Département Électronique
2ex

ecole nationale Polytechnique

these de fin d'études

CONTROLABILITE SUR LES SYSTEMES NON LINEAIRES

Proposé Par Mr GAUTHIER

Etudié Par Nessah a.madjid

Promotion de Janvier 831

28/81

TABLE DES MATIERES

../..

I N T R O D U C T I O N

INTRODUCTION.

Les systèmes non linéaires restent mal [illegible] développés. Cette situation de fait quoique explicable, constitue une lacune tant du point de vue étude théorique que pratique.

L'objectif fondamental de notre étude sur la controlabilité des systèmes non linéaires n'est pas d'acquérir seulement une somme de connaissances; définitions et résultats; mais surtout d'avoir une approche saine et une meilleure connaissance des systèmes non linéaires.

Ce qui nous a paru essentiel; c'est la façon d'éclairer les connaissances exposées; c'est pourquoi les théories ont été mises en ordre dégagent explicitement les bases du controle géométrique.

Nous espérons que ceux qui liront cette thèse, en retireront le bénéfice d'une conception globale sur la controlabilité des systèmes non linéaires.

Nous exprimons nos remerciements à Monsieur GAUTHIER qui nous a aidé de ses conseils et de ses connaissances.

N. MADJID.

CHAPITRE I

COMPLETE CONTROLABILITE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Rappel:

Rappel:

a) notion de système.

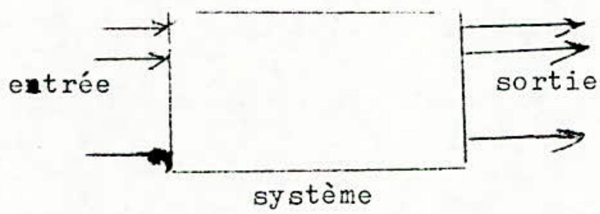
La formalisation de la notion de modèle conduit, naturellement à la notion de système.

Un système est un être abstrait, orienté.

- reçevant des excitations du milieu extérieur
- mémorisant de l'information
- emmagasinant de l'énergie

et destituant l'ensemble Information-Energie sous une forme déterminée.

Appelons "entrées" et "sorties" les signaux reçus et restitués on obtient alors le schéma suivant



<u>soient</u> :

U L'ensemble des valeurs des signaux d'entrée

Y L'ensemble des valeurs des signaux de sortie

T Un ensemble représentant le temps

Une façon de procéder consiste à considérer l'ensemble des couples entrée-sortie caractérisant le système c'est-à-dire l'ensemble des couples $U(to,t)$; $y(to,t)$ tel qu'il soit possible d'obtenir la fonction de sortie $y(to,t)$ lorsqu'on applique l'entrée $u(to,t)$ symboliquement ceci revient à écrire que le système est caractérisé par une relation S liant les fonctions $u(to,t)$ et $y(to,t)$, telle que.

$$S \left[u(to,t) \ , \ y(to,t) \right] = o$$

../..

Cette façon de procéder présente un gros inconvénient. Elle ne permet pas d'affirmer que l'application de la fonction u(to,t) à l'entrée du système, provoquera l'apparition du signal y(to,t) à sa sortie. Tout ce qu'il est possible d(affirmer c'est que y(to,t) peut être une sortie.

b) Notion d'état.

L'état à l'instant to d'un système représente l'ensemble des informations qu'il faut connaitre à cet instant pour pouvoir déterminer son évolution dans le temps lorsqu'on se donne des fonctions d'entrée u(to,t)

Par évolution il faut entendre "états futurs" et "sorties futures". La seule connaissance de u(to,t) ne permet pas de connaitre y(to,t) l'information supplémentaire nécessaire à sa détermination est par définition l'état du système à l'instant t.
Vu sous cet angle, l'état apparait comme l'ensemble des informations résumant le passé du système et comme un paramètre associé à l'ensemble des couples entrées-sorties

$$\{ u\,(to,t) \;;\; y(to,t) \}$$

c) Notion de variables d'état.

Les variables d'état sont des variables qui évoluent avec l'état du système et déterminent ainsi l'état du système à tout instant ti $\geq$ to
to = étant l'instant initial pris comme référence.

Dans le cas d'un réseau électrique, le choix naturel est de prendre comme variables caractérisant les énergies.

- les différences de potenriel aux bornes des capacités
- les courants dans les selfs

car les selfs et les capacités emmagasinent de l'Energie. et caractérisent ainsi l'Energie du système

.../...

Definition des systèmes non linéaires.

Rappelons qu'on appelle Systèmes linéaires les systèmes physiques représentés par les equations différentielles linéaires.

$$X = AX + BU$$

et que l'hypothèse de linéarité équivaut au principe de superposition qui peut s'énoncer :

a) Si $S_1(t)$ et $S_2(t)$ sont des réponses à deux entrées (qui ne sont pas nécessairement appliquées au même endroit au système) $e_1(t)$ et $e_2(t)$

La réponse à l'entrée $e_1(t) + e_2(t)$ sera $S_1(t) + S_2(t)$
c'est la propriété d'additivité

b) Dans le cas d'un système linéaire à une entrée e(t) et une sortie s(t) si la réponse du système à e(t) est s(t)
la réponse à l'entrée Ae(t) sera As(t) A étant une constante

c'est le principe de proportionalité des effets aux causes ou homogénéité.

Les systèmes non linéaires, par opposition aux systèmes linéaires sont des systèmes physiques qui ne sont pas régis par des équations linéaires. Autrement dit le principe de superposition ne s'applique pas.

$$\dot{X}1 = f1 (X1 \ldots\ldots Xu, \; u, \ldots\ldots up)$$

$$\dot{X}2 = f2 (X1 \ldots\ldots Xu) \; u, \ldots\ldots up)$$

— — — — — — — — — —

$$Xu = fn (X1 \ldots\ldots Xn, \; u1 \ldots\ldots up)$$

avec x1.......Xn = variables d'état du système
u1 ......up = entrées du système

.../...

Soit en notation matricelle

$$X = \begin{bmatrix} X1 \\ \vdots \\ Xn \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u1 \\ \vdots \\ up \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} f1 \\ \\ fn \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = F \ (X , U) \qquad \begin{array}{l} X \in R^n \\ U \in R^p \end{array}$$

x

ou F est une application de

$$R^n \times R^p \longrightarrow R^n$$

CONTROLABILITE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

INTRODUCTION.

Un système est décrit par l'équation différentielles

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad (1)$$

$X \in R^n$

$U \in R^p$

où la fonction de commande est définie par l'application qui associe à t la fonction u(t)

$$t : \longrightarrow u(t)$$

Commande optimale:

Dans la commande optimale, nous cherchons une fonction que nous désignerons et définirons comme la fonction de commande et qui nous permettra d'atteindre l'objectif désiré ... sujet à la minimisation ou à la maximisation.

par exemple :

- minimisation de l'erreur dans la position d'un objet
- minimisation du coût pour l'achèvement d'une entreprise
- maximiser un bénéfice.

L'économie peut porter sur des critères divers

par exemple

- l'énergie
- le coût
- le temps

etc...

.../...

Controlabilité des systèmes.

Définition.

on dit que le système

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x \in R^n$$
$$u \in R^p$$

est complètement controlable

si quelque soit la condition initiale $xi = xo$

et quelque soit l'état final désiré xf

il existe une application qui associe à t la fonction $u(t)$

$$t \longrightarrow U(t)$$

telle que l'unique solution correspondante de (1) de condition initiale $xi = xo$; prenne la valeur xf à l'instant T

Notre problème est le suivant :

- peut-on en agissant sur les entrées passer d'un état arbitraire $x(to)$ à un autre état arbitraire $x(tf)$

à la fin de ce chapitre on va énoncer et démontrer le résultat de Bonnard sur la controlabilité des systèmes non linéaires, ce résultat présente les avantages suivants :

- c'est qu'il permet d'obtenir sur le problème précis du contrôle de l'attitude d'un satellite une solution qu'il n'est pas possible d'obtenir par linéarisation.
- il généralise d'une façon simple et naturelle plusieurs résultats qui se trouvaient dans la littérature.
- sa démonstration illustre trés bien ce que sont les techniques de base du contrôle "géométrique".

Controle de l'attitude d'un satellite:

L'attitude d'un satellite est la position qu'il occupe par rapport à un repère fixe passant par son centre de gravité .

Si on choisit un repère orthonormé

Si le repère lié au satellite est lui aussi orthonormé on passe de l'un à l'autre par une matrice orthogonale notée $R(t)$

.../...

Si nous supposons de plus que le repère lié au satellite est un repère principal d'inertie.

Les principes fondamentaux de la mécanique du solide nous conduisent aux équations suivantes

(C) $$\frac{dR}{dt} = S(\omega) \quad R(t)$$

(D) $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w1 \\ w2 \\ w3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_1 w2\, w3 & + & F1 \\ a2w1w3 & + & F2 \\ a3\, w1\, w2 & + & F3 \end{matrix} \qquad S(w) = \begin{pmatrix} o & w3 & -\omega 2 \\ -w3 & o & w1 \\ w2 & -w1 & 0 \end{pmatrix}$$

le système (D) est obtenu en appliquant le théorême du moment cinétique

$$\frac{d\overline{W}}{dt} = M_g^t\ \overline{f}$$

qui exprime que la dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un point fixe d'un solide en mouvement est égale à chaque instant au moment par rapport à ce point fixe de la résultante des forces qui agissent sur le solide.

MOMENT DYNAMIQUE.

Le point G étant fixe

pour calculer le moment dynamique, nous allons considérer le repère R_1 d'origine G lié au solide; dont les axes coincident avec les axes principaux d'inertie.

désignons par (u1, j1, k1) les vecteurs de base de R1 , soit R le référentiel par rapport auquel on définit le mouvement du solide puisque le repère R_1 est lié au solide.Sa vitesse d'entrainement (we =ω) coincide avec la vitesse instantannée de rotation ω du solde.

désignons par (p, q, r) les composantes de ω dans R_1 nous aurons

$$\overrightarrow{w} = p\,\overrightarrow{i1} + q\overrightarrow{j1} + r\,\overrightarrow{k1}$$

Par ailleurs dans R_1 le tenseur d'inertie a pour composantes les trois moments d'inerties principaux A, B , C du solide d'où l'expression du moment cinétique

$$\overline{\sigma} = A\,p\,\overrightarrow{i1} + B\,q\,\overrightarrow{j1} + C\,r\,\overrightarrow{k1}$$

.../...

Puisque les trois moments d'inerties principaux sont constants dans le repère lié au solde on obtient ainsi les composantes du moment dynamique dans le repère mobile k1.

Nous aurons $\frac{d\sigma}{dt} = M_g^t (F)$

$$A\dot{p} + (c - B)\, qr = 1$$
$$B\dot{q} + (A - C)\, rp = M$$
$$C\dot{r} + (B - A)\, pq = N$$

d'où

$$A\dot{p} = (B-C)qr + L = BC \left(\frac{B-C}{BC}\right) qr + L$$

$$B\dot{q} = (C-A)\, rp + M = AC \left(\frac{C-A}{AC}\right) rp + M$$

$$C\dot{r} = (A-B)\, pq + N = AB \left(\frac{A-B}{AB}\right) pq + N$$

<u>Notations</u>:

Désignons :

- les composantes du moment cinétique par :

$$W = \begin{matrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{matrix} = \begin{matrix} w1 \\ W2 \\ w3 \end{matrix}$$

- Le moment desforces extérieures

$$M_g^{t\,F} = \begin{matrix} L \\ M \\ N \end{matrix} = \begin{matrix} F1 \\ F2 \\ F3 \end{matrix}$$

Le rapport des moments d'inertie :

$$a1 = \frac{B-C}{BC}$$

$$a2 = \frac{C - A}{AC}$$

$$a3 = \frac{A- B}{AB}$$

.../...

En remplaçant dans (k) on obtient le système d'équation (D), l'équation D est une équation dynamique, elle décrit le mouvement du vecteur instantanné de rotation (dans le repère lié au satellite)
le mouvement du satellite est lié à (w1, w2 , w3) par (C)

$F \begin{pmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \end{pmatrix}$ = représente le moment des forces extérieures appliquées au satellite (dans le repère lié au satellite)

Si de plus les fusées sont couplées, il est raisonnable de modeliser un tel dispositif par les équations :

$$F = U \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} \qquad U \in \{ -1, o, 1 \}$$

Les valeurs de U montrent que la fusée a deux régimes de marches possible:

- l'action
- le repos

On pourrait trés bien considérer que toutes les valeurs de l'intervalle $\{-1, 0, +2\}$ sont possibles. Il existe des dispositifs qui permettent de moduler la poussée, par contre le fait de supposer U borné, donc la poussée bornée est tout à fait réaliste.
Si nous disposons de p dispositifs de ce type, nous aurons le système suivant :

$$(D) \qquad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} w1 \\ w2 \\ w3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a1\ w2\ w3 \\ a2\ w1\ w3 \\ a3\ w1\ w3 \end{matrix} + \sum_{i=1}^{p} ui \begin{pmatrix} b^i_1 \\ b^i_2 \\ b^i_3 \end{pmatrix} \quad u \in \{-1, o, +1\}$$

$$(C) \qquad \frac{dR}{dt} = S\ (w) \quad R\ (t)$$

Les méthodes qui vont suivre seront appliquées uniquement à la contro-labilité du système (D) c'est à dire aux équations dynamiques, mais elles peuvent être appliquées avec le même succés aux équations complètes (c)+(D)

Un satellite est un objet beaucoup plus complexe que le modèle qu'en est donné par les equations du mouvement de rotation d'un solide autour de son centre de gravité.
Un satellite n'est pas rigide, il évolue dans un milieu stochastique.
D'autres techniques de stabilisation comme les roues de réaction conduisent à des equations beaucoup plus compliquées.

.../...

Leslimites de techniques de linéarisation.

Pour montrer en tulisant les techniques de linéarisation que le système

$$(D) \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w1 \\ w2 \\ w3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a1 \ w2 \ w3 \\ a2 \ w1 \ w3 \\ a3 \ w1 \ w2 \end{matrix} + U \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} \qquad U \in \{-1, o, +1\}$$

est complètement controlable. La seule méthode qu'il faut envisager est la suivante :

Recouvrir l'espace d'un certain nombre d'ouverts à l'intérieur desquels le système est complètement controlable, puis recoller le tout.

