

3/80

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT GÉNIE CHIMIQUE

1EX

PROJET DE FIN D'ETUDES

Sujet :

*Condensation de la vapeur
au contact direct d'un liquide*

Proposé par : Dr. J. AMANOWICZ

Etudié par : Lakhdar BOUHOUIA



Pour la Bibliothèque.



A la mémoire de ma mère,
à mon père, frères et sœurs et leur mère,
à mon cher frère Messaoud,
à ma fiancée
à tous ceux qui me sont chers
je dédie ce modeste travail.

Je tiens à remercier vivement M^r Jack AMANOWICZ
Docteur ès-sciences et Maître de conférences à l'E.N.P.A d'avoir
bien voulu me diriger dans mon travail.

Je remercie également Messieurs :

Le Président du Jury - S.E. CHITOUR Professeur à l'ENPA
Les Examineurs - J. AMANOWICZ Maître de Conférences
- J. GROCHOWSKI Maître de Conférences
- S. BELAADI Maître Assistant
- GALISKI Maître Assistant.

d'avoir accepté de juger ce modeste travail.

Je désire remercier cordialement Messieurs Madani Bellakhdar,
Abrahim Zaoui et Khaled Bouamoud pour l'aide qu'ils m'ont apportée.

J'aimerais aussi remercier tous mes amis qui m'ont encouragé
Que tous mes Professeurs trouvent ici l'expression de mon
profond respect.

Sommaire

	page
Introduction	1
Chapitre I Généralités	
1.1 Différents modes de transfert de chaleur	3
1.2 Echanges de chaleur lors de changements de phases	5
1.3 Equation de la propagation de chaleur par conduction	5
Chapitre II Etude bibliographique	
2.1 Introduction	9
2.2 Chauffage par contact direct de jet: tombant laminaire de liquide	9
2.3 Détermination des températures interfaciales et des coefficients d'évaporation avec un tensiomètre à jets	16
Chapitre III Etude théorique d'un modèle simplifié	
3.1 Description et mise en équation du modèle	24
3.2 Résolution de l'équation de la chaleur	25
3.3 Usage du diagramme de Croetz	34
3.4 Profil des températures	38
3.5 Coefficients de transfert	38
3.6 Application	43
Chapitre IV Etude expérimentale	
4.1 Description de l'appareillage	55
4.2 Technique opératoire	56
4.3 Résultats et discussions	59
4.4 Conclusion	60
Conclusion Générale	62
Annexes	64
Bibliographie	81

Introduction

Le chauffage par contact direct trouve plusieurs applications en industrie.

Certains réchauffeurs d'eau, désaérateurs et évaporateurs fonctionnent sur ce principe.

L'échange de chaleur par contact direct présente plusieurs avantages dont les principaux sont :

- Une conception de l'appareillage relativement simple d'où des pièces d'équipement relativement moins dispendieuses.
- Une diminution de la surface métallique sujette à résister à la corrosion, d'où un coût d'appareillage plus bas.
- De faibles coûts d'entretien résultant d'une réduction de la surface exposée à la corrosion et d'une plus grande accessibilité.
- Un transfert de chaleur plus complet à cause de coefficients de transfert élevés.

Ces avantages attirent l'attention de plusieurs chercheurs.

Parmi les inconvénients que peut présenter ce nouveau mode d'échange on compte :

- Utilisation possible que pour deux liquides immiscibles ou pour un liquide et sa vapeur (ex: eau et vapeur d'eau).

- Les pièces d'équipement doivent être volumineuses.

Il existe plusieurs possibilités de réaliser un échange de chaleur par contact direct. On peut imaginer par exemple un échange thermique entre une phase liquide finement divisée (gouttelettes) traversant, par gravité un bain de vapeur. Le liquide peut avoir un aspect continu: film, jets etc... Le barbotage de la vapeur dans un liquide est également une autre possibilité de chauffage.

L'échange thermique, comme dans le cas des échangeurs classiques, peuvent s'accompagner de changement d'état; une vapeur, à son point de saturation, se condense à l'interface vapeur - liquide où prend naissance un flux de chaleur latente qui se propage dans le liquide et produit éventuellement (s'il s'agit de deux phases de natures différentes) une évaporation partielle ou totale de ce dernier.

Dans la présente étude on examine le cas de la vapeur d'eau saturée qui se condense à la pression atmosphérique en cédant ses calories à de l'eau liquide.

On se propose d'étudier théoriquement le comportement d'un filet d'eau traversant un bain de vapeur et calculer sa température moyenne à la sortie de l'échangeur qui sera comparée aux résultats expérimentaux.

chapitre I
Généralités

1.1 Différents modes de transfert de chaleur :

On distingue trois modes de transmission de chaleur :
Conduction, convection et rayonnement.

1.1.1 Conduction :

Ce mode d'échange tend à une distribution homogène au sein du milieu, de l'énergie cinétique moyenne des diverses particules par diffusion des zones où la valeur moyenne de cette énergie est élevée, vers les zones où elle est plus faible.

La loi correspondant à ce processus de diffusion de la chaleur s'écrit, pour un milieu isotrope :

$$\vec{\Phi} = \lambda \text{grad} T \quad \text{ou}$$

λ : conductivité thermique du milieu [$\text{kcal m} / \text{m}^2 \text{s} \text{K}$]

Φ : densité de flux de chaleur en un point du milieu
[$\text{kcal} / \text{m}^2 \text{s}$]

T : température du point considéré [$^{\circ}\text{K}$]

La conduction est le seul mode de transfert intervenant au sein des milieux solides opaques.

1.1.2 Convection :

On distingue la convection forcée, dans laquelle le mouvement du fluide est produit par une action

extérieure (pompe, ventilateur, ...) de la convection libre (ou naturelle), dans laquelle ce mouvement résulte simplement de la différence de densité entre les parties chaudes et froides du fluide.

On introduit, par analogie avec le transfert thermique par conduction, un coefficient d'échange superficiel h tel que la densité de flux de chaleur Φ , à travers un élément de surface de la paroi, soit proportionnelle à la différence entre la température T_p de cet élément de surface et une température moyenne du fluide T_f

$$\Phi = h (T_p - T_f)$$

h : s'exprime en $\text{kcal} / \text{m}^2 \text{K} \text{s}$

4.1-3 Rayonnement :

Les atomes, molécules et électrons libres^{des} corps peuvent perdre une partie de leur énergie cinétique par émission d'un rayonnement électromagnétique.

Le processus inverse est possible, un corps est susceptible de transformer une partie du rayonnement reçu à sa surface pour élever son énergie interne donc sa température.

Le rayonnement thermique n'exige pas de support matériel pour se propager.

La relation de base selon laquelle la puissance P

du rayonnement thermique est émise par une unité de surface d'un corps noir est :

$$M^{\circ} = \sigma T^4$$

σ : s'appelle constante de Stefan Boltzmann.

Elle est égale à : $4.88 \times 10^{-8} \text{ kcal/m}^2 \text{ h } (^{\circ}\text{K})^4$

1-2 Echanges de chaleur lors de changements de phase.

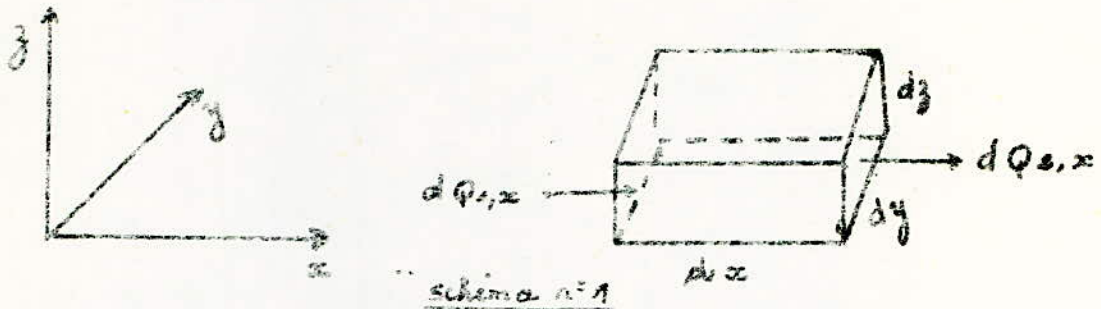
Combinaisons des différents modes.

Dans la réalité les différents modes sont, le plus souvent, intimement liés : conduction et rayonnement dans le cas des solides non opaques (verres, matières plastiques, ...) ou encore conduction, convection et rayonnement dans les fluides.

Lors d'un échange de chaleur traduit par une variation de température des corps concernés, il arrive souvent de se produire un changement de phase (vaporisation, condensation, fusion, congélation, ...) constituant une source (ou puits) de chaleur supplémentaire.

1-3 Equation de la propagation de la chaleur par conduction dans un corps en mouvement :

considérons un élément de fluide qu'on lui applique le principe de conservation d'énergie.



La loi de base de la conduction thermique est :

$$q = \lambda \frac{A}{L} \Delta T \quad (1)$$

q : flux de chaleur.

A : surface traversée par le flux.

L : distance parcourue par le flux.

λ : conductivité thermique du milieu

ΔT : différence de température.

L'équation (1) peut s'écrire sous la forme différentielle

$$dQ = -\lambda A \frac{dT}{dx} dz \quad (2)$$

où dQ : énergie thermique conduite dans la direction x pendant un intervalle de temps z

Bilan d'énergie :

$$dQ_{1,x} = -\lambda (dy \cdot dz) \frac{\partial T}{\partial x} dz$$

$$dQ_{2,x} = -\lambda (dy \cdot dz) \frac{\partial}{\partial x} (T + \frac{\partial T}{\partial x} dx) dz$$

$$= -\lambda (dy \cdot dz) \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \right) dz$$

Des équations analogues existent pour les quantités

$dQ_{1,y}$, $dQ_{2,y}$ et $dQ_{1,z}$, $dQ_{2,z}$ qui sont transmises dans les directions y et z .

La quantité élémentaire totale de chaleur absorbée par le petit volume pendant $d\tau_0$ s'écrit :

$$dQ_1 = dQ_{1,x} + dQ_{1,y} + dQ_{1,z}.$$

L'énergie qui sort est :

$$dQ_2 = dQ_{2,x} + dQ_{2,y} + dQ_{2,z}.$$

Enfin l'énergie qui s'accumule s'écrit

$$dQ_3 = \rho c_p (dx dy dz) dT$$

avec ρ : la masse volumique de la substance

c_p : sa chaleur spécifique.

En vertu du principe de la conservation d'énergie

$$\text{on a : } dQ_1 = dQ_2 + dQ_3 \quad (3)$$

Si on suppose qu'il n'y a aucune création d'énergie (source) par l'élément considéré.

D'autre part, la température fonction du point $M(x, y, z)$ et du temps τ s'écrit dans sa forme différentielle :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

divisons par $d\tau$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\tau} &= \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} \\ &= \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\partial T}{\partial x} v_x + \frac{\partial T}{\partial y} v_y + \frac{\partial T}{\partial z} v_z \end{aligned}$$

v_x, v_y, v_z étant les composantes de la vitesse v du point $M(x, y, z, \tau)$

ainsi :

$$dQ_3 = \rho c_p (dx \cdot dy \cdot dz) dT$$
$$= \rho c_p (dx \cdot dy \cdot dz) \left(\frac{\partial T}{\partial z} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz$$

Enfin l'équation (3) donne :

$$\boxed{\frac{dT}{dz} = \frac{\partial T}{\partial z} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)} \quad (4)$$

avec $k = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ = coefficient de diffusibilité thermique $[m^2/sec]$

Dans cette équation (4) les termes $v_x \frac{\partial T}{\partial x}$; $v_y \frac{\partial T}{\partial y}$; $v_z \frac{\partial T}{\partial z}$ s'appellent termes de convection .

Chapitre II

Etude bibliographique

2-1 Introduction :

Les théories portant sur le transfert de chaleur avec ou sans changement de phase sont nombreuses et bien élaborées. Toutefois, il existe certains cas particuliers qui sont étudiés que par quelques rares chercheurs. On cite l'exemple du transfert de chaleur par contact direct d'un jet de liquide tombant, d'une bulle de vapeur qui se condense dans un milieu liquide infini...

En ce qui concerne l'étude du problème du jet d'eau, auquel on ajoute notre modeste contribution, deux intéressantes publications ont été faites, dont les thèmes sont :

* Chauffage par contact direct de jets de liquide laminaires. [11]

* Détermination des températures interfaciales et coefficients d'évaporation avec un tensiomètre à jet. [1]

On juge utile de rappeler de ces deux publications

2-2 Chauffage par contact direct de jet tombant laminaire de liquide (Direct contact heating of laminar falling liquid jets)

Il semble que le chauffage par contact direct de jets accélérés de liquide, problème ressemblant au chauffage d'une

eau d'alimentation entre deux plaques d'un désaérateur et d'un réchauffeur à contact direct, n'a pas été examiné et par suite une tentative est faite ici pour étudier analytiquement le même problème avec des hypothèses appropriées.

2.2.1 Formulation mathématique:

Le modèle physique est montré sur la figure n° 1. Dans cette analyse, la variation de la pression statique, la tension superficielle; les effets de poussées et la résistance superficielle sont supposés négligeables.

On a supposé également que les propriétés physiques du liquide et de la vapeur sont indépendantes de la température.

Les couches limites thermiques se développent dans les régions de la vapeur et du jet de liquide à partir de l'interface $x = 0$.

L'épaisseur de la couche limite thermique croît jusqu'à ce qu'elle atteigne l'axe du jet liquide à $x = x_s$. Cette région est appelée région en développement thermique.

Au-delà commence la région thermique développée. Avec ces hypothèses les équations de bilan matière, de quantité de mouvement et d'énergie peuvent être écrites, en écoulement laminaire permanent comme suit:

2.2.1.1 Région en développement thermique:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u r \, dr = \dot{m} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 r \, dr - U_3 \dot{m} = \rho g \delta^2 / 2 + \mu \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_0^{\delta} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \int_s^{\delta_v} \rho_v U^2 r \, dr + U_3 \dot{m} = \mu_v \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \Big|_0^{\delta_v} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{s-s_c}^s \rho u C_p T r \, dr - C_p t_3 \dot{m} + C_p t_0 \frac{d}{dx} \int_0^{s-s_c} \rho u r \, dr \\ = K_0 \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{s-s_c}^s \end{aligned} \quad (4)$$

Les conditions aux limites s'écrivent conformément au modèle physique :

$$\text{à } x=0 \quad u = U_0 \left(1 - r^2 / h_0^2 \right) \quad (5)$$

$$r=0 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

$$r = s - s_c \quad T = T_0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

$$r = s \quad u = U = U_3 ; \quad \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} ; \quad T = T_3 \quad (8)$$

$$\rho_3 \dot{m} = K_0 s \frac{\partial T}{\partial r} \quad (9)$$

$$r = s_v \quad U = 0 ; \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \quad (10)$$

Pour résoudre les équations de (1) à (4) avec les équations des conditions aux limites de (5) à (10), on suppose que les profils des vitesses et des températures prennent les formes suivantes :

$$u = U_0 (a_0 - a_1 \xi^2) \quad (11)$$

$$U = U_3 \xi_v^2 \quad (12)$$

$$T_2 = \frac{(t-t_0)}{\Delta T} = \xi_c^2 \quad (13)$$

où

$$\xi = \frac{\varphi + \psi_0 - 1}{\psi_0} \quad (14)$$

2.2.1.2 Région thermique développée :

Dans cette région toutes les équations de (1) à (4) restent valables sauf l'équation (4) qui prendra la forme :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u c_p t r dr - c_p t_s \dot{m} = K_0 \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) \Big|_0^{\delta} \quad (15)$$

Les équations des conditions aux limites de (5) à (10) sont satisfaites à l'exception de l'équation (7) et par suite le profil des vitesses est encore valable par contre le profil des températures est modifié pour cette région.

$$T_2 = \frac{t - t_0}{\Delta T} = \Phi + (1 - \Phi) \xi^2 \quad (16)$$

où Φ est une fonction arbitraire de \bar{x} choisie de telle façon

$$\text{qu'à } x = x_d \quad T_1 \equiv T_2 \quad (17)$$

, ceci donne la condition initiale pour Φ

$$\Phi(\bar{x}_d) = 0 \quad (18)$$

La technique d'intégration d'Euler est utilisée pour la résolution du problème. Tous les calculs sont faits par ordinateur.

