

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ecole Nationale Polytechnique  
Département de Génie Electrique  
Laboratoire de Commande des processus



المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

**Commande  $H_{\infty}$  décentralisée  
appliquée sur un bras flexible à  
trois articulations**

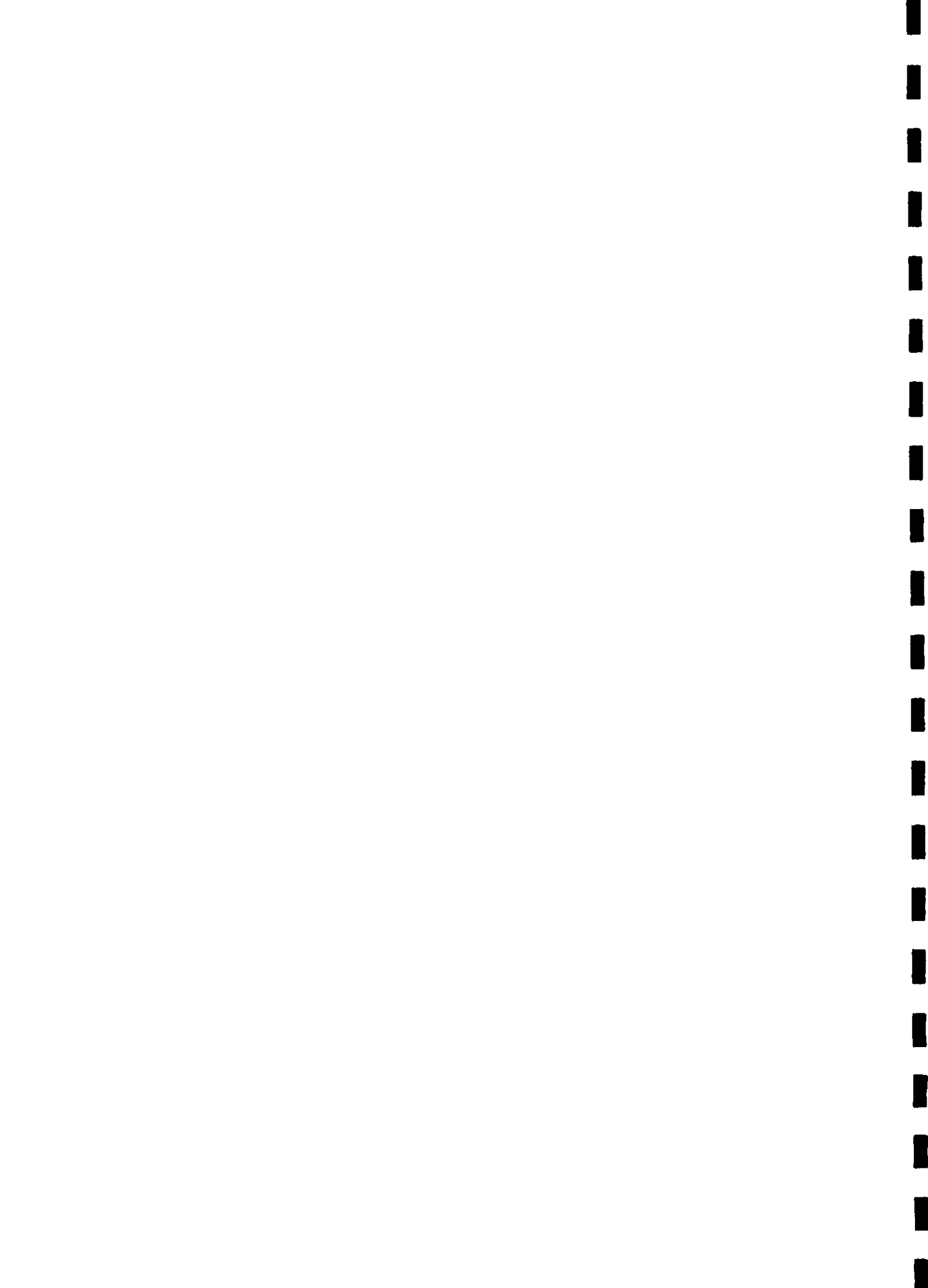
**Réalisé par:**

MAHI Mohamed Zakaria

**Proposé Par:**

- Mr M. Tadjine
- Mr D. Boukhetala

Année universitaire 2003 – 2004



Je remercie :

Mr Tadjine qui a été à l'origine de l'orientation vers ce travail. Sa disponibilité, la clarté de ses conseils, la permanence de son encouragement ainsi que son souci constant de rigueur ont été d'un grand apport lors de la réalisation de ce travail.

Mr Boukhtala qui a accepté avec beaucoup de bienveillance de codiriger ce travail et de m'avoir soutenu lors de son élaboration.

Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect et de ma gratitude.

A l'ensemble des enseignants de l'ENP

Je dédie ce travail à :

Mon père, ma mère, mon frère, ma sœur pour leur soutien.

A ma grand-mère pour son soutien et ses encouragements permanents et son souci constant de rigueur

A ma grand-mère pour son soutien

A l'ensemble de ma famille

A la mémoire de mon grand-père Ahmed

A Hania

A mes amis Dahmen, Djallil, Riadh, Rachid, Saïd, Lamine, Youcef, Amina, Amina, Asma...et tout ce que je n'ai pas cité et qui se reconnaîtront

# Sommaire

<b>Introduction</b>	4
<b>Chapitre I : Notions préliminaires</b>	13
I.1. Introduction	14
I.2. Notions élémentaires sur les asservissements	14
I.2.1. Equations et fonctions caractéristiques	16
I.2.2. Propriétés des asservissements	18
a- Stabilité	18
b- Performance	19
c- Bande passante	22
I.3. Conclusion	22
<b>Chapitre II : Commande <math>H_\infty</math> décentralisée</b>	23
II.1. Introduction	24
II.2. Asservissements robustes	24
II.2.1. Nécessité de la robustesse	24
II.2.2. Définition de la robustesse	25
II.2.3. Représentation des différents types d'incertitudes	26
a- Incertitudes additives	27
b- Incertitudes multiplicatives	28
c- Incertitudes additives inverse	28
d- Incertitudes multiplicatives inverse	28
e- Incertitudes par facteurs coprimés	29
II.3. Etude de la robustesse par les marges de stabilité classiques	30
a- Dans le cas SISO	30
b- Dans le cas MIMO	32
II.4. Robustesse face aux différents types d'incertitudes	34
a- Incertitudes additives	34
b- Incertitudes multiplicatives	35
c- Incertitudes additives inverse	35
d- Incertitudes multiplicatives inverse	36
e- Incertitudes par facteurs coprimés	37
II.5. La synthèse $H_\infty$	42
II.5.1. Le problème $H_\infty$ standard	42
II.5.2. Objectif de synthèse	44
II.5.3. Résolution du Problème $H_\infty$	46
a- Résolution par la méthode de DGKF	47

- Résolution du problème $H_{\infty}$	51
- Mise sous forme standard	52
b- Synthèse par factorisation première	52
- Première solution	53
- Conception du régulateur par loop-shaping	55
c- Résolution par contrainte d'Inégalité Matricielles Linéaires	57
II.6. Commande décentralisée	58
II.7. Application de la commande $H_{\infty}$ sur un modèle non linéaire	62
II.7.1. Commande par réseau de modèles locaux	62
II.7.2. Commande $H_{\infty}$ adaptative	62
II.7.3. Commande $H_{\infty}$ décentralisée	63
II.8. Conclusion	63
<b>Chapitre III : Modélisation du bras flexible</b>	65
III.1. Introduction	66
III.2. Hypothèses	66
III.2.1. Hypothèses liées aux parties non concernés par les flexibilités	66
III.2.2. Hypothèses liées aux flexibilités	66
III.3. Description du bras	67
III.4. Choix des référentiels	68
a- Référentiels « rigides »	68
b- Référentiels « flexibles »	68
III.5. Formalisme de Euler-Lagrange	69
III.5.1. Calcul de l'énergie cinétique	71
a- Première articulation	71
b- Deuxième articulation	73
c- Troisième articulation	76
d- Forme matricielle de l'énergie cinétique	79
III.5.2. Energie potentielle	81
III.5.3. Énergie dissipative	82
III.5.4. Application du formalisme de Lagrange	83
III.6. Mise sous la forme d'état de l'équation dynamique	84
III.7. Analyse modale	85
III.7.1. Introduction à la mécanique du solide	86
a- Discrétisation	88
b- Forme des modes pour différentes conditions aux limites	89
III.7.2. Calcul des différents modes de vibration d'une structure flexible	90
a- Encastrée-libre	92
b- Encastrée-inertie	93
III.8. Caractéristiques physiques du bras	94

III.9. Commande en boucle ouverte	95
III.10. Conclusion	97
<b>Chapitre IV : Application de la commande <math>H_{\infty}</math> décentralisée</b>	<b>98</b>
IV.1. Introduction	99
IV.2. Génération de la trajectoire	99
IV.3. Linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement	100
IV.4. Sources d'incertitudes	100
IV.4.1. Incertitudes multiplicatives	101
IV.4.2. Incertitudes paramétriques	104
IV.5. Commande d'un bras travaillant dans le plan horizontal	108
IV.6. Commande d'un bras travaillant dans un plan quelconque	113
IV.6.1. Compensation gravitationnelle	113
IV.6.2. Différents tests de robustesse	117
IV.7. Conclusion	131
<b>Conclusion</b>	<b>132</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>
<b>Annexe A : Outils mathématiques</b>	<b>135</b>
A.1. Rappels sur l'algèbre linéaire	136
A.1.1. Généralités	136
a- Matrice orthogonale	136
b- Matrice unitaire	136
c- Valeurs propres et vecteurs propres associés	136
d- Forme de Schur	136
e- Valeurs singulières	136
A.1.2. Décomposition en valeurs singulières	137
a- Définitions	137
b- Propriétés des valeurs singulières	137
A.2. Rappels sur les systèmes linéaires	138
A.2.1. Transformée de Laplace	138
A.2.2. Représentations d'un système	139
a- Fonction de transfert (Représentation externe)	139
b- Forme d'état d'un système (Représentation interne)	139
c- Factorisation copremière	140
d- Transformation linéaire fractionnaire (LFT)	143
A.2.3. Linéarisation d'un modèle	144
A.2.4. Pôles et zéros d'un système	145

A.2.5. Stabilité	145
a- Stabilité BIBO (Bounded Input/Bounded Output)	145
b- Stabilité interne	145
A.2.6. Normes de vecteurs, matrices, signaux et systèmes	146
a- Norme d'un vecteur	146
b- Norme d'une matrice	147
c- Norme d'un signal	147
d- Norme d'un système	148
A.2.7. L'hamiltonien	148



## Liste des figures

Figure I.1. : Boucle d'asservissement	15
Figure I.2. : Boucle de suivi sans perturbations	19
Figure II.1 : Famille de systèmes	27
Figure II.2. : Allure fréquentielle de la perturbation	27
Figure II.3 : Incertitudes additives	27
Figure II.4. : Incertitudes multiplicatives en entrée	28
Figure II.5. : Incertitudes multiplicatives en sortie	28
Figure II.6. : Incertitudes additives inverse	28
Figure II.7. : Incertitudes multiplicatives inverse en entrée	29
Figure II.8. : Incertitudes multiplicatives inverse en sortie	29
Figure II.9.a. : Incertitudes par facteurs comprimés à gauche	29
Figure II.9.b. : Incertitudes par facteurs comprimés à droite	29
Figure II.10. : Boucle de retour unitaire	30
Figure II.11. : Exemple de tracé de Lieu de Nyquist	31
Figure II.12. : Théorème des petit gain (première version)	32
Figure II.13. : Configuration du système pour le théorème du petit gain	33
Figure II.14.a. : Incertitudes additives	34
Figure II.14.b. : Incertitudes additives sous la forme du théorème du petit gain	35
Figure II.15.a. : Incertitudes multiplicatives en entrée	35
Figure II.15.b. : Incertitudes multiplicatives en sortie sous la forme du théorème du petit gain	35
Figure II.16.a. : Incertitudes additives inverses	35
Figure II.16.b. : Incertitudes additives inverses sous la forme du théorème du petit gain	36
Figure II.17.a. : Incertitudes multiplicatives inverses en sortie	36
Figure II.17.b. : Incertitudes multiplicatives inverses en sortie sous la forme du théorème du petit gain	36
Figure II.18. : Forme standard avec modèle incertain	42
Figure II.19. : Problème $H_\infty$ standard	43
Figure II.20. : Problème de sensibilité mixte généralisée	51
Figure II.21.a. : Conception du régulateur à partir du système augmenté	56
Figure II.21.b. : Conception du régulateur équivalent	56
Figure II.22. : Commande par réseau de modèles locaux	62
Figure II.23. : Commande $H_\infty$ adaptative	63
Figure III.1. : Bras flexible à trois articulations	67
Figure III.2. : k-ème référentiel	68
Figure III.3. : Barre en flexion	86
Figure III.4.a. : Barre encastrée-libre	89
Figure III.4.b. : Barre encastrée-inertie	89
Figure III.4.c. : Barre encastrée-inertie	89
Figure III.5.a. : Variation des trois angles du bras en régime libre à partir d'une position quelconque	95
Figure III.5.b. : Variation des trois variables modales des deux liens flexibles du bras en régime libre à partir d'une position quelconque	96
Figure III.6. : Position du bras à trois instants différents lorsque la commande se fait en boucle ouverte	96
Figure IV.1. : Principe de la boucle de commande	101

Figure IV.2.a. : Comparaison entre $G_{11}(s)$ (en pointillé) et $G_{11}^d(s)$ (en trait plein) pour $0^\circ < \theta_1 < 180^\circ$	103
Figure IV.2.b. : Comparaison entre $G_{22}(s)$ (en pointillé) et $G_{22}^d(s)$ (en trait plein) pour $0^\circ < \theta_2 < 180^\circ$	103
Figure IV.2.c. : Comparaison entre $G_{33}(s)$ (en pointillé) et $G_{33}^d(s)$ (en trait plein) pour $0^\circ < \theta_3 < 180^\circ$	104
Figure IV.3. : Fonction de sensibilité (en trait plein) et de sensibilité complémentaire (en pointillé) du modèle décentralisé	107
Figure IV.4. : Fonction de sensibilité (en trait plein) et de sensibilité complémentaire (en pointillé) du modèle linéarisé autour de l'origine	108
Figure IV.5. : Commande du bras flexible dans le plan horizontal de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$	109
Figure IV.6. : Commande du bras flexible dans le plan horizontal de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec erreur de 25% sur les modes	110
Figure IV.7. : Commande du bras flexible dans le plan horizontal de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec erreur de -25% sur les modes	111
Figure IV.8. : Commande du bras flexible dans le plan horizontal de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec erreur de -100% sur l'amortissement des modes	112
Figure IV.9. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance de tout le vecteur d'état	114
Figure IV.10. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides	115
Figure IV.11. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux	116
Figure IV.12. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de -25% sur les modes de flexibilités	117
Figure IV.13. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de -25% sur les modes de flexibilité et de -50% sur l'amortissement des modes de flexibilités	118
Figure IV.14. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 25% sur les modes de flexibilité et de -50% sur l'amortissement des modes de flexibilités	119
Figure IV.15. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de -100% sur l'amortissement des modes de flexibilités	120

Figure IV.16. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de -25% sur les modes de flexibilité et de -100% sur l'amortissement des modes de flexibilités	121
Figure IV.17. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 25% sur les modes de flexibilité et de -100% sur l'amortissement des modes de flexibilités	122
Figure IV.18. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 50% sur les modes de flexibilité et de -100% sur l'amortissement des modes de flexibilités	123
Figure IV.19. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 10% sur la charge	125
Figure IV.20. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 150% sur la charge	126
Figure IV.21. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 400% sur la charge	127
Figure IV.22. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [-150^\circ \ 120^\circ \ -90^\circ]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 400% sur la charge	128
Figure IV.23. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [-150^\circ \ 120^\circ \ -90^\circ]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 650% sur la charge	129
Figure IV.24. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$ vers $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$ avec des bruits hautes fréquences au niveau des capteurs	130
Figure A.1. : Fonction de transfert	139
Figure A.2. : Forme d'état d'un système	139
Figure A.3. : Transformation fractionnaire linéaire	143

## Liste des tableaux

Tableau I.1. : Correspondance entre le cahier des charges et les fonctions caractéristiques	17
Tableau II.1. récapitule tout les tests de robustesse auxquels devra répondre le régulateur $K$ pour tous les types d'incertitudes possibles	39
Tableau III.1. : Moments d'inertie pour différents types de surface	87
Tableau III.2. : Conditions aux limites pour une barre	91
Tableau III.3. : Equivalence des termes	91
Tableau III.4. : Différentes solutions	92
Tableau III.5. : Caractéristiques physiques du bras	94

## Bras flexibles

L'intérêt certain de l'industrie, en particulier spatiale, pour les robots à structure légère devient de plus en plus évident. Car, ils ont pour avantages majeurs une moindre consommation d'énergie, une meilleure transportabilité pour des performances équivalentes à celle des robots dits « rigides » constitués de matériaux lourds nécessitant l'utilisation d'actionneurs puissants. Seulement en contre partie de cette légèreté de structure, des modes mal amortis induisant des flexibilités apparaissent au niveau des liaisons qui doivent être alors pris en compte lors de la synthèse du régulateur donc au moment de la modélisation du bras.