Le seul résultat dont nous disposons est le théorême de Lee Markus.

Rappel:

On appelle recouvrement ouvert d'un espace topologique E une famille R d'ouverts de E

Telle que tout élément x de E appartienne au moins à un élément de R.

Théorême de Lee MARKUS.

Soit le système $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$ $\quad x \in R^u$, $u \in R^p$

tel que $f(o, o) = o$

notons $A = \frac{\partial f}{\partial x}(o,o)$ $\qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}(o,o)$

Alors si le système linéaire

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

est complètement controlable, il existe un voisinage de l'origine sur lequel le système non linéaire est controlable.pour appliquer un tel résultat au système (D) au voisinage de (w1 w2 w3)

il faut qu'il existe une valeur u^o de u tel que

$$a1\ w^\circ 2\ \ w^\circ 3 = -u^\circ\ b1$$
$$a2\ w^\circ 1\ w^\circ 3 = -u+\ b2$$
$$a3\ w^\circ 1\ w^\circ 2 = -u^\circ b3$$

Ce qui n'est possible que pour certaines valeurs de u, c'est possible en particulier pour le cas

$$w^\circ 1 = o \quad w^\circ 2 = o \quad w^\circ 3 = o \qquad u^\circ = o$$

.../...

Mais dans ce cas la patrice jacobienne

$$\frac{df}{dw}\ (o\ ,\ o\ )$$

qui est la dérivée partielle de

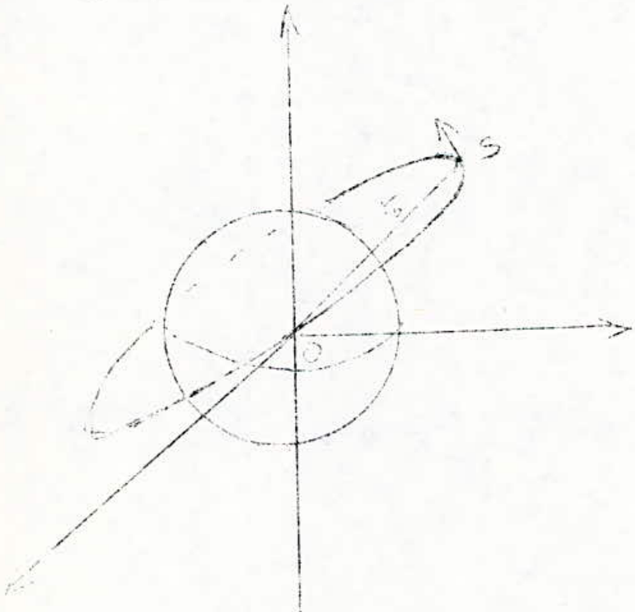
$$W1\ \ W2\ \ W3 \longrightarrow \begin{pmatrix} a1\ w2\ w3 \\ a2\ w1\ w3 \\ a3\ w1\ w2 \end{pmatrix}$$

est égale à
$$\begin{pmatrix} 0 & a1\ w3 & a1\ w2 \\ a2\ w3 & 0 & a2\ w1 \\ a3\ w2 & a3\ w1 & 0 \end{pmatrix}$$

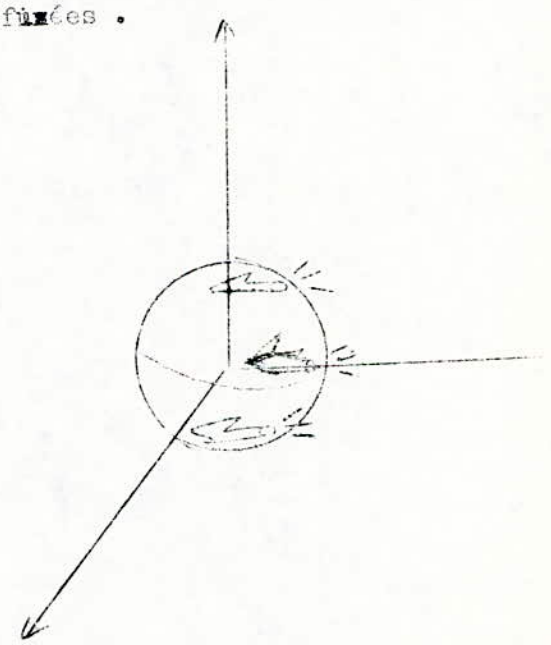
qui est nulle à l'ori ine.

le théoreme de permet pas de montrer que le systeme (D) est localement controlable à l'ori ine .

Dans un satellite artificiel destine à l'etude de la haute atmosphere un dispositif de retrofusées fixé au satellite et dont le fonction est la propulsion du satellite à une certaine vitesse.les moments des forces exterieures sont crées par ces retrofusées .



O X Y Z triedre de reference .



G X1 Y1 Z1 triendre lie au satellite

Theoreme de Bonnard :

Sur les controlabilité des systemes:

Quelques definitions:

Soit $X : R^n \longrightarrow R^n$

Une application de classe C^∞ ou indefiniment differentiables de R^n dans lui même à cette application on peut associer l'equation differentielle .

$$\frac{dx}{dt} = X(x)$$

$X(x)$ = represente un vecteur vitesse

pour rappele qu'un application de R^n dans R^n peut etre considerée comme une equation differentielle . On l'appellera "Champ de vecteur"

Definition :

On appelle champ de vecteur une application differentiable de R^n dans lui même .

le crochet de lie de deux champs de vecteurs .

$$X : R^n \longrightarrow R^n$$

$$Y : R^n \longrightarrow R^n$$

est un nouveau champ de vecteur note $[X,Y]$

$$(X,Y) \longrightarrow [X,Y](x)$$

defini par la relation :

$$[X,Y](x) = DX\Big|_x Y(x) - DY\Big|_x X(x)$$

Où : DX_x et DY_x designent les matrices jacobiennes de X et Y au Point x

Ex: On considere dans R^3

$$X(x1\ x2\ x3) = \begin{pmatrix} x1 \\ x1\ x2 \\ x1\ x2\ x3 \end{pmatrix}$$

$$Y(x1\ x2\ x3) = \begin{pmatrix} I \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$$

le crochet de lie de X,Y est égale à:

$$X , Y (x1\ x2\ x3) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ X2 & X1 & 0 \\ X2\ X3 & X1\ X3 & X1\ X2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X2 \\ X3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ X1\ X2 \\ X1\ X2\ X3 \end{pmatrix}$$

Proprietes du Croc'et de lie / Le croc'et de deux c'amps de vecterus est un nouveau c'amp de vecteurs .

-L'opration croc'et definit sur l'ensemble des champs de vecteurs de R^n une loi de composition interne.

-l'Espace vectoriel des c'amps de vecteur plus la loi de croc'et constituent l'Al'ebre de lie.

- La loi croc'et n'est pas associative.

- Le crochet de lie verifie l'indentité de Jocobi.

$$\left[\left[X,Y\right] Z\right] + \left[\left[X,X\right], Y\right] + \left[\left[Y,Z\right], X\right] = 0$$

et l'identit suivante: $\left[X , Y\right] = - \left[Y , X\right]$

Partant d'une famille de champs de vecteurs:

$$L = \left\{ X^i , i = 1, P \right\}$$

On s'interesse à tous les crochets qu'on peut fabriquer à partit de cette derniere ,en faisant d'eventueclles combinaisons lineaires.

On desigue par : $L (L)$

l'Algebre de lie engendre par la famille L

Definition :

Le rang au point x d'une famille L de champs de vecteurs est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les valeurs en X est elements de l'Algebre de lie engendrée par L.

$$R\left\{L (L)\right\}(x) = \dim\left\{L\left(X ; X \quad L (L)\right)\right\}$$

Soit X un champ de R^n

un point x de R^n est dit poisson stable pour X.

Si pour tout voisinage U(x)de x et et tout reel $T > 0$

il existe : $t_+ \geq T$ $t_- \leq T$

Tels que : $\exp_{(x)} (t+x) \in U(x)$ $\exp_{(x)} (t-X) \in U(x)$

l'ensemble des voisinages d'un point x s'appelle filtre des voisinages de x et sera noté V (x)

les voisinages d'un point x possédent les proprietés suivantes:

I°)- Tout voisinage de x contient x .

2°)- Tout ensemble contenant un voisinage de x appartient à V (x)

3°)- Toute intersecton finie de voisinages de x appartient à V (x)

4°)- Si $V \in V(x)$ il existe $W \in V(x)$ tel que pour tout $Y \in W$ $V \in V(y)$

Si l'on considere le champs de vecteur lineaire.

$$X \longrightarrow X(x) = ax$$

la solution du systeme .

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax. \\ X(o) = xo. \end{cases}$$

est donnée par .

$$XO\, e^{tA} = xo \exp t A = Xo \exp (tx)$$

par extension de notation ;

On note X exp (tx)

la valeur à l'instant t de l'unique solution du probleme de

<u>Cauchy:</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x) \\ x(o) = xo \end{cases}$$

Teoreme de Bonnard :

On considere sur R^n le systeme .

(1) $$\frac{dx}{dt} = X(x) + \sum_{i=1}^{p} ui\, Y^i(x) \qquad ui \in \{-1;0;1\}$$

On suppose que les points poisson stables du champ X. sont partout denses. Une condition necessaire et suffisante dans le cas analyatique pourque (1) soit completement controlable est que le ran .

$$R\left(L\{X;Y^i \quad i=1.............. P\}\right)(x)$$

l'Algebre de lie engendrée par les champs X et Y^i, i = 1...... P soit égale à n en tout point x de R^n.

-o-o-o-

Soit un sous ensemble $F \subset E$.

On dit que F est dense sur E si :

$$\forall x \in E \quad \forall V(x) \qquad V(x) \wedge F \neq \emptyset$$

Application du theoreme :

de Bonnard au systeme :

soit le systeme :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} W1 \\ W2 \\ W3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a1\ W2\ W3 \\ a2\ W1\ W3 \\ a3\ W1\ W2 \end{matrix} + U\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} \qquad U \in \{-1; 0\ ; +1\}$$

est de la même forme que (1) avec:

$$X\ (W1\ X2\ W3\ ) = \begin{pmatrix} a1\ W2\ W3 \\ a2\ W1\ W3 \\ a3\ W1\ W2 \end{pmatrix} \qquad Y\ (w1\ w2\ w3) = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$$

Les points poisson stables de X sont partout danses

En effet :

l'equation d'Euler :

$$\frac{dM}{dt} = \left] M\ ; \Omega \right[+ N$$

possède deux integrabes premieres quadratiques .

$$2E = \frac{M_1^2}{I_1} + \frac{M_2^2}{I_2} + \frac{M_3^2}{I_3} \qquad \text{et } M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$$

E est invariant en vertu de la loi de conservation de l'Energie M^2 également en vertu de la loi de conservation du moment M

Puisque $M^2 = M^2 = M^2$

Donc : M est situe sur l'intersection d'un ellipsoide avec une sphere etudions l'allure des courbes d'intersection ;pour cela fixons l'ellipsoide E>o et faisons varier le rayon M de la sphere fig (1)

Supposons pour fixer les idees que $I_1 > I_2 > I_3$.
les demi axes de l'ellipsoide seront :

$$\sqrt{2EI_1} > \sqrt{2EI_2} > \sqrt{2EI_3}$$

-Si le rayon M de la sphere est inferieur au demi petit axe ou superieur au demi grand axe ($M < \sqrt{2EI_3}$ ou $M > \sqrt{2EI_1}$) alors l'intersection est vide et aucun mouvement ne corespond à ces valeur de E et M

-Si le rayon de la sphere est égal au demi petit axe $M = \sqrt{2EI_3}$ alors l'intersection est composée de deux points .

-Lorseque le rayon augmente $\sqrt{2EI_3} < M < \sqrt{2EI_2}$ on obtient deux courbes autour des extermités du demi petit axe.

-Si le rayon de la sphere est égal au demi grand axe $M = \sqrt{2EI_1}$ on obtient les deux extermités du demi grand axe.

-Si le rayon est le erement inferieur on obtient deux courbes fermées au voisinage de ces extremitées .

-Si $M = \sqrt{2EI_2}$. Alors l'intersection est constituée de deux cercles.

Chacun des six extermités des demi axe de l'ellipsoide est une trajectoire des equations l'Euler : Une position stationnaire du vecteur M.Il lui corresond une valeur constante du vecteur vitesse angulaire qui a même support et même sens que l'un des axes d'inertie ei de plus Ω et M restent tout le temps colineaires.

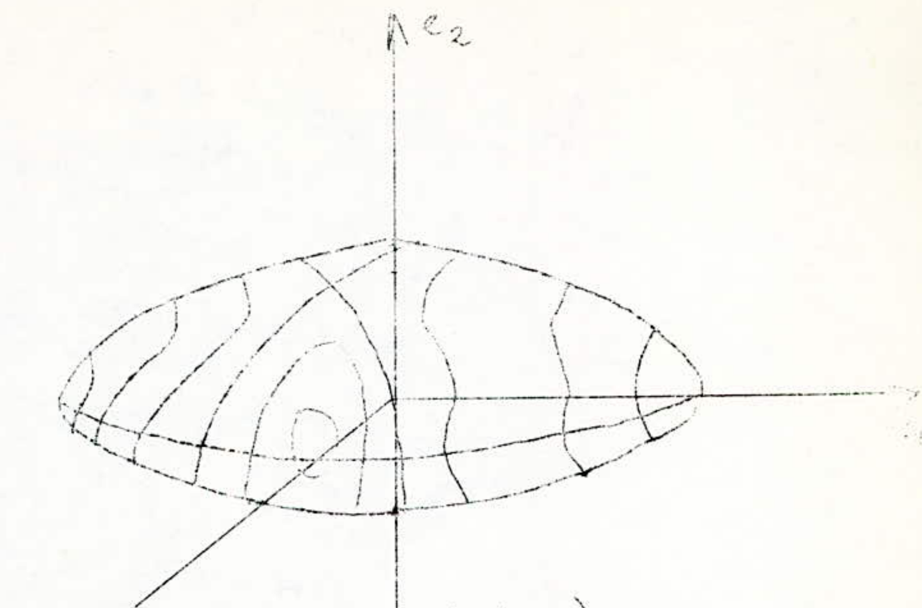
Donc le vecteur vitesse angulaire reste colineaire à M : le solide tourne à une vitesse angulaire constante autour d'un axe d'inertie ei fixe par rapport à l'espace .