2.2.1.3 Température moyenne :

Définissons la température moyenne dans le jet liquide comme :

$$t_m = \frac{1}{\pi \delta^2} \int_0^{\delta} 2\pi r t dr$$

On montre que pour la région en développement thermique la température moyenne s'écrit :

$$T_m = \frac{t_m - t_0}{\Delta T} = 2 \Psi_6 (1 - 0,35 \Psi_6) / 3 \quad (19)$$

Il vient pour la région thermique développée

$$T_m = \frac{t_m - t_0}{\Delta T} = (1 + \Phi) / 2 \quad (20)$$

2.2.3 Résultats :

Le rayon adimensionnel du jet liquide dans le cas où il n'y a pas condensation et pour $\alpha = 16,07$ est comparée aux résultats expérimentaux de Duda et Vrentas sur la figure n° (2)

La variation de la température moyenne adimensionnelle est montrée par la figure n° (3). On note que cette température atteint rapidement sa valeur limite qui est 2 pour des petits nombres de Prandtl. Ceci est dû au fait que la capacité calorifique du liquide est faible pour des nombres de Prandtl petits. On trouve aussi que l'influence du paramètre α sur la température moyenne adimensionnelle est insignifiante. Ceci peut-être attribué au fait que lorsque α croît, le rayon du jet, et par conséquent la surface d'échange de chaleur décroît. Les deux effets sont antagonistes.

L'équation (20) montre que T_m prend la valeur de 0,5 au point où la couche limite en développement thermique touche l'axe du jet liquide. La figure $T_m = 0,5$ sépare donc les deux régions thermiques.

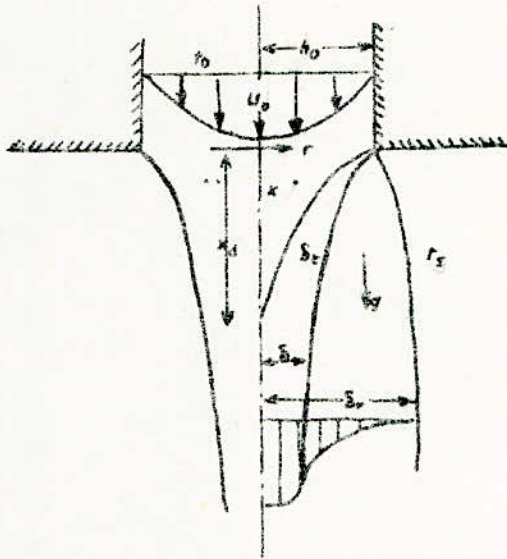


Fig. 1 Modèle physique

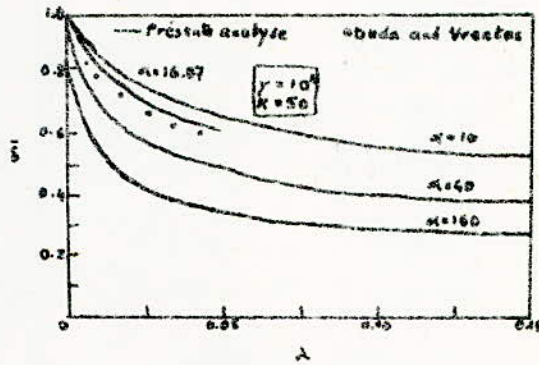


Fig. 2. Rayon du jet

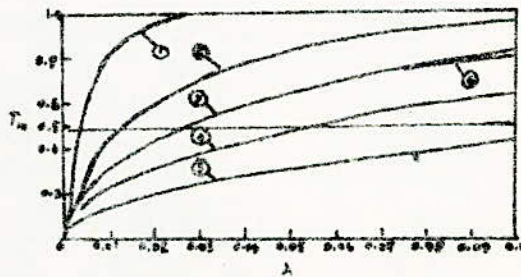


Fig. 3. Température moyenne

	$\alpha = 20$		$\gamma = 40^\circ$		$K = 50$	
	0.1	0.5	1	2	5	
$\alpha = 5$	⊙	⊙	⊙	⊙	⊙	
$\alpha = 3$			⊙			

Nomenclature (chapitre 2-2)

C_p	chaleur spécifique du liquide	δ_v	rayon de couche limite de la vapeur
g	accélération de la pesanteur	δ_t^A	épaisseur de la couche limite thermique
h_{fg}	chaleur latente de condensation	λ	coordonnée adimensionnelle (\bar{x}/Re)
K	rapport des viscosités (μ/μ_v)	ρ, ρ_v	densités du liquide et de la vapeur.
K_0	conductivité thermique du liquide	μ, μ_v	viscosités du liquide et de la vapeur
Pr	nombre de Prandtl ($\mu C_p / K_0$)	ξ, ξ_v	$(r/s)(\Psi_v - \xi) / (\Psi_v - 1)$
Re	nombre de Reynolds ($2\rho U_0 h_0 / \mu$)	Ψ_{t1}, Ψ_{v1}	$(s_t/s)(s_v/s)$
t	température		
ΔT	différence de température ($t_s - t_0$)		
u, U	composante de vitesse dans la direction de l'écoulement.		
U_0	vitesse maximum à l'entrée		
U_s	vitesse à l'interface		
x, r	coordonnées		
x_d	la distance à partir de laquelle le jet est complètement développé thermiquement		
\bar{x}_d, \bar{x}	$(x_d/h_0), (x/h_0)$		
α	$(\rho g h_0^3 / \mu U_0)$		
B	$(C_p \Delta T / h_{fg})$		
β	$\rho/\mu (\rho_v/\mu_v)$		
$\delta, \bar{\delta}$	rayons du jet, (δ/h_0)		

2.3 Détermination des températures interfaciales et des coefficients d'évaporation avec un tensiomètre à jet:

2.3.1 Introduction

Le problème de l'évaporation à la surface d'un jet de liquide soumis à une faible pression est analysé afin de prévoir les températures superficielles et les coefficients d'évaporation. Une solution analytique est obtenue dans le cas où la température superficielle est légèrement différente de la température initiale. Le coefficient d'évaporation moyen \bar{E} est obtenu explicitement en terme de flux moyen de masse issu du jet.

L'utilisation du tensiomètre à jet comme moyen de mesure quantitative des caractéristiques de l'évaporation nécessite la connaissance de la température interfaciale du jet.

Maa et Hickman utilisaient une technique itérative pour estimer la température de surface du jet. Cette technique consiste à introduire un coefficient de transfert de chaleur initialement inconnu pour décrire la condition limite à l'interface. On résout les équations en attribuant une valeur appropriée au coefficient, puis on procède à une iteration pour déterminer le coefficient de transfert de chaleur.

La présente étude a pour objet de montrer que la température superficielle peut être déterminée d'une manière rigoureuse

sans avoir recours à des procédures itératives.

2.3.2 Formulation du problème :

On considère le système suivant :

Un jet laminaire de rayon R , supposé constant est formé au niveau du plan $x = 0$ où la surface du liquide entre en contact avec la vapeur ambiante.

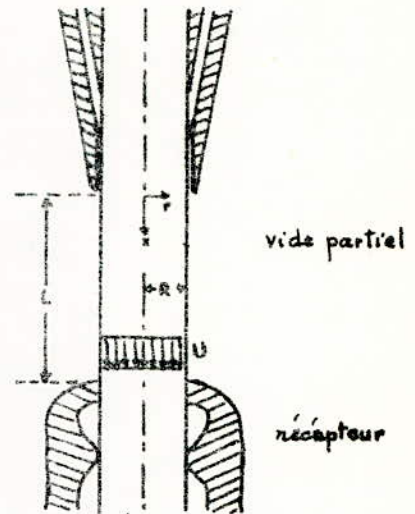
Une distribution de vitesse presque uniforme est réalisée au moyen d'un bec protégeant le jet de la vapeur sur une distance suffisante pour que le gradient de vitesse tende à s'annuler.

Le champ de température dans un jet laminaire est donné par l'équation de chaleur.

$$(U + u) \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad (1)$$

où U est la vitesse initiale du jet, u et v sont les perturbations sur la direction de l'écoulement, provoquées par l'évaporation ou la condensation.

Maa (1969) a essayé d'incorporer le terme de convection radial, $v \partial T / \partial r$, dans le terme de conduction radial, $(\alpha / r) \partial (r \partial T / \partial r) / \partial r$ en introduisant une pseudo-diffusibilité thermique α' à la place de α , où α' est obtenue par une procédure itérative.



Comme les effets du mouvement radial sont petits pour des jets courts, nous négligeons les perturbations en prenant $u = v = 0$ dans l'équation (1). D'autre part, puisque le nombre de Peclet ($Pe = UR/\alpha$) est grand, le terme de conduction axial peut-être négligeable. En définissant un temps de contact, t , par $t = x/U$ et en tenant compte des simplifications faites l'équation (1) se réduit à :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (0 < t < L/U \equiv t_c) \quad (2)$$

$$0 < r < R$$

Les conditions aux limites sont :

$$T(r, 0) = T_0 \quad (\text{Température de sortie du bec constante et uniforme})$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, t) = 0 \quad (\text{pas de flux à travers l'axe du jet}) \quad (4)$$

$$T(R, t) = T_s(t) \quad (\text{Température superficielle}) \quad (5)$$

La distribution de température à la surface $T_s(t)$ est inconnue. Ce problème n'est donc pas bien posé car on ne peut pas décrire a priori la condition limite à l'interface.

Nous pouvons néanmoins, chercher une autre équation qui doit-être satisfaite.

Maa (1967), en se basant sur un bilan d'énergie à la surface du fillet établit l'équation suivante

$$k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{\lambda_v}{M} \left[E \sqrt{\frac{M}{2\pi R_0}} (P_s T_s^{-1/2} - P_a T_a^{-1/2}) \right] \quad (6)$$

Le terme entre crochets représente le flux net de masse entre la surface du jet et le milieu ambiant.

L'équation (6) n'inclut aucun transfert de chaleur sensible entre la surface et la phase gazeuse. Mais, du fait que la conductivité thermique de la vapeur est faible, on n'envisage que le transport de la chaleur latente.

La pression à la surface est une fonction exponentielle de la température à la surface. Elle est donnée par l'équation de Clausius

$$P_s = P_s^0 \exp\left(\frac{\lambda_v}{R_g} \frac{T_s - T_0}{T_s T_0}\right) \quad (7)$$

La considération de toutes ces équations permet de trouver la température à l'interface

2-3.2.1 Solution asymptotique du problème

Si $T(R, t) = T_s = \text{constante}$

$$* T(r, t) = T_0 + (T_s - T_0) \left[1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_m r/R) e^{-\lambda_m^2 \alpha t/R^2}}{\lambda_m J_1(\lambda_m)} \right] \quad (8)$$

avec λ_m tel que $J_0(\lambda_m) = 0$

Si $T(R, t) = T_s(t)$ (évolution de T_s)

$T(r, t)$ s'obtient en appliquant le théorème de Duhamel.

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left\{ [T_s(t') - T_0] \times \left[1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_m r/R)}{\lambda_m J_1(\lambda_m)} e^{-\lambda_m^2 \alpha (t-t')/R^2} \right] \right\} dt' \quad (9)$$

La combinaison des équations (9) et (6) donne:

$$\beta E (P_s T_s^{-1/2} - P_0 T_0^{-1/2}) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [T_s(t) - T_0] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} + \int_0^t [T_s(t') - T_0] \times \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m \alpha}{R^2} e^{-\lambda_m^2 \alpha (t-t')/R^2} \right] dt' \right\} \quad (10)$$

avec: $\beta = \frac{\lambda_v}{R_g} \sqrt{\frac{1}{2\pi R_g M}}$ (la règle de Leibnitz est appliquée pour dériver une intégrale)

* L'auteur a dû se tromper dans l'établissement de l'équation (8) cette équation s'écrira comme suit:

$$T(r, t) = T_0 + (T_s - T_0) \left[1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_m r/R)}{\lambda_m J_1(\lambda_m)} e^{-\lambda_m^2 \alpha t/R^2} \right]$$

Pour des temps de contact petits le problème de convergence de la série⁽³⁾ apparaît.

Dans cette dernière situation le problème se simplifie.

On pose : $y = \frac{R-x}{R}$; $\tau = \frac{\alpha t}{R^2}$; $\phi = \frac{T-T_0}{T_0}$

Les équations (2) ; (3) ; (5) à (10) se réduisent à :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad ; \quad 0 < \tau < \alpha L / (UR^2) \quad (11)$$

$$0 < y < \infty$$

$$\phi(y, 0) = 0 \quad (12)$$

$$\phi(\infty, \tau) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(0, \tau) = \frac{ER\beta}{T_0^{3/2}} \left[\frac{P_1}{(1+\phi_1)^{1/2}} - \frac{P_2}{(1+\phi_2)^{1/2}} \right] \quad (14)$$

$$\phi(0, \tau) = \phi_s \quad (15)$$

$$\phi(y, \tau) = \phi_s \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\tau}} \right) \quad (16)$$

$$\phi(y, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \phi_s(\tau') \operatorname{erfc} \left(\frac{y}{2\sqrt{\tau-\tau'}} \right) d\tau' \quad (17)$$

$$\frac{ER\beta}{T_0} \left\{ P_1 [T_0(1+\phi_1)]^{-1/2} - P_2 T_0^{-1/2} \right\} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{\phi_s(\tau')}{\sqrt{\tau-\tau'}} d\tau' \quad (18)$$

L'équation (18) est une équation non linéaire dont la résolution n'est possible que par une méthode numérique

Si on se place dans les conditions :

- temps de contact court.

- évaporation relativement faible.

La température à la surface du jet ne sera pas très différente de T_0 , ce qui nous permet de simplifier le problème. Une solution analytique est possible.

Donc si :

$$\begin{aligned} T_s &\sim T_0 \\ T_w &\sim T_0 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{P_s}{T_0(1+\phi_s)} \right]^{1/2} \approx \frac{P_s^0}{\sqrt{T_0}} \exp(\gamma(\phi_s - \phi_n)) \quad (19)$$

avec $\phi_n = \frac{T_n - T_0}{T_0}$; $\gamma = \lambda_w / (R_s T_0)$

De plus si $\gamma(\phi_s - \phi_n)$ est suffisamment petit l'équation (19) s'écrit

$$\frac{P_s}{(1+\phi_s)^{1/2}} \approx \frac{P_s^0}{\sqrt{T_0}} [1 + \gamma(\phi_s - \phi_n) + \dots] \quad (20)$$

Quand cette linéarisation est valable, l'équation (14) se réduit à

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(0, \tau) = E(A + B\phi(0, \tau)) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{\phi_s(\tau')}{\sqrt{\pi(\tau - \tau')}} d\tau' \quad (21)$$

avec $B = \frac{\beta R P_s^0 \lambda_w}{R_s T_0^{3/2}}$; $A = \frac{\beta R}{T_0^{3/2}} (P_s^0 (1 - \gamma \phi_n) - P_n)$

La résolution de l'équation (21) par les transformations de Laplace donne

$$\phi(y, \tau) = \frac{A}{B} \left[e^{EB\gamma} e^{E^2 B^2 \tau} \operatorname{erfc} \left(EB\sqrt{\tau} + \frac{\gamma}{2\sqrt{\tau}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{\gamma}{2\sqrt{\tau}} \right) \right] \quad (22)$$

et $\phi(0, \tau) \equiv \phi_s(\tau) = \frac{A}{B} \left[e^{E^2 B^2 \tau} \operatorname{erfc} (EB\sqrt{\tau}) - 1 \right] \quad (23)$

ou $T_s = T_0 \left\{ 1 - \frac{A}{B} \left[1 - e^{E^2 B^2 \tau} \operatorname{erfc} (EB\sqrt{\tau}) \right] \right\} \quad (24)$

2.3.2.2 Equations de flux de matière

Avec la température superficielle donnée par l'équation (24), il est possible d'écrire le flux massique local w et le flux moyen \bar{w} .

$$w = E \sqrt{\frac{M}{2\pi R_g T_0}} \left\{ P_n^0 [1 + \alpha (\Phi_s - \Phi_n)] - P_n \right\} \quad (25)$$

En admettant que le coefficient d'évaporation est indépendant du temps ($E = \bar{E}$), on aboutit après analyse du problème à l'expression :

$$\bar{E} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2,256 \left(\frac{WZ}{\alpha} - \frac{P_n}{P_n^0} \right)}}{2Z \left(\frac{WZ}{\alpha} - \frac{P_n}{P_n^0} \right)} \quad (26)$$

avec $\alpha = A \frac{k T_0}{R} \frac{M}{\lambda_v}$; $Z = B \sqrt{v_L}$

2.3.3 Conclusion

Le problème de l'évaporation d'un jet laminaire a été analysé pour déterminer la température superficielle du jet et la vitesse d'évaporation, et par conséquent le coefficient d'évaporation du liquide.