Comme pour le cas rigide, on peut modéliser le bras en utilisant le formalisme d'Euler-Lagrange ou de Newton-Euler. Il faut en plus des variables classiques représentées sous la forme d'angles ou de distance, des coordonnées généralisées « fictives » [20]. Elles sont déterminées lors d'une analyse modale qui nous permet de calculer les modes hors-ligne en utilisant le principe de séparation que nous verrons au chapitre de la modélisation. D'autres techniques de modélisation, telle que la méthode des éléments finis [17], nous permet de déterminer à n'importe quel instant quelque soit la charge l'état du système. Mais même s'il est vrai que cette façon de procéder est souple, elle réclame la connaissance en d'autres termes la mesure des flexions à tout moment en utilisant des jauges extensiométriques le modèle obtenu ainsi sera lourd du fait du grand nombre de coordonnées généralisées à ajouter et plus sensible aux perturbations dues aux capteurs. On n'oubliera pas de mentionner la méthode acoustique qui utilise la notion de propagation d'une onde acoustique dans la structure. Mais, il est difficile voire impossible de décrire le système sous la forme d'une équation de propagation. Dans notre cas, on choisit d'utiliser la première méthode valable dans le cas réel.

Avant toute modélisation d'un système et plus particulièrement d'un robot flexible, il faut d'abord prendre en compte les objectifs à atteindre lors de son utilisation. Les décisions à prendre dans ce sens dépendent du contexte dans lequel il sera utilisé. Car, il existe une différence entre la conception d'un modèle destiné à être utilisé dans le cadre d'une commande linéaire et un autre destiné à une modélisation plus précise. Dans notre cas, on tentera de concevoir un modèle assez précis pour être proche de la réalité sans toutefois s'encombrer de calculs et de termes qui seront au final négligeables.

## Introduction

Le bras étudié dans notre cas est à trois articulations avec flexibilités sur les deux premières. On explique cette configuration par le fait que les bras à six degrés de liberté sont généralement sous la forme de deux premières articulations longues siège des flexions vu la légèreté de la structure. Au bout desquels, on trouve l'outil qui est en général à trois degrés de liberté et trop petit pour être flexible.[20]

## Commande $H_{\infty}$

Pour prendre en compte les différentes variations de modèles et atténuer les flexibilités, il apparaît nécessaire de concevoir une commande **robuste**. On entend par cela la conception d'un régulateur assurant un certain niveau de performance sans que la boucle de suivi ne soit atteinte par les différentes variations de classes prédéfinies qui ont pour origines[5] :

### - Dynamiques négligées :

Le système nominal est généralement linéaire, invariant dans le temps et d'ordre fini ce qui conduit nécessairement à une approximation de la réalité puisque le processus est plus complexe que cela.

### - Variation dans le temps :

Inévitablement la dynamique réelle du système change dans le temps cela peut être dû aux variations des conditions de travail telles que la température, la pression, l'humidité etc. mais aussi selon le point de fonctionnement particulièrement dans le cas du bras manipulateur comme nous allons le voir dans le chapitre de la modélisation.

### - Variation de la charge :

La dynamique du système peut aussi varier en fonction de la charge faisant varier la masse et l'inertie appliquée au bras manipulateur principalement dans le cas des lourdes charges.

- **Limitation de l'identification :**

Lorsqu'on utilise une identification du processus dans le cas de systèmes variant dans le temps ou avec des charges variables, il est certain qu'il y aura toujours une erreur due aux limitations de la méthode d'identification, des instruments de mesure, de la quantité d'information etc.

- **Actionneurs et capteurs :**

Une possible défaillance ou mauvaise qualité des actionneurs et capteurs devra être pris en compte lors de la synthèse de la commande.

- **Variation lors d'une production industrielle :**

Il est facile d'obtenir un prototype précis. Mais cela s'avérerait inutile si lors d'une production en série, il existe une forte variation par exemple dans le cas des lecteurs CD.

Parmi les commandes robustes d'actualité pour parer à ce genre d'incertitudes, nous pouvons citer la commande  $H_x$  décrite dans les années 80 par de Zames [10][11] qui concernait plutôt le rejet des perturbations. Mais, c'est Kimura [14] qui prend en compte le problème de robustesse en résolvant le problème de synthèse, grâce à une technique dite de nevanlinna-pick. Cependant, il faudra attendre les travaux de Francis et Doyle [9] repris dans l'ouvrage de Francis [8] pour voir apparaître une première synthèse des techniques parues jusque là sous la forme du **Problème standard**. La résolution du problème a été perfectionnée par l'algorithme de Glover-Doyle [7] avec l'utilisation de la forme d'état. Mais les méthodes de résolution ne s'arrêtant pas là, d'autres techniques utilisant d'autres formes de résolution telle que la méthode de Mc Farlane et Glover [15] utilisant la forme **Factorisé première normalisée** qui a pour avantage, comme nous le verrons plus tard au chapitre de la commande  $H_\infty$ , d'avoir moins de contraintes sur les hypothèses de départ. Une autre technique apparue en 1994 avec l'article de Gahinet et Apkarian [12] permet d'obtenir un ensemble de solutions par résolution du problème en utilisant les techniques LMI.

## Introduction

La commande  $H_\infty$  nous permet d'utiliser les acquis de l'automatique classique qui se base sur l'étude fréquentiel nous permettant de prendre en compte ainsi les différentes spécifications des performances demandées et ceux de l'automatique moderne se basant sur des méthodes de synthèse simples et puissantes en utilisant les variables d'état.

Dans le but de simplifier les calculs et d'être plus proche des objectifs à réaliser, la commande utilisée sera de type décentralisée très usitée dans le domaine de la robotique et des réseaux de distribution d'énergie. Il est ainsi plus facile de manipuler des systèmes monovariables permettant d'utiliser les techniques de pondérations difficiles à utiliser dans le cas multivariable. La décentralisation consiste tout d'abord par simplifier le modèle en annulant le terme gravité pour pouvoir obtenir une configuration de la matrice de transfert qui nous permettra de rendre la diagonale prépondérante par rapport au reste des éléments de la matrice de fonction de transfert.

L'objectif de ce travail est de synthétiser une commande  $H_\infty$  décentralisée avec compensation gravitationnelle nous permettant d'obtenir un régulateur valable pour tous les points de fonctionnements et robuste aux variations paramétriques telles que la mauvaise identification des modes de flexibilités et de leur amortissement.

## Organisation du travail

Le chapitre I introduit les contraintes et spécificités que doit avoir la forme de certaines fonctions caractéristiques de l'asservissement d'un système afin d'atteindre certains objectifs tels que la poursuite de référence, une commande modérée et robustesse face aux variation du système.

Au chapitre II, nous définirons tout d'abord les différentes structures d'incertitudes, ainsi que les différentes conditions de stabilité et de performances robustes. Puis après avoir formuler le problème standard, nous donnerons différentes méthodes de résolution. Enfin, nous clôturerons par les différentes conditions qui nous permettront d'effectuer la décentralisation.

Ensuite au chapitre III, nous modéliserons le bras en utilisant le formalisme de Lagrange et en émettant les hypothèses nécessaires sur les flexions pour simplifier le modèle.



## **I.1. Introduction**

Dans ce premier chapitre, nous allons voir les différentes contraintes que devra remplir un asservissement pour atteindre les différents objectifs que sont la poursuite de trajectoire, l'atténuation des bruits et l'obtention d'une commande modérée. Ces contraintes s'exprimeront à travers la forme de certaines fonctions caractéristiques que sont la fonction en boucle ouverte, les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaires.

Tous les outils mathématiques tels que les normes et les valeurs singulières, les différentes représentations tels que la fonction de transfert, la forme première ou la forme linéaire fractionnaire ainsi que les différentes propriétés d'un système tels que la stabilité ont été introduits au niveau de l'annexe A.

## **I.2. Notions élémentaires sur les asservissements**

L'automatique permet d'exploiter tous les moyens d'un système pour façonner son comportement. En boucle ouverte, le système possède ses propres dynamiques dictées par les relations entre ses entrées et sorties. En utilisant un retour, on pourra alors lui imposer ou plutôt tenter de soumettre ses sorties et ce malgré les perturbations liées en général à l'imperfection du modèle utilisé lors de la synthèse et aux aléas externes que nous détaillerons plus bas.

Etudiés en détail à travers les travaux de Bode et de Nyquist, les concepts obtenus bien qu'étant simples, les principes dégagés n'en restent pas moins fondamentaux. En effet, une simple analyse qualitative du système bouclé suffit pour en tirer les conclusions sur la performance, la précision et la robustesse de l'asservissement. Voyons cela plus en détail maintenant.

La boucle d'asservissement, liant les différents signaux de sorties au signaux d'entrées, se présente, en général, par le schéma ci-dessous :

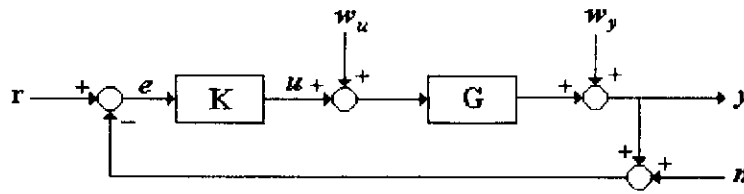


Figure I.1. : Boucle d'asservissement

On peut alors distinguer dans cette boucle trois parties distinctes :

- Le système à réguler  $G$ .
- Le régulateur ou compensateur  $K$ .
- Le comparateur calculant l'erreur entre les sorties et les références.

Aussi, nous avons à traiter plusieurs signaux qu'ils soient de nature internes ou externes au système. Ils se présentent comme suit :

- $r$  : Consigne ou signal de référence.
- $y$  : Signal de sortie.
- $e$  : Signal d'erreur
- $u$  : Signal de commande
- $w_u$  : Perturbation à l'entrée du système.
- $w_y$  : Perturbation à la sortie du système.
- $n$  : Bruit de mesure.

Il existe encore plusieurs autres types de configurations chacune utilisée selon les besoins de la régulation. La plus intéressante est la boucle de régulation à deux degrés de liberté qui nous permet entre autres d'effectuer un prétraitement du signal de référence améliorant ainsi les performances du système.

### 1.2.1. Equations et fonctions caractéristiques [16]

Les signaux du système sont liés entre eux par les relations suivantes :

$$y(s) = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}(r(s) - n(s)) + (I + G(s)K(s))^{-1}w_y(s) + G(s)(I + K(s)G(s))^{-1}w_u(s) \quad (1)$$

$$e(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}(r(s) - n(s) - w_y(s)) - G(s)(I + K(s)G(s))^{-1}w_u(s) \quad (2)$$

$$u(s) = K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}(r(s) - n(s) - w_y(s)) - K(s)G(s)(I + K(s)G(s))^{-1}w_u(s) \quad (3)$$

A partir de ces relations, on peut distinguer plusieurs fonctions de transfert caractéristiques ayant des rôles déterminant lors de l'étude et la synthèse des asservissements robustes. Ces fonctions sont :

- **Les fonctions de transfert en boucle ouverte**

$L_s = G(s)K(s)$  et  $L_c = K(s)G(s)$  qui ont un rôle essentiel dans la performance du système comme nous le verrons plus bas.

- **Les fonctions de sensibilité**

- **en sortie**

$S_s(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}$  Elle décrit la relation ou la sensibilité de la sortie  $y$  aux perturbations en sortie du système  $w_y$ . Elle détermine aussi la relation entre le signal d'erreur et les signaux externes  $r$ ,  $w_y$  et  $n$ .

- **en entrée**

$S_c(s) = (I + K(s)G(s))^{-1}$  Cette fonction de sensibilité décrit quant à elle la relation entre  $u + w_u$  et  $w_u$ .

- **Les fonctions de sensibilité complémentaire (Fonction de transmission)**

- **en sortie**

$T_s(s) = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}$  Elle détermine la relation la sortie  $y$  au signal de référence  $r$  ainsi qu'au bruit de mesure  $n$ . C'est à partir de cette fonction que l'on pourra déterminer la qualité de la poursuite de trajectoire.

<sup>1</sup> Elles sont généralement différentes dans le cas MIMO

- **en entrée**

$T_e(s) = (I + K(s)G(s))^{-1} K(s)G(s)$  Cette fonction quant à elle décrit la relation  $u$  et  $w_u$ .

- **Les fonctions**

- $G(s)(I + K(s)G(s))^{-1}$  Cette fonction permet d'exprimer la sensibilité de la sortie  $y$  aux perturbations  $w_u$  à l'entrée du système.
- $K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}$  Cette fonction enfin décrit l'influence des bruits  $w_v$  et les bruits de mesure  $n$  sur la commande  $u$ .

**Remarque :**

Cette fonction a aussi pour rôle de modeler la commande.

Ainsi, chaque spécification dans le cahier de charge peut donc être étudié par les fonctions de transfert liant les signaux d'entrée aux signaux de sortie concernés.

Spécification	Fonction de transfert associée
Suivi des trajectoires de référence	$S(s)^2$
Rejet ou atténuation de perturbation	$G(s)S(s)$
Atténuation des bruits sur la commande	$-K(s)S(s)$
Atténuation des bruits sur la sortie	$T(s)^3$
Commande modérée	$K(s)S(s)$ et $T(s)$

Tableau I.1. : Correspondance entre le cahier des charges et les fonctions caractéristiques

<sup>2</sup>  $S(s) = S_s(s)$

<sup>3</sup>  $T(s) = T_s(s)$

## 1.2.2. Propriétés des asservissements [1]

### a- Stabilité

Comme cela a été expliqué en annexe, il existe deux types de stabilité :

- **Stabilité BIBO** qui est assuré si à référence d'énergie finie correspond une sortie à énergie finie. Ceci est réalisé dans le cas des asservissements lorsque la fonction reliant ces deux signaux sera stable, autrement dit la sensibilité complémentaire, c'est-à-dire lorsqu'elle possède des pôles à partie réelle négative.

- **Stabilité interne** quant à elle est assurée lorsque tous les signaux internes et externes sont à énergie finie en réponse à un signal de référence à énergie finie. Ceci se traduit par le fait que toutes les fonctions de transfert caractéristiques du système auront des pôles à partie réelle négative.

- **Stabilité interne par factorisation copremière [16]**

Considérons la boucle de suivi représentée à la figure I.2. Et supposons que  $G(s)$  et  $K(s)$  admettent des double factorisation première. Les propositions suivantes sont alors équivalentes :

- La boucle d'asservissement est stable.
- $\begin{bmatrix} M & U \\ N & V \end{bmatrix}$  est inversible dans  $RH_\infty$ .
- $\begin{bmatrix} \tilde{V} & -\tilde{U} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}$  est inversible dans  $RH_\infty$ .
- $\tilde{M}V - \tilde{N}U$  est inversible dans  $RH_x$ .
- $\tilde{V}M - \tilde{U}N$  est inversible dans  $RH_\infty$ .

Il existe un contrôleur  $K_0(s)$  tel que :

$$K_0 = U_0 V_0^{-1} = \tilde{V}_0^{-1} \tilde{U}_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & U_0 \\ N & V_0 \end{bmatrix} = I$$

avec  $U_0, V_0^{-1}, \tilde{V}_0^{-1}$  et  $\tilde{U}_0 \in RH_\infty$ .

Ces deux notions de stabilité se rejoignent lorsque le système à réguler et le compensateur sont de réalisation minimale pouvant provoquer une simplification de pôle instable du système par un zéro du régulateur.

### b- Performance

On dit qu'un asservissement est performant lorsque l'erreur de poursuite  $e$  est nulle. Ceci peut être traduit en terme de fonction de transfert par un gain élevé de la fonction en boucle ouverte. Essayons maintenant d'expliquer cette affirmation.

