

## ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

S U J E T

**Logiciel du Calcul**  
**Non Linéaire Elasto-Plastique**  
**des Structures**

Proposé par :

A. CHARIF

Etudié par :

K. ALILI

Z. ZIZI

Dirigé par :

A. CHARIF

PROMOTION : JUIN 90

## ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL



# PROJET DE FIN D'ETUDES

### S U J E T

**Logiciel du Calcul**  
**Non Lineaire Elasto-Plastique**  
**des Structures**

Proposé par :

A. CHARIF

Etudié par :

K. ALILI

Z. ZIZI

Dirigé par :

A. CHARIF

PROMOTION : JUIN 90

## DEDICACES

Je dédie ce modeste travail

- à mes parents
- à mes frères et soeurs et à toute ma famille
- à tous mes chers amis
- à mon promoteur Mr A. CHARIF
- à Mr ALILI Karim

Z. ZIZI

---

Je dédie ce travail

- à ma mère et à mon père
- à mes frères et soeurs
- à mes grands parents et toute ma famille petits et grands
- à tous mes chers amis
- à mon promoteur Mr A. CHARIF
- à Mr Zahir ZIZI

K. ALILI

## REMERCIEMENTS

Il nous est agréable d'exprimer ici notre profonde reconnaissance à tous ceux qui nous ont aidés , encouragés de près ou de loin sans qui le présent mémoire n'aurait pas été élaboré .

Nous tenons particulièrement à remercier également:

Mr A. CHARIF qui nous a guidés durant la préparation de ce mémoire,

Tous les enseignants de l'Ecole Nationale Polytechnique qui ont contribué à notre formation ,

Le personnel de la bibliothèque et du Centre de Calcul de l'E.N.P

MM Y.AYACHE et A. BELLOUZE qui ont eu l'initiative de taper ce mémoire

---

## S O M M A I R E

CHAPITRE I	INTRODUCTION GENERALE .....	1
CHAPITRE II	ETUDE DE LA PLASTICITE .....	3
	2-1 INTRODUCTION .....	3
	2-2 MOMENT PLASTIQUE - FACTEUR DE FORME .....	3
	2-2-1 Détermination des du moment .....	5
	2-2-2 Facteur de forme .....	6
	2-3 COMPORTEMENT A L'ETAT PLASTIQUE .....	6
	2-3-1 Notion de rotule plastique Description du phénomène de rotation .....	6
	2-3-2 Rappel de la notion des travaux virtuels .....	8
	2-3-3 Charge de ruine .....	10
	2-3-4 Comportement des poutres hyperstatiques .....	11
	2-3-5 Comportement des portiques .....	11
	2-4 LOCALISATION DES ROTULES .....	13
	2-5 COMBINAISON DES MECANISMES ELEMENTAIRES .....	15
CHAPITRE III	METHODES DE CALCUL A L'ETAT PLASTIQUE .....	17
	3-1 INTRODUCTION .....	17
	3-2 METHODES GLOBALES ( ANALYSE LIMITE ) .....	17
	3-2-1 Théorèmes de la limite supérieure et de la limite inférieure .....	17
	3-2-2 Processus de l'analyse limite .....	18
	3-3 LES METHODES PAS-A-PAS .....	21
CHAPITRE IV	PRESENTATION DU PROGRAMME .....	23
	4-1 INTRODUCTION .....	23

4-2 CALCUL EN PHASE ELASTIQUE .....	25
4-2-2 Methode des déplacements .....	25
4-2-2 Notations utilisées	
Organigrammes .....	40
* Assemblage de la M.R 1/2 bande .....	43
* Conditions aux limites .....	47
* Résolution du système d'équations .....	49
4-3 CALCUL EN PHASE ELASTOPLASTIQUE.....	51
4-3-1 Degré d'hyperstaticité .....	51
4-3-2 Modification des rigidités élémentaires dues au développement de rotules plastiques .....	52
4-3-3 Algorithme de convergence .....	53
Organigramme .....	55
4-3-4 Données pour le calcul plastique .....	56
Organigramme .....	57
4-4 CALCUL DES DEFORMATIONS .....	58
4-5 ETUDE DYNAMIQUE .....	59
4-5-1 Introduction .....	59
4-5-2 Modélisation mathématique .....	59
4-5-3 Calcul des valeurs et vecteurs propres .....	63
4-5-4 Méthodes de calcul des valeurs propres et vecteurs propres .....	64
4-5-5 Facteur de contribution .....	69
ORGANIGRAMME GENERAL .....	70
CHAPITRE V	
EXEMPLES .....	72
CHAPITRE VI	
CONCLUSION GENERALE - RECOMMANDATIONS.....	82
BIBLIOGRAPHIE	

## INTRODUCTION GENERALE

Le dimensionnement classique des ossatures est basé sur la théorie de l'élasticité en dehors de toute considération du comportement plastique du matériau. Pourtant, il est bien connu que grâce à l'adaptation plastique, les ossatures peuvent encaisser la plus part des surtensions dues par exemple aux charges concentrées, aux contraintes résiduelles... En outre, on peut remarquer que l'application systématique de la théorie de l'élasticité fausse dans une certaine mesure le concept de ruine puisque la structure est considérée hors-service lorsque la contrainte atteint la limite apparente d'élasticité en un seul endroit. Il en résulte une mauvaise appréciation de la sécurité qui entraîne souvent un surdimensionnement de la structure.

C'est pour ces raisons que diverses études ont été dirigées dans le concept de la plasticité et que des progrès notables ont été accomplis dans la connaissance du comportement élasto-plastique des structures tant sur le plan théorique qu'expérimental. Ces progrès ont en effet permis aux différents règlements de calcul de faire une plus large place à la prise en compte de la plasticité dans le dimensionnement des structures. L'analyse non linéaire des structures s'impose notamment dans les zones sismiques où il est admis que les forces sismiques induisent des efforts dépassant largement le seuil élastique.

L'étude présentée dans notre <sup>projet</sup> s'inscrit dans le cadre du calcul non linéaire des structures. Elle s'applique en particulier aux ossatures planes où les non linéarités proviennent de la loi constitutive élasto-plastique du matériau.

Dans les zones qui peuvent être le siège d'écoulements plastiques, il n'y a plus proportionnalité entre les efforts appliqués à un élément et les déplacements de ses nœuds. Signalons que d'autres non linéarités existent et peuvent être dues à :

- des déplacements des nœuds qui peuvent avoir une amplitude appréciable vis-à-vis des dimensions de la structure. Dans le calcul, il n'est donc plus possible de se référer uniquement à la configuration initiale de la structure : non linéarités géométriques (grandes déformations)
- des efforts normaux agissant dans les poutres qui peuvent avoir une influence non négligeable sur la résistance à la flexion : effet  $P-\Delta$

Afin de concrétiser l'étude , nous présenterons un logiciel de calcul des structures à noeuds rigides tenant compte des effets de non linéarité élasto-plastique . Ces structures sont soumises à des efforts extérieurs variant par accroissements linéaires ( chargement incrémental proportionnel ) .

La programmation est élaborée en envisageant la méthode dite "pas-à-pas" . Le langage informatique utilisé est le FORTRAN 77 du fait de ses capacités considérables et disponibilité au centre de calcul de l'E.N.P sur le MICRO-VAX .

Après une présentation des différents organigrammes utilisés , quelques exemples illustreront les performances réelles et l'intérêt pratique de ce logiciel en l'occurrence l'étude de la vulnérabilité des structures vis-à-vis des actions sismiques .

ETUDE DE LA PLASTICITE

2-1 INTRODUCTION

L'analyse élastique d'une structure est importante dans le but d'étudier son comportement essentiellement en service sous chargement. Cependant, si le chargement augmente jusqu'à plastification de certaines de ses parties, celle-ci subit des déformations élastoplastiques et pour un plus grand chargement la plastification totale est atteinte.

Un matériau est en général assumé se déformer idéalement comme le montre la figure ci-dessous.

Il ya proportionnalité entre la contrainte  $\sigma$  et la déformation  $\epsilon$  jusqu'à atteindre la contrainte d'écoulement  $\sigma_e$  correspondant à la déformation  $\epsilon_e$  qui augmente indéfiniment jusqu'à rupture.

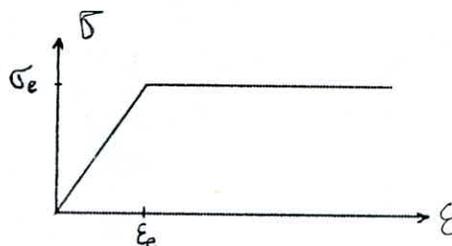


Fig 2.1 Courbe contrainte-déformation idéale.

Nous examinerons plus profondément le phénomène de rotation ainsi que son impact sur le comportement des éléments simples (poutres) ainsi que des portiques.

2-2 MOMENT PLASTIQUE , FACTEUR DE FORME

On considère le cas général d'une poutre droite de section rectangulaire soumise à un moment de flexion pur. (Fig 2.2)

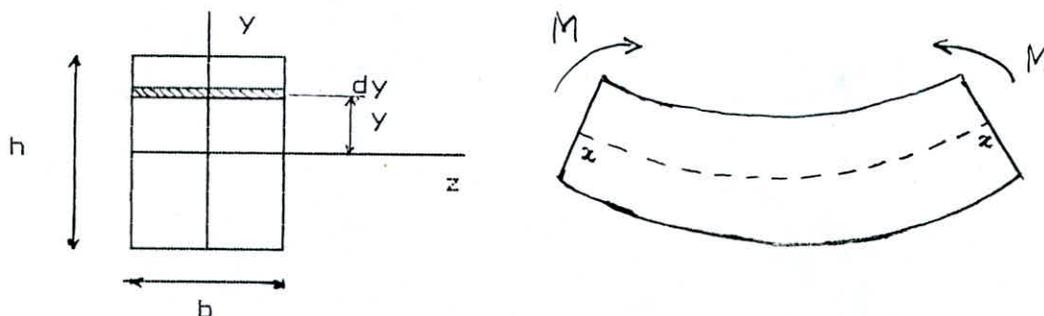


Fig 2.2 Poutre rectangulaire soumise à M

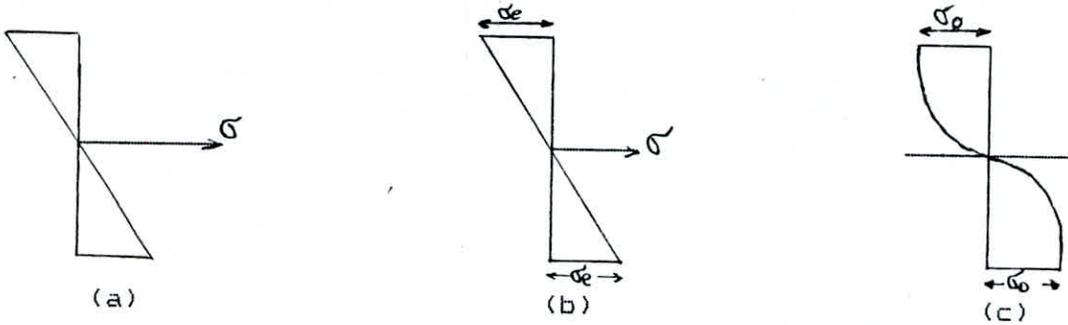
D'après la théorie de l'élasticité, la contrainte  $\sigma$  est distribuée le long de la section selon l'expression bien connue :

$$\sigma = M y / I$$

$y$  : distance de l'axe neutre  $x-x$  passant par le centre de gravité de la section à la fibre  $dy$ .

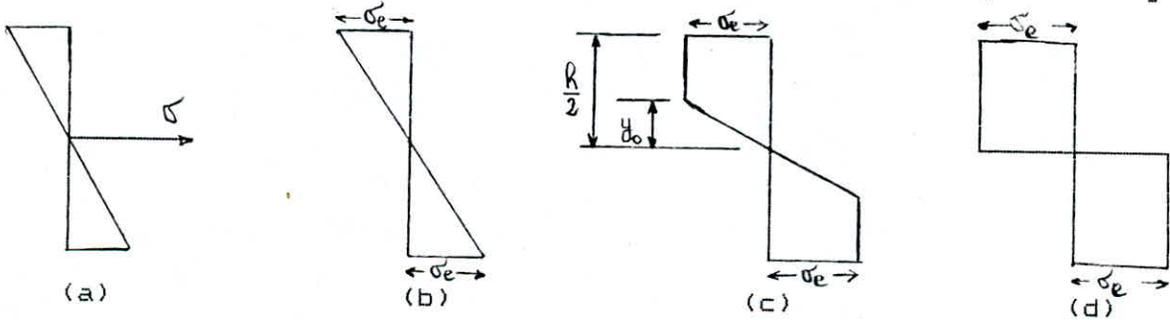
$I$  : moment d'inertie de la section.

La distribution des contraintes demeure linéaire (fig 2.3.a) jusqu'à ce que la contrainte max atteigne sa valeur critique due à une augmentation du moment fléchissant.



( Fig 2.3 ) - Diagrammes des contraintes sous différentes valeurs de M.

Dans le cas d'un matériau idéal, celui-ci se comporte de la même manière que précédemment (fig 2.3), cependant la distribution des contraintes sera quelque peu différente comme l'indique la fig 2.4.



( Fig 2.4 ) - Distribution des contraintes le long d'une section soumise à un moment de flexion.

A de petites valeurs de  $M$ , la distribution des contraintes reste linéaire dans le domaine élastique. Au fur et à mesure que le moment augmente, les fibres extrêmes subissent en premier lieu la plastification. Celle-ci se propage tout au long de la section jusqu'à atteindre l'axe neutre, et ainsi cette dernière se trouve entièrement plastifiée.

\*) Section dissymétrique :

Dans le cas d'une section symétrique, la distribution des contraintes est symétrique par rapport à l'axe neutre qui passe par le centre de gravité. Cette situation demeure inchangée au moment où la section est en phase élasto-plastique ou entièrement plastique. Toutefois pour une section dissymétrique, on note un changement de la position de l'axe neutre au moment de la plastification. En effet, il se déplace vers une position de manière à faire respecter la condition d'équilibre.

2-2-1 Détermination du moment :

Le moment dû aux forces extérieures agissant sur une poutre est :

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma \cdot b \cdot y \cdot dy \quad (2.1)$$

Pour une section rectangulaire, le moment fléchissant pour  $\sigma_{\max} = \sigma_e$  est :

$$My_1 = Me = b \cdot h^3 \cdot \sigma_e / 6 \quad (2.2)$$

Quand le moment appliqué  $M$  dépasse  $My_1$ , le moment total devient :

$$M = Me + Mp$$

En se référant à la fig. 2.4.a, on a les expressions de  $Me$  et  $Mp$ .

$$Me = 2 \int_0^{y_0} \sigma \cdot y^2 \cdot b \cdot dy \quad : \text{moment élastique}$$

et

$$Mp = 2 \int_{y_0}^{h/2} \sigma_e \cdot y^2 \cdot b \cdot dy \quad : \text{moment plastique}$$

$$\text{Mais } \sigma = \sigma_e \cdot y / y_0$$

$$\text{d'où } Mp = \sigma_e \cdot b \cdot (3h^2 - 4y_0^2) / 12$$

Quand la section est entièrement plastifiée,  $y_0 = 0$  alors

$$My_2 = Mp = \sigma_e \cdot b \cdot h^2 / 4 \quad (2.3)$$

### 2-2-2 Facteur de forme :

Le facteur de forme "s" est défini comme étant le rapport de deux moments correspondant respectivement à l'état entièrement plastique et à celui indiquant la limite élastique .

$$s = M_p / M_e$$

Le rapport s dépend de la forme de la section transversale . Moyennant les équations ( 2.2 ) et ( 2.3 ) , on peut trouver la valeur de s pour une section rectangulaire .

$$s = M_y / M_x = 1.5 \quad ( 2.4 )$$

De la même manière que précédemment :

\* section circulaire de diamètre d :

$$s = M_y / M_x = \frac{d^3 \cdot \sigma_e}{6} / \frac{\pi \cdot d^3 \cdot \sigma_e}{32} \quad ( 2.5 )$$

$$s = 1.69$$

\* poutres en I et en caissons :

$$s = 1.15 \text{ à } 1.75$$

## 2-3 Comportement à l'état plastique

### 2-3-1 Notion de rotule plastique - Description du phénomène de rotulation

Considérons une poutre isostatique soumise en son milieu à l'action d'une force concentrée P ( fig 2.5.a ) .

Augmentons P jusqu'à ce que la valeur du moment  $M = P \cdot L / 4$  se rapproche du moment plastique  $M_p$  . A cet instant , des déformations plastiques apparaissent au point d'application de P , et donnent naissance à une brisure au milieu de la poutre . La poutre est alors composée de deux tronçons déformés élastiquement séparés par une zone fortement déformée plastiquement . Tout se passe comme si ces deux tronçons déformés élastiquement sont reliés par une rotule qui se met à tourner lorsque le moment fléchissant atteint la valeur  $M_p$  . Cette rotule porte le nom de ROTULE PLASTIQUE , dont la longueur de la zone plastifiée dépend de la forme, de la section droite de la poutre considérée ( la section rectangulaire vaut  $L_p = L / 3$  L - portée de la poutre ) .

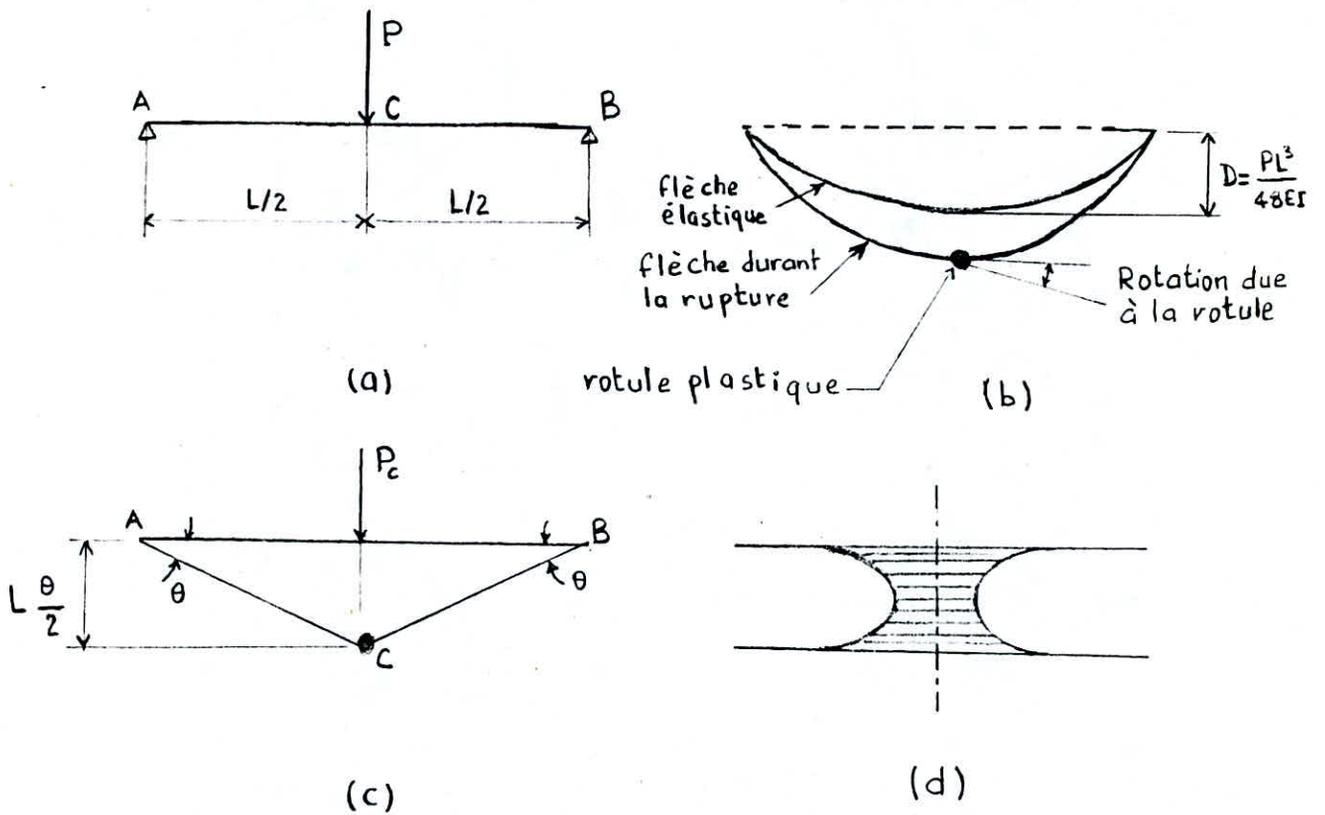


Fig 2.5 - Comportement plastique d'une poutre simple  
 a) poutre, b) déformée, c) variation de la flèche durant la rupture, d) écoulement à proximité de la zone centrale

La rupture aura lieu sous une quelconque augmentation de la charge . La charge de ruine  $P_c$  peut être calculée aisément par la statique :

$$P_c = 4 M_p / L \quad (M_p = P_c L / 4) \quad ( 2.6 )$$

Les moments fléchissants au niveau des sections autres que celles du milieu sont évidemment inférieurs à  $M_p$  , et ces sections sont à l'état élastique .

Les diagrammes des flèches à l'état élastique et à l'état plastique sont montrés par la fig 2.5.b . L'augmentation de la flèche durant la rupture est due à la rotation de la rotule centrale sans changement de courbure dans les deux moitiés de la poutre . La fig 2.5.c représente les changements de la flèche durant la rupture ainsi que le mécanisme de ruine .

#### \* Rotule plastique en béton armé

Dans le cas du béton armé , l'évolution de la fissuration au niveau de l'élément considéré fait que cette zone plastique devient importante . Les fissures deviennent de plus en plus rapprochées à mesure que le moment augmente (fig 2.6) . C'est ainsi que le calcul du moment plastique  $M_p$  présente beaucoup d'incertitudes ( plastification du béton , plastification des aciers ou des aciers et du béton ) et la définition de rotule dans le cas du béton devient une idéalisation . Certains auteurs parlent de "pseudo-rotule" . Cependant , dans notre étude et dans un souci de simplification , nous supposerons que ces rotules sont concentrées au point où le moment plastique  $M_p$  est atteint

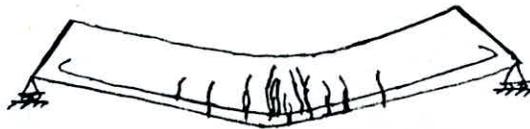


fig 2.6 Rotule plastique en béton armé

#### 2-3-2 Rappel de la notion des travaux virtuels

Le principe des travaux virtuels relie un système de forces en équilibre avec un système de déplacements compatibles avec les déformations . Ces forces ( ou déplacements ) peuvent être réelles ou fictives ( virtuelles ) pourvu que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements et des déformations soient assurés.

\* Application à la plasticité :

Considérons le cas d'une poutre bi-encastree soumise à une force concentrée  $P$  appliquée à la mi-travée (fig 2.7).

Travail des forces exterieures = Travail des forces intérieures,  
En d'autres termes :

$$\sum P * \delta = \sum M_p * \theta$$

Le premier membre de l'égalité exprime le produit des forces par les déplacements virtuels correspondants aux directions de ces forces. Le deuxième terme correspond au produit du moment plastique à chaque rotule par la rotation virtuelle de celle-ci.

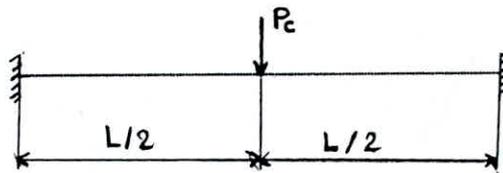
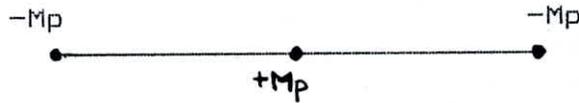
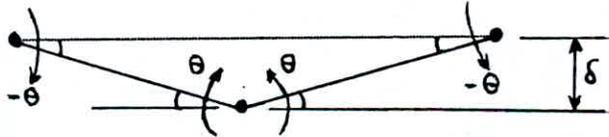


Fig 2.7 - Poutre bi-encastree chargée en son milieu .

Etape 1 : Considérer le mécanisme : Formation de rotules plastiques aux noeuds extrêmes et sous  $P$ .



Etape 2 : Imposer les rotations virtuelles au niveau des rotules



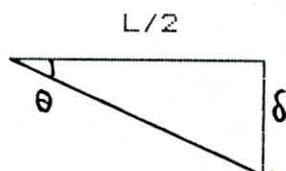
Etape 3 : Travail virtuel effectué par la force exterieure

$$P_c * \delta$$

Etape 4 : Travail absorbé par la rotulation

$$(-M_p) * (-\theta) + M_p * (2\theta) + (-M_p) * (-\theta) = 4 M_p \theta$$

Etape 5 : Aspect géométrique



Tant que la rotation a lieu à cause de la rotule plastique, les deux demi-travées restent rectilignes. L'angle  $\theta$  étant très petit  $\text{tg } \theta \approx \theta$ , d'où

$$\delta = L/2 * \text{tg } \theta = L.\theta/2.$$

Etape 6 : L'équilibre étant satisfait,  
Travail fourni = Travail absorbé

c.à.d  $P_c . \delta = 4.M_p * \theta$

ou  $P_c.L\theta/2 = 4.M_p * \theta$

d'où  $P_c = 8 M_p/L.$

On remarque la simplification de l'angle de rotation  $\theta$  dans la formule finale donnant ainsi la valeur de la charge de ruine en fonction du moment plastique.

2-3-3 Charge de ruine

La charge de rupture de la poutre peut être calculée en égalant les travaux extérieur et intérieur durant le mouvement virtuel du mécanisme de ruine. Chaque moitié de la poutre dans la fig 2.5.c subit une rotation virtuelle  $\theta$  de sorte que la rotation correspondante à la rotule est  $2\theta$  et le déplacement de la charge  $P_c$  est  $L\theta/2$ . En égalant le travail de  $P_c$  et celui du moment plastique  $M_p$  à la rotule plastique, on obtient :

$$P \times L\theta/2 = M_p \times 2\theta \text{ qui donne le même resultat que l'équation 2.6 .}$$

d'où  $P_c = 4 M_p/L$  ( 2.5 ).

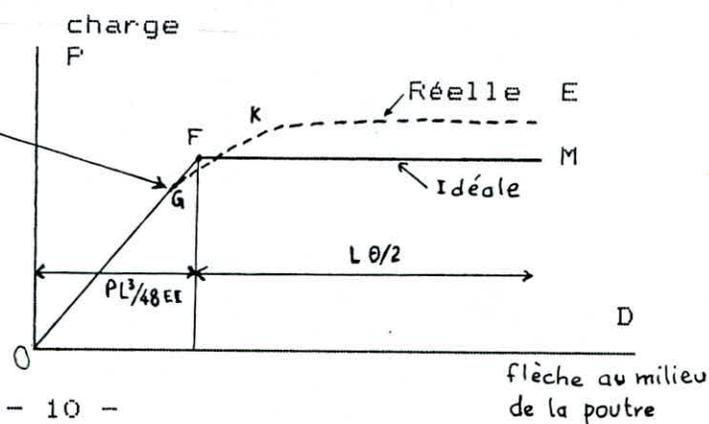
La relation idéale entre la charge et la flèche centrale pour cette poutre est représentée par la ligne O F M de la fig 2.8.