Nomenclature : (chapitre 2.3)

- A nombre adimensionnel défini par l'équation (21)
- B nombre adimensionnel défini par l'équation (21)
- E coefficient d'évaporation
- \bar{E} coefficient d'évaporation moyen.
- k conductivité thermique [$\text{cal sec}^{-1} \text{cm}^{-1} \text{ok}^{-1}$]
- L longueur du jet (cm)
- M poids moléculaire
- P pression de la vapeur [dyn/cm^2]
- r distance radiale [cm]

- R rayon du jet (cm)
 R_g constante des gaz parfaits ($= 8.314 \times 10^7 \text{ erg } ^\circ\text{K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$)
 t temps (sec)
 T température ($^\circ\text{K}$)
 T_v température de la vapeur ($^\circ\text{K}$)
 u perturbation de la vitesse axiale (cm sec^{-1})
 U vitesse initiale du jet (cm sec^{-1})
 v perturbation de la vitesse radiale (cm sec^{-1})
 w flux massique local ($\text{g cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$)
 \bar{w} flux massique moyen.
 x distance axiale (cm)
 $y = (R-x)/R$ nombre adimensionnel
 $Z = B\sqrt{t}$ nombre adimensionnel
 α diffusibilité thermique ($\text{cm}^2 \text{ sec}^{-2}$)
 β (voir équation (10))
 $\gamma = \lambda/R_g T_0$ nombre adimensionnel
 λ_m même racine $\sqrt{\lambda_0}(\lambda_m)$ (nombre adimensionnel)
 λ_v chaleur latente de vaporisation (cal mol^{-1})
 $\tau = \alpha t/R^2$ temps adimensionnel
 $\Phi = (T-T_0)/T_0$ température adimensionnelle
 $\Omega = A(\frac{1}{2} T_0/R)(M/\lambda_0)$, [$\text{g cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$]
 Indices: n : milieu ambiant, 0 : entrée du jet
 r : point de référence, s : propriété de l'interface.

Chapitre III

Etude théorique

On se propose d'étudier un échange de chaleur par contact direct. L'étude porte sur un filet d'eau qui traverse un bain de vapeur d'eau saturée

3-1 Description et mise en équation du modèle :
on considère le système suivant :

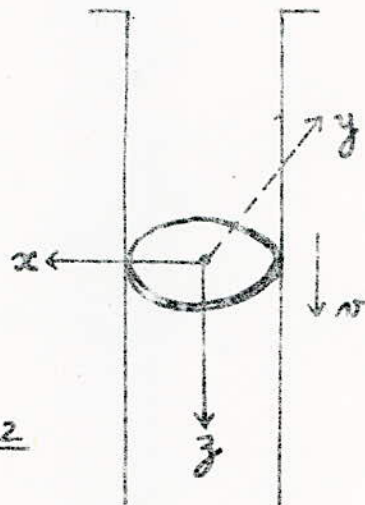


schéma n° 2

On choisit l'origine du système d'axe sur le centre d'un élément cylindrique qui se déplace verticalement vers le bas à la vitesse de l'écoulement.

Les composantes v_x et v_y de la vitesse sont nulles car l'écoulement est supposé unidirectionnel.

Les points qui se trouvent sur l'élément en question auront une vitesse nulle par rapport au système mobile. on ajoute l'hypothèse

que la chaleur ne puisse se transmettre que radialement.

On aboutit, en simplifiant l'équation générale (4) à l'équation:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = k \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

qui s'écrit en coordonnées polaires:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = k \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right)$$

En raison de la symétrie on a $\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0$

On aura enfin

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = k \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right) \quad (5)$$

La résolution de l'équation (5) donne le profil des températures à un instant τ , c'est à dire à une position $z = v \tau$ à partir de l'entrée de l'eau. L'origine du temps est pris donc au moment où la section qu'on veut suivre pénètre dans l'échangeur.

3-2 Résolution de l'équation de chaleur établie:

On suppose que les propriétés physiques du milieu ne varient pas avec la température. Si elles varient, on admet au moins que la quantité $k = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ reste invariante.

Il existent plusieurs modes d'intégration. On choisit celle qui fait appel au calcul opérationnel [2].

On fait d'abord un changement de variable qui ne modifiera pas la forme de l'équation différentielle.

On pose $T = t - t_0$ (où $t_0 =$ température initiale)

ce qui revient à résoudre l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

avec $\lim_{z \rightarrow 0} T = 0$

Multiplions par e^{-pz} et intégrons de $z=0$ à $z=+\infty$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pz} \frac{\partial T}{\partial z} dz = k \int_0^{+\infty} e^{-pz} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) dz$$

soit $F(p)$ l'image de T , on a :

$$p F(p) = k \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right)$$

car $T(z=0) = 0$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{p}{k} F = 0$$

et en posant,

$$\sqrt{\frac{p}{k}} r = \rho$$

d'où

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} \frac{p}{k}$$

il vient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} - F = 0$$

c'est une équation de Bessel transformée dont l'intégrale est :

$$F = C I_0(p) = C I_0 \left(\sqrt{\frac{p}{k}} r \right)$$

puisque ici la fonction I_0 a remplacé J_0 (fonction de Bessel de 1^{ère} espèce et d'ordre zéro)

On détermine la constante C par la condition aux limites

$$T = T_v \quad \text{quand } r = R$$

d'où

$$F(R) = C I_0 \left(\sqrt{\frac{P}{R}} R \right) = \text{image de } T_v = \frac{T_v}{P}$$

On a donc :

$$C = \frac{T_v}{P} \times \frac{1}{I_0 \left(\sqrt{\frac{P}{R}} R \right)} \quad \text{et par suite}$$

$$F(P) = \frac{T_v}{P} \frac{I_0 \left(\sqrt{\frac{P}{R}} R \right)}{I_0 \left(\sqrt{\frac{P}{R}} R \right)}$$

Il faut maintenant rechercher l'original de F .

Appliquons la relation de Mellin-Fourier qui, $h_0(z)$ étant l'original de $F(p)$, donne :

$$h_0(z) = \frac{T_v}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pz} \frac{I_0 \left(\sqrt{\frac{P}{R}} R \right)}{I_0 \left(\sqrt{\frac{P}{R}} R \right)} \frac{dp}{P}$$

c étant tel que tous les pôles de la fonction

$$\frac{I_0 \left(\sqrt{\frac{P}{R}} R \right)}{I_0 \left(\sqrt{\frac{P}{R}} R \right)} \times \frac{1}{P}$$

soient à gauche de la parallèle à oy d'abscisse c

Posons pour simplifier, $\sqrt{\frac{P}{R}} = q$, on a

$$\frac{1}{P} \frac{I_0 \left(\sqrt{\frac{P}{R}} R \right)}{I_0 \left(\sqrt{\frac{P}{R}} R \right)} = \frac{1}{R q^2} \frac{I_0(qR)}{I_0(qR)}$$

fonction uniforme dont les pôles sont 0 et les racines de $I_0(qR) = 0$

or $I_0(qR) = J_0(iqR)$. Si α_i est une racine de $J_0(Rx) = 0$, les racines de $I_0(qR) = 0$ sont telles que $i q R = \alpha_i R$ où $q = -i \alpha_i$.

Soit $p/R = i^2 \alpha_i^2 = -\alpha_i^2$ et $p = -R \alpha_i^2$

Elles sont toutes négatives. Par suite, $h_0(z)$ sera égal à la

somme des résidus de la fonction

$$e^{p\tau} \frac{I_0(qR)}{PI_0(qR)}$$

relatifs aux points $-k\alpha_i^2$ et au pôle $P=0$ (Pour ce pôle le résidu est 1). Pour chacun des points $-k\alpha_i^2$, le résidu est :

$$e^{-k\alpha_i^2\tau} \frac{J_0(\alpha_i R)}{P \frac{d}{dP} [I_0(qR)]}$$

La dérivée est prise lorsque $P \rightarrow -k\alpha_i^2$.

Calculons le dénominateur lorsque $P \rightarrow -k\alpha_i^2$

$$\frac{d}{dP} I_0(qR) = \frac{d}{dP} J_0(iqR) = iR J_0'(iqR) \frac{dq}{dP}$$

$$\text{ou } \frac{iR J_0'(iqR)}{2\sqrt{k} \sqrt{P}} = iR \frac{J_0'(iqR)}{2kq}$$

et, comme $q = i\alpha_i$

$$\frac{d}{dP} I_0(qR) = \frac{iR J_0'(\alpha_i R)}{-2k i \alpha_i} = - \frac{R J_0'(\alpha_i R)}{2k \alpha_i}$$

Donc

$$P \frac{d}{dP} I_0(qR) = \frac{R J_0'(\alpha_i R) k \alpha_i^2}{2k \alpha_i} = \frac{\alpha_i R}{2} J_0'(\alpha_i R)$$

L'intégrale $h_1(\tau)$ sera

$$h_1(\tau) = T_0 \left(1 + 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-k\alpha_i^2\tau} J_0(\alpha_i R)}{\alpha_i R J_0'(\alpha_i R)} \right)$$

ou aussi

$$h_1 = T = T_0 \left(1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-k\alpha_i^2\tau} J_0(\alpha_i R)}{\alpha_i R J_1(\alpha_i R)} \right) \quad (6)$$

$$\text{si on pose } \vartheta = t_v - t \quad (7)$$

$$\vartheta_0 = t_v - t_0$$

il vient

$$\boxed{\theta/\theta_0 = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-h\alpha_i^2 \tau} J_0(\alpha_i r)}{\alpha_i R J_2(\alpha_i R)} \quad (8)}$$

Développement asymptotique des fonctions J_0 et J_2 [3]

On démontre que pour les grandes valeurs de (z) et pour $-\pi/2 < \arg z < +\pi/2$ on peut écrire :

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[P_\nu(z) \cos \varphi - Q_\nu(z) \sin \varphi \right]$$

avec $\varphi = z - (\nu + \frac{1}{2})\pi/e$

$$P_\nu(z) \sim 1 - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8z)^2} + \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)(4\nu^2-7^2)}{4!(8z)^4} - \dots$$

$$Q_\nu(z) \sim \frac{4\nu^2-1^2}{1!(8z)} - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)}{3!(8z)^3} + \dots$$

Les séries $P_\nu(z)$ et $Q_\nu(z)$ sont des développements asymptotiques.

On démontre que si on s'arrête au terme de rang \bar{k} tel que

$$\bar{k} > \frac{2\nu-5}{4} \text{ pour } P_\nu(z)$$

$$\bar{k} > \frac{2\nu-7}{4} \text{ pour } Q_\nu(z)$$

l'erreur est inférieure au premier terme négligé.

Remarques :

* si $\nu = n + \frac{1}{2}$, $P_\nu(z)$ et $Q_\nu(z)$ sont limités

$J_\nu(z) = f(P_\nu(z), Q_\nu(z))$ est alors une formule rigoureuse

* Les développements asymptotiques $P_\nu(z)$ et $Q_\nu(z)$ sont très rapidement valables même pour des valeurs

de Z qui ne sont pas très grandes.

- Application :

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P_0(x) \cos \varphi - Q_0(x) \sin \varphi \right]$$

avec : $\varphi = x - \frac{\pi}{4}$

$$P_0(x) = 1 - \frac{3^2}{2!(8x)^2} + \frac{3^2 \times 5^2 \times 7^2}{4!(8x)^4} = 1 - \frac{0,0703}{x^2} + \frac{0,142}{x^4}$$

$$Q_0(x) = -\frac{1}{8x} + \frac{3^2 \times 5^2}{3!(8x)^3} = -\frac{0,125}{x} + \frac{0,0722}{x^3}$$

Après avoir effectué de longs calculs afin de déterminer le profil des températures à l'aide de l'équation (8), on a remarqué que la série (8) change de signe à chaque fois qu'on ajoute un terme, deux ou même plus.

On devrait s'arrêter au moins là où il y a une constance de signe. Malheureusement on aboutit à cette condition lorsque les erreurs d'arrondi sont tellement amplifiées que la somme de quarante termes de l'équation (8) donne un résultat erroné (on trouve à chaque fois une température inférieure à la température initiale).

Il s'agit là d'un problème de convergence de la série (8). Seul un calcul par ordinateur nous permet d'exploiter la forme analytique de la solution du problème.

L'équation différentielle (5) est, de point de vue forme, identique à celle établie dans le cas d'un cylindre infini

porté initialement à une certaine température puis immergé brusquement dans un milieu infini.

La solution de ce dernier problème est donnée sous forme de diagrammes [4] ; [5] ; [6].

Il est impossible non plus d'utiliser ces diagrammes parce que les nombres adimensionnels $k\tau / R^2$ dans le cas de notre étude se trouvent presque confondus avec l'origine de ces diagrammes.

3.3 Usage du diagramme de Graetz:

Il existe cependant une courbe établie par Graetz [4-6] lors d'une étude thermique concernant un écoulement laminaire dans un tube maintenue à une température uniforme, qui donne directement la température moyenne du liquide sous une forme adimensionnelle en fonction de $C_p \dot{m} / \lambda H$.

\dot{m} est le débit massique du liquide (fig. n° 1)

Calcul des températures moyennes à la sortie de l'échangeur:

Le calcul est effectué pour deux jets de diamètres 3 mm et 5 mm à la température initiale de 15; 20; 30; 40; 60 puis 80°C.

Le temps de contact ($\tau = \frac{H}{v}$) avec de la vapeur est tel que pour $H = 0,2$ m v prend les valeurs 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5 m/s.

Les propriétés physiques de l'eau sont rassemblées dans le tableau n° 1.

1^{er} cas: jet de diamètre $D = 3 \text{ mm}$ ($S = 7,07 \times 10^{-6} \text{ m}^2$)

$$X = C_p \frac{\dot{m}}{\lambda H} = \frac{v S}{\lambda H} = 3,535 \times 10^{-5} \frac{v}{\lambda} \quad (H = 0,2 \text{ m})$$

Les valeurs de X pour différents couples (v, t_0) sont consignées dans le tableau n° 2.

On tire Φ du diagramme établi par Graetz [4, 6]

$$\Phi = \frac{t_0 - t_m}{t_0 - t_v} \quad (\text{tableau n° 3})$$

Pour $X = C_p \dot{m} / \lambda H > 90$, la courbe $\Phi = f(C_p \dot{m} / \lambda H)$ présente une allure rectiligne dans l'échelle log-log on déduit la formule approximative:

$$\Phi = 0,4 \left(\frac{90}{X} \right)^{1/2} = \frac{3,735}{\sqrt{X}} \quad (9)$$

Enfin les températures moyennes à la sortie de l'échangeur pour différents débits et différentes températures d'entrée sont données par le tableau n° 4 et représentées graphiquement sur la figure n° 2

$$t_m = t_0 - \Phi \times (t_0 - t_v)$$

2^{ème} cas: jet de diamètre $D = 5 \text{ mm}$ ($S = 19,63 \times 10^{-6} \text{ m}^2$)

$$X = \frac{C_p \dot{m}}{\lambda H} = \frac{v S}{\lambda H} = 9,815 \times 10^{-5} \frac{v}{\lambda} \quad (H = 0,2)$$

Le tableau n° 5 donne $X = f(v, t_0)$

Le tableau n° 6 donne $\Phi = f(v, t_0) = \frac{3,735}{\sqrt{X}}$

Le tableau n° 7 donne $t_m = f(v, t_0) = t_0 - \Phi \times (t_0 - t_v)$

La figure n° 3 donne la représentation graphique de t_m

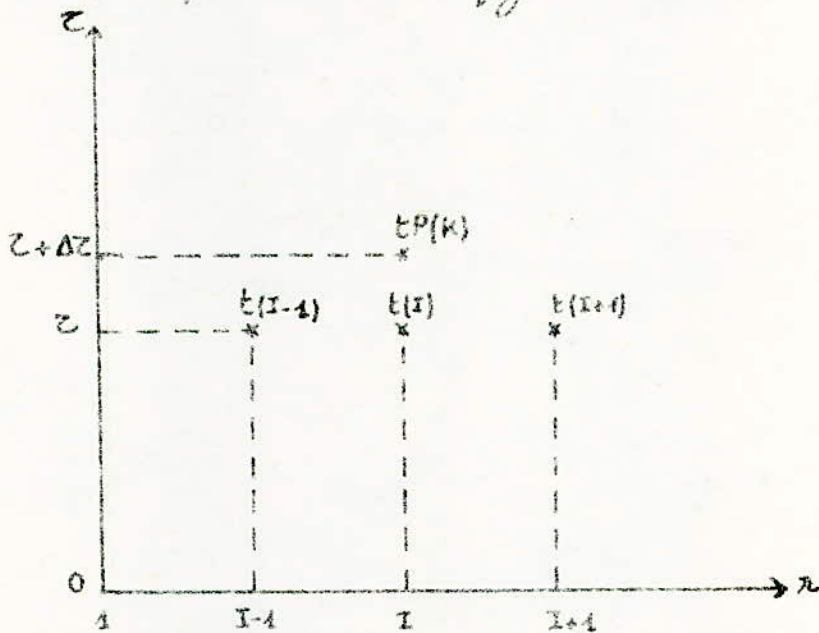
3-4 Profil des températures

La résolution mathématique de l'équation de la chaleur (5) fait appel aux fonctions de Bessel souvent difficiles à manipuler.

