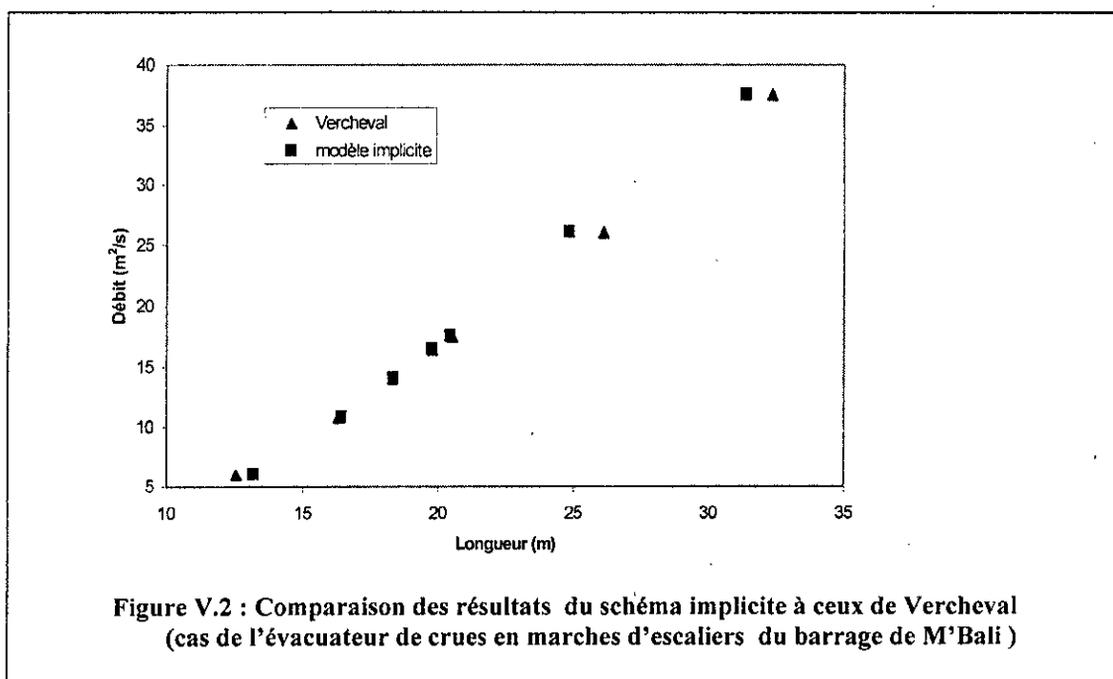


### V.2.4 Choix du schéma numérique dans le cas d'un coursier en marches d'escaliers

La figure (V.2) présente les positions du point d'inception en fonction du débit, résultant de notre modèle avec le schéma implicite, appliqué au coursier de l'évacuateur en marches d'escaliers du barrage de M'Bali ainsi que les mesures expérimentales relevées par Vercheval sur le modèle réduit de l'évacuateur de Crues du même barrage.

La comparaison entre les allures des deux graphes nous conduit à dire qu'un assez bon rapprochement est obtenu entre les deux graphes.

C'est sur la base de ce constat que nous pouvons affirmer la validité du modèle numérique basé sur le schéma implicite.



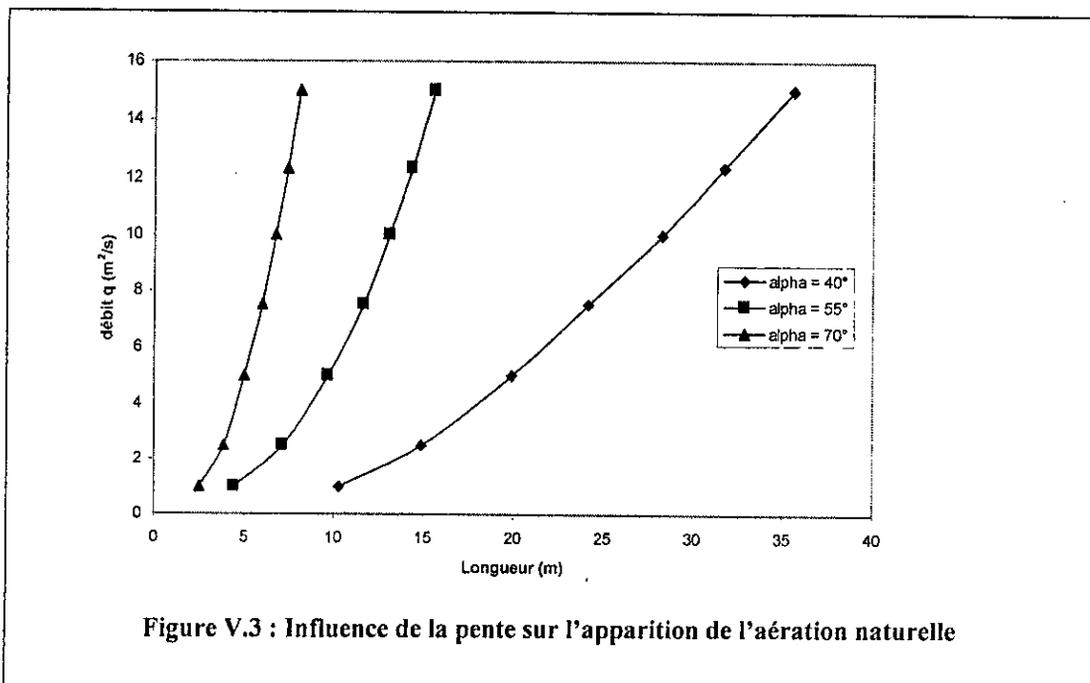
### V-3 INTERPRETATION DES RESULTATS

#### V-3-1 Paramètres influençant la localisation d'entraînement d'air

Le phénomène de turbulence est généré au voisinage de la couche limite qui se développe graduellement à partir du seuil du déversoir. Au moment où cette couche atteint la surface libre en un point appelé « point d'inception » la turbulence provoque une aération naturelle de l'écoulement qui rend l'eau bouillante et blanche.

- Influence de la pente

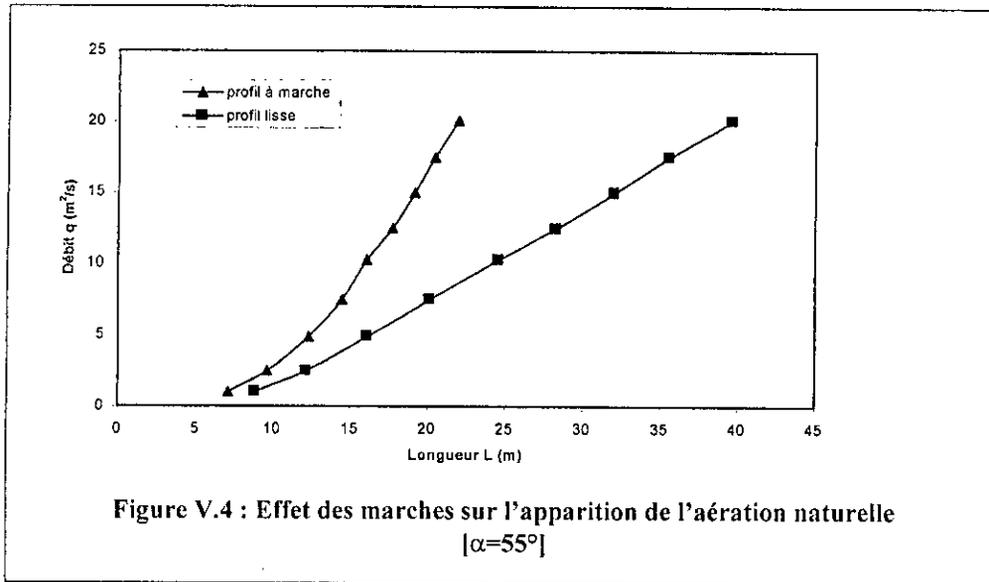
En vue de voir l'influence de la pente sur l'apparition du phénomène d'aération naturelle de l'écoulement, nous avons procédé à l'application du modèle de calcul au coursier de l'évacuateur de crues en marches d'escaliers du barrage de M'Bali en faisant varier la pente de  $[40^\circ - 70^\circ]$ .



La figure (V.3) montre bien l'effet important du changement de pente du coursier d'un évacuateur. En fait, on constate que le point d'inception s'éloigne vers l'aval au fur et à mesure que l'on diminue la pente du coursier.

- Effet de la marche

Pour voir l'effet de la marche sur l'apparition de l'aération naturelle, nous effectuons des expérimentations sur le modèle numérique validé, au coursier de l'évacuateur de crues du barrage M'Bali pour différents profils.



Sur la figure (V.4), on voit bien que les points d'inception dans le cas d'un évacuateur de crues en marches d'escaliers sont plus proche du seuil du déversoir que les points d'inception dans le cas d'un évacuateur de crues à profil lisse, alors la zone de l'écoulement aéré apparaît nettement plus rapprochée du seuil du déversoir pour le coursier en marches d'escaliers que pour le profil lisse, et par conséquent l'ouvrage est moins agressé par le phénomène de cavitation.