Quand la charge de rupture correspondant au point F est atteinte, la flèche élastique au milieu de la poutre est :

$$D = P_c L / 48 E I$$

Charge causant  $M_p$  à la mi-travée

Fig 2.8 - Relation charge flèche pour la poutre de la fig 2.5



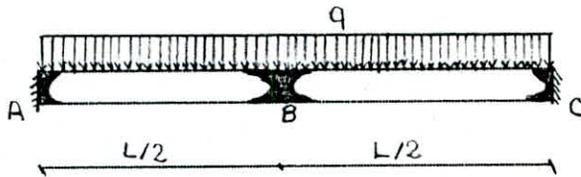
Cependant, la relation charge-flèche réelle suit la courbe GKE. Quand le moment plastique est atteint à la section en mi-travée, le comportement élastique des fibres supérieures et / ou inférieures prend fin. Une augmentation de la charge donne une plastification de ces fibres et qui se propage vers les fibres intérieures (fig 2.5.d).

2.3.4 - Comportement des poutres hyperstatiques

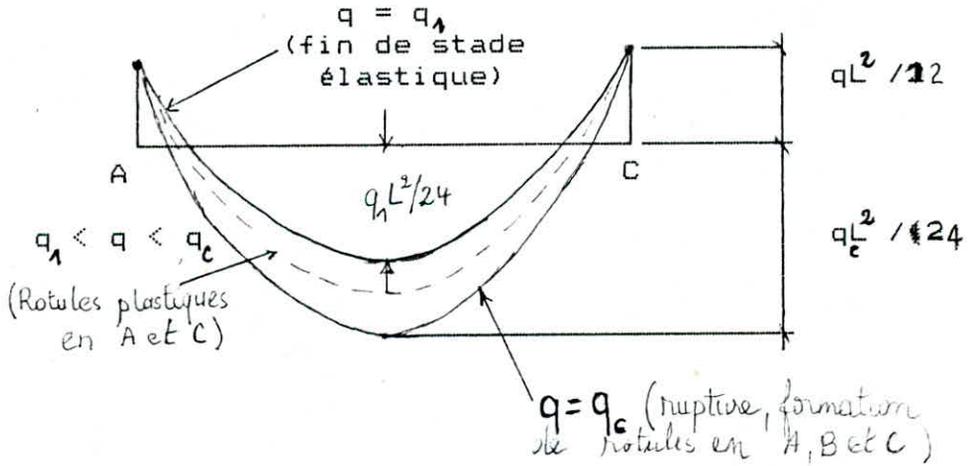
Considérons une poutre biencastrée sujette à une charge uniforme d'intensité  $q$  ( fig 2.9.a ). Les moments fléchissants sont bien connus  $M_a = M_c = -qL^2/12$  aux encastremets A et C et  $M_b = qL^2/24$  à la mi-travée

Relativement au cas de la poutre isostatique chargée de la même manière où la rotule se développe à la mi-travée quand  $M_p = qL^2/8$  causant ainsi une flèche illimitée et par la suite la ruine, le comportement de la poutre biencastrée est complètement différent. En effet, il y a apparition simultanée de deux rotules aux extrémités A et C, mais on n'observe pas encore de flèche illimitée car il ya une redistribution des moments de sorte que la poutre devienne isostatique aux moments constants aux extrémités et égaux à  $M_p$ .

C'est seulement au moment de la formation de la rotule<sup>qu</sup> milieu de la poutre ( point B ) que la ruine commence.

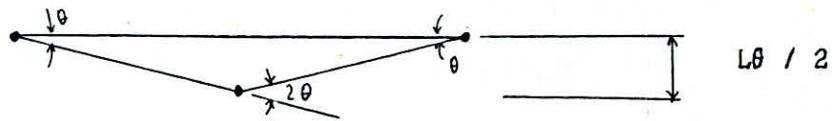


(a)



(b)

(b) Diagramme de moments fléchissants pour trois cas de charges  $q$ ,  $q$ ,  $q$



(c) Mécanisme de ruine

Fig 2.9 - Rupture d'une poutre biencastrée sous charge uniformément répartie

La charge de rupture  $q$  est calculée par l'équation des travaux virtuels :

$$M_p (\theta + 2\theta + \theta) = 2 (q_c L/2) \theta L/4 \quad (2.8)$$

où  $\theta$ ,  $2\theta$ ,  $\theta$  sont les rotations virtuelles aux rotules plastiques A, B et C respectivement.

L'équation (2.8) donne l'intensité de la charge de rupture

$$q_c = 16 M_p / L^2 \quad (2.9)$$

### 2-3-5 Comportement des portiques

Déterminons la charge de ruine pour le portique montré par la fig 2.10.a, les moments plastiques étant de  $2 M_p$  pour la poutre B C et de  $M_p$  pour les poteaux A B et D C. Il y a seulement trois possibilités de mécanismes montrés par les fig 2.10.b, c et d.

L'équation des travaux virtuels pour chacun des mécanismes est :

$$M_p (\theta + \theta) + 2 M_p (2\theta) = 2 P_{c1} (L\theta / 2) \quad \text{fig 2.10.b}$$

$$\text{d'où } P_{c1} = 6 M_p / L \quad (2.10)$$

$$M_p (\theta + \theta + \theta + \theta) = P_{c2} (0,6 L \theta) \quad \text{fig 2.10.c}$$

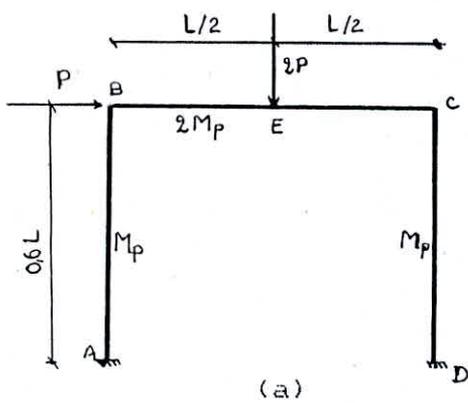
$$\text{d'où } P_{c2} = 6,67 M_p / L \quad (2.11)$$

$$M_p (\theta + \theta + 2\theta) + 2 M_p (2\theta) = P_{c3} (0,6 L \theta) + 2 P_{c3} (L\theta / 2) \quad \text{fig 2.10.d}$$

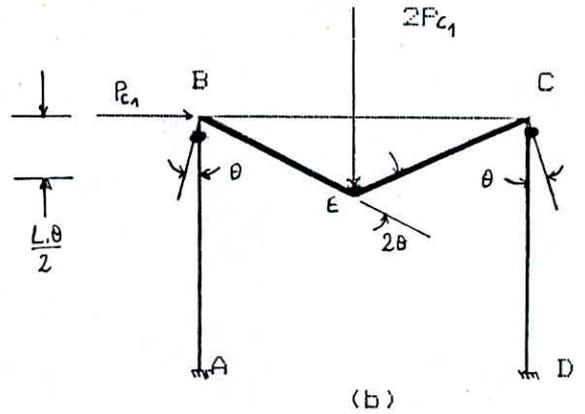
$$\text{d'où } P_{c3} = 5 M_p / L \quad (2.12)$$

La charge de rupture est la plus petite des valeurs  $P_{c1}$ ,  $P_{c2}$ , et  $P_{c3}$ ; soit  $P_{c3} = 5 M_p / L$  et donc la ruine a lieu dans le mécanisme de la fig 2.10.d

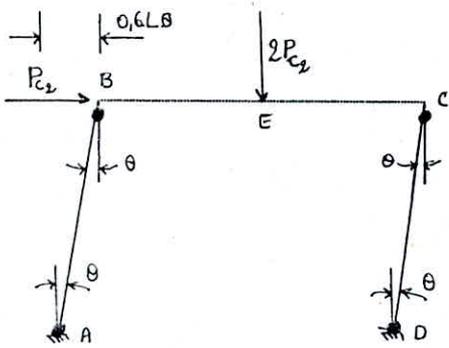
Une des manières de vérifier les résultats est de contrôler si l'équilibre des moments est satisfait ; ce qui est le cas de la fig 2.10.d



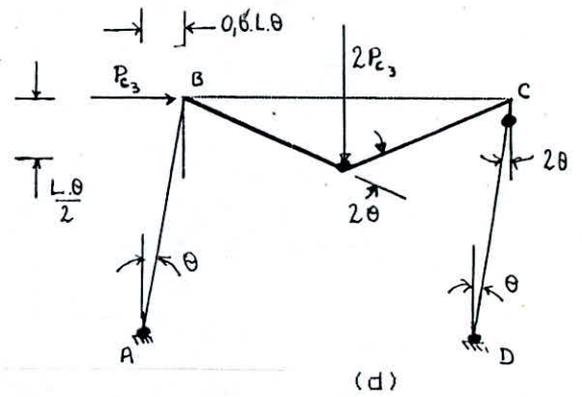
(a)



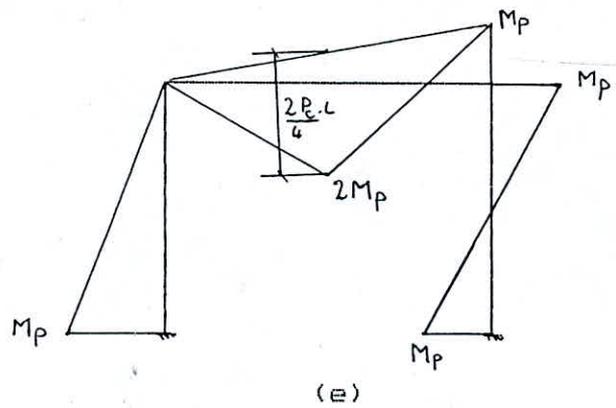
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig 2.10 - Analyse plastique d'un portique

- a) Portique chargé
- b) Ruine quand  $P = P_{c1}$
- c) Ruine quand  $P = P_{c2}$
- d) Ruine quand  $P = P_{c3}$
- e) Diagramme des moments fléchissants à la rupture

## 2-4 LOCALISATION DES ROTULES PLASTIQUES :

Dans les éléments simples soumis à des charges concentrées, la détermination des points susceptibles à la formation de rotules plastique est évidente. Ceci se résume à respecter certaines règles :

\* Règle 1 : En général, les rotules plastiques se forment aux points de fixation des poutres (cas de la poutre biencastrée)

\* Règle 2 : Les rotules se forment aux points d'application des charges concentrées.

\* Règle 3 : Dans le cas des poutres continues, les rotules plastiques se forment aux appuis correspondant aux travées les plus faibles.

Cependant en pratique, les charges uniformément distribuées <sup>sont</sup> les plus fréquentes; ce qui rend la tâche plus difficile du fait que le positionnement des rotules plastiques ne répond pas aux trois règles décrites ci-dessus.

Considérons un portique soumis verticalement à une charge  $4P$  uniformément distribuée sur la poutre BC et horizontalement à une force concentrée (fig 2-11-a). Dans ce cas, la position du moment fléchissant maximum n'est pas connue pour pouvoir localiser la rotule plastique.

Si la charge de ruine  $P_c$  est donnée, la valeur précise de  $M_p$  peut être calculée en considérant le mécanisme de la fig 2-11-b montrant une rotule plastique en F à une distance  $x$  de B.

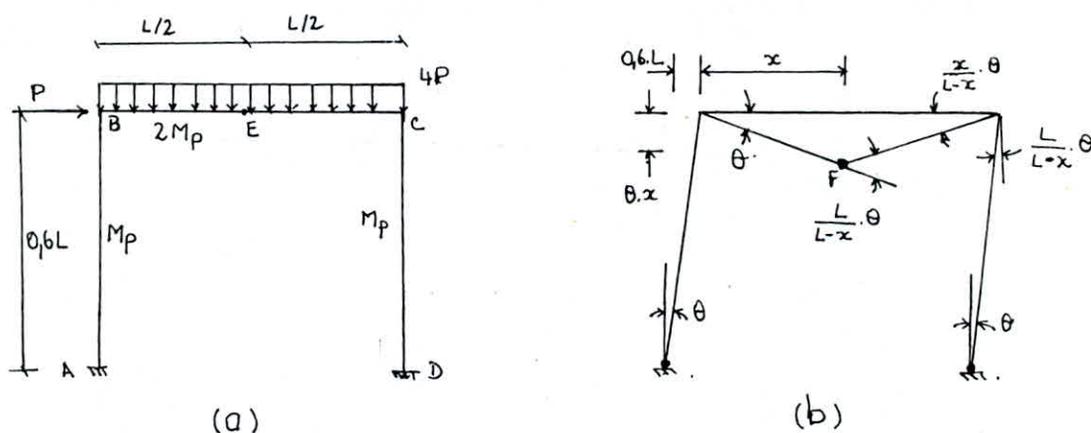


Fig 2.11 Portique soumis à une charge uniforme

- a) Chargement et propriétés du portique  
 b) Mécanisme correspondant à la charge de ruine  $P$  de l'Eq 2.13

Mp peut être exprimé en fonction de x par application de l'équation des travaux virtuels. La valeur de x est choisie de sorte que Mp est maximum c-à-d

$$dMp/dx = 0$$

$$Mp(\theta + \theta + (L/(L-x))\theta + 2Mp(L/(L-x)*\theta) = Pc(0,6L\theta) + 4Pc/L*x(x\theta/2) + 4Pc/L*\theta-xL(x\theta/2)$$

$$Mp = Pc(0,6L^2 + 1,4Lx - 2x^2) / (5L - 2x) \quad (2.13)$$

$$dMp/dx = 0, \text{ ce qui donne } 4x^2 - 20Lx + 8,2L^2 = 0 \quad (2.14)$$

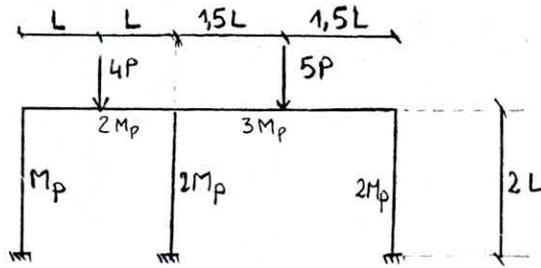
$$\text{d'où } x = 0,4505L$$

Remplaçant x dans l'équation (2.13), on aboutit à la valeur de Mpmax.

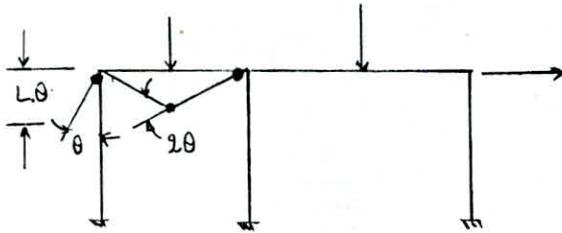
$$Mp_{max} = 1,006L (PcL/5) \quad (2.15)$$

## 2.5. COMBINAISON DE MECANISMES ELEMENTAIRES :

En pratique, chaque mécanisme peut être obtenu par la combinaison de mécanismes élémentaires de façon à obtenir la capacité de chargement la plus faible qui soit. Pour ce faire, considérons le portique de la fig. 2.12.a. Les fig. 2.12.b,c & d montrent trois mécanismes élémentaires respectivement. Le mécanisme 2 donne la plus petite valeur de Pc. Les Fig 2.12 e & f montrent deux combinaisons possibles. \*Le mécanisme 4 est une combinaison des mécanismes 2 et 3 avec une modification dans la localisation de la rotule au dessus du poteau central. La charge de rupture résultante est  $Pc4 = 1,33 Mp/L$ . \*Le mécanisme 5 est une combinaison des mécanismes 1,2 et 3 avec toujours la même modification, et dont la charge de rupture est cette fois-ci  $Pc5 = 1,31 Mp/L$  qui est inférieure à Pc4.



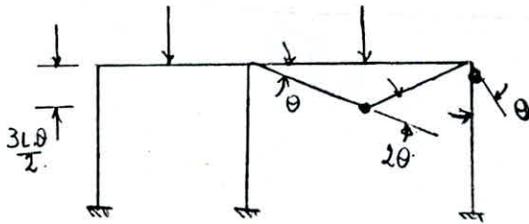
(a)



(b)

$$M_p \theta + 2M_p(2\theta + \theta) = 4P c_1 L \theta$$

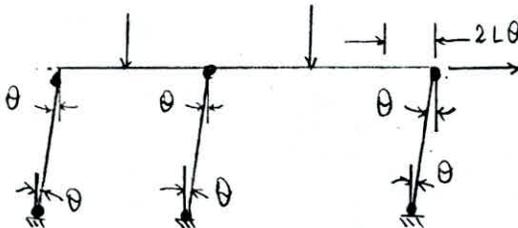
$$P c_1 = 1.75 M_p / L$$



(c)

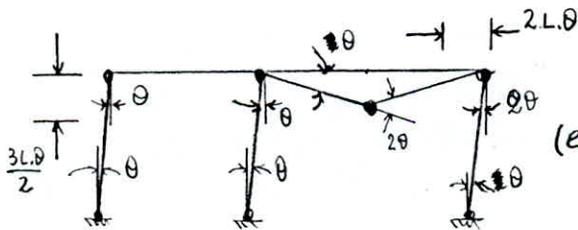
$$3 M_p(\theta + 2\theta) + 2M_p \theta = 5P c_2 \frac{3}{2} L \theta$$

$$P c_2 = 1.47 M_p / L$$



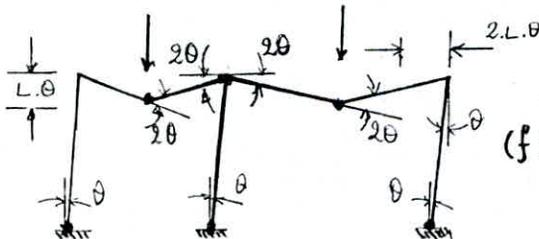
$$(d) \quad M_p(\theta + \theta) + 2M_p(\theta + \theta + \theta) = 3P c_3 (2L \theta)$$

$$P c_3 = 1.67 M_p / L$$



$$(e) \quad M_p(2\theta) + 2M_p(5\theta) + 3M_p(2\theta) = 5P c_4 (3L\theta/2) + 3P c_4 (2L\theta)$$

$$P c_4 = 1.33 M_p / L$$



(f)

$$M_p(\theta) + 2M_p(8\theta) + 3M_p(2\theta) = 4P c_5 (L \theta) + 5P c_5 (3L\theta/2)$$

$$P c_5 = 1.31 M_p / L$$

fig. 2.12 Analyse plastique d'un portique

- a) propriétés du portique; b) Mécanisme 1  
 c) Mécanisme 2, d) Mécanisme 3  
 e) Mécanisme 4, f) Mécanisme 5

METHODES DE CALCUL  
A L'ETAT PLASTIQUE

## 3-1 INTRODUCTION

Lorsque les éléments d'une ossature doivent résister principalement à des efforts de flexion, plusieurs méthodes s'offrent à l'ingénieur pour effectuer les calculs. Il y'a d'abord les méthodes globales qui sont toutes basées sur des théorèmes fondamentaux de l'analyse limite. Toutefois, il y'a aussi les méthodes pas-à-pas qui consistent à suivre le comportement d'une ossature tout au long d'un chargement croissant. Elles permettent non seulement de déterminer la charge ultime mais aussi de fournir tous les renseignements intermédiaires notamment ceux concernant les efforts internes et les déplacements des noeuds. En pratique, de telles méthodes ne peuvent être envisagées qu'avec l'aide de l'ordinateur, mais elles constituent de précieux outils pour la vérification des projets.

## 3-2 METHODES GLOBALES ( ANALYSE LIMITE )

Les méthodes globales utilisent les théorèmes de la plasticité (théorèmes ~~cinématique~~<sup>statique</sup> ou combinés) et leur résolution se fait généralement par la programmation linéaire. Ces méthodes basées sur le schéma rigide-plastique ne renseignent le projeteur que sur l'état de la structure au moment de la ruine par formation d'un mécanisme, or la ruine d'une structure peut avoir lieu avant formation de ce mécanisme (phénomène de ruine partielle ou mise hors d'état de service par déformation excessive).

3-2-1. Théorèmes de la limite supérieure et de la limite inférieure

Quand la charge parfaitement plastique est appliquée à la structure, les rotules plastiques se formeront en un nombre d'emplacements suffisant de sorte que la structure va se transformer en un mécanisme. Cependant, pour calculer la charge (ou facteur de charge) parfaitement plastique, il faut connaître exactement le mécanisme ainsi constitué. En général, il y'a un grand nombre de mécanismes possibles et le mécanisme exact n'est pas connu.

### 3-2-1-1 Théorème de la limite supérieure

Une charge (ou facteur de charge) calculée sur la base d'un mécanisme supposé sera toujours plus grande ou au moins égale à la charge parfaitement plastique vraie .

### 3-2-1-2 Théorème de la limite inférieure

Une charge calculée à la base du diagramme d'équilibre des moments dans lequel les moments ne sont nulle part plus grands que  $M_p$  , est inférieure ou au plus égale à la charge parfaitement plastique vraie .

### 3-2-2 Processus de l'analyse limite

L'analyse limite procède comme suit :

- i) supposer un mécanisme et déterminer le facteur de charge correspondant . D'après le théorème de la limite supérieure :

$$\lambda \geq \lambda_c$$

$\lambda_c$ - facteur de charge correspondant au mécanisme .

- ii) tracer le diagramme du moment fléchissant correspondant à  $\lambda$  et au mécanisme assumé . Si  $\lambda$  est la limite supérieure , il y'aura des points dans la structure où les moments flechissants seront plus grands que le moment plastique .
- iii) réduire le chargement dans la même proportion jusqu'à ce que tous les moments fléchissants soient au plus égaux à  $M_p$  et ainsi de façon à éliminer les rotules donc le mécanisme . D'après le théorème de la limite inférieure :

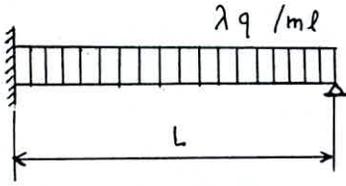
$$\lambda_r \leq \lambda_c$$

$\lambda_r$ - facteur de charge obtenu après réduction

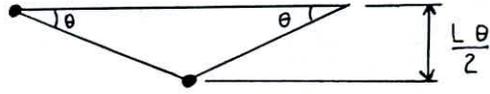
- iv) la valeur de  $\lambda_c$  varie dans le domaine  $\lambda_r \leq \lambda_c \leq \lambda$

Pour des raisons pratiques ce domaine doit être petit , sinon on sélectionne un autre mécanisme et on reprend le processus .

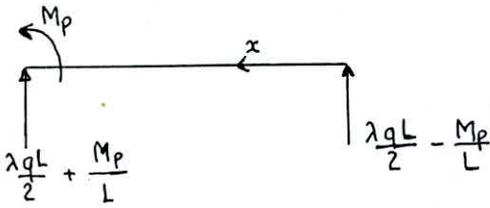
Considérons comme exemple la poutre de la fig. 3.1.a chargée uniformément par  $\lambda q$ . Les rotules peuvent avoir lieu raisonnablement à l'encastrement et la mi-travée fig.3.1.b ; ceci étant le premier mécanisme sélectionné.



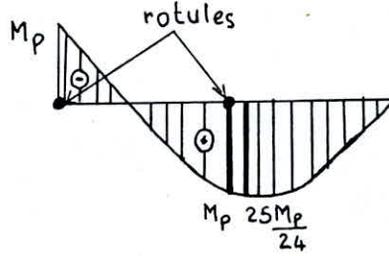
(a)



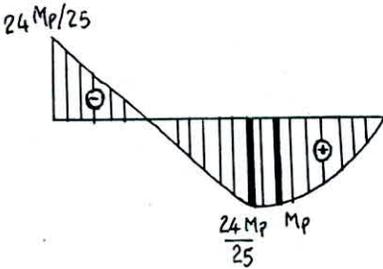
(b)



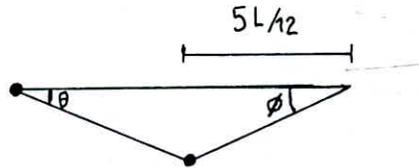
(c)



(d)



(e)



(f)

Fig; 3.1 Différentes étapes de l'analyse limite

- (a) Poutre chargée
- (b) Selection du mécanisme
- (c) Calcul des réactions d'appuis
- (d) Tracé du 1er diagramme du Mf
- (e) Tracé du 2ème diagramme
- (f) Obtention du nouveau mécanisme.

L'équation des travaux virtuels donne :

$$\lambda \cdot q \cdot L / 2 * L \cdot \theta / 2 = 3 M_p \cdot \theta$$

d'où 
$$\lambda = 12 M_p / qL^2 \quad ( 3.1 )$$

De la fig.3.1.c on tire l'expression de l'effort tranchant à une distance  $x$  :

$$T = - \lambda qL/2 + M_p/L + \lambda \cdot q \cdot x$$

$T = 0$  quand 
$$\lambda \cdot q \cdot x = \lambda qL/2 - M_p/L \quad ( 3.2 )$$

Les équations ( 3.1 ) et ( 3.2 ) donnent :

$$12 M_p \cdot x / L^2 = 6 M_p / L - M_p / L$$

c.à.d 
$$x_{\text{critique}} = 5 \cdot L / 12 \quad ( 3.3 )$$

La valeur du moment fléchissant est :

$$M(x) = ( \lambda q \cdot L / 2 - M_p / L ) \cdot x - \lambda q \cdot x^2 / 2$$

Pour  $x = x_{\text{critique}}$ , on obtient le moment max qui vaut :

$$M_{\text{max}} = 25 \cdot M_p / 24 \quad ( 3.4 )$$

On peut à présent construire le diagramme du moment fléchissant de la poutre comme l'indique la fig.3.1.d. On remarque que le moment plastique est dépassé, donc le facteur de charge calculé est trop grand.

En réduisant  $\lambda$  à  $\lambda_r$ , on réduit  $M_{\text{max}}$  à  $M_p$  ( fig.3.1.e )

où 
$$\lambda_r = 24/25 \cdot 12 M_p / qL^2$$
$$\lambda_r = 11.52 M_p / qL^2 \quad ( 3.5 )$$

Le domaine de variation de  $\lambda_c$  étant  $\lambda_r \leq \lambda_c \leq \lambda$ , ce qui fera

$$11.52 M_p / qL^2 \leq \lambda \leq 12 M_p / qL^2$$

Ce domaine est suffisamment petit, mais le procédé peut être poursuivi. Un choix logique et évident du mécanisme est à la distance  $5L/12$  de l'appui droit.

De la même manière, les calculs donnent :

$$\lambda = 11,66 M_p / (qL^2) \quad (3-6)$$

Quand  $T = 0$  on a  $x = 0,4142 L$

et  $M_{max} = M_p$  (à 3 décimales près)

$$\lambda = \lambda_c$$

L'exemple montre que l'erreur induite en assumant la rotule plastique à la mi-travée n'est pas trop grande (3% dans cet exemple). Les calculs en cas de poursuite du procédé sont plus longs et plus fastidieux et ceci pour une petite amélioration de la précision.