Etudions maitenant le stabilite des solutions stationaires de . L'equation d'Euler (au sens de Liapounov)

Theoreme : les solutions stationnaires $\vec{M_1} = m_1 \vec{e_1}$ et $\vec{M_3} = m \vec{e_3}$ de l'equation d'Euler correspondant au grand et au petit axe d'inertie sont stables; la solution correspondant à l'axe moyen $\vec{M_2} = m \vec{e_2}$ est instable.

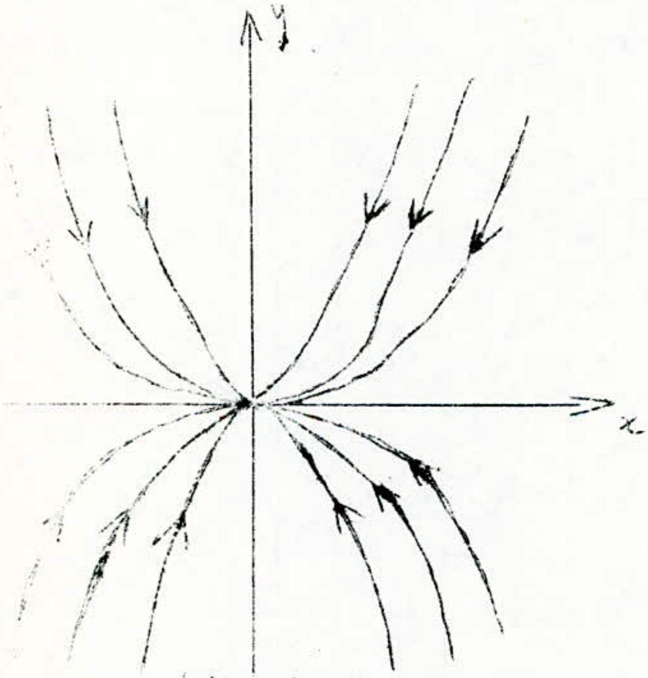
En effet , la trajectoire sera une courbe fermée si la condition initiale s'ecarte faiblement de $m_1 e$ ou $m_3 e$ et me rand si elle s'ecarte faiblement de $m_2 e$.

/



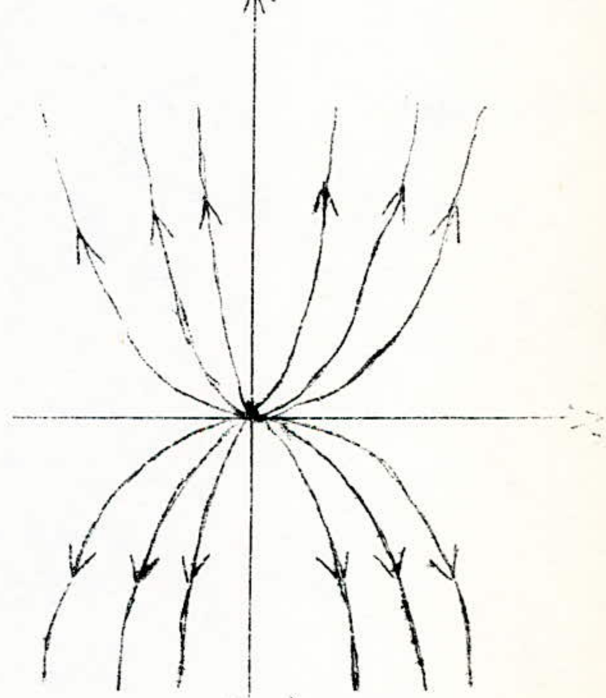
(fig 1)

Trajectoires des equations d'Euler
sur une surface de niveau d'Energie



(fig 2)

le point singulier (oo)est
un point stable.



(fig 3)

le point singulier (oo)est
un noeud instable.

Nous pouvons appliquer le theoreme .

il suffit de calculer les crochets :

$$\underset{(W1\ W2\ W3)}{X\ ,Y} = \begin{pmatrix} 0 & a1\ W3 & a1\ W2 \\ a2\ W3 & 0 & a2\ W1 \\ a3\ W2 & a3\ W1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1 & (W3\ b2 + W2\ b3) \\ a2 & (W3\ b1 + W1\ b3) \\ a3 & (W2\ b1 + W1\ b2) \end{pmatrix}$$

$$\underset{(W1\ W2\ W3)}{X,Y} = \begin{pmatrix} 0 & a1\ b3 & a1\ b2 \\ a2b3 & 0 & a2\ b1 \\ a3b2 & a3b1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a1\ b2\ b3 \\ a2\ b1\ b3 \\ a3\ b1\ b2 \end{pmatrix}$$

$$\left[[X;Y]\ ;\ \left[[X,Y],\ Y\right]\right] = \begin{pmatrix} 0 & a1\ b3 & a1b2 \\ a3\ b3 & 0 & a2\ b1 \\ a3\ b2 & a3\ b1 & 0 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} a1\ b2\ b3 \\ a2\ b1\ b3 \\ a3\ b1\ b2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} a1\ b3\ a2\ b1\ b3 + a1\ b2^2\ a3\ b1 \\ a2\ b3\ a1\ b2\ b3 + a3\ b1\ b2\ b1 \\ a3\ b2\ a1\ b2\ b3 + a3\ b1\ a2\ b1\ b3 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} a1\ b1\ (\ a2\ b3 + a3\ b2\ ) \\ a2\ b2\ (\ a1\ b3 + a3\ b1\ ) \\ a3\ b3\ (\ a1\ b2 + a2\ b1\ ) \end{pmatrix}$$

Les trois vecteurs Y $\left[[X,Y]\ ;\ Y\right], \left[[X,Y]\ ;\ \left[[XY]\ ;\ Y\right]\right]$ sont constants leur ran est le même en tout point ,et égale au rang du systeme de trois vecteurs .

$$= \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix} \quad 2 \begin{pmatrix} a1\ b2\ b3 \\ a2\ b1\ b3 \\ a3\ b1\ b2 \end{pmatrix} \quad 2 \begin{pmatrix} a1\ b1\ (a2\ b3 + a3\ b2\ ) \\ a2\ b2\ (a1\ b3 + a3\ b1\ ) \\ a3\ b3\ (a1\ b2 + a2\ b1\ ) \end{pmatrix}$$

Prenons : $b1 = 1 \qquad b2 = \varepsilon \qquad b3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a3\ \varepsilon \end{pmatrix} \quad 2 \begin{pmatrix} a1\ a3\ \varepsilon^2 \\ a2\ a3\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

Supposons qu'aucun des α_i ne soit nul pour ξ different de 0 ou de $\sqrt{\frac{a1}{a2}}$, le rang est égale à trois .

le Cas $\xi = 0$ S'interprete comme un dispositif capable de creer un couple dont le moment est porté par le premier vecteur de base du repere lie au satellite. Le systeme n'est manifestement pas completement controlable puisque toute rotation autour de cet axe ne pourra qu'etre ralentie ou accelerée ,mais l'axe de rotation sera necessairement conservé .

Si l'ellipsoide d'inertie du satellite presente un axe de symetrié un des ai est alors nul . Supposons que ce soit a2 ce qui ne diminue pas la generalite car on peut permuter les indices b1 b2 b3 . Il suffit alors que ξ ne soit pas nul.

Si tous les ai sont nuls, cas d'un ellipsoide d'inertie spherique il faut que Psoit égal à trois .

--o--o--o--o--

Demonstration du théoreme
de bonnard

La demonstration du théoreme de Bonnard sur la contralabilité du systèmes non lineaires repose sur deux elements essentiels:

- -le rang
- -l'élargissement.

a) le rang

theoreme (sussmann-inrdjevoie)

les etats accessibles du système

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{p} u_i Y^i(x) \qquad x \in R^n,\quad u_i \in \{0,1\},\quad \sum_{i=1}^{p} u_i = 1$$

issus du point nx, sont contenus dans l'adherence de leur propre interview (ce qui exprime que l'interieur est non vide) si et seulement si dans le cas Analytique le rang.

$$r\left(\mathcal{L}\left(\left\{ Y^i \; i=1,p \right\}\right)\right)_{(x_0)}$$

de l'Algebre de lie engendrée par les yi e1 - - P est égal à n en xo.

../..

Sous vanete de Rh

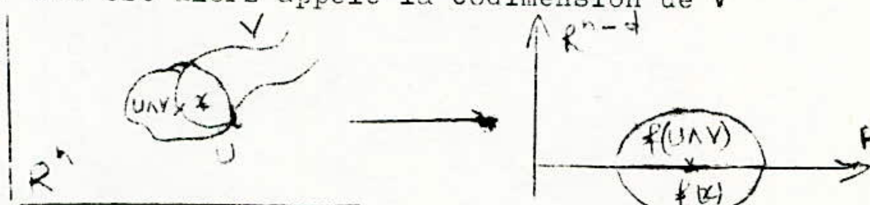
pour d(n l'inclusion canomique Rd C Ru sera (xi--xn) ->(x,nd,OC)
on ecrira alors aussi Rh = Rd X Rn-d

Définition-

Soit V une partie de Rh,on dit que V est une sous varieté de Rh de dimension d.de classe Cl si pour tout x de V;il existe un ouvert U de Rh,contenant x .Un diffeomorphisme f de classe Cl de U sur son image f(U) ouvert de Rh,tel que

f(UMV) =f(U) N Rd

l'entrer n-d est alors appelé la codimension de V

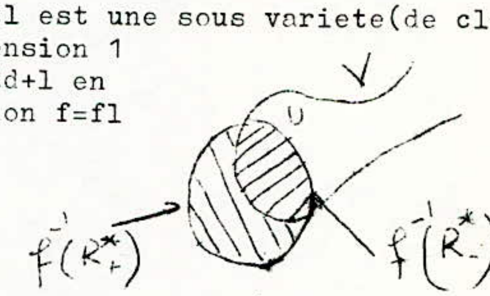


Un diffeormorphisme f de la variete v sur la variete v'est:

_ une application bijective f de v sur v'

-une application differentiable ainsi que l'application reciproq

Une hypersurface (de classe Cp)de Rdtl est une sous variete(de classe Cp) de dimension d de Rd+l donc de codimension 1
une hypersurface partage localement Rd+l en deux regions à savoir,pour une fonction f=fl vérifiant f-l(R=)et f(-lF)



../..

-DEMONSTRATION-

Soit S une hypersurface (sous variete) contenue dans Rh soient X et Y deux champs de vecteurs tangents à S .Alors le crochet de lie de ces deux champs de vecteurs (X,Y) est aussi tangent à S.

Soit Y i,un champ au pont xo,
ce champ existe car sinon
-tous les champs seraient tangents à la dimension o,constitué par le point xo,
-tous les crochets seraient tangent au point xo par suite le rang au point xo serait nul contrairement à l'hypothèse.

CONSTRUISONS LA SURFACE DE DIMENSION s

$$S'=\{expt,Yi\ (xo)\ o(t,(e,\}$$

Il existe necessairement un point de S'où un des Yi n'est pas tangent à S! car sinon.

-tous les crochets seraient tangents à S1
-Et par suite le rang serait égal à 1 contrairement à l'hypothése (si n(>1)

Soit yi tel que les vecteurs

yi,(exp x,yil (xo)   o(1,(e,

yi,2 (exp x2 Yi (xo)

c'est à dire que Yi2 n'est pas tangent à S1

Construisons la surface de dimension 2

S2 = {exp (T2 Yi2)exp(t1 Yi) (xo) X,(t,(θ, o(t2 (θ2 }

Si n'est égal à 2 cette surface est un ouvert de Rh on arrete sinon on recommence.

Il existe necessairement un point de S2 où un des champs yi n'est pas tangent à S2 car sinon.

-tous les crochets seraient tangents à S

On arrive par ce procede à construire une hypersurface Sh de dimension n donc d'interieur non vide.

reste à ce convaincre que Sh est bien contenue dans les etats accessibles issus de xo,

S'= exp(t,Yi,)ns u z t,(o,

on voit que S' est parcourue quand on choisit le controle

uj(t) =z i,=j u(t,(θ,

ui,(t)=1

Donc s'est constitué de points accessibles pour obtenir un point de S2 on part d'un point de S' (expt,Yi,)

donc d'un point accessible et on choisit le controle

iy(t)=0 i2≠J t,(t2(θ2

ui2(+)=1

et ainsi de suite

tout repose sur le fait que les reels employes dans la construction de S' puis de S2 ete sont strictement positifs

tout cette construction peut être realisée avec des reels θ,---θn arbitrairement petits.

L'ouvert S^n peut donc être construit dans un voisinage arbitrairement petit d point xo,car par definition .Dans un espace topologique.E on appelle voisinage d'un point x tout sous ensemble de E qui contient un ouvert contenant x soit x,un point accessible de xo.Sous l'action d'une certaine commande U L'image de S^n sous l'action de cette commande sera un ouvert d'états accessibles contenu dans un voisinage de x;

La condition de rang est donc une condition suffisante pour que les les etats accessibles soient contenus dans l'adherence de leur interieur.

b) l'élargissement.

Définition

etant donnée une formulle de champs de recteurs S de Rh on appelle etats accessibles issus de x et on designe par A(y)x l'ensemble des points de la forme.

A(y)x= { expt p)! expt p-1Yp-' °expt, Y'(x)Y' ti)o PEN y' ε 𝒴 }

la famille Y est de la forme.

s = { Yi i=11 P }

les etats accessibles de no du système

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{p} ui\ Yi\ (x) \qquad Yi \in \{o,1\} \quad \sum_{o=1}^{p} Yi = 1$$

sous l'action de controles constants par morceaux, concident avec l'ensemble A(Y) x qui vient d'être defini.