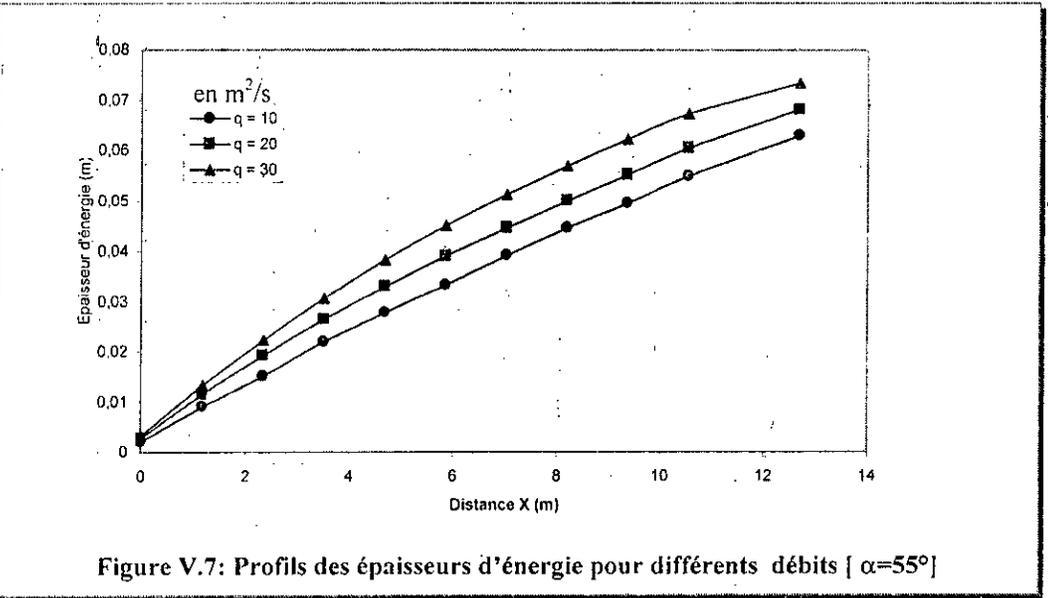
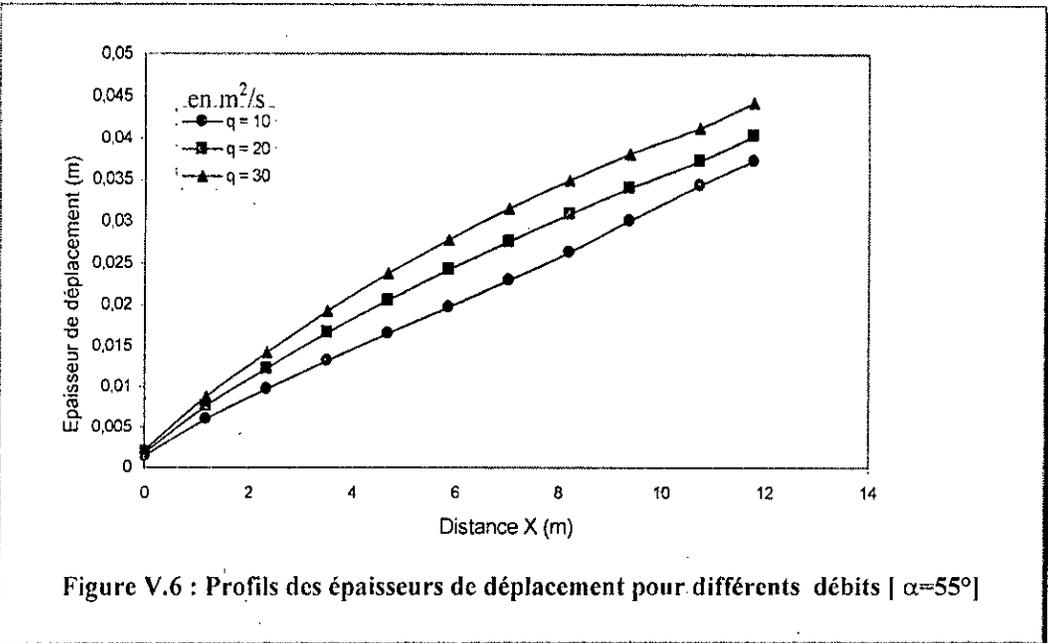
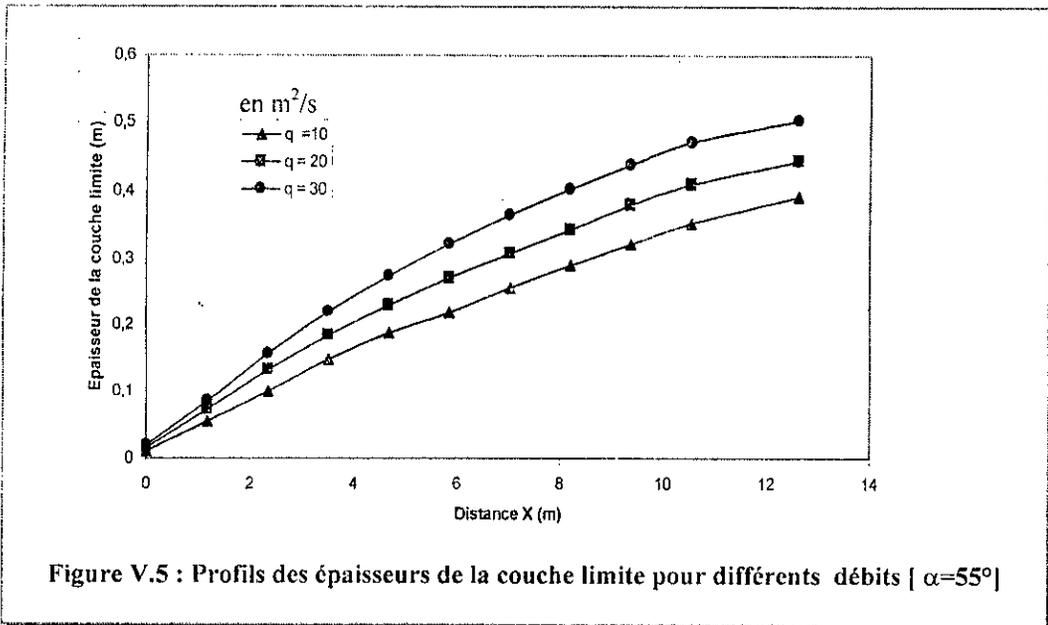
Ceci montre bien que les marches d'escalier favorisent et accélèrent le processus de l'aération naturelle de l'écoulement.

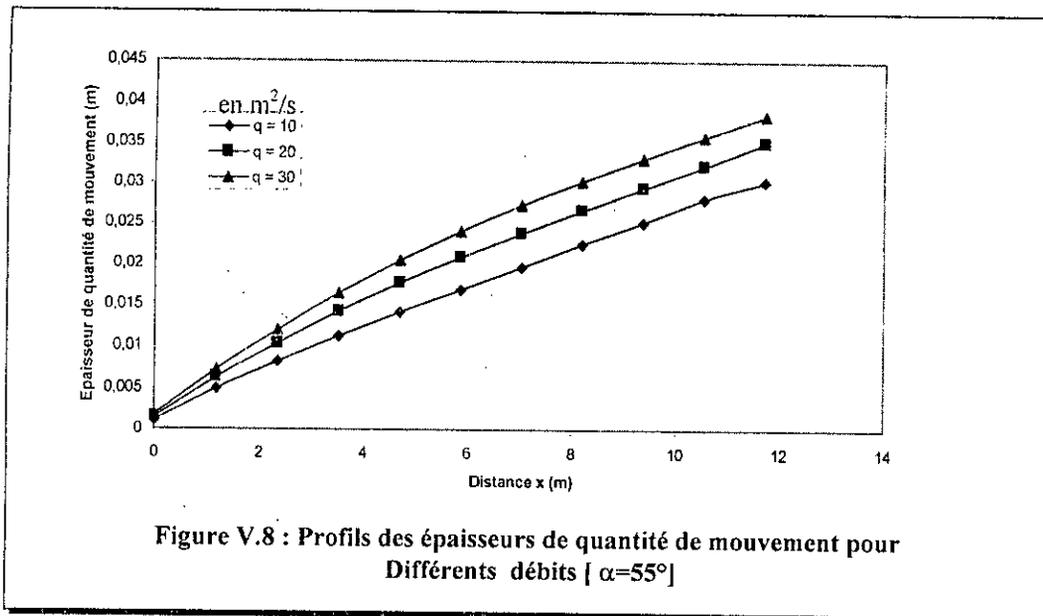
- Influence du débit

Sur les deux figures (V.3) et (V.4), on constate que la zone d'aération est d'autant plus éloignée du seuil du coursier que le débit est important. Egalement, on peut dire que le point d'inception s'éloigne vers l'aval proportionnellement à l'augmentation du débit.

