

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique
Département d'Electrotechnique
Laboratoire de Recherche en Electrotechnique



Mémoire de
Master en Electrotechnique

Présenté par
ROUBACHE Lazhar

Intitulé

**Ferrorésonance dans le cas des
transformateurs monophasés type
Shell**

Soutenu le 17 juin 2015 à l'ENP

Membres du Jury d'examen

Président	T. Zebbadji	Docteur	à l'ENP
Rapporteurs	O.Touhami	Professeur	à l'ENP
	F.Aboura	Doctorant	à l'ENP
Examineurs	R. Ibtouen	Professeur	à l'ENP
	S. Mekhtoub	Professeur	à l'ENP

ENP 2015

ملخص:

الهدف من هذا البحث هو القيام بدراسة تجريبية على ظاهرة الرنين الغير خطي التي تمس المحولات الكهربائية، أستعمل في هذه الدراسة محول احادي الوجه. تم استعمال نموذج "Tellinen" لمحاكات منحنى المغناطيسية حيث تم كتابته بواسطة برنامج "Matlab/Simulink". وتمت مقارنة الإشارات الكهربائية المحاكات مع الإشارات المسجلة تجريبيا.

كلمات مفتاحية: الرنين الغير خطي، المحولات الكهربائية، نموذج منحنى المغناطيسية، التشعب، Matlab/Simulink

Résumé :

L'objectif de notre travail concerne une étude expérimentale sur le phénomène de la ferrorésonance. A cet effet, deux transformateurs, à savoir : un transformateur monophasé du type "Shell" et un transformateur triphasé asymétrique de type "Core" ont fait l'objet de la détermination des modes ferrorésonants. Un modèle a été élaboré pour les transformateurs monophasé et triphasé pour les simulations du régime transitoire. Ce modèle, implémenté sur Matlab/Simulink, utilise le modèle d'hystérésis de Tellinen. Les résultats issus des tests expérimentaux sont comparés à ceux obtenus par simulation, montrant la validité du modèle élaboré.

Mots-Clés : Ferrorésonance, Transformateur, Modèle d'hystérésis, Bifurcation, Matlab/Simulink

Abstract :

The objective of this work is making an experimental study on the ferrorésonance phenomenon; the study ported on tow transformer: a single-phase Shell type transformer and a three-phase core type transformer. An accurate model for the tow transformers for transient simulation implemented on Matlab/Simulink using Tellinen hysteresis model. We make the experimental tests on the tow transformers, we obtained the different ferroresonants modes, the comparison between the experimental, and the simulation results, validate the elaborated model.

Key words : Ferroresonance, Transformer, hysteresis model, Bifurcation, Matlab/Simulink.

A mes parents,

Remerciements

Je remercie vivement mes promoteurs le Pr **O.Touhami** et Mr **F.Aboua** pour m'avoir proposés et diriger cet intéressant thème.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation et plus particulièrement ceux du département d'Électrotechnique.

Je remercie également les membres du jury qui ont bien voulu examiner mon travail.

Table des matières

1.	Introduction	1
2.	Classification des régimes ferrorésonants	2
2.1.	Diagramme du plan de phase	2
2.1.	Section de Poincaré	2
2.2.	Régime périodique	3
2.3.	Régime quasi-périodique	3
2.4.	Régime chaotique	3
3.	Analyse de la ferrorésonance	4
3.1.	Modèle du transformateur	4
3.2.	Modélisation du cycle d'hystérésis	5
3.3.	Tests expérimentaux	5
3.4.	Modèle par approximation polynomiale	7
3.5.	Modèle de Tellinen	8
4.	Domaine d'apparition de la ferrorésonance par le diagramme de la bifurcation	11
4.1.	Mise en équation d'un circuit électrique	12
4.2.	Méthode des harmoniques équilibrés	13
4.3.	Méthode de Galerkin	15
-	Analyse du mode ferrorésonant fondamental	16
-	Analyse du mode ferrorésonant sous-harmonique (1/3)	17
-	Analyse du mode ferrorésonant harmonique (3)	18
-	Analyse du mode quasi-périodique	18
-	Influence de la capacité parallèle sur les modes Ferrorésonants	19
4.4.	Simulation numérique	20
4.4.1.	Diagramme de bifurcation par le modèle d'approximation polynomiale	20
4.4.2.	Diagramme de bifurcation utilisant le modèle de Tellinen	21
5.	Tests expérimentaux de la ferrorésonance sur Transformateur monophasé	23
5.1.	Circuit de test ferrorésonant	23
5.2.	Recherche des modes de la ferrorésonance	24
5.2.1.	Mode fondamental	24
5.2.2.	Mode sous-harmonique	26
5.2.3.	Mode quasi-périodique	28
5.2.4.	Mode chaotique	30
5.3.	Courant de démarrage	31
5.4.	Influence des conditions initiales sur les différents modes	32
5.5.	Influence de la capacité parallèle	33
6.	Conclusion	34
7.	Références Bibliographiques	

1. Introduction

La ferrorésonance est une interaction oscillatoire complexe de l'énergie échangée entre les inductances de magnétisation non-linéaires des noyaux ferromagnétiques et un système de condensateurs, [1]. Ces oscillations se manifestent par des tensions et courants élevés et déformés conduisant potentiellement à un échauffement excessif, un défaut d'isolation dans les transformateurs ainsi que d'importantes perturbations sur les réseaux électriques.

L'apparition de ce phénomène dépend de plusieurs paramètres et situations dans le réseau électrique. Pour comprendre le phénomène de la ferrorésonance, il est nécessaire :

- De spécifier les facteurs qui l'influencent ;
- D'identifier les situations réelles qui peuvent donner naissance à ce phénomène ;
- D'effectuer une analyse de la ferrorésonance par l'utilisation des méthodes déjà existantes telles que les méthodes numériques, la méthode de la bifurcation, etc., [2, 3].

Le circuit général pouvant donner naissance à la ferrorésonance est essentiellement constitué

- d'une inductance de magnétisation non-linéaire (cas des transformateurs) ;
- d'un condensateur mis en série avec cette inductance et court-circuité à l'aide d'un interrupteur ;
- d'une source de tension alternative sinusoïdale ;
- de faibles pertes (résistance de ligne, pertes fer du transformateur, etc....).

L'apparition de la ferrorésonance est d'autant plus accentuée qu'en l'absence d'un amortissement, cas du transformateur à vide ou faiblement chargé.

Avant de procéder à l'expérimentation, il est nécessaire d'effectuer des simulations dans les mêmes conditions d'essais pour l'étude de la ferrorésonance. Les résultats obtenus permettent de déterminer les valeurs de la capacité pour les différents modes de fonctionnement. La précision des résultats dépendra du modèle de l'inductance de magnétisation non-linéaire du noyau ferromagnétique du transformateur et les performances du modèle du transformateur dépendent principalement de la représentation de ces paramètres non linéaires. La détermination du cycle d'hystérésis pour les simulations transitoires reste compliquée. Plusieurs modèles et algorithmes ont été élaborés pour approximer le comportement du circuit magnétique [10].

La détermination des modes de la ferrorésonance s'effectue par le spectre des signaux, par le diagramme du plan de phase ou encore par la section de Poincaré. Différentes techniques d'analyse de la ferrorésonance sont utilisées. Il s'agit principalement de la méthode des

harmoniques équilibrés, de la méthode de Galerkin ou encore de la résolution numérique des équations différentielles.

2. Classification des régimes ferrorésonants

A partir des formes d'onde des tensions et des courants on classe les régimes de ferrorésonance. Cette classification correspond en régime permanent, c'est-à-dire, après extinction du régime transitoire. On peut reconnaître le type de la ferrorésonance soit par le contenu spectral des signaux de courant et de tension (FFT) soit en utilisant le diagramme du plan de phase ou encore la section de Poincaré.

Il est préférable de se baser sur le signal de tension qui est de forme sinusoïdale avant l'apparition de la ferrorésonance, donc son spectre ne présente que la fréquence fondamentale, alors que le signal du courant d'excitation contient des fréquences impaires multiple de la fréquence fondamentale ($3f$, $5f$, ...).

Nous présentons brièvement le diagramme de plan de phase et la section de Poincaré.

2.1. Diagramme du plan de phase

L'espace de phase est un espace mathématique abstrait dont le comportement dans le temps d'un système est représenté par le mouvement d'un point représentant les variables d'état du système avec le temps. L'étude du comportement d'un système est basée sur le comportement de sa trajectoire dans l'espace de phase. Si la trajectoire se referme sur elle-même après chaque période T , l'oscillation sera périodique, de période T . Si la solution donne le mode quasi-périodique, la trajectoire ne revient au point de départ qu'après deux ou trois périodes ($2T$, $3T$). Il en est de même pour la solution sous-harmonique, Fig.1.b.

Si la solution donne un mode chaotique alors le comportement est non-répétitif, et la trajectoire ne referme jamais sur elle-même.

2.1. Section de Poincaré

La section de Poincaré est une représentation du diagramme du plan de phase enregistré comme une séquence de points après chaque période T , Fig.1a. La section du Poincaré donne une information sur le rapport entre la fréquence de la source d'excitation et la fréquence du système. Pour une solution périodique, de période T , la section de Poincaré est un point. Le mode chaotique produit une section de Poincaré comme une surface des points aléatoires.

On distingue différents types de régime ferrorésonant :

1. la ferrorésonance périodique (mode fondamental et mode sous-harmonique)
2. la ferrorésonance quasi-périodique
3. la ferrorésonance chaotique.

2.2. Régime périodique

La ferrorésonance périodique est soit fondamentale soit sous-harmonique. Pour la ferrorésonance fondamentale, les signaux sont à la fréquence de la source d'alimentation 50 Hz, bien que plusieurs harmoniques peuvent exister et sont généralement des multiples entiers impairs de la fréquence fondamentale, à savoir : 150Hz, 250Hz, 350Hz, Fig.1.a.

Pour la ferrorésonance sous-harmonique, les oscillations s'effectuent avec une période multiple de la période de la source nT . Sur le spectre du signal, il apparait des fréquences sous-multiples, impaires de la fréquence fondamentale (50Hz/3, 50Hz/5, 50Hz/7, etc.).

2.3. Régime quasi-périodique

Ce régime n'est pas périodique. Il se caractérise par des oscillations ayant au moins deux fréquences de base : une fréquence fondamentale et une autre différente. Le spectre de fréquence est composé de plusieurs raies distinctes dont les fréquences s'expriment sous la forme : $nf_1 + mf_2$ (n et m sont des nombres entiers), Fig.1.d.

2.4. Régime chaotique

Les régimes chaotiques se caractérisent par un comportement qui semble aléatoire, leur spectre de fréquence est continu, c'est-à-dire, qu'il ne s'annule pour aucune fréquence, Fig.1.g. La section de Poincaré est une surface de points, Fig.1.k.

La Figure 1.3 montre les trois modes, à savoir : le mode fondamental, le mode quasi-périodique et le mode chaotique.

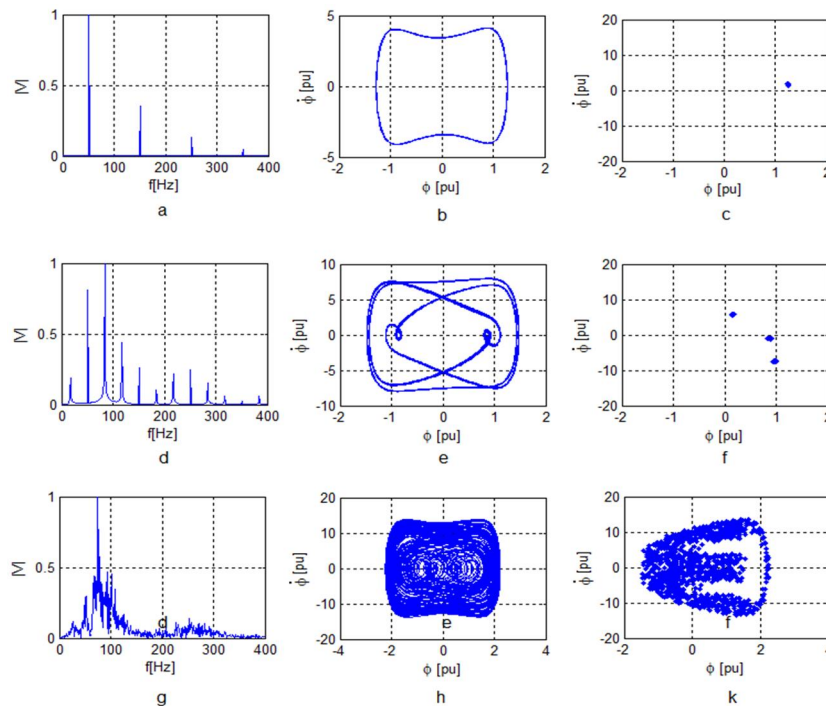


Figure 1. a, d, g/ Spectre du signal b, e, h/ Diagramme du plan de phase c, f, k/ Section de Poincaré des trois régimes

3. Analyse de la ferrorésonance

L'apparition des différents modes de la ferrorésonance dépend, en plus des conditions initiales, de plusieurs paramètres dans le circuit ferrorésonant. De plus, il peut arriver qu'un mode de ferrorésonance apparaisse seulement pour une ou deux valeurs de paramètres. Donc, avant d'entamer les tests expérimentaux sur la ferrorésonance et pour éviter de passer par toutes les possibilités, c'est-à-dire, effectuer un grand nombre de tests avec le risque de ne pas réaliser le mode désiré, on doit effectuer une analyse du circuit qui permet de spécifier le domaine des paramètres conduisant aux différents modes de la ferrorésonance (bifurcation). Ceci est effectué par des méthodes analytiques ou par simulation numérique dans un domaine temporel.

Il devient alors évident d'établir un modèle du transformateur pour les méthodes analytiques basées sur l'approximation de la caractéristique $i = f(\Psi)$ par un polynôme de degré n . Par contre, pour la simulation numérique, c'est le modèle de Tellinen que nous appliquerons au circuit magnétique, [20].

Ce chapitre traite de deux principaux points, à savoir :

- le premier concerne le modèle du transformateur et du cycle d'hystérésis,
- le second est la recherche du domaine des paramètres pouvant conduire à la ferrorésonance par le diagramme de bifurcation.

3.1. Modèle du transformateur

Les modèles du transformateur les plus précis sont élaborés sur une base physique. Ils sont du type topologique c'est-à-dire que le noyau ferromagnétique du transformateur est modélisé par une réluctance non linéaire et les flux de fuite sont donnés par des réluctances de valeur constante. Il existe plusieurs modèles topologiques dont la différence est due au flux de fuite.

Le choix du trajet du flux donne la différence entre les modèles topologiques. Le premier est connu sous le nom de "flux divisé" et le second de "flux intégral", Fig.2, [17].

Dans un transformateur monophasé "type Shell" et pour une approche du flux divisé, le flux magnétique est divisé en trois, Fig.2.a.

Le flux principal Φ_c qui s'établit dans le noyau ferromagnétique est représenté par une réluctance non linéaire \mathcal{R}_c , le flux de fuite de la bobine primaire Φ_{11} (\mathcal{R}_{11}) et le flux de fuite du secondaire Φ_{12} (\mathcal{R}_{12}).

Cependant, pour l'approche du flux intégral, il y a un seul flux de fuite entre les bobines primaire et secondaire Φ_{112} , Fig.2.b. Dans cette approche, la réluctance qui représente le flux de fuite entre le noyau et la bobine (traits pointillés) peut être ajoutée à la réluctance non linéaire (\mathcal{R}_c). Le circuit magnétique équivalent pour les deux approches est présenté à la Fig.2.