Il est possible de résoudre cette équation en adoptant une méthode numérique.

3-4-1 Principe de résolution par la méthode des différences finies:

Schéma explicite: Toutes les températures t étant connues au temps τ , on en déduit celle du temps $\tau + \Delta\tau$, selon les expressions déterminées à partir de la figure suivante:



$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{tP(K) - t(I)}{\Delta \tau}$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{t(I+1) - t(I-1)}{2 \Delta r}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} = \frac{t(I+1) - 2t(I) + t(I-1)}{(\Delta r)^2}$$

$\Delta\tau$ et Δr désignent le pas du temps, et de la part de l'espace

En remplaçant dans l'équation (5) et en effectuant il vient :

$$tP(K) = M \left(2 + \frac{\Delta z}{\lambda} \right) t(I+1) + (1-4M) t(I) + M \left(2 - \frac{\Delta z}{\lambda} \right) t(I-1) \quad (10)$$

avec $M = \frac{\Delta z k}{2(\Delta z)^2}$

L'avantage de cette technique est que l'équation obtenue ne contient qu'une seule inconnue ($tP(K)$). Par contre, n'importe quelle valeur du paramètre M , reliant les incréments de temps et d'espace, ne saurait convenir.

En effet le coefficient $(1-4M)$ de $t(I)$ ne peut-être négatif, car d'après l'équation (10) cela imposerait que la valeur de la température au temps $t + \Delta t$ soit d'autant plus faible que sa valeur au temps t est grande. Cette situation fait apparaître une instabilité de calcul qui se traduit par des oscillations des valeurs de la température qui vont en s'amplifiant.

M doit vérifier donc la relation

$$1 - 4M \geq 0 \implies M \leq \frac{1}{4}$$

ou encore

$$\Delta z / (\Delta t)^2 \leq \frac{1}{2k}$$

3.4.2 Solution analytique dans une situation particulière

Pour des temps de contact assez courts, la chaleur pénètre seulement d'une faible profondeur dans une zone proche de la surface. La température, en des points plus éloignés de la surface ne sera pas modifiée.

Schéma des profils des températures

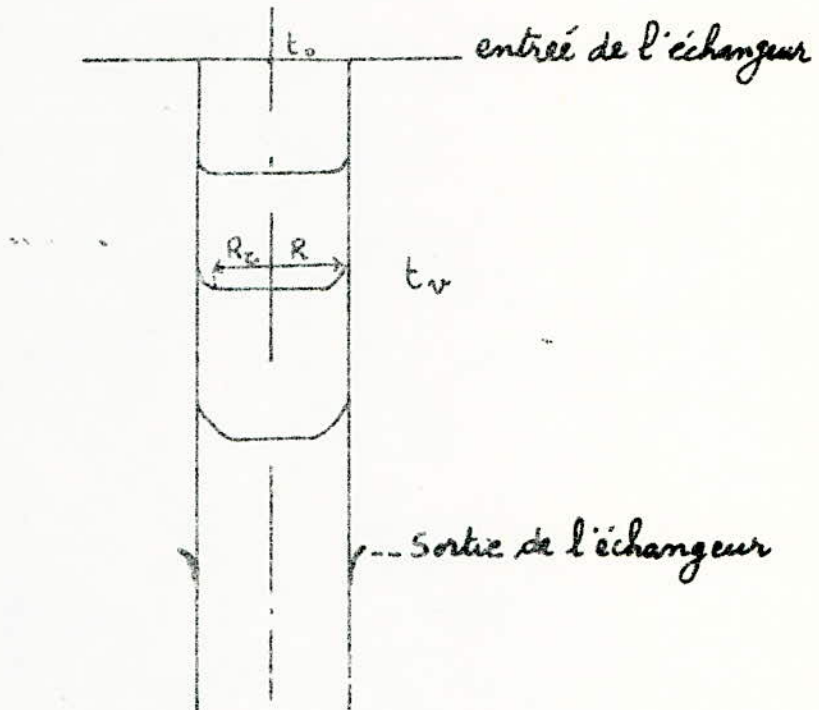


Schéma n° 3

Le problème se ramène donc à l'étude d'un corps semi-infini.

En négligeant l'effet de la courbure (i.e. $\frac{R_0}{R}$ proche de 1), ce qui nous permet de considérer un écoulement plan, l'équation de la chaleur se réduit à

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = k \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (11)$$

La grandeur $x^0 = R \cdot \lambda$ représente la distance par rapport à la surface du jet.

L'équation (11) admet comme solution

$$\frac{t_v - t}{t_v - t_0} = \frac{\theta}{\theta_0} = \operatorname{erf} \left(\frac{x^0}{2\sqrt{k\tau}} \right) \quad (12)$$

avec $\operatorname{erf} y^0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y^0} e^{-y^{02}} dy^0 =$ fonction d'erreur.

Il est préférable de tracer le profil des températures en gardant les coordonnées adimensionnelles.

On trouve la $\theta/\theta_0 = \text{erf } y^*$ tracé dans plusieurs ouvrages de mathématiques et de transmission de chaleur [4], [6], [7]. (se reporter à la figure n° 4)

3.4-3 Température moyenne :

Théoriquement la température moyenne t_m de l'eau à la sortie de l'échangeur s'obtient à partir de l'intégrale.

$$\frac{t_w - t_m}{t_w - t_0} = \frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{1}{R} \int_0^R f(r) dr \quad (13)$$

avec $f(r) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < r < R_{ZH} \\ \text{erf}\left(\frac{R-r}{\sqrt{\pi R z}}\right) & \text{pour } R_{ZH} < r < R \end{cases}$

Cette méthode d'intégration exige la connaissance de R_{ZH} or en réalité nous n'avons aucune idée sur la limite de la distribution qui est caractérisée par R_{ZH} (schéma n° 3).

Un calcul de bilan thermique au voisinage de la surface du jet nous permet de pallier cette difficulté.

En effet, en appliquant la loi de Fourier au modèle représenté par le schéma n° 4 on écrit :

$$\Phi_z = + \lambda A \frac{\partial \theta}{\partial x^*} = + \lambda A \frac{\partial \theta}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial x^*} = + \frac{\lambda A \theta_0 e^{-\frac{x^{*2}}{4Rz}}}{\sqrt{\pi R z}}$$

où Φ_z = flux de chaleur dans la direction x^* (vers l'axe du disque)

A : surface latérale élémentaire du disque.

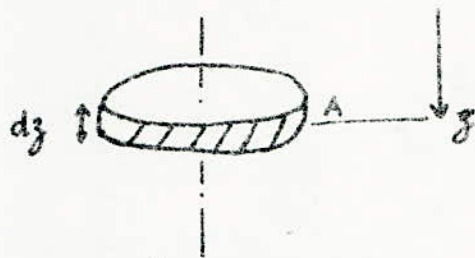


Schéma n°4

le flux de chaleur Φ_{0z} pénétrant dans le liquide est obtenu en prenant $x^* = 0$

$$\Phi_{0z} = + \frac{\lambda A \theta_0}{\sqrt{\pi k z}}$$

la quantité totale de chaleur transmise depuis $z=0$ (entrée du bain de vapeur) à z (sortie de l'échangeur) devient:

$$Q_0 = \int_{z=0}^z \Phi_{0z} dz = + 2 \lambda A \theta_0 \sqrt{\frac{z}{\pi k}}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} Q_0 &= m c_p \Delta t = m c_p (t_m - t_0) \\ &= \rho V c_p (t_m - t_0) \end{aligned}$$

$$\text{Il vient } + 2 \lambda A \theta_0 \sqrt{\frac{z}{\pi k}} = \rho V c_p (t_m - t_0)$$

$$\text{ou } t_m = t_0 + 2 \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{A}{V} \theta_0 \sqrt{\frac{z}{\pi k}}$$

$$\begin{aligned} A &= 2 \pi R dz \\ V &= \pi R^2 dz \end{aligned} \Rightarrow \frac{A}{V} = \frac{2}{R}$$

on aura enfin

$$t_m = t_0 + 4 \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\theta_0}{R} \sqrt{\frac{z}{\pi k}}$$

$$\boxed{t_m = t_0 + \frac{4}{R} (t_v - t_0) \sqrt{\frac{R z}{\pi k}}}$$

3.5 Coefficients de transfert :

3.5.1 Définition

D'une façon générale le flux de chaleur s'écrit :

$$\Phi = k A \Delta t \quad (15)$$

A : étant la surface d'échange.

Δt : différence de température.

k : coefficient de transfert de chaleur.

On utilise généralement trois sortes de coefficients de transfert de chaleur : k_o ; k_a ; k_m suivant qu'on utilise l'une ou l'autre des définitions suivantes de ΔT

$$(\Delta t)_o = \theta_o$$

$$(\Delta t)_a = \frac{\theta_o + \theta_m}{2} \quad (\text{moyenne arithmétique})$$

$$(\Delta t)_m = \frac{\theta_o - \theta_m}{\ln \frac{\theta_o}{\theta_m}} \quad (\text{moyenne logarithmique})$$

Il vient

$$\frac{\Phi}{A} = k_o \theta_o = k_a \frac{\theta_o + \theta_m}{2} = k_m \frac{\theta_o - \theta_m}{\ln \frac{\theta_o}{\theta_m}} \quad (16)$$

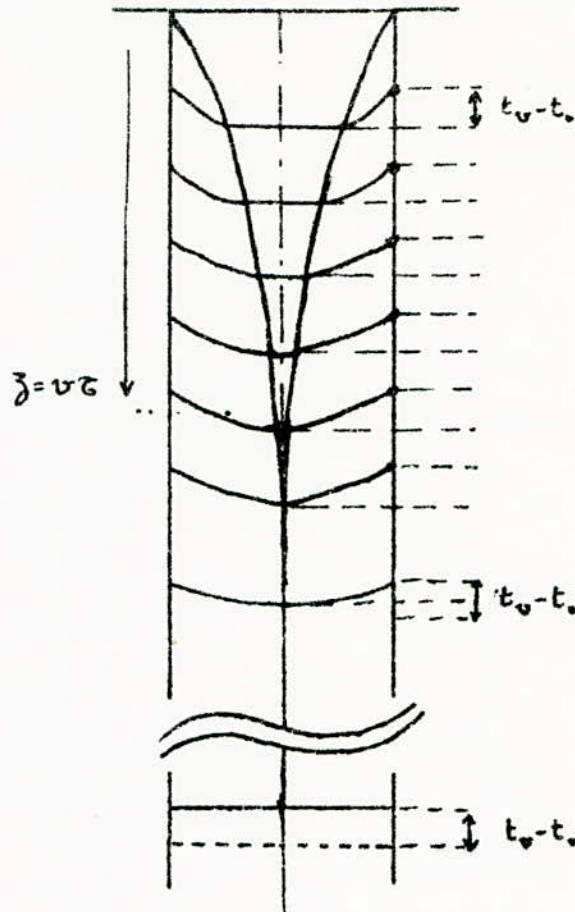
3.5.2 Calcul des coefficients k_o , k_a et k_m .

3.5.2.1 Calcul de k_o :

Le coefficient de transmission de chaleur k_o est un coefficient moyen défini par rapport à la longueur H du fillet d'eau.

On commence par définir un coefficient de transfert local k_{o2} et le calculer. Pour cela on considère le schéma suivant

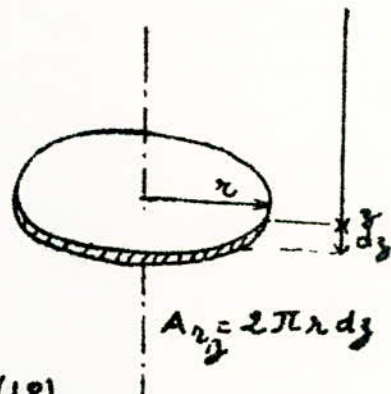
qui fait apparaître la couche thermique



schema n°5

En vertu de la loi de Fourier le flux élémentaire de chaleur observé à un niveau z s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_z &= + \lambda A_{r,z} \frac{\partial t}{\partial r} \\ &= \lambda 2\pi r dz \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (17)$$



d'autre part si on pose :

$$\Phi_z = k_0 z \Phi_0 A_{r,z} = k_0 z (t_v - t_0) 2\pi r dz \quad (18)$$

schema n°6

on égalise les équations (17) et (18)

$$h_{0z} (t_v - t_0) 2\pi R dz = \lambda 2\pi r dz \frac{\partial t}{\partial r}$$

on tire h_{0z} :

$$h_{0z} = \lambda \frac{r}{R} \frac{1}{(t_v - t_0)} \frac{\partial t}{\partial r} \quad (19)$$

le régime d'écoulement thermique étant permanent (i.e $\phi = \text{constant}$)
le coefficient local h_{0z} est constant, ce qui nous permet
d'écrire:

$$\lambda \frac{r}{R} \frac{1}{t_v - t_0} \frac{\partial t}{\partial r} = \lambda \frac{R}{R} \frac{1}{t_v - t_0} \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=R}$$

d'où après simplification

$$\frac{r}{R} \frac{\partial t}{\partial r} = \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=R}$$

et enfin:

$$h_{0z} = \frac{\lambda}{t_v - t_0} \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (20)$$

le flux de chaleur total est:

$$\Phi = \int_{z=0}^{z=H} \phi_z = \int_0^H h_{0z} \theta_0 2\pi R dz = h_0 \theta_0 2\pi R H \quad (21)$$

ce qui donne:

$$h_0 = \frac{1}{H} \int_0^H h_{0z} dz$$

$$\text{ou } h_0 = \frac{\lambda}{H(t_v - t_0)} \int_0^H \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)_{r=R} dz$$

$$\text{ou encore } h_0 = \frac{-\lambda}{H\theta_0} \int_0^H \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=R} dz \quad (22)$$

θ est donnée par l'équation (8) qui était une série infinie lentement convergente.

Pour éviter des calculs longs et presque impossibles avec un moyen modeste de calcul, on cherchera le coefficient h_0 dans le cas où le temps de contact τ_H est très court. Cette situation a été développée précédemment.

La température θ est donnée par la formule (12),

Le calcul de h_0 peut s'effectuer soit :

- en procédant à la même analyse que l'on vient de faire.
- en appliquant directement la formule obtenue pour le f.l.t.

$$\theta = \theta_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x^*}{2\sqrt{k\tau}}\right)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x^*} = \theta_0 \times \frac{1}{2\sqrt{k\tau}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x^*}{2\sqrt{k\tau}}\right)^2}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x^*}\right)_{x^*=0} = \frac{\theta_0}{\sqrt{k\pi\tau}}$$

$$h_0 = \frac{\lambda}{H\theta_0} \int_0^H \frac{\theta_0}{\sqrt{k\pi/\nu}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2\lambda\sqrt{H}}{H\sqrt{k\pi/\nu}}$$

$$\boxed{h_0 = \frac{2\lambda}{\sqrt{k\pi\tau}}} \quad (23)$$

3.5.2.2 Calcul de h_a et h_{ln}

La détermination de h_a et h_{ln} est rapide

$$h_a = \frac{2h_0\theta_0}{\theta_0 + \theta_m} = \frac{2h_0}{1 + \theta_m/\theta_0} \quad (24)$$

$$h_{ln} = h_0 \frac{\theta_0}{\theta_0 - \theta_m} \ln \theta_0/\theta_m = h_0 \frac{\ln \theta_0/\theta_m}{1 - \theta_m/\theta_0} \quad (25)$$

3.5.2.3 Exemple numérique

Jet de diamètre $D = 3 \text{ mm}$.