### V-3-2 Influence du débit sur le développement de la couche limite

Les figures (V.5), (V.6), (V.7) et (V.8) représentent une série de graphes qui montrent l'évolution des différentes épaisseurs de la couche limite à savoir l'épaisseur de la couche limite, l'épaisseur de déplacement, l'épaisseur de quantité de mouvement et l'épaisseur d'énergie, pour différentes valeurs du débit résultant de l'application du modèle au coursier de l'évacuateur de crues en marches d'escaliers du barrage M'Bali.



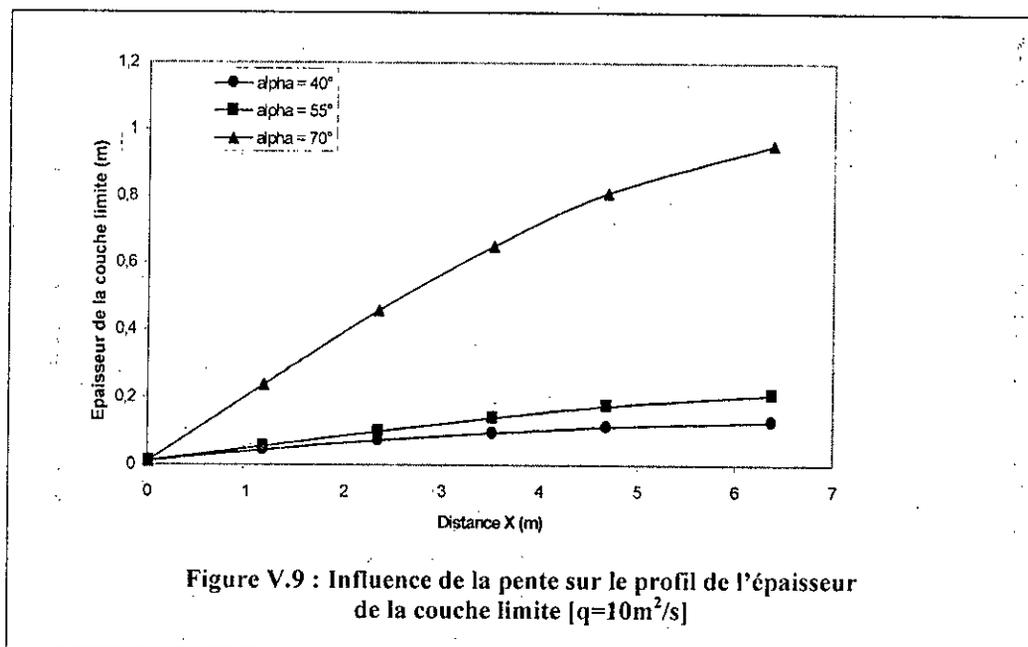


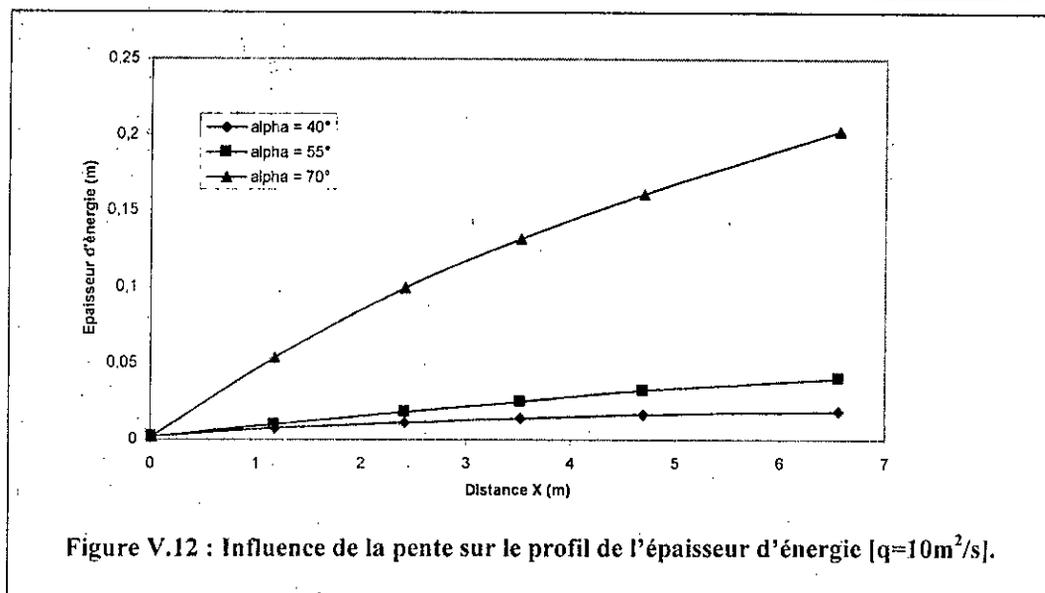
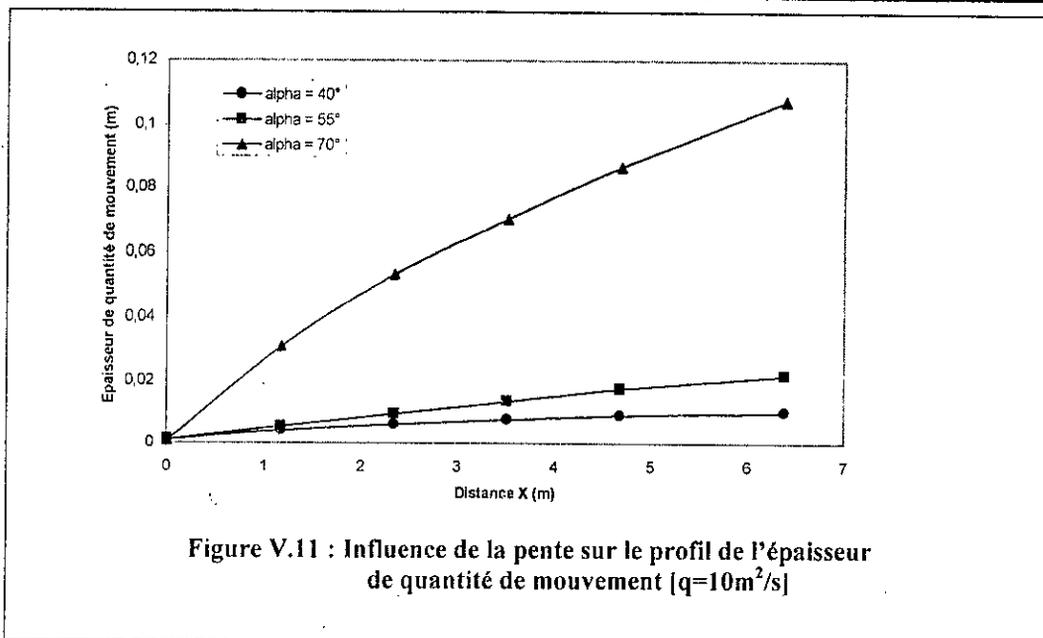
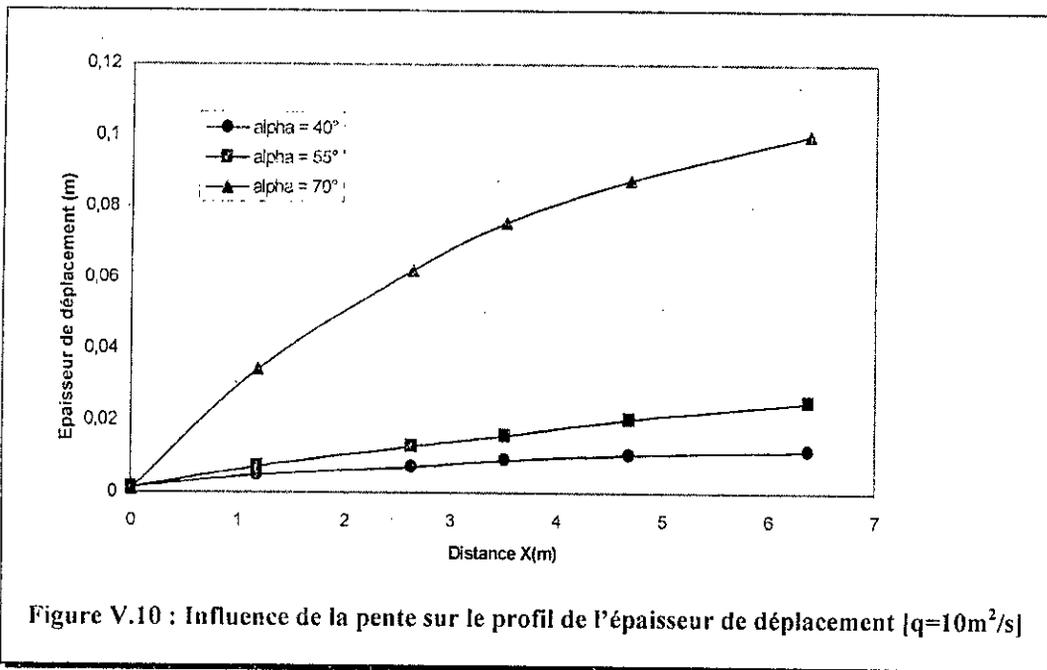
Les graphes mettent en évidence l'influence du débit sur le développement des différentes épaisseurs de la couche limite.