Dans le cas d'une boucle de suivi simple décrite par la figure ci-dessous, les équations caractéristiques du système deviennent :

$$y(s) = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}r(s) \Leftrightarrow y(s) = T(s)r(s) \quad (4)$$

$$e(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}r(s) \Leftrightarrow e(s) = S(s)r(s) \quad (5)$$

$$u(s) = K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}r(s) \Leftrightarrow u(s) = K(s)S(s)r(s) \quad (6)$$

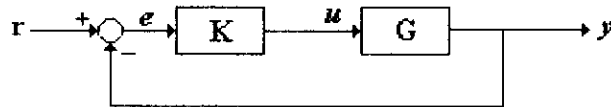


Figure 1.2. : Boucle de suivi sans perturbations

Lorsque, le gain en boucle ouverte sera grand. On obtiendra alors les simplifications suivantes :

$$T(s) \approx I \Rightarrow y(s) \approx r(s) \quad (7)$$

$$S(s) \approx 0 \Rightarrow e(s) \approx 0 \quad (8)$$

$$K(s)S(s) \approx I \Rightarrow u(s) \approx 0 \quad (9)$$

Ainsi, les variations du système telles que les non linéarités, dynamiques négligées n'influenceront plus sur les performances du système. Seulement dans le cas d'une boucle d'asservissement comme décrite par la figure 1.1., un grand gain en boucle ouverte pourra certes annuler l'erreur de suivi. Mais, on aura en contre partie une amplification des perturbations externes vu qu'il n'y a pas de prise en compte du caractère fréquentiel de ce type de signaux. En effet, les bruits de mesure qui sont de nature hautes fréquences seront amplifiés et auront pour inconvénient de perturber la sortie du système. Les perturbations à l'entrée et sortie du système quant à elles sont de nature basses fréquences. C'est pourquoi il

est nécessaire d'effectuer un « fenêtrage fréquentiel », c'est-à-dire que la sensibilité complémentaire est équivalente à la matrice identité pour de basses pulsations et nulle pour les hautes pulsations.

Un rejet des perturbation à la sortie du système se traduit par :

- $\bar{\sigma}(S_s(j\omega)) \ll 1$  pour diminuer l'effet de la perturbation en sortie  $w_y$ ,
- $\bar{\sigma}(T_s(j\omega)) \ll 1$  dans le cas des bruits de mesure  $n$ ,
- et  $\bar{\sigma}(S_s(j\omega)G(j\omega)) \ll 1$  pour diminuer l'effet de la perturbation en entrée  $w_u$ .

Un rejet des perturbation à l'entrée du système se traduit par :

- $\bar{\sigma}(S_e(j\omega)) \ll 1$  pour diminuer l'effet de la perturbation en sortie  $w_y$ , ainsi que les bruits de mesure  $n$ ,
- et  $\bar{\sigma}(K(j\omega)S_e(j\omega)) \ll 1$  pour diminuer l'effet de la perturbation en entrée  $w_u$ .

Ces contraintes devront être assurées, dans le cas des perturbations à l'entrée et à la sortie du système pour de basses fréquences et en hautes fréquences dans le cas des bruits de mesure.

$$\bar{\sigma}(S_s(j\omega)) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + G(j\omega)K(j\omega))} \ll 1 \Rightarrow \underline{\sigma}(I + G(j\omega)K(j\omega)) \gg 1 \quad (10)$$

$$\bar{\sigma}(S_e(j\omega)) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + K(j\omega)G(j\omega))} \ll 1 \Rightarrow \underline{\sigma}(I + K(j\omega)G(j\omega)) \gg 1 \quad (11)$$

D'après le théorème de Fan (voir annexe A) :

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) - 1 \leq \underline{\sigma}(I + G(j\omega)K(j\omega)) \leq \underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) + 1$$

$$\underline{\sigma}(K(j\omega)G(j\omega)) - 1 \leq \underline{\sigma}(I + K(j\omega)G(j\omega)) \leq \underline{\sigma}(K(j\omega)G(j\omega)) + 1$$

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) + 1} \leq \bar{\sigma}(S_s(j\omega)) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) - 1}$$

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(K(j\omega)G(j\omega)) + 1} \leq \bar{\sigma}(S_e(j\omega)) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(K(j\omega)G(j\omega)) - 1}$$

En conséquence :

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \gg 1 \quad (12)$$

$$\underline{\sigma}(K(j\omega)G(j\omega)) \gg 1 \quad (13)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(T_s(j\omega)) \ll 1 \Rightarrow \underline{\sigma}(S_s(j\omega)) \gg 1 &= \frac{1}{\underline{\sigma}(I + G(j\omega)K(j\omega))} \gg 1 \\ &\Rightarrow \overline{\sigma}(I + G(j\omega)K(j\omega)) \ll 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(T_c(j\omega)) \ll 1 \Rightarrow \underline{\sigma}(S_c(j\omega)) \gg 1 &= \frac{1}{\underline{\sigma}(I + K(j\omega)G(j\omega))} \gg 1 \\ &\Rightarrow \overline{\sigma}(I + K(j\omega)G(j\omega)) \ll 1 \end{aligned}$$

Toujours grâce au théorème de Fan et après calcul, on obtient pour les hautes fréquences :

$$\overline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \ll 1 \quad (14)$$

$$\overline{\sigma}(K(j\omega)G(j\omega)) \ll 1 \quad (15)$$

Le gain devra être grand pour de basse pulsation  $0 < \omega < \omega_c$  et petit pour de grande pulsation  $\omega > \omega_c$  (Ces hautes et basses pulsations se rapportent à la notion de pulsation de coupure  $\omega_c$ ). Ceci est vrai dans le cas SISO. Dans le cas MIMO, il faut prendre en compte l'aspect directionnel autrement dit amplifier certains canaux d'entrées/sorties et en atténuer d'autres.

En somme, la fonction en boucle ouverte devra avoir la forme suivante :

$$T(s) \approx \begin{cases} I & 0 < \omega < \omega_c \\ 0 & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (16)$$

$$S(s) \approx \begin{cases} 0 & 0 < \omega < \omega_c \\ I & \omega > \omega_c \end{cases} \quad (17)$$



### c- Bande passante

La bande passante d'une fonction de transfert  $G(s)$  est l'ensemble des pulsations pour lesquelles :

$$|G(j\omega)| > 1 \quad (18)$$

Et, la (les) pulsation(s) de coupure est (sont) définie(s) par :

$$|G(j\omega_c)| = 1 \quad (19)$$

Dans le cas d'un asservissement, elle correspond à la réponse en boucle ouverte  $G(s)K(s)$ .

Tel que dans le cas :

- SISO :  $|G(j\omega)K(j\omega)| > 1$
- MIMO :  $\sigma_{min}(G(j\omega)K(j\omega)) > 1^4$

### 1.3. Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons introduit la notion importante des asservissements qui nous permet répondre aux contraintes imposées au système :

- stabilité de la boucle d'asservissement,
- poursuite de référence,
- rejet des perturbations en entrée et sortie du système,
- rejet des bruits de mesure,
- commande modérée,
- et enfin la **robustesse**.

Ce concept de robustesse sera détaillé dans le chapitre suivant où nous allons voir aussi l'importance des boucles d'asservissements.

En somme pour assurer ces objectifs, il est nécessaire de modéliser la fonction de transfert en boucle ouverte en sortie ou en entrée en ayant un grand gain pour les basses fréquences et un petit gain pour les hautes fréquences. Et cela se répercute sur les formes ou réponses fréquentielles des fonctions caractéristiques que sont la fonction de sensibilité et de sensibilité complémentaire tels qu'énoncé aux points (16) et (17).

---

<sup>4</sup> Bande passante minimale

## II.1. Introduction

Dans ce second chapitre, nous commencerons par introduire et expliciter les notions d'incertitudes et de robustesse auxquelles doit faire face la boucle de suivi en se concentrant tout particulièrement sur les incertitudes non structurée où seul la borne de l'incertitude est connue. Et dont, nous verrons toutes les formes. Puis, nous démontrerons la nécessité de trouver des marges de stabilité autres que les marges de gain et de phase, qui définissent de manière plus sûre et plus précise la robustesse de la boucle de régulation sous la forme du théorème du petit gain qui sera par la suite énoncé dans un cadre englobant toutes les formes d'incertitudes grâce à la forme LFT<sup>1</sup>.

Puis, nous examinerons différentes techniques et algorithmes nous permettant de synthétiser un régulateur  $H_\infty$  en utilisant différentes structures typiques de synthèse telle que la sensibilité mixte généralisée et sa forme duale ou bien par la factorisation première normalisée et introduirons sommairement la synthèse par les techniques LMI<sup>2</sup>.

Ensuite, nous définirons la décentralisation qui nous permettra d'obtenir un régulateur décentralisé et énoncerons les conditions à remplir pour rendre ce régulateur fiable lorsqu'il sera appliqué au système réel.

Enfin, nous terminerons par les différentes techniques qui nous permettent d'appliquer la commande  $H_\infty$  sur un système non linéaire.

## II.2. Asservissements robustes

### II.2.1. Nécessité de la robustesse

Vu que la conception du régulateur se fait à partir d'un modèle nominal du système, modèle provenant soit des équations physiques ou de l'identification du système sous la forme d'équations différentielles ou en mesurant sa réponse fréquentielle. Mais comme cela a été

---

<sup>1</sup> Linear Fraction Transfer

<sup>2</sup> Linear Matrix Inequality

expliqué dans le chapitre d'introduction, le modèle obtenu ne sera qu'une approximation de la réalité ayant pour origine soit :

**Des perturbations externes** qui sont des signaux ou actions incertains provoquant des perturbations. Ils ont été introduits dans le chapitre précédent et ont pour origine :

- des perturbations de la commande  $w_u$ , provenant soit des erreurs de discrétisation ou de quantification, en particulier dans le cas d'utilisation de calculateurs numériques, ou lors de la présence des parasites sur la commande.
- des perturbations à la sortie du système  $w_y$ , provenant par exemple des conditions extérieures au système telles que la température et la pression dans le cas d'un réacteur chimique ou le vent pour un avion.
- les bruits de mesure  $n$  provenant des capteurs qui altèrent l'estimation de la sortie  $y$ .

Il ne faut pas oublier que ces signaux et actions externes ne modifient pas le comportement dynamique du système mais seulement la valeur de sa sortie.

**Facteurs incertains** regroupant les imperfections et variation du modèle dynamique. On peut les classer en deux types d'incertitudes :

- **Incertitudes dynamiques (non structurée)**  
Elle contient toutes les dynamiques négligées dans le modèle. Ne possédant qu'une borne supérieure sur l'amplitude de ces dynamiques, on doit alors s'assurer contre le pire cas se trouvant à la limite de cette borne.
- **Incertitudes paramétrique (structurée)**  
Elles sont liées soit aux variations des paramètres du modèle à cause d'une variation dans le temps, d'une mauvaise estimation ou à cause des dynamiques entrant en plusieurs points de la boucle.

### II.2.2. Définition de la robustesse

Comme cela a été vu au paragraphe précédent, la nature incertaine du modèle réel et la conception du régulateur à partir d'un modèle dit **nominal** rend nécessaire la prise en compte de ces variations de modèle même si ce modèle nominal contient la majorité des dynamiques

du système réel. Ainsi, cette incertitude nous conduit à travailler avec les **modèles incertains**. On les définit comme étant un ensemble de modèles mathématiques  $\Pi$  dont on connaît le modèle nominal et la borne des incertitudes.

$$\Pi = \{G_r = f(G, \Delta G); \forall \Delta / \beta < \sigma(\Delta G) < \alpha\} \quad (1)$$

Donc, la conception d'une commande robuste peut être définie comme suit :

*C'est la synthèse d'un régulateur robuste garantissant un niveau de performance inchangé quelque soit les variations contenues dans les dynamiques du système.*

On dit d'un régulateur qu'il assure :

- **une stabilité nominale** s'il garantit une stabilité interne du système nominal,
- **une stabilité robuste** s'il garantit une stabilité interne du système réel dans une certaine plage d'erreur,
- **des performances nominales** s'il garantit les performances désirées du système nominal,
- **des performances robustes** s'il garantit les performances désirées du système réel dans une certaine plage d'erreur.

### II.2.3.Représentation des différents types d'incertitudes

Les incertitudes peuvent être représentées par une estimation de l'amplitude maximale des incertitudes dynamiques. Mais lorsque, le modèle obtenu ne comporte pas beaucoup de non linéarités, on peut se restreindre à un modèle linéaire invariant dans le temps de l'incertitude dynamique. Elle est alors représentée par une fonction de transfert  $\Delta(s)$ . Le système réel  $G_r(s)$  peut alors être réécrit sous forme d'une somme du système nominal  $G(s)$  et de la perturbation  $\Delta(s)$  :

$$G_r(s) = G(s) + \Delta(s) \quad (2)$$

On obtient alors une famille de systèmes réels ayant la forme suivante :

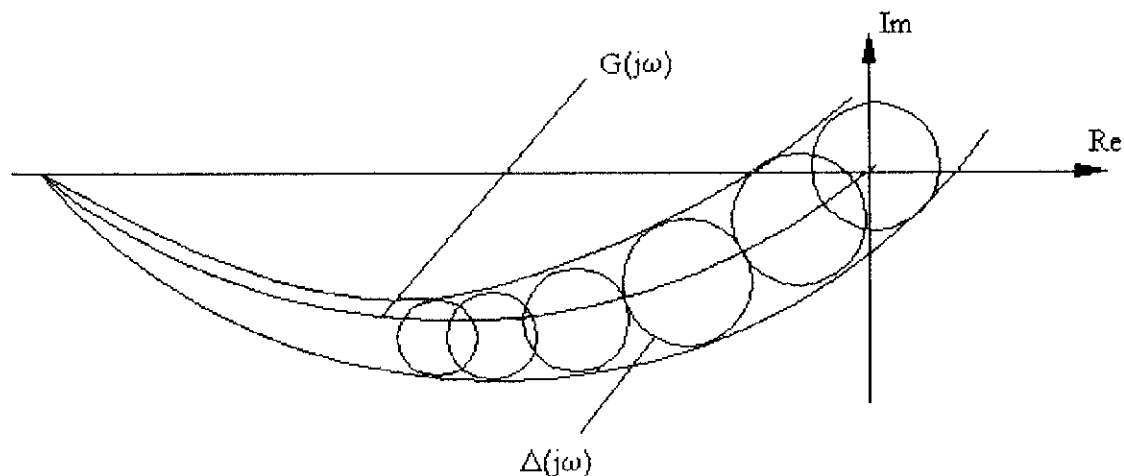


Figure II.1 : Famille de systèmes

Il faut garder à l'esprit que le système doit être BIBO stable. Et, on dispose en général d'une estimation de la perturbation  $\Delta(s)$  pondérée en fréquence traduisant le fait que le système est plutôt mieux connu aux basses qu'en hautes fréquences et a pour allure fréquentielle dans le cas SISO pour  $|\Delta(s)|$  la forme suivante suivante :

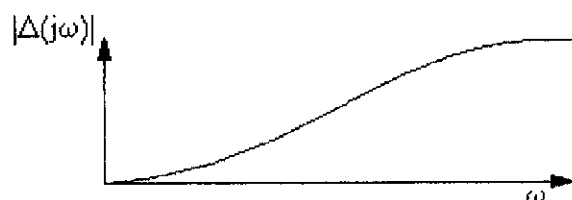


Figure II.2. : Allure fréquentielle de la perturbation

Il existe différentes manières de représenter ces incertitudes :

#### a- Incertitudes additives

C'est la représentation la plus simple de l'erreur dynamique. Elle est utilisée dans le cas de présence d'incertitudes paramétrique et de présence modes souples.

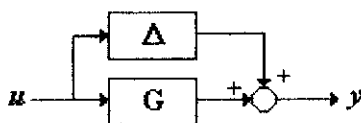


Figure II.3 : Incertitudes additives

**b- Incertitudes multiplicatives**

L'intérêt de cette représentation est le caractère relatif de l'erreur par rapport au modèle nominal  $G(s)$  ce qui est plus proche de la réalité. Car, elle est généralement donnée sous cette forme par exemple dans le cas des résistances.

On peut en distinguer deux types :

- **en entrée** utilisées dans le cas d'incertitudes sur actionneurs à l'entrée du système.

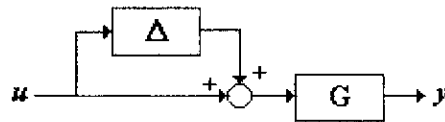


Figure II.4. : Incertitudes multiplicatives en entrée

- **en sortie** utilisées dans le cas d'incertitudes sur les capteurs.

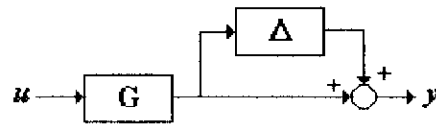


Figure II.5. : Incertitudes multiplicatives en sortie

**c- Incertitudes additives inverse**

En plus d'être utilisées dans le cas d'incertitudes paramétriques, elles sont aussi employées dans le cas de système instable.

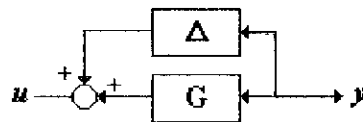


Figure II.6. : Incertitudes additives inverse

**d- Incertitudes multiplicatives inverse**

Elles ont le même intérêt que les incertitudes multiplicatives sont utilisées dans le cas de systèmes instables. On distingue aussi deux types d'incertitudes multiplicatives inverses.