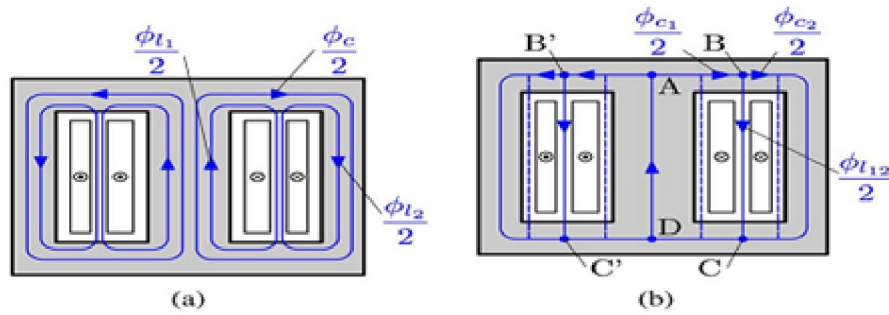


Figure 2. Flux dans un transformateur monophasé Shell a/ approche flux divisé b/ approche flux intégral

Les pertes fer contiennent les pertes par courant de Foucault et les pertes par hystérésis dans le noyau sont introduites dans la réluctance non-linéaire R_c . les résistances des bobines primaire et secondaire sont en série avec les inductances de fuite. Ces paramètres sont linéaires et de valeurs faibles comparés à ceux de la branche magnétisante (R_c , L_c). La résistance qui représente les pertes fer R_c peut être supposée linéaire, elle dépend de la tension et de la fréquence. Or, le courant d'excitation présente un grand nombre d'harmoniques dus à la saturation magnétique du noyau du transformateur, il serait donc plus juste de le considérer comme non-linéaire.

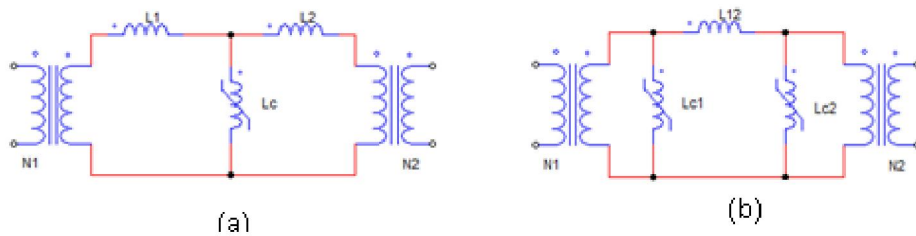


Figure 3. Circuit électrique équivalent du transformateur monophasé type Shell a/ approche flux divisé b/ approche flux intégral

3.2. Modélisation du cycle d'hystérésis

Le comportement de circuit magnétique a été modélisé par différentes fonctions non linéaires (polynomiale, arctangente, exponentielle) pour approximer la caractéristique non-linéaire B-H. Cette approximation est suffisante pour l'analyse du régime permanent. Pour l'étude du comportement transitoire et dynamique comme dans le cas de la ferrorésonance, des modèles plus précis sont exigés. Plusieurs modèles de l'hystérésis ont été élaborés, Jiles Atherton [18] et Preisach [19] sont les plus connus. Cependant, ces modèles exigent des tests assez compliqués à mettre en œuvre.

3.3. Tests expérimentaux

Pour déterminer le cycle d'hystérésis expérimentalement on effectue un test à vide sur un transformateur de type Shell de puissance 220VA, Fig.4.

La bobine du primaire est alimentée par une tension de 220V crée un champ magnétique $H(t)$, le courant $I(t)$ qui traverse la résistance $R1$ est proportionnel au champ magnétique $H(t)$

par la relation $H(t).L = N_1.I(t)$ et le champ magnétique H peut être déterminé à partir de la tension aux bornes de la résistance R_1 :

$$H(t) = N_1 \cdot \frac{V_{R1}(t)}{R_1 \cdot L}$$

L'induction dans le circuit magnétique du transformateur $B(t)$ est calculée à partir de la f.é.m. induite dans la bobine secondaire $e(t)$, telle que :

$$e(t) = N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt} = N_2 \cdot S \cdot \frac{dB}{dt}$$

Avec, S : la section du circuit magnétique et L : la longueur moyenne du circuit magnétique
L'intégrale de $e(t)$ donne l'induction $B(t)$.

$$B(t) = \frac{1}{N_2 \cdot S} \int e(t) dt$$

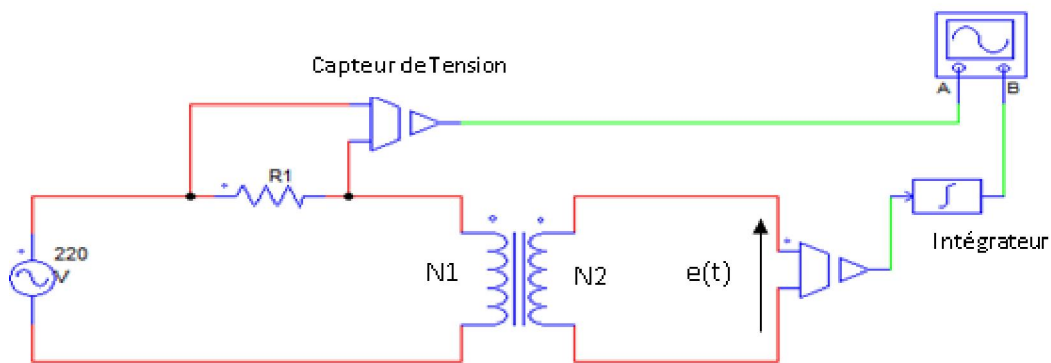


Figure 4. Schéma utilisé pour la mesure du cycle d'hystérésis

Les tests sont effectués sur un transformateur monophasé ayant les caractéristiques présentées au tableau 1. Les résultats expérimentaux sont présentés à la Fig.5.

Tableau 1. Caractéristiques du transformateur d'essai Shell

S_n	220 VA
U_n	220 V
N_1, N_2	630, 43
r_1, r_2	7.5 Ω ; 0.7 Ω
S	1420 mm ²
L_{moy}	0.13 m
P_{fer}	3.60 W

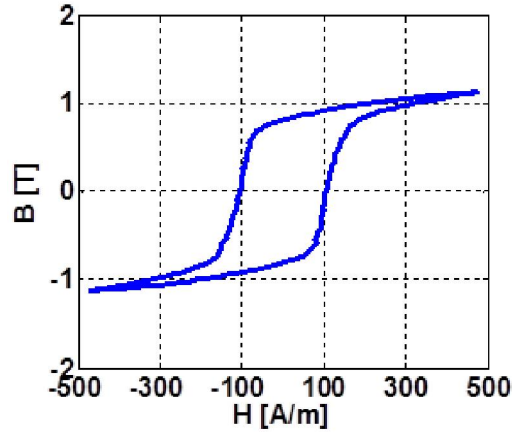


Figure 5. Cycle d'hystérésis expérimental du transformateur d'essai Shell

3.4. Modèle par approximation polynomiale

Dans ce modèle, la branche magnétisante est représentée par une résistance équivalente constante qui traduit les pertes fer, en parallèle avec une inductance non-linéaire. Le courant absorbé par cette inductance est exprimé en fonction du flux par un polynôme de degré n, Fig.6.

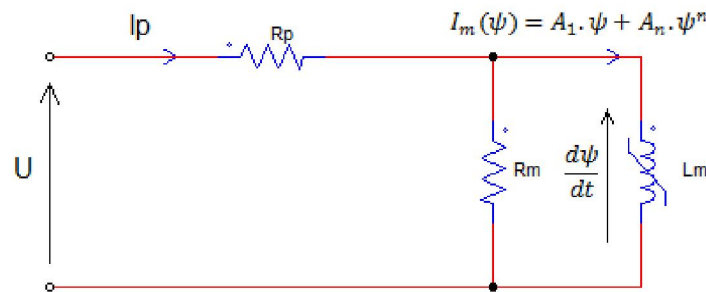


Figure 6. Schéma équivalent du Transformateur à vide

Le courant I_m est approximé par l'expression (1) et par le cycle d'hystérésis expérimental, Fig.7

$$I_m(\psi) = A_1 \cdot \psi + A_n \cdot \psi^n \quad (1)$$

avec $n = 5$; $A_1 = 9.8 \cdot 10^{-4}$; $A_n = 9.8 \cdot 10^{-2}$

Le système d'équation d'état du circuit électrique (Fig.6) est :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{1 + \frac{R_p}{R_m}} \left(U - R_p (A_1 \cdot \psi + A_n \cdot \psi^n) \right) \quad (2)$$

$$I_p = \frac{1}{R_m} \frac{d\psi}{dt} + A_1 \cdot \psi + A_n \cdot \psi^n \quad (3)$$

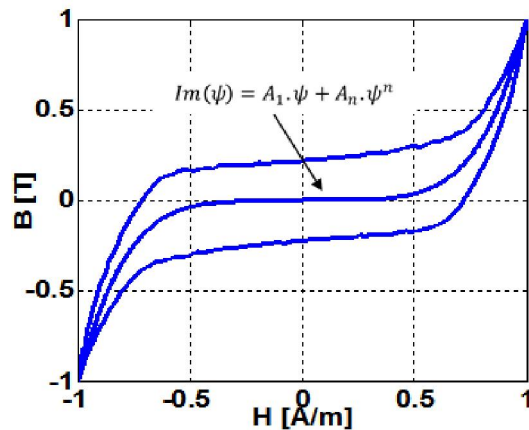


Figure 7. Approximation polynomiale de la caractéristique magnétique

Par une simple intégration numérique de l'équation (2), on obtient le flux et le courant d'excitation.

La comparaison des résultats obtenus par la résolution de ce système et ceux expérimentaux est donnée à la Fig.8. On voit bien que ce modèle est approximatif et ne donne pas de très bons résultats lorsque la tension est différente de la tension pour laquelle nous avons effectué l'approximation (2.1), Fig.8.a. Donc ce modèle ne convient pas pour l'étude de la ferrorésonance. Par contre, il est utilisé pour établir le diagramme de bifurcation pour approximer les valeurs des paramètres qui conduisent à la ferrorésonance. Le temps de calcul pour ce modèle est relativement court.

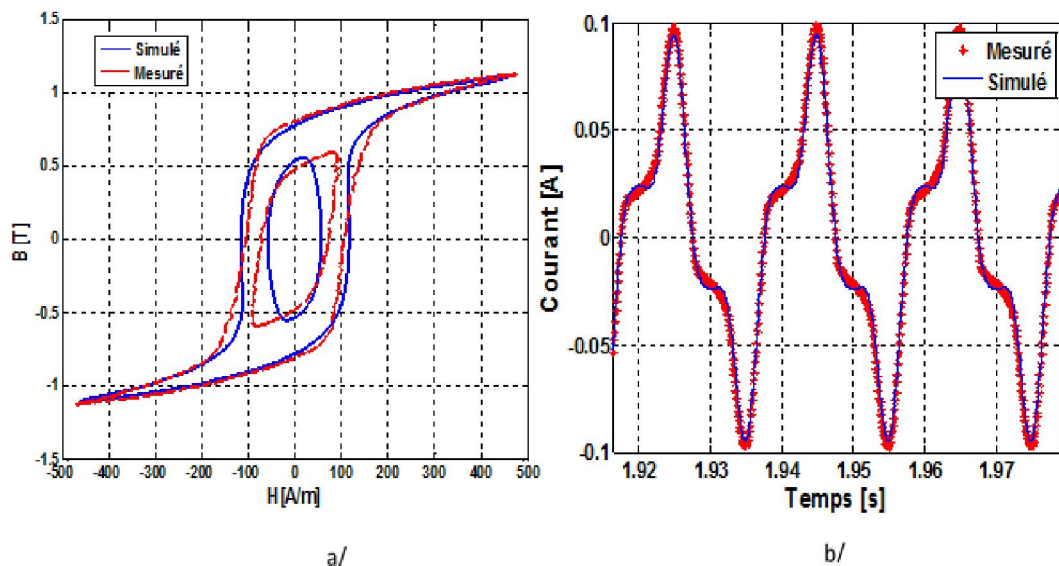


Figure 8. Comparaison des résultats expérimentaux et de simulation par le modèle d'approximation polynomiale
a/ cycles d'hystérésis b/ courant d'excitation

3.5. Modèle de Tellinen

Un modèle simple de l'hystérésis a été proposé par Tellinen [20]. Il présente une bonne précision pour estimer les cycles majeurs et mineurs à partir seulement d'un cycle majeur mesuré expérimentalement. Ce modèle peut être implémenté de façon simple dans les logiciels

de simulation (PSPICE, par exemple) [1]. Dans le cas de notre travail, nous allons l'implémenter sous MATLAB.

Pour estimer les cycles on doit d'abord évaluer les limites ascendantes et descendantes du cycle majeur en utilisant la fonction suivante :

$$B(h) = \text{sgn}(h) \cdot \alpha \cdot \log(\beta \cdot |h| + 1)$$

Les paramètres α , β sont choisis pour contrôler la partie verticale et celle horizontale de la fonction $B(h)$. Le paramètre σ permet de déplacer les limites ascendantes et descendantes. Donc σ donne la largeur du cycle majeur et les limites $B^-(h)$ et $B^+(h)$ deviennent, Fig.10.

$$B^+(h) = \text{sgn}(h - \sigma) \cdot \alpha \cdot \log(\beta \cdot |h - \sigma| + 1)$$

$$B^-(h) = \text{sgn}(h + \sigma) \cdot \alpha \cdot \log(\beta \cdot |h + \sigma| + 1)$$

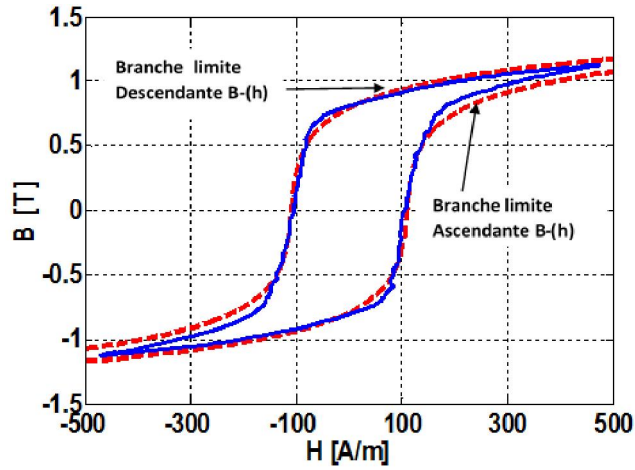


Figure 9. Limites ascendante and descendante des fonctions $B^+(h)$, $B^-(h)$

Les équations utilisées pour estimer l'hystérésis sont :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\mu_0 + \frac{B^-(h) - b}{B^-(h) - B^+(h) \left(\frac{dB^+(h)}{dh} - \mu_0 \right)}} \cdot \frac{db}{dt} \quad \text{si } \frac{db}{dt} > 0$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\mu_0 + \frac{B^+(h) - b}{B^-(h) - B^+(h) \left(\frac{dB^-(h)}{dh} - \mu_0 \right)}} \cdot \frac{db}{dt} \quad \text{si } \frac{db}{dt} < 0$$

Le signal de tension étant connu et, par suite la variation de $b(t)$. À partir des équations précédentes, on peut calculer le champ $h(t)$. Le terme $\frac{dB^\pm(h)}{dh}$ représente la pente des fonctions ascendante et descendante.

$$\frac{dB^\pm(h)}{dh} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot |h \mp \sigma| + 1}$$

Pour un comportement dynamique de l'hystérésis, les courants de Foucault doivent être pris

en compte et le modèle dynamique devient alors : $h_d = h(b) + \sigma_e \cdot \frac{db}{dt}$
avec h_d : Champ magnétique dynamique

σ_e : Facteur du courant de Foucault dépendant des pertes par courant de Foucault (Pe).
Son expression [20], est :

$$\sigma_e = \frac{P_e N^2 S}{U^2 L}$$

N : Nombre de spires, S : La surface de noyau, L : Longueur moyenne. σ_e Peut-être approximé à partir de deux cycles pris à des tensions différentes.