On remarque bien l'accroissement des épaisseurs de la couche limite proportionnellement à l'augmentation du débit.

### V-3-2 Influence de la pente du coursier sur le développement de la couche limite

Les figures (V.9), (V.10), (V.11) et (V.12) regroupent une série de graphes qui illustrent l'évolution des différentes épaisseurs de la couche limite, pour des pentes variant de [40° – 70°] résultant de l'application du modèle au coursier de l'évacuateur de crues en marches d'escaliers du barrage M'Bali.



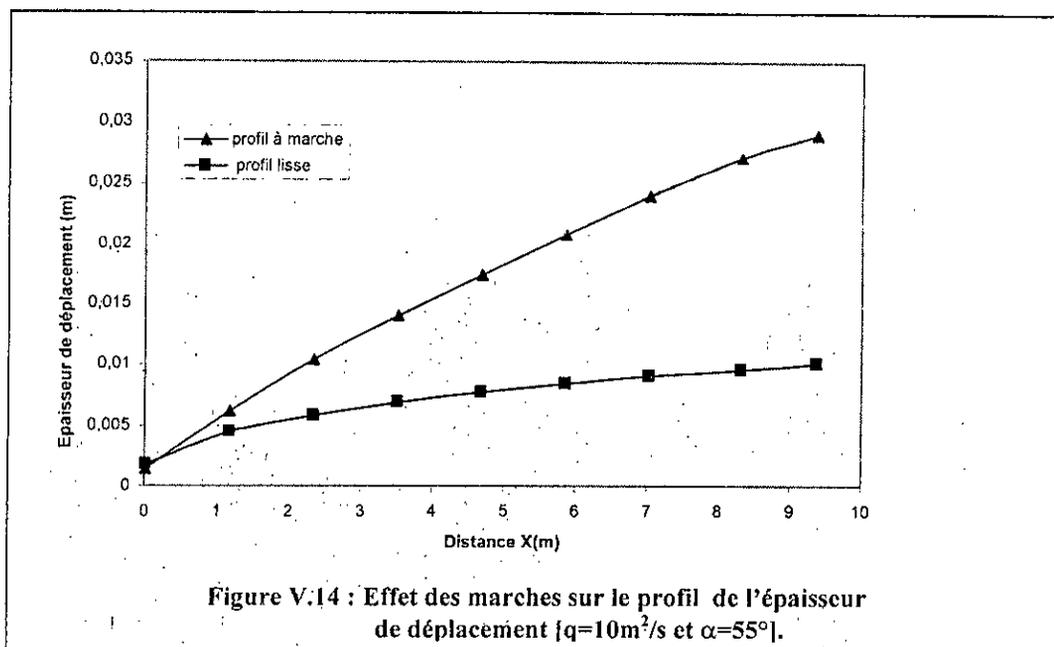
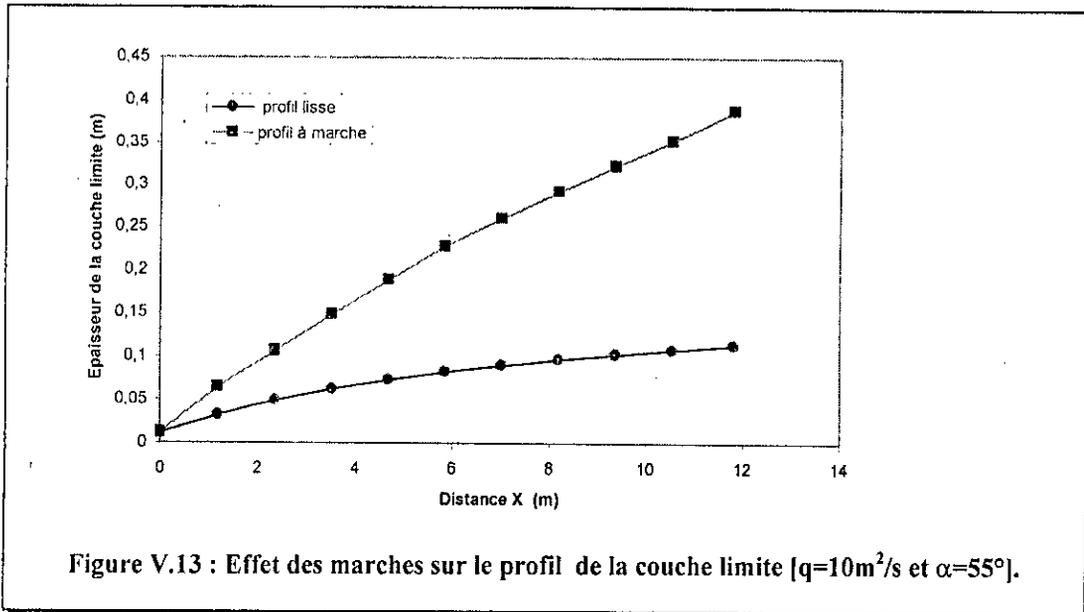


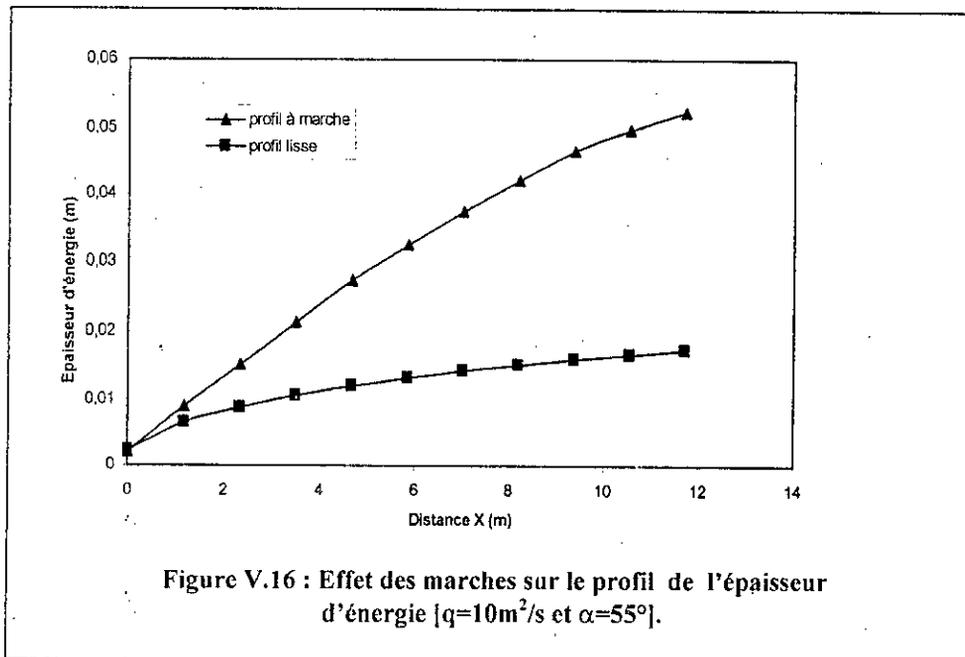
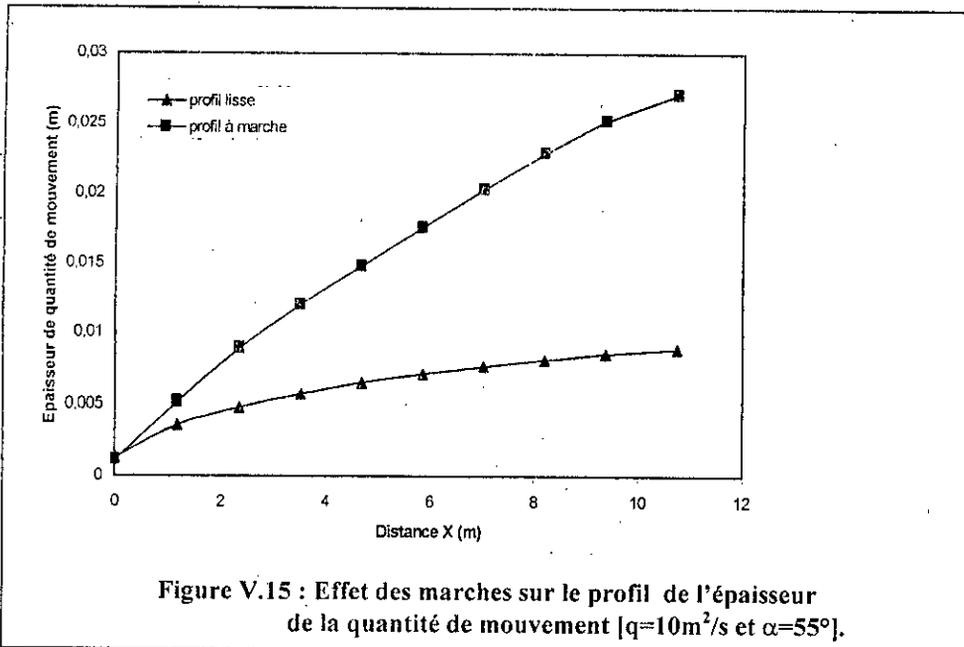
Les graphes montrent bien l'effet du changement de pente du coursier d'un évacuateur de crues sur le développement de la couche limite et ses épaisseurs.