Définition (Imdjevic-kupka)

Deux familles de champs de vecteurs de Rh.S et s'ont equivalentes:
Si pour tout x de Rh la fermeture de A(Y) n coincide avec
la fermeture de A(Y')x

l'elargissement consiste à construire une suite de familles
Y= Y° c Y1 c Y2 - - - C Y2

toutes equivalentes, telles que la derniere S2 soit assez grosse pour être completément controlable.

PROPOSITIONS:

Soit S une famille de champs de vecteurs de Rh dont l'algebre de lie engendré est de rang n partout.
Si Y est equivalente à une famille. S' completement controlable, alors elle est completement controlable.

soit S une famille de champs de vecteurs de Rh soit S' le cone(positif) convexe engendré par S. Alors S'est equivalente à S.

Soit S une famille de champs de vecteurs de Rh satisfaisant en tout point la condition de rang.
Si X est un des champs de la famille dont les points poisson stable sont partout denses Alors la famille.

S' = { -X } US

est equivalente à la famille S.

theoreme de Bonnard.

On considere sur Rh le systeme.

$$\frac{dn}{dt} = X(x) + \sum_{i=i}^{p} u_i Y_i \qquad u_i \in \{-1,o;+1\} \qquad (1)$$

on suppose que les points poisson stable du champ X sont partout denses. Une condition necessaire et suffisante pour que (1) soit completement controlable est que le rang.

r(l((X, Yi i=1- - p))) (x)

de l'algebre de lie engendre par les champs X Yi i)i--p soit égal à n en tout point x de Rh.

Demonstration:

La necessite de la condition dans le cas analytique se deduit directement de sussmann-Imdjevic.

la condition est suffisante en effet.

la famille S' ={X+ ni Yi,i=1- - p)} ni∈(-1,o,1)

pour x=o elle est equivalente à la famille.

S2=(X,X± Yi i=1--)

d'apres la proposition V5 cette famille est equivalente à:

S3 = (X, ± Yi i=1 - -p)

par hypothese la famille S3 satisfait la condition de rang donc d'apres la proposition V6 elle est equivalente à la famille.

$S4 = (\pm X, \pm Y_i \quad i=1 - - p)$

On a vu que les etats accessbiles du systeme S4 etaient les memes que ces du systeme " symetrique "

$$\frac{dx}{dt} = u_o X(x) + \sum_{i=1}^{p} u_i Y_i(x) \qquad u_i \in (-1,1) \qquad \sum_{i=1}^{p} |u_i| = 1$$

et que ce dernier est completement controlable d'apres le theoreme de lobry.

theoreme de lobry

le systeme $\frac{dx}{dt} = \sum_{i=i}^{p} u_i Y_I \qquad u_i \in (-1;o;+1)$

est completement controlable si et seulement si dans le cas analytique le rang.

r (L((Yi i=1- - p))) (x)

de l'Algebre de lie engendrée pu les Yi i=1- - p est egal à n pour tout n de Rh.

Donc S satisfait la condition du rang elle est equivalente à une famille completement controlable.½

d'apres (4)

on en deduit que S est completement controlable.nous allons donner toute une serie de theoremes;concernant la controlabilité des systemes et nous allons voir que le theoreme de Bonnard est une synthese de tous ces theoremes et presente en plus les avantages suivants.

(1) c'est qu'il enonce une condition de controlabilite sur un espace non compact (Rn)

(2) le systeme considere admet des controles bornés.

theoreme (lec markus)-
le systeme

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu \qquad x \in Rh, \quad |u| \leq 1$$

est completement controlable sur Rh si est seulement si
a) le spectre de A est imaginaire pur
b) le rang de (b,ab, An-' b) est egal a n

theoreme (loby)
le systeme

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{n} u_i Y_i \qquad u_i \in (-1;o;+1)$$

est completement controlable si et seulement si dans le cas analytique le rang.

r (L ((Yi i=1 - - p))) (x) yi i=1 - - p
L'algebre de lie engendrée par les est egale à n pour tout x de Rh.

theoreme de (brunovsky-Lobry)
supposons que la condition du rang satisfaite pour le systeme:

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{p} u_i Y_i \, (x) \qquad u_i \in (-1;o;1)$$

alors pour tout compact K de Rh il existe une constante k telle que pour tout champ X satisfaisant l'inegalite

$$\| X (x) \| \leq k \quad \forall x \in Rh$$

le systeme

$$\frac{dx}{dt} = X (x) + \sum_{i=1}^{p} u_i Y_i \, (x) \qquad u_i \in (-1;o;1)$$

est completement controlable sur K.

Theoreme de lobry.
le systeme

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{p} u_i Y_i \, (x) \qquad \sum_{i=1}^{p} u_i = 1 \quad u_i \in (o,1)$$

où tous les champs Y admettent des point poisson stables partout denses;
est completement controlable si le rang de l'Algebre de lie engendrée par les Yi i=1 - - P est egal à n partout

theoreme.Brockett Indjevie-Qunn
le systeme

$$\frac{dx}{dt} = X (x) + \sum_{i=1}^{p} u_i Y^i \, (x) \qquad x \in Rh \quad u_i \in R$$

où les solutions de X sont périodiques, est controlable.
si le rang de l'Algebre de lie

r(L ((x,y' i=1--P))) (x)

est egal à n en tout point.

CHAPITRE II

COMPLÈTE CONTROLABILITE SUR LES GROUPES LINEAIRES.

-o-o-o-o-

COMPLETE CONTROLOBILITE SUR LES GROUPES LINEAIRES

INTRODUCTION :

Soient

$M(n,c)$= l'e semble des matrices carrés nxn à coefficients complexes
$M(n,R)$= l'ensemble des matrices carrés nxn à coefficients reels

et soit le systeme decrit par l'equation differentielle

$$\begin{array}{ll} X = A\, x(+) & X \quad R^n \\ x(o)=xo & A \quad M(n,R) \end{array} \qquad (I)$$

la solution de ce systeme est:

$$X(t)=xo\,e^{At}$$

Soient

GL(n,c)=le groupe des matrices lineaires de dimension n à coefficients complexes inversibles

GL(n,R)=le groupe des matrices lineaires de dimension n à coefficients reels inversibles

et soit le systeme decrit par l'equation differentielle:

$$\begin{array}{ll} X = A\,X\,(t) & X \quad GL(n,R) \\ X(o)=Xo & X \quad M(n,R) \end{array} \qquad (2)$$

la solution de se systeme est:

$$X(t) = e^{At}\;Xo$$

le lien entre (I) et (2) est que si l'on choisit dans (2)la condition initiale Xo =In (matrice Identité de demension n)

Alors:

$$x(t) = X\,(t)\,Xo$$

le groupe GL (n,R)agit transtivement sur R^n

c'est à dire

$$\begin{array}{lll} no & R^n & \\ & & X(t) \quad GL\,(n,R) \\ x, & R^n & \end{array}$$

tel que $\quad x_1(t)=X(t)\,xo$

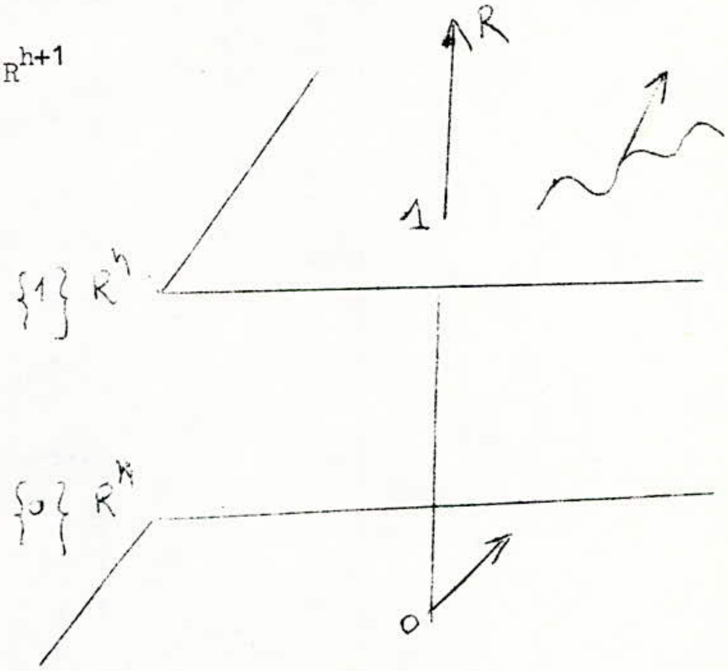
cette propriete est interssante dans la mesure où si le systeme (I) est completement controlable sur R^n,alors il est completement controlable sur GL (n,R)

Considerons maintenant le systeme

$$\dot{X}(t)= Ax(t) +b$$
$$X(o)= xo$$

$b \in R^n$
$A \in M(n,R)$
$X \in R^n$

le chomps de vecteurs $Ax(t)+b$ n'est plus lineaire mais affine il ya une translation en plus
identifions R^h et le plan affine R^{h+1}



une courbe tracée dans $\{I\} R^n$ aurapour Vecteur tangent sur un element de $\{o\} R^n$
Donc un Champ de vecteurs sur $\{I\} X R^n$ Sur une application de $\{I\} XR^n$ dans $\{o\} R^n$

on remarque alors:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ Ax + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ x \end{pmatrix}$$

Ceci posé considerons.

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix} X(t) \qquad X \quad GL\ (n+I,R)$$
$$X(o)= In+I$$

qui admet la solution

$$X(t)=e^{t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{e^{tA} - In}{A} b & e^{tA} \end{pmatrix}$$

en posant

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & A \end{bmatrix}$$

nous aurons :

$$\tilde{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Ab & A^2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^2b & A^3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^{n-1}b & A^n \end{bmatrix}$$

par suite
$$e^{\tilde{A}t} = \sum \frac{\tilde{A}^n t^n}{n!} = \sum_n \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{(At)^{n-1}\, bt^n}{n!} & \frac{(At)^n}{n!} \end{bmatrix}$$

nous avons :

$$e^{At} = \frac{(At)^n}{n!} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{(At)^n}{n!}$$

$$e^{At} - I = At + \frac{(At)^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{(At)^n}{n!}$$

$$\frac{e^{At} - I}{A} = t + \frac{At^2}{2!} + \frac{A^2t^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{A^{n-1}t^n}{n!}$$

Par Suite
$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \frac{e^{At} - I}{A}b & e^{At} \end{bmatrix}$$

d'où la solution du systeme:

$$\begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix} = X(=) \begin{pmatrix} I \\ Xo \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ Xoe^{At} + \frac{e^{tA} - I}{A}nb \end{pmatrix}$$

cet artifice de calcul nous permettra d'eliminer la condition initiale l'étude des systeme pilotables affines dans R^n

$$X(t) = AoX(t) + bo + \sum_{i=1}^{m} ui(t)\left(Aix(t) + bi\right) \qquad (4)$$

montre qu'il peut y avoir interet à considerer des systemes

$$\dot{X}(t) = (XO + \sum_{i=1}^{m} uiXi)\, X(t)$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & Y \end{pmatrix} \subset GL(n+I, R) \qquad \begin{matrix} Y \in GL(n, R) \\ b \in R^n \end{matrix}$$

Les systeme affines plotables (4) contiennent:

- Les systeme lineaires $Ai = bo = 0$

- Les systeme dits bilinaires $bi = bo = 0$

Ces systeme sont typiquementdes systeme plotés qui decrivent le comportement d'un reseau electrique lineaire comportant des resistances des capacités, des inductances, les sources de courant et de tension auquel on ajout des interrupteurs ideux commandés.

GROUPES LINEAIRES ET SYSTEMES PLOTABLES SUR UN GROUPE LINEAIRE

Definition:

On appelle groupe lineaires G un sous groupe fermé de GL (n,c)
Cela signifie que G est un groupe lineaire si et seulement si:

a) $G \subset GL(n,c)$
b) $\forall X \in G$ alors XY G
$\forall$ G
c) $\forall X \in G$ alors X^{-I} G
d) Quelque soit la suite xn d'elements de G
Si la $\lim_{n \to \infty} Xn = X$ alors $X \in G$

Ex:

I) $GL(n,R)$
2) $SL(n,R) = X\ M(n,R) / \det X = I$
3) $SO(n,R) = X\ M(n,R) / X^t X = In$
4) $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} X & -\bar{y} \\ Y & \bar{X} \end{pmatrix} \right. /X/^2 + /Y/^2 = I \quad (x,y) \in C^2$

5) le groupe de deplacement $M(n)$

$$M(n) = \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & R \end{pmatrix} \right. \quad // \quad \begin{matrix} R & SO(n,R) \\ X & R^n \end{matrix}$$

6) le groupe affine

$$Af(n) = \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ x & X \end{pmatrix} \right. \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} X \in GL(n,R) \\ x \in R^n \end{matrix}$$

-o- PROPRIETES DE L'APPLICATION EXPONENTIELLE. -o-

En general deux matrices ne permuttent pas $AB \neq BA$ C'est pour cela qu'on fait intervenir le commentateur de A et B qui n'est autre que le "degré de non permitation " des deux matrices c'est à dire qu'il exprime et mesure l'ecart entre $ABA^{-I}B^{-I}$ et l'identité

$$\left\{ A,B \right\} = ABA^{-I}B^{-I}$$

le crochet de lie de deux matrices:

$$\left[A.B \right] = AB - BA$$

lemme I.

$$\left\{ \exp tX,\ \exp tY \right\} = \exp t^2 \quad X,\ Y + 0\ (t^3)$$

$$\operatorname{expt} X \operatorname{expt} Y = \exp \left(t(X+Y) + \frac{t2}{2} X.Y + 0(t^3) \right)$$

$0(t^3)$ = designe une serie convergente à coefficients matriciels de degré de permutation superieur ou egal à 3

DEMENSTRATION .