Toutefois, lors de l'analyse limite, la sélection des mécanismes n'est pas tellement évidente pour les grandes structures.

### 3.3 - LES METHODES PAS A PAS :

Dans ce type de méthode, on suit pas à pas le comportement de la structure et de ses éléments de façon à connaître l'état de la structure à tout instant du chargement, c'est à dire que l'on remplace le comportement non linéaire par une succession de comportements linéaires élémentaires (fig 3-2). Le calcul de la structure y est envisagé comme une succession de calculs élastiques et le chargement s'effectue progressivement jusqu'à la ruine.

Ces méthodes nécessitent des calculs complexes et longs dans le cas de grandes structures ; ce qui oblige à avoir recours à l'ordinateur.

Plusieurs variantes de ces méthodes sont utilisées et parmi lesquelles on cite :

- Les méthodes pas à pas utilisant les matrices tangentes et qui s'apparentent au processus itératif de Newton.
- Les méthodes pas-à-pas du type contraintes initiales
- Les méthodes des matrices sécantes.

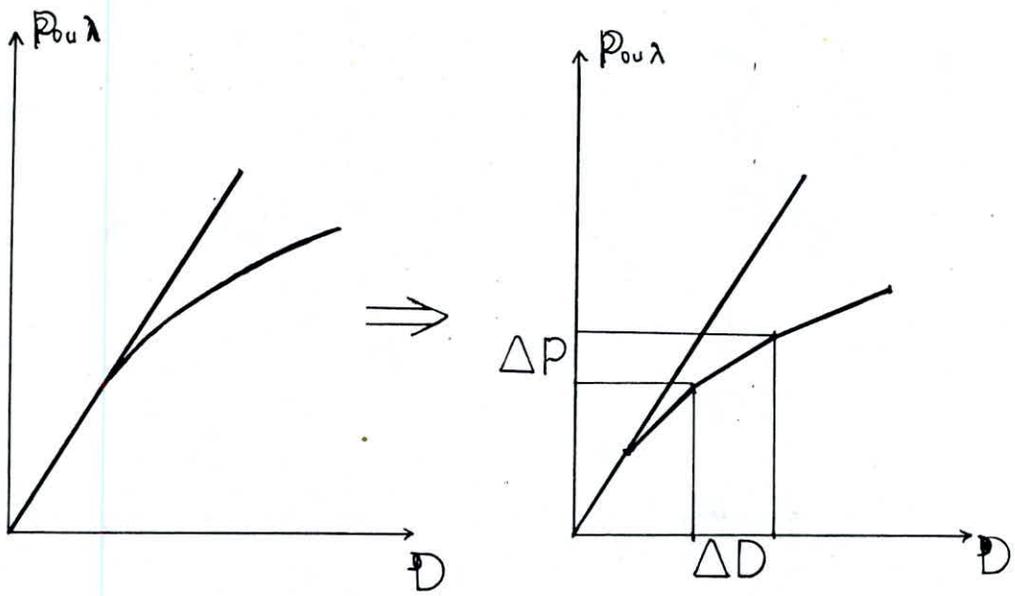


Fig 3-2 - Charge P en fonction des déplacements D.

## PRESENTATION DU PROGRAMME

## 4-1- INTRODUCTION

La grande majorité des programmes d'analyse des structures est basée sur la méthode dite des déplacements qui permet de déterminer les déplacements des noeuds ainsi que les efforts dans chaque élément.

Notre programme s'adresse aux structures planes composées de barres à inertie constante (si la structure à étudier présente des barres à inertie variable, celles-ci doivent être discrétisées en tronçons d'inertie constante). Chacune de ces barres est reliée rigidement au reste de la structure, et est chargée dans son plan. Les charges peuvent être appliquées soit aux noeuds de la structure, soit en travée, c'est-à-dire le long des barres.

Le programme permet de suivre l'évolution de la structure lorsque les charges augmentent de la valeur zéro à la valeur finale. En se référant à la norme du vecteur charges introduit dans les calculs, on fait apparaître le paramètre "multiplicateur de charges" ou "facteur de charges"  $\lambda$ . Pour une valeur donnée de  $\lambda$ , on effectue des itérations pour tenir compte des variations de rigidité dues au caractère non linéaire des lois de comportement.

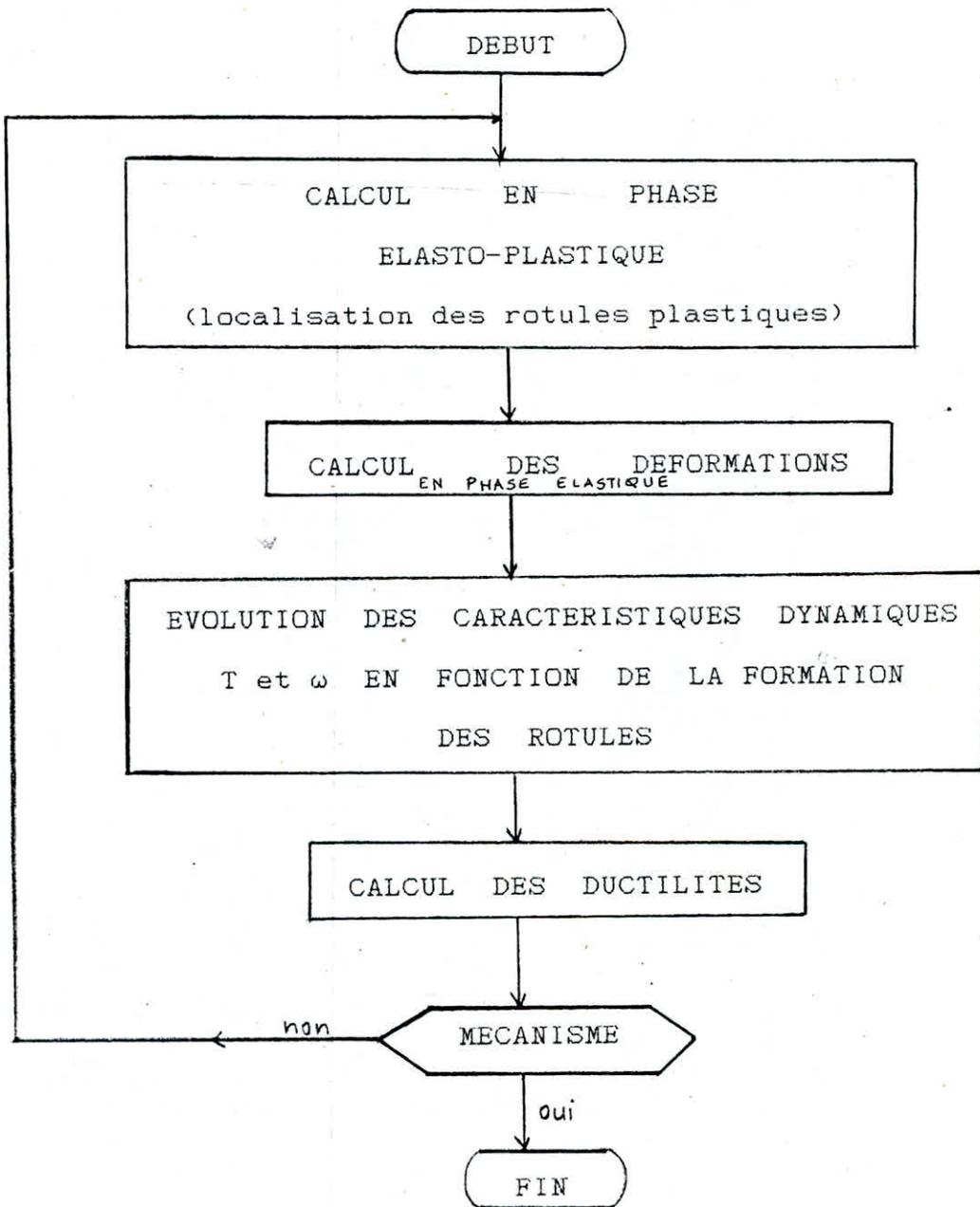
Lorsque le moment fléchissant  $M$  a atteint la valeur plastique  $M_p$ , on considère qu'il y a formation d'une rotule plastique ; on modifie alors la matrice de rigidité élémentaire de la barre siège de rotule(s) plastique(s)

On suppose que le matériau a un comportement élasto-plastique parfait, et la section est considérée comme étant entièrement dans le domaine élastique tant qu'elle n'est pas complètement plastifiée. Cette hypothèse nous permet de réduire le nombre d'itération à deux. En effet, nous avons établi un algorithme qui permet de converger directement sur la rotule plastique, ce qui évite en plus une consommation excessive du temps d'exécution.

Dans un soucis pratique, le programme permet deux extensions. La première est la vérification du non-épuisement des rotules déjà formées. Dans le cas du béton armé on s'assure que  $E_s \leq 10\%$  pour l'acier  $\lambda$  et  $E_b \leq 3,5\%$  pour le béton. La seconde est l'étude de l'évolution des

caractéristiques dynamiques  $T$  et  $\omega$  en fonction de la formation des rotules plastiques.

L'organigramme général adopté est le suivant :



## 4-2 CALCUL EN PHASE ELASTIQUE

Les structures hypertatiques présentent l'avantage d'être plus résistantes et sont donc fréquemment utilisées. Toutefois, la méconnaissance de leur calcul pose des problèmes. Ceci est dû au fait qu'entre les efforts et les déformations existe une interdépendance. Néanmoins, cette difficulté est levée en faisant appel à des méthodes de calcul rigoureuses dites exactes, et parmi lesquelles on distingue :

- La méthode des FORCES
- La méthode des DEFORMATIONS (ou DEPLACEMENTS).

La méthode des forces considère comme inconnues les forces de liaisons surabondantes, alors que les déformations (translation et rotation) constituent les principales inconnues dans la méthode des déplacements. A l'inverse de la méthode des forces qui se prête mieux aux structures moins hypertatiques, la méthode des déformations présente une indétermination de forme réduite, et donc engendre moins d'inconnues pour un certain degré d'hyperstaticité assez grand. Cette méthode est aussi à la base de grands programmes actuels et se prête bien à la programmation.

Nous exposerons la méthode des déplacements qui est à la base de notre programme informatique de calcul.

### 4-2-1- Méthode des déplacements (\*)

Dans cette partie nous allons construire la matrice de rigidité de la structure à partir des matrices de rigidité élémentaires de chaque barre sans tenir compte des conditions d'appuis (ces conditions ne seront prises en compte qu'à la résolution du système d'équations).

Dans le plan, chaque noeud possède trois degrés de liberté  $u$ ,  $v$  et  $\theta$ . Les appuis sont des noeuds dont on supprime certains degrés de liberté. Pour une structure élastique soumise à un système de forces  $F$  induisant des déplacements  $u$ , nous pouvons toujours écrire  $[K] [U] = [F]$  ;  $[K]$  étant la matrice de rigidité de la structure. Les déplacements étant nodaux, les forces doivent être nodales.

---

\*) Pour plus de détails, c.f. Réf. [1]

\* Repère local  
-----

C'est le repère lié à la barre noté  $(x,y)$ , repère propre à chaque barre et qui est défini par la fibre neutre de celle-ci (fig-4-1).

L'axe  $x$  est orienté du noeud début au noeud fin,

L'axe  $y$  est perpendiculaire à l'axe  $x$ .

Dans ce repère, on exprime les efforts  $N,T$  et  $M$ .

\* Repère global :  
-----

C'est le repère lié à la structure entière noté  $(X,Y)$  et qui sert à définir les coordonnées des noeuds. Dans ce repère seront calculés les déplacements des noeuds et les réactions d'appuis (fig-4-1)

Ces deux repères sont liés par une simple rotation.

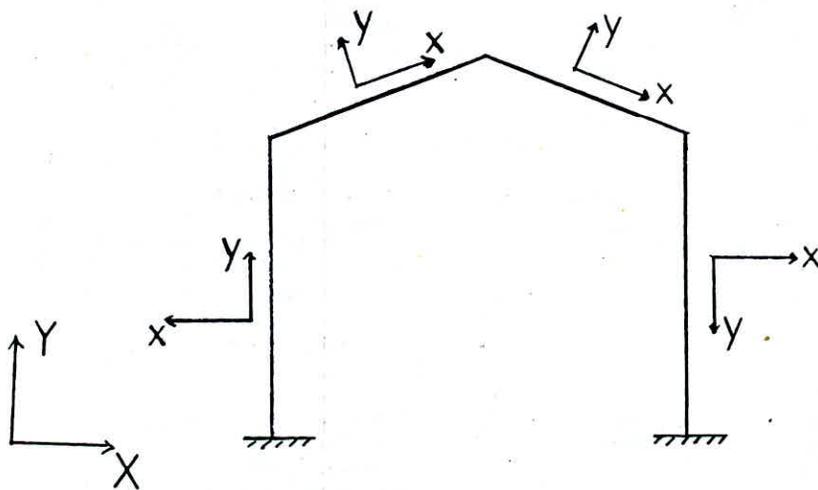


Fig. 4-1 Repère local , repère global

4-2-1-1 Matrice de rigidité d'une barre dans le repère local

La matrice de rigidité d'une barre quelconque (i,j) fig. 4-2 de longueur L, de section A et de rigidité EI exprimée dans le repère local est donnée sous la forme suivante :

$$[k] = \begin{array}{c|ccc|ccc} | & EA/L & 0 & 0 & : & -EA/L & 0 & 0 & | \\ | & & & & : & & & & | \\ | & 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & : & 0 & -12EI/L^3 & 2EI/L^2 & | \\ | & 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & : & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L & | \\ | & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & : & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & | \\ | & -EA/L & 0 & 0 & : & EA/L & 0 & 0 & | \\ | & & & & : & & & & | \\ | & 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & : & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 & | \\ | & 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & : & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L & | \end{array}$$

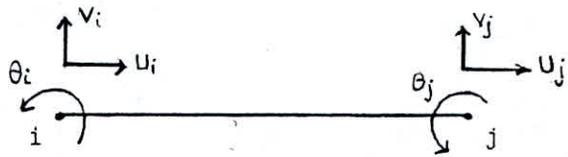


Fig. 4-2 barre i,j  
longueur L, section A, rigidité EI

[k] relie les efforts et les déformations de la barre de la manière suivante :

$$[f] = [k] \times [u]$$

[f] - vecteur force      [u] - vecteur déplacement

$$[f] = \begin{array}{|l} Ni \\ Ti \\ Mi \\ \hline Nj \\ Tj \\ Mj \end{array} \quad [u] = \begin{array}{|l} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ \hline u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{array}$$

\*> Remarques :

a) La matrice de rigidité élémentaire dans le plan est de dimension 6x6 .

b) Elle est carrée et symétrique

c) Tous les éléments diagonaux sont positifs

d) L'effet de l'effort tranchant est négligé alors que l'effet des déformations axiales est pris en compte (1ère et 4ème colonnes)

e) Pour déterminer cette matrice complète, il suffit de connaître une des quatre sous-matrices; les trois autres s'obtiendront ensuite à l'aide de transformations géométriques simples.

Ainsi et par soucis de simplification de son écriture, on la notera  $[ka]$  et la divisera en quatre sous-matrices tel que pour une barre "a" allant du noeud i au noeud j, on aura la notation suivante :

$$[ka] = \begin{bmatrix} | & k a^i & & l a^j & | \\ | & & & & | \\ | & & & & | \\ | & l a^i & & k a^j & | \end{bmatrix}$$

Compte tenu de remarque précédente, la connaissance de la sous-matrice inférieure droite  $[k a^j]$  permet d'obtenir les autres. Pour cela, on définit deux matrices de transformation :

$$[Td] = \begin{bmatrix} | & -1 & 0 & 0 & | \\ | & & & & | \\ | & 0 & -1 & -L & | \\ | & & & & | \\ | & 0 & 0 & -1 & | \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [Tg] = \begin{bmatrix} | & -1 & 0 & 0 & | \\ | & & & & | \\ | & 0 & -1 & 0 & | \\ | & & & & | \\ | & 0 & -L & -1 & | \end{bmatrix}$$

On note que :  $[Td] = [Tg]^t$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} [l a^j] &= [Tg] \times [k a^i] \\ [l a^i] &= [k a^j] \times [Td] \\ [k a^i] &= [l a^j] \times [Td] \end{aligned}$$

#### 4-2-1-2 Matrice de rigidité d'une barre dans le repère global

La matrice de rigidité établie précédemment relie d'une manière linéaire les efforts et les déplacements d'une barre dans le repère local de celle-ci. Ainsi pour pouvoir exprimer cette matrice dans le repère global, il est nécessaire de trouver un moyen de passage du premier repère au second. Il s'agit de la matrice de rotation  $[R]$  définie ci-après :

$$[R] = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ainsi

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$$

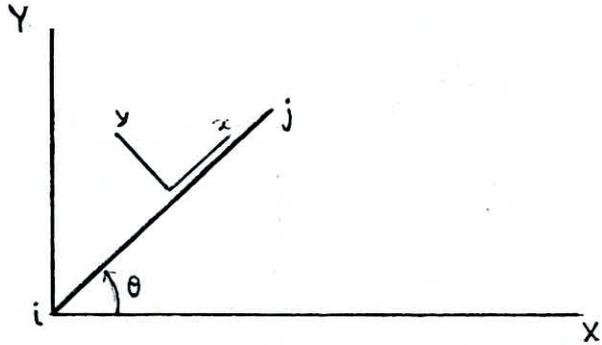


Fig. 4-3 Passage du repère local (x,y) au repère global (X,Y)

Les formules de passage sont :

$$\text{Repère local : } [f_a] = [k_a] \times [u_a] \quad (4-1)$$

$$\text{Repère global : } [F] = [K] \times [U] \quad (4-2)$$

$$\text{or } [f_a] = [R] \times [F] \quad (4-3)$$

$$[u_a] = [R] \times [U] \quad (4-4)$$

(4-1) , (4-3) et (4-4) donnent :  $[R][F] = [k_a][R][U]$

$$\text{ou encore } [R]^{-1}[R][F] = [R]^{-1}[k_a][R][U]$$

$$[F] = [R] [k_a][R][U]$$

Par analogie avec (4-2) ,  $[K] = [R] [k_a][R] \quad (4-5)$

La relation (4-5) exprime la matrice de rigidité de la barre "a" dans le repère global .

$$\text{donc } [K_a^j] = [R]^t [k_a^j] [R]$$

$$[L_a^i] = [R]^t [l_a^i] [R]$$

$$[L^j] = [R]^t [l^j] [R]$$

$$[K^i] = [R]^t [k^i] [R]$$

Sur le plan informatique, ceci se traduit par l'introduction des matrices  $[R]$  et  $[R]^t$ ; le programme se chargera des différentes multiplications matricielles ci-dessus.

#### 4-2-1-3 Etablissement de la matrice de rigidité globale de la structure

L'assemblage de la matrice de rigidité globale de la structure s'effectue en calculant, pour chacune de ses barres les sous-matrices  $[K^i]$ ,  $[L^i]$ ,  $[K^j]$ ,  $[L^j]$  et ensuite :

- additionner les termes  $[K^i]$  et  $[K^j]$  à ceux déjà existants
- placer les termes  $[L^i]$  et  $[L^j]$  à leurs positions respectives

Soit le portique montré sur la fig.4-4 :

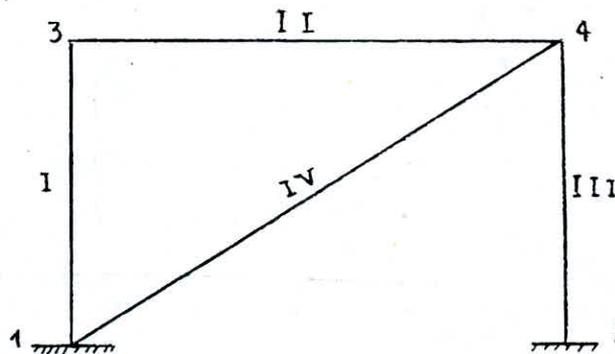


Fig. 4-4 portique à 4 barres et 4 noeuds

Barre I

$$[K_I] = \begin{vmatrix} K_I^1 & L_I^3 \\ L_I^1 & K_I^3 \end{vmatrix}$$

Barre II

$$[K_{II}] = \begin{vmatrix} K_{II}^3 & L_{II}^4 \\ L_{II}^3 & K_{II}^4 \end{vmatrix}$$

Barre III

$$[K_{III}] = \begin{vmatrix} K_{III}^2 & L_{III}^4 \\ L_{III}^2 & K_{III}^4 \end{vmatrix}$$

Barre IV

$$[K_{IV}] = \begin{vmatrix} K_{IV}^1 & L_{IV}^4 \\ L_{IV}^1 & K_{IV}^4 \end{vmatrix}$$

$$[K_{portique}] = \sum_{a=1}^{IV} [K_a]$$

$$[K_{portique}] = \begin{array}{c|cccc} & K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ \hline & K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ \hline & K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ \hline & K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \\ \hline \end{array}$$

avec :

$$\begin{array}{llll} K_{11} = K_I^1 + K_{IV}^1 & K_{12} = 0 & K_{13} = L_1^3 & K_{14} = L_{IV}^4 \\ K_{21} = 0 & K_{22} = K_{III}^2 & K_{23} = 0 & K_{24} = L_{III}^4 \\ K_{31} = L_I^1 & K_{32} = 0 & K_{33} = K_I^3 + K_{II}^3 & K_{34} = L_{II}^4 \\ K_{41} = L_{IV}^1 & K_{42} = L_{III}^2 & K_{43} = L_{II}^3 & K_{44} = K_{II}^4 + K_{III}^4 + K_{IV}^4 \end{array}$$

il en résulte que :

$$[K_{portique}] = \begin{array}{c|cccc} & K_I^1 + K_{IV}^1 & 0 & L_1^3 & L_{IV}^4 \\ \hline & 0 & K_{III}^2 & 0 & L_{III}^4 \\ \hline & L_I^1 & 0 & K_I^3 + K_{II}^3 & L_{II}^4 \\ \hline & L_{IV}^1 & L_{III}^2 & L_{II}^3 & K_{II}^4 + K_{III}^4 + K_{IV}^4 \\ \hline \end{array}$$

\*> Remarques

a) S'il n'y a pas de barres entre deux noeuds i et j, alors les sous-matrices  $[K_{ij}] = [K_{ji}] = 0$

b)  $K_a^i = \sum_a K_a^i$

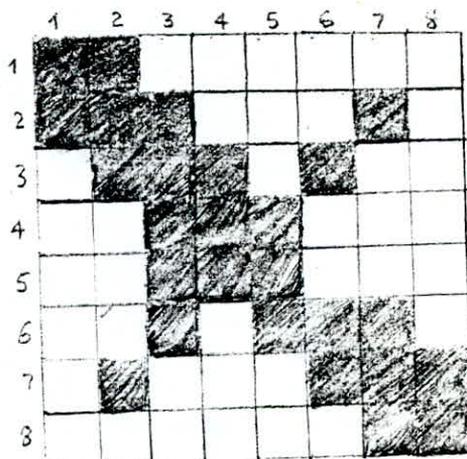
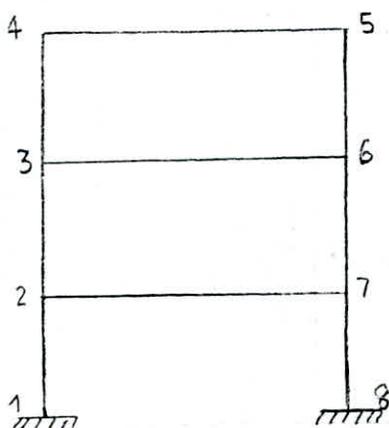
c) si  $i \neq j$ ,  $K_{ij} = L_a^i$  ( ou  $L_a^j$  )

d) la matrice de rigidité de la structure s'obtient donc par assemblage en positionnant correctement les différentes sous-matrices. La sommation ne ce fait que sur les sous-matrices diagonales.

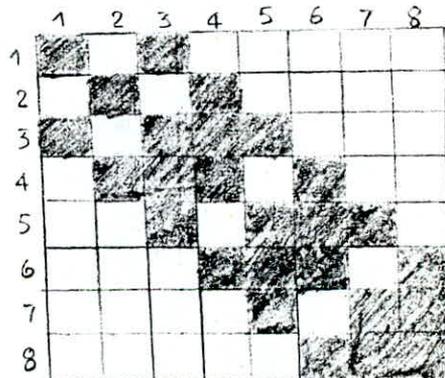
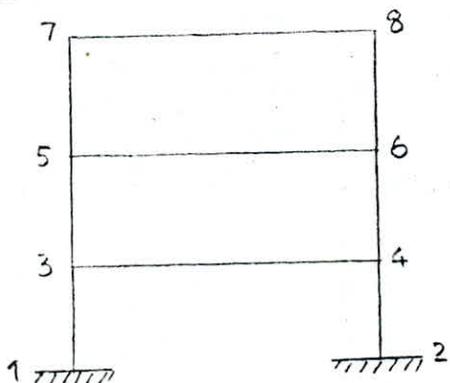
a / Influence de la numérotation des noeuds

D'une façon générale, l'assemblage se fait en considérant les éléments des sous-matrices un par un conformément à la numérotation des noeuds correspondante. Toutefois, les grands programmes de calcul des structures tiennent compte du fait que tous les noeuds ne sont pas reliés les uns aux autres; la matrice globale peut donc être une matrice bande et les gains en capacité du programme et de résolution peuvent être considérables.

Considérons l'exemple suivant :



Cette numérotation est mauvaise, les liaisons horizontales donnent des termes extra-diagonaux, la numérotation ci-dessous est meilleure.



\* ) Propriétés de la matrice de rigidité globale

a) La matrice  $[K]_{portique}$  est symétrique

b) La structure bande de la matrice  $[K]$  est une caractéristique importante; elle permet des économies tant au niveau du stockage de la matrice que dans la résolution du système d'équations final. Quoique le nombre de termes non nuls de  $[K]$  reste constant, la

largeur de bande peut varier considérablement avec l'ordre de numérotation des noeuds . Cette notion de largeur de bande maximale est facilement interprétable au niveau du calcul des structures . En effet , sa valeur  $lb$  correspond au maximum de la différence entre les numéros de deux noeuds reliés par une barre puisque ceci est lié à la présence d'une matrice extra-diagonale non nulle

$$lb = \underset{a}{\text{Max}} | j - i | + 1 \quad i \text{ et } j : \text{ noeuds de la barre a}$$

Nombre d'éléments de la bande =  $3 \times lb$

c) Cette matrice de rigidité est définie positive c.à.d que toutes ses valeurs sont réelles et positives . Nous admettrons cette propriété provenant du fait que cette matrice a été écrite à partir de la fonction d'énergie .

b / Aspect informatique de la matrice de rigidité  
Pratique de stockage en mémoire

Vu l'aspect bande et la symétrie de la matrice  $[K]$  , le stockage de la moitié de la bande nous permettra un gain considérable en mémoire et un temps de résolution plus court .