On remarque bien l'accroissement des différentes épaisseurs de la couche limite proportionnellement à l'augmentation la valeur de la pente.

### V-3-3 Effet de la marche sur le développement de la couche limite

Les graphes (V.13), (V.14), (V.15) et (V.16) présentent l'influence des marches sur l'évolution de la couche limite et ses épaisseurs.





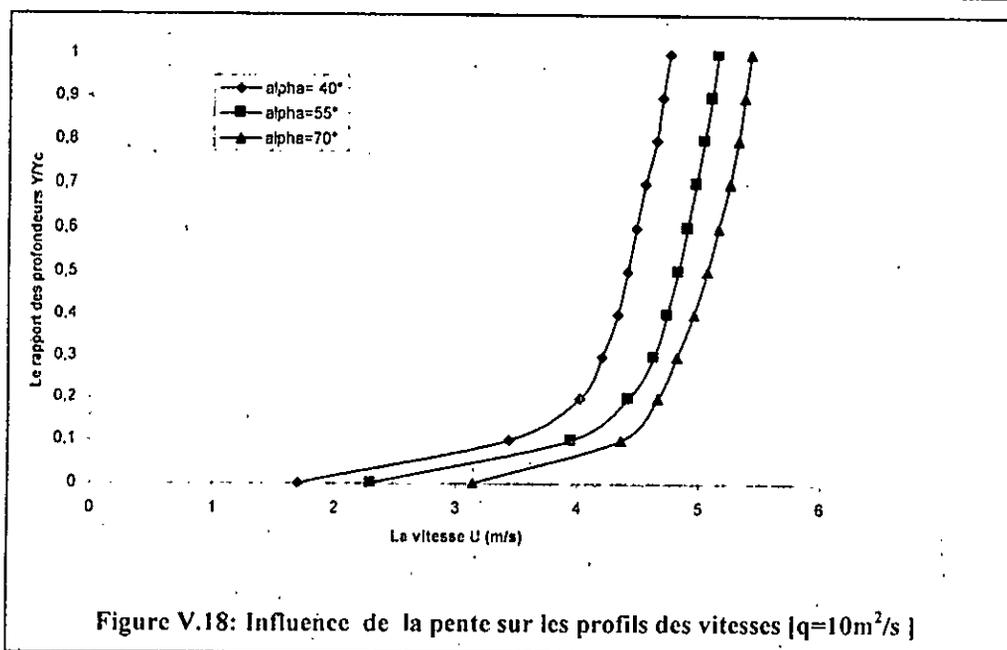
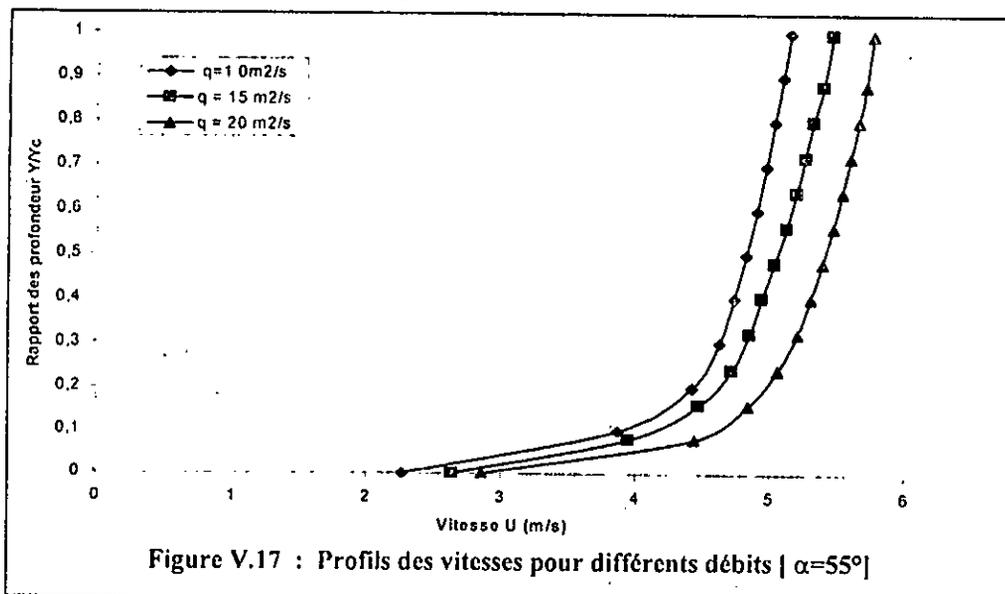
L'analyse des résultats permet d'affirmer que l'évolution de la couche limite et ses épaisseurs dans le cas d'un évacuateur en marches d'escaliers est plus rapide que dans le cas d'un évacuateur à profil lisse.

Chanson [7] indique que le taux de croissance de la couche limite sur les canaux en marches escaliers est approximativement 2.8 fois plus grande que sur les canaux à profil lisse.

#### V-3-4 Profils de la vitesse d'écoulement

En vue de voir l'influence du débit et du changement de la pente sur le profil de vitesse, nous avons procédé à l'application du modèle de calcul au coursier de l'évacuateur de crues en marches d'escaliers du barrage M'Bali en faisant varier la pente de  $[40^\circ - 70^\circ]$  et le débit suivant l'intervalle  $[10\text{m}^2/\text{s} - 20\text{m}^2/\text{s}]$ .

La figure (V.17) donne le profil de vitesse pour différents débits et la figure (V.18) donne le profil de vitesse pour différentes pentes.

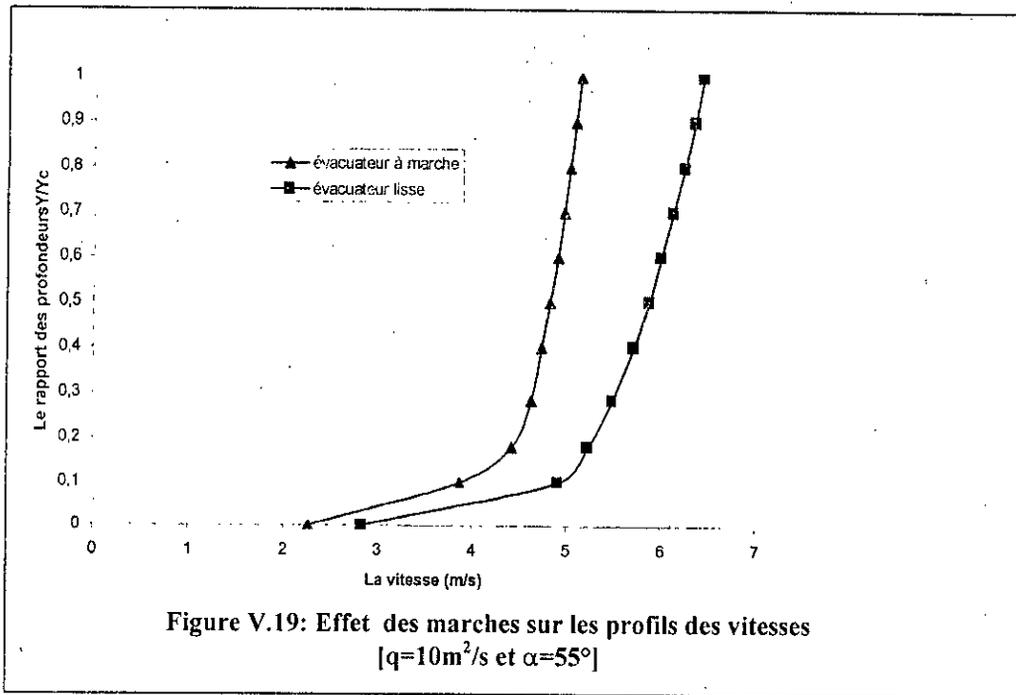


On remarque bien que

- L'augmentation du débit et de la pente conduit à l'augmentation de la vitesse.
- L'allure de la vitesse varie rapidement à proximité de la paroi et puis devient de plus en plus lente et tend asymptotiquement vers la vitesse de l'écoulement libre  $U_f$  lorsqu'on s'éloigne du fond.

Conformément à la théorie de la couche limite, on voit clairement qu'il existe au moins deux régions dans la couche, l'une près de la paroi est dominée par la viscosité c'est la région interne et l'autre loin de paroi où l'effet de la paroi tend à diminuer au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'écoulement libre, c'est la région externe.

La figure (V.19) donne le profil de vitesse dans le cas d'un profil lisse.