$$\left\{ \operatorname{expt} X,\ \operatorname{expt} Y \right\} = \operatorname{expt} X \operatorname{expt} Y \quad \exp -tX \exp -tY$$

$$= \left(I+tX + \frac{t^2 X^2}{2} + 0(t^3) \right) \left(I+tY + \frac{t^2 Y^2}{2} + 0(t^3) \right)$$

$$\left(I-tX + \frac{t^2 X^2}{2} + 0(t^3) \right) \left(I- tY + \frac{t^2 Y^2}{2} + 0(t^3) \right)$$

$$= I + t^2 . \left(-(X+Y)^2 + X^2 + Y^2 + 2XY \right) + 0(t^3)$$

$$= I + t^2 \quad X.Y \quad + \quad 0(t^3)$$

par comparaison avec.

$$\operatorname{expt}^2 \left[X.Y \right] = I + t^2 \left[X.Y. \right] + 0\ (t^3)$$

Nous obtenons

$$\left\{ \operatorname{expt} X . \operatorname{expt} Y \right\} = \exp t^2 \left[X.Y. \right]$$

Pour b:

$$\exp t X . \exp t Y = \left(I + tX + \frac{t^2 X^2}{2} + 0(t^3) \right) \left(I + TY + \frac{T^2 Y^2}{2} + 0(t^3) \right)$$

$$= I + TY + \frac{T^2 Y^2}{2} + ty + T Y + \frac{T^2 Y^2}{2}$$

$$= I + t (X+Y) + t^2 XY + \frac{t^2}{2} (X^2 + Y^2)$$

$$= I + T (X+Y) + T2 (XY) + \frac{t2}{2} (X + Y)^2 - \frac{t^2 xy}{2} - \frac{t^2 XY}{2}$$

$$= I + t(x+y) + \frac{t^2}{2} (xy - xx) + \frac{t^2}{2} (x+y)^2 + o(t^3)$$

$$= I + t(x+y) + \frac{t^2}{2} (xy) + o(t^3)$$

On néglige les termes du troisième degré par comparaison avec :

$$\text{Exp.} \left(t(x+y) + \frac{t^2}{2}(x;y)\right) = I + t(x;y) + \frac{t^2}{2}\left[x;y\right] + 0(t^3)$$

Par suite :

$$\text{Exp. } tx \ \text{ Exp. } tY = \text{Exp}\left(\left(t(x+y) + \frac{t^2}{2}\left[x;y\right] \right) \right) + o(t^3)$$

Corollaire

$$* \lim_{n \to \infty} \left(\exp \frac{x}{n} \ \exp \frac{y}{n} \right)^n = \exp (x+y)$$

$$* \lim_{n \to \infty} \left\{ \exp \frac{x}{n} : \exp \frac{y}{n} \right\}^{n2} = \exp \left[x;y\right]$$

Démonstration :

d'aprés le lemme 1

$$\text{pour a} \quad \exp \frac{x}{n} \ \exp \frac{y}{n} = \exp \frac{x+y}{n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\text{D'ou} \quad \left(\exp \frac{x}{n} \ \exp \frac{y}{n}\right)^n = \exp (x+y) + n \, o \left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\exp \frac{x}{n} \ \exp \frac{y}{n} \right)^n = \lim_{n \to \infty} \exp \left(\exp (x+y) = no \left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \exp (x+y)$$

$$\text{Pour b.} \left\{ \exp \frac{x}{n} \ \exp \frac{x}{n} \right\}^{n^2} = \left(\exp \frac{1}{n^2}\left[x;y\right] + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^{n^2}$$

$$= \exp\left[X.Y.\right] + h^2 O\left(\frac{I}{h^3}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \exp\frac{X}{n} \exp\frac{Y}{n} = \lim \exp X.Y + h^2 O \frac{I}{n^3} = \exp\left[X.Y\right]$$

Definition: Algebre de lie d'un groupe lineaire

Soit G un groupe de lie lineaire .On appelle Algebre de lie de G l'ensemble

$$\mathfrak{g} = \left\{ M\ (n,c) \ \middle|\ \forall t \in R \ \exp t M \in G \right\}$$

Corollaire 2:

Si X et Y appartiennent à $\mathfrak{g}$ Algebre de tie de G Alors

$$X + Y \in \mathfrak{g}$$
$$\lambda X \in \mathfrak{g} \quad \forall \lambda \in R$$
$$X.Y \in \mathfrak{g}$$

Cela provient du corollaire A par passage à la limite puisque G est fermé

Une Algebre de lie est un espace vectoriel sur R stable par l'operation crochet.

EX:

1) $\mathfrak{gL}\ (n,R) = M(n,R)$
2) $\mathfrak{AL}\ (n,R) = \left\{ M \in M\ (n,R) \ \middle|\ TR\ (M) = 0 \right\}$
3) $\mathfrak{AO}\ (n,R) = \left\{ M \in M\ (n,R) \ \middle|\ {}^tM = -M \right\}$
4) $\mathfrak{AU}\ (2) = \left\{ M \in M\ (2,c) \ \middle|\ \begin{matrix} {}^t\bar{M} = -M \\ tR(M) = 0 \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} Yi & -\bar{Z}i \\ Zi & -Yi \end{pmatrix}$

$Y \in R$
$3 \in C$

5) $\mathfrak{M}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & A \end{pmatrix} \ \middle|\ \begin{matrix} A \in SO(n) \\ a \in R^n \end{matrix} \right\}$

6) $af(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & A \end{pmatrix} \ \middle|\ \begin{matrix} A \in M_n(n,r) \\ a \in R^n \end{matrix} \right\}$

quelques definitions:

Homeomorphisme:

Une application Fde E dans E' est appelée homeomorphisme si

1°)Fest une bijection

2°)F et F^{-1}Sont continues respectivement sur E et E'

Variete de dimension n:

est une espace topologique separé E:dont chaque point possede un voisinage ouvert homeomophe à un ouvert de R^n

UN diffeomorphism

F de la variete Vsur la variete V' est :

I°)Une application bijective F de V sur V'

2°)Une application differentiable ainsi que l'applicationreciproque

Espace connexe

Un espace topologique Eest dit connexe s'il n'est pas reunion de deux ensembles ouverts,non vides disjoints:

PROPOSITION

I) l'exponentielle est un diffeomophisme entre un voisinage de l'origine de g et un voisinage de l'indentité I de G.

2)Si G est connexe alors tout element xde G s'ecrit

$$C = \exp X, \exp X = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \exp XK \quad \text{où } Xi \quad G$$

Esqisse de demonstration :

a) on utilise le theorme d'inversion locale en identifiant G et un espaceR^m

$$\frac{d}{dE} (\text{expt } X)_{t=0} = X$$

la differentielle entre $X \longrightarrow \exp X$ en t = o est l'indentité ce qui etablit(I)

b) les elements de la forme exp X,.............exp X k forment un ensemble ouvert et fermé donc egale à G .

Definition :

On appelle systeme pilote invariant à droite un sous ensemble F de C= he (G)

DEFINITION :

on note S+(f) l'ensemble des matrices G accessibles depuis l'indentité

$$S+(f) = \left\{ \left\{ \exp T_I X_I , \quad \exp T_I X_I \right\} \quad T_I \in R^h \; X \in F \right\}$$

* Remarques:

I)l'ensemble des accessibles à partir de XO est $S^+(f)$ xO car le systeme est invariant à droite.

2)$S^+(f)$ est un semi groupe

3) Si $S^+(f)$ = G alors le systeme est completement controlable

CONTROLABILITE SUR LES GROUPES LINEAIRES

Pour etudier la controlabilité d'un systeme l'idée et de le remplacer par un systeme soit plus ros soit plus facile à etudier

Definition

On dira que deux systeme F_1 F_2 Sont equivalants si

$$\overline{S^+(f_1)} = \overline{S^+(f_2)}$$

(Où $\bar{A}$ desi ne la fermiture de l'ensemble A)

la relation à dessus est une relation d'equivalance

On note LS (f) le plus rand systeme equivalant à F

Dans ce qui suit on va donner pluseur procedes conomiques pour " a randir" un systeme

* Si Ft 0   exp tX $\overline{S^+(f)}$ alors X $\overline{S(f)}$

TECHNIQUES D'AGRANDISSEMENT.

T_1 $F \sim \bar{F}$ où $\bar{F}$ desi ne la fermeture dans G consideré comme un espace vectouel

* Preuve :

Si $X_1 \ldots\ldots\ldots\ldots X_2$ est une suite d'element de F telle que lui $X_2 = X$

$N \longrightarrow \infty$

Fexponentielle etait contenue $\lim\limits_{N \to \infty} \exp t\, X_n \in \overline{S^+(f)}$

d'ou $X \in LS\ (f)$

T_2 $F \sim \lambda F$ $\forall \lambda > 0$

T_3 Si $X \in F$
et $X \in F$ alors X+Y LS (F)

* Preuve :

Soit $T > 0$ alors $\left(\exp t\frac{X}{N}\ \ \exp t\frac{Y}{N}\right)^n \in LS^+(F)$

d'aprés le corollaire I

$\exp t\,(X+Y) \in \overline{S^+(F)}$ Pour $\forall\ T > 0$

T_4 Si $\pm X \in F$ et $\pm Y \in F$ Alors $[X.Y] \in LS\ (F)$

* Preuve: $(\text{exptX} \cdot \text{expt } Y \cdot \text{exptX expt}-TY)^{n^2} \in S\ (F)$ pour $\forall T > 0$

et d'aprés le corollaire I on a:

$[X.Y] \in LS(F)$

T_5 a Si $\pm X \in LS\ (F)$ alors $e^X F e^{-X} \subset LS\ (F)$

b Si P et P^{-I} à $S^+\ (F)$ alors $P\ F\ P^{-I} \subset LS\ (F)$

* Preuve : Li) Soit Y F en Utilisant la relation

T O exp $(P\ Y\ P^{-I})$= P exp TY P^{-I}

et le fait que $S^+(F)$ est un Semi groupe

On voit que . PY P^{-I} LS (F)

i) On fait P= exp X

P^{-I}= exp - X

Definition :

On dit qu'un element $X \in \mathfrak{g}$ est compact d'une Al ebre de lie si l'ensemble $\{ \text{exptX} \mid X \in R \}$ est borné dans G

Cela Signifie que : la matrice Xest semi simple (dia onalisable dans C) et que son sepectre est ima inaire pur.

T_6 Si Xest compact et X F alors $\pm X \in LS\ (F)$

*Preuve:

X étant compact ,l'ensemble $A = \{ \text{exptX} \mid T \in R^+ \}$ a pour fermeture un groupe compact commutatif $\overline{T}$ $\subset S^+(F)$

$\{ \text{exptX} \mid T \in R \}$ est le plus petit sous groupe contenant A

Donc . $\{ \text{exptX} \mid T \in R$ $\pm X \in LS\ (F)$

Proposition 2 (Theoreme de Schow Krener)

Soit Fun systeme piloté invariant à droite sur un roupe lineaire connexe

Si l'Algebre de lie G engendrée par F est égale à G
alors $S^+(F)$ contient un ouvert de G

Demonstration:

Le groupe engendie par $S^+(F)$ est $S^+(FU-F)$
mais d'aprés T_{23} T_4 $S^+(FU-F)= S^+(lie(F))$ Algebre de lie engendrée par F.

d'on Si lie $(F) = G$ avec la proposition I
$S^+(FU-F)= G$

$S^+(F)$ engendrée donc Get il ne peut donc entre d'interieur vide

Theoreme de KUPKA - JURDJEVIC :

i) Soit B une matrice diagonale de trace nulle
telle que les valeur propres de B soient reelles.

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots\ldots < \lambda_n$$

et Verifiants:

$$\lambda_i - \lambda_j \neq \lambda_k - \lambda_l \quad \text{Si } (i,j) \neq (k,l)$$

ii)Soit A une matrice de trace nulle $A = (aij)$
Telle que :

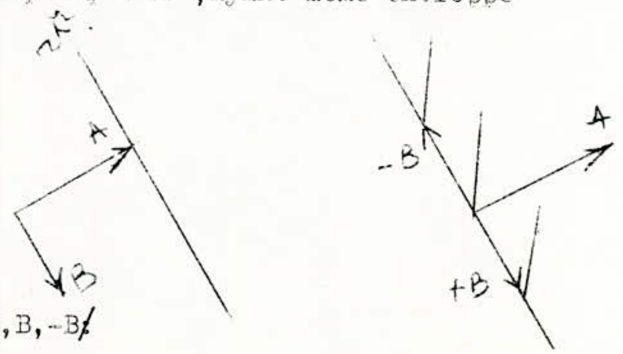
I°) $aij \neq 0$ pour $/ i-j / = I$

2°) $a_{In}\, a_{nI} < 0$

Alors le systeme $F = \{A+UB \;/\; U \in R.\}$ est completement controlable sur SL (N,R)

Esquisse de demonstration.

On peut remplacer F par $\{A, B, -B\}$
Car ces deux systeme sont equivalents, ayant même envloppe conique convexe fermée



On remplace F par $F= / A,B,-B /$

d'aprés T_5 $\pm B \in F.$ $E^{BT} \wedge e^{bt} \in LS(F)$

T_2 $e^{-(\lambda n - \lambda I)}\ e^{-bt} \wedge e^{bt} \in LS(F)$

$$T_3 \quad \text{Lim}\ e^{-(\lambda n - \lambda_1)}\ e^{-bt} \wedge e^{bt} = \begin{cases} a_I{}^n\ E_I{}^n & t \longrightarrow +\infty \\ an_I\ En_I & t \longrightarrow -\infty \end{cases}$$

ain E in $\in$ LS (F)

ani E ni $\in$ LS (F)

d'aprés T_3 (ain Ein + ani Eni) $\in$ LS (F)

Comme: ain ani < 0 cet element est compact

donc: $\pm$ (ain Ein + ani Eni) $\in$ LS (F)

d'ou: $\pm$ Ein , $\pm$ Eni $\in$ LS (F)

Lie (Eni, Ein)= R Ein $\oplus$ R ENI $\oplus$ R (Eni-Ein)

En choisissant un element dans cet Al ebre de lie on amorce alorsune recurence descendante sur les / i - j / ordonnés par ordre decroissant.

Ce qui montre que $\pm$ Eij ; $\pm$ Eji $\in$ LS (F)

On en deduit que LS(F) = SL (N,R)

d'ou : Fest completement controlable.