\* ) Stockage de la matrice demi-bande

Dans le programme informatique établi , il est procédé au stockage uniquement de la demi-bande supérieure . Pour ce faire il est nécessaire de déterminer la position d'un élément de la demi-bande en fonction de sa position dans la matrice globale

Soit une barre  $I_1, I_2$  appartenant à une structure donnée (Fig.4-5)

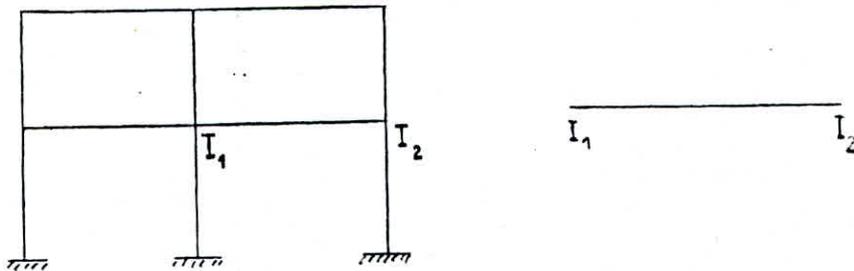
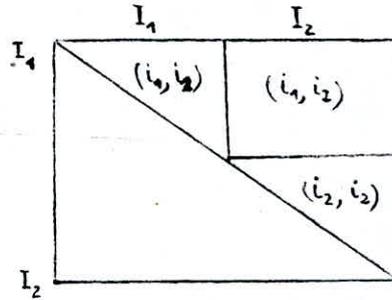


Fig. 4-5 barre  $I_1, I_2$  dans la structure

La matrice de rigidité de cette barre dans la repère global est de la forme suivante :



Pour obtenir la matrice de rigidité globale de la structure , nous additionnons les termes des blocs ayant les mêmes indices .

Soient  $i, j$  les positions d'un élément dans la matrice élémentaire  $[k]$  et soient  $P_i, P_j$  les positions de celui-ci dans la matrice globale ; nous avons les relations suivantes :

1er bloc :  $( i_1 , i_1 )$

$$P_i = ( i_1 - 1 ) \times 3 + i \quad i = 1 \text{ à } 3$$

$$P_j = ( i_1 - 1 ) \times 3 + j \quad j = 1 \text{ à } 3$$

2ème bloc :  $( i_1 , i_2 )$

$$P_i = ( i_1 - 1 ) \times 3 + i \quad i = 1 \text{ à } 3$$

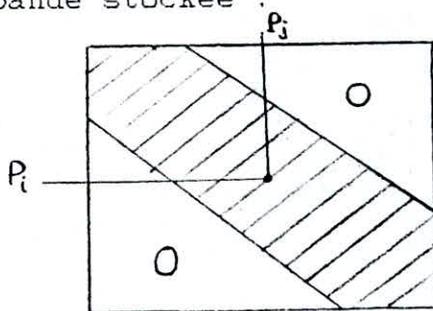
$$P_j = ( i_2 - 1 ) \times 3 + j - 3 \quad j = 4 \text{ à } 6$$

3ème bloc :  $( i_2 , i_2 )$

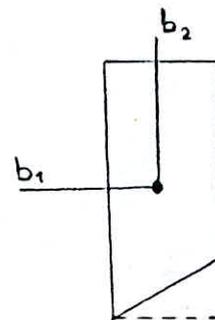
$$P_i = ( i_2 - 1 ) \times 3 + i - 3 \quad i = 4 \text{ à } 6$$

$$P_j = ( i_2 - 1 ) \times 3 + j - 3 \quad j = 4 \text{ à } 6$$

$b_1$  et  $b_2$  étant les coordonnées de l'élément dans la demi-bande stockée .



Matrice de rigidité de toute la structure



Demi-bande stockée

nous avons les relations suivantes :

$$b_1 = P_i$$

$$b_2 = P_j - P_i + 1$$

#### 4-2-1-4 Détermination du vecteur force

Le vecteur force noté  $[F]$  représente le deuxième membre de l'équation d'équilibre  $[K][U] = [F]$

##### a / Equation d'équilibre

La détermination des déplacements se fait en considérant l'équilibre de chaque noeud. Plaçons-nous en un noeud  $i$  auquel arrive un certain nombre de barres.

Soit  $[F_o^i] = [N_o^i \quad T_o^i \quad M_o^i]^t$  le vecteur force appliqué en ce noeud et soit  $[F_a^i] = [N_a^i \quad T_a^i \quad M_a^i]$  le vecteur force provenant des autres barres. L'équilibre s'écrit ( principe de l'action et de la réaction ) :

$$N_o^i = \sum_a N_a^i$$

$$T_o^i = \sum_a T_a^i$$

$$M_o^i = \sum_a M_a^i$$

Soit :  $[F_o^i] = \sum_a [F_a^i]$

or  $[F_a^i] = [R]^t [f_a^i]$

où  $[f_a^i]$  - vecteur force provenant de la barre  $a$  dans le repere local de celle-ci.

Le vecteur  $[f_a^i]$  peut être déterminé à la base du principe de la superposition des états d'équilibre suivants :

déformation sans chargement + chargement sans déformation

$$[f_a^i] = [f_a^i] + [f_a^i]$$

$[f_a^i]$  - terme dû aux déplacements seuls

$[f_a^i]$  - terme dû aux charges seules

Enfin compte tenu de sa définition, nous pourrions exprimer  $[fa^i]$  en fonction des déplacements des extrémités de la barre, soit :

$$[fa^i] = [ka^i][u_a^i] + [la^j][u_a^j]$$

et en exprimant les déplacements  $[u]$  dans le repère global,

$$[u_a^i] = [R][U_a^i]$$

il en résulte :  $[fa^i] = [ka^i][R][U_a^i] + [la^j][R][U_a^j]$

L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$[F_o^i] = \sum_a \left( [R]^t [ka^i][U_a^i] + [R]^t [la^j][R][U_a^j] + [R]^t [fa^i] \right)$$

Les déplacements du noeud  $i$  sont identiques quelque soit la barre aboutissant à ce dernier, et ainsi seront notés  $[U^i]$ . Ainsi la nouvelle formulation de l'équation est :

$$[F_o^i] = \sum_a [R]^t [fa^i] + \left( \sum_a [R]^t [ka^i][R] \right) [U^i] + \sum_a \left( [R]^t [la^j][R][U^j] \right)$$

$$\text{soit : } [F^i] = [F_o^i] - \sum_a [R]^t [fa^i]$$

$$= \left( \sum_a [R]^t [ka^i][R] \right) [U^i] + \sum_a \left( [R]^t [la^j][R][U^j] \right)$$

c.à.d une relation de type :

$$[K][U] = [F]$$

où  $[F]$  représente le vecteur force,  $[U]$  les déplacements des noeuds et  $[K]$  étant la matrice de rigidité globale de la structure.

#### b / Calcul du second membre

Le second membre de l'équation  $[K][U] = [F]$  est le vecteur  $[F]$  qui se décompose en deux parties :

- un terme du aux forces appliquées directement aux noeuds
- un terme du aux forces appliquées sur les barres.

$$\text{Nous avons : } [F^i] = [F_o^i] - \sum_a [Fa^i]$$

$[F_o^i]$  - vecteur force extérieure appliquée aux noeuds ( actions ponctuelles connues ou réactions d'appuis inconnues ).

$[Fa^i] = [R]^t [fa^i]$  : forces résultant des charges appliquées sur les barres en considérant celles-ci sans déplacements ( terme toujours connu ).

Il en résulte que  $[F^i]$  est parfaitement connu pour les noeuds non appuis et inconnu pour les noeuds appuis.

#### 4-2-1-5 Conditions aux limites

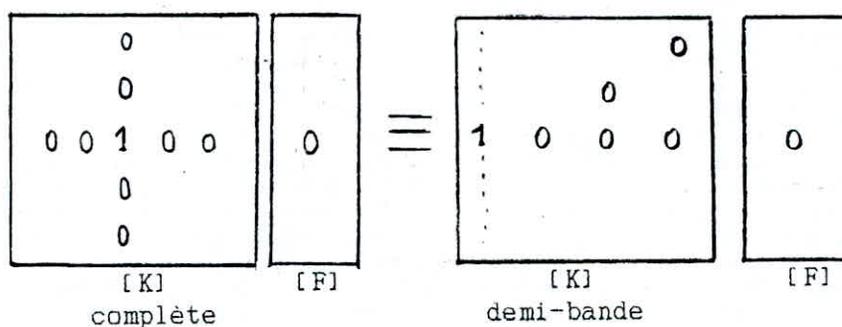
Nous venons de voir que le vecteur force était complétement déterminé pour tous les noeuds non appuis , cependant pas pour les noeuds appuis . Le but de notre formulation étant toutefois de rechercher les déplacements des noeuds , nous pouvons supprimer les équations correspondant aux noeuds appuis ayant des déplacements connus ( nuls ou imposés ) : ce sont les conditions aux limites .

Plusieurs méthodes nous permettent de mener à bien ce problème et de ce fait , nous avons retenu la méthode dite "méthode du terme unité sur la diagonale " . Il s'agit de conserver la disposition de la matrice tout en remplaçant les lignes et les colonnes correspondant aux noeuds appuis par des 0 en mettant toutefois un 1 sur le terme diagonal ( afin d'éviter que la matrice soit singulière ) . De même , un 0 sera placé sur la ligne correspondante du vecteur force .

Ainsi , si  $U_i$  est l'inconnue du déplacement , il sera question de résoudre l'équation

$$1 \times U_i = 0 \text{ d'où } U_i = 0 ;$$

ce qui est le résultat attendu pour un appui .



Cette manière de programmer a l'avantage outre sa simplicité de ne pas bouleverser l'ordre de la matrice

#### 4-2-1-6 Résolution du système d'équations

Nous avons à résoudre à présent le système d'équations suivant :

$$[K] [U] = [F]$$

$[K]$  et  $[F]$  étant complètement déterminés après avoir introduit les conditions aux limites .

A ce sujet , nous pouvons constater qu'il serait intéressant de connaître directement la matrice inverse de la matrice  $[K]$  c.à.d  $[K]^{-1}$  . Cette résolution permettra une fois  $[K]^{-1}$  et  $[F]$  connues de déterminer directement  $[U]$  à partir de

$$[U] = [K]^{-1} [F]$$

Toutefois , sur la base des algorithmes développés , l'expérience montre qu'il est nettement plus simple et plus rapide de résoudre un système d'équations plutôt que de calculer une matrice inverse . A ce sujet plusieurs méthodes , qu'elles soient directes ou itératives , existent dans la littérature .

Parmi les méthodes directes , nous pouvons citer la méthode de substitution de Gauss qui consiste à exprimer successivement chacune des inconnues en fonction des autres , puis remplacer cette inconnue par son expression dans les autres équations .

Une autre méthode est celle de Cholesky dont le principe est de décomposer la matrice en un produit d'une matrice triangulaire inférieure  $[L_i]$  , une matrice diagonale  $[D]$  et une matrice triangulaire supérieure  $[L_s]$  ; soit donc :

$$[K] = [L_i] [D] [L_s]$$

Il existe aussi la méthode de Gauss-Seidel qui fait partie cette fois-ci des méthodes itératives . A partir de valeurs approximatives initiales  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ , on obtient d'autres valeurs successives  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$  jusqu'à la  $k$ ème itération  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ . Des corrections successives se font en minimisant l'erreur . Il est donc clair que le nombre d'itérations dépend étroitement de la précision fixée , autrement dit , le temps machine est d'autant plus long que la valeur de cette précision est plus petite .

#### 4-2-1-7 Calcul des efforts internes

Le calcul des efforts internes est basé sur le principe de superposition des deux états d'équilibre :

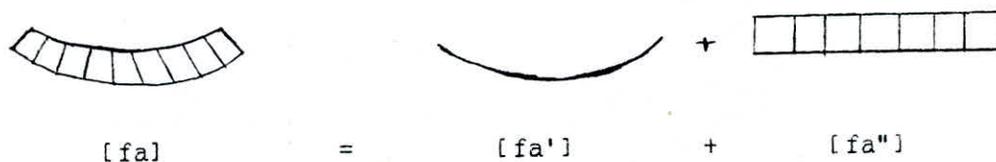
- chargement sans déformations
- déformations sans chargement

ceci peut être formulé comme suit :

$$[fa] = [fa'] + [fa'']$$

$[fa'']$  - chargements sur la barre sans déformations

$[fa']$  - efforts dus aux déformations de la barre sans qu'elle ne soit chargée .



Le terme  $[fa']$  est donné pour le noeud  $i$  par la relation

$$[fa'^i] = [ka^i] [R] [Ua^i] + [la^i] [R] [Ua^j]$$

et de façon similaire pour l'autre extrémité  $j$

De ce fait , les efforts dans les barres sont complètement calculés aux deux extrémités

$$[fa^i] = [ka^i] [R] [U^i] + [la^i] [R] [U^j] + [fa''^i]$$

Le calcul des efforts dans les barres est relativement simple une fois les déplacements des noeuds connus . Toutefois , il est indispensable de conserver intact le terme  $[fa'']$  .

#### 4-2-1-8 Calcul des réactions d'appuis

Le calcul des réactions d'appuis consiste en fait à réécrire l'équilibre du noeud ( principe de l'action et de la réaction )

$$[F_0^i] = \sum_a [R] [fa^i]$$

De ce fait , nous pouvons calculer les réactions d'appuis recherchées en écrivant la simple égalité ci-dessus en chaque noeud . D'autre part , pour les noeuds non appuyés , nous retrouvons les forces qui leurs étaient directement appliquées

#### 4-2-2 Notations utilisées - Organigrammes

##### 1) Lecture des données : LECT

- \* ) Nœuds : Définis leur nombre **NN** , coordonnées  $X_i$  et  $Y_i$  de chaque nœud ( dans le repère global ) ainsi que du code appui **KAPP** ( nœud appui ou non ) .
- \* ) Barres : Définies par leur nombre **NB** , leurs nœuds débuts et fins et leurs propriétés ( section , inertie , module de Young )
- \* ) Charges : Définies par leur nombre **NCHA** , type , position , intensité et direction .

##### Nœuds :

Lire leur nombre **NN**

```

[ i = 1 , NN
  X(i) |
  Y(i) |          tableau des coordonnées
  KAPP(i) : code appui      | KAPP(i) = 0 → appui
                              | KAPP(i) = 1 → non appui
[ i = i + 1
```

##### Barres :

Lire leur nombre **NB**

```

[ j = 1 , NB
  JDEB(j)      noeud début de la barre j
  JFIN(j)      noeud fin de la barre j
  SECT(j)      section de la barre j
  AINE(j)      inertie de la barre j
  EYOUN(j)     module de Young de la barre j
[ j = j + 1
```



\*) EFB(6,j) - efforts internes dans les barres

EFB(1,j) et EFB(4,j) - efforts normaux respectivement aux noeuds début et fin de barre j

EFB(2,j) et EFB(5,j) - efforts tranchants respectivement aux noeuds début et fin de la barre j

EFB(3,j) et EFB(6,j) - moments aux noeuds début et fin de la barre j

\*) DPND(3,j) - déplacements des noeuds j

DPND(1,j) - déplacement axial  $u_j$

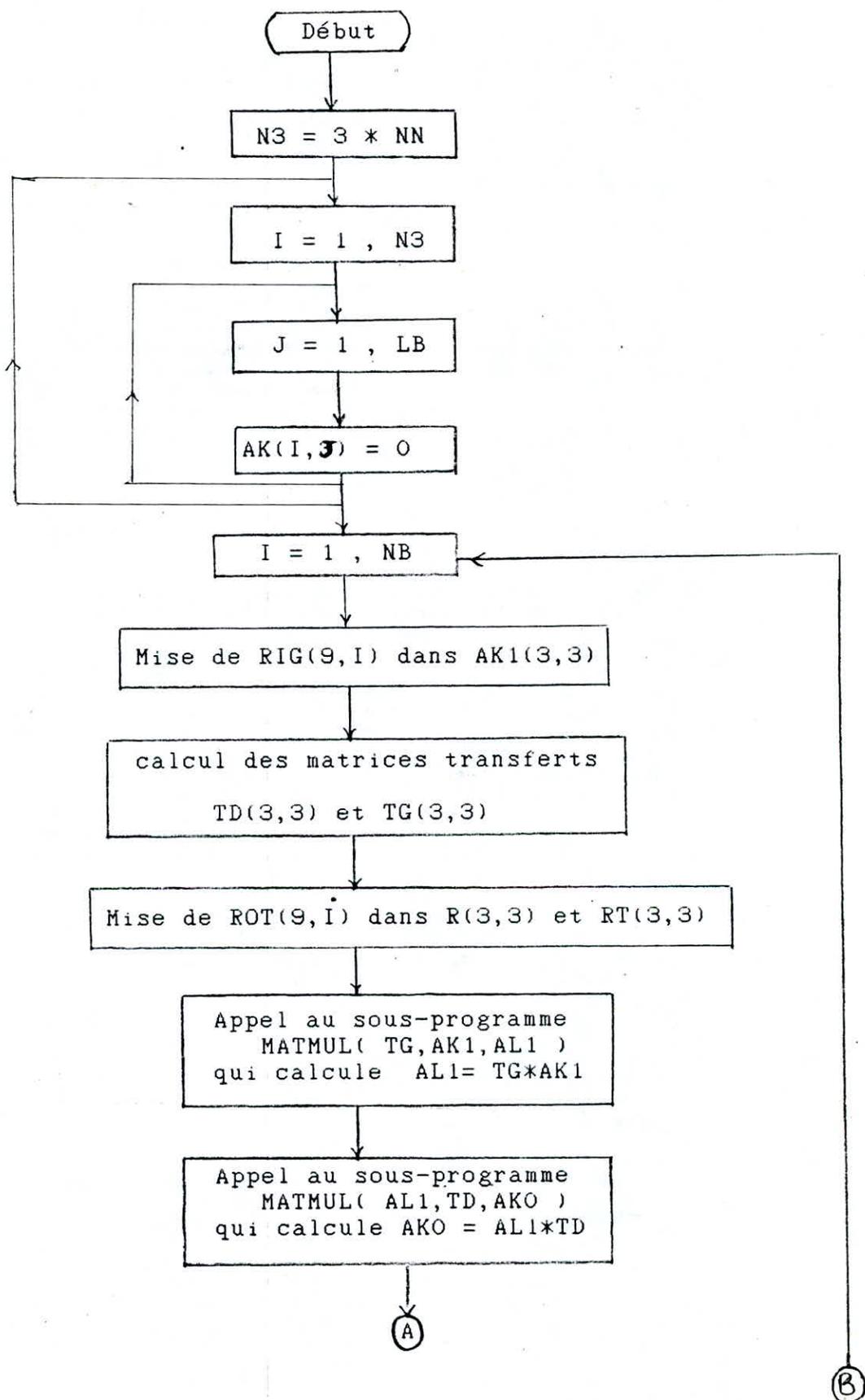
DPND(2,j) - déplacement latéral  $v_j$

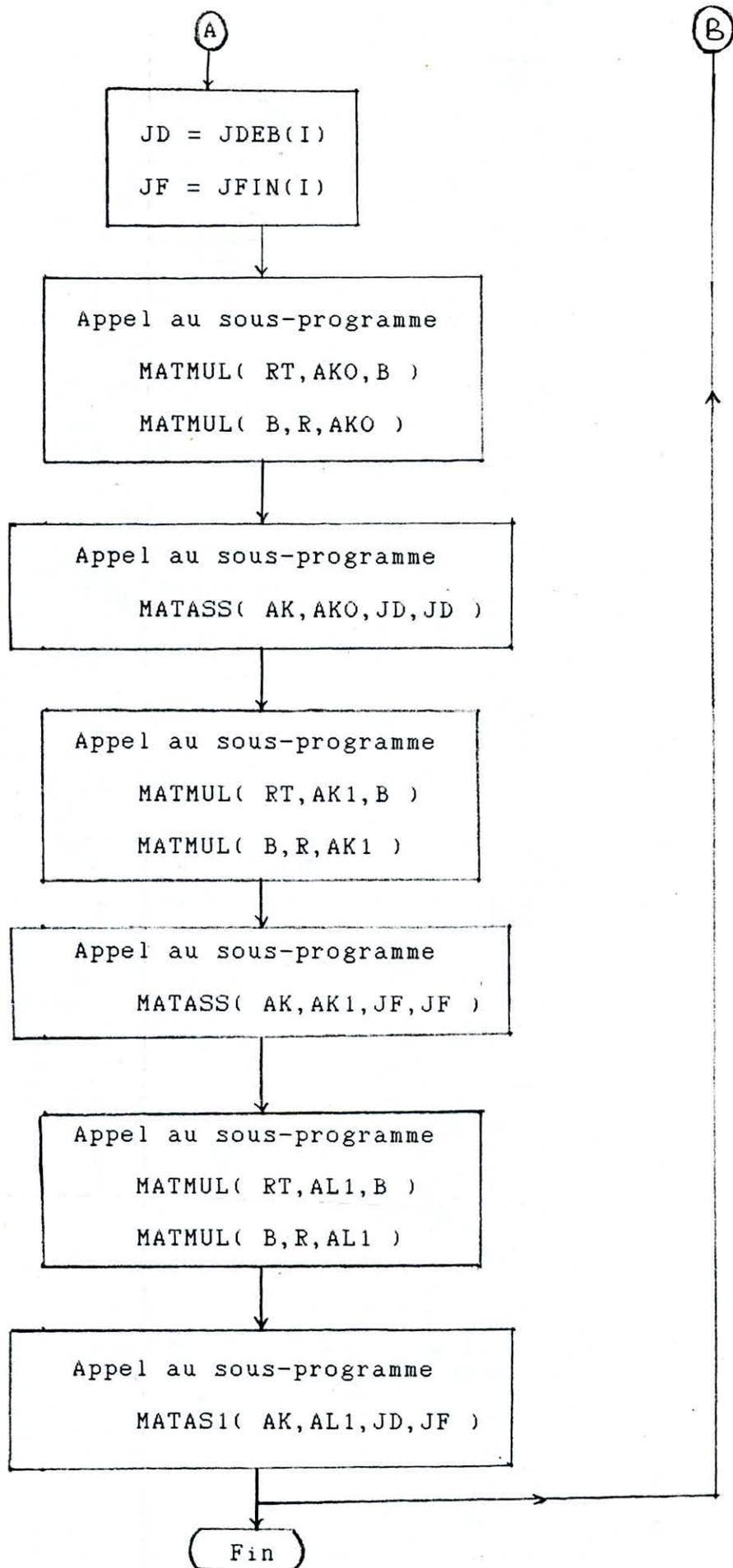
DPND(3,j) - rotation  $\theta_j$

\*) FND(3,j) - forces directement appliquées aux noeuds j

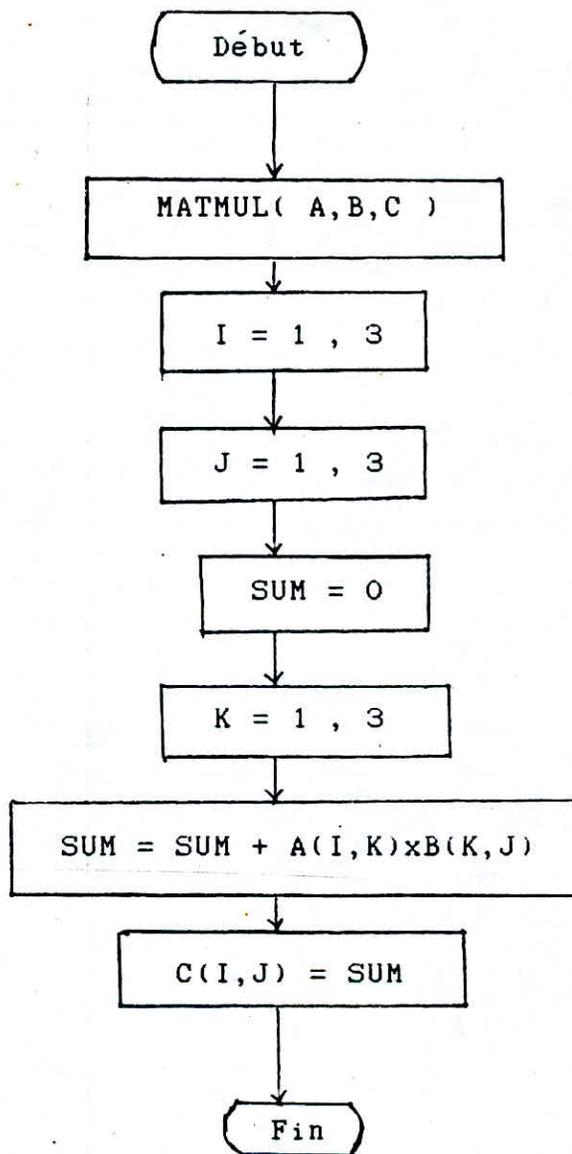
Nous jugeons qu'il n'est pas nécessaire de présenter les organigrammes correspondant aux différentes procédures de calcul, toutefois nous détaillerons sur la manière d'assembler et de stocker la matrice demi-bande, de la prise en compte des conditions aux limites ainsi que la résolution du système d'équations Gauss-bande.