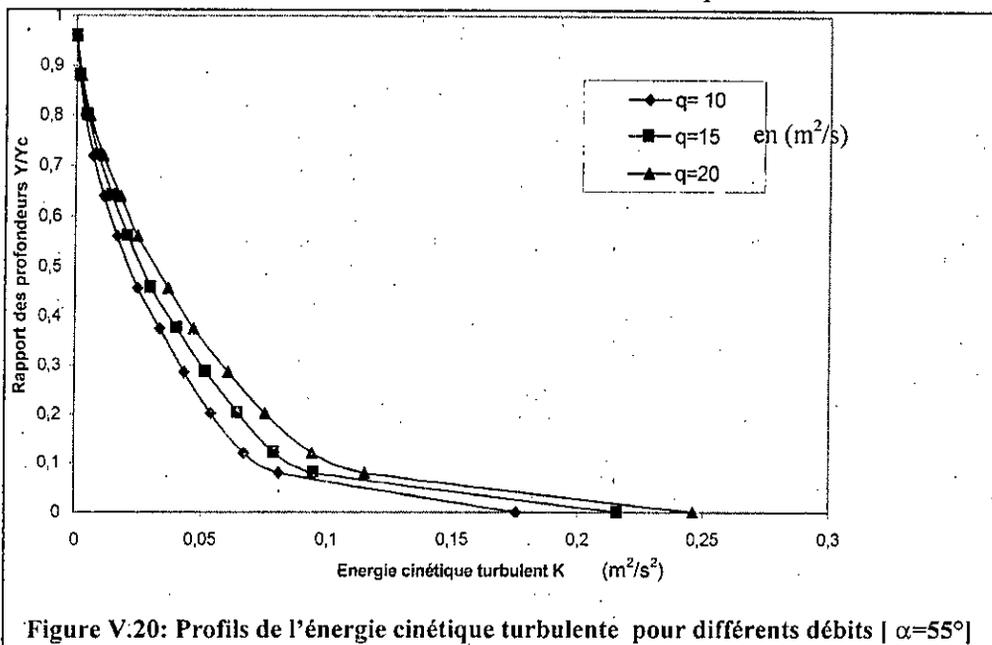


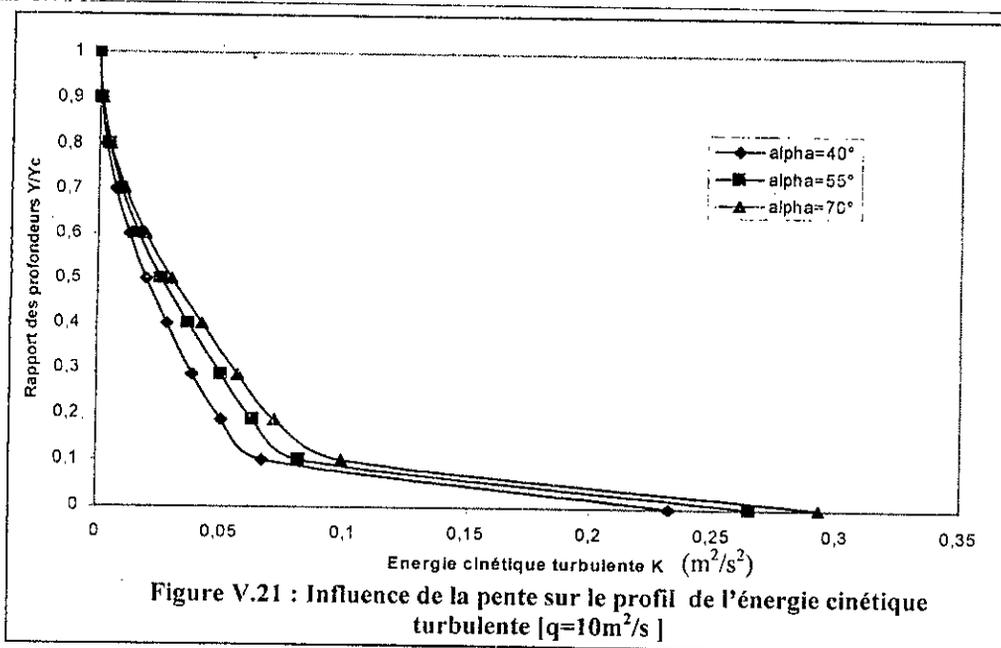
- Les valeurs de la vitesse dans le cas de profil lisse sont plus grandes que les valeurs de la vitesse dans le cas du profil en marches d'escaliers. Ceci revient à dire que les marches d'escaliers représentent une forme de frottement interne provoquant le retardement de l'écoulement.

### V-3-5 Profils de l'énergie cinétique turbulente

La figure (V.20) donne le profil de l'énergie cinétique turbulente pour différents débits et la figure (V.21) donne le profil de l'énergie cinétique turbulente pour différentes pentes.

Nous avons tracé les profils de distribution de l'énergie cinétique turbulente respectivement pour différentes valeurs du débit et différentes valeurs de la pente.

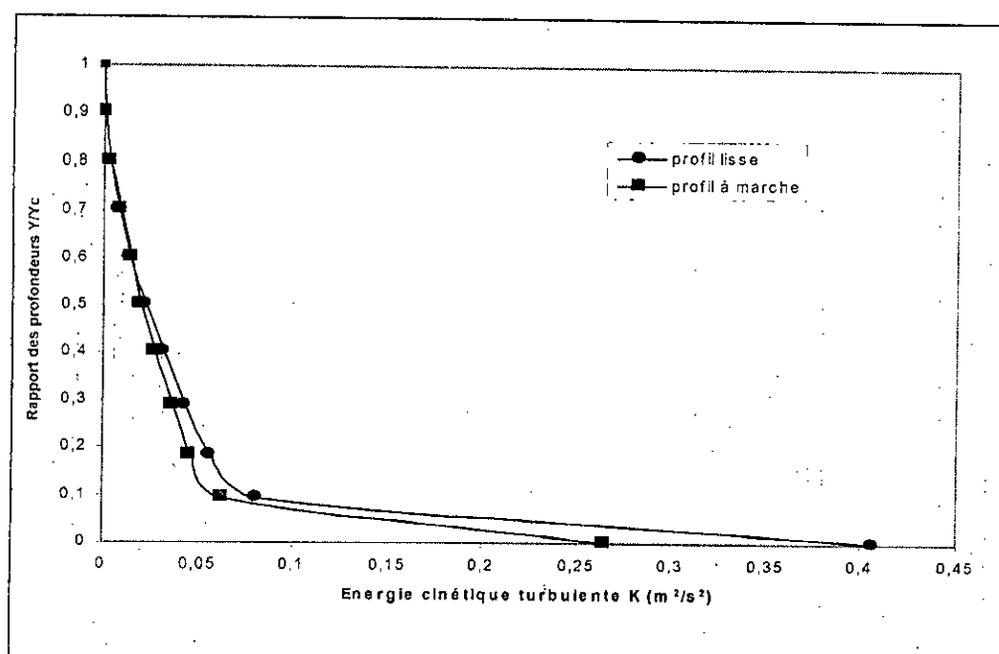




On observe que :

- Les allures générales des profils de distribution de l'énergie cinétique turbulente sont inversement proportionnelles aux distributions de la vitesse.
- Un décroissement rapide de l'énergie cinétique turbulente lorsque l'on s'éloigne du fond de l'ordre 10% à 20 % de l'épaisseur de la couche limite. Par la suite, le décroissement devient plus en plus lent tendant à s'annuler progressivement en se rapprochant de l'écoulement libre.