Les coefficients utilisés pour la simulation utilisant les fonctions $\phi_x^+(i_x)$ et $\phi_x^-(i_x)$ sont présentés au tableau

Tableau 2. Données de modèle d'hystérésis

Fonction Ascendante $\phi_x^+(i_x)$	Fonction Descendante $\phi_x^-(i_x)$
$\alpha= 0.00031, \beta=2.3, \sigma= 3.9$	$\alpha= 0.00031, \beta=2.3, \sigma= 3.9$
$\sigma_e=20$	

La comparaison entre le comportement dynamique et celui quasi-statique du modèle de Tellinen est montrée sur la Fig.10

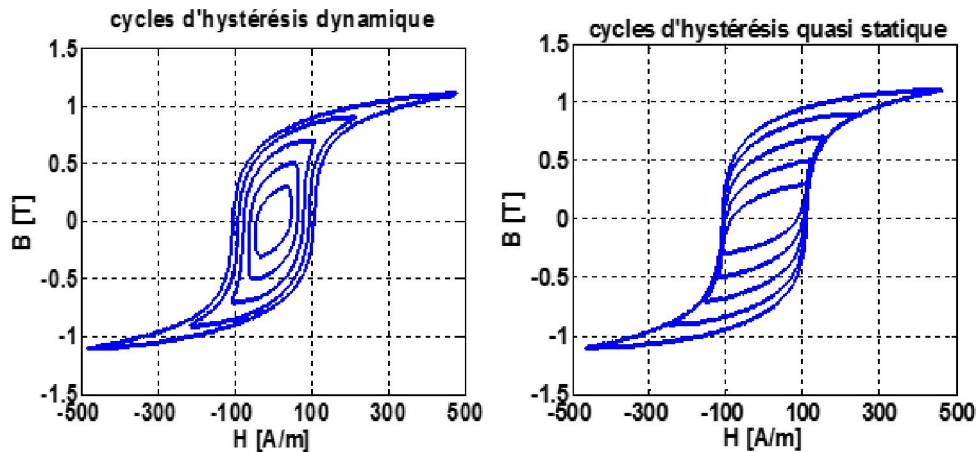


Figure 10. Comparaison entre les cycles dynamique et quasi-statique obtenus par le modèle de Tellinen

Le modèle du cycle d'hystérésis est utilisé pour la simulation de la ferrorésonance. Les résultats obtenus par ce modèle et par expérimentation sont montrés à la Fig.12. La topologie du modèle du transformateur, [17], contient les bobines primaire et secondaire qui donnent deux sources de Forces magnétomotrices.

Le circuit magnétique est représenté par une reluctance non-linéaire et les fuites par une réactance de valeur constante. A vide, on peut négliger les fuites et la réactance non-linéaire est contenue dans le modèle de Tellinen Fig.11.

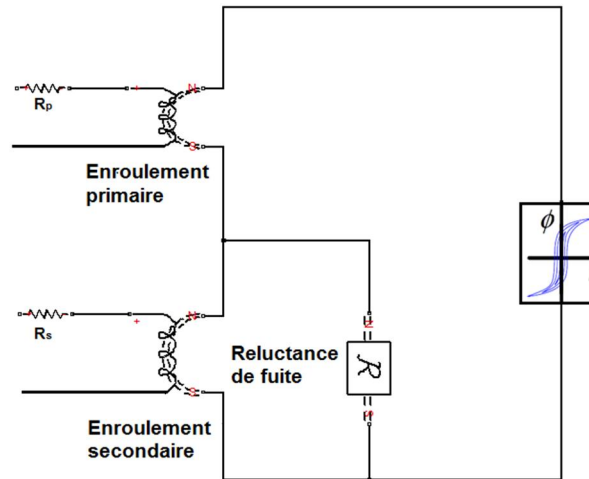


Figure 11. Schéma du transformateur utilisant le modèle de Tellinen

La comparaison des résultats obtenus par implémentation de ce modèle sur Matlab\Simulink avec ceux expérimentaux présentés à la Fig.12 montre que le modèle de Tellinen convient bien à l'étude de la ferrorésonance

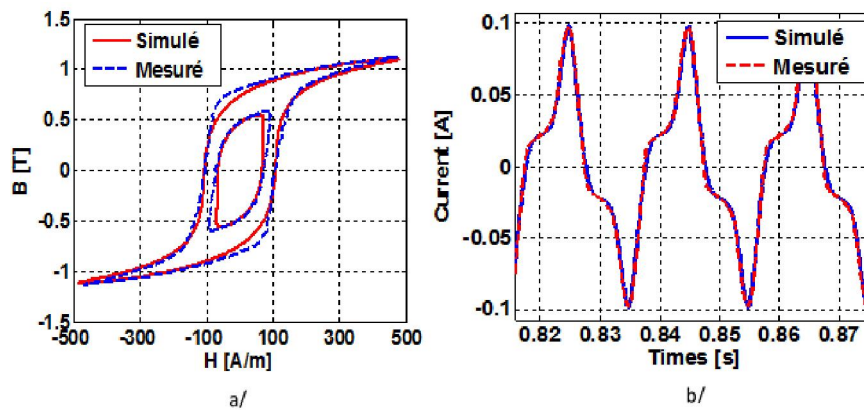


Figure 12. Comparaison des résultats expérimentaux et simulés par le modèle de Tellinen
a/ cycles d'hystérésis b/ courant d'excitation

4. Domaine d'apparition de la ferrorésonance par le diagramme de la bifurcation

La modélisation d'un circuit ferrorésonant conduit à un système d'équations différentielles non-linéaires dépendant du temps t et de divers paramètres physiques. Il est impossible de trouver une solution analytique d'un système non-linéaire. Cependant, diverses méthodes [7, 13, 15] sont proposées pour la recherche des solutions analytiques approchées ou pour une résolution numérique. Ce qui permet de comprendre le phénomène, le classifier et étudier

l'influence des divers paramètres du circuit ferrorésonant sur la solution ou en d'autres termes "la bifurcation".

Il existe trois approches pour l'étude de ce phénomène que nous citerons :

- La méthode de Galerkin qui consiste à supposer une solution approximative périodique sous forme de série de Fourier, afin d'obtenir un système d'équations non-linéaires qui peut se résoudre numériquement ou analytiquement comme il est expliqué dans les références [2, 7],
- La méthode des harmoniques équilibrés qui est un cas particulier de la méthode de Galerkin, [8],
- Et, les méthodes utilisant les modèles dynamiques du cycle d'hystérésis [1, 9].

4.1. Mise en équation d'un circuit électrique

Un circuit ferrorésonant est généralement modélisé par un transformateur alimenté par une tension sinusoïdale $U(t) = U_m \sin(\omega t)$. Ce circuit contient des éléments électriques passifs (inductance, résistance, capacité) (fig.13). Comme la caractéristique magnétique du transformateur est non-linéaire, il est nécessaire alors d'approximer le courant actif et réactif, absorbés par la branche magnétisante du transformateur, par des polynômes de degré n, Eqs. (4.a et 4.b)

$$i_{Lm}(\psi) = A_1\psi + A_n\psi^n \quad (4.a)$$

$$i_{Rm}(\psi) = B_1 \frac{d\psi}{dt} + B_n \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^n \quad (4.b)$$

Le degré n du polynôme est un nombre impair qui dépend de la précision désirée dans l'approximation des courbes des variations de l'inductance et de la résistance équivalente de la branche magnétisante. A_1, A_n, B_1, B_n sont les coefficients d'ajustement de ces courbes.

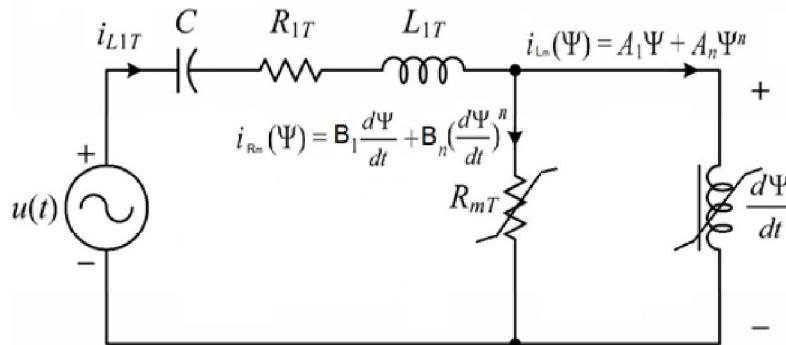


Figure 13. Circuit ferrorésonant série

Les équations mathématiques du circuit ferrorésonant série peuvent être écrites comme suit

$$U(t) = U_c + R_{1T}i_{L1T} + L_{1T} \frac{di_{L1T}}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \quad (5.a)$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{dU_c}{dt} + R_{1T} \frac{di_{L1T}}{dt} + L_{1T} \frac{d^2 i_{L1T}}{dt^2} + \frac{d^2 \psi}{dt^2} \quad (5.b)$$

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{C} i_{11T} \quad (5.c)$$

$$i_{11T} = i_{Rm}(\psi) + i_{Lm}(\psi) \quad (5.d)$$

Ce qui donne :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + L_{1T} \frac{d^2 i_{Rm}(\psi)}{dt^2} + R_{1T} \frac{d i_{Rm}(\psi)}{dt} + \frac{1}{C} i_{Rm}(\psi) + L_{1T} \frac{d^2 i_{Lm}(\psi)}{dt^2} + R_{1T} \frac{d i_{Lm}(\psi)}{dt} + \frac{1}{C} i_{Lm}(\psi) = \frac{dU(t)}{dt} \quad (6)$$

Les équations (4.a, 4.b et 6) forment une équation différentielle non-linéaire ordinaire, facile à résoudre numériquement par les outils du logiciel Matlab. Deux solutions peuvent être alors proposées pour la détermination de la bifurcation à savoir :

- Résolution numérique ;
- Résolution analytique.

4.2. Méthode des harmoniques équilibrés

Cette méthode consiste à remplacer l'inconnu du système par une solution définie comme une somme des sinusoïdes (série de Fourier) qui comprend la fréquence d'excitation plus les harmoniques importants.

Par exemple, pour déterminer la solution fondamentale approximative de l'équation différentielle (6), on néglige tous les harmoniques dans l'expression du flux magnétique et du courant magnétisant

$$\begin{cases} \psi(t) = \psi_m \sin(\omega.t + \varphi) \\ \psi(t) = \psi_{1s} \sin(\omega.t) + \psi_{1c} \cos(\omega.t) \\ \psi_m^2 = \psi_{1s}^2 + \psi_{1c}^2 \end{cases} \quad (7)$$

En remplaçant (7) dans (4.a) et (4.b), on obtient :

$$i_{Lm}(\psi) = A_1 \psi_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) + A_n \psi_m^n \cdot \sin^n(\omega t + \varphi) \quad (8.a)$$

$$i_{Rm}(\psi) = B_1 \psi_m \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) + B_n \psi_m^n \cdot \omega \cdot \cos^n(\omega t + \varphi) \quad (8.a)$$

Sachant que n est impair, la décomposition binomiale de $\sin^n(\omega t + \varphi)$ et de $\cos^n(\omega t + \varphi)$ est donnée dans (9)

$$\begin{cases} \sin^n(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_n^{\frac{n-1}{2}-j} \sin((2j+1)(\omega t + \varphi)) \\ \cos^n(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_n^{\frac{n-1}{2}-j} \sin\left((2j+1)(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})\right) \end{cases} \quad (9)$$

En éliminant tous les harmoniques d'ordre supérieur, on obtient :

$$\begin{cases} i_{Lm}(\psi) = (A_1 + d_n \cdot A_n \cdot \psi_m^{n-1}) \psi_m \sin(\omega t + \varphi) \\ i_{Rm}(\psi) = (B_1 + d_n \cdot B_n \cdot \omega^{n-1} \psi_m^{n-1}) \omega \cdot \psi_m \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{avec : } d_n = \frac{1}{2^{n-1}} C_n^{\frac{n-1}{2}}$$

En remplaçant (7) et (10) dans (6), on obtient :

$$a. \psi_m \sin(\omega t + \varphi) - b. \psi_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega. U. \cos(\omega t)$$

Ou, en d'autres termes :

$$(a. \psi_{1s} + b. \psi_{1c}) \sin(\omega t) + (a. \psi_{1c} - b. \psi_{1s}) \cos(\omega t) = \omega. U_m \cos(\omega t) \quad (11)$$

avec :

$$a = (a_1 + a_2 \psi_m^{n-1}) ; \quad b = (b_1 + b_2 \psi_m^{n-1}) ; \quad a_1 = -\omega^2 (1 + R_{1T} B_1 + L_{1T} A_1) + \frac{A_1}{c} ;$$

$$a_2 = \left(\frac{A_n}{c} - \omega^2 A_n L_{1T} - R_{1T} B_n \omega^n \right) d_n ; \quad b_1 = \omega^3 L_{1T} B_1 - \omega \left(\frac{B_1}{c} + R_{1T} A_1 \right)$$

$$b_2 = -\omega R_{1T} A_n d_n + \left(L_{1T} \omega^2 - \frac{1}{c} \right) B_n d_n \omega^n$$

De l'équation (11), on peut écrire :

$$\begin{cases} a. \psi_{1s} + b. \psi_{1c} = 0 \\ a. \psi_{1c} - b. \psi_{1s} = \omega. U_m \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$(a_2^2 + b_2^2) \psi_m^{2n} + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2) \psi_m^{\frac{n+1}{2}} + (a_1^2 + b_1^2) \psi_m^2 - (\omega. U_m)^2 = 0 \quad (12)$$

En remplaçant dans l'équation (12) les valeurs des paramètres obtenus caractérisant le transformateur d'essai, on peut alors tracer les diagrammes de bifurcation de l'amplitude du flux en fonction de l'amplitude de la tension d'alimentation, pour différentes valeurs de la capacité série C_s , Fig.14.

$$n = 5 ; A_1 = 9.8.10^{-4} ; A_n = 9.8.10^{-2} ; B_1 = \frac{1}{R_m} = 7.69 ; B_n = 0 ; R_{1T} = 4\Omega ; L_{1T} = 0 ; C_p = 0$$

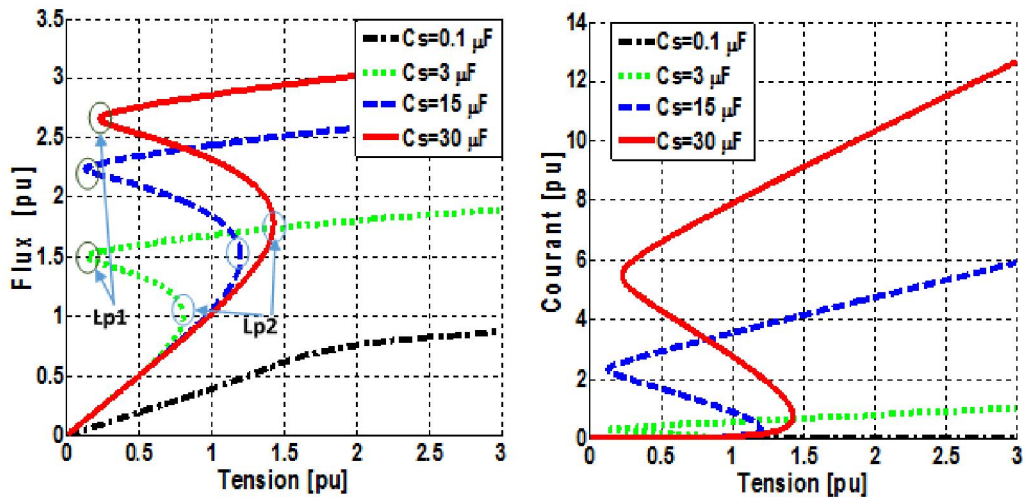


Figure 14. Diagramme de bifurcation utilisant la méthode des harmoniques équilibrés

Seul le mode normal existe pour des valeurs de capacité inférieures à $1 \mu F$ ($C_s \approx 0.1 \mu F$), l'amplitude du courant étant faible.

La plage de variation des valeurs de tension limitée par les points Lp1 et Lp2 augmente en fonction de la valeur de la capacité (comme il a été présenté au chapitre 1). L'amplitude du courant est très importante pour des capacités de valeur élevée (15 μ F, 30 μ F).

Cette méthode est approximative et ne permet d'analyser que le mode présentant une seule fréquence. Il s'agit du mode fondamental.