Assemblage de la matrice de rigidité demi-bande [AK] :  
'ASSEMB'

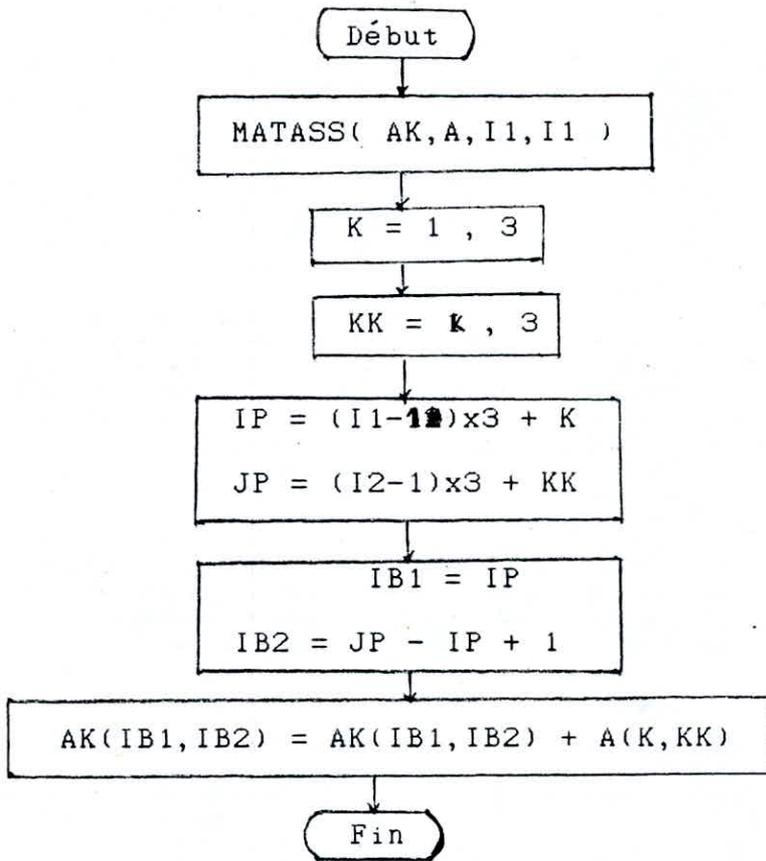




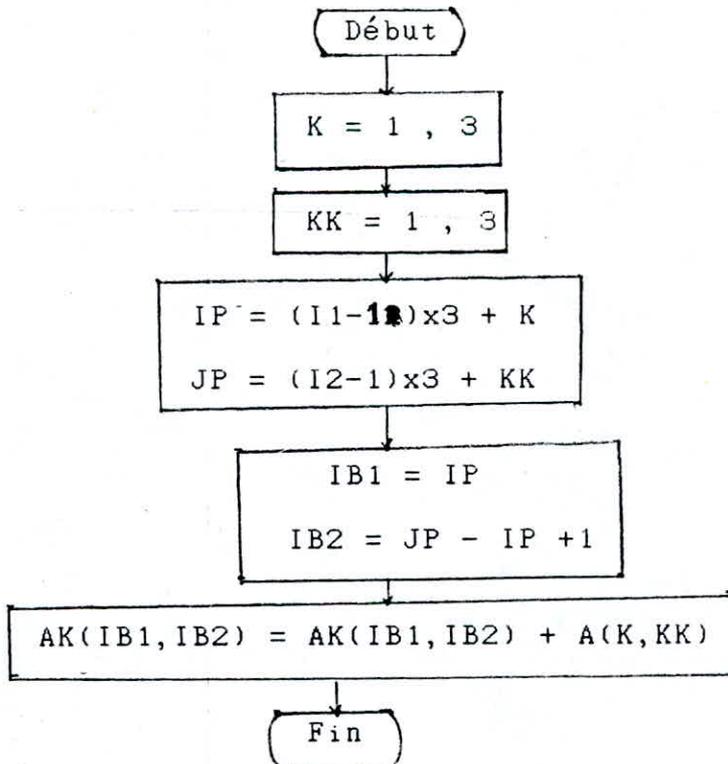
Sous-programme MATMUL( A,B,C ) de multiplication de matrices 3x3



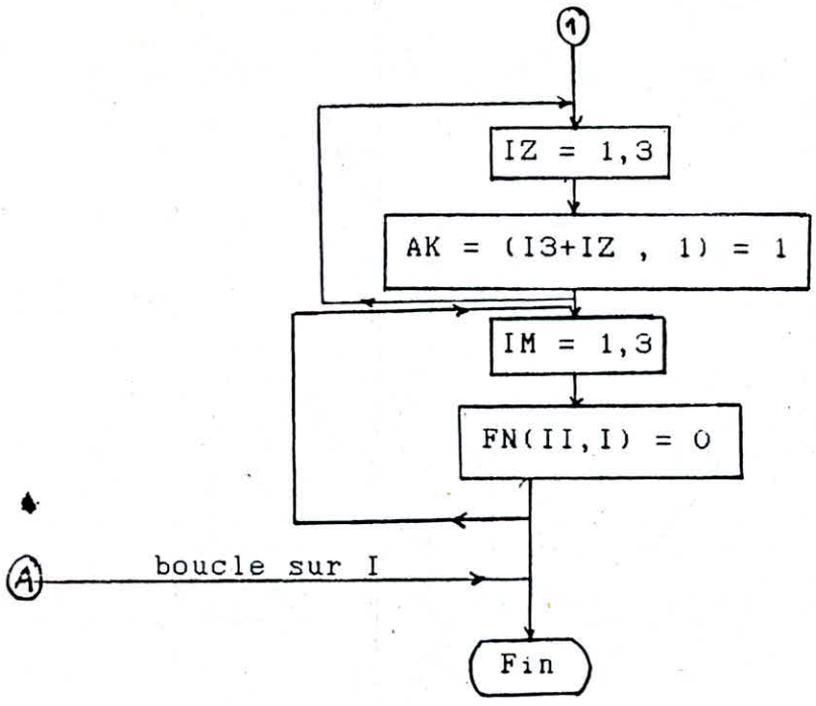
Sous-programme MATASS( AK,A,I1,I2 ) d'addition en matrice demi-bande



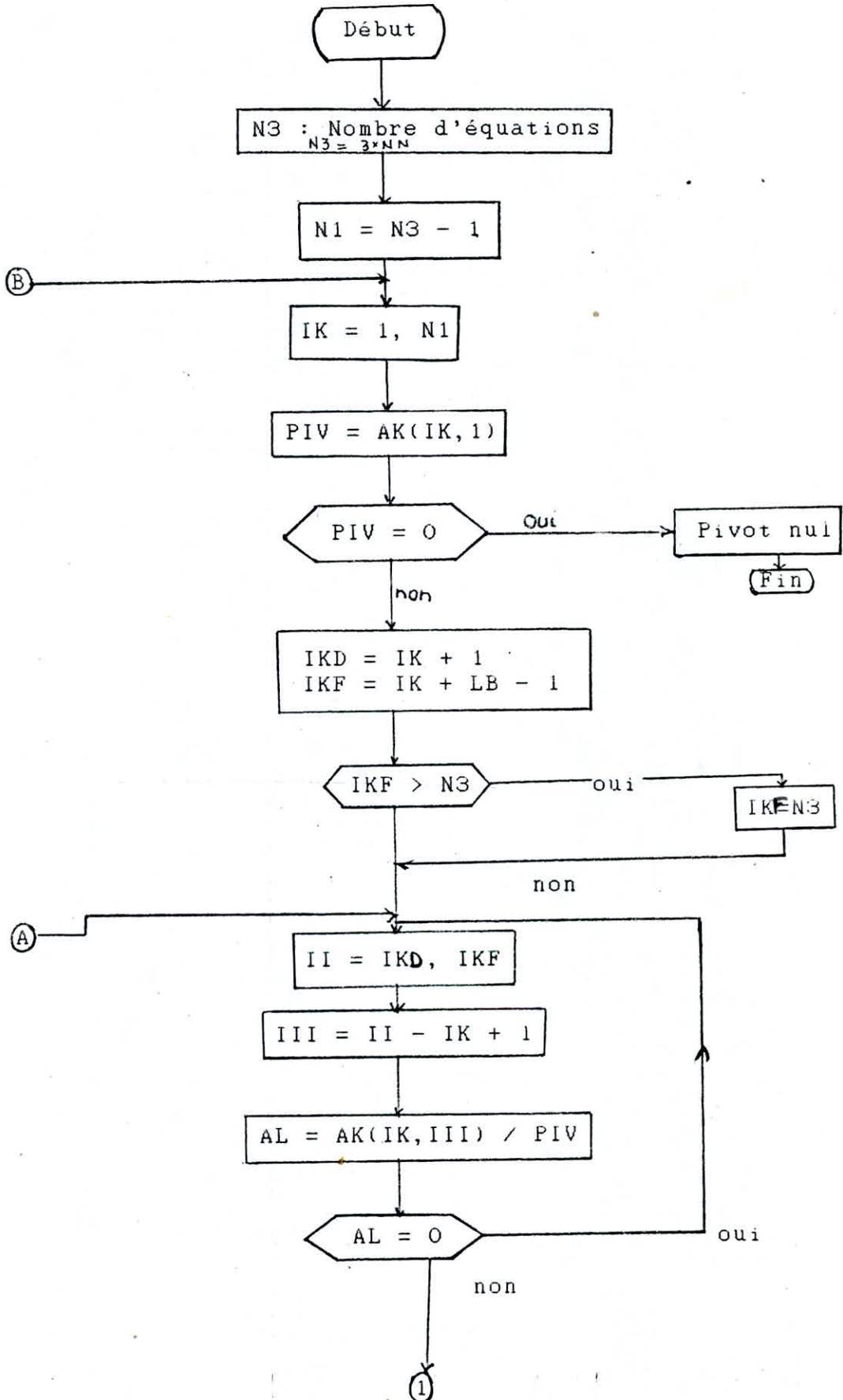
Sous-programme MATAS1( AK,A,I1,I2 ) qui additionne seulement AL1(3,3)

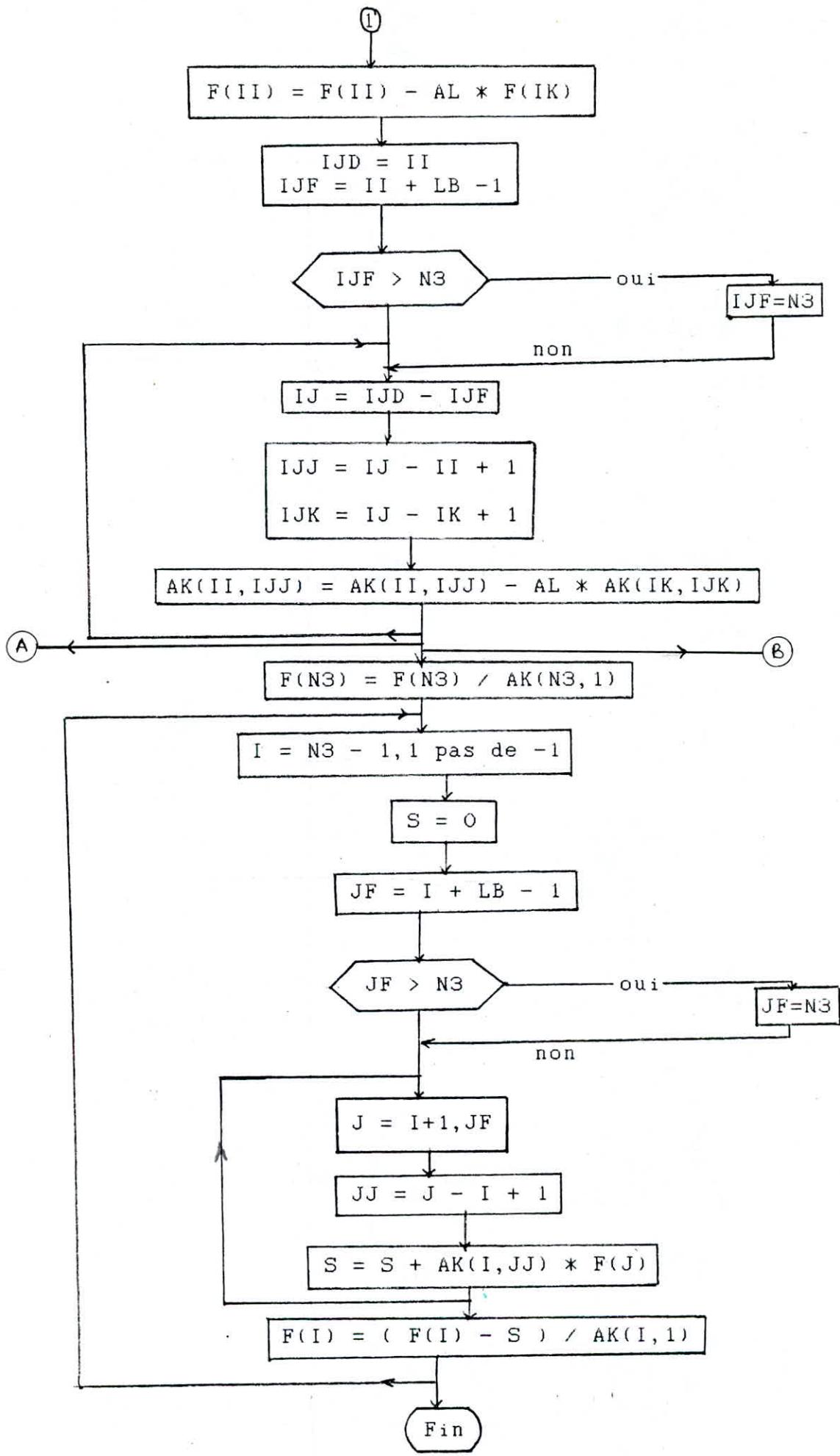






Résolution du système d'équations  $[K][U] = [F]$





### 4-3- CALCUL EN PHASE ELASTO-PLASTIQUE

Comme nous l'avons signalé auparavant, le calcul en phase élasto-plastique se présente comme une succession de calculs à l'état élastique auxquels nous avons apporté certaines modifications notamment dans les matrices de rigidités élémentaires des barres après plastification d'une ou des deux extrémités. La matrice de rigidité globale de la structure est automatiquement corrigée par l'opération d'assemblage. Cette structure est soumise à un système  $\lambda^{\text{de charge}} P_1, \lambda P_2, \dots, \lambda P_n$  qui croissent toutes proportionnellement. Le problème à résoudre est en fait de prédire le comportement de la structure quand  $\lambda$  augmente jusqu'à la ruine qui se produit soit par mécanisme global ou local. Ceci est en effet l'avantage qu'offre la méthode pas-à-pas.

#### 4-3-1- Degré d'hyperstaticité

Le nombre de liaisons surabondantes constitue le degré d'hyperstaticité. Il est égal à la différence entre le nombre total de liaisons et celui des équations d'équilibre statique que l'on peut écrire.

Le degré d'hyperstaticité est donné par la formule :

$$dH = - (3b - 3r - 2a - l)$$

b - nombre de barres de la structure

r - nombre de noeuds rigides

a - nombre d'articulations

l - nombre de liaisons extérieures simples.



$$l = 1$$



$$l = 2$$



$$l = 3$$

Comme nous étudions des structures à noeuds rigides, il en résulte que :

$$dH = - (3b - 3r - l)$$

Sauf exception (mécanisme local), la structure est réduite au mécanisme lorsque  $nr = dH + 1$  où  $nr$  est le nombre de rotules.

4-3-2- Modification des rigidités élémentaires due au développement des rotules plastiques.

Si une rotule plastique se développe au niveau d'une extrémité ou de l'autre d'une barre ou les deux à la fois, la matrice de rigidité de celle-ci est modifiée de sorte que le moment fléchissant résultant en cette rotule reste constant et n'augmente plus. C'est donc cette matrice de rigidité modifiée qui servira lors de l'assemblage de la matrice globale de la structure.

i) Rotule à l'extrémité gauche de la barre (fig 4-6-a):

La matrice de rigidité élémentaire [kg] est la suivante :

$$[kg] = \begin{array}{|cccccc|} \hline & EA/L & & & & \\ \hline & 0 & 3EI/L^3 & & & SYMETRIQUE \\ \hline & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & \\ \hline & 0 & -3EI/L^3 & 0 & 0 & 3EI/L^3 \\ \hline & 0 & 3EI/L^2 & 0 & 0 & -3EI/L^2 & 3EI/L \\ \hline \end{array}$$

ii) Rotule à l'extrémité droite de la barre (fig 4-6-b)

La matrice de rigidité élémentaire [kd] est cette fois ci:

$$[kd] = \begin{array}{|cccccc|} \hline & EA/L & & & & \\ \hline & 0 & 3EI/L^3 & & & SYMETRIQUE \\ \hline & 0 & 3EI/L^2 & 3EI/L & & \\ \hline & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & \\ \hline & 0 & -3EI/L^3 & -3EI/L^2 & 0 & 3EI/L^3 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

iii) Rotule aux deux extrémités de la barre (fig 4-6-c)

A ce stade, la matrice élémentaire [kgd] est réduite uniquement à la rigidité axiale.

$$[kgd] = \begin{array}{ccccccc}
 & & EA/L & & & & \\
 & & | & & & & | \\
 & & 0 & 0 & & & SYMETRIQUE \\
 & & | & & & & | \\
 & & 0 & 0 & 0 & & | \\
 [kgd] = & & | & & & & | \\
 & & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & | \\
 & & | & & & & | \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & | & & & & | \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

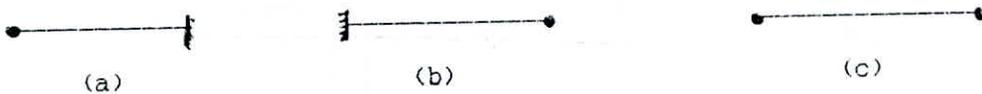


Fig 4-6- Différents cas de rotulation d'une barre  
a) rotule au noeud début, (b) rotule au noeud fin, (c) rotules aux deux extrémités.

Rappelons que l'assemblage de la matrice de rigidité globale s'effectue de la même manière que celle décrite en phase élastique.

#### 4-3-3- Algorithme de convergence

La méthode pas-à-pas étant une succession de calculs élastiques, l'évolution de la structure peut être représentée par une suite de petits tronçons linéaires correspondant à la formation de chaque rotule plastique. Le chargement est appliqué d'une manière incrémentale en faisant croître le facteur de charge d'un pas  $\Delta\lambda$  suffisamment petit et en comparant le moment à chaque extrémité de barre au moment plastique. Les itérations sont répétées jusqu'à ce que le moment plastique soit atteint dans une barre. Cependant, il existe une relation linéaire entre le facteur de charge et le moment qu'il crée. Sur un tronçon linéaire quelconque (fig 4-8), on peut, connaissant deux valeurs  $\lambda_{i_1}$  et  $\lambda_{i_2}$  correspondant respectivement à deux moments  $M_{i_1}$  et  $M_{i_2}$ , obtenus après deux itérations et à l'aide d'une formulation mathématique simple,

atteindre la charge  $\lambda_p$  causant la rotule plastique en un noeud en donnant un moment égal au moment plastique  $M_p$  en ce noeud. Ceci permet d'atteindre directement la rotule après trois itérations .

Une rotule ne reprend pas de moment . Quand une rotule est formée , le moment doit rester constant et égal à  $M_p$  . D'autre part , la matrice de rigidité de la structure change ( diminue ) , d'où la nécessité de procéder comme suit :

Refaire démarrer à chaque fois qu'une rotule se forme le facteur de charge  $\lambda$  de zéro à la valeur de la prochaine rotulation ; ceci se traduit géométriquement par un changement de repère ( fig.4-8 ) .

Pour  $\lambda = 0$  à  $\lambda_1$  (1ère rotule) , calculer la rigidité  $[K_1]$  , les efforts

$$[F_1] = \begin{pmatrix} N_1 \\ T_1 \\ M_1 \end{pmatrix}$$

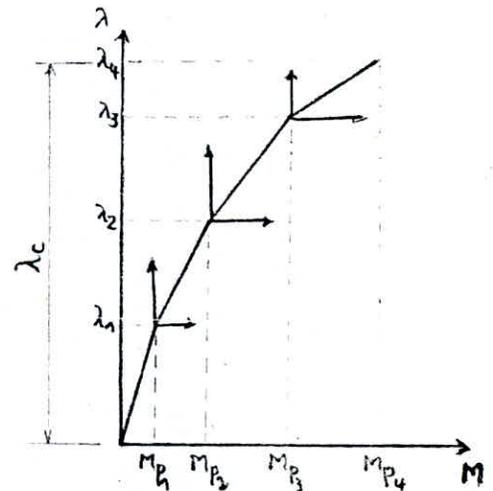
Pour  $\lambda = 0$  à  $\lambda_2$  (2ème rotule) , calculer la rigidité  $[K_2]$  , les efforts  $[F_1] + [F_2]$

De même pour  $\lambda = 0$  à  $\lambda_3$  , on a  $[K_3]$  et  $[F_1] + [F_2] + [F_3]$

Les calculs se poursuivent ainsi jusqu'à l'obtention du mécanisme correspondant à la charge de ruine

$$\lambda_c = \sum_i \lambda_i$$

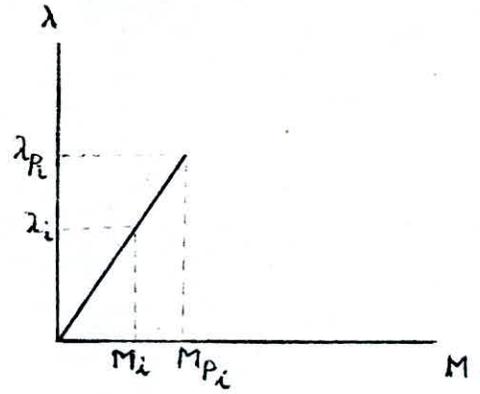
fig. 4-8 changement de repère après chaque apparition de rotule



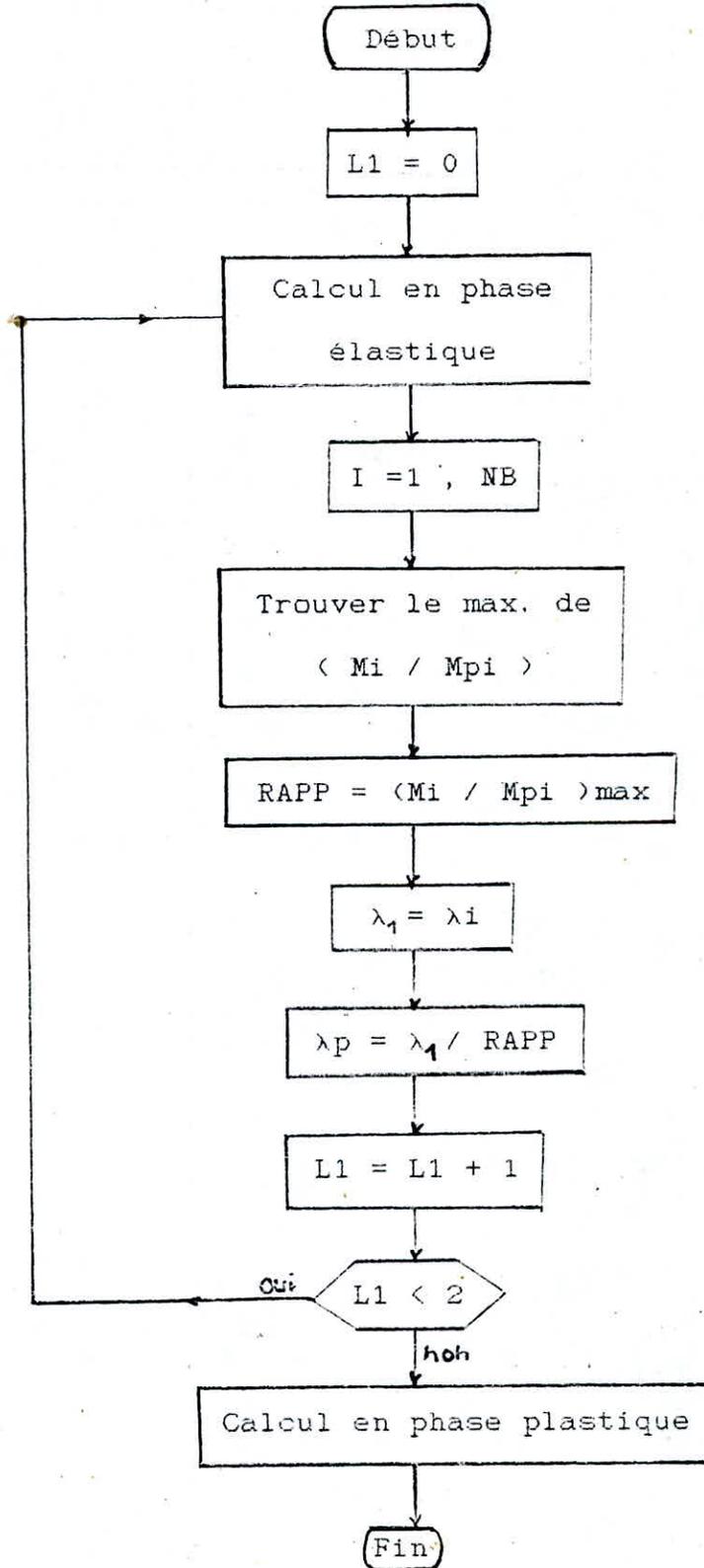
Toutefois , la fig.4-8 montre qu'à chaque changement de repère , la courbe élastique linéaire passe par l'origine à chaque apparition d'une nouvelle rotule , par conséquent , le nombre d'itérations peut être réduit à deux ; ce qui peut se traduire de la façon suivante :

$$\lambda_{pi} = M_{pi} \times \lambda_i / M_i$$

fig.4-9  $\lambda = f(M)$



Organigramme de convergence :



#### 4-3-4 Données pour le calcul plastique

Le calcul en phase plastique nécessite des données supplémentaires à introduire en lecture des données .

DELTA2 - valeur introduite initialement du facteur de charge  $\lambda$

DELTA1 - valeur incrémentale du facteur de charge

PAS - pas incrémentant DELTA1

PLASMO(2,i) - moments plastiques  $M_p$  aux début et fin de la barre i

Notons que les points d'application des charges concentrées doivent être considérés comme des noeuds et ainsi numérotés de la même façon que les autres ; il en est de même pour les points de chargements brusques des sections transversales .

Le programme localise les points de formation des rotules plastiques et les calcule .