- **en entrée** utilisées dans le cas d'incertitudes sur les actionneurs et de systèmes instables.

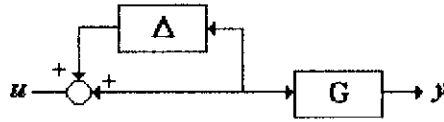


Figure II.7. : Incertitudes multiplicatives inverse en entrée

- **en sortie** utilisée dans le cas d'incertitudes sur les capteurs avec présence d'instabilité.

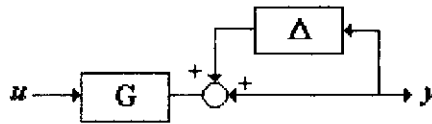


Figure II.8. : Incertitudes multiplicatives inverse en sortie

**Remarque :**

Il faut signaler que les incertitudes additives et multiplicatives inverses sont rarement rencontrées mais énoncées comme complément.

**e- Incertitudes par facteurs coprimes**

L'intérêt de cette représentation est que le système incertain peut être instable la rendant plus attrayante que les autres.

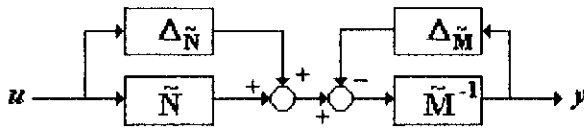


Figure II.9.a. : Incertitudes par facteurs coprimes à gauche

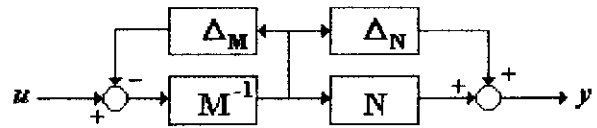


Figure II.9.b. : Incertitudes par facteurs coprimes à droite

### II.3. Etude de la robustesse par les marges de stabilité classiques

Nous allons maintenant à travers le critère de Nyquist étudié la stabilité du système par l'énoncé de certaines de ses caractéristiques dans le cas SISO. Puis, il sera généralisé dans le cas MIMO sous la forme du théorème du petit gain.

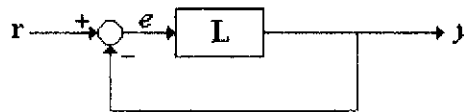


Figure II.10. : Boucle de retour unitaire

#### a- Dans le cas SISO

##### - Critère de Nyquist

###### o Cas où $L(j\omega)$ est instable

Dans le cas où  $L(j\omega)$  ne présente pas de pôles imaginaires purs, le système bouclé sera stable si et seulement si le tracé de  $L(j\omega)$  lorsque  $\omega$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  ne passe pas par le point  $(-1,0)$  et l'encercle un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de  $L(j\omega)$ .

###### o Cas où $L(j\omega)$ est stable (Critère du revers)

Cette fois, si  $L(j\omega)$  n'a pas de pôles instables, le système bouclé sera stable si et seulement si le tracé de  $L(j\omega)$  laisse le point  $(-1,0)$  à sa gauche lorsque  $\omega$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

L'intérêt de ce critère n'est pas seulement de déterminer la stabilité de la boucle fermée par le choix graphique du régulateur permettant de la stabiliser mais aussi de pouvoir étudier ses marges de stabilité (marges de gain et de phase).

En supposant que le système en boucle ouverte ne possède que des pôles à partie réelle négatives, le système reste stable s'il admet :



- une marge de gain vérifiant :

$$|L(j\omega_{180^\circ})| < 1$$

- une marge de phase vérifiant :

$$\varphi(L(j\omega_c)) > 0$$

Ces deux marges illustrent de combien le gain et la phase de la fonction de transfert de la boucle ouverte devront varier pour déstabiliser le système en entourant le point critique.

Considérons maintenant le système bouclé illustré à la figure II.10. et représentons un exemple de tracé de boucle ouverte dans le plan de Nyquist :

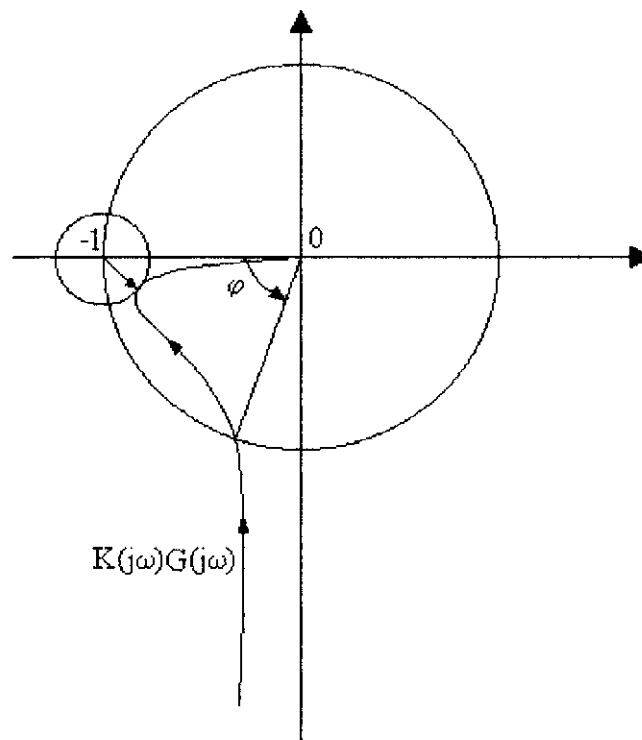


Figure II.11. : Exemple de tracé de Lieu de Nyquist

Bien qu'ayant une très bonne marge de gain infinie et de phase supérieure à  $60^\circ$ , la proximité du tracé au point critique révèle que le système en boucle fermée est en quelque sorte "nerveux". Et lorsque le modèle nominal déviara de peu, cela causera une instabilité en encerclant le point critique. Ceci parce que la conception du régulateur a été faite juste pour stabiliser le système sans prendre en compte les critères de robustesse auxquelles devra répondre l'asservissement.

Il est donc essentiel que la distance entre le lieu de Nyquist de  $L(j\omega)$  et le point critique soit suffisante pour assurer une bonne robustesse face aux variations du modèle. Voilà pourquoi la marge de module apparaît comme étant une bonne caractérisation de la robustesse de l'asservissement. Elle est définie comme étant le rayon du cercle centré en  $(-1,0)$  et tangent au lieu de Nyquist autrement dit :

$$\delta = \inf \{ |1 + K(j\omega)G(j\omega)| / \omega \in \mathfrak{R} \} \Leftrightarrow \delta = \frac{1}{\|S\|_\infty} \quad (3)$$

On remplace donc le concept de point critique par "zone critique".

Ainsi, une réduction du module de la fonction de sensibilité conduit à l'augmentation de la marge de module. En prenant en compte les propriétés décrites dans le chapitre précédent, et son équivalence à la marge de module, la fonction de sensibilité  $S$  paraît comme une mesure de la robustesse de la stabilité et des performances.

### b- Dans le cas MIMO

#### - Théorème II.1.a. : Théorème des petits gains (première version) [1]

Considérons la boucle d'asservissement de la figure III.12. où  $L$  est un système BIBO stable quelconque (opérateur de  $l_2$  dans  $l_2$ ).

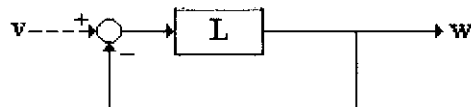


Figure II.12. : Théorème des petit gain (première version)

Une condition suffisante pour la stabilité interne de cette boucle est que  $L$  soit une contraction, c'est-à-dire que :

$$\forall u, v \in l_2, \|L(u) - L(v)\|_2 \leq \alpha \|u - v\|_2$$

où  $0 \leq \alpha < 1$  ( $\|\cdot\|_2$  est la norme naturelle des signaux de  $l_2$ )

Si  $L$  est linéaire, cette condition se réduit à  $\|L\|_\infty \leq 1$ .

#### Preuve :

La justification de ce théorème ne sera pas donnée ici. Mais, une preuve détaillée se trouve dans [1].

On suppose  $M$  et  $\Delta$  deux fonctions de transfert stables et linéaires.

- **Théorème II.1.b. : Théorème des petits gains (deuxième version) [1]**

La famille des systèmes  $(M, \Delta)$  représentée à la figure II.13. est stable pour

toutes les fonctions de transfert stables  $\Delta$  telles que  $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$  avec  $\gamma > 0$

(respectivement  $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$ ) si et seulement si  $\|M\|_\infty \leq \gamma$  (respectivement

$\|M\|_\infty < \gamma$ ).

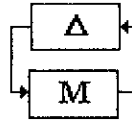


Figure II.13. : Configuration du système pour le théorème du petit gain

En d'autres termes, la famille des systèmes  $(M, \Delta)$  représentée à la figure II.13.

est stable pour toutes les fonctions de transfert stables  $\Delta$  telles que :  $\|M\Delta\|_\infty < 1$ .

**Remarque :**

Donc, il existe un régulateur  $K$  assurant via le théorème du petit gain une stabilité robuste de la boucle fermée et cela pour n'importe quelle fréquence :

$$\bar{\sigma}(M(j\omega)\Delta(j\omega)) < 1, \forall \omega \in \mathfrak{R} \quad (4)$$

et puisque :  $\bar{\sigma}(M(j\omega)\Delta(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(M(j\omega))\bar{\sigma}(\Delta(j\omega))$

alors :

$$\bar{\sigma}(M(j\omega))\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1 \Rightarrow \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < \frac{1}{\bar{\sigma}(M(j\omega))} \quad (5)$$

Ainsi plus la valeur singulière de  $M(j\omega)$  sera grande et plus l'erreur  $\Delta(j\omega)$  sera petite.

Plusieurs approches peuvent être utilisées pour démontrer ce théorème par exemple celle qui est basée sur le critère de Nyquist dans le cas MIMO. Mais, nous ne nous attarderons pas sur ce sujet là et pour plus de détail se référer à [19].

### II.4. Robustesse face aux différents types d'incertitudes

Le théorème du petit gain a été défini pour une forme générale du système et de l'incertitude. Essayons maintenant de déterminer la couple  $(M, \Delta)$  qui nous permettrait de faire face aux différentes formes d'incertitudes dynamiques citées plus haut. Cette fois l'erreur de modélisation se met sous la forme modulée suivante :  $W_1\Delta W_2$ . Ces gabarits  $W_1$  et  $W_2$  sont appelées pondération fréquentielle. Elles nous permettent de prendre en compte la dépendance fréquentielle et directionnelle de l'amplitude maximale de  $\Delta$  [5].

#### a- Incertitudes additives

Dans ce cas le modèle incertain sera sous la forme suivante :

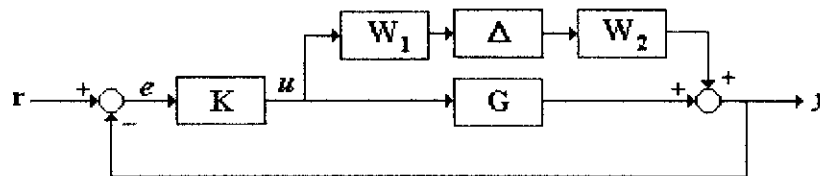


Figure II.14.a. : Incertitudes additives

Et en le réécrivant sous la forme décrite dans le théorème des petits gains, on obtient :

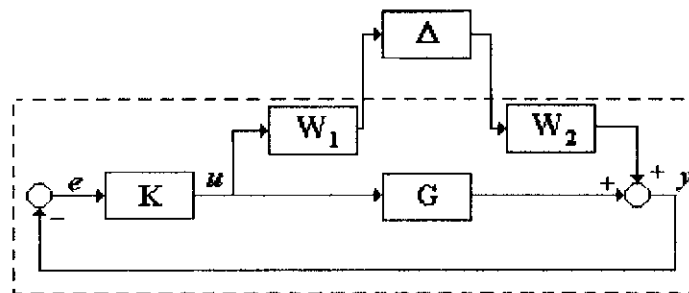


Figure II.14.b. : Incertitudes additives sous la forme du théorème du petit gain

Ainsi, le régulateur  $K$  stabilise  $G_r = G + W_1\Delta W_2$  pour tout  $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$  si et seulement si :

- $K$  stabilise le système nominal
- $\|W_2 K S W_1\|_\infty \leq \gamma$ .

De ce fait, l'influence des incertitudes additives sur la robustesse de la boucle est déterminée par :  $KS$ .

**b- Incertitudes multiplicatives**

Considérons maintenant le modèle du système décrit par :

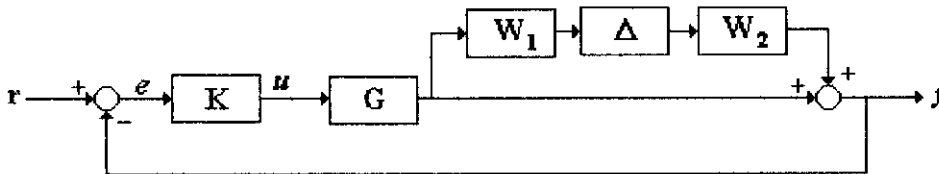


Figure II.15.a. : Incertitudes multiplicatives en entrée

Et en le réécrivant sous la forme décrite dans le théorème des petits gains, on obtient :

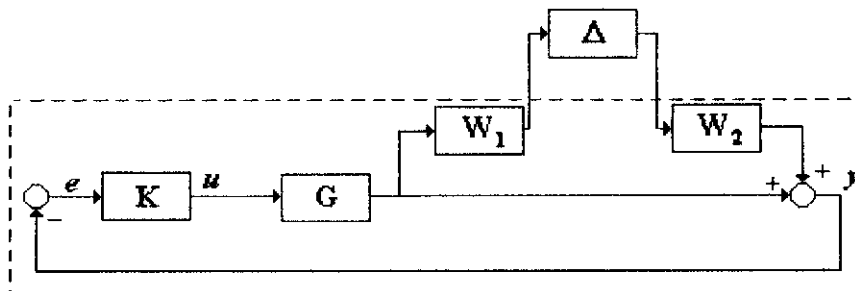


Figure II.15.b. : Incertitudes multiplicatives en sortie sous la forme du théorème du petit gain

Ainsi, le régulateur  $K$  stabilise  $G_r = (I + W_1 \Delta W_2)G$  pour tout  $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$  si et seulement si :

- $K$  stabilise le système nominal
- $\|W_2^T W_1\|_\infty \leq \gamma$ .

Cette fois-ci, l'influence des incertitudes multiplicatives en sortie sur la robustesse de la boucle est déterminée par :  $T$ .

**c- Incertitudes additives inverse**

Dans ce cas, le système est sous la forme suivante :

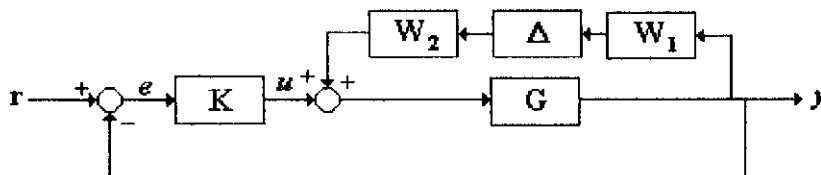


Figure II.16.a. : Incertitudes additives inverses

Et en le réécrivant sous la forme décrite dans le théorème des petits gains, on obtient :

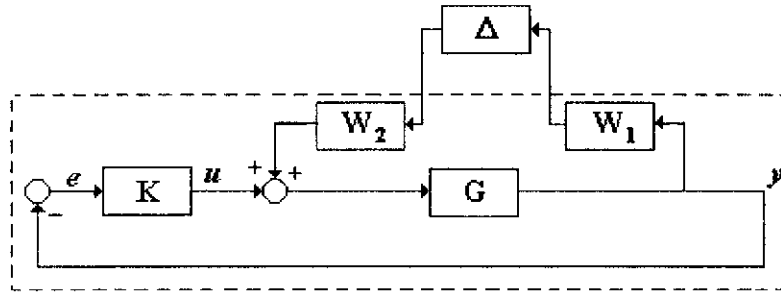


Figure II.16.b. : Incertitudes additives inverses sous la forme du théorème du petit gain

Ainsi, le régulateur  $K$  stabilise  $G_r = (I + GW_1\Delta W_2)^{-1}G$  pour tout  $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$  si et seulement si :

- $K$  stabilise le système nominal
- $\|W_2SGW_1\|_\infty \leq \gamma$ .

Cette fois-ci, l'influence des incertitudes additives inverses sur la robustesse de la boucle est déterminée par :  $SG$ .