-o-o-o-o-o-o-

C H A P I T R E III

C O N T R O L A B I L I T E S U R L E S G R O U P E S .

o---o-o-o-o-

COMPLETE CONTROLABILITE SUR LES

G R O U P E S .

Consequences du Thoreme de Bernard .

Thoreme N) I

Soit le systeme bilinéaire homo ene suivant:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{i=1}^{p} Bix = X(x) + \sum_{i=1}^{p} u_i Y^i(x) \qquad (I)$$

$X \in G.$

On suppose que les champs de vecteurs (X, Y^i $i = I.........P$)

Sont invariants à droit.

On suppose aussi que G est un roupe compact .

Une condition nécessaire pour que le systeme (I) soit Controlable

est que l'Al ebre de lie en endré par les champs de vecteurs

(X, Y^i i= I;....P) soit é al à Npour tout xde G.

EX. SO_3.

Theoreme N° 2

Soit le systeme bilinaire homo ne suivant:

$$dx = Ax ++ \sum_{i=1}^{p} Bix = X(x) + \sum_{i=1}^{p} u_i y^i(x)$$

$x \in G.$

Où Gest un roupe non compact,mais A appartient à la sous al ébre d'un sous roupe compact de G .

Donc les point poisson stables du champ X (x) Sont partout denses.
une condition nesessaire pour que le systeme (I) soit completement controlable est que l'Al ebre de lie en endrée par les champs de vecteurs / $X(x), Y^i(x)$ i=I......P / Soit é al à N pour tout x appartient à G

EX . SL (n,R).

<u>Definition d'une representation :</u>

Soient G un groupe et X un espace vectoriel non nul en appelle representation du groupe G dans l'espace X tout application T qui fait correspondre à chaque élément G du groupe G un operateur lineaire T (g) de l'espace X.

(CAD que t(g)est une application lineaire de l'espace X dans X)

de maniere à satisfaire aux conditions :

I°) $T(e) = I$ Où I est l'operateur identique dans X

2°) $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$ quelque soient $g_1 g_2 \in G$.

l'espace X est appelé : espace des representations et les operateurs $T(g)$ = operateurs de representationss .

les propretes I et 2 implequant que .

$$T(g^{-1}) \cdot T(g) = T(g^{-1}g) = T(e) = 1$$

de même :

$$T(g) \cdot T(g^{-1}) = 1$$

Par consequant chaque operateur $T(g)$ est une bijection de X sur X et:

$$T(g^{-1}) = T(g)^{-1}$$

Par consequant:la proprieté 2 signifie que la representation dans l'espace X est un homomorphisme du groupe G dans le groupe GX (c'est à dire dans le groupe des operateurs lineaires sur X qui appliquant bijectivement X sur X)

Homomorphisme de groupe .

$$\underset{\circ}{G_I} \xrightarrow{\phi} \underset{\square}{G_2}$$

$$\phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1) \square \phi(g_2)$$

Homomorphisme de G dans GL (N,V).

<u>Representation irreductible.</u>

Une representation dans l'espace X est dite irreductible Si X ne possede pas de sous espace de O et de X tout entier qui soit invariant relativement aux operateurs de cette representation dans le cas contraire la representation et dite reductible .

P est irreductible

$$G \xrightarrow{P} P(\ ) \text{ matrice carée sur } V$$

s'il n'ya pas de sous espace de V qui est invariant par P (G)

$P(g)\, V_I \subset V_I$

$\nexists$ SE $V_I \subset V$

$\forall g \in G. \qquad e(g)\, V_I \subset V_I$

<u>Produit Semi direct.</u>

On appelle produit semi direct de G par V . note $G \times_\Delta V$. muni des operateur (+ X) l'ensemble suivant:

$$(g_I, x_1) \times_\Delta (g_2, x_2) = (g_I g_2,\ P(gI)\, x_2 + x_I)$$

C'est un groupe ,c'est le produit semi direct de G par V.

<u>EX:</u>

SL (n,R) $\{$ det X= 1 Algebre de lie <u>SL</u> (n,R) , tR(A) = 0

SL (n,R) $X_\Delta R^n$ est un groupe de lie .

il agit transitivement sur R^n.

<u>En effet:</u>

Soit :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{c|c} & n+1 \\ n+1 & \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \qquad \begin{array}{l} A \in \mathcal{L}(\cdot, R) \\ B \in R^n \end{array}$$

I°) c'est un sous groupe de SL (n+I,R).

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \det A = 1.$$

matrice Symetique .

Soient.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\in A} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (A, B)$$

$$\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow (C, D)$$

le produit semi direct :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 00 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC & AD+B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$(A,B)\ XS.\ (C,D) = (AC,\ AD+B)$$

$$\begin{array}{ccccc} (A,B) & X\ S & (C,D) & \longrightarrow & (AC,\ AD+B) \\ \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \ \searrow \\ SL(n,R)\ R^{n} & & SL(n,R)\ R^{n} & & SL(n,R)\ !\ R^{n} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} SL(n,R) & X & R^{n} \\ \downarrow & & \searrow \\ \text{Groupe} & & \text{Groupe additif } (+) \end{array}$$

$SL\ (n,R)\ X_{\Delta}\ R^{n}$ agit transtivement sur R^{n}

En effet: $\forall x,y \in R^{n}$ $\quad \exists P \in SL\ (n,R)\ X_{\Delta}\ R(n)$

tel que : $Y = Px$

$$\begin{array}{l} (A;B)\ x \longrightarrow Ax+B \\ \in SL(n,R)\ X_{S}\ R\ (n) \to R^{n} \end{array}$$

$Y,\ x \in R^{n}$ $\qquad (A,B) \in SL\ (n,R)\ X_{\Delta}\ R^{n}$

$$Y = Ax + B$$

il suffit de prendre :

$$A = I$$
$$B = Y - x$$

Theoreme de Kupka: Soit K un groupe de lie compact operant irreductiblement sur un espace vectoriel reel V de dimension finie appelons G le produit semi direct K X V et $G \longrightarrow K$ la projection canonique.

Si $F \subset$ lie (G) le semi groupe S(F) engendré par F est G.

Si et seulement si l'Algebre de lie L (F) engendré par F est lie G.

L'application Pest definie par :

$$G \xrightarrow{P} R^{n} \qquad GL\ (n,R)$$

la representation est irreductible

$\nexists$ de sous espace V de R^{n} tel que $\phi\ (g)\ V \subset V$.
$\forall g \in G$

En Conclusion: On va enoncer un theoreme de Gauthier qui, en reprenant les hypotheses du theoreme de Kupka Iurdjevic et en imposant une condition sur A, arrive à un resultat trés interessant;

A plus d'un titre car il enonce une condition necessaire et suffisante de controlabilite d'un systeme.

Theoreme de Gauthier:

Soit le systeme $\frac{dx}{dt} = A\,x + \sum_{i=1}^{n} u_i B_i x = X\,(x) + \sum_{i=1}^{n} u_i Y^i$ (I)

A,B SL (n,R)

i) Soit B une matrice diagonale de trace nulle.

telle que les valeurs propres de B soient reelles:

$\lambda_1 < \lambda_2 \ldots\ldots\ldots < \lambda_n$,

et Verifient.

$\lambda_i - \lambda_j \neq \lambda_k - \lambda_l$. Si $(i,j) \neq (k,l)$

ii) Soit A une matrice de trace nulle $A=(a_{ij})$

telle que.

i) $a_{in}\, a_{ni} < 0$

alors une condition necessaire et suffisante pour que le systeme (I) soit completement controlable c'est que A soit irreductible.

Condition Necessaire et Suffisante.

A est irreductible : A est une matrice du dimension n

le graphe de A. $1 \quad 2 \ldots\ldots\ldots\ldots i \xrightarrow{a_{ij} \neq 0} j \ldots\ldots N$

un graphe est fortement connexe si

$\forall i$ $\exists$ un chemin oriente qui va de i à j.

$\forall j$.

A est irreducable $\Longleftrightarrow$ que le graphe de A est fortement connexe.

CHAPITRE IV

ILLUSTRATION DE LA THEORIE DE LA COMPLETE CONTROLABILITE DES SYSTEMES.

-o-o-o-o-

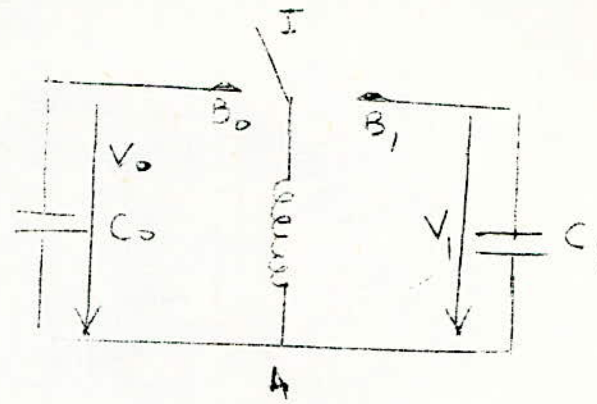
Introduction:

Soit le circuit à contre :

avec .

i= le courant dans la branche li.

vi=la d dp aux bornes de ci



l'interrupteur peut prendre deux positions BO , B1.

en BO nous avons :

$$\begin{cases} VO = V_A - V_{BO} = - \dfrac{Ldt}{dt} \\ i = CO \dfrac{dVo}{dt} \\ V_A - VB1 = V1 = cte \end{cases} \quad (1)$$

en B1 nous avons :

$$\begin{cases} V_I = V_A - V_{B1} = - \dfrac{Ldi}{dt} \\ i = C_1 \dfrac{dV1}{dt} \\ V_A - VBO = VO = cte \end{cases} \quad (2)$$

Soit la fonction :

$$u \begin{cases} 0 & \text{Si l'interrupteur est en BO} \\ I & \text{Si l'interrupteur est en B1} \end{cases}$$

les equations precedantes s'ecrivant:

$$CO \frac{dVO}{dt} = (1-u)i$$

$$u \in \{0, 1\}$$

$$C1 \frac{dV1}{dt} = ui$$

$$L \frac{di}{dt} = (1-u)VO + UV1$$

On verifie bien que ces dernieres equations correspondants aux precedants (1) et (2)

Choix des variables d'etat:

Une variable d'etat est une variable qui evolue avec le systeme et decrit ainsi l'etat du systeme à tout instant ti $\geqslant$ to

to = l'instant ou temps de reference.

Pour les systemes electriques on choisira comme variable d'etat les tensions à travers les capacités ,et les courants à travers les selfs,car les selfs et les capacites emmagazinent de l'Energie.et caracterisent ainsi l'energie du cricuit électrique .

Posons pour la simplicite des calculs:

$$X0 = \sqrt{C0}\quad V0$$

$$X1 = \sqrt{C1}\quad V1$$

$$X2 = \sqrt{\mathcal{L}}\quad i$$

Posons:

$$W0 = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C0}} \qquad W1 = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C1}}$$

Par suite nous aurons le systeme.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -W0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & 0 & -W0 \\ 0 & 0 & W1 \\ W0 & -W1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix}$$

Qui prend la forme:

$$X' = AX + UBX \qquad \begin{array}{l} X \in R^3 \\ U \in \{0,1\} \end{array}$$

Nous nous interessons maintenant aux problemes suivants:

Une commande est une fonction definie sur $(0,T)$ à valeur dans $(0,1)$ constant par morceau .On la note U

a) etant donné une commande U

une condition initiale X0

Quelle est la reponse correspondantes ? (en d'autre termes comment intégre t-on le systeme differentiel I)

b) Une commande est quelque chose que l'on peut choisir dans le but d'atteindre un certain objectif .On desire savoir partant d'un etat X0, quels sont les etats quil est possible d'atteindre par le choix judicieux de la commande.

pour cela :

I°)Montrer que le mouvement se fait sur une sphére

2°)Montrer que ça s'écrit aussi sous la forme.

$$X' = \begin{array}{l} R1 \wedge X \\ UR2 \wedge X \end{array}$$

$$X' = R1 \wedge X + UR2 \wedge X = (R1 + UR2) \wedge X$$

3°) Reflechir sur la signification d'une telle relation sur la sphere

4°) Condition de controlabilite du systeme .

5°) Demontrer que (R1 ,R2) independants entraine que le systeme est de rang deux (2) partout sur la sphére.

I°)Nous avons le systeme d'equations:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} VO \\ VI \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{I}{CO} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-I}{CO} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} VO \\ VI \\ i \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-I}{CO} \\ 0 & 0 & \frac{I}{CI} \\ \frac{+I}{CO} & \frac{-I}{CI} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} VO \\ VI \\ i \end{pmatrix}$$

qui s'eait encore:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X0 \\ XI \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -W0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X0 \\ XI \\ X2 \end{pmatrix} + U\begin{pmatrix} 0 & 0 & -W0 \\ 0 & 0 & W1 \\ W0 & -W1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix}$$

$$X^t = (X0, X1, X2)$$

la condition d'orthogonalite de deux vecteurs est :

$$X^t \dot{X}' = 0$$

C'est à dire :

$$X^t\dot{X} = (X0,X1,X2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & W0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -W0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} + U\,(X0,X1,X2)\begin{pmatrix} 0 & 0 & -W0 \\ 0 & 0 & W1 \\ W0 & -W1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix}$$

$$= (X0,X1,X2)\begin{pmatrix} W0\,X2 \\ 0 \\ -W0\,X0 \end{pmatrix} + U\,(X0,X1,X2)\begin{pmatrix} -W0\,X2 \\ W1\,X2 \\ W0\,X0 - W1\,X1 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

Par suite nous obtenons:

$$X^t\,\dot{X}' = 0$$

Donc : l'ensemble $(X0,X1,X2)\ R^3$ se trouve sur une Sphere et en vertu de la condition d'orthogonabité le mouvement de $(X0,X1,X2)$ se fait sur cette sphere.