#### \* ) Variables supplémentaires

DH - degré d'hyperstaticité

NR - nombre de rotules plastiques

RU - facteur de charge de ruine

RIG1(9,i) - sous-matrice de rigidité inférieure droite  
cas d'une barre i plastifiée en ses deux noeuds extrémités

RIG2(9,i) - cas d'une barre plastifiée en son noeud début

RIG3(9,i) - cas d'une barre plastifiée en son noeud fin

EFFD - valeur du moment au début de la barre i

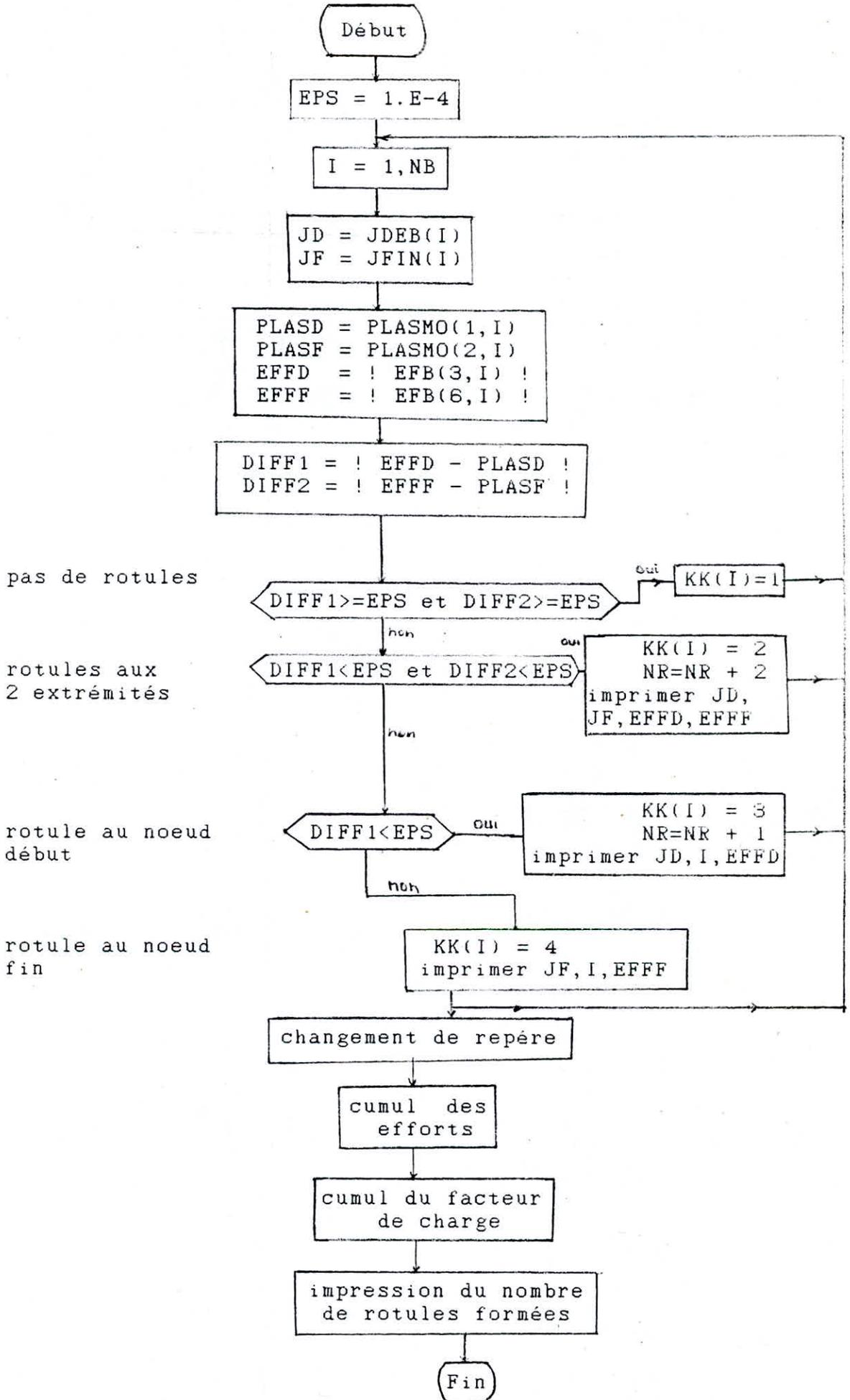
EFFF - valeur du moment à la fin de la barre i

KK(i) - code permettant de localiser la rotule

          | 1 pas de rotule  
          | 2 rotule aux deux extrémités de la barre i  
KK(i) = |  
          | 3 rotule au noeud début de la barre i  
          | 4 rotule au noeud fin de la barre i

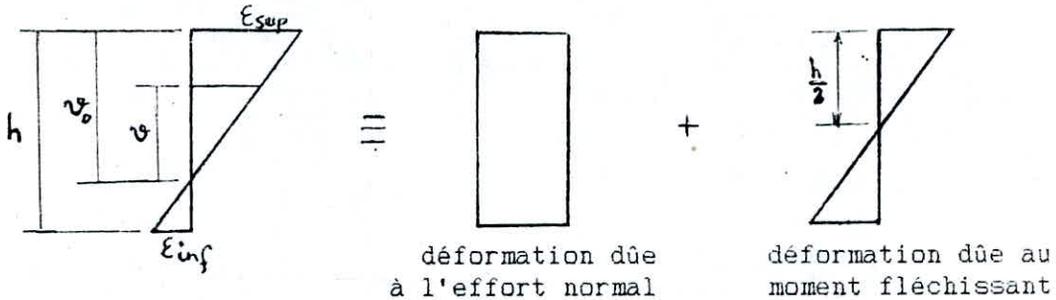
Ce code nous servira lors de l'assemblage de la matrice de rigidité pour sélectionner les matrices élémentaires selon les cas qui se présentent .

organigramme de calcul en phase plastique



#### 4-4 CALCUL DES DEFORMATIONS

Dans cette partie , nous nous intéresserons au calcul des déformations à l'état élastique des éléments de la structure connaissant les efforts auxquels elle est soumise . Dans le cas général d'une section homogène soumise à la flexion composée , le diagramme des déformations est le suivant :



Les contraintes étant proportionnelles aux déformations , elles sont reliées de la façon suivante :

$$\epsilon = \sigma / E = \frac{\text{contrainte}}{\text{module d'élasticité longitudinal}}$$

$\sigma$  est donnée par la formule :

$$\sigma = M \times v / I + N / A$$

$M \times v / I$  - contrainte due au moment de flexion

$N / A$  - contrainte due à l'effort normal

Dans le cas le plus défavorable , on calcule les déformations pour les fibres extrêmes c.à.d à  $v = v_0 = \pm h / 2$  ; il s'en suit que :

$$\epsilon = ( M \times h / 2I + N / A ) / E \quad \text{pour les fibres supérieures}$$

$$\epsilon = ( - M \times h / 2I + N / A ) / E \quad \text{pour les fibres inférieures}$$

Les déformations peuvent être calculées et comparées à des valeurs ultimes à chaque itération . Ceci permet de détecter des ruptures locales de fragilité ( déformabilité limitée ) . Ceci est un autre avantage de la méthode pas-à-pas .

## 4-5 ETUDE DYNAMIQUE

### 4-5-1- Introduction

La dynamique des structures a pour objet le calcul et l'étude du comportement des structures soumises aux ondes sismiques ou aux vibrations. Les structures généralement caractérisées par une masse et une élasticité peuvent effectuer des mouvements sous l'action des sollicitations dynamiques. Si le mouvement est répétitif, il est appelé vibration.

Généralement, on comprend par action dynamique la sollicitation produite par des charges qui varient rapidement avec le temps et qui contribuent à l'apparition des forces d'inerties.

L'objectif de cette partie est la détermination des caractéristiques dynamiques : pulsations propres et périodes propres de notre système oscillant. Ceci nous permet de suivre l'évolution de ces caractéristiques en fonction de l'apparition des rotules plastiques dans la structure. Pour cela, nous utiliserons la méthode pseudo-dynamique qui consiste en la recherche du maximum de réponse sur chacun des modes propres (superposition modale).

### 4-5-2- Modélisation mathématique

La détermination d'un modèle tenant compte le plus correctement possible de la masse et de la raideur de tous les éléments d'une structure est une phase essentielle pour l'étude de la réponse à des chargements dynamiques en particulier le séisme.

La modélisation consiste à répartir la masse de la structure en un nombre fini de points. On admet les hypothèses suivantes:

\*) Les masses du bâtiment le long de sa hauteur sont supposées concentrées au niveau de ses différents planchers.

\*) La masse d'un plancher est répartie entre les différents noeuds de celui-ci et ceci permet de prendre en compte la déformabilité latérale des planchers.

\*) Seuls les degrés de liberté de translation horizontale sont considérés (prépondérance du séisme horizontal)

La modélisation devrait se faire pour toute la structure et non pas pour un portique. Cependant pour notre cas, cette étude dynamique est limitée à des portiques plans car elle complète l'étude élasto-plastique plane. Une analyse complète élasto-plastique et dynamique doit donc être tridimensionnelle.

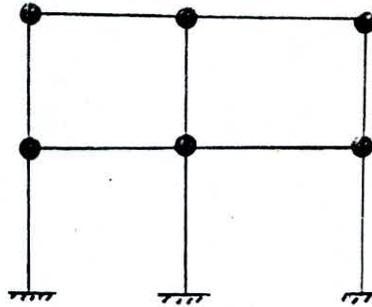


fig- 4- 10 Modélisation ; disposition des noeuds

#### 4-5-2-1 Caractéristiques du modèle

##### a) Matrice masse du modèle

Pour un système dont on ne considère que les degrés de liberté de translation (la rotation et le déplacement vertical sont supposés négligeables pour chaque masse du modèle), la matrice masse est diagonale. Le nombre de termes diagonaux est égal au nombre de degrés de liberté. Les termes extra-diagonaux sont nuls car une accélération appliquée à un noeud où une masse est concentrée ne produit de force d'inertie qu'en ce même point. Lorsque toutes les masses sont accélérées, les forces d'inerties ont pour valeur :

$$f_1 = m_1 \times \ddot{u}_1$$

$$f_2 = m_2 \times \ddot{u}_2$$

.....

$$f_j = m_j \times \ddot{u}_j$$

.....

$$f_n = m_n \times \ddot{u}_n$$

$m_j$  - masse relative au degré de liberté j

$\ddot{u}_j$  - accélération dans la direction du degré de liberté j

Les relations précédentes s'écrivent d'une manière matricielle :

$$[F] = [M] \times [\ddot{U}]$$

$[\ddot{U}]$  - vecteur des accélérations

$$[\ddot{U}] = \begin{pmatrix} \ddot{U}_1 \\ \vdots \\ \ddot{U}_j \\ \vdots \\ \ddot{U}_h \end{pmatrix}$$

$[M]$  - matrice des masses, diagonale et de dimension  $n \times n$

$$[M] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & m_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & m_j & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_h \end{pmatrix}$$

#### b / Matrice de rigidité latérale

la matrice de rigidité  $[KL]$  correspondant aux degrés de liberté horizontaux du modèle sera déduite de la matrice de rigidité globale  $[K]$  de la structure après la prise en compte des conditions aux limites, en ne considérant que les termes  $K_{ij}$  correspondant aux déplacements horizontaux.

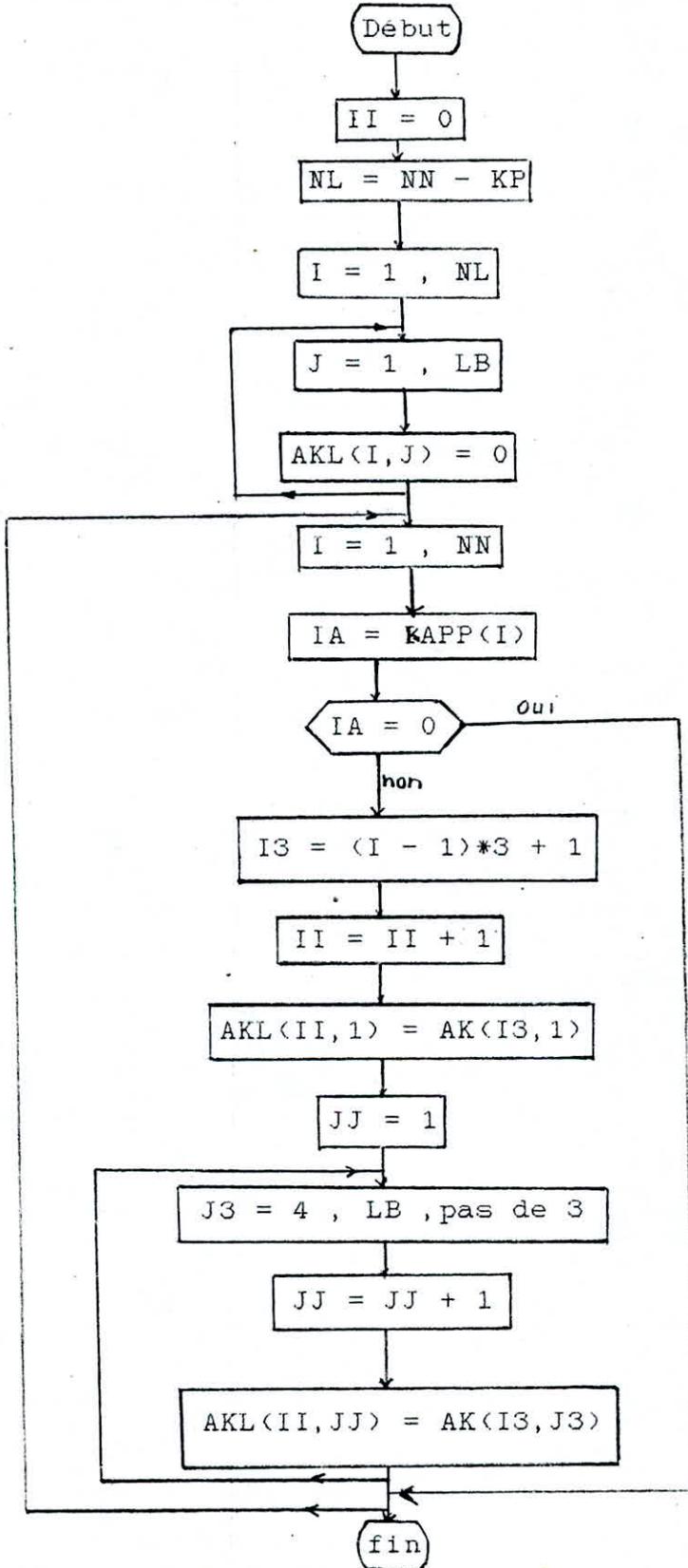
La matrice de rigidité latérale  $[KL]$  est une matrice bande symétrique puisqu'elle est déduite de la matrice globale  $[K]$  elle-même symétrique **et bande**

L'organigramme de passage de la matrice globale  $[K]$  à la matrice de rigidité latérale  $[KL]$  est le suivant :

NL - nombre de noeuds libres ( non appuyés )

KP - nombre de noeuds appuyés

Organigramme de passage de la matrice de rigidité bande à la matrice latérale :



### 4-5-3 Calcul des valeurs et vecteurs propres

Résoudre le problème de valeurs propres et de vecteurs propres consiste à trouver les couples  $\lambda_k$ ,  $[\phi_k]$  qui satisfont la relation :

$$[KL] \times [\phi_k] = \lambda_k \times [M] \times [\phi_k] \quad (4.1)$$

Ce type de problème apparaît dans la détermination des modes propres de vibration d'une structure .

$[KL]$  - matrice de rigidité latérale du modèle

$[M]$  - matrice masse

$[\phi_k]$  -vecteur des déplacements de la structure définissant le k-ème mode propre de vibration .

$\lambda = \omega^2$  - carré de la pulsation propre

L'équation (4.1) peut alors s'écrire sous la forme :

$$([KL] - \omega^2 [M]) [\phi_k] = 0$$

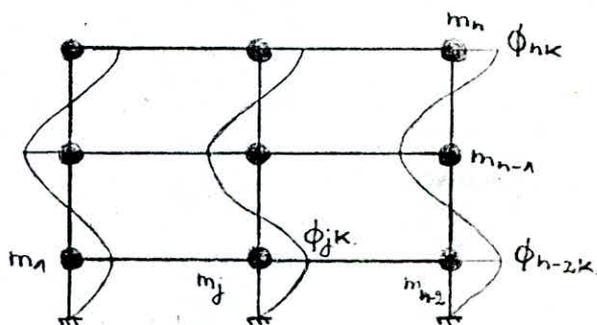
L'expression précédente représente un système de n équations à n inconnues qui sont les composantes du vecteur  $[\phi_k]$ . Une solution différente de zéro n'est possible que si le déterminant de la matrice  $([KL] - \omega^2 [M])$  est nul.

Si on développe ce déterminant , on obtient une équation de degré n en  $\omega^2$ . La résolution de cette équation fournit les valeurs des pulsations  $\omega_1$  ,  $\omega_2$  , ... ,  $\omega_n$  relatives aux n modes possibles.

Le vecteur des déplacements  $[\phi_k]$  correspondant au mode de vibration k de pulsation  $\omega_k$  est donné par :

$$([KL] - \omega_k^2 [M]) [\phi_k] = 0$$

$$[\phi_k] = \begin{bmatrix} \phi_{1k} \\ \vdots \\ \phi_{jk} \\ \vdots \\ \phi_{nk} \end{bmatrix}$$



Le domaine de calcul des valeurs et vecteurs propres est très vaste , nous en citerons quelques méthodes .

#### 4-5-4 Méthodes de calcul des valeurs et vecteurs propres

##### 4-5-4-1 Méthode de Stodola-Vianello

Cette méthode permet d'obtenir la fréquence propre ainsi que le mode propre de vibration d'une structure . C'est une méthode itérative employée manuellement ( avec petit ordinateur ) pour étudier les vibrations des structures jusqu'à une dizaine de degrés de liberté . Elle est basée sur la formule de récurrence suivante :

$$\phi_{(k+1)k} = [S] \times [M] \times \omega^2 \phi_{ik}$$

[S] - matrice de flexibilité (souplesse )

$\omega^2 = \phi_{(k+1)k} / \phi_{ik}$  - pulsation propre

Pour calculer la fréquence du mode fondamental , on se donne un vecteur initial correspondant à ce mode

##### 4-5-4-2 Méthode de Raleigh

Cette méthode approchée ramène l'étude de la structure réelle à une structure ne possédant qu'un seul degré de liberté . Elle est essentiellement utilisée pour trouver la première fréquence propre . Elle repose sur le principe de la conservation de l'énergie : l'énergie totale d'un système non amorti et libre de se mouvoir est constante . Cette énergie totale est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique .

##### 4-5-4-3 Méthode de Holzer

C'est une méthode itérative basée sur la notion de rigidité relative . Elle consiste à se donner une valeur initiale de la pulsation  $\omega$  , puis à calculer la forme propre associée à cette valeur de  $\omega$  par la relation :

$$X_n = 1$$



Les périodes propres sont alors :

$$T_i = 2 \pi / \omega_i$$

Chaque matrice  $[Q^k]$  est choisie de manière à ce qu'un terme  $(i,j)$  non diagonal et non nul de  $[K^k]$  ( et de  $[M^k]$  ) soit nul après la transformation (a) . La matrice  $[Q^k]$  a la forme suivante :

$$[Q^k] = \begin{array}{cccc|cccc} | & 1 & & & & & & 0 & | \\ | & & & & & & & & | \\ | & & & & & & & & | \\ [Q^k] = & | & & 1 & a & \dots & \dots & & | \dots \text{ ligne } i \\ | & & & b & 1 & \dots & \dots & & | \dots \text{ ligne } j \\ | & & & : & : & & & & | \\ | & 0 & & : & : & & & 1 & | \\ & & & : & : & & & & | \end{array}$$

colonne i    colonne j

Les coefficients a et b sont calculés en écrivant que :

$$K_{ij}^{k+1} = M_{ij}^{k+1} = 0$$

soit en supprimant par simplicité l'indice k+1 sur les termes de chaque matrice :

$$a K_{ii} + (1 + ab) K_{ij} + b K_{jj} = 0$$

$$a M_{ii} + (1 + ab) M_{ij} + b M_{jj} = 0$$

notons :

$$c_1 = K_{ii} M_{ij} - M_{ii} K_{ij}$$

$$c_2 = K_{jj} M_{ij} - M_{jj} K_{ij}$$

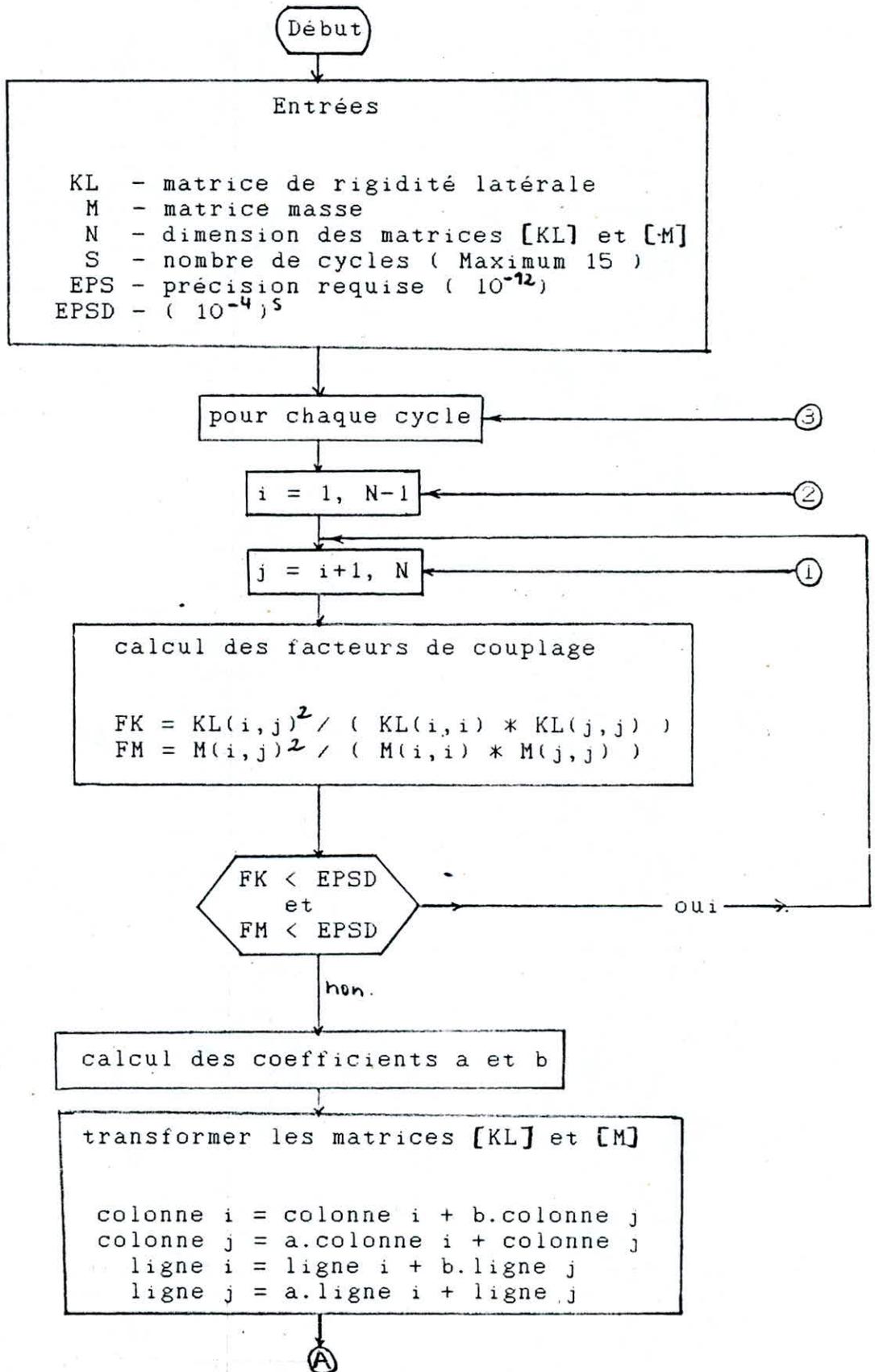
$$c_3 = K_{ii} M_{jj} - M_{ii} K_{jj}$$

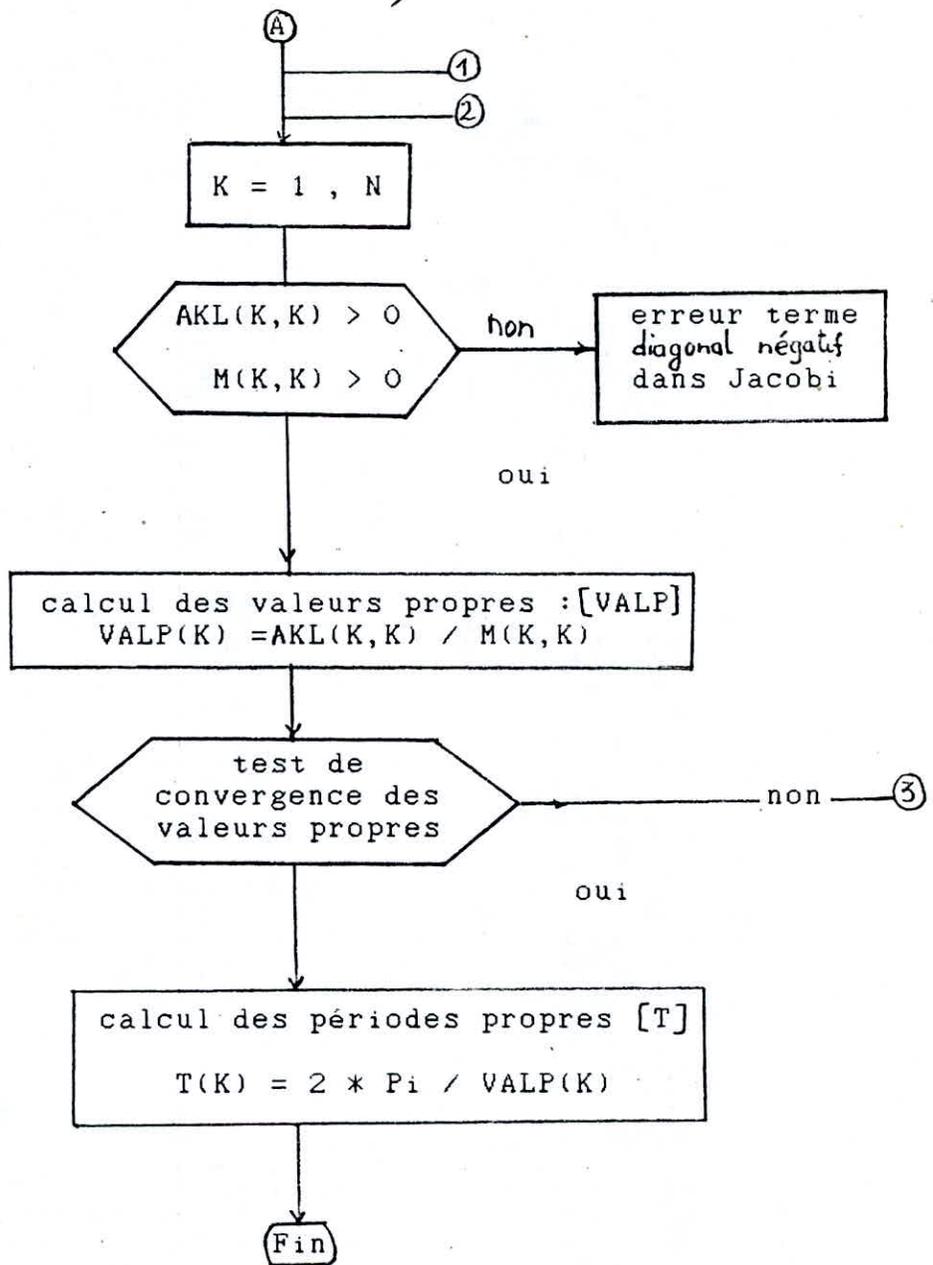
$$d = c_3/2 + \text{signe}(c_3) \times \sqrt{(c_3/2)^2 + c_1 c_2}$$

alors  $a = c_2/d$  et  $b = -c_1/d$

Lorsque  $[M^k]$  est définie positive, le coefficient  $(c_3/2)^2 + c_1 c_2$  est toujours positif.

L'organigramme Jacobi est le suivant :





#### 4-5-5 Facteur de contribution

La masse modale est définie pour le mode 1 par :

$$m_1 = \frac{([V_1]^t [M] [\Delta])^2}{[V_1]^t [M] [V_1]}$$

$[V_1]$  - vecteur propre correspondant au mode propre 1

$[M]$  - matrice masse de la structure

$[\Delta]$  - vecteur de direction

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} | & 1 & | \\ | & . & | \\ | & . & | \\ | & . & | \\ | & . & | \\ | & . & | \\ | & . & | \\ | & 1 & | \end{bmatrix}$$

Le facteur de contribution et la masse modale représentent l'importance de la contribution du mode 1 à la réponse globale de la structure .