4.3. Méthode de Galerkin

Il est très difficile de résoudre analytiquement l'équation différentielle (Eq.6) avec des valeurs élevées de "n", car sa solution contient plusieurs fréquences (décomposition en série de Fourier). La méthode de Galerkin étudie le circuit dans un domaine fréquentiel. La recherche sur les harmoniques spécifiques peut se faire de manière différente que dans le cas de la méthode analytique

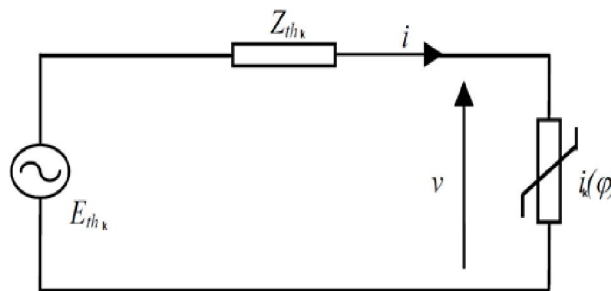


Figure 15. Modèle de Thévenin

L'équation de ce circuit pour une fréquence $k\omega$ peut s'écrire en notation complexe :

$$jk\omega\psi_k = E_k - Z_k I_k \quad (13)$$

avec :

$$\psi_k = \psi_{kc} + j\psi_{ks}; E_k = E_{kc} + jE_{ks}; I_k = I_{kc} + jI_{ks}, Z_k = R_{kc} + jX_{ks} \quad (14)$$

Les expressions des composantes de E_k et de Z_k sont données à partir du circuit initial. Les expressions des composants de courant I_k sont également données par :

$$I_{kc} = \frac{2}{T} \int_0^T i_m(\psi_k) \cos(k\omega) dt \quad \text{et} \quad I_{ks} = \frac{2}{T} \int_0^T i_m(\psi_k) \sin(k\omega) dt$$

A partir des équations (13) et (14), on peut tirer le système d'équations non-linéaires :

$$\begin{aligned} w. \psi_{1c} - R_{1c} I_{1s} + X_{1s} I_{1c} + E_{1s} &= \xi_{1s} \\ w. \psi_{1s} + R_{1c} I_{1c} + X_{1s} I_{1s} - E_{1c} &= \xi_{1c} \\ &\dots \dots \dots \\ k.w. \psi_{1c} - R_{kc} I_{ks} + X_{1s} I_{kc} &= \xi_{ks} \\ k.w. \psi_{1s} + R_{kc} I_{kc} + X_{1s} I_{ks} &= \xi_{kc} \end{aligned}$$

Le système d'équations $\xi(\psi, P) = 0$ peut être résolu par la méthode de Newton Raphson en donnant des valeurs initiales correspondant aux coefficients de Fourier du flux. P est le paramètre libre, il peut être une source de tension, une capacité ou une résistance du système. Si la source de tension est supposée purement sinusoïdale, toutes les composantes E_{ks}, E_{kc} sont nulles pour $k \neq 1$.

Pour effectuer le tracé de la bifurcation en fonction d'un paramètre P, il est nécessaire d'ajouter l'équation (15) au système (14) appelé "méthode de la continuation", [2].

$$(\psi_{1s} - \psi_{1s_m})^2 + (\psi_{1c} - \psi_{1c_m})^2 + \dots + (\psi_{ks} - \psi_{ks_m})^2 + (\psi_{kc} - \psi_{kc_m})^2 + (E_1 - E_m)^2 - r^2 = \xi_E$$

L'indice "m" représente le coefficient connu ou le paramètre de la dernière itération.

L'application de cette méthode sur le circuit représenté à la figure 18 conduit à la résolution du système d'équations non linéaires (1) pour la solution fondamentale, et à la résolution du système d'équations non linéaires (2) pour une solution contenant deux fréquences

$$\begin{cases} \omega. \psi_{1c} - R_1 I_{1s} + X_1 I_{1c} + E_{1s} = \xi_{1s} \\ \omega. \psi_{1s} + R_1 I_{1c} + X_1 I_{1s} - E_{1c} = \xi_{1c} \\ (\psi_{1s} - \psi_{1s_m})^2 + (\psi_{1c} - \psi_{1c_m})^2 + (E_1 - E_m)^2 - r^2 = \xi_E \\ \psi(t) = \psi_{1c} \cos(\omega.t) + \psi_{1s} \sin(\omega.t) \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} w. \psi_{1c} - R_1 I_{1s} + X_1 I_{1c} + E_{1s} = \xi_{1s} \\ w. \psi_{1s} + R_1 I_{1c} + X_1 I_{1s} - E_{1c} = \xi_{1c} \\ h.w. \psi_{1c} - R_1 I_{hs} + X_1 I_{hc} = \xi_{hs} \\ h.w. \psi_{1s} + R_1 I_{hc} + X_1 I_{hs} = \xi_{hc} \\ (\psi_{1s} - \psi_{1s_m})^2 + (\psi_{1c} - \psi_{1c_m})^2 + (\psi_{hs} - \psi_{hs_m})^2 + (\psi_{hc} - \psi_{hc_m})^2 + (E_1 - E_m)^2 - r^2 = \xi_E \\ \psi(t) = \psi_{1c} \cos(\omega.t) + \psi_{1s} \sin(\omega.t) + \psi_{hc} \cos(h.\omega.t) + \psi_{hs} \sin(h.\omega.t) \end{cases} \quad (16)$$

avec
$$E_{thk} = \frac{Z_{pk}}{Z_{pk} + Z_{sk}} E = (a + j.b).E$$

avec
$$Z_{thk} = \frac{Z_{pk} Z_{sk}}{Z_{pk} + Z_{sk}} ; Z_{pk} = \frac{R_m}{1 + j.R_m.C_p.k.\omega} ; Z_{sk} = R_{1T} + j(L_{1T}.k.\omega - \frac{1}{C_s.k.\omega})$$

$$R_k = Re(Z_{thk}) ; Z_k = Imag(Z_{thk}) ; E_{kc} = b.E ; E_{ks} = a.E$$

Les courants $I_{1s}, I_{1c}, I_{hs}, I_{hc}$ sont calculés par intégration numérique en posant :

$$I_m(\psi) = A_1.\psi + A_n.\psi^n$$

avec

$$I_{1c} = \frac{2}{T} \int_0^T I_m(\psi) \cos(\omega.t) dt ; I_{1s} = \frac{2}{T} \int_0^T I_m(\psi) \sin(\omega.t) dt$$

$$I_{hc} = \frac{2}{T} \int_0^T I_m(\psi) \cos(h.\omega.t) dt ; I_{hs} = \frac{2}{T} \int_0^T I_m(\psi) \sin(h.\omega.t) dt$$

- Analyse du mode ferrorésonant fondamental

Pour le mode fondamental, cette méthode donne des résultats similaires à ceux obtenus par la méthode des harmoniques équilibrés. Simulation numérique

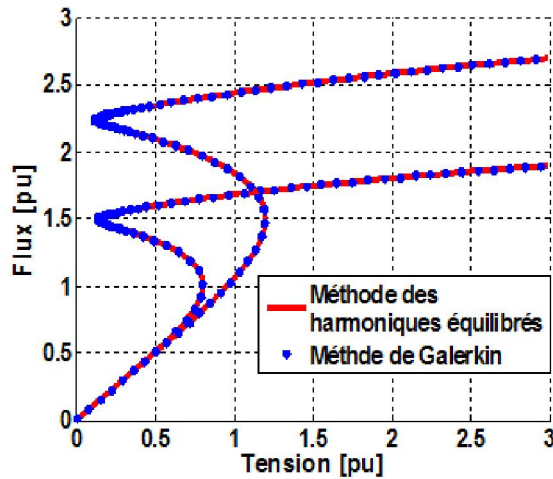


Figure 16. Comparaison des résultats obtenus par la méthode de résolution analytique et la méthode de Galerkin

- **Analyse du mode ferrorésonant sous-harmonique (1/3)**

Pour obtenir le mode sous-harmonique 1/3 on choisit la valeur de $h=1/3$ et on le remplace dans le système d'équations (16). Nous présentons les diagrammes de bifurcation des composantes fondamentale, sous harmonique (1/3) et de l'amplitude des flux en fonction de la tension, Fig.17.

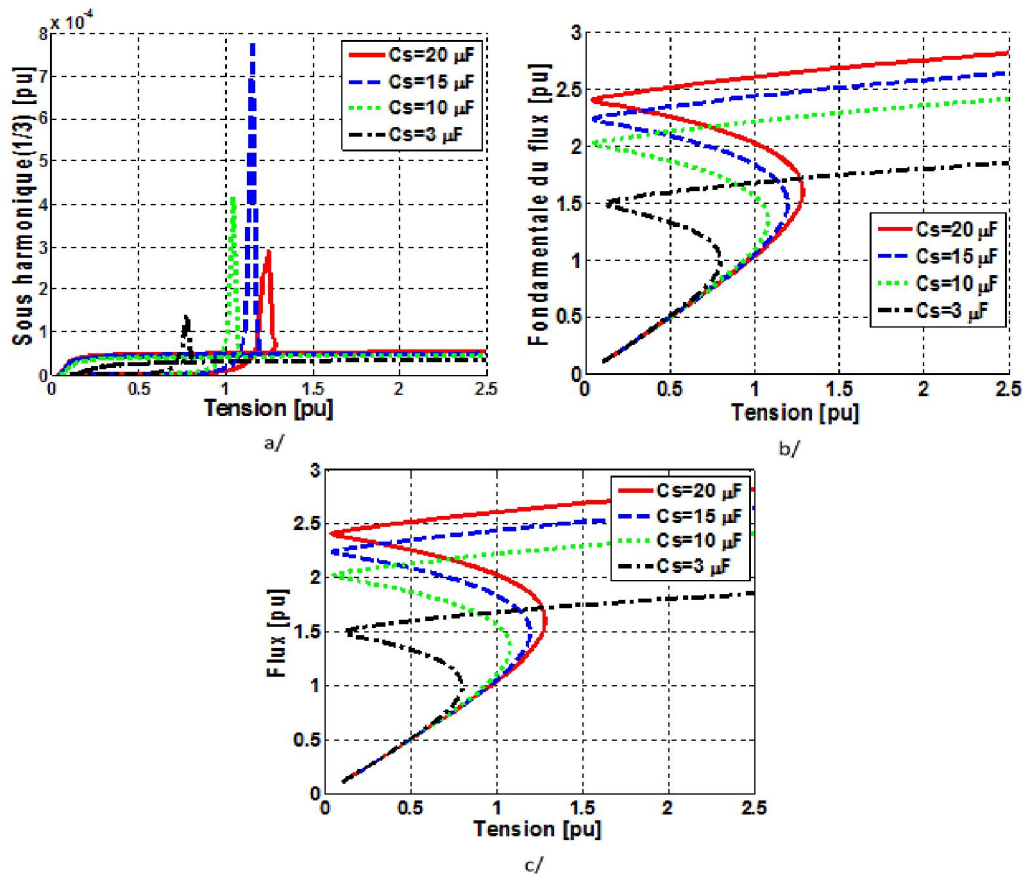


Figure 17. Diagrammes de la bifurcation
 a/ sous harmonique (1/3) b/ fondamentale c/ amplitude du flux en fonction de la tension

L'amplitude de la composante sous-harmonique (1/3) du flux est très faible ; pour chaque valeur de la capacité, il apparaît une valeur maximale de la tension spécifique. Ce pic maximal est obtenu pour une capacité de $C_s=15 \mu\text{F}$ et pour une valeur de la tension de 1.2 (pu). Ces paramètres sont les plus convenables pour l'obtention du mode sous-harmonique 1/3.

- **Analyse du mode ferrorésonant harmonique (3)**

La solution contient la fréquence fondamentale en plus de l'harmonique 3, on pose alors $h=3$. L'amplitude de la composante harmonique 3 du flux peut prendre des valeurs importantes, Fig.18.a. Pour des valeurs de $C_s = 3 \mu\text{F}$ (voir Fig.18.c), il apparaît deux points limites Lp1 et Lp2 pour lesquels la solution est soit normale ou ferrorésonante fondamentale. Entre les points Lp3 et Lp4, deux solutions stables donnent : le mode fondamental ou fondamental avec l'harmonique 3. Il existe également une solution instable qui apparaît entre les points limites LP3 et LP4. Les meilleurs paramètres d'essai pour obtenir un mode contenant l'harmonique 3 sont : Une valeur de tension comprise entre 1 et 2 (p.u) et une valeur de capacité comprise entre 1 et 3 μF , car l'amplitude de l'harmonique en ces points est élevé. Il existe plusieurs solutions stables pour une seule valeur de tension, ce qui est expliqué par l'effet des conditions initiales.

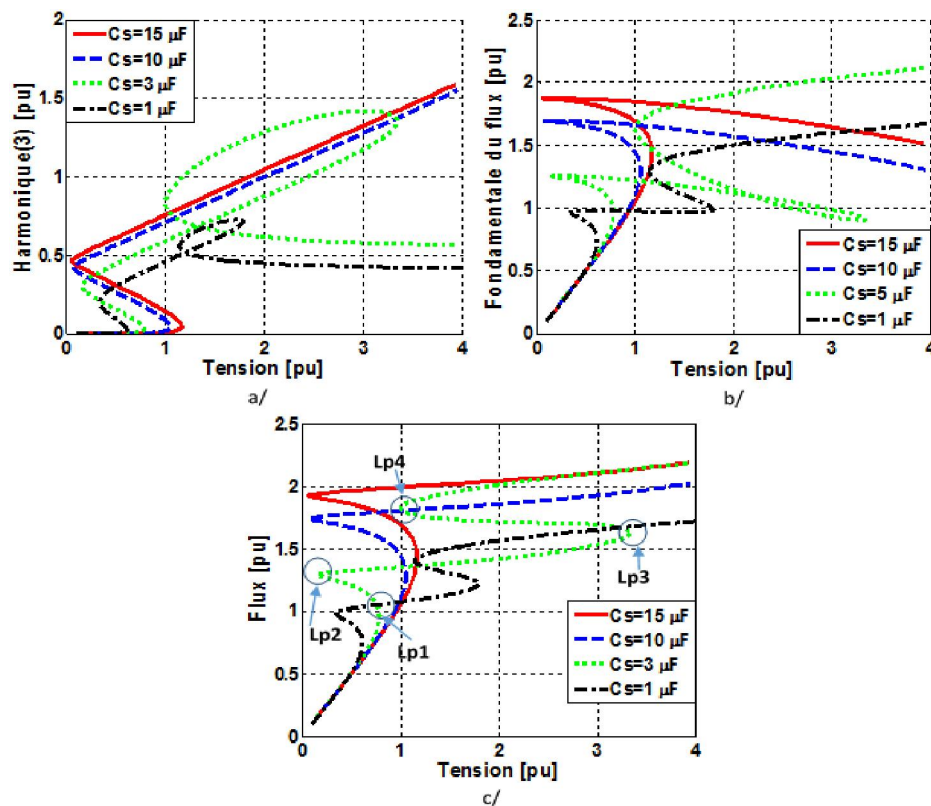


Figure 18. Diagrammes de la bifurcation
 a/ harmonique 3 b/ fondamentale c/ amplitude du flux en fonction de la tension

- **Analyse du mode quasi-périodique**

Dans ce mode, il apparaît dans le flux des fréquences qui ne sont pas multiples de la fréquence de la tension d'alimentation.

Sur la Fig.19, on représente la superposition de trois solutions du système d'équations (16) pour différentes valeurs de h (3, 5 et 7). On remarque bien que pour des valeurs de tension comprises entre 1 et 2 (p.u), on peut avoir les deux harmoniques 3 et 5 dans la solution. Chaque harmonique peut engendrer ses sous-harmoniques ($5/3, 5/7, 3/5, 3/7 \dots$).

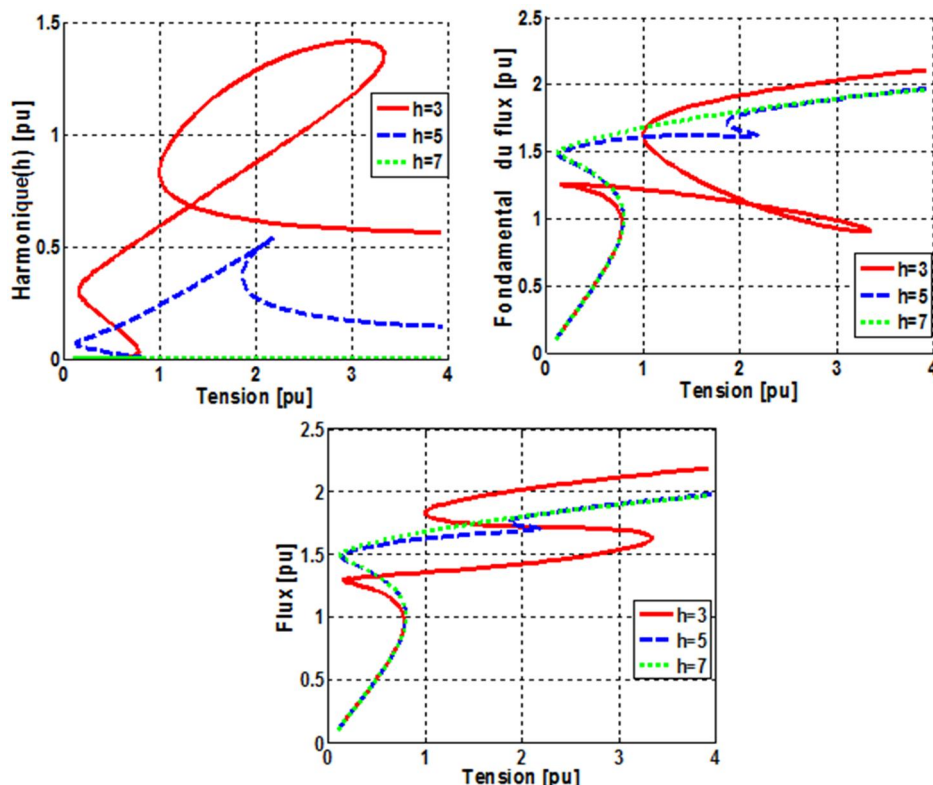


Figure 19. Superposition des trois solutions pour différentes valeurs de h , $C_s=3 \mu F$

- Influence de la capacité parallèle sur les modes Ferrorésonants

L'augmentation de la capacité parallèle conduit à des valeurs élevées de la tension pour lesquelles la Ferrorésonance apparaît, car elle représente un diviseur de tension avec la capacité série. On représente quelques bifurcations pour différentes valeurs de la capacité C_p sur les Figs.20 et 21.