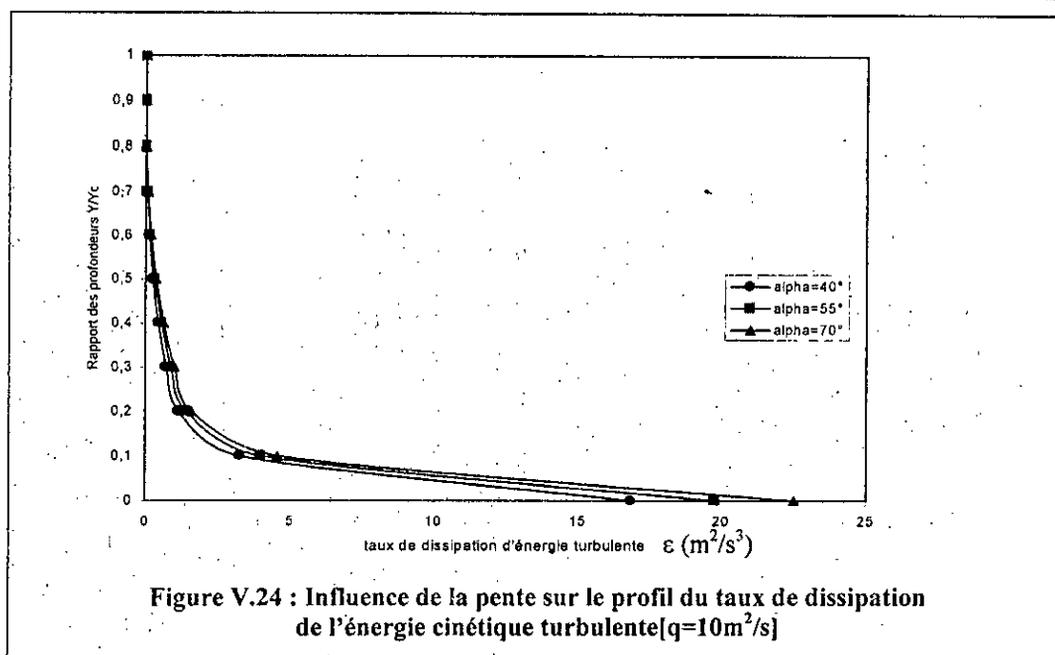
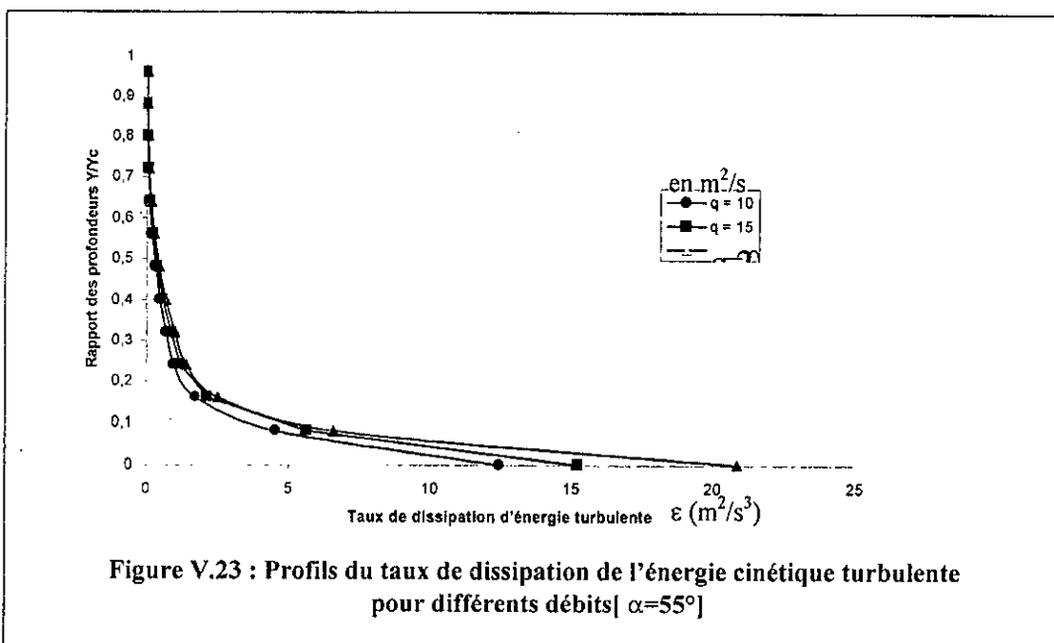
La figure (V.22) donne le profil de l'énergie cinétique turbulente pour le cas d'un profil lisse.



L'allure du profil de la vitesse dans le cas d'un évacuateur à profil lisse est au-dessus de l'allure du profil de la vitesse dans le cas d'un évacuateur en marches d'escaliers. Ceci explique clairement que la macro-rugosité constituée dans notre cas par des éléments en marches d'escaliers décélère le processus du phénomène de la turbulence.

### V-3-6 Profils du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente

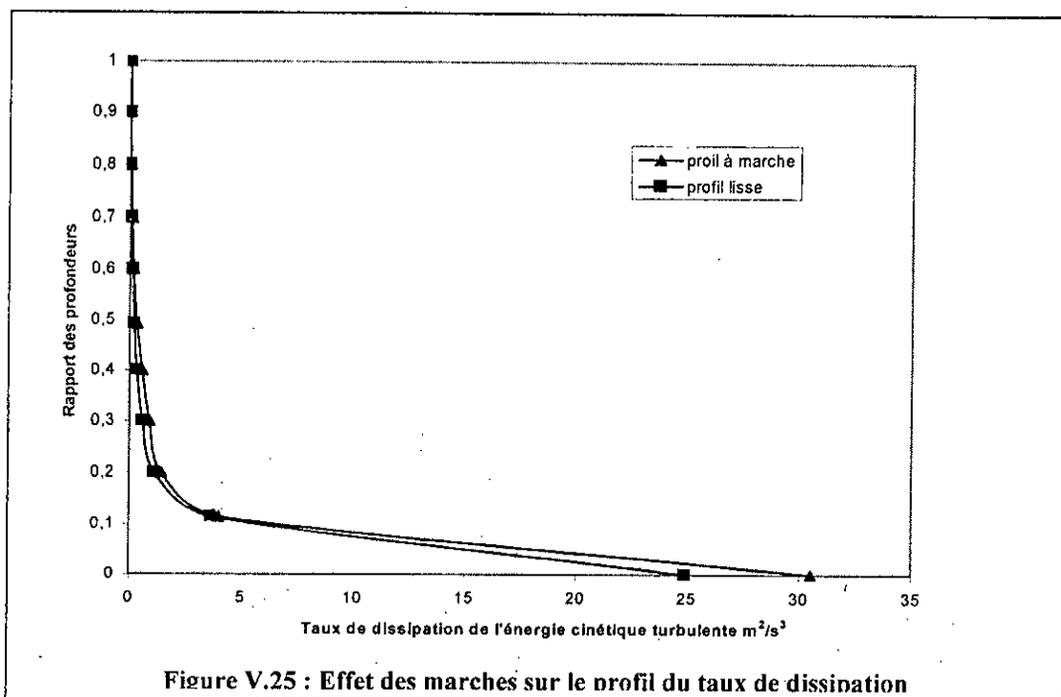
La figure (V.23) donne le profil du taux de dissipation l'énergie cinétique turbulente pour différents débits et la figure (V.24) donne le profil du taux de dissipation l'énergie cinétique turbulente pour différentes pentes.



Nous avons présenté le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente en faisant varier la valeur du débit et la valeur de la pente. Il y a lieu de relever d'abord que les allures générales des profils de distribution du taux de dissipation de l'énergie turbulente suivant l'épaisseur de la couche limite sont inversement proportionnelles aux distributions de la vitesse.

En fait, on enregistre les valeurs maximales au niveau de la pseudo-base à partir desquelles, les allures diminuent très rapidement jusqu'à certaines hauteurs de l'ordre de 16% à 20% de l'épaisseur de la couche limite pour la dissipation d'énergie turbulente. Par la suite, la variation devient de plus en plus lente tendant à s'annuler progressivement en se rapprochant de l'écoulement libre.

La figure (V.25) donne le profil du taux de dissipation l'énergie cinétique turbulente pour le cas d'un profil lisse.



Cette figure montre bien l'effet principal des marches sur l'écoulement. Le taux de dissipation dans le cas d'un évacuateur de crues en marches d'escaliers est plus grand que dans le cas d'un évacuateur à profil lisse.

## CONCLUSION

L'écoulement sur un évacuateur de crues ayant un profil lisse ou un profil en marches d'escaliers est un écoulement supercritique (grand nombre du Froude).

Cet écoulement comporte trois régions à savoir : la zone d'écoulement lisse, la zone d'écoulement graduellement variée et la zone d'écoulement uniformément aéré.

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés à la zone d'écoulement lisse qui apparaît au niveau de la partie supérieure du coursier de l'évacuateur et dans laquelle se développe une couche limite qui atteint la surface libre à l'endroit où le phénomène de l'auto-aération de l'écoulement est enclenché.

Dans cette zone, nous avons déterminé le développement de la couche limite, le développement de ses différentes épaisseurs et la localisation du point d'inception. Nous avons également déterminé le profil des variables de l'écoulement à savoir la vitesse, l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.

Les étapes principales que nous avons suivi pour obtenir tous ces profils sont :

- Elaboration d'un modèle mathématique régissant l'écoulement turbulent dans la couche limite dans un canal à forte pente. Ce modèle est basé sur les équations de REYNOLDS « l'équation de continuité et l'équation de la conservation de la quantité de mouvement ». Pour fermer le système d'équations, nous avons fait appel à un modèle de turbulence qu'est le modèle (k- $\epsilon$ ).
- La résolution du modèle mathématique a été faite à partir de la méthode des différences finies. L'utilisation de cette dernière, nous a imposé d'opérer une transformation de variables pour passer du domaine physique irrégulier à un domaine de calcul régulier.
- Validation de nos modèles numériques par la confrontation des résultats obtenus avec ces modèles à ceux de VERCHEVAL pour le profil en marches d'escaliers et ceux de KELLER pour le profil lisse. L'étude comparative nous a conduit à dire qu'il y a une concordance satisfaisante, notamment dans le cas du schéma implicite.
- Expérimentations numériques sur le profil lisse et sur le profil en marches d'escaliers en faisant varier la pente du canal et le débit.

Au vu des résultats que nous avons obtenu, nous avons tiré les conclusions suivantes :

- ✓ Le commencement de l'entraînement d'air est plus rapide dans le cas d'un profil en marches d'escaliers que dans le cas d'un profil lisse et par conséquent l'ouvrage est moins agressé par le phénomène de cavitation.