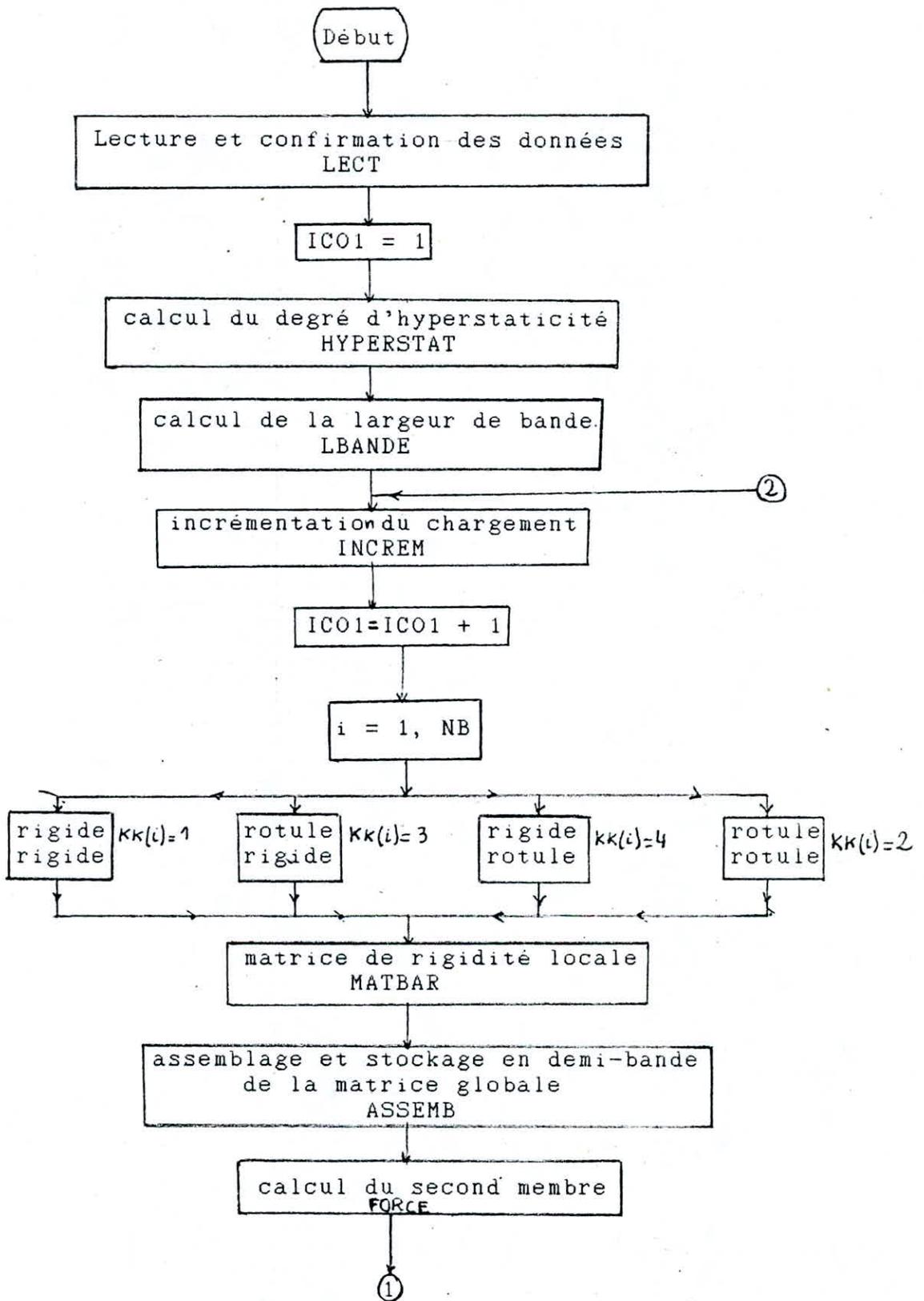
La méthode de Jacobi permet de déterminer tous les modes propres ; pour chaque mode propre , on calcule le facteur de contribution qui est donné par la formule :

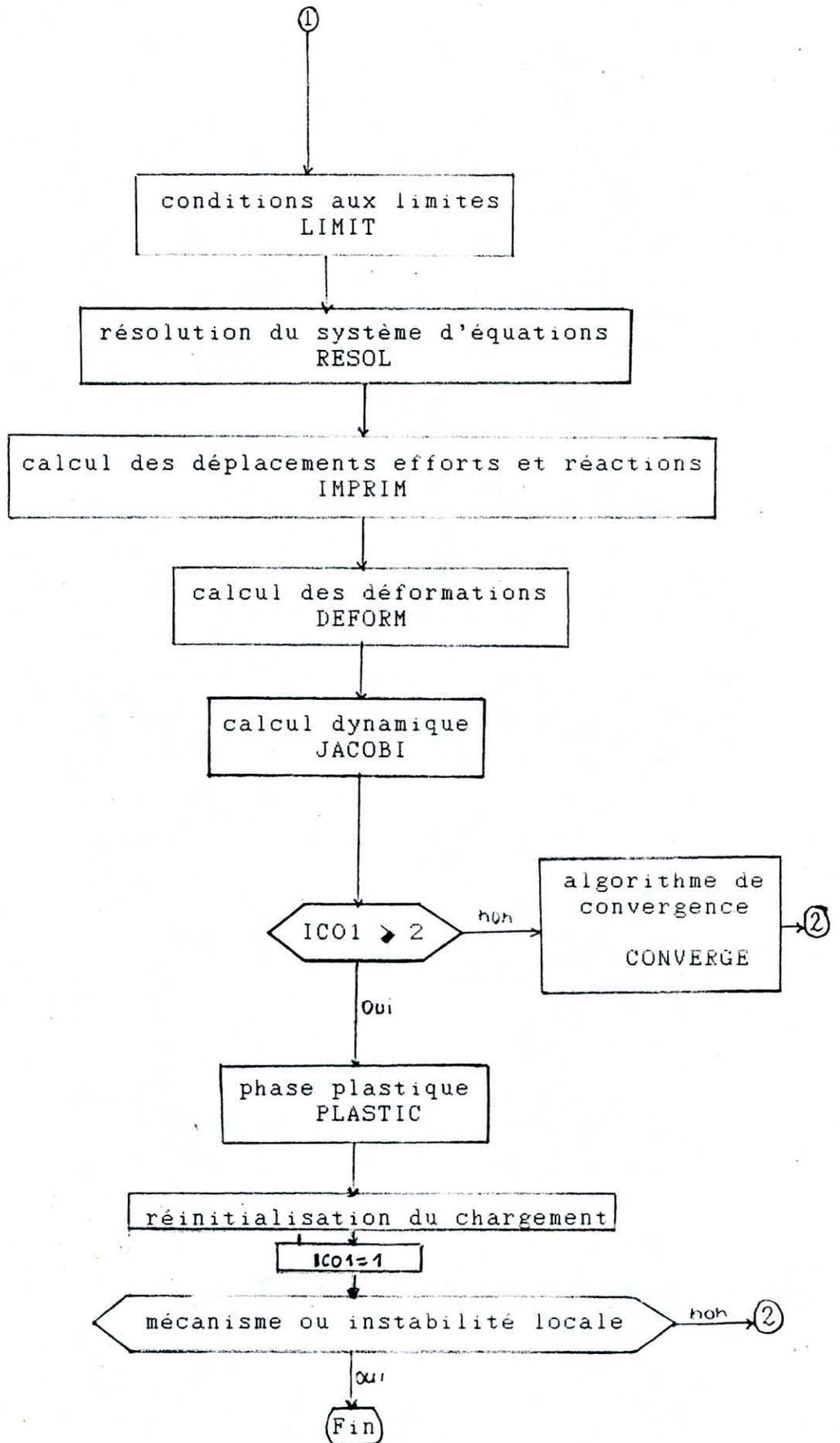
$$F.C = \frac{m_1}{M_t} \% .$$

$M_t$  étant la masse totale de la structure

$$M_t = [\Delta]^t [M] [\Delta]$$

Organigramme général



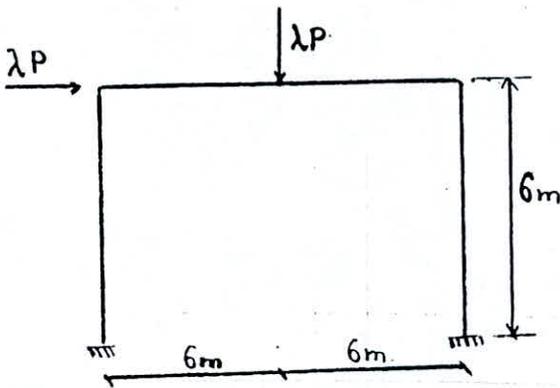


E X E M P L E S

5-1 EXEMPLES

Exemple 1:

Portique simple encastré en pied ( fig.5-1 )

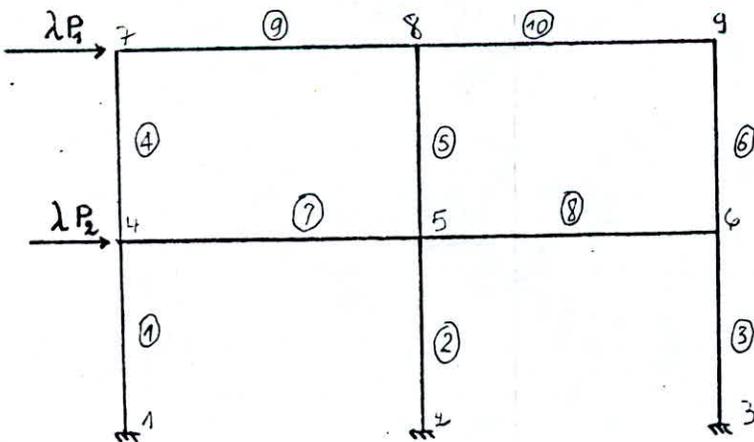


$P = 20 \text{ t}$   
 $M_p = 53.1 \text{ tm}$   
 $E = 3802820 \text{ t/m}^2$

fig. 5-1 portique simple

Exemple 2:

Cas réel d'un portique en béton armé soumis à un chargement qui augmente proportionnellement ( fig. 5-2 ) avec évolution des caractéristiques dynamiques .



$P_1 = 15 \text{ t}$   
 $P_2 = 18 \text{ t}$

fig. 5-2 portique en béton armé

RESULTATS EXEMPLE 1

Modale d'élasticite : 3802820 \*\*\*\* Densite : 2.5

Nombre de noeuds : 5

Noeud	Coor.X (m)	Coor.Y (m)	Appui
1	0.0000	0.0000	0
2	12.0000	0.0000	0
3	0.0000	6.0000	1
4	12.0000	6.0000	1
5	6.0000	6.0000	1

Nombre de barres : 4

Barre	Début	Fin	Séction (m carre)	Inertie (m quatre)
1	1	3	0.2100	0.008575
2	3	5	0.2100	0.008575
3	2	4	0.2100	0.008575
4	5	4	0.2100	0.008575

Moments plastiques

Barre	Noeud*Début	Noeud*Fin
1	53.1000	53.1000
2	53.1000	53.1000
3	53.1000	53.1000
4	53.1000	53.1000

DELTA2 = 1.0000 PAS = 1.0000

Degré d'hyperstatieite NH = 3

Nombre de charges concentrées: 2

Numero	Ele.	Dir.	Charge
1	3	1	20.0000
2	5	2	-20.0000

Déplacements des noeuds

Noeud	Depl.X (m)	Depl.Y (m)	Rotation
1	0.0000000	0.0000000	0.0000000
2	0.0000000	0.0000000	0.0000000
3	0.0097900	-0.0000470	-0.0025114
4	0.0095509	-0.0001033	-0.0002556
5	0.0096704	-0.0089787	0.0006347

Efforts dans les barres

Barre	Noeud	N(t)	T(t)	M(tm)
1	début	6.2532	4.0866	25.9090
	fin	-6.2532	-4.0866	-1.3892
2	début	15.9134	6.2532	1.3892
	fin	-15.9134	-6.2532	36.1300
3	début	13.7468	15.9134	49.1292
	fin	-13.7468	-15.9134	46.3509
4	début	15.9134	-13.7468	-36.1300
	fin	-15.9134	13.7468	-46.3509

Rotule au noeud début 2 de la barre 3

Ele	déb	fin	Mp(tm)	DELTA	Ntot(t)	Ttot(t)	Mtot(tm)
1	1	3	53.1000	1.0808	6.7586	4.4169	23.0030
			53.1000		-6.7586	-4.4169	-1.5014
2	3	5	53.1000	1.0808	17.1995	6.7586	1.5014
			53.1000		-17.1995	-6.7586	39.0501
3	2	4	53.1000	1.0808	14.8579	17.1995	53.1000
			53.1000		-14.8579	-17.1995	50.0971
4	5	4	53.1000	1.0808	17.1995	-14.8579	-39.0501
			53.1000		-17.1995	14.8579	-50.0971

Rotule au noeud fin 4 de la barre 3  
Rotule au noeud fin 4 de la barre 4

Ele	déb	fin	Mp(tm)	DELTA	Ntot(t)	Ttot(t)	Mtot(tm)
1	1	3	53.1000	1.1400	7.0362	5.0993	31.3342
			53.1000		-7.0362	-5.0993	-6.7385
2	3	5	53.1000	1.1400	17.7000	7.0362	0.7385
			53.1000		-17.7000	-7.0362	41.4787
3	2	4	53.1000	1.1400	15.7631	17.7000	53.1000
			53.1000		-15.7631	-17.7000	53.1000
4	5	4	53.1000	1.1400	17.7000	-15.7631	-41.4787
			53.1000		-17.7000	15.7631	-53.1000

Instabilité locale de la structure  
Facteur de charge de ruine 1.1400  
Nombre de rotules formées 3

RESULTATS EXEMPLE 2 CAS 1

Degré d'hyperstaticité NH = 12

Pas de rotule DELTA2= 1.0000

Nombre de rotules NR= 0

Efforts aux noeuds

Barre	Noeuds					
	début			fin		
	N (t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-12.6342	10.3191	15.9861	12.6342	-10.3191	11.8754
2	0.0923	12.5790	17.9362	-0.0923	-12.5790	16.0269
3	12.5419	10.1019	15.6609	-12.5419	-10.1019	11.6141
4	-3.8552	4.8330	5.4223	3.8552	-4.8330	7.6267
5	0.0025	8.3198	10.7294	-0.0025	-8.3198	11.7340
6	3.8527	4.8472	5.4705	-3.8527	-4.8472	7.6170
7	9.5139	-8.7790	-17.2978	-9.5139	8.7790	-13.4287
8	5.2546	-8.6892	-13.3276	-5.2546	8.6892	-17.0846
9	13.1670	-3.8552	-7.6267	-13.1670	3.8552	-5.8666
10	4.8472	-3.8527	-5.8675	-4.8472	3.8527	-7.6170

période(s) 0.221E-04 0.686E-04 0.157E-03 0.434E-02 0.545E-04 0.119E-03

F.C (%) 0.954E+00 0.102E-05 0.248E-34 0.457E-01 0.393E-09 0.282E-34

Rotule au noeud 2 de la barre 2 DELTA1 = 1.8064

Nombre de rotules NR= 1

Efforts aux extrémités des barres

Barre	Début						Fin					
	N(t)	T(t)	M(tm)									
1	-22.8220	18.6401	28.8768	22.8220	-18.6401	21.5414	-22.8220	18.6401	28.8768	22.8220	-18.6401	21.5414
2	0.1667	22.7224	32.0000	-0.1667	-22.7224	28.9505	0.1667	22.7224	32.0000	-0.1667	-22.7224	28.9505
3	22.6553	18.2477	28.2894	-22.6553	-18.2477	20.9893	22.6553	18.2477	28.2894	-22.6553	-18.2477	20.9893
4	-6.9640	8.7301	9.7948	6.9640	-8.7301	13.7766	-6.9640	8.7301	9.7948	6.9640	-8.7301	13.7766
5	0.0045	15.0286	19.3813	-0.0045	-15.0286	21.1960	0.0045	15.0286	19.3813	-0.0045	-15.0286	21.1960
6	6.9594	8.7559	9.8818	-6.9594	-8.7559	13.7592	6.9594	8.7559	9.8818	-6.9594	-8.7559	13.7592
7	17.1856	-15.8581	-31.2462	-17.1856	15.8581	-24.2571	17.1856	-15.8581	-31.2462	-17.1856	15.8581	-24.2571
8	9.4918	-15.6959	-24.0746	-9.4918	15.6959	-30.8611	9.4918	-15.6959	-24.0746	-9.4918	15.6959	-30.8611
9	23.7845	-6.9640	-13.7766	-23.7845	6.9640	-10.5972	23.7845	-6.9640	-13.7766	-23.7845	6.9640	-10.5972
10	8.7559	-6.9594	-10.5988	-8.7559	6.9594	-13.7592	8.7559	-6.9594	-10.5988	-8.7559	6.9594	-13.7592

Périodes(s) 0.271E-01 0.688E-04 0.157E-03 0.364E-02 0.545E-04 0.119E-03

F.C (%) 0.974E+00 0.653E-05 0.396E-33 0.264E-01 0.403E-08 0.282E-34

Rotule au noeud 1 de la barre 1      DELTA1 = 1.9651  
 Nombre de rotules    NR= 2

Efforts aux extrémités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-24.9654	20.9276	32.4000	24.9654	-20.9276	24.1040
2	0.1814	23.4414	32.4000	-0.1814	-23.4414	30.8917
3	24.7839	20.5006	31.7608	-24.7839	-20.5006	23.5969
4	-7.5996	9.3978	10.4011	7.5996	-9.3978	14.9730
5	0.0049	16.5598	21.4588	-0.0049	-16.5598	23.2526
6	7.5946	9.4258	10.4957	-7.5946	-9.4258	14.9540
7	17.9564	-17.3658	-34.5057	-17.9654	17.3658	-26.2746
8	11.0748	-17.1893	-26.0759	-11.0748	17.1893	-34.0866
9	25.9856	-7.5996	-14.9730	-25.9856	7.5996	-11.6254
10	9.4258	-7.5946	-11.6272	-9.4258	7.5946	-14.9640

Périodes(s)    0.384E-01    0.689E-04    0.158E-03    0.384E-02    0.545E-04    0.119E-03  
 F.C (%)        0.988E+00    0.199E-05    0.164E-04    0.119E-01    0.125E-08    0.401E-07

Rotule au noeud 3 de la barre 3      DELTA1 = 1.9853  
 Nombre de rotules    NR= 3

Efforts aux extrémités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-25.2318	21.0238	32.4000	25.2318	-21.0238	24.3642
2	0.1258	23.5704	32.4000	-0.1258	-23.5704	31.2401
3	25.1060	20.9223	32.4000	-25.1060	-20.9223	24.0902
4	-7.6856	9.4996	10.5116	7.6856	-9.4996	15.1373
5	0.0170	16.7484	21.7097	-0.0170	-16.7484	23.5109
6	7.6687	9.4883	10.5265	-7.6687	-9.4883	15.0919
7	18.2560	-17.5462	-34.8758	-18.2560	17.5462	-26.5359
8	11.4340	-17.4373	-26.4140	-11.4340	17.4373	-34.6167
9	26.2367	-7.6856	-15.1373	-26.2367	7.6856	-11.7625
10	9.4883	-7.6687	-11.7484	-9.4884	7.6687	-15.0919

Périodes(s)    0.727E-01    0.689E-04    0.159E-03    0.405E-02    0.545E-04    0.116E-03  
 F.C (%)        0.997E+00    0.636E-07    0.669E-33    0.300E-02    0.537E-10    0.451E-03

Rotule au noeud 5 de la barre 2      DELTA1 = 2.0195  
 Nombre de rotules      NR= 4

Efforts aux extrémités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-25.9050	21.3736	32.4000	25.9050	-21.3736	25.3087
2	0.1280	24.0000	32.4000	-0.1280	-24.0000	32.4000
3	25.7770	21.2704	32.4000	-25.7770	-21.2704	25.0301
4	-7.8350	9.6421	10.6123	7.8350	-9.6421	15.4213
5	0.0173	17.0786	22.1241	-0.0173	-17.0786	23.9882
6	7.8177	9.6306	10.6274	-7.8177	-9.6306	15.3751
7	18.5612	-18.0700	-35.9210	-18.5612	18.0700	-27.3241
8	11.6398	-17.9593	-27.2000	-11.6398	17.9593	-35.6575
9	26.7092	-7.8350	-15.4213	-26.7092	7.8350	-12.0012
10	9.6306	-7.8177	-11.9869	-9.6306	7.8177	-15.3751

Périodes(s)    0.107E+00   0.690E-04   0.159E-03   0.412E-02   0.545E-04   0.119E-03  
 F.C(%)        0.998E+00   0.558E-06   0.120E-33   0.132E-02   0.338E-09   0.253E-03

Rotule au noeud 4 de la barre 1      DELTA1 = 2.1784  
 Nombre de rotules      NR= 5

Efforts aux extrémités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-29.0364	24.0000	32.4000	29.0364	-24.0000	32.4000
2	0.1381	24.0000	32.4000	-0.1381	-24.0000	32.4000
3	28.8984	23.8887	32.4000	-28.8984	-23.8887	32.0894
4	-8.5972	9.7793	9.8536	8.5972	-9.7793	16.5504
5	0.0186	19.6659	26.0334	-0.0186	-19.6659	27.0645
6	8.5786	9.7669	9.8689	-8.5786	-9.7669	16.5006
7	18.4559	-20.4392	-42.2536	-18.4559	20.4392	-29.2836
8	14.1218	-20.3197	-29.1498	-14.1218	20.3197	-41.9693
9	29.4327	-8.5972	-16.5504	-29.4327	8.5972	-13.5400
10	9.7669	-8.5786	-13.5245	-9.7669	8.5786	-16.5006

Périodes(s)    0.211E+00   0.691E-04   0.160E-03   0.519E-02   0.545E-04   0.119E-03  
 F.C(%)        0.999E+00   0.148E-06   0.184E-05   0.327E-03   0.844E-10   0.419E-03

Rotule au noeud 6 de la barre 3 DELTA1 = 2.1818

Nombre de rotules NR= 6

Efforts aux extremités des barres

Barre	Début			fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-29.0692	24.0000	32.4000	29.0692	-24.0000	32.4000
2	0.0709	24.0000	32.4000	-0.0709	-24.0000	32.4000
3	-28.9983	24.0000	32.4000	-28.9983	-24.0000	32.4000
4	-8.6216	9.8079	9.8891	8.6216	-9.8079	16.5924
5	0.0350	19.7208	26.1163	-0.0350	-19.7208	27.1296
6	8.5866	9.7440	9.8023	-8.5866	-9.7440	16.5065
7	18.5352	-20.4477	-42.2891	-18.5352	20.4477	-29.2777
8	14.2560	-20.4117	-29.2386	-14.2560	20.4117	-42.2023
9	29.4648	-8.6216	-16.5924	-29.4648	8.6216	-16.5065
10	9.7440	-8.5866	-13.5466	-9.7440	8.5866	-16.5065

Périodes(s) 0.112E+14 0.691E-04 0.160E-03 0.423E-02 0.546E-04 0.119E-03

F.C(%) 0.100E+01 0.758E-34 0.891E-35 0.121E-30 0.282E-34 0.253E-31

Instabilité locale de la structure

Facteur de charge de ruine 2.1818

Nombre de rotules formées 6

FIN DU CAS 1

RESULTATS EXEMPLE 2 CAS 2

Degré d'hyperstaticité NH = 12

Pas de rotule DELTA2= 1.0000  
 Nombre de rotules NR= 0

Efforts aux noeuds

Barre	Noeuds					
	début			fin		
	N (t)	T (t)	M (tm)	N (t)	T (t)	M (tm)
1	-8.4900	10.5566	18.2167	8.4900	-10.5566	10.2861
2	-3.5594	12.5363	19.8715	3.5594	-12.5363	13.9766
3	12.0494	9.9071	17.4539	-12.0494	-9.9071	9.2952
4	-2.5172	2.9988	2.2488	2.5172	-2.9988	5.8480
5	-3.5222	8.0983	8.7451	3.5222	-8.0983	13.1202
6	8.0609	4.3757	3.3802	-8.0609	-4.3757	9.2184
7	7.4422	-5.9729	-12.5349	-7.4422	5.9729	-11.3566
8	3.0041	-6.0101	-11.3651	-3.0041	6.0101	-12.6753
9	15.0012	-2.5172	-5.8480	-15.0012	2.5172	-4.2266
10	6.9029	-6.0393	-8.8996	-6.9029	6.0393	-9.2184

Période(s) 0.140E-01 0.102E-03 0.229E-03 0.125E-02 0.138E-03 0.502E-04

F.C (%) 0.993E+00 0.317E-05 0.940E-06 0.733E-02 0.131E-06 0.312E-07

Rotule au noeud 2 de la barre 2 DELTA1 = 1.9022  
 Nombre de rotules NR= 1

Efforts aux extrémités des barres

Barre	Début			Fin		
	N (t)	T (t)	M (tm)	N (t)	T (t)	M (tm)
1	-16.1500	20.0810	34.6522	16.1500	-20.0810	19.5664
2	-6.7707	23.8469	37.8000	6.7707	-23.8469	26.5867
3	22.9207	18.8454	33.2011	-22.9207	-18.8454	17.6215
4	-4.7882	5.7044	4.2777	4.7882	-5.7044	11.1242
5	-6.6999	15.4047	16.6351	6.6999	-15.4047	24.9576
6	15.3335	8.3235	6.4298	-15.3335	-8.3235	17.5355
7	14.1567	-11.3618	-23.8442	-14.1567	11.3618	-21.6628
8	5.7145	-11.4326	-21.6189	-5.7145	11.4326	-24.1113
9	28.5356	-4.7882	-11.1242	-28.5356	4.7882	-8.0236
10	13.1309	-11.4881	-16.9290	-13.1309	11.4881	-17.5355

Périodes(s) 0.183E-01 0.103E-03 0.229E-03 0.127E-02 0.137E-03 0.583E-04

F.C (%) 0.996E+00 0.232E-04 0.227E-06 0.391E-02 0.346E-07 0.389E-07

Rotule au noeud 1 de la barre 1 DELTA1 = 2.0271  
 Nombre de rotules NR= 2

Efforts aux extremités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-17.2852	21.9380	37.8000	17.2852	-21.9380	21.4325
2	-7.2488	24.3399	37.8000	7.2488	-24.3399	27.9178
3	24.5340	20.6149	36.2485	-24.5340	-20.6149	19.4116
4	-5.1171	5.9547	4.3293	5.1171	-5.9547	11.8517
5	-7.1708	16.6314	18.1298	7.1708	-16.6314	26.7749
6	16.3510	8.7677	6.5387	-16.3510	-8.7677	18.7057
7	14.4225	-12.1681	-25.6586	-14.4225	12.1681	-23.0137
8	6.7140	-12.2460	-23.0338	-6.7140	12.2460	-25.9503
9	30.5322	-5.1171	-11.8517	-30.5322	5.1171	-8.6168
10	13.9009	-12.2879	-18.1581	-13.9009	12.2879	-18.7057

Périodes(s)	0.269E-01	0.103E-03	0.232E-03	0.131E-02	0.137E-03	0.584E-04
F.C (%)	0.998E+00	0.771E-05	0.602E-04	0.139E-02	0.606E-06	0.452E-07