On fait le calcul pour deux températures et des vitesses différentes

$$t_0 = 15^\circ \text{C}$$

$$v = 4 \text{ m/s} \Rightarrow z = \frac{H}{v_0} = \frac{0,2}{4} = 0,05 \text{ s}$$

$$\text{d'après l'équation (23)} \quad h_0 = \frac{2 \times 1,43 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{1,43 \cdot 10^{-4} \pi \times 0,05}} = 1,908 \quad \text{kcal/m}^2 \text{A}^\circ \text{C}$$

A l'aide du tableau 4 l'équation (24) donne:

$$R_a = \frac{2 \times 1,908}{1 + \frac{25,3 - 100}{15 - 100}} = 2,031 \quad \text{kcal/m}^2 \text{A}^\circ \text{C}$$

Avant de comparer les résultats du tableau n° 8 aux valeurs théoriques [4], représentées sous leur forme adimensionnelle sur la figure n° 1, on calcule les nombres $\frac{h_0 D}{\lambda}$ qu'on regroupe dans le tableau n° 9.

3.5.2.4 Conclusion

Les tableaux (9) et (11) montre que la valeur $h_0 D / \lambda$ trouvée à l'aide du modèle simplifié est toujours supérieure à la valeur exacte $(h_0 D / \lambda)^*$ [4]. Etant donné qu'il y a un excès maximum de 5% seulement concernant les incertitudes des relations empiriques qui peuvent atteindre 10%, on peut conclure que les hypothèses ayant permis de simplifier le problème sont justifiées.

$(h_0 D / \lambda)^*$ est donné par la formule empirique:

$$(h_0 D / \lambda)^* = 2,124 \left(\frac{\dot{m} c_p}{\lambda H} \right)^{3/7} \quad (26)$$

déduite de la construction graphique n° 1. Elle est valable pour $\frac{\dot{m} c_p}{\lambda H} > 3$

3-6

Application

3-6-1 Calcul d'un échangeur à contact direct:

On se donne les valeurs suivantes:

$$\dot{M} = 1 \text{ kg/s}$$

$$t_o = 20^\circ\text{C}$$

$$t_m = 60^\circ\text{C}$$

$$H = 0,2 \text{ m}$$

$$D = 3 \text{ mm.}$$

Le dimensionnement de l'échangeur consiste à déterminer le nombre de perforations et le diamètre de la plaque distributrice; la hauteur de l'échangeur étant donnée

$$\Phi = \frac{t_o - t_m}{t_o - t_r} = \frac{20 - 60}{20 - 100} = 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{m} c_p}{\lambda H} = \left(\frac{3,795}{\Phi} \right)^2 \Rightarrow \dot{m} = \frac{\lambda H}{c_p} \left(\frac{3,795}{\Phi} \right)^2$$

Le débit massique d'un seul filet est donc:

$$\dot{m} = \frac{1,43 \times 10^{-4} \times 0,2}{1} \times \left(\frac{3,795}{0,5} \right)^2 = 1,65 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$$

L'équation (26) donne: $k_a = 2,124 \frac{\lambda}{D} \left(\frac{\dot{m} c_p}{\lambda H} \right)^{3/7} = 0,575 \text{ kcal/m}^2\text{s}^\circ\text{C}$

Le nombre d'orifices sera:

$$n = \frac{\dot{M}}{\dot{m}} = \frac{1}{1,65 \times 10^{-3}} = \underline{606 \text{ orifices}}$$

Disposition des orifices :

Considérons des orifices de diamètre D disposés aux quatre sommets d'un carré comme le représente le schéma (7a).

Le rapport de la surface d'échange de chaleur au volume total est donné par $\varphi_c = \pi / (s^2 \cdot D)$ dans laquelle s est le rapport du pas au diamètre : a/D . Pour un tel rapport de petite grandeur égal par exemple à 1,25,

$$\varphi_c = \frac{2,01}{D}$$

Avec une disposition triangulaire (schéma 7b) la valeur de φ est donnée par :

$$\frac{3(\pi D/6)H}{(\sqrt{3}/4)a^2 H} = \varphi_c = \frac{3,63}{s^2 D}$$

Pour le même diamètre et la même distance entre centres, la valeur de φ_c est 15% plus grande que φ_c .

Avec une plaque circulaire, les valeurs réelles de φ sont moindres que les valeurs maxima, en particulier quand le nombre d'orifices est petit.

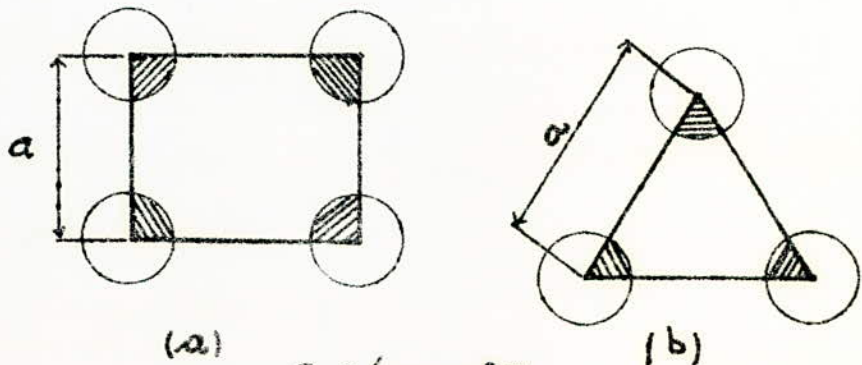


Schéma n° 7

Si $D = 3 \text{ mm}$, $a/D = 1,25$

$$\frac{q_e}{V_c} = \frac{2,01}{3 \times 10^{-3}} = 670 \text{ m}^2/\text{m}^3$$

$$\frac{q_e}{V_c} = \frac{3,63}{(1,25)^2 \times 3 \times 10^{-3}} = 774,4 \text{ m}^2/\text{m}^3$$

d'où $\frac{q_e}{q_c} = 1,155$

Diamètre du distributeur (plaque perforée) : D_e

$$q = \frac{nA}{V_e} = \frac{n\pi Dn}{4\pi D_e^2/4} = \frac{4nD}{D_e^2}$$

d'où $D_e = \sqrt{\frac{4nD}{q}}$

* disposition carrée :

$$D_e^c = \sqrt{\frac{4nD}{\frac{q_e}{V_c}}} = \sqrt{\frac{4 \times 606 \times 3 \times 10^{-3}}{670}} = 0,104 \text{ m} \rightarrow 10,4 \text{ cm}$$

* disposition triangulaire

$$D_e^t = \frac{D_e^c}{\sqrt{1,155}} = 9,7 \text{ cm}$$

3.6.2 Calcul d'un condenseur à paroi:

$$\Phi = h_m A (\Delta_{mp}) \quad \text{avec } \Delta_{mp} : \text{différence de température logarithmique moyenne (DTLM)} \quad (27)$$

Si l'on appelle h_i le coefficient du film interne, l'expression du coefficient global de transfert sera

$$\frac{1}{h_m} = \frac{1}{h_i} + \frac{e_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_c} \quad (28)$$

en désignant par

e_p / λ_p : résistance due au tube

h_c : coefficient du film externe

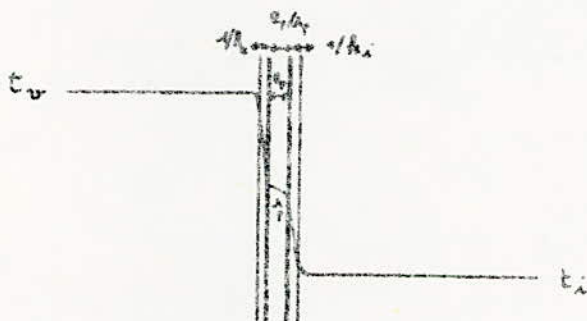


Schéma n° 2

3.6.2.1 Calcul de h_c

Nusselt [4] dans sa théorie de la condensation en film a combiné les lois d'écoulement laminaire d'un film liquide et celle de la conduction thermique à travers ce film pour aboutir à une relation donnant le coefficient de transmission moyen.

$$h_c = \frac{4}{3} \left(\frac{\lambda_f^3 \rho_f^2 g L}{4 \mu_f H \Delta t_{pv}} \right)^{1/4} \quad (29)$$

avec L : chaleur latente de condensation

Δt_{pv} : différence moyenne des températures de la paroi et de la vapeur saturante.

En supposant le gradient de température à travers le film linéaire, et si $1/\mu$ est linéaire aussi, Drew [4] montre que, λ_f , ρ_f et μ_f doivent être évalués pour:

$$t_f = t_v - 3\Delta t_{pv}/4 \quad (30)$$

Remarque:

Pour de la vapeur d'eau se condensant sous pression atmosphérique avec un Δt_{pv} allant de 5 à 80°C, l'équation (29) se ramène à l'équation dimensionnelle suivante [4]:

$$h_c = \frac{11700}{H^{3/4} (\Delta t_{pv})^{1/3}} \quad (31)$$

avec H exprimé en m

et h_c en kcal/h m²°C

3.6.2.2 Calcul du coefficient de film interne h_i

Régime laminaire $Re < 2100$

D'après Sieder et Tate (1936) on a la relation

$$Nu = 1,86 \left(Re \times Pr \times \frac{D}{H} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_o}{\mu_f} \right)^{0,14} \quad (32)$$

Régime turbulent $Re > 10000$

Le coefficient de transfert relatif à l'eau circulant à l'intérieur des tubes en régime turbulent est obtenu :

- Soit à partir de l'équation

$$Nu = 0,023 Re^{0,8} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu_w}{\mu} \right)^{0,14} \quad (33)$$

- Soit à partir de l'équation simplifiée de Eagle et Fergson [8] obtenue en substituant dans l'équation générale (33) les caractéristiques moyennes de l'eau dans un intervalle de température (0 - 100°C)

$$h_i = \frac{900 (1,352 + 0,02 t_{mf}) v^{0,8}}{D_i^{0,2}} \quad (34)$$

où t_{mf} = température moyenne de l'eau en °C

v = sa vitesse en m/s

h_i exprimé en kcal / h m² °C

3-6.2-3 Application numérique :

On se propose de dimensionner un condenseur travaillant dans les mêmes conditions que l'échangeur à contact direct de l'exemple de la page (43).

Supposant que le diamètre du tube est de 3 mm avec une épaisseur de la paroi négligeable.

Figuration de l'échangeur



$$\Delta_0 = 100 - 20 = 80^\circ\text{C}$$

$$\Delta_1 = 100 - 60 = 40^\circ\text{C}$$

$$\Delta_{mf} = \frac{\Delta_0 - \Delta_1}{\ln \frac{\Delta_0}{\Delta_1}} = 57,7^\circ\text{C}$$

Température moyenne:

- de la vapeur 100°C

- de l'eau $100 - 57,7 = 42,3^\circ\text{C}$

On prendra comme température de la paroi, la moyenne arithmétique

$$t_p = \frac{42,3 + 100}{2} = 71,15^\circ\text{C}$$

calcul de h_c

la température du film est, d'après l'équation (30):

$$t_f = 100 - \frac{3}{4}(100 - 71,15) = 78,3^\circ\text{C}$$

L'équation (31) donne:

$$h_c = \frac{11700}{(0,2)^{1/4} (100 - 71,15)^{1/3}} = 5727,7 \text{ kcal/k m}^2\text{ }^\circ\text{C}$$

$$= 1,59 \text{ kcal/s m}^2\text{ }^\circ\text{C}$$

A la température de $78,3^\circ\text{C}$ [9]

$$\lambda_f = 1,59 \times 10^{-4} \text{ kcal/m s }^\circ\text{C}$$

$$\mu_f = 0,35 \times 10^{-3} \text{ Pf}$$

$$\rho_f = 972 \text{ kg/m}^3$$

$$L = 540 \text{ kcal/kg.}$$

L'équation (29) donne:

$$R_c = \frac{4}{3} \left[\frac{(1,59 \times 10^{-4})^3 \times (972)^2 \times 9,81 \times 540}{4 \times 0,35 \times 10^{-3} \times 0,2 \times 28,85} \right] = 1,67 \text{ kcal/s m}^2\text{ }^\circ\text{C}$$

On vérifiera par la suite si $Re_f < 1800$ pour justifier l'utilisation de l'équation (29).

Pour le film externe le nombre de Reynolds s'écrit:

$$Re_f = \frac{4\Gamma}{\mu_f} = \frac{4\dot{m}_c}{\mu_f \pi D} = \frac{4\dot{M}C_p(t_m - t_0)/(L \times n)}{\mu_f \pi D} \quad (35)$$

calcul de h_i , h_m et du nombre de tubes n :

$$\begin{aligned} \Phi &= h_m n A \Delta_{ml} \\ &= \dot{M}C_p(t_m - t_0) \\ \Rightarrow n h_m &= \frac{\dot{M}C_p(t_m - t_0)}{A \Delta_{ml}} \end{aligned} \quad (36)$$

Dans beaucoup d'applications, la résistance thermique de la paroi du tube constitue une fraction négligeable de la résistance totale.

$$\text{L'équation } \frac{1}{h_m} = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_c} \quad (37)$$

donne avec l'équation (34)

$$\frac{1}{h_m} = \frac{D_i^{0,2} \times 3600}{900(1,352 + 0,02 t_{mf}) v^{0,8}} + \frac{1}{h_c}$$

d'autre part:

$$v = \frac{\dot{M}}{\rho n S} \quad (38)$$

Il résulte de la combinaison des équations (34); (36); (37); (38)

$$\frac{n A \Delta_{ml}}{\dot{M}C_p(t_m - t_0)} = \frac{D_i^{0,2} \times 3600}{900(1,352 + 0,02 t_{mf})} \left(\frac{\rho S}{\dot{M}}\right)^{0,8} n^{0,8} + \frac{1}{h_c}$$

Application numérique:

$$\frac{n \pi \times 3 \times 10^{-3} \times 53,7 \times 0,2}{1 \times 1(60 - 20)} = \frac{(3 \times 10^{-3}) \times 3600}{900(1,352 + 0,02 \times 43,3)} \left(\frac{972 \times (3 \times 10^{-3})^2 \pi / 4}{1}\right)^{0,8} n^{0,8} + 0,599$$

ou $2,72 n = 10,59 n^{0,8} + 599$

vérifiée pour $n = 1752$ tubes.

Avant d'évaluer h_m , on vérifie si on est bien en régime turbulent dans les tubes

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}$$

D'après l'équation (38)

$$Re = \rho \frac{\dot{M}}{\rho \pi D^2 / 4} \times \frac{D}{\eta} = \frac{4 \dot{M}}{\pi D \eta}$$

$$= \frac{4 \times 1}{1752 \times \pi \times 3 \times 10^{-3} \times 0,7 \times 10^{-3}} = 332 \ll 10000$$

L'hypothèse du régime turbulent est fautive. On refait donc le calcul en se servant de la formule (32) au lieu de (34) c'est à dire qu'on se place dans le cas d'un régime laminaire à l'aide des équations (32); (36); (37) et (38), on obtient:

$$n \frac{A \Delta t_{ml}}{h_c p (t_m - t_0)} = \frac{D}{1,86 \lambda} \left[\frac{D \times c_p \rho}{\lambda} \right]^{1/3} \left(\frac{D p}{\mu} \right)^{1/3} \left(\frac{\dot{M}}{\rho S} \right)^{-1/3} n^{1/3} \left(\frac{\mu}{\rho p} \right)^{-0,14} + \frac{1}{R_c}$$

A.N: $2,72 \times 10^{-3} n = \frac{3 \times 10^{-3}}{1,86 \times 1,5 \times 10^{-4}} \left[\frac{3 \times 10^{-3} \times 1 \times 0,3 \times 10^3}{0,2 \times 1,5 \times 10^{-4}} \times \frac{3 \times 10^{-3} \times 992}{0,7 \times 10^{-3}} \times \frac{1}{992 \times \pi \times 3 \times 10^{-3}} \right]^{1/3} n^{1/3} \times \left(\frac{0,7}{0,43} \right)^{-0,14} + 0,599$

$$2,72 n = 288 n^{1/3} + 599$$

On trouve:

$$n = 1407 \text{ tubes}$$

$$R_{2i} = \frac{1}{0,288 \times (1407)^{1/2}} = 0,31 \text{ k cal / m}^2 \text{ s } ^\circ\text{C}$$

$$h_m = \frac{1}{2,72 \times 10^{-3} \times 1407} = 0,261 \text{ kcal/m}^2 \text{ s } ^\circ\text{C}$$

$$Re = \frac{4 \times 1}{1407 \times \pi \times 3 \times 10^{-3} \times 0,7 \times 10^{-3}} = 431 < 2100$$

$$Re_f = \frac{4 \times 1 \times 1 \times 40}{540 \times 1407 \times 0,35 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-3} \times \pi} = 64 < 1800$$

L'emploi de la formule (32) de Nusselt est justifié.