2°)Montrons que X1 s'ecrit sous la forme:

$$X1 = (k1 + uk2)\wedge X$$

Pour U= 0

Nous aurons :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -W0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \vec{R1} \wedge X = \begin{pmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ R0 & R1 & R2 \\ X0 & X1 & X2 \end{pmatrix}$$

Nous aurons :

$$\dot{X}(0) = W0\ X2 = R1\ X2 - R2\ X1 \qquad (a)$$

$$\dot{X}(1) = 0 = R2\ X0 - R0\ X2 \qquad (b)$$

$$\dot{X}(2) = -W0\ X0 = R0\ X1 - R1\ X0 \qquad (c)$$

de (b) nous tirons :

$$R2 = \frac{X2}{X0}\ R0$$

Nous aurons en remplaçant ~~dans~~ la valeur de R2 dans (a)

$$R1\ X2 - R0\frac{X2\ X1}{X0} = W0\ X2$$

$$R1\ X0\ X2 - R0\ X2\ X1 = W0\ X0\ X2$$

Nous obtenons le systeme d'equations:

$$-R0\ X1\ X2 + R1\ X0\ X2 = W0\ X0\ X2$$

$$R0\ X1 - R1\ X0 = -W0\ X0$$

Solutions remarquables:

$$\begin{cases} R1 = W0 \\ R0 = 0 \\ R2 = 0 \end{cases}$$

Donc nous aurons :

$$\vec{R} = W0\ \vec{J}$$

Pour le calcul de R2 nous avons :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} = u\begin{pmatrix} 0 & 0 & -W0 \\ 0 & 0 & Xi \\ W0-W1 & 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} = u\,R_2 \wedge X = u\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{K} \\ R0' & R1' & R2' \\ X0 & X1 & X2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{X}(0) = U\ (-w0\ x2) = U\ (R1'X2 - R2'X1)$$

$$\dot{X}'1 = U\ (w1\ X2) = U\ (R'2X0 - R'0\ X2)$$

$$\dot{X}'2 = U\ (W0\ X0 - W1\ X1) = U\ (R0'\ X1 - R1'X0)$$

Par suite nous aurons :

$$-W0\ X2 = R1'\ X2 - R'2\ X1$$

$W1\ X2 = R2'\ X0 - X2\ R0$

$W0\ X0 - W1\ X1 = R0' X1 - R0'\ X0$

Solutions remarquables :

$$R0' = -W1$$

$$R1' = -W0$$

$$R2 = 0$$

et par consequent

$$\overrightarrow{R2} = -(W1\vec{i} + W0\vec{J})$$

Donc :

$$\dot{X}(t) = (R1 + U\ R2) \wedge X.$$

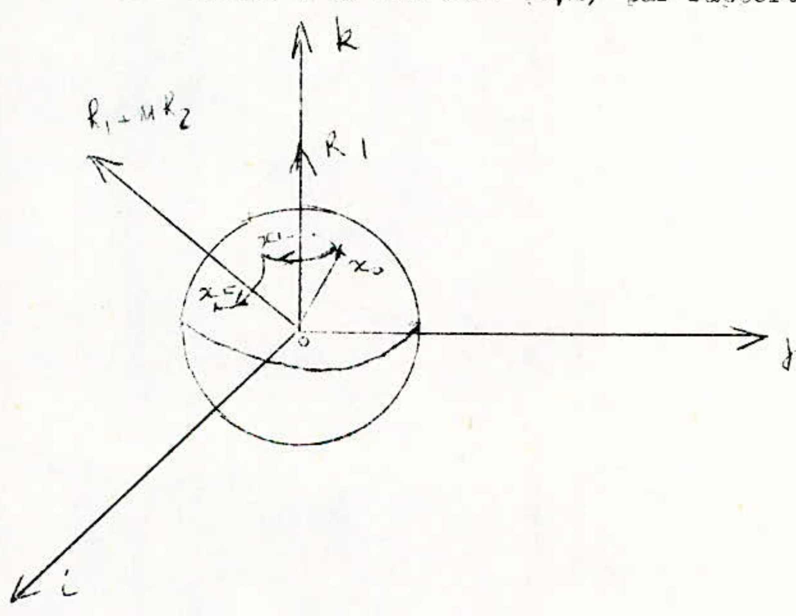
$$= (W0\vec{J} - UW01\vec{t} - U\ W0\vec{J}) \wedge X.$$

$$\dot{X}(t) = \left[-U\ W1\vec{i} + W0\ (1-u)\vec{J} \right] \wedge X.$$

3°) Nous avons trouvé :

$$\dot{X}(t) = (R1 + U\ R2) \wedge X.$$

Cette relation n'est autre que l'expression de la vitesse d'entrainement de x dans le mouvement de rolation autour d'un axe fixe (0,K) par rapport à l'espace.



Si R1 et R2 sont independants . On peut passer d'un point x(t₀) à un point x(t_f) en faisant une rotation autour de R1 ,X0 decrit l'arc X0 X1 puis de X1 à XF en faisant une rolation autour de R1 + U R2 ;X1 decrit l'arcX,XF Par contre:Si R1 et R2 sont dependants c'est à dire $R2 = \lambda R1$ on ne peut faire cette seconde rotation . Car le point X0 tourne indefiniment autour de l'axe fixe et ne peut atteindre ainsi tout point xf.

I) Conclusion : Le systeme (1) est completement controlable . Si et seulement Si R1 et R2 sont lineairement independants.

5) le systeme :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -W0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix} + U\begin{pmatrix} 0 & 0 & -W0 \\ 0 & 0 & W1 \\ W0 & -W1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix}$$

est de la forme :

$$\dot{X}(t) = X\ (x) + U\ Y(x)$$

avec:

$$X(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -W0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix}$$

$$Y\ (x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -W0 \\ 0 & 0 & W1 \\ W0 & -W1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X0 \\ X1 \\ X2 \end{pmatrix}$$

Calculons les crochets: Y ; $\left[[X;Y] ; Y\right]$; $\left[[X;Y] ; \left[[X;Y] ; Y\right]\right]$

$$[X;Y]_{(xo\ x1\ x2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -W0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -W0\ X2 \\ W1\ X2 \\ W0\ X0 - W1\ X1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -W0 \\ 0 & 0 & W1 \\ W0 & -W1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W0\ X2 \\ 0 \\ -W0\ X0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} W0^2 X0 - W0\ W1\ X1 \\ 0 \\ W0^2\ X2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} W0^2\ X0 \\ -W0\ W1\ X0 \\ W0^2\ X2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -W0\ W1\ X1 \\ W0\ W1\ X0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[[X;Y] ; Y\right] = \begin{pmatrix} 0 & -W0\ W1 & 0 \\ W0\ WI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -W0\ X2 \\ W1\ X2 \\ W0X0 - W1X1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -W0 \\ 0 & 0 & W1 \\ W0 & -W1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -W0\ W1\ X1 \\ W0\ W1\ X0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -W0\,W1^2\,X2 \\ -W0^2W1\,X2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -W0^2W1\,X1 - W0\,W1^2\,X0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -W0\,W1^2\,X2 \\ -W0^2W1\,X2 \\ W0^2W1\,X1 + W0\,W1^2X0 \end{pmatrix}$$

$$\Big[[X.Y] ; \big[[X.Y] , Y \big] \Big] (x0\ x1\ x2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -W0\,W1 & 0 \\ W0W1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -W0\,W1^2X2 \\ -W0^2W1\,X2 \\ W0^2W1X1+W0W1^2X0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -W0W1^2 \\ 0 & 0 & -W0^2W1 \\ W0W1^2 & W0^2W1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -W0W1X1 \\ W0W1X0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} W0^{3}WI^2X2 \\ -\omega_0^3\,\omega_1^3\,x_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -W0^2W1^3X1+W0^3W1^2X0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W0^3WI^2\,X2 \\ -W0^2W1^3X2 \\ W0^2W1^3X1-W0^3W1^2X0 \end{pmatrix}$$

$$= -W0^2W1^2 \begin{pmatrix} -W0\,X2 \\ W1\,X2 \\ -W1\,X1+W0\,X0 \end{pmatrix} = -W0^2WI^2 \quad Y\,(x0\ x1\ x2)$$

Par consequent : Y et $\Big[[X.Y] ; \big[[XY] ; Y \big] \Big]$ sont linéairement dépendants les trois champs de vecteurs $Y, \big[[X.Y] ; Y \big] ; \Big[[X.Y] ; \big[[X.Y] ; Y \big] \Big]$ leur rang est le même en tout point et égale au rang du système de 3 Vecteurs . Donc le système est de rang 2.

ILLUSTRATION DE LA COMPLETE CONTROLABILITE
SUR LES GROUPES.

Pour cela montrons que :

I°) SO (n,R) est compact

2°) $X' = Ax + U B x$

$= (A + UB)x$

les familles de champs de vecteurs sont invariants à droite

3°) Tous les champs de vecteurs invariants à droite sur un groupe de lie sont conservatifs.

Conservatif. $\mathrm{Vol}\ (-e^{tV}) = \mathrm{Vol}\ V \quad \forall t.$

4°) Les champs de vecteurs conservatifs sur une variété compact sont poisson stables. (théorème de Poincaré - Hopf)

-0-0-0-

I°) SO (n,r) est Compact :

Définition: Un espace topologique E est dit compact Si

1) il est separé
2) de tout recouvrement ouvert R de on peut extraire une famille finie R' d'element de R qui constitue encore un recouvrement de

il y a aussi le theoreme de Borel-Lebesgue qui s'enonce ainsi :
Soit un espace vectoriel normé de dimension finie les partiés compactes de E ne sont autre que les partie fermées bornées .

$$SO(n,R) = O(n,R) \wedge SL(n,R) \subset R^{n2}$$

Nous allons utiliser le critere de Borel - Lebes ue afin de demontrer que SO (n,R) est compact c'est à dire que SO(n,R)doit être borne et fermé.

Fermé : SO(n,R) est fermé s'il contient tous ses points d'accirmilation.
Soit un element :
$xn \in SO(n,R)$ est conver ent sur $x^* \in SO(n,R)$

Nous avons : $\det Xn = 1$

Soit l'application : $X \longrightarrow \det x - 1$
$X^t x = 1$ $X \longrightarrow x^t x - 1$

Cette application est contenue:

$$GL(n,R) \longrightarrow GL(n,R)$$
$$Xn \longrightarrow X^*$$

Entraine $\det X^* - 1 = 0$
$X^{*t} X^* - 1 = 0$

d'où : $X^* \in SO(n,R)$

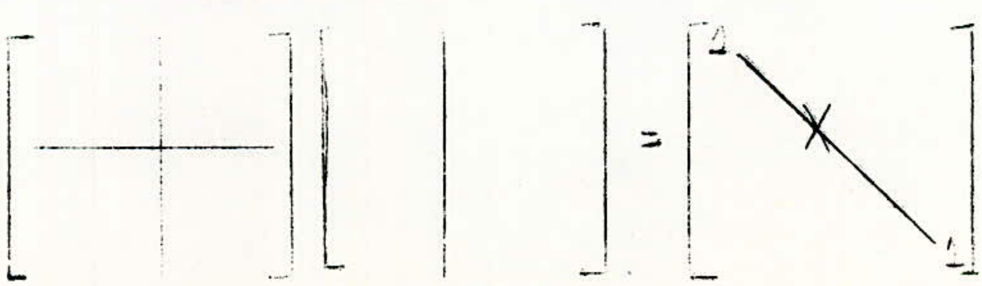
Par Conséquent:

SO(n,R)Contient tous ses points d'accumulation

Donc:

SO (n,R) est fermé

borné:



Nous avons :

$$X^t X = I$$

Pour tout Xi nous avons :

$$X^{it}\, Xi = 1 \qquad Xi = i \text{ eme colonne}$$

On prendra la norme enclidienne $\| \ \|$

$$\sqrt{X^{it} X^{i}} = I = D\,(X,0)$$

SO (n, e) est

- fermé
- borné

Donc SO(n,R) est un roupe compact.

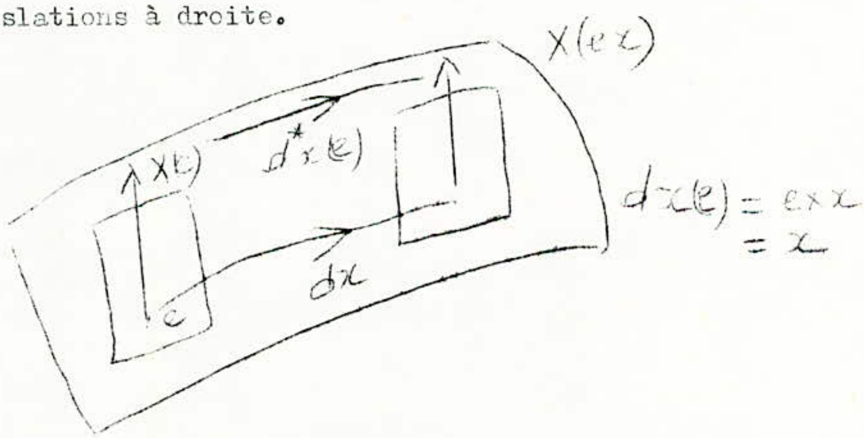
2°) $X = Ax + UBx$

$= (A + U\,B)x$

est invariant à droit

En effet :

Par Definition: Un champ de vecteurs est invariant à droite s'il preserve les translations à droite.



Invariant à droite signifie que le champ de vecteur determine un vecteur X(e) dans le plan tangeant à l'identité e.

D^{*} x(e) est la differentielle de dx au point e

Nous avons les applications :

$$e \xrightarrow{dx} e'x$$

x est invariant à droite par rapport à l'identité e par l'application

dx La differentielle $d\xi \xrightarrow{d^{*}x} d\xi x$

Par suite nous aurons .

$\forall\, x \in G$

$\forall\, e \in G$

$X(x) = X(e)\, x \qquad x \in G$

$\overset{*}{d}x(e)\; X(e) = X(x) \cdot \qquad e \in G$

dans notre cas nous avons

$X(x) = X(e)\, x$

$X(x) = (A + UB)\, x$

$X = (A + UB)x$

Posons

$X(e) = A + UB$

$X(x) = \dot{x}$

Un champ de vecteurs invariant à droit est determiné par sa valeur en e (element neutre de G)

$$X(ex) = d^{*}x(e)\; X(e)$$

Donc : $\dot{X} = (A + UB)\, x$ est un champ de vecteurs invariant à droite.

3°) Tous les champs de vecteurs invariants à droite sur un groupe de lie sont conservatifs.