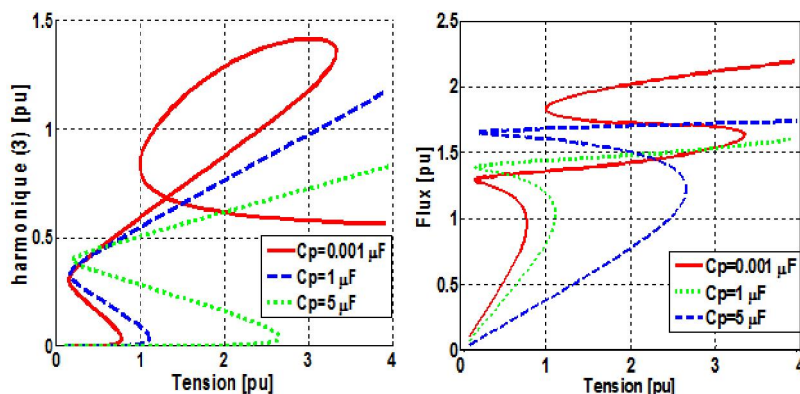


Figure 20. Influence de la capacité parallèle sur l'harmonique 3 et l'amplitude des flux pour $C_s=3 \mu F$

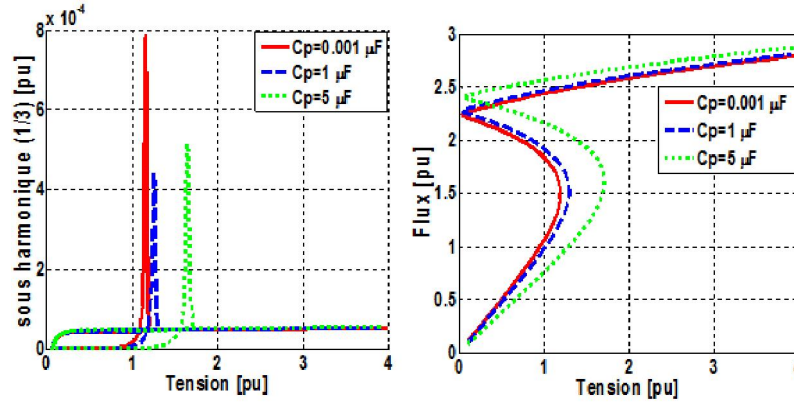


Figure 21. Influence de la capacité parallèle sur le sous harmonique (1/3) et le fondamental des flux pour $C_s=17 \mu F$

4.4. Simulation numérique

Cette méthode consiste à résoudre l'équation électrique représente le circuit ferrorésonant numériquement soit en utilisant le modèle d'approximation polynomiale, ou par le modèle de Tellinen.

4.4.1. Diagramme de bifurcation par le modèle d'approximation polynomiale

En utilisant le modèle d'approximation polynomiale (Eq. 1) et à partir du circuit de la Fig.13, on écrit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 \Psi}{dt^2} = \frac{1}{\frac{r_p}{R_m} + 1} \left[\frac{dU}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} \left(\frac{1}{R_m C} + r_p A_1 + n \cdot r_p A_n \Psi^{n-1} \right) - \frac{1}{C} (A_1 \Psi + A_n \Psi^n) \right] \quad (17)$$

Les paramètres les plus importants pour l'apparition des différents modes de la ferrorésonance sont : la tension d'alimentation U et la capacité série C_s . Le diagramme de bifurcation est un outil qui permet de trouver les valeurs des paramètres qui conduisent à ces différents modes. On fixe alors un paramètre et on fait varier l'autre pour tracer le diagramme de bifurcation. Les conditions initiales, c'est-à-dire, l'instant où l'on ouvre l'interrupteur, influent fortement sur les réponses.

La figure.22 présente le diagramme de bifurcation obtenu par simulation numérique. L'amplitude de la tension d'alimentation est utilisée comme paramètre de bifurcation avec une incrémentation de 0.01 (p.u) allant de 0 jusqu'à 4 (p.u). Le signal du courant primaire obtenu par chaque valeur de la tension est échantillonné par une période de 20ms. On prend les points résultant du régime permanent est on les trace en fonction de chaque valeur de tension. La section de Poincaré est tracée de la même façon avec l'échantillonnage de la trajectoire dans le plan de phase.

Les conditions initiales sont les valeurs initiales du flux et de la Fém., c'est-à-dire, $\Psi(0)$ et $\frac{d\Psi(0)}{dt}$, or ces deux grandeurs physiques avant l'ouverture de l'interrupteur sont sinusoïdales. L'une est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'autre et si $\Psi(0)$ est maximal alors $\frac{d\Psi(0)}{dt}$ est nul et vice

versa. Prenons un exemple sur une période T , quatre cas où on l'ouvre l'interrupteur à $t=T$, $t=T/2$, $t=T/4$ et à $t=0$. Les quatre diagrammes de bifurcation sont tracés pour voir l'influence des conditions initiales sur le régime permanent, Fig.22. Pour passer par toutes les conditions initiales possibles, on fait varier le temps d'ouverture de l'interrupteur sur une période $T=20$ ms.

- **Zone 1.** Lorsque la tension est $0 < U < 1.2$ (p.u), on voit un seul point. La solution est périodique, de période $T=1/f$. Malgré la variation des conditions initiales, la solution n'est pas affectée. C'est le mode normal ou ferrorésonant fondamental qui est obtenu. Le début d'apparition de la ferrorésonance sur le diagramme de bifurcation est caractérisé par un saut du point de fonctionnement du mode normal au mode ferrorésonant fondamental à $U=0.8$ (p.u).
- **Zone 2.** Pour des tensions $1.2 < U < 1.7$ et $1.9 < U < 3.4$ (pu), on obtient trois branches (bifurcation). Selon les conditions initiales, la solution n'est pas périodique et les amplitudes du courant sont importantes, il s'agit du mode quasi-périodique. Cependant, on remarque une petite zone autour de $U=1.7$ (p.u) où la solution est fondamentale.
- **Zone 3.** Pour des tensions $3.5 < U < 4$ (p.u), plus de quatre branches sont obtenues. Selon les conditions initiales, c'est le mode chaotique qui apparait. Une infinité de valeurs dont les amplitudes sont très grandes est obtenue, mais la solution n'est pas répétitive.

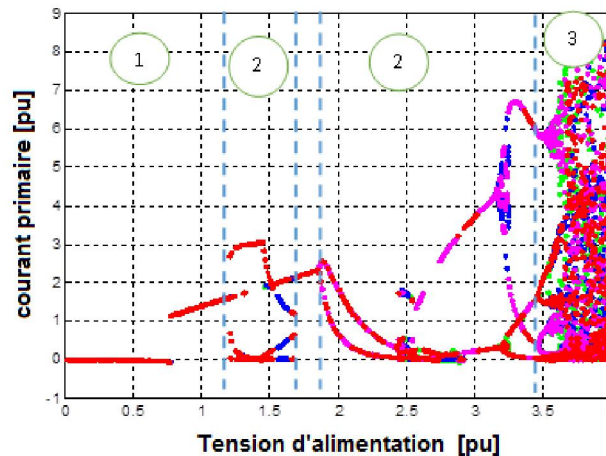


Figure 22. Diagramme de bifurcation avec la tension d'alimentation comme paramètre de bifurcation

4.4.2. Diagramme de bifurcation utilisant le modèle de Tellinen

On trace le diagramme de bifurcation, utilisant le modèle de Tellinen, en fixant la valeur de la capacité série à $C_s = 3 \mu F$, Fig.23. Le mode quasi-périodique commence à apparaître à $U=0.9$ (p.u). Le mode de ferrorésonance apparait à $U=0.73$ (p.u). C'est ce point de saut où la surintensité est très importante. L'amplitude du courant avant et après le point de saut en mode ferrorésonant est presque 56 fois plus grande que celle du régime normal.

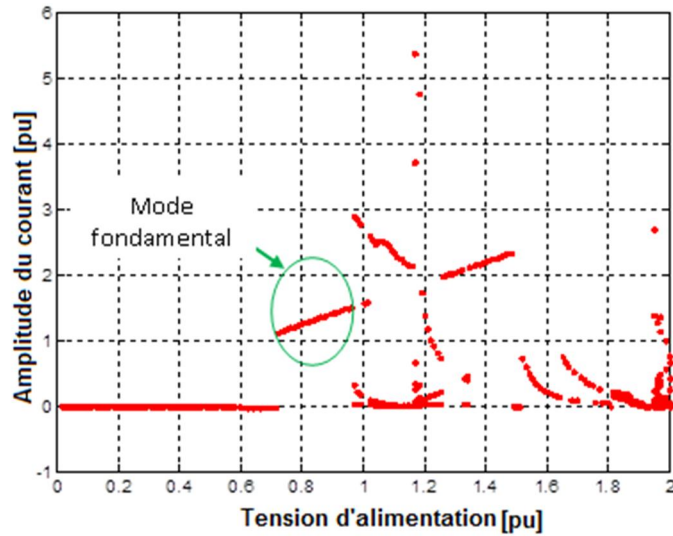


Figure 23. Diagramme de bifurcation pour une valeur de C_s ($3\mu\text{F}$) et pour des valeurs de tension de 0 à 2 (p.u) utilisant le modèle de Tellinen

On trace le diagramme de bifurcation en prenant la capacité C_s comme paramètre de bifurcation. On fixe la valeur de la tension à $U=1$ (p.u) et on fait varier la valeur de la capacité jusqu'à $C_s=20\mu\text{F}$. La zone encadrée de la Fig.24 présente le domaine de la capacité où le mode quasi-périodique peut apparaître. Le mode sous-harmonique est obtenu pour des valeurs de C_s de $17\mu\text{F}$. Il y a apparition de branches (bifurcation) où l'amplitude du courant n'est pas importante.

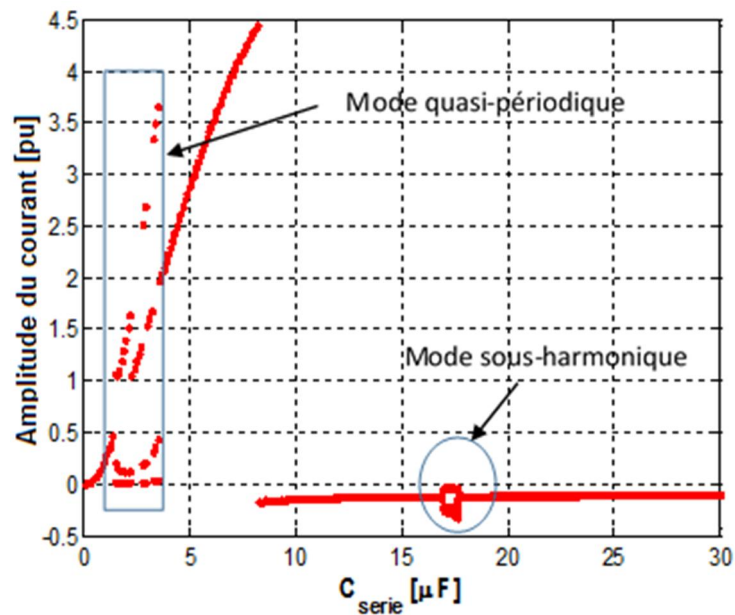


Figure 24. Diagramme de bifurcation avec C_s comme paramètre de bifurcation

5. Tests expérimentaux de la ferrorésonance sur Transformateur monophasé

Le circuit le plus utilisé pour les tests expérimentaux est celui du type "ferrorésonance série" où l'on alimente un transformateur monophasé par une tension sinusoïdale par l'intermédiaire d'une capacité shuntée par un interrupteur. Les tests consistent à ouvrir l'interrupteur pendant quelques secondes et à relever les signaux de tension et de courant plusieurs fois, et ce, pour différentes valeurs des paramètres.

Pour cela, l'étude de bifurcation est indispensable pour connaître les plages de variation des paramètres pouvant donner lieu aux modes ferrorésonants, à savoir : le mode fondamental, le mode sous-harmonique, le mode quasi-périodique et le mode chaotique. Cette étude qui a été effectuée au chapitre précédent nous a permis de connaître les limites de variation de ces paramètres.

5.1. Circuit de test ferrorésonant

Pour effectuer des tests de ferrorésonance, on alimente le transformateur d'essai par une source de tension sinusoïdale par l'intermédiaire d'une capacité série, variable et shuntée par un interrupteur. Une capacité parallèle est placée aux bornes du primaire du transformateur d'essai, comme il est indiqué sur la Fig.25.

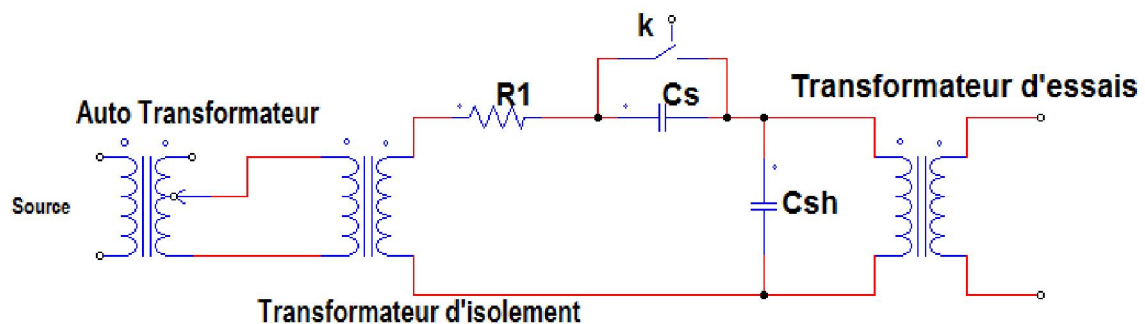


Figure 25. Circuit d'essais

Les tests de la ferrorésonance s'effectuent pour différentes valeurs de la tension d'alimentation, pour différentes valeurs de la capacité série et de la capacité parallèle. Ce qui nécessite l'utilisation d'un autotransformateur pour l'alimentation du transformateur d'essai. La résistance du secondaire de l'autotransformateur est également importante, ce qui constitue un amortissement des modes ferrorésonants dans le circuit. Ceci nous a poussés à ajouter un transformateur d'isolement dont le but d'avoir une résistance série minimale dans le circuit,

Lors de la ferrorésonance et en fonction du mode, les courants peuvent atteindre jusqu'à dix fois le courant nominal du transformateur. Les tests sur les transformateurs de grande puissance exigent l'utilisation des capacités de haute tension. Ce qui nous a poussés à choisir un transformateur d'essai de faible puissance.

La tension aux bornes de la capacité série dans le cas de la ferrorésonance est très grande. Lors de nos tests, elle a atteint une valeur de 800 Volts dans le cas du mode quasi-périodique. Le choix d'une capacité série pouvant supporter ces valeurs de tension doit être adéquat.

Au début du test la capacité série est shuntée par l'interrupteur K, on ouvre l'interrupteur pendant une durée suffisante (1 à 2 s) pour que le régime permanent s'établisse pendant le mode.

Plus le rapport entre la résistance et la réactance équivalente de la branche magnétisante du transformateur est grand plus l'amortissement des harmoniques diminue. Ce qui donne la possibilité d'obtenir les modes ferrorésonants sous-harmonique, quasi-périodique et chaotique.