Il reste enfin à vérifier si la température choisie de la paroi est juste. Le flux de chaleur à travers le film externe doit être le même que celui qui se transmet à travers le film interne.

$$\phi_L / A = \phi_v / A = \phi / A$$

$$h_i \frac{t_m - t_o}{\ln \frac{t_p - t_o}{t_p - t_m}} = h_c (t_v - t_p) = h_m \Delta_{m\theta}$$

$$\text{A.N.: } \phi_L / A = 0,31 \times \frac{60 - 20}{\ln \frac{71,15 - 20}{71,15 - 60}} = 8,14$$

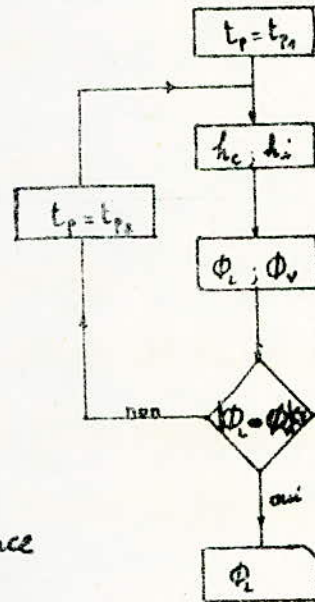
$$\phi_v / A = 1,67 \times (100 - 71,15) = 48,18$$

On voit qu'il y a une différence énorme.

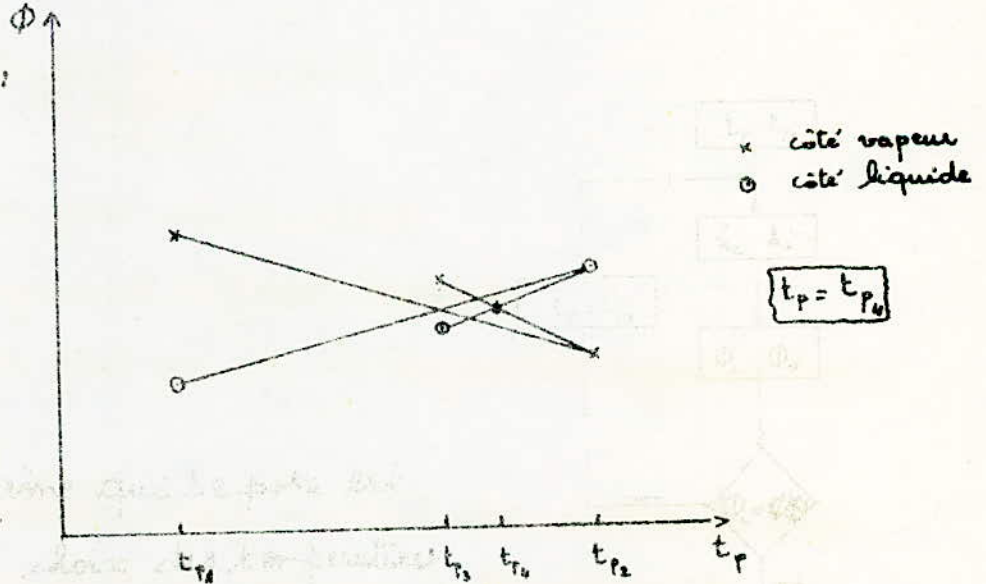
$t_{p_1} = 71,15^\circ\text{C}$ ne peut pas être la température moyenne de la paroi.

Recherche de t_p :

On refait les calculs depuis le début avec une autre température t_{p_2} puis on fait un test. Si on trouve que $\phi_{L_2} = \phi_{v_2}$ on prend t_{p_2} comme température vraie de la paroi, sinon on recommence encore le calcul.



Le problème qui se pose est celui du choix des températures à essayer pour avoir une convergence rapide. Pour résoudre ce problème on choisit une méthode graphique dont le principe est illustré sur la figure suivante:



Le problème qui se pose est celui de choisir des températures à essayer pour avoir une convergence rapide. Pour résoudre ce problème on choisit une méthode graphique dont le principe est illustré sur la figure suivante.

Les résultats des différentes étapes du calcul sont regroupés dans les tableaux (12 a et b) on trouve :

$$t_p = 93,2^\circ\text{C}$$

$$n = 1211 \text{ tubes}$$

$$h_m = 0,503 \text{ kcal/m}^2 \text{ s } ^\circ\text{C} \quad (\text{moyenne logarithmique})$$

$$\Phi/A = 17,4 \text{ kcal/m}^2 \text{ s}$$

h_a définie par l'équation (16) s'écrit :

$$h_a = \frac{2\Phi h_m}{\theta_o + \theta_m} = \frac{2\Phi/A}{2t_v - t_o - t_m} = \frac{2 \times 17,4}{200 - 20 - 60} = 0,29 \text{ kcal/m}^2 \text{ s } ^\circ\text{C}$$

Diamètre de l'échangeur à paroi

$$(D_e)_3 = (D_e)_2 \sqrt{\frac{n_2}{n_1}}$$

$$\text{Si } S = 1,25 \quad D_e^c = 10,4 \sqrt{\frac{1211}{606}} = 14,7 \text{ cm}$$

$$D_e^t = 9,7 \times \sqrt{2} = 13,7 \text{ cm}$$

3.6.2.4 Conclusion :

La comparaison des deux types d'échangeur montre donc que dans le cas du contact direct, l'appareil d'échange est théoriquement moins volumineux et plus simple à dimensionner.

Chapitre IV

Partie expérimentale

Dans cette partie on se propose d'effectuer une série de mes. dans le but de comparer les résultats théoriques aux résultats expérimentaux.

4-1 Description de l'appareillage

L'installation utilisée est représentée par le schéma n° 9, elle comporte:

1. L'échangeur qui est un tube calorifugé de 20 cm de hauteur et de 4 cm de diamètre interne.
2. Une colonne de 100 cm de hauteur et de même diamètre que l'échangeur auquel elle est raccordée par des brides. Cette colonne joue le rôle de débimètre.
3. Une plaque métallique mince (1 mm d'épaisseur) possédant au centre un orifice de 3 mm ou 5 mm de diamètre. La plaque est fixée entre la colonne d'eau et l'échangeur. C'est au niveau de l'orifice que prend naissance le jet de liquide qui après avoir traversé rapidement l'échangeur sera recueilli à la base par un petit entonnoir maintenu à l'aide d'un bouchon en liège.
4. Un générateur de vapeur d'eau. C'est un ballon de 4 litres chauffé à l'aide de 3 becs bunsen. Il communique avec l'échangeur.

Legende :

- ① jet d'eau
- ② calorifugeage
- ③ orifice
- ④ colonne d'eau
- ⑤ résistances chauffantes
- ⑥ pompe verticale
- ⑦ agitateur
- ⑧ prise de courant
- ⑨ bac d'eau
- ⑩ système de production de la vapeur d'eau
- ⑪ by pass
- ⑫ eau d'alimentation du bac
- ⑬ thermomètre de l'échangeur
- ⑭ entonnoir
- ⑮ thermomètre du bac

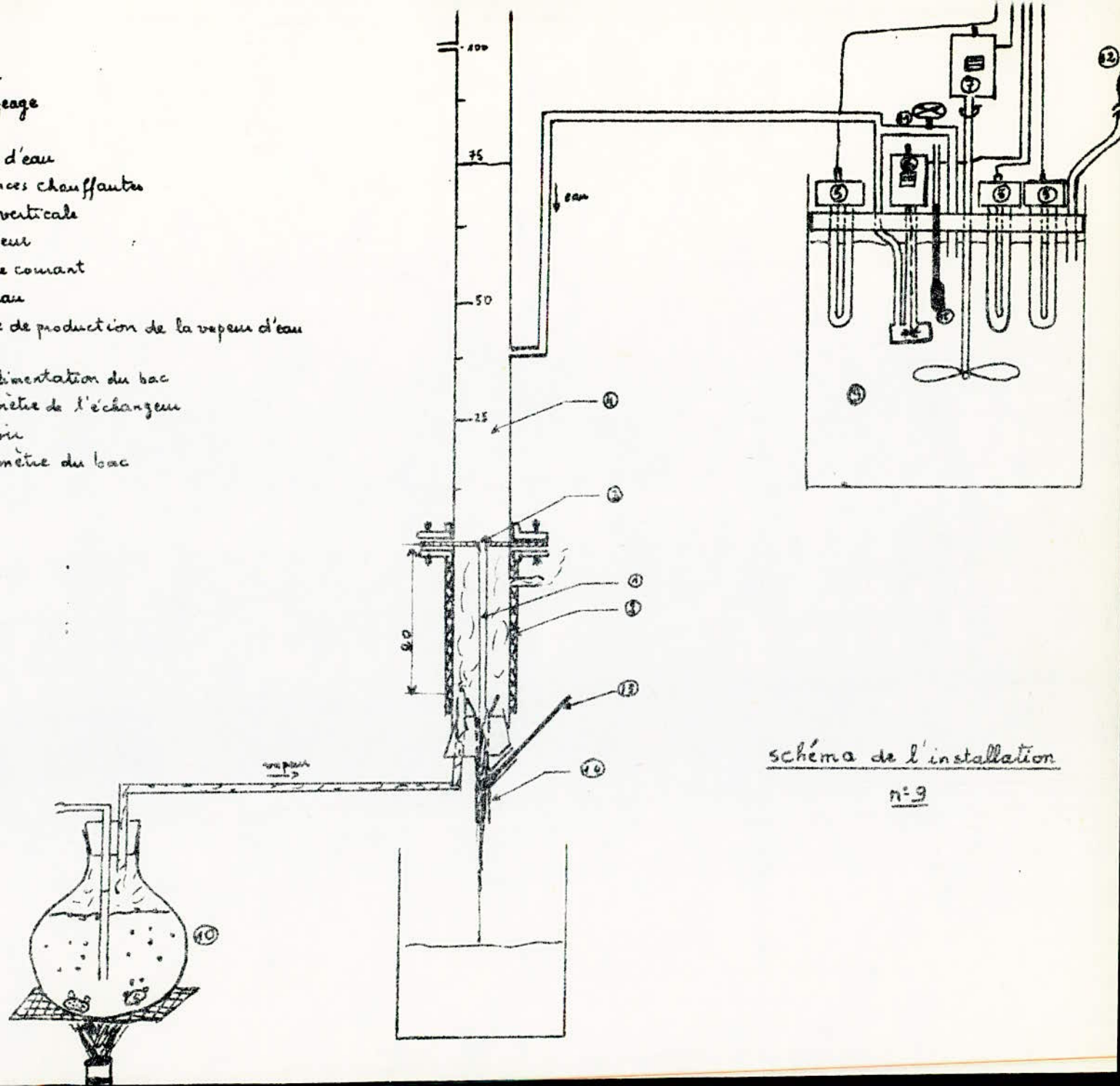


schéma de l'installation
n°9

5. Un bac recevant de l'eau de robinet qui sera maintenue à une température désirée au moyen de 3 résistances chauffantes connectées à un régulateur, et d'un système d'agitation.

Une conduite relie le bac à la colonne. On a aussi une pompe verticale plongée dans le récipient qui assure le débit nécessaire à l'alimentation de la colonne dont le réglage de niveau se fait à l'aide d'un by pass.

4.2 Technique opératoire:

1. On remplit le bac avec de l'eau de robinet puis on met en marche le système de chauffage si on désire opérer à plus de 20°C.

2. On introduit de l'eau distillée dans le ballon puis on chauffe. Au bout d'un moment (environ 10 mn), le générateur commence à produire de la vapeur qui va donc passer dans l'échangeur.

3. On attend la sortie de la vapeur par une petite cheminée ménagée sur le côté latéral de la partie supérieure de l'échangeur.

4. Quand la température désirée est atteinte dans le bac, on actionne la pompe puis on règle le niveau d'eau dans la colonne.

5. On attend la température du jet à la sortie du bain de vapeur se stabiliser puis on la note avec la hauteur d'.

6. On relève la température pour différents niveaux d'eau.

7. Afin de s'assurer de la reproductibilité des résultats on recommence la série de mesures une deuxième fois

8. On change la température initiale de l'eau puis on refait les opérations précédentes.

9. Quand on termine avec toutes les températures, on procédera à l'étalonnage du débitmètre (cette opération peut être effectuée au début de la manipulation).

10. Tous les résultats obtenus jusqu'à présent sont relatifs à un jet de diamètre donné. Il est intéressant donc de refaire les mêmes expériences en changeant la plaque qui se trouve entre les brides c'est à dire le diamètre du fillet d'eau.

N.B.: au cours des manipulations, on surveille :

- la température de l'eau dans le bac.
- le niveau d'eau du bac pour éviter la cavitation de la pompe et le surchauffement des résistances.

On doit s'assurer que le thermomètre de l'échangeur indique bien la température initiale désirée de l'eau, la conduite de la vapeur étant débranchée.

- La température de la vapeur saturée (100°C) lorsque la colonne d'eau est vide.

4.3 Résultats expérimentaux et discussion:

Les résultats de l'expérience sont consignés dans les tableaux n° 13 et n° 14 et représentés sur les figures n° 2 et n° 3 avec les courbes théoriques.

On constate que pour des conditions opératoires fixées, la courbe théorique se trouve au dessous de la courbe obtenue expérimentalement jusqu'à un certain débit à partir duquel cette position s'inverse.

Les explications qu'on peut donner à cette différence se résument dans les remarques suivantes:

1. La contraction du jet a pour effet d'élever la température t_m (voir équation (9) ou figure n° 1)

2. L'accélération du jet entraîne une diminution du temps de contact.

3. Si on néglige l'effet de l'accélération, la vitesse du jet est en réalité égale à $\varphi \sqrt{2gk}$ et non pas à $\frac{Q}{S} = \varepsilon \varphi \sqrt{2gk}$ [10] où φ, ε , désignent respectivement le coefficient de vitesse et le coefficient de contraction.

La position réelle de la courbe expérimentale doit être déplacée vers les grandes vitesses et vers les petits diamètres.

4. La quantité de vapeur produite s'avère insuffisante dans le cas où la vitesse ou la surface d'échange est importante et dans ^{le cas} où la température initiale est assez basse.

4-4 Conclusion:

A la lumière des remarques précédentes, il est clair qu'une amélioration des conditions opératoires susceptibles de nous rapprocher du modèle choisi est toujours possible.

Il est possible également de corriger la température trouvée théoriquement lorsque la variation de la vitesse du jet est sensible.

La modification des conditions opératoires nous permettent uniquement de conserver un modèle physique simple, facile à le décrire mathématiquement.

Un bon accord entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques, pouvait à ce moment là être obtenu.

Dans la conception d'un système, il est très commode de se servir de modèles et de théories jugés valables. Toutefois on ne doit pas perdre de vue que, pendant la réalisation pratique, on risque de se confronter à de sérieux problèmes, d'ordre technologique, si on essaie de réunir les conditions "idéales" répondant aux exigences d'un modèle simple facile à étudier.