**d- Incertitudes multiplicatives inverse**

Le système est sous la forme suivante :

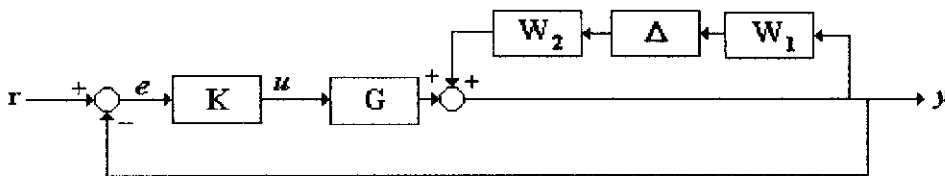


Figure II.17.a. : Incertitudes multiplicatives inverses en sortie

Et en le réécrivant sous la forme décrite dans le théorème des petits gains, on obtient :

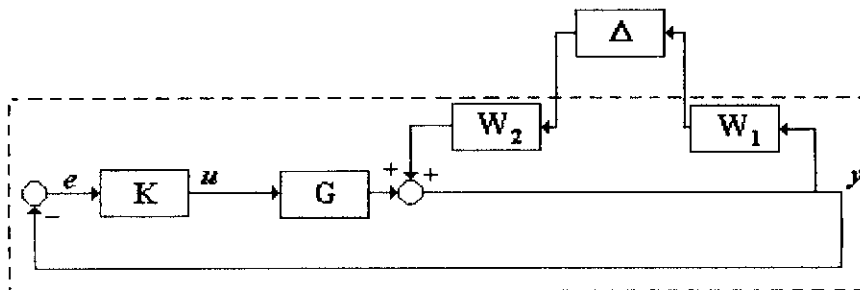


Figure II.17.b. : Incertitudes multiplicatives inverses en sortie sous la forme du théorème du petit gain

Ainsi, le régulateur  $K$  stabilise  $G_r = (I + W_1 \Delta W_2)^{-1} G$  pour tout  $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$  si et seulement si :

- $K$  stabilise le système nominal
- $\|W_2 S W_1\|_\infty \leq \gamma$ .

Cette fois-ci, l'influence des incertitudes additives inverses sur la robustesse de la boucle est déterminée par :  $S$ .

### e- Incertitudes par facteurs coprimés

Considérons le système nominal et réel défini par leur factorisation première à gauche :

$$G_r = (\tilde{M} + \Delta_{\tilde{M}})^{-1} (\tilde{N} + \Delta_{\tilde{N}})$$

$$G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$$

et on définit :  $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{\tilde{M}} & \Delta_{\tilde{N}} \end{bmatrix}$

Le système est stable intérieurement pour tout  $\|\Delta\|_\infty < 1$  si et seulement si :

$$\left\| \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_\infty \leq 1 \quad (6)$$

#### Preuve :

Soit  $K = UV^{-1} \in RH_\infty$  une factorisation première à gauche. Le système en boucle fermée est intérieurement stable si et seulement si :

$$\left( (\tilde{N} + \Delta_{\tilde{N}})I + (\tilde{M} + \Delta_{\tilde{M}})V \right)^{-1} \in RH_\infty$$

Sachant que le régulateur stabilise le système nominal, c'est-à-dire :

$$(\tilde{N}U + \tilde{M}V)^{-1} \in RH_\infty$$

Alors :  $\left( I + (\Delta_{\tilde{N}}U + \Delta_{\tilde{M}}V)(\tilde{N}U + \tilde{M}V)^{-1} \right)^{-1} \in RH_\infty$

$$\Leftrightarrow \left( I + \begin{bmatrix} \Delta_{\tilde{N}} & \Delta_{\tilde{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (\tilde{N}U + \tilde{M}V)^{-1} \right)^{-1} \in RH_\infty$$

**Récapitulatif :**

Le tableau II.1. récapitule tout les tests de robustesse auxquels devra répondre le régulateur  $K$  pour tous les types d'incertitudes possibles.

Type d'incertitude	Représentation pour le théorème des petits gains	Test de stabilité robuste
Additives		$\ W_2 K S_s W_1\ _\infty \leq 1$ $(K S_s = S_c K)$
Multiplicatives en sortie		$\ W_2 T_s W_1\ _\infty \leq 1$
Multiplicatives en entrée		$\ W_2 T_e W_1\ _\infty \leq 1$
Additives inverse		$\ W_2 S_s G W_1\ _\infty \leq 1$ $(S_s G = G S_c)$



<p>Multiplicatives inverse en sortie</p>		$\ W_2 S_s W_1\ _\infty \leq 1$
<p>Multiplicatives inverses en entrée</p>		$\ W_2 S_e W_1\ _\infty \leq 1$
<p>Factorisation première à gauche</p>		$\left\  \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} S_s \tilde{M}^{-1} \right\ _\infty \leq 1$
<p>Factorisation première à droite</p>		$\ M^{-1} S_s [K \ I]\ _\infty \leq 1$

**f- Forme général**

On peut représenter tous les modèles incertains par une LFT :

$$F_l(P, \Delta P) = P_{11} + P_{12} \Delta P (I - P_{22} \Delta P)^{-1} P_{21} \quad (8)$$

La forme standard  $P(s)$  associée aux trois formes principalement utilisées que sont les :

**- Incertitudes additives**

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\Delta P = \Delta \quad (10)$$

**- Incertitudes multiplicatives**

$$P = \begin{bmatrix} 0 & G \\ I & G \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\Delta P = \Delta \quad (12)$$

**- Incertitudes par factorisation première**

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \tilde{M}^{-1} & G \\ \tilde{M}^{-1} & G \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\Delta P = [\Delta_{\tilde{N}}, -\Delta_{\tilde{M}}] \quad (14)$$

Ainsi, on pourra représenter le système par un modèle généralisé des incertitudes comme cela est illustré à la figure II.18. On peut alors énoncé un théorème de stabilité robuste :

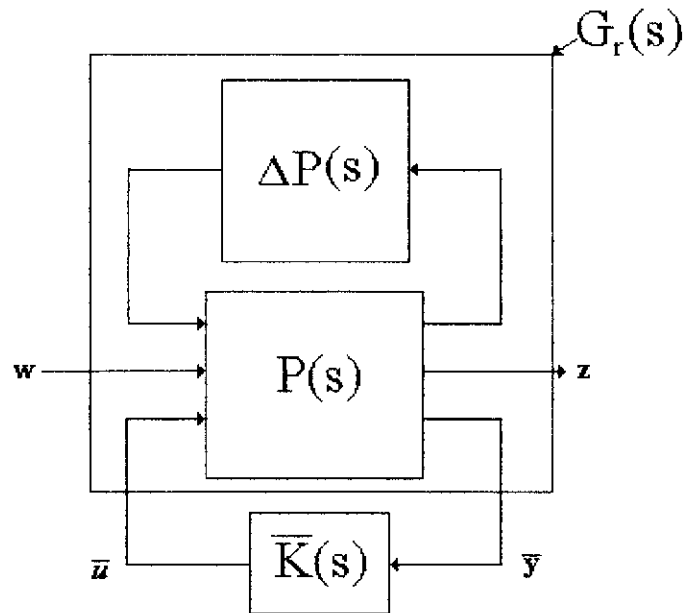


Figure II.18. : Forme standard avec modèle incertain

Pour tout  $P_{22}(s)$  de  $P(s)$  ayant une réalisation stabilisable et détectable, le régulateur  $\bar{K}(s)$  stabilise  $G_r = F_i(P, \Delta P)$  pour tout  $\|\Delta P\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$  avec  $\gamma > 0$ , si et seulement si :

- $\bar{K}$  stabilise le système nominal
- $\|F_i(P, \Delta P)\|_\infty \leq \gamma$ .

## II.5. La synthèse $H_\infty$

### II.5.1. Le problème $H_\infty$ standard

Sous sa forme la plus simple, il s'agit de la réjection de perturbation en minimisant l'effet d'une perturbation  $w$  qui est un signal d'énergie finie. Dont, l'effet se mesure sur le vecteur "coût"  $z$ . La commande du système,  $\bar{u}$ , est élaborée à partir de l'observation  $\bar{y}$ , qui provient de la loi de commande  $\bar{u} = \bar{K}\bar{y}$  synthétisée dans le but de minimiser l'impact de  $w$  sur  $z$ .

Voici le schéma illustrant la configuration du système :

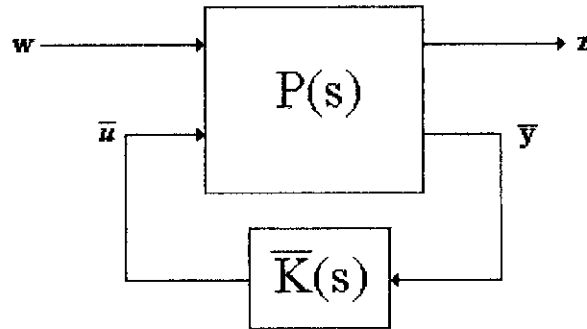


Figure II.19. : Problème  $H_\infty$  standard

La fonction de transfert  $P(s)$  permet d'interconnecter les signaux d'entrée et de sortie du système tel que :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (15)$$

Et vu le rebouclage sur la commande :

$$\bar{u} = \bar{K}(s)\bar{y} \quad (16)$$

La Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT) donnant la relation entre les deux signaux  $w$  et  $z$  est définie par :

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}\bar{K}(I - P_{22}\bar{K})^{-1}P_{21} \quad (17)$$

Puisque, l'objectif du régulateur sera de minimiser l'effet de la perturbation sur le vecteur coût. Donc, il est nécessaire de minimiser le rapport :  $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$  sur toutes les fréquences. En

d'autres termes minimiser le pire cas qui sera alors :

$$\sup_{w \neq 0} \left( \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \right) = \|F_l(P, \bar{K})\|_\infty \quad (18)$$

**Remarque :**

Le retour est de type positif voila pourquoi :  $\bar{K}(s) = -K(s)$ . On verra plus bas les raisons du signe du retour.

La formulation mathématique de ce problème est :

### Problème $H_\infty$ optimal

Minimiser  $\|F_l(P, \bar{K})\|_\infty$  sur l'ensemble des compensateurs  $\bar{K}(s)$  stabilisant le système de manière interne.

$$\|F_l(P, \bar{K})\|_\infty < \gamma_{opt} \quad (19)$$

pour  $\gamma_{opt} > 0$

### Problème $H_\infty$ sous-optimal

Etant donné  $\gamma > \gamma_{opt} > 0$ , trouver un compensateur  $\bar{K}(s)$  stabilisant le système de manière interne et assure :

$$\|F_l(P, \bar{K})\|_\infty < \gamma \quad (20)$$

## II.5.2.Objectif de synthèse

Les différents objectifs, devant être pris en compte lors de la synthèse, sont :

- le rejet des perturbations,
- admissibilité de la commande
- et robustesse.

Cela se traduit, comme cela a été vu au chapitre précédent, par différentes contraintes fréquentielles sur la plus petite et la plus grande valeur singulière des fonctions en boucle ouverte en sortie  $GK$  et en entrée  $KG$ , à savoir :

$$\begin{aligned}
 & - \underline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \gg 1 \\
 \text{ou} & & \text{pour } 0 < \omega < \omega_c \\
 & - \underline{\sigma}(K(j\omega)G(j\omega)) \gg 1 \\
 & - \overline{\sigma}(G(j\omega)K(j\omega)) \ll 1 \\
 \text{ou} & & \text{pour } \omega > \omega_c \\
 & - \overline{\sigma}(K(j\omega)G(j\omega)) \ll 1
 \end{aligned}$$

Cela se traduit par :

$$\left\| W_e S_s W_r \right\|_\infty < 1 \qquad \left\| W_y T_s W_{w_y} \right\|_\infty < 1$$

Et de la même manière :

$$\left\| W_{u+w_u} S_e W_{w_u} \right\|_\infty < 1 \qquad \left\| W_u T_e W_{w_u} \right\|_\infty < 1$$

### Problème de sensibilité mixte

Il consiste à rechercher un compensateur  $K$  assurant la stabilité interne de la boucle ainsi que :

$$\left\| \begin{array}{l} W_e S_s W_r \\ W_y T_s W_{w_y} \end{array} \right\|_\infty < 1 \qquad \left\| \begin{array}{l} W_{u+w_u} S_e W_{w_u} \\ W_u T_e W_{w_u} \end{array} \right\|_\infty < 1$$

### Preuve :

Trouver un régulateur assurant  $\left\| W_e S_s W_r \right\|_\infty < 1$  et  $\left\| W_y T_s W_{w_y} \right\|_\infty < 1$  peut être substitué en utilisant la Propriété de dilatation et de contraction par :

$$\max \left\{ \sigma_{\max} (W_e S_s W_r), \sigma_{\max} (W_y T_s W_{w_y}) \right\} \leq \left\| \begin{array}{l} W_e S_s W_r \\ W_y T_s W_{w_y} \end{array} \right\|_\infty \leq \sqrt{2} \max \left\{ \sigma_{\max} (W_e S_s W_r), \sigma_{\max} (W_y T_s W_{w_y}) \right\}$$

### Remarque :

Pour les fonctions de sensibilité en entrée, le même raisonnement peut être utilisé.

### Problème de sensibilité mixte généralisé

Il consiste à rechercher un compensateur  $K$  qui en plus d'assurer la stabilité interne de la boucle devra prendre en compte une commande modérée, tel que :

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} W_r S_s W_r \\ W_u K S_s W_r \\ W_y T_s W_{w_v} \end{array} \right\|_\infty < 1 & \quad \left\| \begin{array}{c} W_{u+w_u} S_e W_{w_u} \\ W_y G S_e W_{w_u} \\ W_u T_e W_{w_u} \end{array} \right\|_\infty < 1 \end{aligned} \quad (21)$$

**Remarque :**

Les fonctions de pondération,  $W_i$ , traduisent la dépendance fréquentielle et directionnelle des contraintes sur les fonctions en boucle ouvertes, nous permettant ainsi de façonner plus exactement les valeurs singulières de  $S_e$ ,  $S_s$ ,  $T_e$  et  $T_s$ .

**II.5.3. Résolution du Problème  $H_\infty$** 

Il existe plusieurs techniques de résolution de ce problème. Nous en détaillerons deux s'appuyant sur la résolution d'équations de Riccati, et donnerons une idée sur une troisième qui quant à elle utilise une approche LMI, tout en appréciant les avantages et inconvénients de chaque méthode.

- **Résolution par la méthode de DGKF<sup>3</sup>**

Elle est utilisée dans le cas d'incertitudes additives ou multiplicatives et se base sur un schéma itératif.

- **Résolution par factorisation première normalisée**

Elle est utilisée dans le cas d'incertitudes par factorisation première. Elle nous permet de réduire de beaucoup les calculs.

- **Résolution par techniques LMI**

Elle est utilisée pour tout type d'incertitudes et donne lors de la recherche de la solution un ensemble de régulateurs.

<sup>3</sup> J.C. Doyle, K. Glover, P. Khagonekar et B. Francis

### a- Résolution par la méthode de DGKF

#### - Résolution du problème $H_\infty$

Soit  $P(s)$  et  $\bar{K}(s)$  respectivement le système et le compensateur représenté à la figure II.19. rationnels et propres. Et supposons qu'ils soient de réalisation minimale et que  $\bar{K}(s)$  assure la stabilité interne du système.

Le système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

et sa description interne est définie comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \bar{y} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (23)$$

Avec :  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\bar{y} \in \mathfrak{R}^{p_2}$ ,  $\bar{u} \in \mathfrak{R}^{m_2}$ ,  $z \in \mathfrak{R}^{p_1}$  et  $w \in \mathfrak{R}^{m_1}$

La solution par variable d'état n'est applicable que sous les hypothèses suivantes :

- P1)  $(A, B_2, C_2)$  est stabilisable et détectable nous assurant alors l'existence d'un régulateur qui assure la stabilité interne du système.  
 P2) Les matrices  $D_{12}$  et  $D_{21}$  doivent être de rang plein.  
 P3)

$$\begin{aligned} \text{rang} \begin{pmatrix} j\omega I - A & -B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} &= n + m_2 \\ \text{rang} \begin{pmatrix} j\omega I - A & B_1 \\ -C_2 & D_{21} \end{pmatrix} &= n + p_2 \end{aligned} \quad \forall \omega \in \mathfrak{R} \quad (24)$$

Autrement dit,  $P_{12}(s)$  et  $P_{21}(s)$  n'ont pas de zéros sur l'axe imaginaire.



Ces trois hypothèses, connues sous le nom de Condition de Régularité, ont pour but d'assurer les contraintes suivantes [1] :

- P1) Elle nous garantit la stabilité interne du feedback.
- P2) C'est une condition suffisante pour garantir un régulateur propre, c'est-à-dire que toutes les commandes interviendront lors de la régulation.
- P3) Cela nous garantit l'existence d'une solution de l'équation de Riccati. Dont, nous verrons le rôle plus bas.