5.2. Recherche des modes de la ferrorésonance

Le transformateur monophasé d'essai est du type Shell de tension 220/15V. La capacité parallèle est mise égale à 0. Ensuite, on effectue un certain nombre de tests pour voir l'influence de cette valeur de capacité sur l'apparition des modes ferrorésonants.

5.2.1. Mode fondamental

Dans ce mode, les amplitudes de tension et du courant sont importantes. Le signal de la tension est déformé mais reste périodique, de période T. Ce mode est le plus simple à obtenir. Pour une valeur spécifique de capacité, le mode fondamental est obtenu pour des valeurs de tension supérieures à celles correspondant au point limite Lp1.

Un exemple de valeurs pour lesquelles nous avons obtenu le mode fondamental est celui de la capacité $C_s = 9 \mu\text{F}$ et d'une tension de 1 (p.u).

La tension aux bornes du primaire du transformateur est plus élevée que celle de la source (220 V). La tension aux bornes de la capacité en régime permanent est de l'ordre de 640 (V).

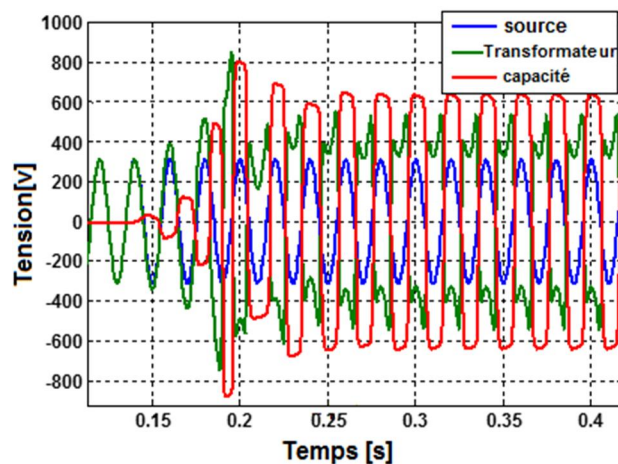


Figure 26. Tension source, Tension au primaire du transformateur et Tension aux bornes de la capacité pendant l'apparition de la ferrorésonance

Le spectre du signal de tension du transformateur pendant le régime permanent de la ferrorésonance est dominé par une fréquence fondamentale (50 Hz) avec l'existence des harmoniques d'ordre impair (3f, 5f, 7f, ...), (Figs.27). Le cycle d'hystérésis montre que le

transformateur est fortement saturé dans le cas du mode fondamental. Le courant de magnétisation étant très élevé.

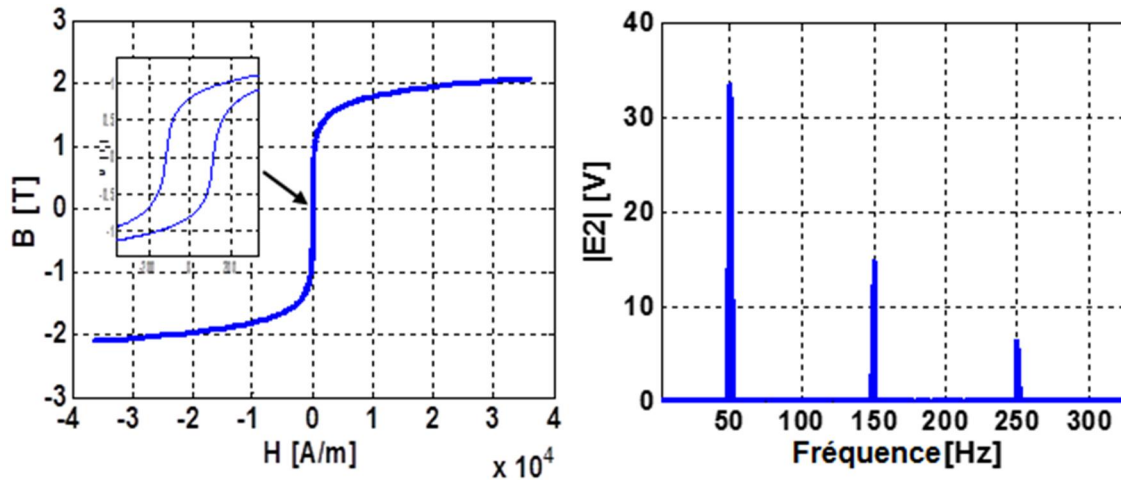


Figure 27. Cycle d'hystérésis et spectre de la tension secondaire durant le mode fondamental

Les résultats de simulation utilisant le modèle de Tellinen implémenté sur Matlab\Simulink, donnent les signaux du courant primaire et de la tension secondaire qui sont comparés à ceux mesurés expérimentalement, Figs.28. La tension, durant le régime transitoire, contient des harmoniques à des fréquences élevées.

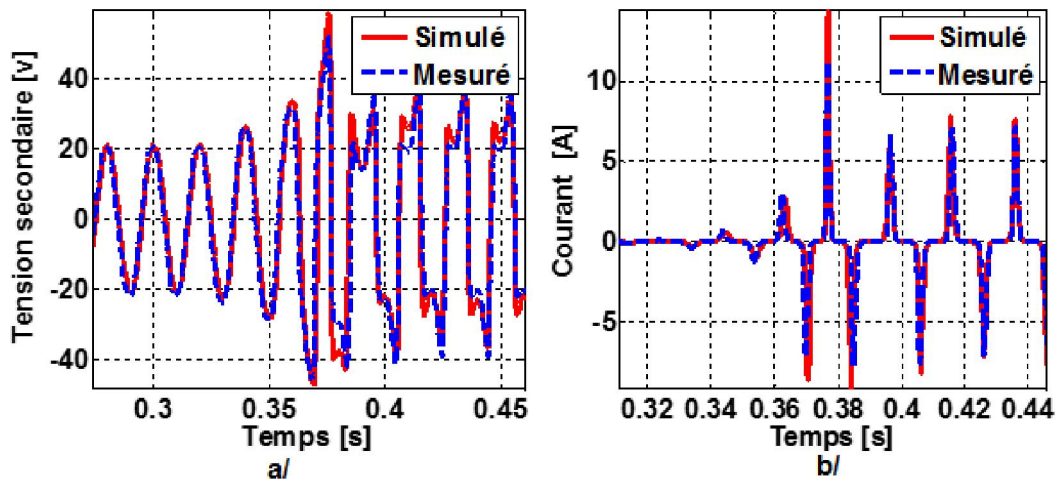


Figure 28. Signaux durant le régime transitoire du mode fondamental
a/ Tension secondaire b/ Courant primaire

L'évolution de la tension, après l'ouverture de l'interrupteur, passe par un régime transitoire où le pic de la tension atteint 50 V, Fig.28.a, puis elle se stabilise en régime permanent à 40 V, Fig.3.5a. Le pic du courant prend des valeurs très fortes 12 A, Fig.28.b, et en régime permanent, il est de l'ordre de 8 A, Fig.29.b. Ces valeurs sont extrêmement dangereuses pour le transformateur. Ceci nous a poussés à effectuer le test rapidement (ouverture de l'interrupteur pendant 1 à 2 s). Ce mode est très dangereux pour les équipements sur un réseau électrique. Une protection rapide doit agir pour l'éliminer.

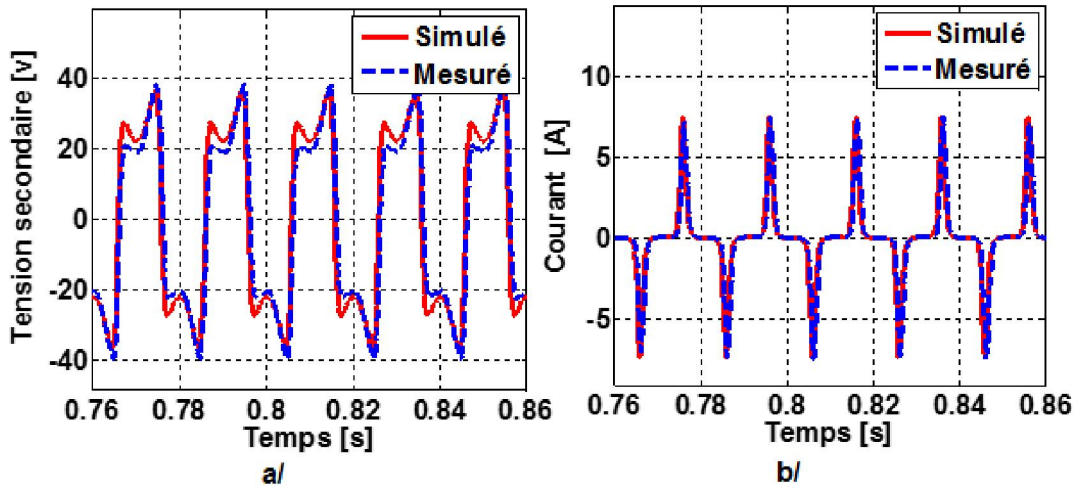


Figure 29. Signaux durant le régime permanent en mode fondamental
 a/ Tension secondaire b/ Courant primaire

5.2.2. Mode sous-harmonique

Dans ce mode, le signal du flux contient des périodes multiple de la période de la tension aux bornes de la source ($n.T$), n est un entier. La bifurcation, obtenue sur le transformateur d'essais montre la possibilité d'avoir des sous-harmoniques dans le signal du flux pour des valeurs précises de la tension et de la capacité. L'amplitude de ces sous-harmoniques est très faible par rapport à celle du fondamental notamment pour les sous-harmoniques de rang élevé ($5T, 7T, \dots$). L'influence des conditions initiales sur le régime permanent et l'amortissement dans le circuit (résistance magnétisante, résistance série) rendent l'obtention de ce mode très difficile expérimentalement.

La bifurcation, par la méthode de Galerkin, montre l'existence d'un pic de sous-harmonique ($3T$) pour une valeur de tension comprise entre deux valeurs correspondantes aux points limites ($Lp1, Lp2$), Fig.17. Ce pic est maximal pour des valeurs de la capacité série ($\approx 15 \mu F$) et des valeurs de tension de l'ordre de (1 p.u).

Une autre bifurcation obtenue par simulation numérique du modèle de Tellinen, pour une valeur de tension égale à (1 p.u), Fig.24, montre l'existence des modes sous-harmoniques pour des valeurs de capacité comprises entre $16 \mu F$ et $18 \mu F$.

Pour obtenir expérimentalement ce mode nous avons fixé la tension d'alimentation à (1 p.u) et nous avons varié la capacité de $16 \mu F$ à $18 \mu F$. Et comme la solution dépend des conditions initiales, le même test a été effectué plusieurs fois. Nous avons obtenu ce mode pour une valeur de la capacité de $17 \mu F$ et une tension de (1 p.u).

Les résultats expérimentaux sont comparés à ceux obtenus par simulation du modèle de Tellinen, Fig.30. Ce qui prouve la validité du modèle de Tellinen.

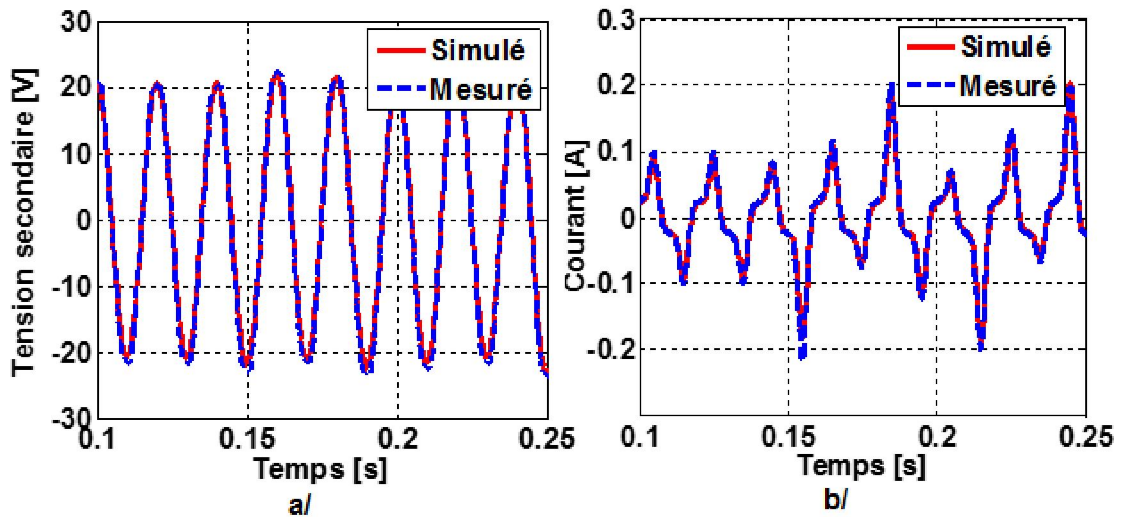


Figure 30. Signaux en régime transitoire du mode sous-harmonique
a/ Tension secondaire b/ Courant primaire

La surtension enregistrée en mode sous-harmonique est très faible, par contre, durant le mode ferrorésonant, l'amplitude du courant est de 0.2 A, Fig.30.b. Ce qui représente deux fois le courant à vide en mode normal.

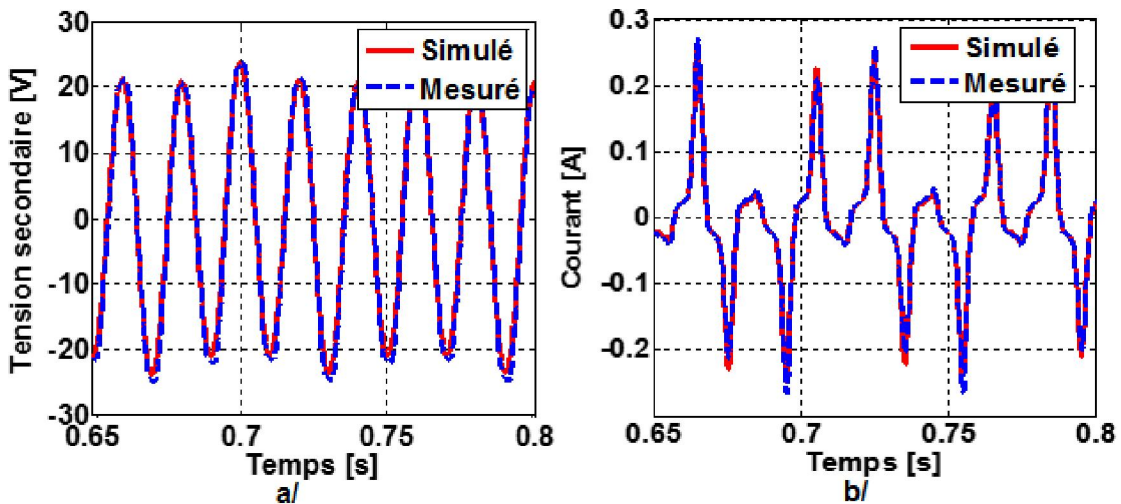


Figure 31. Signaux en régime permanent du mode sous-harmonique
a/ Tension secondaire b/ Courant primaire

Le signal de la tension montre l'existence, en plus de la fréquence fondamentale, une fréquence $T/3$, donc il apparaît le sous-harmonique 3, Fig.31. Le cycle d'hystérésis, Fig.32, au moment du régime permanent du mode sous-harmonique montre que le transformateur n'est pas très saturé, comme c'est le cas du mode fondamental. Ce mode n'est pas très dangereux car pour le transformateur, le courant à vide est faible (0.25 A).