Nomenclature (chapitre 3 et 4)

Symboles latins

A	surface latérale du jet (sur face d'échange)
ϕ	= nA
C_p	chaleur spécifique de l'eau liquide
D	diamètre du jet
F	transformée de Laplace
H	hauteur du jet
I	fonction de Bessel de 2 ^{ème} espèce ; indice
J	fonction de Bessel de 1 ^{ère} espèce
K	indice
L	chaleur latente de condensation
M	= $h \text{ st} / (f \text{ sr})^2$
\dot{M}	débit massique de l'eau à chauffer
Q	quantité de chaleur
R	rayon du jet
S	section du jet
T	= $t - t_0$
V	volume du jet
X	= $C_p \dot{m} / (\lambda H)$
Z	variable complexe

a	distance entre axes (pas)
h	coefficient de transfert
\bar{h}	niveau d'eau dans la colonne
i	$i^2 = -1$
λ	= diffusibilité thermique ($\frac{\lambda}{\rho C_p}$)
m	débit massique d'un fillet liquide
n	nombre de jets ou de conduites
p	variable de Laplace
q	= p/k
r	coordonnée polaire
ρ	= a/D
t, t_p	température
v	vitesse du liquide
x, y, z	coordonnées de l'espace
x^*, y^*	= $R - x$; $x^* / (R \sqrt{h k t})$

Lettres grecques

α	$J_0(\alpha R) = 0$
ϵ	coefficient de contraction
θ	= $t_v - t$
λ	conductivité thermique
μ	viscosité dynamique
ρ	= A/V
τ	masse volumique ; $\sqrt{g/k} \tau$
τ_c	temps de contact
Φ	= $(t_m - t_0) / (t_v - t_0)$
ϕ	flux de chaleur
Δ	différence
Γ	= $\dot{m} / (h D)$; fonction d'Euler

Indices

$\bar{\alpha}, \bar{m}$	moyens arithmétique ; logarithmique
c	carré
e	échangeur
f	film
H	distance ()
i	rang ; interne
m	moyens à la sortie de l'échangeur
o	initial ; ordre zero ; à $x^* = 0$
p	paroi
t	triangle
.	débit
'	dérivée

Conclusion générale

Dans la publication [11], le modèle physique décrit assez rigoureusement est mis en équations qui sont posées dans un ordre pouvant servir d'algorithme à une résolution numérique par ordinateur. Quant à l'article [12] on s'intéressait surtout aux phénomènes de surface, à savoir la température superficielle (que l'on avait supposée constante dans notre cas), et le coefficient d'évaporation.

Cette étude bibliographique a donc contribué à compléter notre modeste travail par certains points sur lesquels nous nous sommes pas penchés.

Dans notre étude le raisonnement se basait sur la considération d'une tranche cylindrique de fluide parcourue radialement par un flux de chaleur en régime transitoire. On avait défini des coefficients de transfert de chaleur qu'on avait calculés pour des conditions qui ont permis d'éviter l'utilisation d'équations complexes. Comme application de cette étude thermique, on a fait le calcul d'un échangeur par contact direct qu'on a comparé à un condenseur classique à paroi.

Le travail est achevé par une partie expérimentale, qui

pourrait être mieux exploitable si on avait considéré plus de 3 diamètres différents pour le jet.

Je m'aperçois, enfin de compte que la manière suivant laquelle ce travail a été dirigé, n'a pas uniquement pour objet la détermination de la température moyenne d'un jet d'eau mais avait pour but encore l'initiation à la recherche scientifique.

Annexes

Rappels de mathématiques:

Principales propriétés des fonctions de Bessel: J_α et I_α

Fonction J_α :

Définition: $J_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n+\alpha}}{n! \Gamma(n+\alpha+1)}$ Fonction de Bessel
 d'ordre α (de 1^{ère} espèce)
 $n+\alpha+1 > 0$
 $z \in \mathbb{C}$

Formule de récurrence:

$$J_\alpha(z) = \frac{z}{2\alpha} (J_{\alpha+1} + J_{\alpha-1})$$

Dérivée

$$* J'_\alpha = J_{\alpha-1} - \frac{\alpha}{z} J_\alpha$$

$$* \frac{d}{dz} (z^{\alpha+1} J_{\alpha+1}) = z^{\alpha+1} J_\alpha$$

$$* \frac{d}{dz} (z^{-\alpha} J_\alpha) = -z^{-\alpha} J_{\alpha+1}$$

Fonction I_α

Définition: $I_\alpha(z) = i^{-\alpha} J_\alpha(iz)$

Formule de récurrence:

$$* I_\alpha(z) = I_{-\alpha}(z) \quad (\alpha \text{ entier})$$

$$* I'_\alpha = \frac{1}{2} (I_{\alpha+1} + I_{\alpha-1})$$

$$* \int I_\alpha dz = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (1)^k I_{\alpha+k} + (2k+1)$$

Equations différentielles génératrices de J_α et I_α

J_α est une intégrale particulière de l'équation

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - \alpha^2) y = 0$$

I_α est une solution de l'équation

$$z^2 y'' + z y' - (z^2 + \alpha^2) y = 0$$

Rappels des principaux nombres adimensionnels:

<u>Groupe</u>	<u>Symbole</u>	<u>Appellation</u>
$\frac{\rho v D}{\mu}$	Re	Nombre de Reynolds
$\frac{h D}{\lambda}$	Nu	Nombre de Nusselt
$\frac{\mu c_p}{\lambda}$	Pr	Nombre de Prandtl
$\frac{m c_p}{\lambda H}$	Gr	Nombre de Graetz.

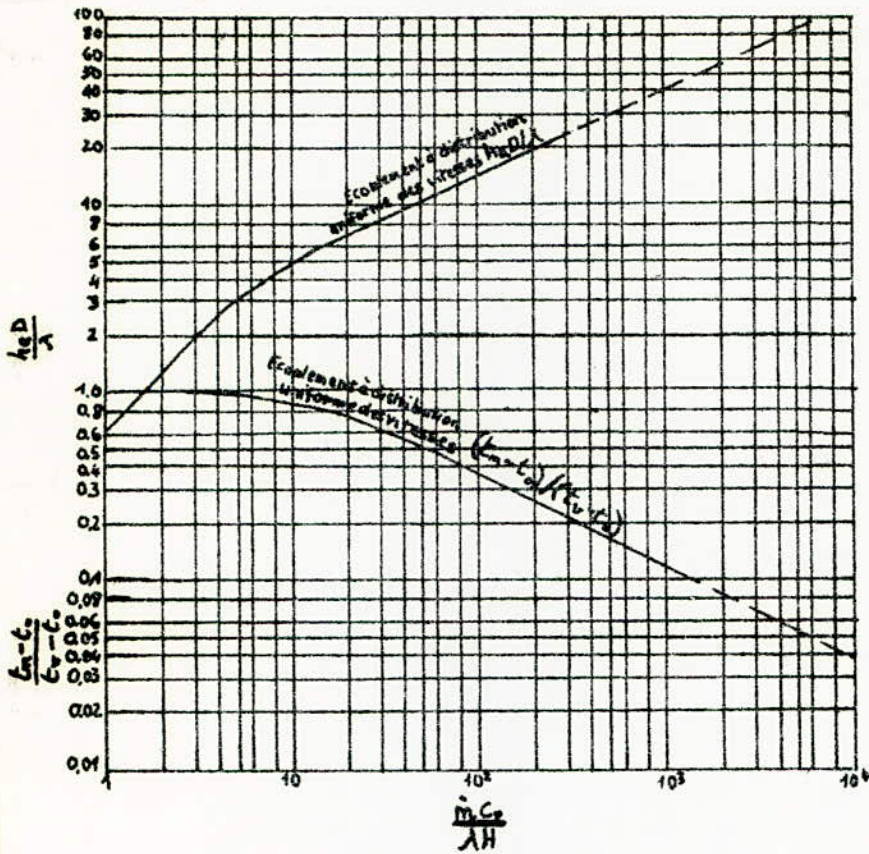


Fig n° 1

Valeurs de la fonction erreur $f\left(\frac{x^*}{2\sqrt{h\tau}}\right)$

$y^* = \frac{x^*}{2\sqrt{h\tau}}$	$f(y^*)$	y^*	$f(y^*)$	y^*	$f(y^*)$
0.00	0.0000	0.4	0.4284	1.3	0.9340
0.01	0.0143	0.5	0.5205	1.4	0.9523
0.02	0.0226	0.6	0.6039	1.5	0.9661
0.04	0.0451	0.7	0.6778	1.6	0.9763
0.06	0.0676	0.8	0.7421	1.8	0.9891
0.08	0.0901	0.9	0.7969	2.0	0.9953
0.10	0.1125	1.0	0.8427	2.2	0.9984
0.20	0.2227	1.1	0.8802	2.5	0.9996
0.30	0.3286	1.2	0.9103	3.0	1.0000

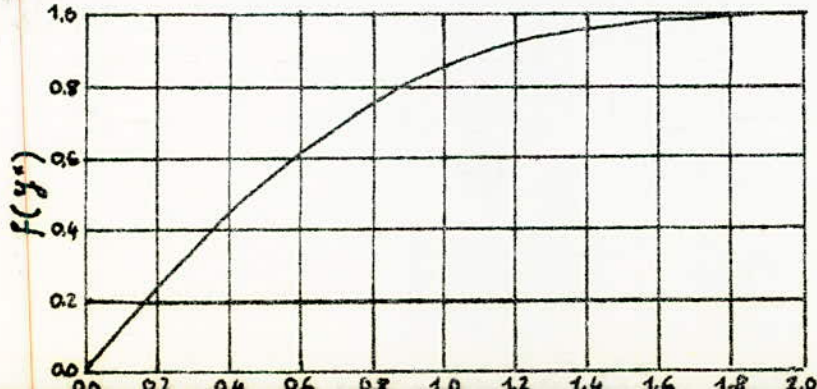
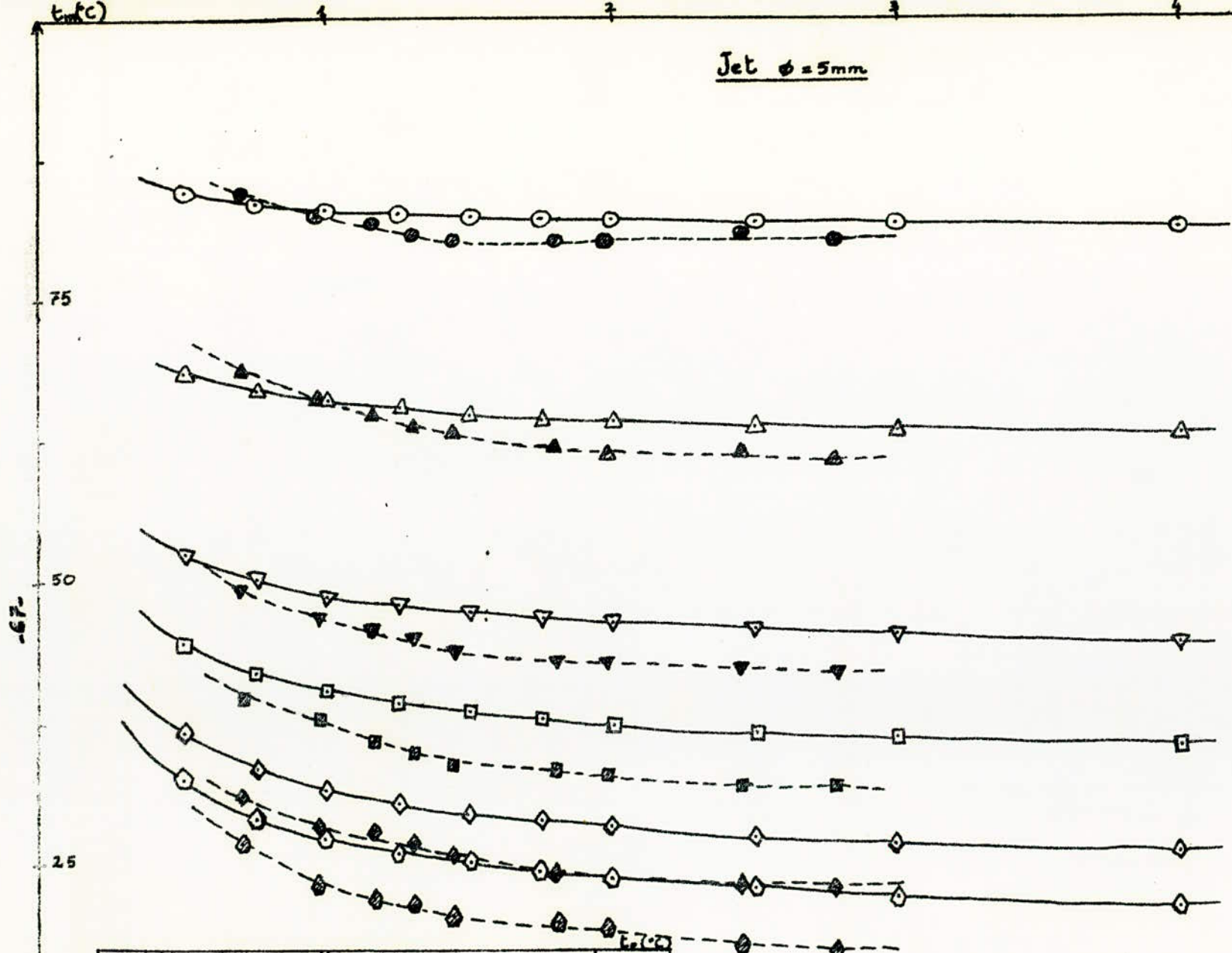


fig n° 4

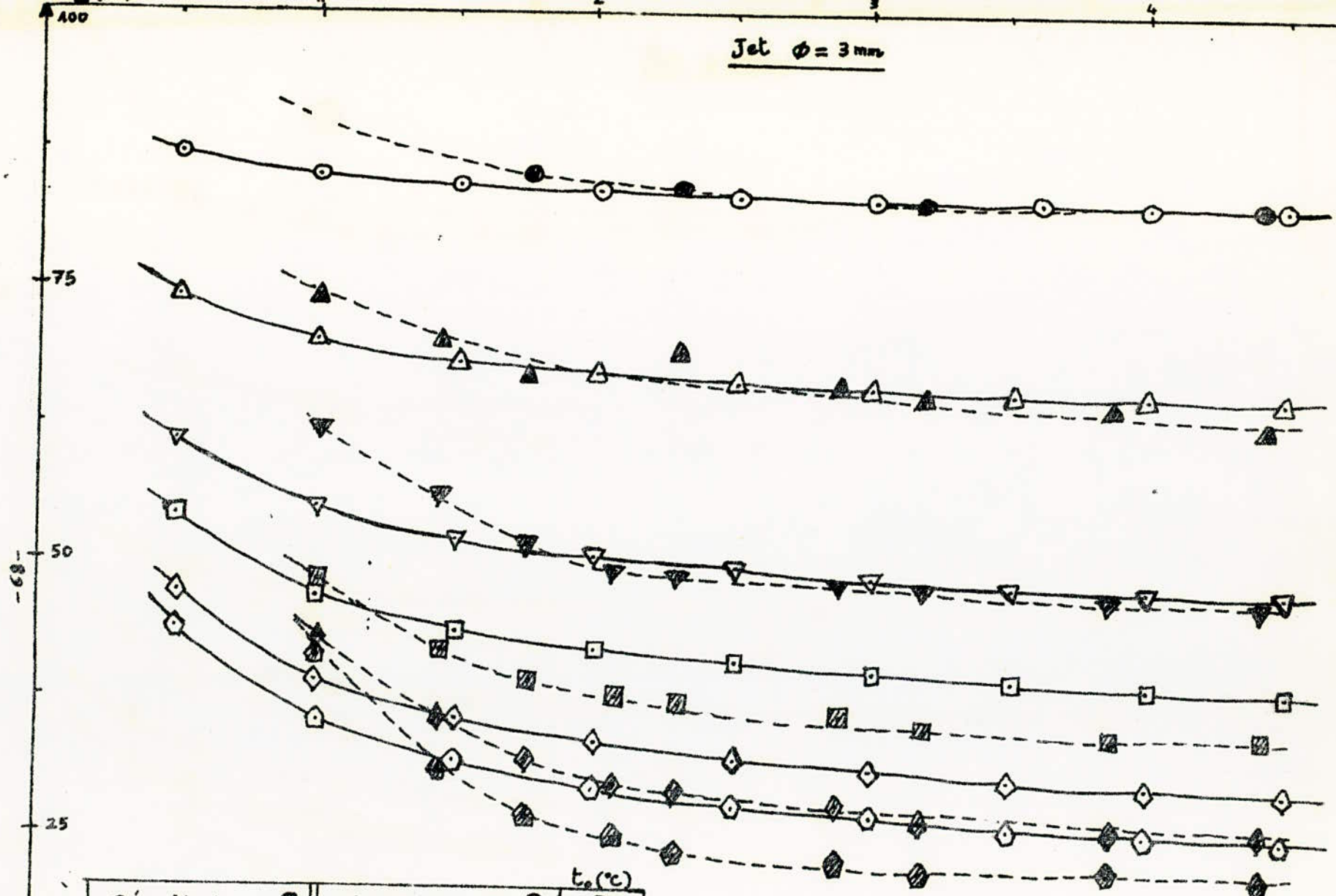
Jet $\phi = 5\text{mm}$



<u>Résultats expérimentaux</u>	●	<u>Résultats théoriques (analyse de Gratz)</u>	○	80
	▲		△	60
	▼		▽	40
	■		□	30
	◆		◇	20
	⊙		⊙	15

fig n°3

Jet $\phi = 3 \text{ mm}$



<u>Résultats</u>	●	<u>Résultats</u>	○	t_0 (°C)	80
<u>Expérimentaux</u>	▲	<u>Théoriques</u>	△		60
	▼	(analyse de	▽		40
	■	Graetz)	□		30
	◇		◇		20
	⊙		⊙		15