- ✓ Le point d'inception s'éloigne vers l'aval soit par l'augmentation du débit soit par la diminution de la valeur de la pente.
- ✓ L'accroissement de plus en plus important de la couche limite et de ses différentes épaisseurs est proportionnelle à l'augmentation du débit ou à l'augmentation de la pente.
- ✓ L'évolution de la couche limite et de ses épaisseurs dans le cas d'un évacuateur de crues en marches d'escaliers est plus rapide que dans le cas d'un profil lisse.
- ✓ L'allure de la vitesse est rapide à la proximité de la paroi et puis elle devient de plus en plus lente et tend asymptotiquement vers la vitesse de l'écoulement libre lorsqu'on va vers le fond.
- ✓ La marches d'escalier représente une forme de frottement interne provoquant le retardement de l'écoulement.
- ✓ Les formes générales des profils de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente sont presque similaires.

On enregistre des valeurs maximales au niveau de la pseudo base à partir desquelles les allures diminuent très rapidement jusqu'à certaines hauteurs de l'ordre de 10% à 20% de l'épaisseur de la couche limite pour l'énergie cinétique turbulente et de l'ordre de 16% à 24% de l'épaisseur de la couche limite pour la dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Par la suite, la variation devient de plus en plus lente tendant à s'annuler progressivement à la limite de l'écoulement libre.

Finalement, ce travail peut contribuer efficacement dans le dimensionnement optimal des dispositifs d'évacuation des eaux dans les barrages.

# BIBLIOGRAPHIE

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Baouche, Y. & Boukhercha, A. & Benmamar, S. (1999). «Etude d'un écoulement turbulent dans une conduite à motifs périodiques, modèle k- $\epsilon$  ». Mémoire d'ingénieur d'état, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, Algérie.
- [2] Benmamar, S. (1990). «Etude de la dissipation de la vitesse de l'écoulement d'un fluide dans un ressaut hydraulique noyé ». Thèse de Magistère, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, Algérie
- [3] Boumahrat, M. (1993). « Méthodes numériques appliquées » Edition OPU, Alger, Algérie.
- [4] Butte, J-N et Pichon .J
- [5] Carlier, M. (1986). «Hydraulique générale et appliquée ». Edition Eyrolles, Paris, France.
- [6] Chanson H.(1989) « Etude des phénomènes d'entraînement d'air, application aux évacuateurs de crues » Houille Blanche, N°6, Septembre.
- [7] Chanson, H. (1994) « Comparison of energy dissipation between nappe and skimming flow regimes on stepped chutes ». Journal of hydraulic research, volume 32, N°2, October
- [8] Chanson H (1998) « le développement historique des cascades et fontaines en gradins » Houille Blanche , N°7.
- [9] Chen C.L. (1991) « Unified theory on power laws for flow resistance » Journal of hydraulic engineering , Volume 117, N°3, Mars
- [10] Comolet.R ( ) « Mécanique des fluides expérimentales »
- [11] Cousteix, J (1989). « Turbulence et couche limite. Aérodynamique » Edition CEPADUES
- [12] David Apsley, Wen-Lih Chen, Michael Eschziner and Fue sanglien(1997) « simulation du décollement de couche limite par des modèles non linéaires de viscosité turbulente » Journal of hydraulic research, Volume 35, N°6
- [13] Djaroud Mourad, B Remini, Benmamar S (2001) « Etude Numérique des écoulements turbulents dans les évacuateurs de crues en marches d'escalier » Mémoire de magistère, U.S.T.B, Blida, Algérie
- [14] Esfahanien.V, Hejranfar.K and Sabetghadam.F (2001) « linear and non linear PSE for stability analysis of blasius boundary layer using compact scheme » Journal of fluids engineering , September, Volume 123.

- [15] Frédéric, V (1998) « Méthodes d'éléments finis stabilisée pour les équations de Navier-Stokes incompressibles avec conditions aux limites équivalentes » INRIA, Rapport de recherche, N°3480, Août.
- [16] Gafsi, M. & Benmamar, S. (1998). « Etude expérimentale des écoulements dans les canaux à motifs périodiques » Thèse de magistère, Ecole Nationale Polytechnique, Alger, Algérie.
- [17] Gangadharaih, T, & Negar, S. Lakshmana Rao and Kyathasandra seetharamiah (1970) « Inception and entrainment in self aeration Flows ». Journal of hydraulic division, July, Volume 96, N° HY 7.
- [18] Graf, W. H. (1993) « Hydraulique fluviale, écoulement permanent uniforme et non uniforme ». Tome 1, Edition Presse Polytechnique Romandes Lausanne, Suisse.
- [19] Henderson F.M. (1966) « Open channel flow ». The Mac Millan company, New York, U.S.A
- [20] Hug, M. (1975). « Mécanique des fluides appliquée ». Edition Eyrolles, Paris, France.
- [21] Kassoul, M. & Belorgey, M. (1999). « Turbulence générée par phénomènes de chasse des barrages ». Journal La Houille Blanche, N°3/4.
- [22] Keller, R.J. & Rastogi, A. K. (1975). « Prediction of flow development on spillways ». Journal of the Hydraulics Division , volume 101, N° HY 9, pp. 1171-1183.
- [23] Keller, R. J. & Rastogi, A.K. (1977). "Design chart for predicting critical point on spillways". Journal of the Hydraulics Division , volume 103, N°. HY12, pp. 1417-1429.
- [24] Kim, S. W. & Chen, Y. S. (1988). « A finite element computation of turbulent boundary layer flows with an algebraic stress turbulence model ». Comput. Math. App. Engin., volume 66
- [25] Klebenoff, D. S. (1953). « Characteristics of turbulence in a boundary layer with a zero pressure gradient ». National advisory Council for Aeronautic, TN3178.
- [26] Kranenburg , C. (1987). « Développement d'une couche limite turbulente à la surface libre d'un bassin soumis à un vent de terre ». Journal of hydraulic research Volume 25, N°1.
- [27] Lencastre, A. (1985). « Etat de connaissances sur le dimensionnement des évacuateurs de crue des barrages ». Journal La Houille Blanche, N°1.
- [28] Leduq, D., Perret, R (1988)
- [29] Midoux, N. (1993). « Mécanique et Rhéologie des fluides ». Edition Tec & doc, Paris, France.

- [30] Messaoudi, S. & Benmamar, S. (1996). «Etude de l'entraînement de l'air dans les écoulement à surface libre». Thèse de Magistère, E.N.P, Alger, Algérie.
- [31] Poll, D. I. A. & Walsh, S. A. & Gallagher, M. C. (1996). « On the effect of uniform suction on stability and transition in zero pressure gradient viscous incompressible flow » Aeronautical Journal, May.
- [32] Padet, J. (1991). "Fluide en écoulement : Méthodes et modèle ". Edition Masson, Paris, France, 359 pages.
- [33] Rein, M. (1998) . «Turbulent Open-Channel Flows Drop-Generation and self-aeration». Journal of hydraulic engineering, January, Volume 124, N°1.
- [34] Rai, S. P. (1986). «Sillages de paroi en présence d'un faible gradient de pression inverse». Journal of hydraulic research, Volume 24, N°5.
- [35] Song & Graf, W. H. (1996). «Velocity and Turbulence distribution in unsteady Open-Channel Flows». Journal of hydraulic engineering , March, volume 122, N°3.
- [36] Schiestel, R. (1993). « Modélisation et simulation des écoulements turbulents » Edition Hermès, Paris, France, 442p.
- [37] Sajjadi S.G. & Aldridge J.N. (1993). « Second-moment closure modelling of turbulent flow over sand ripples ». Proceeding of the 5<sup>th</sup> international symposium, September, Paris, France.
- [38] Schlichting, H. (1979). "Boundary layer theory." Edition McGraw-Hill Book Comp, seventh edition, New York, U.S.A.
- [39] Smakghi, N. & Benmamar, S. (1995). « Contribution par une approche analytique et numérique pour le calcul du point d'inception dans les évacuateurs de crues en marches d'escalier ».Mémoire d'ingénieur d'état, ENP, Alger.
- [40] Sinniger R.O. & Hager, W. H. (1989). «Construction hydraulique ». Edition Presse Polytechnique Romandes, Lausanne, Suisse.
- [41] Tachie, M. F. & Balachanda, R. & Bergestron, D. J. (2001). « Open channel boundary layer relaxation behind a forward facing step at low Reynolds numbers ». Journal of fluids engineering , September, Volume 123.
- [42] Tachie, M. F. & Balachanda, R and Bergestron, D. J. (2000). «Rough Wall Turbulent boundary layers in Shallow Open- Channel Flows ». Journal of fluids engineering, September, Volume 122.

[43] Urban Svensson, Patrik Andreasson (1989). «Simulation mathématique des transformations d'énergie dans des écoulements turbulents pleinement développés en canal ». Journal of hydraulic research Volume 27, N°3

[44] Vercheval, M. (1991). « Contribution à l'étude expérimentale de l'écoulement des évacuateurs à marches ». Thèse d'ingénieur en civil des constructions, Université de Liège, Belgique.

[45] Wood, I. & Ackers, P. & Lovless, J. (1983). «General method for critical point on spillways ». Journal of Hydraulic Engineering, volume 109, N°2, May.