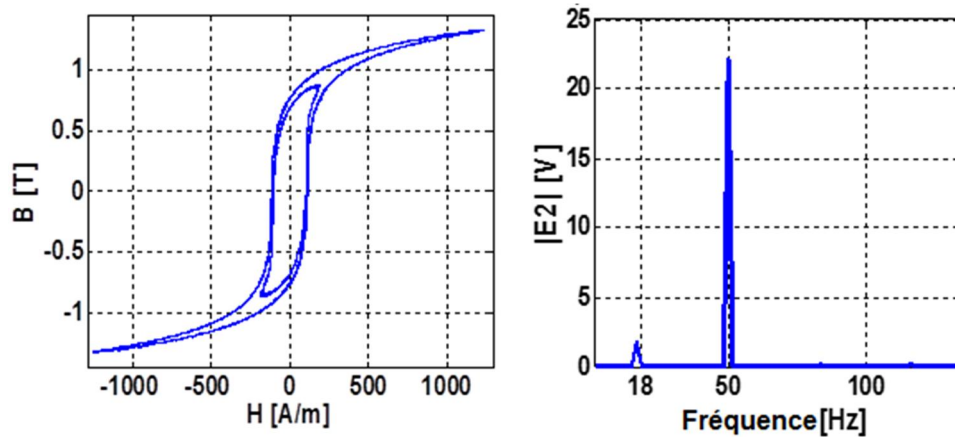


Figure 32. Cycle d'hystérésis et spectre de la tension secondaire durant le mode sous-harmonique 1/3

5.2.3. Mode quasi-périodique

Ce mode est difficile à obtenir. Il nécessite dans le circuit d'essai l'élimination de tout amortissement possible (résistance série). Le signal de tension n'est pas périodique, il comporte plusieurs harmoniques généralement d'ordre supérieur à la fréquence fondamentale. Ces harmoniques ont des amplitudes importantes. A partir du diagramme de bifurcation, Fig.24, on obtient la possibilité d'obtenir ce mode pour des valeurs de capacité série autour de $3\mu\text{F}$. Durant le test expérimental nous avons utilisé une tension de (1 p.u) avec une capacité série de $3\mu\text{F}$. Le mode quasi-périodique ainsi obtenu a donné des résultats comparables à ceux simulés, Figs.33.

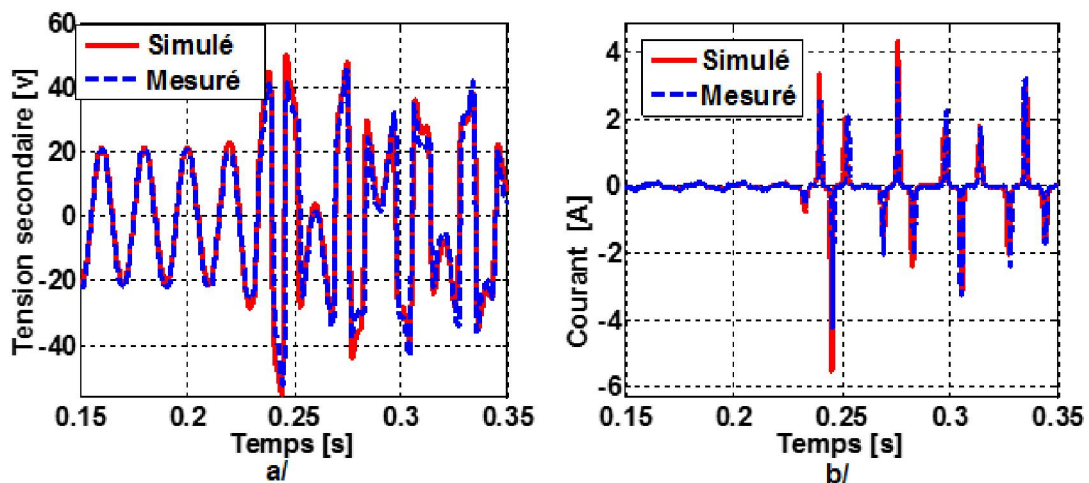


Figure 33. Signaux transitoires du mode quasi-périodique a/ Tension secondaire b/ Courant primaire

L'amplitude du courant en régime transitoire a atteint 4 A i.e, 4 fois le courant nominal. Durant ce mode, en plus des surintensités et de surtensions enregistrées, le signal de tension est plein d'harmoniques. La Figure 34 montre la forme d'onde de la tension secondaire et celle du courant primaire pendant le mode quasi-périodique en régime permanent.

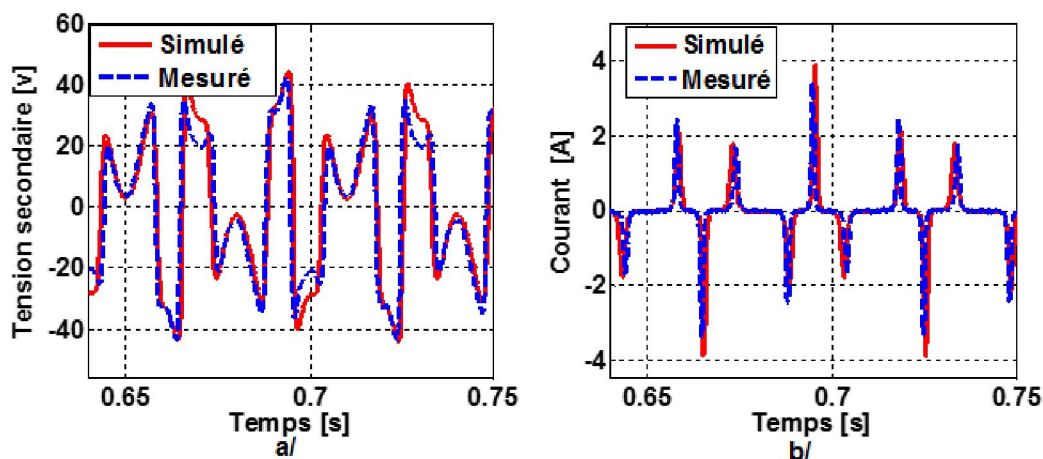


Figure 34. Signaux en régime permanent du mode quasi-périodique
 a/ Tension secondaire b/ Courant primaire

Les Figures 35 donnent le cycle d’hystérésis en régime permanent durant le mode quasi-périodique. Le transformateur est très saturé pendant ce mode, la déformation du cycle d’hystérésis est due au flux qui devient non-périodique et ayant une forme non-sinusoïdale.

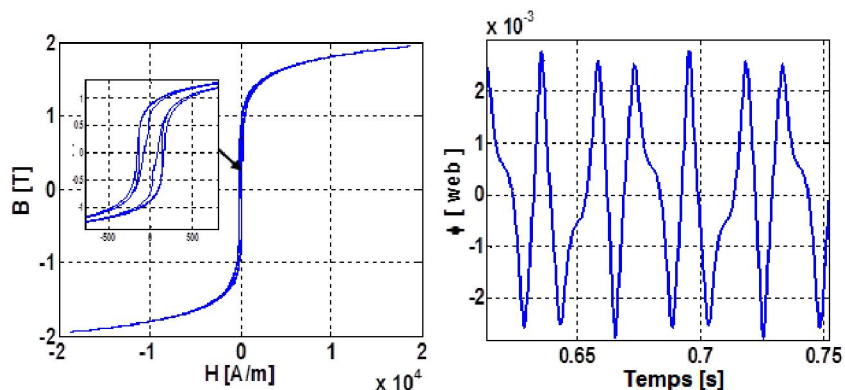


Figure 35. Cycle d’hystérésis et signal du flux $\phi(t)$ durant le mode quasi-périodique

Le spectre de la tension Fig.36 montre l’existence de deux fréquences de base f_1 et f_2 telle que $f_1=50$ Hz (fréquence de la source) et $f_2= 84$ Hz. Cette dernière f_2 est générée par le passage du courant magnétisant riche en harmoniques. Ces deux fréquences créent leur propre harmonique et sous-harmonique ; ce qui donne une onde de tension contenant des fréquences multiples linaires de f_1 et f_2 . Exemple, la fréquence $f=118$ Hz correspond à $2f_2 - f_1$.

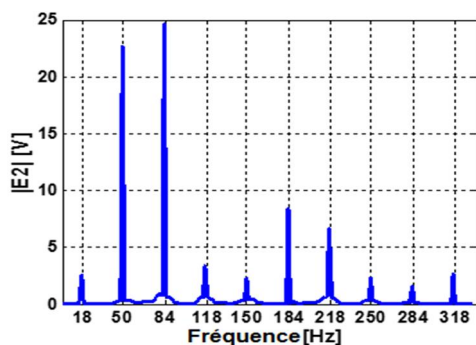


Figure 36. Spectre de la tension secondaire en mode quasi-périodique

5.2.4. Mode chaotique

Le mode chaotique est très difficile à obtenir expérimentalement, car il apparaît, généralement, à des tensions d'alimentation beaucoup plus élevées que la tension nominale. Durant ce test, le montage représente deux transformateurs mis en cascade avant le transformateur d'essai pour augmenter la tension à des niveaux très élevés. Le test est effectué plusieurs fois à cause de l'influence des conditions initiales.

Nous avons fixé la valeur de tension à 360 V avec une capacité de $3\mu\text{F}$, le mode chaotique est apparu pendant le régime transitoire (0.3 s) puis il disparaît et devient quasi-périodique avec beaucoup d'harmoniques. Les signaux de tension et du courant en régime transitoire durant le mode chaotique sont présentés sur la Fig.37.

Cependant, si nous appliquons une tension supérieure à 360 V, on peut obtenir de meilleurs résultats pour le mode chaotique, mais le test devient dangereux car le transformateur atteint un niveau de saturation très élevé avec le risque d'être détruit.

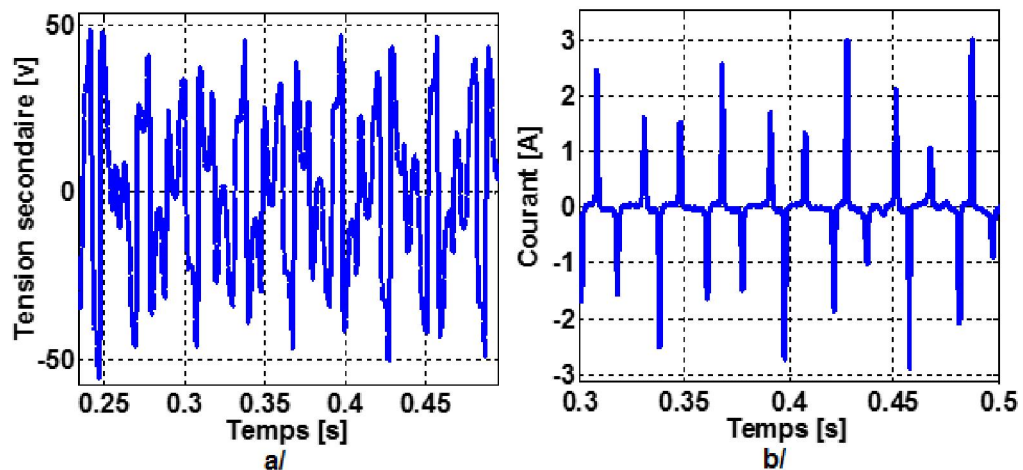


Figure 37. . Signaux expérimentaux de tension et courant durant le mode chaotique

En simulation, par contre, les valeurs de la tension $U=380\text{ V}$ et de la capacité $C=3\mu\text{F}$ ont donné le mode chaotique en régime transitoire (de 0.2s jusqu'à 0.7s), puis ce mode devient fondamental après 0.7s, Fig.38.

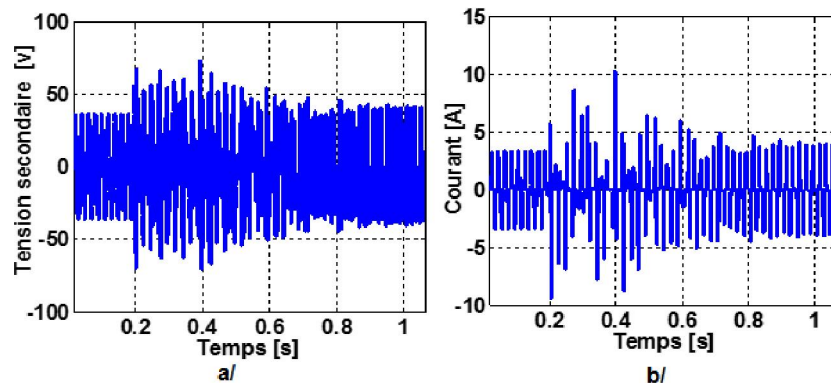


Figure 38. . Tension et Courant obtenus par simulation a/ Tension secondaire b/ Courant primaire

Le mode chaotique devient permanent pour une tension de 440 V et une capacité $C=3\mu\text{F}$. Les Figures 39 représentent la tension secondaire et le courant primaire durant ce mode. Le diagramme du plan de phase Fig.40 montre bien que le régime est chaotique car la trajectoire n'est pas répétitive et le spectre de la tension est continu.

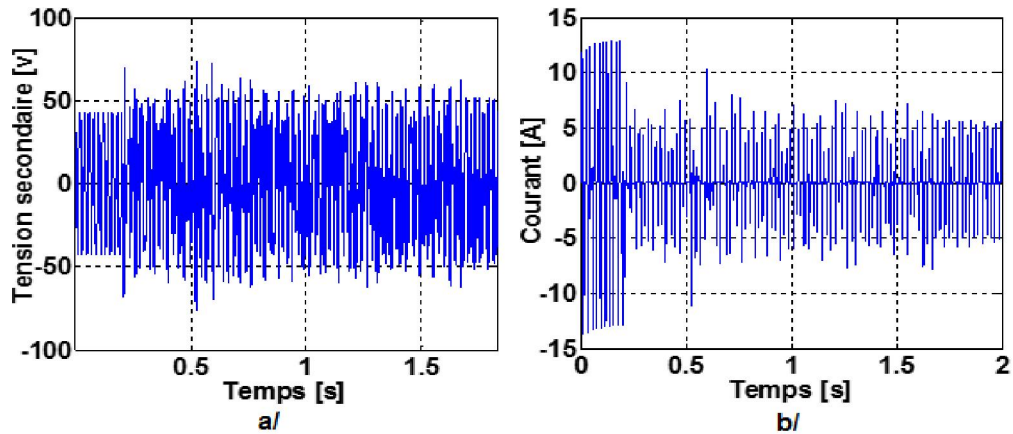


Figure 39. . Tension secondaire et Courant primaire obtenus par simulation durant le mode chaotique
a/ Tension secondaire b/ Courant primaire

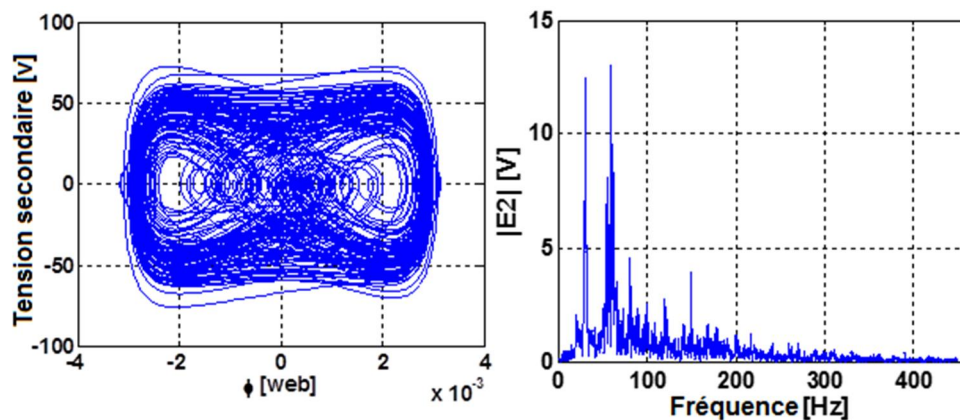


Figure 40. . Spectre de la tension secondaire et diagramme du plan de phase en mode chaotique

5.3. Courant de démarrage

Pendant les essais de la ferrorésonance, et après fermeture de l'interrupteur pour court-circuiter la capacité, il apparaît un phénomène transitoire où le courant à vide prend une valeur très élevée puis il s'atténue avec une enveloppe en forme d'exponentielle. Cette valeur de l'amplitude du courant dépend des conditions initiales. La Figures 41 présente les courants de démarrage obtenus lors des essais de la ferrorésonance des quatre modes. Dans le cas du mode sous-harmonique où l'amplitude du courant est faible, le courant de démarrage n'est pas important et le régime transitoire passe rapidement, Fig.41.b. Par contre, durant les autres modes (fondamental, quasi-périodique et chaotique) où l'amplitude du courant pendant le mode est élevée, le courant de démarrage prend des valeurs très importantes et dure plus longtemps avant d'atteindre le régime permanent, Fig.41.a, c, et d.