Fig n° 2

Courbes d'étalonnage
de la colonne d'eau

orifice de diamètre 3mm ○

" " 5mm △

$v = \sqrt{2gh}$ -----

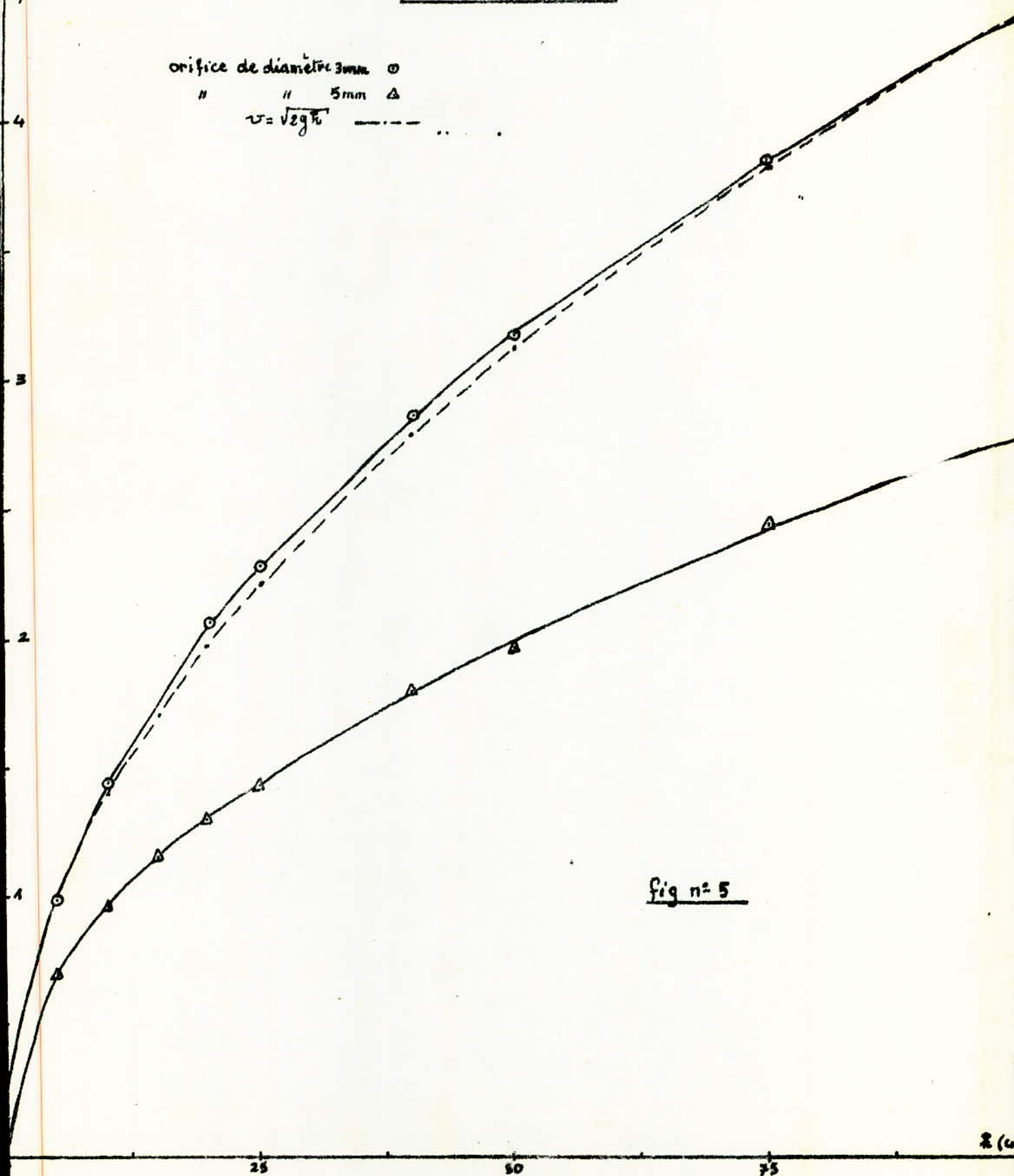


fig n° 5

Propriétés physiques de l'eau :

Propriétés \ t (°C)	15	20	30	40	60	80
λ (10^{-4} kcal/m/°C)	1.43	1.44	1.47	1.50	1.55	1.59
ρ (kg/m ³)	999	998	995	992	983	972
C_p (kcal/kg °C)	1.	1.	1.	1.	1.	1.
$k = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ (10^{-7} m ² /s)	1.43	1.44	1.48	1.51	1.57	1.63
μ (10^{-3} Pl)	1.15	1.00	0.85	0.70	0.50	0.35

Chaleur latente de condensation de la vapeur d'eau à 100°C : L = 540 kcal/kg

Tableau n°1

$$X = \frac{C_p \dot{m}}{\lambda H}$$

$$D = 3 \text{ mm}$$

v (m/s) t_a (°C)	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
15	123.60	247.20	370.80	494.40	618.00	741.61	865.21	988.21	1112.41
20	122.74	245.48	368.23	490.97	617.71	736.46	859.20	981.94	1104.69
30	119.42	238.85	358.28	477.70	597.13	716.55	835.98	955.40	1074.83
40	117.05	234.10	354.16	468.21	585.26	702.32	819.37	936.42	1053.47
60	112.58	225.16	337.74	450.32	562.99	675.48	788.06	900.63	1013.21
80	108.43	216.87	325.30	433.74	542.18	650.61	759.05	867.48	975.92

Tableau n° 2

$$\Phi = \frac{t_o - t_m}{t_o - t_v} = \frac{3.795}{\sqrt{X}}$$

$$D = 3 \text{ mm}$$

$\frac{v \text{ (m/s)}}{t_o \text{ (}^\circ\text{C)}}$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
15	0.341	0.241	0.197	0.170	0.152	0.139	0.129	0.121	0.114
20	0.342	0.242	0.198	0.171	0.153	0.140	0.129	0.121	0.114
30	0.347	0.245	0.200	0.174	0.155	0.142	0.131	0.123	0.116
40	0.351	0.248	0.202	0.175	0.157	0.143	0.132	0.124	0.117
60	0.357	0.253	0.206	0.179	0.160	0.146	0.135	0.126	0.119
80	0.364	0.258	0.210	0.182	0.163	0.149	0.138	0.129	0.121

-72-

Tableau n° 3

$$t_m (^\circ\text{C}) = t_o + \Phi(t_v - t_o)$$

$$D = 3 \text{ mm}$$

$t_o (^\circ\text{C}) \backslash \mathcal{I} (\text{mA})$	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
15	44	35.5	31.7	29.4	27.9	26.8	25.9	25.3	24.7
20	47.3	39.3	35.8	33.7	32.2	31.2	30.3	29.7	29.1
30	54.3	47.1	44	42.2	40.8	39.9	39.2	38.6	38.1
40	61.0	54.9	52.1	50.5	49.5	48.6	47.9	47.4	47.0
60	74.3	70.1	68.2	67.1	66.4	65.8	65.4	65.0	64.7
80	87.3	85.1	84.2	83.6	83.2	83	82.7	82.6	82.4

Tableau n° 4

-73-

$$X = \frac{C_p m}{\lambda H}$$

$$D = 5 \text{ mm}$$

$\frac{V(m/A)}{t_c(^{\circ}C)}$	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2	2.5	3	4
15	343.18	514.77	686.36	857.95	1029.54	1372.73	1715.91	2059.09	2745.45
20	340.79	511.19	681.59	851.99	1022.39	1363.19	1703.99	2044.79	2726.39
30	331.59	497.38	663.17	829.97	994.76	1326.35	1657.94	1989.53	2652.70
40	325.00	487.50	650.00	812.50	975.00	1300.00	1625.00	1950.00	2600.00
60	312.58	468.87	625.16	781.45	937.74	1250.22	1562.89	1875.48	2500.63
80	301.07	451.61	602.15	752.68	903.22	1204.29	1505.37	1806.44	2408.59

Tableau n° 5

$$\Phi = \frac{t_o - t_m}{t_o - t_v} = \frac{3.795}{\sqrt{x}}$$

$$D = 5 \text{ mm}$$

ν (m/s) t_o (°C)	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2	2.5	3	4
15	0.205	0.167	0.145	0.129	0.118	0.102	0.0916	0.0836	0.0724
20	0.206	0.168	0.145	0.130	0.118	0.103	0.0919	0.0839	0.0727
30	0.208	0.170	0.147	0.132	0.12	0.106	0.0932	0.0851	0.0737
40	0.210	0.172	0.149	0.133	0.121	0.105	0.0941	0.0859	0.0744
60	0.214	0.175	0.152	0.136	0.124	0.107	0.0960	0.0876	0.0759
80	0.219	0.178	0.154	0.138	0.126	0.109	0.0978	0.0893	0.0773

Tableau n° 6

$$t_m (^{\circ}\text{C}) = t_o + \Phi(t_v - t_o)$$

$$D = 5 \text{ mm}$$

$\begin{matrix} \mathcal{V} (\text{m/A}) \\ t_o (^{\circ}\text{C}) \end{matrix}$	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2	2.5	3	4
15	32.4	29.2	27.3	25.9	25	23.7	22.8	22.1	21.1
20	36.5	33.4	31.6	30.4	29.4	28.2	27.3	26.7	25.8
30	44.5	41.9	40.3	39.2	38.4	37.3	36.5	35.9	35.1
40	52.6	50.3	48.9	48.0	47.2	46.3	45.6	45.1	44.4
60	68.5	67	66.1	65.4	64.9	64.3	63.8	63.5	63.0
80	84.4	83.5	83.1	82.7	82.5	82.2	81.9	81.8	81.5

Tableau n° 7

D = 3 mm

$v(m/s)$ $t_s(^{\circ}C)$	1		4	
	h_o	h_a	h_o	h_a
15	0.954	1.025	1.908	2.031
80	0.994	1.139	1.987	2.125

Tableau n° 8

$v(m/s)$ $t_s(^{\circ}C)$	1		4	
	$h_o D/\lambda$	$(h_o D/\lambda)^*$	$h_a D/\lambda$	$(h_a D/\lambda)^*$
15	22.76	22.53	42.61	40.80
80	21.49	21.30	40.09	38.58

Tableau n° 9

D = 5 mm

$v(m/s)$ $t_s(^{\circ}C)$	1		4	
	h_o	h_a	h_o	h_a
15	0.954	1.028	1.908	1.979
80	0.994	1.077	1.987	2.064

Tableau n° 10

$v(m/s)$ $t_s(^{\circ}C)$	1		4	
	$h_o D/\lambda$	$(h_o D/\lambda)^*$	$h_a D/\lambda$	$(h_a D/\lambda)^*$
15	35.94	34.90	69.19	63.22
80	33.86	32.99	64.90	59.76

Tableau n° 11

Iterations	①	②	③	④	⑤
Δm	←		57.71	→	
t_p	74.15	80	95	92.25	93.2
Δt_{pv}	28.85	20	5	7.75	6.8
t_f	78.3	85	96.25	94.45	94.9
$10^3 \lambda_f$	1.59	1.61	1.63	1.625	1.627
f_f	972	968.6	961	962	962
$10^3 \mu_f$	0.35	0.32	0.28	0.29	0.28
$10^3 \mu_p$	0.43	0.36	0.28	0.29	0.29
$10^3 \mu_a$	←		0.70	→	
h_c	1.67	1.89	2.78	2.66	2.57
n	1407	1331	1188	1219	1211
h_i	0.340	0.324	0.348	0.343	0.344
ϕ_v/A	48.18	37.80	43.90	49.41	47.67
ϕ_c/A	8.14	15.93	18.26	17.03	17.42
h_{ms}	/	/	/	/	0.303

(a)

Iterations	$\frac{10^3}{h_{ms}} = \frac{10^3}{h_i} + \frac{10^3}{h_c}$
①	$2.72 n = 288.00 n^{1/3} + 599$
②	$2.72 n = 280.84 n^{1/3} + 529$
③	$2.72 n = 271.13 n^{1/3} + 359.7$
④	$2.72 n = 272.47 n^{1/3} + 405.5$
⑤	$2.72 n = 272.47 n^{1/3} + 388.7$

(b)

Tableaux n° 12

- $h_c = 12.028 \left(\frac{\lambda_f f_f^2}{f_f \Delta t_{pv}} \right)^{1/4}$ valable
uniquement pour l'exemple donné

- Système d'unités:
kcal ; p ; °C ; Pl ; m ; kg

Résultats expérimentaux

t_m : Température moyenne (°C)

D = 3 mm

r (cm)	5	10	15	20	25	40	50	75	100
t_0 (°C)	1	1.44	1.75	2.07	2.29	2.87	3.19	3.86	4.41
15	42	31.5	27	25	23.5	23	22	22	21.5
20	43	36	32	30	29	28	27	26	25.5
30	48	42	39	38	37	36	35	34	34
40	62	56	51.5	49	48.5	48	47.5	46.5	46
60	74	70	67	-	69	66	65	64	62
80	90	-	85	-	84	-	82.5	-	82

Tableau n° 45

-49-

Résultats expérimentaux

t_m : température moyenne (°C)

D = 5 mm

r_0 (cm) t_m (°C)	5	10	15	20	25	40	50	75	100
0.70	0.70	0.97	1.16	1.30	1.44	1.81	1.98	2.45	2.78
15	27	23.5	22	21.5	20.5	20	19.5	18	17.5
20	31	28.5	28	27	26	24.5	24	23.5	23
30	40	38	36	35	34	33.5	33	32	32
40	49.5	47	46	45	44	43	43	42.5	42
50	69	66.5	65	64	63.5	62	61.5	61.5	61
80	84.5	83	82	81	80.5	80.5	80.5	81	80.5

Tableau n° 14

Bibliographie

- [1] E. James Davis, Randolph Chang and B. Damian Pethica
Ind. Eng. Chem., Fundam., Vol. 14, N° 1, 1975, (27, 33)
- [2] M. Laboureur
Cours de calcul Mathématique moderne Tome II
Edition Dunod, Paris 1967
- [3] André Angot
Complément de mathématiques 5^{ème} Edition
Revue d'Optique, Paris 1967
- [4] W.H. Mc Adams
Transmission de la chaleur
Ed. Dunod, Paris 1964
- [5] Brown. G. G
Unit Operations
John. Wiley & Sons Inc. New York 1967
- [6] M. Jakob
Heat transfer Volume 1
Ed. Wiley New York 1967
- [7] E. Johnke and F. Emden
Tables of functions
Dover Publications 1943
- [8] P. Wulthier
Raffinage et Génie chimique Tome II
Ed. Technip 1972
- [9] Perry & Chilton
Chemical Engineers' Handbook 4^{ème} Edition
Ed. Mc Graw, Hill, New York 1963
- [10] Nekrasov
Cours d'Hydraulique
Ed. Mir, Moscou 1967
- [11] N.S. Murthy* and V.M.K. Sarbu
Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol 19, N° 1, 1976, (115, 117)