D'autres hypothèses dites de normalisation nous permettant de simplifier les calculs :

$$P4) \quad D_{12}^T(D_{12}, C_1) = (I, 0) \text{ et } D_{21}(D_{21}^T, B_1^T) = (I, 0)$$

$$P5) \quad D_{22} = 0 \text{ et } D_{11} = 0$$

### **Théorème II.2.**

Sous les hypothèses énoncées ci-dessus (P1 – P5), il existe alors un régulateur  $\overline{K}(s)$  stabilisant le système de manière interne et assure :

$$\|F_r(P, \overline{K})\|_\infty < \gamma \quad (25)$$

Si et seulement si :

- 1) les équations de Riccati :

$$XA + A^T X + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)X + C_1^T C_1 = 0 \quad (26)$$

$$YA + A^T Y + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)Y + B_1 B_1^T = 0 \quad (27)$$

ont des solutions stabilisantes uniques  $X_\infty$  et  $Y_\infty$ , respectivement. En d'autres termes, les matrices hamiltoniennes  $H_\infty$  et  $J_\infty$ , associées aux équations (26) et (27), ne possèdent pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} \quad J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix} \quad (28)$$

2) ces solutions vérifient aussi :

$$X_\infty \geq 0, Y_\infty \geq 0 \text{ et } \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$$

où  $\rho(\cdot)$  est le rayon spectral

Sous ces conditions l'ensemble des correcteurs  $\bar{K}(s)$  est donné par :

$$\bar{K}(s) = F_i(K_a, \Phi) \quad (29)$$

où  $\Phi \in RH_\infty$  de dimension  $m_2 \times p_2$  arbitraire vérifiant :  $\|\Phi\|_\infty < \gamma$

$K_a(s)$  admet quant à lui la représentation d'état est comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \bar{u} \\ u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a & Z_\infty B_2 \\ C_a & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \bar{y} \\ y_a \end{bmatrix} \quad (30)$$

Avec :  $A_a = A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_2^T C_2$

$$B_a = Z_\infty Y_\infty C_2^T$$

$$C_a = -B_2^T X_\infty$$

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$$

Où :  $x_a \in \mathfrak{R}^{n_a}$  est le vecteur d'état interne du régulateur,

$\bar{u} \in \mathfrak{R}^{m_2}$  est le vecteur commande entrée du système  $P(s)$ ,

$\bar{y} \in \mathfrak{R}^{p_2}$  est le vecteur observation du système,

$u_a \in \mathfrak{R}^{m_2}$  est le vecteur entrée de  $\Phi(s)$ ,

$y_a \in \mathfrak{R}^{p_2}$  est le vecteur sortie de  $\Phi(s)$ .

Pour le cas particulier où  $\Phi(s) = 0$ , on obtiendra alors un régulateur dit **central**  $K_c(s)$ . Dont, la représentation d'état sera cette fois :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \bar{y} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Ce régulateur sera strictement propre et d'ordre égal à celui du système  $P(s)$ . Et lorsque,  $\gamma$  approche  $\gamma_{opt}$  cela conduit à une singularité des formules, c'est-à-dire que  $I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty$  ne sera plus inversible. Mais, il s'avérerait que cela conduit à la réduction d'ordre du régulateur un

nombre de fois égal à la chute de rang de  $I - \gamma_{opt}^{-2} Y_\infty X_\infty$ , réduction provenant de la simplification de pôle(s) à l'infini.

Afin de calculer le gain  $H_\infty$ -optimal, on peut utiliser l'algorithme connue sous le nom de  $\gamma$ -itération. Partant du fait que  $\gamma_{opt}$  est la valeur minimale pour laquelle les deux conditions énoncées au théorème II.2., on pourra choisir un intervalle  $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$  contenant  $\gamma_{opt}$  tels que  $\gamma_{max}$  vérifie ces conditions ce qui ne sera pas le cas de l'autre borne de l'intervalle  $\gamma_{min}$ . Ainsi à chaque itération, on élimine la moitié de cet intervalle après avoir tester les conditions du théorème II.2. sur le point médian :

$$\gamma = \frac{\gamma_{min} + \gamma_{max}}{2} \quad (32)$$

Deux cas se présenteront à nous alors soit :

- les conditions sont vérifiées. On rejette la moitié droite de l'intervalle.
- les conditions ne sont pas vérifiées. On rejette alors la moitié gauche de l'intervalle.

On continuera ces itérations jusqu'à arriver à une précision désirée pour  $\gamma_{opt}$ .

Le principal intérêt de cette méthode est bien évidemment sa simplicité. Sauf qu'elle possède quelques faiblesses :

- les hypothèses de régularité,
- le mauvais conditionnement de  $X_\infty$  et  $Y_\infty$  peuvent conduire à des difficultés numériques notamment au voisinage de  $\gamma_{opt}$ ,
- le compensateur optimal obtenu compensera par des zéros les pôles stables du système, ce qui est nuisible dans le cas de présence de modes souples. Car lorsque le système réel dévient du modèle nominal, on obtiendra alors une boucle possédant des pôles et des zéros très mal amortis. D'où, la nécessité de choisir un régulateur qui ne soit exactement calé sur le système.

**Remarque :**

- 1) Dans le cas où  $\gamma \rightarrow \infty$ , le compensateur central tend vers le compensateur optimal obtenu pour un problème Linéaire Quadratique Gaussien (LQG).
- 2) Le régulateur obtenu sera d'ordre égal à celui du système et de pondérations d'où la nécessité de faire appel aux algorithmes de réduction d'ordre.

**- Mise sous forme standard**

Voyons maintenant comment un problème de sensibilité mixte peut être transformée en un problème standard pour pouvoir lui appliquée la méthode explicitée plus haut (Algorithme de  $\gamma$ -itération ou DGKF). Il s'agira de trouver la correspondance entre les signaux de sortie et d'entrée des deux configurations. Ainsi :

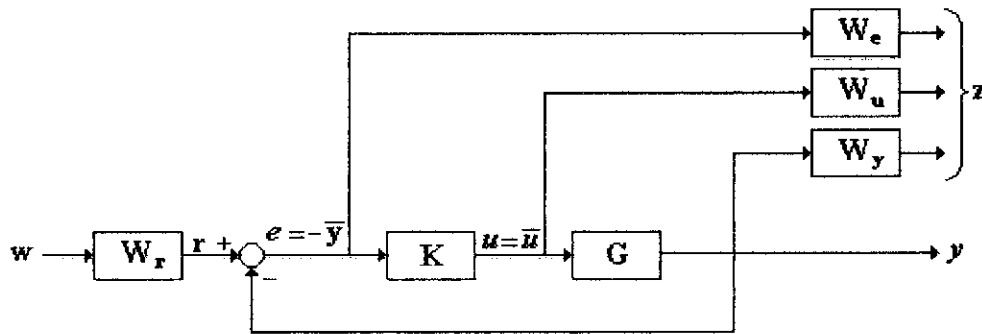


Figure II.20. : Problème de sensibilité mixte généralisée

- les signaux de sortie  $z$  et  $\bar{y}$  correspondent d'après l'énoncé du problème standard :

$$\circ z = \begin{bmatrix} W_e e \\ W_u u \\ W_y y \end{bmatrix}$$

$$\circ \bar{y} = -e = -(r - Gu)$$

- les signaux d'entrée  $w$  et  $\bar{u}$  :

$$\circ w = \begin{bmatrix} W_r^{-1} r \\ W_{w_y}^{-1} w_y \end{bmatrix}$$

$$\circ \bar{u} = u$$

Ainsi :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Avec :

$$P_{11}(s) = \begin{bmatrix} W_r W_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{12}(s) = \begin{bmatrix} -W_v G \\ W_u \\ W_y G \end{bmatrix}$$

$$P_{21}(s) = -W_r$$

$$P_{22}(s) = G$$

**Remarque :**

On pose la sortie d'observation  $\bar{y}$  est définie comme étant l'opposée du signal d'erreur  $e$ . Le compensateur obtenu  $\bar{K}(s)$  sera alors aussi l'opposé de  $K(s)$ .

$$\bar{K}(s) = -K(s)$$

Obtenant ainsi un retour positif.

**b- Synthèse par factorisation première**

Voyons maintenant la méthode développée par Mc Farlane et Glover, basée sur la factorisation première normalisée, elle a pour avantages :

- simplicité lors de la synthèse du régulateur,
- calcul de solution qui serait impossible à trouver avec d'autres méthodes dans le cas de système instable,
- fiabilité des résultats obtenus.

Nous commencerons d'abord par énoncer l'algorithme simple puis, nous introduirons sa variation pondérée.

- **Première solution**

On rappelle que si  $G(s)$  possède une factorisation première à gauche normalisée, elle pourra être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} G = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \\ \tilde{M}\tilde{M}^* + \tilde{N}\tilde{N}^* = I \end{cases} \quad (33)$$

Par dualité, on dit qu'elle possède une factorisation à droite si elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} G = NM^{-1} \\ M^*M + N^*N = I \end{cases} \quad (34)$$

Les matrices définissant les deux factorisations normalisées peuvent être déduite à partir de la représentation d'état minimale de  $G(s)$  [16].

Soit  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ . On a alors :

$$\begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} = C(sI - A + YC^T C)^{-1} \begin{bmatrix} B & -YC^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ -B^T X \end{bmatrix} (sI - A + BB^T X)^{-1} B + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (36)$$

où  $X$  et  $Y$  sont des matrices définies positives, solutions de l'équation de Riccati :

$$A^T X + XA - XBB^T X + C^T C = 0 \quad (37)$$

$$AY + YA^T - YC^T C Y + BB^T = 0 \quad (38)$$

Soit  $G(s)$  ayant une factorisation première à gauche normalisée définie en (33) et de forme LFT donnée en (13) et (14) avec :

$$F_l(P, \bar{K}) = \begin{bmatrix} I \\ \bar{K} \end{bmatrix} (I - G\bar{K})^{-1} \tilde{M}^{-1} = \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + GK)^{-1} \tilde{M}^{-1} \quad (39)$$

Avec  $\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{\tilde{M}} & \Delta_{\tilde{N}} \end{bmatrix}$  est l'ensemble des perturbations admissibles.

Lorsque le système possède une factorisation à gauche normalisée, la solution correspondant au problème optimal et sous optimal possède une forme simple. On peut alors énoncer les propriétés suivantes :

- Le régulateur  $\bar{K}$  stabilise le système d'une manière interne et satisfait :

$$\left\| \begin{bmatrix} I \\ \bar{K} \end{bmatrix} (I - G\bar{K})^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_\infty \leq \gamma = \varepsilon^{-1} \quad (40)$$

si et seulement si  $\bar{K}$  possède une factorisation à droite normalisée :

$$\bar{K} = UV^{-1} \quad (41)$$

pour tout  $U$  et  $V$  satisfaisant la relation suivante :

$$\left\| \begin{bmatrix} -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}^* \right\|_\infty \leq (1 - \gamma^{-2})^{\frac{1}{2}} = (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

- La solution optimale donne :

$$\inf_{\bar{K}} \left\| \begin{bmatrix} I \\ \bar{K} \end{bmatrix} (I - G\bar{K})^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_\infty = \left\{ 1 - \left\| \begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \right\|_{H^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

- La marge de stabilité maximale est :

$$\varepsilon_{max} = (\gamma_{min})^{-1} = \left\{ 1 - \left\| \begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \right\|_{H^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_{sup}(YX)}} > 0 \quad (44)$$

- Tous les régulateurs optimaux sont donnés par l'équation (41) où  $U$  et  $V$  satisfont :

$$\left\| \begin{bmatrix} -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}^* \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \right\|_{H^2} < 1 \quad (45)$$

Les preuves de ces propriétés peuvent être trouvées soit [13] [15].

Les deuxième et troisième propriétés montrent que l'algorithme de  $\gamma$ -itération n'est pas nécessaire pour retrouver le régulateur optimal vu que la marge de stabilité maximale peut être déterminée d'avance. Ainsi grâce à l'extension de Nehari [8], il sera alors possible de trouver une solution.

Ainsi pour tout  $\gamma > \gamma_{min}$ , le correcteur central stabilisant le système contenant toutes les incertitudes est donné par la relation suivante :

$$K(s) = B^T X (sI - A + BB^T X - \gamma^{-2} ZYC^T C)^{-1} \gamma^{-2} ZYC^T \quad (46)$$

$$Z = (I + YX - \gamma^{-2} I)^{-1} \quad (47)$$

On peut voir que le correcteur obtenu est de conception simple. Et, les équations de Riccati (37) et (38) sont mieux conditionnées par rapport aux équations utilisées lors de l'algorithme de  $\gamma$ -itération.

- **Conception du régulateur par loop-shaping**

Parce que  $G = \tilde{M}^{-1} \tilde{N}$  est une factorisation première normalisée, on peut alors écrire :

$$\left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I - G\bar{K})^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I - G\bar{K})^{-1} \tilde{M}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (48)$$

$$\left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I - G\bar{K})^{-1} \tilde{M}^{-1} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I - G\bar{K})^{-1} \begin{bmatrix} I & G \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (49)$$

$$\left\| \begin{bmatrix} (I - G\bar{K})^{-1} & (I - G\bar{K})^{-1} G \\ K(I - G\bar{K})^{-1} & K(I - G\bar{K})^{-1} G \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} (I + GK)^{-1} & (I + GK)^{-1} G \\ K(I + GK)^{-1} & K(I + GK)^{-1} G \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (50)$$

Ainsi, (40) implique les relations suivantes :

$$\|S\|_\infty \leq \gamma \quad (51)$$

$$\|SG\|_\infty \leq \gamma \quad (52)$$

$$\|KS\|_\infty \leq \gamma \quad (53)$$

$$\|KSG\|_\infty \leq \gamma \quad (54)$$

On reconnaît là un problème  $H_\infty$  standard avec un critère quatre blocs, prenant en compte toutes les fonctions de transfert caractéristiques du système. Ce critère contient alors la qualité de la stabilité et de la performance robuste. Vu que les objectifs visés dépendent de la fréquence, il est nécessaire d'inclure des pondérations pour pouvoir mettre à profit les avantages plus qu'intéressant liés à la conception du régulateur.



En conséquence, nous allons ajouter un pré compensateur  $W_1(s)$  et un post compensateur  $W_2(s)$ , comme cela est illustré dans la figure (II.21.a.), définissant un système augmenté :

$$G_A = W_2 G W_1 \tag{55}$$

On calculera alors un régulateur  $K_A(s)$  pour stabiliser le système augmenté. Le correcteur final est obtenu par une simple manipulation des blocs correspondant aux pondérations  $W_1(s)$  et  $W_2(s)$ , comme cela est illustré sur la figure (II.21.b.).

$$K = W_1 K_A W_2 \tag{56}$$

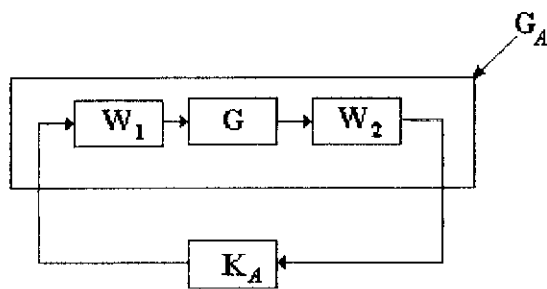


Figure II.21.a : Conception du régulateur à partir du système augmenté

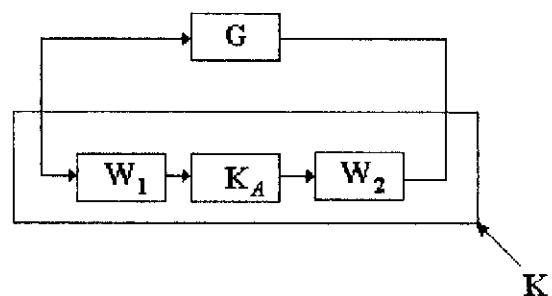


Figure II.21.b : Conception du régulateur équivalent

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \gamma_{A,min} = \epsilon_{A,max}^{-1} &= \inf_{K_A} \left\| \begin{bmatrix} I \\ \overline{K_A} \end{bmatrix} (I - G_A \overline{K_A})^{-1} \begin{bmatrix} I & G_A \end{bmatrix} \right\|_\infty \\ &= \left\{ 1 - \left\| \begin{bmatrix} \tilde{N}_A & \tilde{M}_A \end{bmatrix} \right\|_H^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \inf_K \left\| \begin{bmatrix} W_1^{-1} S W_2^{-1} & W_1^{-1} S G W_1 \\ W_2 \overline{K} S W_2^{-1} & W_2 \overline{K} S G W_1 \end{bmatrix} \right\|_\infty \end{aligned} \tag{57}$$

qui est une forme pondérée de l'équation (50). Si d'autres formes de pondérations, impossibles à réaliser avec cette configuration, sont désirées mieux vaut revenir à l'algorithme  $\gamma$ -itération.