Conservatif : $\mathrm{Vol}\; e^{tv} = \mathrm{Vol}\; U \;\forall t.$

On se donne en T G2 (plan tangent en e) une forme volume

Par exemple : $X1 \ldots\ldots\ldots\ldots Xn \in T\, G2$

ce qui entraine que :

$$\mathrm{Vol}\; e\,(X1; \ldots\ldots\ldots ; Xn) = \det (X1; \ldots\ldots\ldots\ldots Xn)$$

qu'on designe par vol $e(\tilde{X})$.

On definit:

$$\mathrm{Vol}\; a\,(da^{*}\, \tilde{X}) = \mathrm{Vol}\; e\,(\tilde{X}) \qquad \tilde{X} \in T\, Ge$$

il faut montrer que le volume est invariant par les translations à droite.

$$\mathrm{Vol}\; d(a)\; d^{*}_{(a)}\, X\,1\, a; \ldots\ldots d^{*}_{(a)}\, X_{na}\,) = \mathrm{Vol}\; a\,(X1\, a; \ldots\ldots\ldots ; Xna)$$

$$\mathrm{Vol}\; d_a^{*}\, X1\, a; \ldots\ldots\ldots\; d_a^{*}\, Xna\,) = \mathrm{Vol}\; d_a\,(d_a^{*}\, \tilde{X})$$

$$= \mathrm{Vol}\; e\left(d^{*}(a)^{-1}\; d^{*}(a)\, \tilde{X}\right)$$

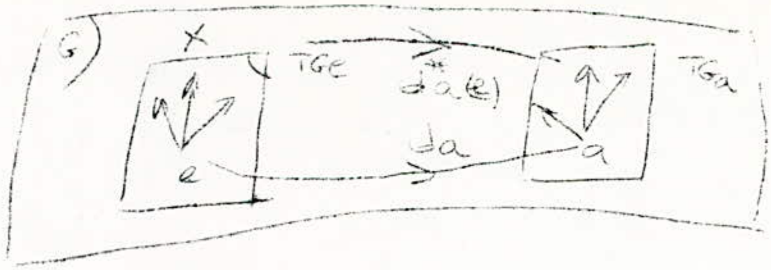
$$= \mathrm{Vol}\; e\left(d^{*\,-1}\, a^{-1}\, d^{*}(a)\, \tilde{X}\right)$$

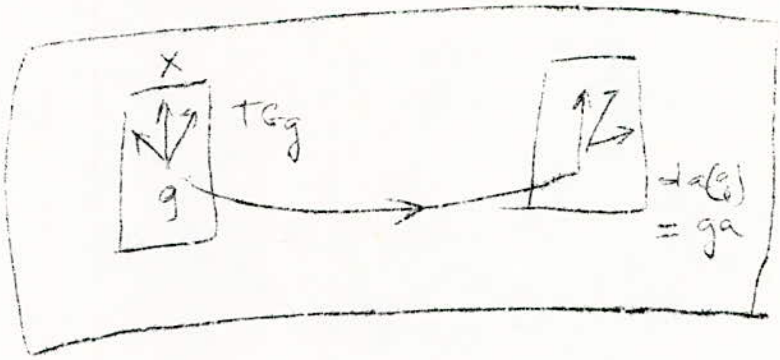
$$= \mathrm{Vol}\; e\,(d^{*}a^{-1}\, X\,)$$

or: $\mathrm{VOL}\; a\,(X1\, a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Xna) \;=\; \mathrm{Vol}\; e\,(d^{*}a^{-1}\, X\,)$

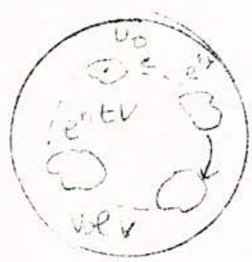
$\in T\; Ga$

$$VOL\ e\ (X) = VOL\ a\ (da^{*}(x))$$





4°) les champs de vecteurs conservatifs sur une variete compacte sont poisson stables (theormr de Poin carré Hopf)



Soit un point x.

et considerons U (x) un voisinage de x

$\forall T > 0 \quad \exists t > T \qquad$ expt X.

X conservatif : $\quad X \xrightarrow{\phi\ (x)} \text{exptX}.$

$\phi\ (U(x)\ );\ \ \phi^{2}(U\ (x)\ ) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \phi^{n}\ (U\ (x)\ )$

$VOL\ \ \phi\ \ (U) = VOL\ \ \phi^{2}(u) = \ldots\ldots = VOL\ \phi^{n}(U)$

$\exists K\ ;\ \ell > 0 \qquad \phi^{k}(U)\ \ \phi^{l}(U) \neq \phi$

$K \neq L$

Sinon : K , L $\ \phi^{k}(U) \cap \phi^{L}(U) = \phi$

Les ensembles ϕ^{k} (U) et ϕ^{L} (U) sont dis joints et on aura un volume infini contrairement à l'hypothese où l'on a une variete compacte VOL u UO = constante

Supposons :

K L $\qquad \phi^{-L} \quad \phi^{K}(U) \quad \phi^{L}(0) \quad \neq \quad \phi$

$$\phi^{(k-1)}_{(U)} \wedge U \neq \phi$$

Posons:

$$\theta = (k-1)\, t$$

$$\exp \theta\, x = \phi^{(k-1)}_{(x)}$$

Donc: X est poisson stable.

et comme :

SO (n,R) agit transitivement sur la sphere .

c'est à dire:

xo

x1 $\in$ à la sphere $\quad \exists g \in$ SO (n,R)

tel que :

x1 = g xo

Donc le systeme etudie est completement controlable sur SO (n,R)

—o—o—o—

C H A P I T R E V

N O T I O N S S U R L'O B S E R V A B I L I T E D E S S Y S T E M E S N O N L I N E A I R E S .

--o--o--o--o--

NOTIONS SUR L'OBSERVABILITE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Introduction:

On considere les systemes regis par les equations differentielles de la forme:

$$\begin{aligned} x &= F(x,u) \\ y &= H(x) \end{aligned} \qquad (I)$$

On prendra comme espace d'etat une variété de classe C^∞ de dimension n, connexe et paracompacte.

l'entrée U prend ses valeurs dans un sous ensemble de R^p

la sortie Y prend ses valeurs dans R^q

pour $U \in R$ $F(x,u)$ denote un champ de vecteurs de classe C^∞ sur M qu'on supposera complet

la fonction H est de classe C^∞

Observabilité:

Pour un systeme non linéaire, la notion d'observabilité peut être formulé de plusieurs façon, la plus simple est celle qui se rapporte à la notion de disinguabilité des etats, propre de la théorie generale des systemes.

Deux etats x0 et x_I sont dits indistinguables si pour tout $[t_I \quad t0]$ et pour entrée admissible.

$$U\,[to \quad t_1] \longrightarrow \Omega$$

les solutions correspondants de l'equation differentielle (I) satisfaient la condition

$$H\left[Xu\ (t_1 xo)\right] = H\left[Xu\ (t_1 x_1)\right]$$

Reciproquement :

On dit que deux etats sont distinguables s'il existe un temps $[t_1 \quad t_0]$ et une entrée admissible.

$$U\ (t_0 t_I) \longrightarrow \Omega$$

telle que:

$$H\left[XU\ (t_1 x_0)\right] \neq H\left[Xu\ (t_1 x_1)\right]$$

la definition suivante est basée sur cette notion.

Definition N° I

Un systeme est observable en Xo si tout autre etat x=≠= xo est distin able de xO

Un systeme est observable S'il est observable en tout xo M

la posibilité de destin uer deux etats ,selon la definition (I) est un concept lobal. Il arrive peut-etre que pour en endrer depuis xo et x_1 deux courbes intt rales qui donnent lieu de deux sortiés differents :on a besoin de s'eloi-ner beaucoup de xo ou de x_1

Hermann et Krener ont propose une notion de distin abilité locale qui peut etre formulée de la façon suivante.

Soit U un ouvert de M

et soient deux etats:

$$xo \in U$$
$$x_1 \in U$$

Sont dits U disti nables s'il existe un temps t_1 t_0 est une entrée

$$U \left[t_0 t_1 \right] \longrightarrow \Omega$$

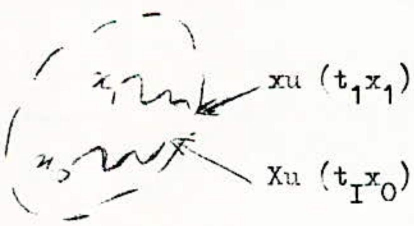
pour le quel on dit

$$Xu\ (t_1 x_0) \in U \qquad \forall t \in \left[t_0 t_I \right]$$
$$Xu\ (t_1 x_1) \in U \qquad \forall t \in \left[t_0 t_I \right]$$

et soit:

$$H \left[Xu\ (t_1 x_0) \right] =\neq= H \left[Xu\ (t_1 x_1) \right]$$

la definition suivante est basée sur cette definition :



Definition N° 2

Un systeme est observable localement en xo s'il existe un ouvert Uo de xo tel que dans tout ouvert U C Uo de xo tout autre etat x=≠= xo est U distin able de xo.

un systeme est observable localement s'il est observable localement en tout xo M.

Il existe aussi une troisieme notion d'observabilité qui est la plus convenable pour l'etude des problemes de decom : structurelle.

Deux etats xo et x1 sont dits indistinguables fortement s'il existe une courbe continue.

$$\sigma : (0,I) \longrightarrow M.$$

avec les proprietés suivantes:

$$\sigma(o) = Xo$$
$$\sigma(I) = X1$$

et pour tout $S \in [0,I]$ $\sigma(S)$ est indistinguable des Xo Si une telle courbe n'existe pas les deux etats sont dits distinguables faiblement:

On a alors la definition suivante:

<u>Definition N°3</u> Un systeme est observable faiblement en Xo si tout autre etat $X \neq Xo$ est distinguable faiblement de Xo.
Un systeme est observable faiblement s'il est observable faiblement en tout Xo de M.

En generale ,il n'y a pas de relation entre observabilité et observabilite locale. Considerons par exemple le systeme .

$$X' = F(x,u)$$
$$Y1 = H1(x)$$
$$Y2 = H2(x)$$

Où $M = R$
$\Omega = \{ U \in R;\ U \geq 0 \}$

Supposons que F,H1,H2 Soient des fonctions de classe C^∞ Comme celles de la fig 1 et 2.

Le systeme est observable localement ,mais pas observable (les couples d'etat (x,-x) avec /x/ I sont indistinguables)

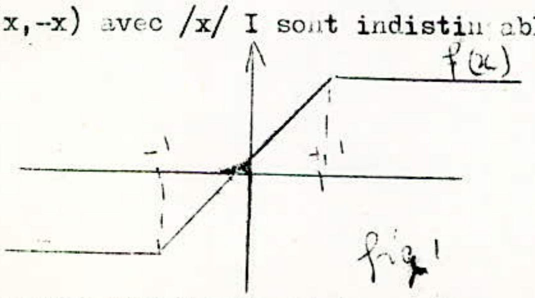


fig 1

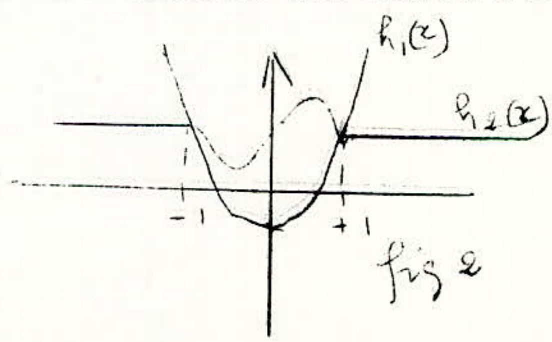


fig 2

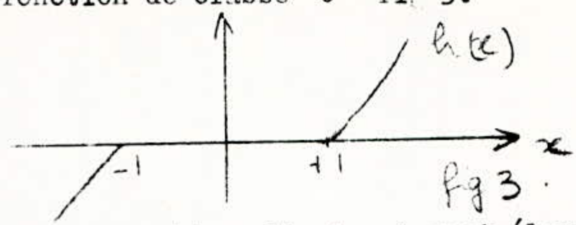
Considerons maintenant le systeme :

$$x' = U$$
$$Y = h(x)$$

Où M=R
r=R

C O N C L U S I O N .

Supposons que H soit une fonction de classe C^{∞} fig 3.



fg3.

Ce systeme est observable mais pas observable localement (les couples d'etat dans U= (-I;I) ne sont pas U distinguables)

On peut verifier que entre les difinitions données il existe les implications suivantes:

observabilité locale ⟹ observabilité faible.

⇑

observabilité.

toutefois pour les systemes lineaires:les trois proprietés sont toutes equivalentes .

-o-o-o-o-

C O N C L U S I O N .

Dans la mesure où un systeme non linéaire est parfaitement connue où l'on à accés à sa structure interne ;sa representation par modele d'etat ,ses proprietes (controlabilité ,observabilité)nous permettent de mieux connaitre le systeme afin de mieux l'utiliser.

-o-o-o-

Biblio raphie:

Chapitre N°I

C lobry controlabilité des systeme non lineaires

"R.C.P. 567 CNRS Aussois, mai 80"

Chapitre N°2

C . SALLET. . Complet controlabilité sur les roupes lineaires

" "

ChapitreN° 5

Alberto ISIDORI Observabilité et Observateure des systemes non lineaires.

" "

Autre Sources d'Inspiration.

- KUPKA - JURDJEVIC.

"Accessibilitry on semi simple lie roups.and their bomo eneons espaces "

Annoles de l'Institut Fournier 1978.

- KUPKA - "Controlabilité sur le produit semi direct d'un roupe compact par un espaces vectriel réel" à paraître.

- GAUTHIER-"Controllability of bilinera systemes"

- SIAOI - Journal of control and optimisation "(à paraître.)

- B.BONNARD-"Controle de l'attitude d'un satellite"

- - R.A.I.R.O. (à paraître)

- ISDORI - KREPER "Noulinear decouplin feedboch,a differential approach"

- LOBRY "Controlabilité des systemes non lineaires."

- SIAM journal of control and optimisation --1970-

-o-o-o-