Rotule au noeud 3 de la barre 3 DELTA1 = 2.0688  
 Nombre de rotules NR= 3

Efforts aux extremités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-17.6941	22.1288	37.8000	17.6941	-22.1288	21.9479
2	-7.4809	24.5989	37.8000	7.4809	-24.5989	28.6172
3	25.1750	21.5432	37.8000	-25.1750	-21.5432	20.3667
4	-5.2420	6.0932	4.4203	5.2420	-6.0932	12.1348
5	-7.3193	17.0432	18.5985	7.3193	-17.0432	27.4181
6	16.6774	8.8617	6.6620	-16.6774	-8.8617	19.0994
7	14.9967	-12.4521	-26.2649	-14.9967	12.4521	-23.5434
8	7.4409	-12.6136	-23.6722	-7.4409	12.6136	-26.7822
9	31.1455	-5.2420	-12.1348	-31.1455	5.2420	-8.8334
10	14.1023	-12.5614	-18.5847	-14.1023	12.5614	-19.0994

Périodes(s)	0.529E-01	0.103E-03	0.235E-03	0.132E-02	0.136E-03	0.584E-04
F.C (%)	0.999E+00	0.198E-06	0.650E-07	0.445E-03	0.105E-07	0.191E-03

Rotule au noeud 6 de la barre 8  
 Nombre de rotules NR= 4

DELTA1 = 2.2941

Efforts aux extrémités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-20.9989	24.4435	37.8000	20.9989	-24.4435	28.1975
2	-8.6257	27.4967	37.8000	8.6257	-27.4967	36.4410
3	29.6245	23.7642	37.8000	-29.6245	-23.7642	26.3632
4	-5.9504	6.4164	5.1665	5.9504	-6.4164	13.7535
5	-8.4262	19.2454	20.5765	8.4262	-19.2454	31.3860
6	18.9107	9.6653	7.0407	-18.9107	-9.6653	21.7918
7	16.3839	-15.0485	-31.7682	-16.3839	15.0485	-28.4256
8	8.1326	-15.2480	-28.5918	-1.1326	15.2480	-32.4000
9	34.8769	-5.9504	-13.7535	-34.8769	5.9504	-10.0481
10	15.6315	-14.3766	-21.3379	-15.6315	14.3766	-21.7918

Périodes(s) 0.529E-01 0.103E-03 0.235E-03 0.132E-02 0.137E-03 0.583E-04

F.C(%) 0.999E+00 0.198E-06 0.650E-07 0.445E-03 0.105E-07 0.191E-03

Rotule au noeud 4 de la barre 7  
 Nombre de rotules NR= 5

DELTA1 = 2.3131

Efforts aux extrémités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-21.3949	24.6869	37.8000	21.3949	-24.6869	28.8546
2	-8.7619	27.7662	37.8000	8.7619	-27.7662	37.1668
3	29.8843	23.8799	37.8000	-29.8843	-23.8799	26.6747
4	-6.0376	6.4825	5.1919	6.0376	-6.4825	13.9573
5	-8.5263	19.4721	20.7419	8.5263	-19.4721	31.8829
6	19.1037	9.6834	7.3532	-19.1037	-9.6834	22.6522
7	16.4924	-15.3573	-32.4000	-16.4924	15.3573	-29.0290
8	8.1983	-15.3204	-28.8817	-8.1983	15.3204	-32.4000
9	35.1537	-6.0376	-13.9573	-35.1537	6.0376	-10.1933
10	15.6816	-14.5639	-21.6396	-15.6816	14.5639	-22.0522

Périodes(s) 0.529E-01 0.103E-03 0.235E-03 0.132E-02 0.139E-03 0.582E-04

F.C(%) 0.999E+00 0.198E-06 0.650E-07 0.445E-03 0.105E-07 0.191E-03

Rotule au noeud 5 de la barre 2 DELTA1 = 2.3272  
 Nombre de rotules NR= 6

Efforts aux extremités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-21.5659	24.8105	37.8000	21.5659	-24.8105	29.1884
2	-8.9041	28.0000	37.8000	8.9041	-28.0000	37.8000
3	30.1975	23.9867	37.8000	-30.1975	-23.9867	26.9646
4	-6.1154	6.5457	5.5257	6.5457	-6.4232	14.1441
5	-8.6691	19.6931	20.8542	8.6691	-19.6931	32.3174
6	19.3423	9.6925	7.6414	-19.3423	-9.6925	22.3667
7	16.5205	-15.4505	-32.4000	-16.5205	15.4505	-29.4020
8	8.2136	-15.4130	-29.2522	-8.2136	15.4130	-32.4000
9	35.4662	-6.1154	-14.1311	-35.4662	6.1154	-10.3305
10	15.7730	-14.7845	-21.9868	-15.7730	14.7845	-22.3667

Périodes(s) 0.789E-01 0.103E-03 0.235E-03 0.133E-02 0.103E-03 0.533E-04  
 F.C(%) 0.999E+00 0.973E-08 0.776E-08 0.184E-03 0.211E-07 0.429E-08

Rotule au noeud 8 de la barre 5 DELTA1 = 2.4434  
 Nombre de rotules NR= 7

Efforts aux extremités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-22.8542	26.8184	37.8000	22.8542	-26.8184	34.7637
2	-10.3267	28.0000	37.8000	10.3267	-28.0000	37.8000
3	32.9084	25.8124	37.8000	-32.9084	-25.8124	31.3334
4	-6.8816	8.0239	10.9470	6.8816	-4.9410	15.5784
5	-10.0979	23.2613	25.0056	10.0979	-23.2613	37.8000
6	21.4025	10.4501	12.5709	-21.4025	-10.4501	25.1143
7	18.2680	-15.9725	-32.4000	-18.2680	15.9725	31.4901
8	10.0343	-15.9289	-31.3156	-10.0343	15.9289	-32.4000
9	39.0394	-6.8848	-15.5504	-39.0394	6.8816	-11.9762
10	15.7781	-16.9795	-25.8238	-15.7781	16.9795	-25.1143

Périodes(s) 0.790E-01 0.104E-03 0.235E-03 0.156E-02 0.137E-03 0.533E-04  
 F.C(%) 0.999E+00 0.215E-05 0.638E-08 0.231E-03 0.150E-07 0.430E-08

Rotule au noeud 5 de la barre 7 DELTA1 = 2.4797  
 Nombre de rotules NR = 8

Efforts aux extremités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-23.1521	27.4693	37.8000	23.1521	-27.4693	36.8671
2	-10.9809	28.0000	37.8000	10.9809	-28.0000	37.8000
3	33.8605	26.3598	37.8000	-33.8605	-26.3598	33.3715
4	-6.9521	8.3872	12.7044	6.6521	-8.3872	16.3270
5	-10.7549	23.9312	26.8141	10.7549	-23.9312	37.8600
6	22.2052	10.5229	14.0489	-22.2052	-10.5229	26.8024
7	18.7375	-16.2000	-32.4000	-18.7375	16.2000	32.4000
8	10.2346	-16.1535	-32.2141	-10.2346	16.1535	-32.4000
9	40.0563	-6.9521	-16.3270	-40.0563	6.9521	-12.4710
10	16.1252	-17.7070	-26.3186	-16.1252	17.7070	-26.8024

Périodes(s) 0.790E-01 0.104E-03 0.235E-03 0.150E-02 0.137E-03 0.400E-04

F.C(%) 0.999E+00 0.215E-05 0.638E-08 0.231E-03 0.150E-07 0.400E-08

Rotule au noeud 5 de la barre 8 DELTA1 = 2.4646  
 Nombre de rotules NR = 9

Efforts aux extremités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-23.1643	27.5582	37.8000	23.3643	-27.5582	36.8672
2	-11.1261	28.0000	37.8000	11.1261	-28.0000	37.8000
3	34.0180	26.4334	37.8000	-34.0180	-26.4334	33.5703
4	-6.9643	8.4308	12.9445	6.9643	-8.4308	16.4493
5	-10.8537	24.0000	27.0000	10.8537	-24.0000	37.8000
6	22.3313	10.5429	14.2477	-22.3313	-10.5429	27.0617
7	18.7962	-16.2000	-32.4000	-18.7962	16.2000	32.4000
8	10.2448	-16.2000	-32.4000	-10.2448	16.2000	-32.4000
9	40.1886	-6.9643	-16.4493	-40.1886	6.9643	-12.5446
10	16.1886	-17.8180	-26.3922	-16.1886	17.8180	-27.0617

Périodes(s) 0.790E-01 0.104E-03 0.235E-03 0.150E-02 0.137E-03 0.400E-04

F.C(%) 0.999E+00 0.215E-05 0.638E-08 0.231E-03 0.150E-07 0.400E-08

Rotule au noeud 4 de la barre 1 DELTA1 = 2.5685  
 Nombre de rotules NR = 10

Efforts aux extremités des barres

Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-23.2555	28.0000	37.8000	23.2555	-28.0000	37.8000
2	-11.7664	28.0000	37.8000	11.7664	-8.0000	37.8000
3	34.7495	26.7804	37.8000	-34.7495	-26.7804	34.5072
4	-7.0555	8.5632	14.1372	7.0555	-8.5632	17.2848
5	-11.4940	24.0000	24.0000	27.0000	-11.4940	37.8000
6	23.2127	10.8174	15.1846	-23.2127	-10.8174	28.7860
7	19.0117	-16.2000	-32.4000	-19.0117	16.2000	32.4000
8	10.4604	-16.2000	-32.4000	-10.4604	16.2000	-32.4000
9	40.7512	-7.0555	-17.2848	-40.7512	7.0555	-13.0150
10	16.7512	-18.5495	-26.8626	-16.7512	18.5495	-28.7860

Périodes(s) 0.157E+00 0.104E-03 0.236E-03 0.151E-02 0.137E-03 0.869E-04

F.C(%) 0.999E+00 0.608E-06 0.637E-05 0.349E-04 0.424E-07 0.400E-08

Rotule au noeud 6 de la barre 3 DELTA1 = 2.5455  
 Nombre de rotules NR = 11

Efforts aux extremités des barres

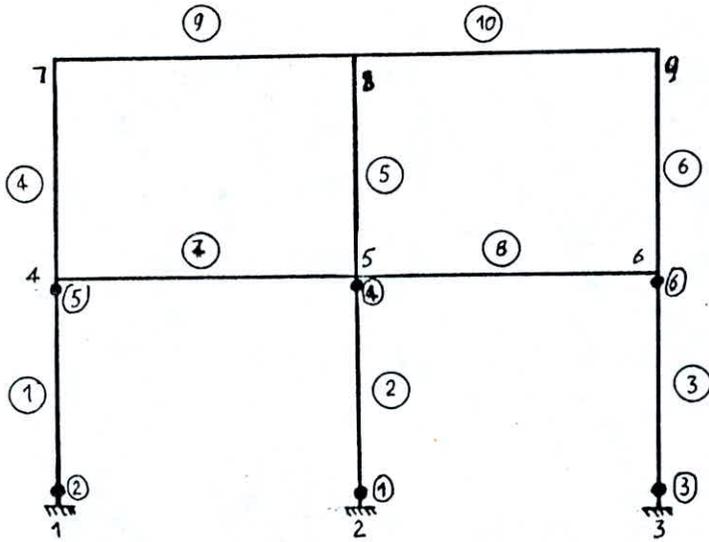
Barre	Début			Fin		
	N(t)	T(t)	M(tm)	N(t)	T(t)	M(tm)
1	-23.5444	28.0000	37.8000	23.5444	-28.0000	37.8000
2	-12.4609	28.0000	37.8000	12.4609	-28.0000	37.8000
3	35.7329	28.0000	37.8000	-35.7329	-28.0000	37.8000
4	-7.3444	9.2050	14.1372	7.3444	-9.2050	19.0177
5	-12.1884	24.0000	27.0000	12.1884	-24.0000	37.8000
6	24.1430	11.1370	18.4774	-24.1430	-11.1370	31.1586
7	20.2079	-16.2000	-32.4000	-20.2079	16.2000	32.4000
8	11.6565	-16.2000	-32.4000	-11.6565	16.2000	-32.4000
9	40.7746	-7.3444	-19.0177	-40.7746	7.3444	-13.5924
10	16.7746	-19.5329	-27.4400	-16.7746	19.5329	-31.1586

Périodes(s) 0.527E+12 0.104E-03 0.236E-03 0.151E-02 0.137E-03 0.569E-04

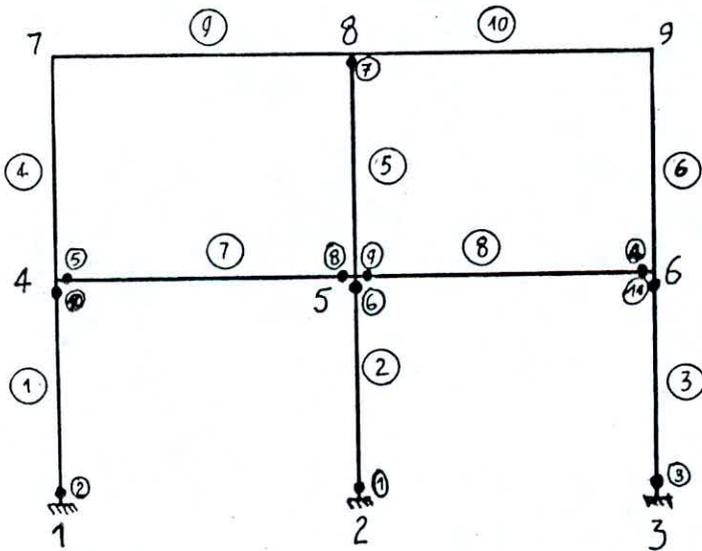
F.C(%) 0.100E+01 0.475E-34 0.135E-34 0.256E-30 0.245E-34 0.372E-34

Instabilité locale de la structure  
 Facteur de charge de ruine 2.5455  
 Nombre de rotules formées 11

FIN DU CAS 2



ordre d'apparition des  
rotules - Cas 1



ordre d'apparition des  
rotules - Cas 2

Trois cas sont considérés :

Cas 1 : structure à grande rigidité

	Section(m <sup>2</sup> )	Inertie(m <sup>4</sup> )	Moment plastique(tm)
Poteaux	0.0045	0.000071	11.4000
Poutres	0.0028	0.000019	4.0000

Cas 2 : structure à moyenne rigidité

Poteaux	0.0045	0.000071	11.4000
Poutres	0.0012	0.000071	0.9600

Cas 3 : structure à petite rigidité

Poteaux	0.0012	0.0000002	0.9600
Poutres	0.0012	0.0000002	0.9600

Deux cas peuvent distingués :

Cas 1 :

Poutres surdimensionnées par rapport aux poteaux

	Section(m <sup>2</sup> )	Inertie(m <sup>4</sup> )	Moment plastique(tm)
Poteaux	0.1200	0.0016	32.4000
Poutres	0.1750	0.3646	59.0700

Cas 2 :

Poteaux surdimensionnés par rapport aux poutres

Poteaux	0.1400	0.1866	37.8000
Poutres	0.1200	0.0016	32.4000

### Exemple 3

Soit le portique suivant (fig.5-3) soumis à une force horizontale P . Dans cette exemple , nous mettrons en évidence la variation de la ductilité . La ductilité est définie comme étant la capacité qu'à un matériau , élément ou structure , de se déformer dans le domaine plastique sans rupture ou ruine prématurée . Elle peut être exprimée par la formule suivante :

$$\mu = \frac{\text{déplacement maximal}}{\text{déplacement à la limite élastique}}$$

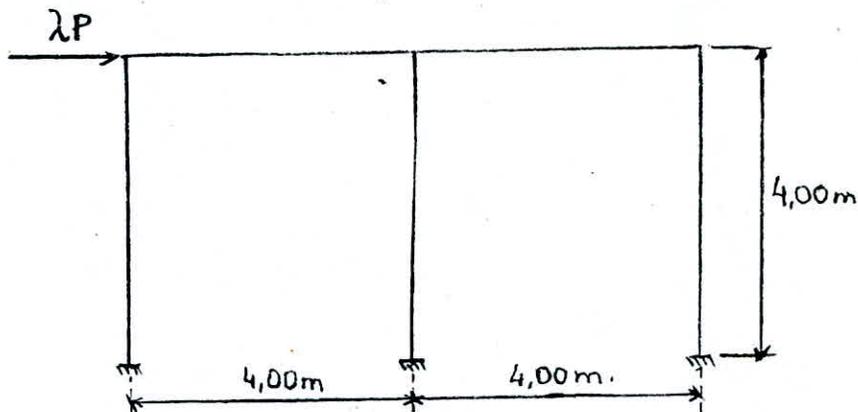
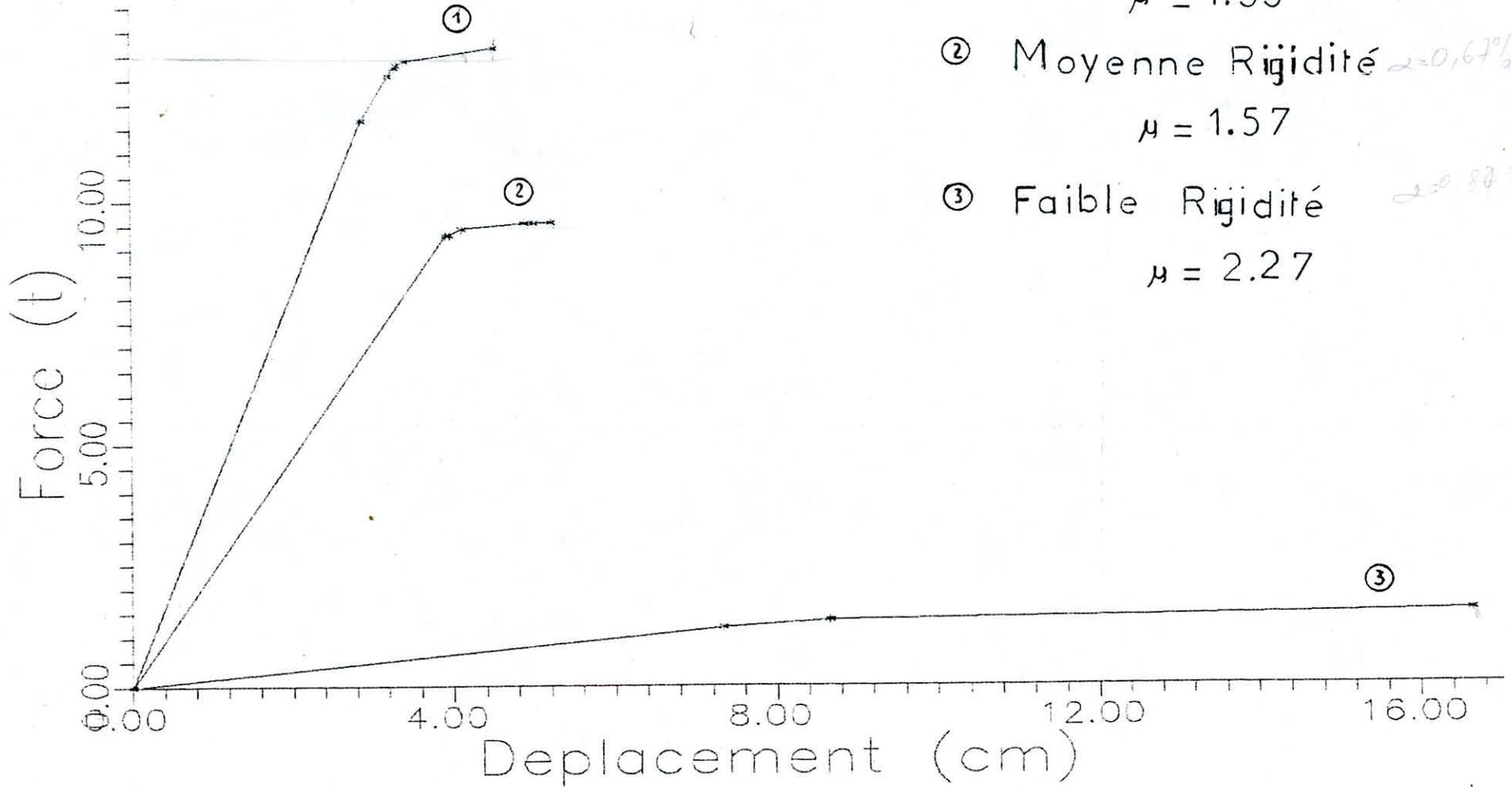


fig. 5-3 Portique , calcul de déformation

EXEMPLE 3



① Grande Rigidité

$\mu = 1.33$

$\alpha = 13\%$

② Moyenne Rigidité

$\mu = 1.57$

$\alpha = 0,67\%$

③ Faible Rigidité

$\mu = 2.27$

$\alpha = 0,87\%$

Le résultat de l'exemple 1 donne comme valeur théorique le facteur de charge :

$$\lambda_c = 5 M_p / pL = 1.11$$

La valeur expérimentale donnée par méthode pas-à-pas vaut :

$$\lambda_c = 1.14$$

L'exemple 2 souligne bien le danger du surdimensionnement des poutres par rapport aux poteaux . En effet , à partir de 6 rotules , la structure est instable après rotation des poteaux de la base où les efforts sont maximaux . Le facteur de charge à la ruine est :

$$\lambda_c = 2.1818$$

Contrairement au deuxième cas , la structure résiste mieux et le mécanisme est atteint après 11 rotules , et la valeur du facteur de charge est :

$$\lambda_c = 2.5455$$

Nous pouvons conclure finalement que la résistance d'une structure dépend essentiellement du rapport des moments plastiques respectivement des poutres et des poteaux .

A partir de l'exemple 3 , nous avons tracé la courbe force - déplacement et avons évalué la ductilité qui varie en fonction de la rigidité . Nous remarquons qu'elle est pratiquement double entre une structure à grande rigidité et une structure à faible rigidité .

Dans l'étude dynamique , le premier mode de vibration obtenu est toujours le plus prépondérant , ceci est confirmé par son facteur de contribution qui augmente pratiquement à chaque apparition de rotules et atteint la valeur 1 à la ruine . Nous observons aussi l'augmentation des périodes propres ( due à la diminution de la rigidité avec l'apparition des rotules ) . Ce phénomène s'accroît beaucoup plus lors de l'apparition des rotules au niveau des poteaux car le déplacement latéral est le plus prépondérant . A la ruine la période propre augmente brusquement pour atteindre une très grande valeur : c'est l'instabilité de la structure

## CONCLUSION GÉNÉRALE RECOMMANDATIONS

Au cours de ces dernières décennies, des progrès notables ont été accomplis dans la connaissance du comportement plastique des structures tant sur le plan théorique qu'expérimental. Les progrès ont permis aux règlements de calcul de faire une plus large place à la prise en compte de la plasticité dans le dimensionnement des structures. Par conséquent, il a été édifié un modèle mathématique basé sur l'utilisation pas-à-pas de la méthode générale des déplacements permettant l'étude du comportement élasto-plastique des structures. Le programme de calcul ainsi écrit permet de suivre tout le comportement de l'ossature jusqu'à la ruine totale ou partielle en donnant des résultats réalistes pour autant que les autres non linéarités ( fluage, non linéarités géométriques ) soient faibles.

Le calcul pas-à-pas semble être la méthode la plus juste pour vérifier une structure en plasticité. Il s'en suit qu'il peut évidemment être utilisé pour justifier des modifications qu'il serait souhaitable d'apporter aux règlements actuellement en vigueur en favorisant une utilisation plus rationnelle de la réserve de résistance offerte par le dimensionnement normalisé.

Ce calcul nous a permis en plus lors de notre étude de mettre en évidence le danger du surdimensionnement des poutres par rapport aux poteaux, ce qui est hélas le cas le plus fréquent dans les constructions conçues dans notre pays et que le règlement parasismique n'a pas soulevé. Les poutres de grandes portées sont à éviter car elles demandent de grandes sections transversales. Il serait par conséquent souhaitable de mentionner prochainement ce danger.

Dans l'étude dynamique, notre but n'était pas d'évaluer les forces sismiques mais simplement de voir l'évolution des caractéristiques dynamiques ( périodes propres et facteur de contribution ). Le résultat auquel nous avons abouti était sans doute prévisible. En effet, la diminution de la rigidité par suite de formation de rotules plastiques fait que les périodes de la structure augmentent, ce fait étant beaucoup plus accru lors du surdimensionnement des poutres.

Ce logiciel nous a permis en plus d'évaluer la ductilité des structures de rigidités variées à partir de courbes forces - déplacements .

Notre étude nous a ouvert une issue dans le vaste domaine de recherche et dans un soucis de continuité du travail en vue de l'obtention de résultats plus généraux qu' il serait intéressant de mettre en pratique. Pour cela , nos propositions pour les recherches futures peuvent s'orienter vers les points suivants :

-pour une meilleure représentation du comportement des structures , il serait souhaitable de prendre en compte :

\*> les effets du second ordre

\*> le fluage est le retrait pour les structures en béton armé

\*> l'effet de l'interaction M - N

\*> l'extrapolation pour des portiques dans l'espace ainsi que pour les treillis

- Par ailleurs , il serait souhaitable d'étudier l'effet des chargements non monotones et éventuellement les effets de chocs sur la rigidité . En effet , la dégradation de rigidité fait qu'à chaque cycle de charge et décharge , on se trouve en présence d'une autre structure . Les effets combinés de la plasticité et des grands déplacements s'en trouvent d'autant plus soulignés .

- BIBLIOGRAPHIE -

- [1] J.F. AUBOIN  
Calcul des structures et informatique ; EYROLLES 1983
- [2] Ch. MASSONNET , G. DEPREZ , R. MAQUOI , R. MULLER et G. FONDER  
Calcul des structures sur ordinateur tome 2 ; EYROLLES 1972
- [3] PIN CHUN WANG  
Calcul des structures par les méthodes numériques et matricielles ; DUNOD 1969
- [4] J.M. GERE , W. WEAVER  
Analysis of framed structures ; REINHOLD 1965
- [5] C.T.F. ROSS , T. JOHNS  
Computer analysis of skeletal structures , E. & F.N.SPON 1981
- [6] G. TOUZOT , G. DHATT  
Une présentation de la méthode des éléments finis ; MALOINE 1981
- [7] A. GHALI , M. NEVILLE  
Structural analysis
- [8] Stuart S.J. MOY  
Plastic methods for steel and concrete structures ; Mac MILLAN 1985
- [9] T.Z. BLAZYNSKI  
Applied elasto-plasticity of solids ; Mac MILLAN 1983
- [10] Y. LESCOUARC'H  
Programme de calcul en élasto-plasticité des structures planes . Revue construction métallique n° 1 , mars 1976
- [11] Y. GALEA  
Programme d'analyse élasto-plastique non linéaire des structures planes à barres ; revue construction métallique n° 4 , décembre 1978
- [12] L. GEMINARD , A. GIET  
Stabilité des constructions , tome 3 - Plaques , Poutres creuses , Plasticité ; DUNOD 1971
- [13] Idir ACHOUR  
Calcul élasto-plastique des ossatures en béton armé par rigidités sécantes ; Thèse de Magister E.N.P 1987

- [14] G. MOMAN , P. SARDA  
Calcul des structures hyperstatiques ; O.P.U 1978
- [15] A. CAPRA , V. DAVIDOVICI  
Calcul dynamique des structures en zone sismique ;  
EYROLLES 1982
- [16] M. BOUMHRAT , A. GOURDIN  
Méthodes numériques appliquées ; O.P.U 1983
- [17] A. STROHMEIER  
Fortran 77 ; EYROLLES 1985
- [18] Manuel d'utilisation du VAX
-