**Remarque :**

Ici aussi, le régulateur obtenu sera d'ordre égal à celui du système et de pondérations d'où la nécessité de le réduire après élimination des modes non commandable et non observable.

où  $G_{ij}(s)$  est une fonction de transfert propres, réelle et rationnelles,

$u \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur des entrées du système (commande),

$y \in \mathfrak{R}^p$  est le vecteur des sorties du système,

$m$  est le nombre d'entrées du système,

$p = m = l$  est le nombre de sorties du système.

Lorsque le modèle du système est tel que les termes d'interconnexions soient stables et petits dans un certain sens que nous verrons plus bas, on peut dès lors les considérer comme étant des erreurs de modélisation.

Voyons maintenant quels sont les critères utilisés pour pouvoir juger de la qualité de l'approximation. Il y a deux manières de faire soit en prenant en facteur les termes importants dans le sens des pôles dominant comme cela a été fait dans [16] soit en approximant les termes diagonaux. Dans les deux cas cela nous conduit au théorème de l'existence de la décentralisation suivant :

#### **Théorème II.4.**

Etant donné une matrice de transfert  $G(s)$  la factorisation suivante est toujours possible

$$G(s) = P(s)G_D(s) \quad (65)$$

$$G_D(s) = \text{diag}(G_i^D(s)), \quad i = \overline{1, l} \quad (66)$$

où  $P(s)$  est une fonction de transfert propres, réelle et rationnelles représentant l'erreur d'approximation.

#### **Preuve :**

En explicitant l'expression de  $G(s)$ , on obtient :

$$G(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & \cdots & P_{1l}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & \cdots & P_{2l}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{l1}(s) & P_{l2}(s) & \cdots & P_{ll}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}^D(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_{22}^D(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & G_{ll}^D(s) \end{bmatrix} \quad (67)$$

$$\Rightarrow G(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s)G_{11}^D(s) & P_{12}(s)G_{11}^D(s) & \cdots & P_{1l}(s)G_{11}^D(s) \\ P_{21}(s)G_{22}^D(s) & P_{22}(s)G_{22}^D(s) & \cdots & P_{2l}(s)G_{22}^D(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{l1}(s)G_{ll}^D(s) & P_{l2}(s)G_{ll}^D(s) & \cdots & P_{ll}(s)G_{ll}^D(s) \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$G_{ij}(s) = P_{ij}(s)G_{ii}^D(s) \Rightarrow \frac{\text{num}(G_{ij}(s))}{\text{den}(G_{ij}(s))} = \frac{\text{num}(P_{ij}(s))}{\text{den}(P_{ij}(s))} \frac{\text{num}(G_{ii}^D(s))}{\text{den}(G_{ii}^D(s))} \quad (69)$$

Donc pour assurer une décomposition de matrice propre et réelle en matrices propres et réelles, il est nécessaire de considérer les hypothèses suivantes :

$$d^\circ(\text{num}(G_{ij}(s))) = d^\circ(\text{num}(P_{ij}(s))) + d^\circ(\text{num}(G_{ii}^D(s))) \quad (70)$$

$$d^\circ(\text{den}(G_{ij}(s))) = d^\circ(\text{den}(P_{ij}(s))) + d^\circ(\text{den}(G_{ii}^D(s))) \quad (71)$$

$i, j = \overline{1, l}$

Ainsi cette décomposition nous permet de :

- mettre les modes dominant stables du système  $G(s)$  dans la matrice diagonale  $G_D(s)$ ,
- pouvoir obtenir une matrice  $G_D(s)$  à phase minimale,
- le reste des modes soit instables soit insignifiant sont contenus dans la matrice  $P(s)$ .

On peut réécrire la décomposition (65) sous la forme d'une incertitude multiplicative :

$$G(s) = (I + W_1(s)\Delta(s)W_2(s))G_D(s) \quad (72)$$

$$P(s) = I + W_1(s)\Delta(s)W_2(s) \quad (73)$$

A ce moment là, on revient au cas d'une incertitude multiplicative en sortie. D'après le théorème du petit gain (Théorème II.1.), le régulateur sera alors valable dans les deux cas du système réel et du système sous forme décentralisée à la condition, c'est-à-dire qu'il sera robuste, si et seulement si :

$$\|W_2TW_1\|_\infty \leq 1 \quad (74)$$

pour  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ .

---

<sup>4</sup> num : Numérateur  
den : Dénominateur

Vu que la synthèse du régulateur se fera selon la seconde méthode, c'est-à-dire via la factorisation première, voyons maintenant comment quantifier la qualité du régulateur en utilisant cette dernière forme.

### Théorème II.5.

Il existe un régulateur synthétisé à partir du modèle décentralisé qui stabilisera  $G = (\tilde{M} + \Delta_{\tilde{M}})^{-1}(\tilde{N} + \Delta_{\tilde{N}})$  et  $G_D = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$  tant que :

$$\|\Delta\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \Delta_{\tilde{M}} & \Delta_{\tilde{N}} \end{bmatrix} \right\|_\infty < \frac{1}{\gamma} < 1 \quad (75)$$

### Preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème du petit gain tel que le modèle nominal soit la forme décentralisée  $G_D(s)$  et le système réel quant à lui sera le système de départ  $G(s)$ .

### Remarque :

Si  $\|\Delta\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \Delta_{\tilde{M}} & \Delta_{\tilde{N}} \end{bmatrix} \right\|_\infty > 1$ , il est évident qu'il sera alors nécessaire d'utiliser le loop-shapping afin de manipuler l'erreur de modélisation.

Enfin, résumons maintenant les étapes de synthèse à partir du modèle décentralisée :

- 1) Décomposer le modèle  $G(s)$  en :

$$G(s) = P(s)G_D(s) \quad (76)$$

$$G_D(s) = \text{diag}(G_i^D(s)), \quad i = \overline{1, I} \quad (77)$$

Tel que :

$$d^\circ(\text{num}(G_{ij}(s))) = d^\circ(\text{num}(P_{ij}(s))) + d^\circ(\text{num}(G_{ij}^D(s))) \quad (78)$$

$$d^\circ(\text{den}(G_{ij}(s))) = d^\circ(\text{den}(P_{ij}(s))) + d^\circ(\text{den}(G_{ij}^D(s))) \quad i, j = \overline{1, I} \quad (79)$$

- 2) Synthétiser le régulateur  $H_\infty$  par facteurs coprimes normalisés.
- 3) Vérifier que l'erreur de modélisation :

$$\|\Delta\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \Delta_{\tilde{M}} & \Delta_{\tilde{N}} \end{bmatrix} \right\|_\infty < \frac{1}{\gamma} < 1 \quad (80)$$

Si cela n'est pas le cas, revenir au point 2) en utilisant la méthode du loop-shapping pour pouvoir obtenir une erreur de modélisation respectant la condition (80).

## II.7. Application de la commande $H_\infty$ sur un modèle non linéaire

Comme la commande qui a été expliquée plus haut ne s'applique que sur les systèmes linéaires, on peut proposer plusieurs solutions pour pouvoir l'appliquer sur les systèmes généralement rencontrés dans la réalité et qui contiennent des non linéarités.

### II.7.1. Commande par réseau de modèles locaux

Elle consiste en la détermination de plusieurs régulateurs  $H_\infty$  correspondant à plusieurs points de fonctionnement contenus dans la plage de travail du bras manipulateur. La commande finale sera la somme pondérée des commandes obtenues à partir des différents régulateurs synthétisés. L'inconvénient majeur de cette méthode se trouve dans le fait que le choix des points de fonctionnement sera ardu vu qu'il faudra en prendre assez pour obtenir une réponse qui sera de bonne qualité tout en se limitant dans leurs nombres.

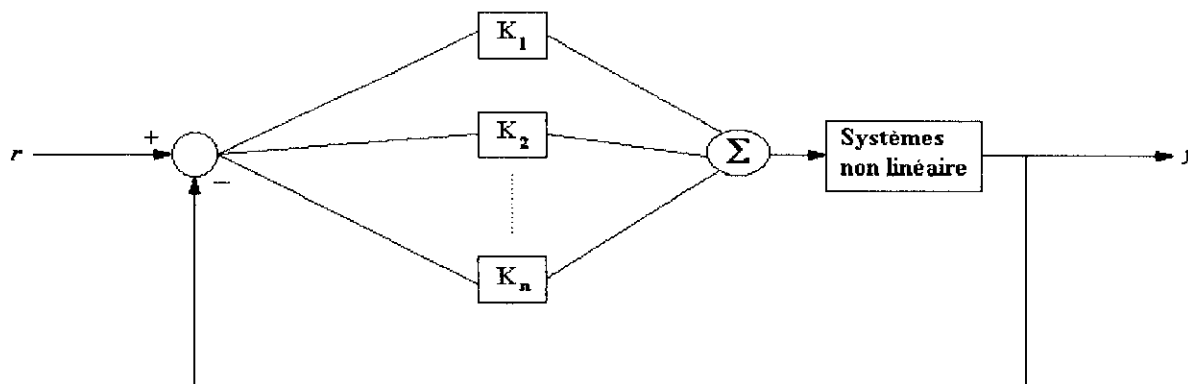


Figure II.22. : Commande par réseau de modèles locaux

### II.7.2. Commande $H_\infty$ adaptative

Elle a pour principe de rechercher un régulateur correspondant au point de fonctionnement du système à un instant donné en utilisant un algorithme d'adaptation paramétrique. Il est vrai que cette deuxième solution est plus intéressante que la première. Mais, la grande quantité de calculs à effectuer à chaque instant la rend difficile à réaliser vu qu'il faudra une grande puissance de calcul et demande de faire appel à des algorithmes pouvant être lourds et

contraignants en particulier dans le cas des robots flexibles où il faudra utiliser des capteurs pour évaluer la valeur des flexibilités.

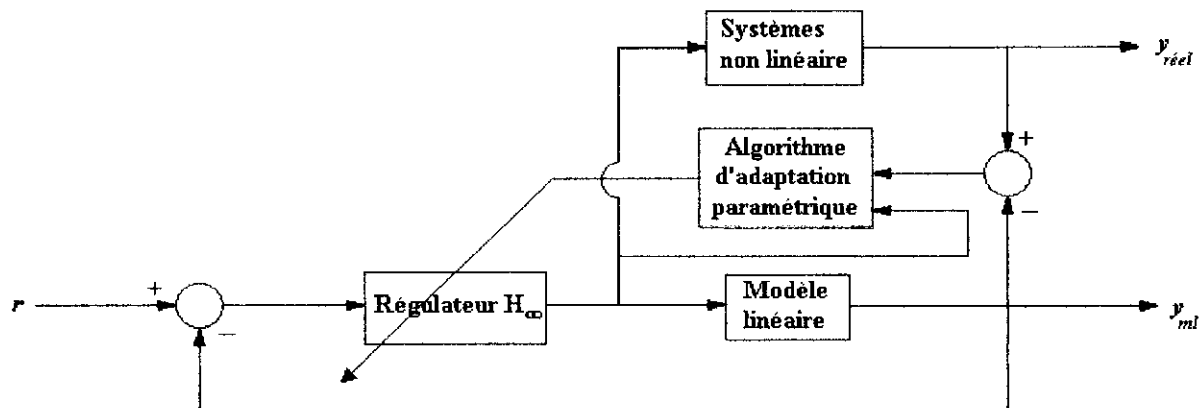


Figure II.23. : Commande  $H_\infty$  adaptative

### II.7.3. Commande $H_\infty$ décentralisée

Cette dernière technique consiste à choisir un modèle nominal décentralisé et de synthétiser un régulateur correspondant à chaque modèle se trouvant sur la diagonale. Elle a pour intérêt de nous permettre d'utiliser tous les acquis de la synthèse des régulateurs dans le cas SISO nous permettant d'utiliser la notion de pondération fréquentielle d'une manière plus précise. Le régulateur final devra être robuste aux variations dues à la décentralisation et au changement du point de fonctionnement. C'est précisément cette méthode qui sera utilisée dans notre cas.

## II.8. Conclusion

Après avoir introduit les différentes formes d'incertitudes représentant les variations de la réponse fréquentielle du système réel, nous avons énoncé le théorème du **petit gain** qui a un rôle primordial lors de la synthèse du régulateur  $H_\infty$  dont la solution a été trouvée par le biais des différents algorithmes :

- DGKF ou  $\gamma$ -itération,
- factorisation première normalisée,
- techniques LMI.

Régulateur nous ayant permis de prendre en compte les différentes contraintes auxquelles doit répondre la boucle de régulation telles que :

- suivi de la trajectoire,
- rejet de perturbations,
- robustesse face aux variations de la réponse fréquentielle du système.

Nous préférons choisir la seconde technique étant la plus simple, la plus fiable et applicable sur tout type de modèle stable ou non. Elle sera aussi applicable lors de la décentralisation du modèle linéaire tout en respectant la condition énoncée en (75).

### III.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous aborderons une partie importante de ce projet qui est la modélisation du bras. Après avoir énoncé les hypothèses liées aux parties rigides et flexibles du bras, nous utiliserons le formalisme d'Euler-Lagrange avec les simplifications adéquates pour obtenir un modèle proche de la réalité. Puis, nous mettrons sous forme d'état le modèle du système pour qu'il soit exploitable lors de la synthèse du régulateur. Puis, nous expliquerons l'analyse modale qui nous permettra de déterminer les modes vibratoires d'une barre donc des liaisons flexibles du bras. Et enfin, nous donnerons les caractéristiques du bras qui sera utilisé et ferons quelques essais en boucle ouverte.

### III.2. Hypothèses

Avant de débiter la modélisation du bras, il est nécessaire de prendre en considération les hypothèses suivantes qui sont de deux types :

#### III.2.1. Hypothèses liées aux parties non concernées par les flexibilités

- On considère les actionneurs comme des points matériels dont la position du centre de gravité détermine leur position.
- Les frottements sont de nature visqueuse et de type linéaire par rapport à la vitesse.
- La troisième articulation est rigide.
- La masse est distribuée d'une façon linéaire par rapport à l'abscisse  $x$ , c'est-à-dire  $dm_i = \rho_i dx_i$ .

#### III.2.2. Hypothèses liées aux flexibilités

- Les déplacements angulaires dus aux flexibilités sont assez petits pour permettre les approximations suivantes :
  - o L'angle géométrique dû à la flexion du  $i$ -ème bras peut être approximé

$$\text{par : } \left( \frac{\partial w_{i,x_i}}{\partial x_i} \right)_{x_i=l_i} = w'_{i,x_i}.$$



- $\cos(w'_{i,x_i}) \approx 1$
  - $\sin(w'_{i,x_i}) \approx w'_{i,x_i}$
  - $\cos(\Omega + w'_{i,x_i}) \approx \cos(\Omega) - w'_{i,x_i} \sin(\Omega)$
  - $\sin(\Omega + w'_{i,x_i}) \approx \sin(\Omega) + w'_{i,x_i} \cos(\Omega)$
- Tout terme en relation avec la flexion ou sa dérivée au carré sera négligé.
  - Le centre de masse de chaque bras flexible est considéré comme invariant vu les faibles déplacements.

### III.3. Description du bras

C'est un bras à trois articulations dont les deux premiers sont flexibles. Le déplacement est défini par la somme de deux angles l'un dû au couple appliqué et le second est dû aux flexibilités, solution de l'équation d'Euler-Bernouilli et défini sous la forme d'une combinaison linéaire d'une fonction spatiale multipliée par une coordonnée temporelle. Il est caractérisé par trois liens de longueur  $l_i$  et de masse  $m_i$ ,  $i = \overline{1,3}$  et les charges au bout de chaque bras  $m_i$ ,  $i = \overline{4,6}$ . Les deux premières sont les actionneurs et la troisième se trouvant au bout du dernier lien variera selon la charge.

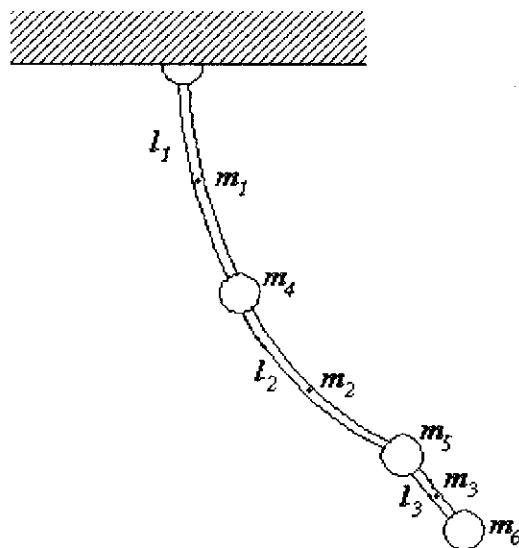


Figure III.1. : Bras flexible à trois articulations

### III.4. Choix des référentiels

Avant toute modélisation, il est important de savoir choisir les référentiels. Car, un bon choix de coordonnées est aussi une simplification des calculs. On considère deux types de référentiels :

#### a- Référentiels « rigides »

Ils représentent le déplacement rigide du lien lié à l'angle  $\theta_i$ .