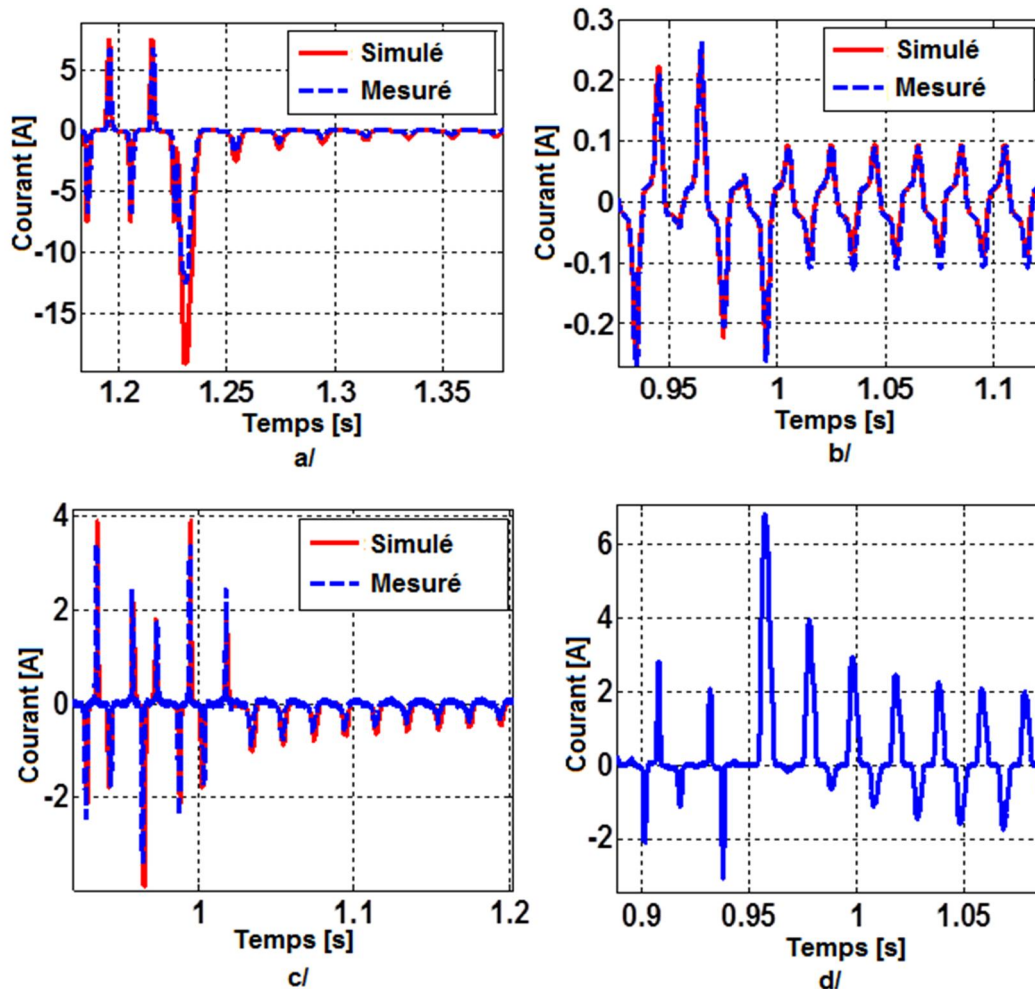


Figure 41. Courant de démarrage durant les tests de la ferrorésonance pour les quatre modes a/ mode fondamental b/ mode sous-harmonique c/ mode quasi-périodique d/ mode chaotique

5.4. Influence des conditions initiales sur les différents modes

Les résultats obtenus théoriquement par la bifurcation, montre l'existence de plusieurs valeurs du flux donnant lieu à des modes différents et ce, pour les mêmes valeurs de paramètres du circuit. Ceci est expliqué par l'effet des conditions initiales.

Pour confirmer expérimentalement l'influence des conditions initiales nous avons effectué plusieurs tests en fixant à des valeurs précises la tension et la capacité.

Deux exemples sont donnés dans les Figs.42 et Figs.43. Les résultats obtenus pour une valeur de tension égale à (1 p.u) et des valeurs de capacité égales à 3 μF et à 17 μF respectivement. Dans les deux cas, on voit bien l'apparition des différentes fréquences contenues dans le signal de tension en régime transitoire, mais elles se stabilisent en régime permanent pour certaines conditions initiales, et disparaissent pour d'autres.

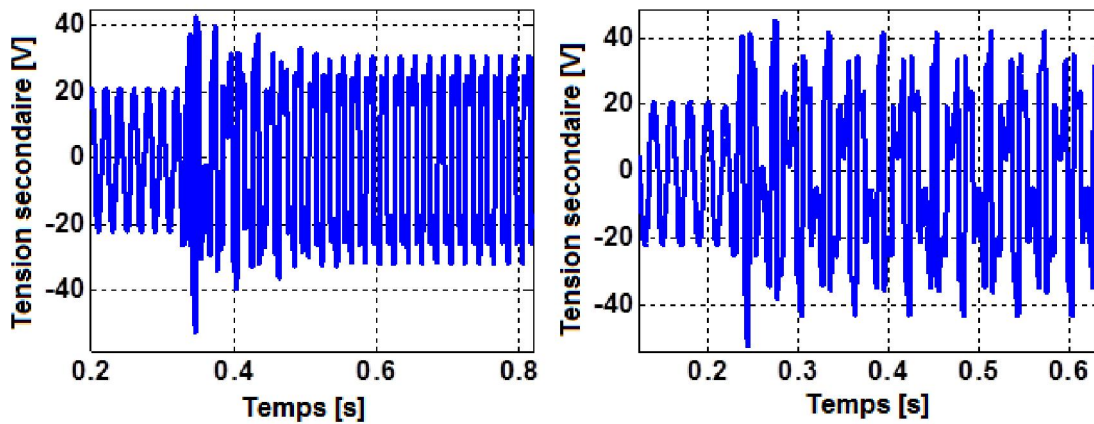


Figure 42. Influence des conditions initiales sur l'apparition du mode quasi-périodique

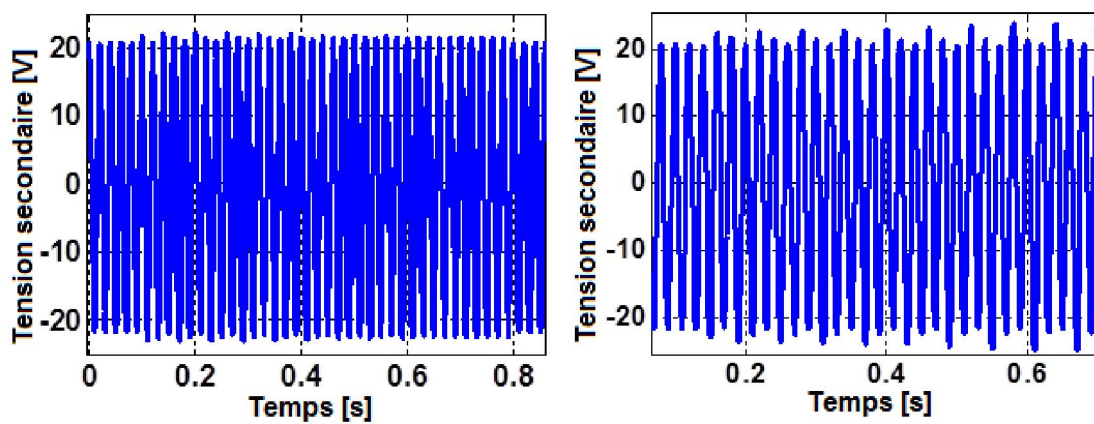


Figure 43. Influence des conditions initiales sur l'apparition du mode sous-harmonique

5.5. Influence de la capacité parallèle

Afin de confirmer les résultats théoriques concernant l'influence de la capacité parallèle sur l'apparition des modes ferrorésonants, nous avons effectué un ensemble de tests en variant la capacité parallèle de 0 μF jusqu'à 1 μF , pour des valeurs de la capacité série comprises entre 1 μF et 20 μF . La tension d'alimentation est fixée à (1 p.u). Chaque test est effectué plusieurs fois pour avoir des conditions initiales variées. En visualisant les signaux de tension et de courant à l'oscilloscope, on peut identifier le mode ferrorésonant qui apparait pour chaque valeur de capacité. La figure.3.20 présente les résultats expérimentaux obtenus. Les valeurs des capacités séries et parallèle donnant les modes fondamental, sous-harmonique et quasi-périodique sont égales à celles obtenues par simulation. L'augmentation de la capacité parallèle amorce les modes ferrorésonants. A titre d'exemple, pour des valeurs supérieures à 0.3 μF , nous n'avons pu avoir que le mode fondamental. Ce dernier est amorcé également pour des valeurs supérieures à 0.7 μF .

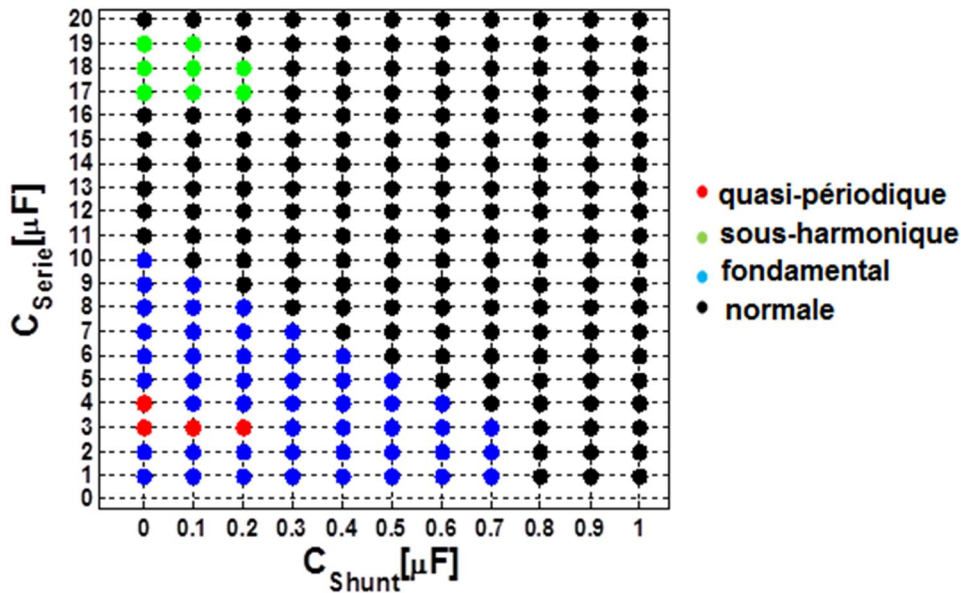


Figure 44. Influence de la capacité parallèle sur les modes ferrorésonants

6. Conclusion

Il est bien connu que le phénomène de la ferrorésonance, comme tous les phénomènes non linéaires, est assez complexe. Son apparition est rare, mais son effet sur le réseau électrique est très dangereux parce qu'il engendre des surtensions pleines d'harmoniques, et des surintensités sévères qui peuvent parfois détruire un transformateur. C'est pourquoi nous avons effectué des travaux sur ce phénomène afin de mieux le comprendre.

Les travaux effectués sont basés sur des cas réels qui peuvent apparaître dans les réseaux électriques. Il s'agit du cas d'un transformateur monophasé de type Shell et d'un autre transformateur triphasé asymétrique de type Core. Les études menées consistent en l'analyse de la ferrorésonance par des méthodes analytiques et par simulation numérique dans un domaine temporel.

Un modèle dynamique, de transformateurs monophasé et triphasé, qui tient compte de l'hystérésis et des courants de Foucault, a été élaboré. Ce modèle a été implémenté sur Matlab\Simulink pour la simulation du phénomène transitoire du transformateur. Il est basé sur la théorie des circuits électromagnétiques utilisant le modèle dynamique de Tellinen. Il a été également validé par la comparaison des résultats expérimentaux avec ceux simulés.

L'étude analytique par la méthode de Galerkin et par celle des harmoniques équilibrés nous a permis de définir une plage de variations des paramètres permettant de donner les modes ferrorésonants expérimentalement.

Enfin, nous n'omettons pas de signaler qu'il reste beaucoup à faire dans le domaine de la ferrorésonance notamment pour les transformateurs de grande puissance ainsi que pour les transformateurs spéciaux de haute fréquence utilisés principalement dans le domaine de l'électronique de puissance.

Références Bibliographiques

- [1] Paul S. Moses, Mohammad A.S. Masoum, and Hamid A. Toliyat. "Impacts of Hysteresis and Magnetic Couplings on the Stability Domain of Ferroresonance in Asymmetric Three-Phase Three-Leg Transformers", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 26, No. 2, pp.581-592, June 2011.
- [2] Fathi Ben Amar, Rachid Dhifaoui, "Bifurcation Lines Calculations of Period-1 Ferroresonance", *International Conference on Power Systems*, Lisbon, Portugal, Sept. 22-24, pp.46-53, 2006.
- [3] [4] Frank Wörnle, David K. Harisson, Chengke Zhou " Analysis of a Ferrorésonant circuit using bifurcation Theory and continuation Techniques. *IEEE Trans. On Power Delivery*, vol.20, n°1, pp.191-196, 2005
- [4] Horak John. "A review of ferroresonance", *IEEE, 57th Annual Conference for Protective Relay Engineers*, pp.1-25, April 2004.
- [5] S. Hassan, M. Vaziri, S. Vadhva. "Review of Ferroresonance in Power Distribution Grids" *Proceedings of the IEEE International Conference on Information Reuse and Integration, IRI 2011*, ,Las Vegas, USA, pp.444-448, August 2011
- [6] J.P. Bickford, A.G. Heaton. "Transient overvoltages on power systems" *IEE Proceedings C Generation, Transmission and Distribution*, vol. 133, Pt.C, No.4, pp.201-2025, 1986
- [7] Rajesh G. Kavasseri, "Analysis of subharmonic oscillations in a ferroresonant circuit", *Electrical Power and Energy Systems* (28), pp.207–214, 2005.
- [8] Astrit Bardhi, Piro Cipo and Myrteza Braneshi, "Study of a ferroresonant circuit using analytic harmonic balance, numerical integration of nonlinear ODE and experimental methods", *Power Electronics and Motion Control Conference (EPE/PEMC), 14th International*, pp. T8-12 - T8-19, 2010.
- [9] Afshin Rezaei-Zare, Majid Sanaye-Pasand, Hossein Mohseni, Shahrokh Farhangi, and Reza Iravani, "Analysis of Ferroresonance Modes in Power Transformers Using Preisach-Type Hysteretic Magnetizing Inductance", *IEEE Trans. on Power Del.*, vol. 22, N°2, pp.919 – 929, April 2007.
- [10] A Tokic, V. Madzarevic, and I. Uglesic. Hysteresis model in transient simulation algorithm based on BDF numerical method. *Power Tech. Conf., 2005 IEEE Russia*, 72, pp.1-7, Dec. 2005.
- [11] P. Ferracci, «ferrorésonance », *Group Schneider : Cahier technique n°190*, pp.1-28, Mars 1998.
- [12] Kiyotaka Yamamura, "Simple Algorithms for Tracing Solution Curves", *IEEE Transactions Circuit and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 40, no. 8, pp. 537-541, August 1993.
- [13] Michel Rioual, Jean-Christophe Kieny, Jean Mahseredjian, "Ferrorésonance dans les réseaux-Modelisation et Applications aux topologies de circuit" *Techniques de l'ingénieur, d92*, pp.1-15, 2009

- [14] Jean-Pierre Dubraz, "Transformateur de mesure Généralités. Théorie et Fonctionnement. *Techniques de l'ingénieur*, d4720, pp.1-23, 1990
- [15] Glenn W. Swift, "An analytical approach to ferroresonance", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. Pas-88, no. 1, pp.42-46, January 1969.
- [16] S. Prusty and S.K. Sanyal "New approach for study of ferroresonance", *Proc. IEE., Part. G.*, vol. 123, n°. 9, pp. 916-918, September 1976.
- [17] Mathieu Lambert, Manuel Martínez-Duró, Jean Mahseredjian, Francisco de León, Frédéric Sirois, "Transformer Leakage Flux Models for Electromagnetic Transients: Critical Review and Validation of a New Model", *IEEE Trans. on Power Del.*, vol. 29, No. 5, pp. 2180-2188, October 2014
- [18] D. Jiles and D. Atherton, "Ferromagnetic hysteresis," *IEEE Trans. On Magn.*, vol. 19, no. 5, pp. 2183–2185, Sept. 1983.
- [19] A. A. Adly and I. D. Mayergoyz "Experimental testing of the average Preisach model of hysteresis", *IEEE Trans on Energy Conversion*, vol. 28, No. 5, pp.2268 – 2270, Sept. 1992.
- [20] J. Tellinen, "A simple scalar model for magnetic hysteresis," *IEEE Trans. On Magn.*, vol. 34, no. 4, pp. 2200–2206, Jul. 1998.