#### b- Référentiels « flexibles »

Ils représentent les déplacements flexibles du lien d'un angle  $w'_{i,x}$ .

Ainsi, les référentiels sont définis, en accord avec la convention de Denavit-Hartenberg, comme suit :

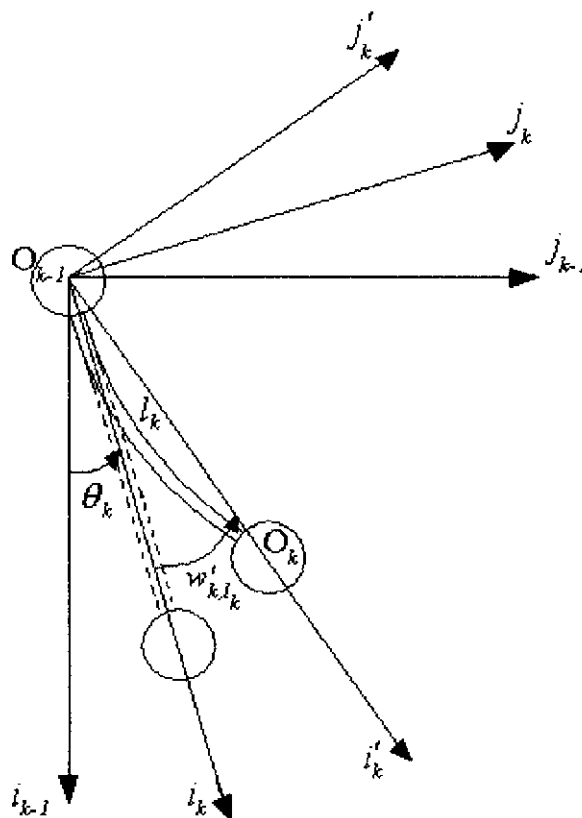


Figure III.2. : k-ème référentiel

$(O_0, i_0, j_0)$  : Référentiel fixe

$(O_1, i_1, j_1)$  : Référentiel rigide du premier lien

- $(O_1, i_1, j_1)$  : Référentiel flexible du premier lien  
 $(O_2, i_2, j_2)$  : Référentiel rigide du second lien  
 $(O_{2'}, i_{2'}, j_{2'})$  : Référentiel flexible du second lien  
 $(O_3, i_3, j_3)$  : Référentiel rigide du troisième lien

Et, les matrices de rotation permettant les transformations d'un repère à un autre sont :

Du repère  $(O_0, i_0, j_0)$  vers  $(O_1, i_1, j_1)$  :

$$R_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Du repère  $(O_1, i_1, j_1)$  vers  $(O_{1'}, i_{1'}, j_{1'})$  :

$$R_{1'}^1 = \begin{bmatrix} c_{w_{1,1}} & -s_{w_{1,1}} & 0 & l_1 c_{w_{1,1}} \\ s_{w_{1,1}} & c_{w_{1,1}} & 0 & l_1 s_{w_{1,1}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Du repère  $(O_{1'}, i_{1'}, j_{1'})$  vers  $(O_2, i_2, j_2)$  :

$$R_2^{1'} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Du repère  $(O_2, i_2, j_2)$  vers  $(O_{2'}, i_{2'}, j_{2'})$  :

$$R_{2'}^2 = \begin{bmatrix} c_{w_{2,2}} & -s_{w_{2,2}} & 0 & l_2 c_{w_{2,2}} \\ s_{w_{2,2}} & c_{w_{2,2}} & 0 & l_2 s_{w_{2,2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Du repère  $(O_{2'}, i_{2'}, j_{2'})$  vers  $(O_3, i_3, j_3)$  :

$$R_3^{2'} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### III.5. Formalisme de Euler-Lagrange

Du fait de l'utilisation de ce formalisme, le calcul sera simple et systématique, ce qui est plus qu'important lors de l'utilisation d'un calculateur numérique. Cette méthode repose sur les équations de Euler-Lagrange. D'autres méthodes, telles que la méthode d'Hamilton étendue ou celle de Newton-Euler, peuvent être utilisées. Elles ont toutes en commun un lien avec la seconde loi de Newton. L'utilisation de l'une ou l'autre des techniques reste selon les besoins liés à l'application spécifiée.

Après avoir défini toutes les matrices de rotation nous permettant de déterminer la position et par conséquent la vitesse de n'importe quel élément sur n'importe quel partie du bras, nous pouvons maintenant par l'application du formalisme d'Euler-Lagrange déterminer les équations dynamiques du bras par le calcul des énergies cinétique, potentielle et dissipative du système.

L'équation de Lagrange est définie par la relation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \frac{\partial L}{\partial p} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{p}} = b\tau \quad (1)$$

où  $L$  est le lagrangien définit par :  $L = T - U$

$T$  : L'énergie cinétique totale du système.

$U$  : L'énergie potentielle totale du système.

$E_D$  : L'énergie dissipative totale du système.

$p$  : Vecteur des coordonnées généralisées.

$\dot{p}$  : Vecteur vitesse des coordonnées généralisées.

$\tau$  : Force généralisée qui sera sous forme de couples puisque ce sont des liens rotoïdes.

$b = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} \\ 0_{(n_1+n_2) \times 3} \end{bmatrix}$  : Elle définit l'application des couples par les trois actionneurs liés aux angles rigides.

Le vecteur coordonnée contiendra toutes les coordonnées généralisées représentant le comportement du robot. Dans le cas d'un robot rigide, il est clair que l'on choisira les angles articulaires. Toutefois dans le cas du robot flexible, il est nécessaire de rajouter d'autres variables caractérisant les flexibilités et que nous verrons plus bas.

### III.5.1. Calcul de l'énergie cinétique

Elle est calculée à partir de la vitesse d'un élément massique. Puis, intégrée tout le long du bras en prenant en compte le point matériel représenté par les actionneurs et la charge.

La position d'un élément de masse appartenant à l'une des parties du bras est :

$$r_{i,x_i} = R_i^0 \begin{bmatrix} x_i \\ w_{i,x_i} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,3} \quad (2)$$

La vitesse de cet élément sera alors :

$$\dot{r}_{i,x_i} = \frac{dR_i^0}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ w_{i,x_i} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + R_i^0 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{w}_{i,x_i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ce qui nous permet donc de déterminer l'énergie cinétique de cet élément :

$$dT_i = \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{r}_{i,x_i} \cdot \dot{r}_{i,x_i}^T) dm_i$$

Nous allons maintenant calculer l'énergie cinétique des trois articulations.

#### a- Première articulation

Comme cela a été énoncé en (III.2.), la position d'un élément massique appartenant à la première partie du bras est :

$$r_{1,x_1} = R_1^0 \begin{bmatrix} x_1 \\ w_{1,x_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Et, la vitesse sera alors :

$$\Rightarrow \dot{r}_{1,x_1} = \frac{\partial R_1^0}{\partial \theta_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_{1,x_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + R_1^0 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{w}_{1,x_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Et, l'énergie cinétique :

$$dT_1 = \frac{1}{2} tr(\dot{r}_{1,x_1} \dot{r}_{1,x_1}^T) dm_1 \quad (6)$$

$$dT_1 = \frac{1}{2} tr \left\{ \frac{\partial R_1^0}{\partial \theta_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_{1,x_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & w_{1,x_1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \frac{\partial R_1^0}{\partial \theta_1} \right)^T \right\} dm_1 \dot{\theta}_1^2 + tr \left\{ \frac{\partial R_1^0}{\partial \theta_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ w_{1,x_1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dot{w}_{1,x_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} (R_1^0)^T \right\} dm_1 \dot{\theta}_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} tr \left\{ R_1^0 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{w}_{1,x_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dot{w}_{1,x_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} (R_1^0)^T \right\} dm_1$$

$$\Rightarrow dT_1 = \frac{1}{2} (x_1^2 + w_{1,x_1}^2) dm_1 \dot{\theta}_1^2 + x_1 \dot{w}_{1,x_1} dm_1 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \dot{w}_{1,x_1}^2 dm_1$$

$$\Rightarrow dT_1 \approx \frac{1}{2} x_1^2 dm_1 \dot{\theta}_1^2 + x_1 \dot{w}_{1,x_1} dm_1 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \dot{w}_{1,x_1}^2 dm_1 \quad (\text{Voir hypothèses}). \quad (7)$$

L'expression de l'énergie cinétique totale du premier lien du bras sera l'énergie cinétique du bras et du point matériel représentant l'actionneur qui se trouve au bout de l'articulation :

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} \int tr(\dot{r}_{1,x_1} \dot{r}_{1,x_1}^T) dm_1 + \frac{1}{2} m_4 (\dot{r}_{1,x_1} \dot{r}_{1,x_1}^T)_{x_1=l_1} \quad (8)$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} \int x_1^2 dm_1 \dot{\theta}_1^2 + \int x_1 \dot{w}_{1,x_1} dm_1 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \int \dot{w}_{1,x_1}^2 dm_1 + \frac{1}{2} m_4 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_4 l_1 \dot{w}_{1,l_1} \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_4 \dot{w}_{1,l_1}^2$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} (J_{11}^{(1)} + J_{11}^{(4)}) \dot{\theta}_1^2 + \sum_{j=1}^{n_1} (\Phi_{11j}^{(1)} + \Phi_{11j}^{(4)}) \dot{q}_{1j} \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} (\Phi \Phi_{1,jk}^{(1)} + \Phi \Phi_{1,jk}^{(4)}) \dot{q}_{1j} \dot{q}_{1k} \quad (9)$$

avec :  $J_{11}^{(1)} = \int x_1^2 dm_1$

$$\Phi_{11j}^{(1)} = \int \phi_{1j}(x_1) x_1 dm_1$$

$$\Phi \Phi_{1,jk}^{(1)} = \int \phi_{1j}(x_1) \phi_{1k}(x_1) dm_1$$

$$J_{11}^{(4)} = m_4 l_1^2$$

$$\Phi_{11j}^{(4)} = \phi_{1j}(l_1) l_1 m_4$$

$$\Phi\Phi_{1jk}^{(4)} = \phi_{1j}(l_1) \phi_{1k}(l_1) m_4$$

### b- Deuxième articulation

De la même manière, la position d'un élément massique appartenant à la seconde partie du bras est :

$$r_{2,x_2} = R_2^0 \begin{bmatrix} x_2 \\ w_{2,x_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

La vitesse sera alors :

$$\Rightarrow \dot{r}_{2,x_2} = \left( \frac{\partial R_2^0}{\partial \theta_1} (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) + \frac{\partial R_2^0}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 \right) \begin{bmatrix} x_2 \\ w_{2,x_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + R_2^0 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{w}_{2,x_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

### Remarque :

$$\frac{\partial R_2^0}{\partial \theta_1} = \frac{\partial R_2^0}{\partial w'_{1,l_1}}$$

Et, l'énergie cinétique :

$$dT_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{r}_{2,x_2} \cdot \dot{r}_{2,x_2}^T) dm_2 \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
dT_2 &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial R_2^0}{\partial \theta_1} \begin{bmatrix} x_2 \\ w_{2,x_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & w_{2,x_2} & 0 & 1 \left( \frac{\partial R_2^0}{\partial \theta_1} \right)^T \end{bmatrix} \right\} dm_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1})^2 + \\
&+ \text{tr} \left\{ \frac{\partial R_2^0}{\partial \theta_1} \begin{bmatrix} x_2 \\ w_{2,x_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & w_{2,x_2} & 0 & 1 \left( \frac{\partial R_2^0}{\partial \theta_2} \right)^T \end{bmatrix} \right\} dm_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) \dot{\theta}_2 + \\
&+ \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{\partial R_2^0}{\partial \theta_2} \begin{bmatrix} x_2 \\ w_{2,x_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & w_{2,x_2} & 0 & 1 \left( \frac{\partial R_2^0}{\partial \theta_2} \right)^T \end{bmatrix} \right\} dm_2 \dot{\theta}_2^2 + \\
&+ \text{tr} \left\{ \frac{\partial R_2^0}{\partial \theta_1} \begin{bmatrix} x_2 \\ w_{2,x_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dot{w}_{2,x_2} & 0 & 0 \left( R_2^0 \right)^T \end{bmatrix} \right\} dm_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) + \\
&+ \text{tr} \left\{ \frac{\partial R_2^0}{\partial \theta_2} \begin{bmatrix} x_2 \\ w_{2,x_2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dot{w}_{2,x_2} & 0 & 0 \left( R_2^0 \right)^T \end{bmatrix} \right\} dm_2 \dot{\theta}_2 + \left\{ R_2^0 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{w}_{2,x_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dot{w}_{2,x_2} & 0 & 0 \left( R_2^0 \right)^T \end{bmatrix} \right\} dm_2 \\
\Rightarrow dT_2 &= \frac{1}{2} (x_2^2 + 2l_1 x_2 c_2 + w_{2,x_2}^2 - 2l_1 w_{2,x_2} s_2 + l_1^2) dm_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1})^2 + \\
&+ (x_2^2 + l_1 x_2 c_2 - l_1 w_{2,x_2} s_2 + w_{2,x_2}^2) dm_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (x_2^2 + w_{2,x_2}^2) dm_2 \dot{\theta}_2^2 + \\
&+ (x_2 + l_1 c_2) dm_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) \dot{w}_{2,x_2} + x_2 \dot{w}_{2,x_2} dm_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \dot{w}_{2,x_2}^2 dm_2 \\
dT_2 &\approx \frac{1}{2} (x_2^2 + 2l_1 x_2 c_2 + l_1^2) dm_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1})^2 + (x_2^2 + l_1 x_2 c_2) dm_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (x_2^2) dm_2 \dot{\theta}_2^2 + \\
&+ (x_2 + l_1 c_2) dm_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) \dot{w}_{2,x_2} + x_2 \dot{w}_{2,x_2} dm_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \dot{w}_{2,x_2}^2 dm_2 \quad (\text{Voir hypothèses}).
\end{aligned} \tag{13}$$



L'expression de l'énergie cinétique totale du second lien du bras sera aussi l'énergie cinétique du bras et du point matériel représentant l'actionneur qui se trouve au bout de l'articulation :

$$\Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} \int \text{tr}(\dot{r}_{2,x_2} \cdot \dot{r}_{2,x_2}^T) dm_2 + \frac{1}{2} m_5 (\dot{r}_{2,x_2} \cdot \dot{r}_{2,x_2}^T) \Big|_{x_2=l_2} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_2 &= \frac{1}{2} \int (x_2^2 + 2l_1 x_2 c_2 + l_1^2) dm_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1})^2 + \int (x_2^2 + l_1 x_2 c_2) dm_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \int x_2^2 dm_2 \dot{\theta}_2^2 + \\ &+ \int (x_2 + l_1 c_2) \dot{w}_{2,x_2} dm_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) + \int x_2 \dot{w}_{2,x_2} dm_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \int \dot{w}_{2,x_2}^2 dm_2 + \\ &+ \frac{1}{2} m_5 (l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2 + l_1^2) (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1})^2 + m_5 (l_2^2 + l_1 l_2 c_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_5 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \\ &+ m_5 (l_2 + l_1 c_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) \dot{w}_{2,l_2} + m_5 l_2 \dot{w}_{2,l_2} \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_5 \dot{w}_{2,l_2}^2 \\ \Rightarrow T_2 &= \frac{1}{2} (J_{11}^{(2)} + J_{11}^{(5)}) \dot{\theta}_1^2 + (J_{12}^{(2)} + J_{12}^{(5)}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (J_{22}^{(2)} + J_{22}^{(5)}) \dot{\theta}_2^2 + \\ &+ \sum_{j=1}^{n_1} (J_{11}^{(2)} + J_{11}^{(5)}) \phi'_{1j}(l_1) \dot{q}_{1j} \dot{\theta}_1 + \sum_{j=1}^{n_1} (J_{12}^{(2)} + J_{12}^{(5)}) \phi'_{1j}(l_1) \dot{q}_{1j} \dot{\theta}_2 + \\ &+ \sum_{j=1}^{n_2} (\Phi_{12j}^{(2)} + \Phi_{12j}^{(5)}) \dot{q}_{2j} \dot{\theta}_1 + \sum_{j=1}^{n_2} (\Phi_{22j}^{(2)} + \Phi_{22j}^{(5)}) \dot{q}_{2j} \dot{\theta}_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} (J_{11}^{(2)} + J_{11}^{(5)}) \phi'_{1j}(l_1) \phi'_{1k}(l_1) \dot{q}_{1j} \dot{q}_{1k} + \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} (\Phi_{12k}^{(2)} + \Phi_{12k}^{(5)}) \phi'_{1j}(l_1) \dot{q}_{1j} \dot{q}_{2k} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} (\Phi_{2jk}^{(2)} + \Phi_{2jk}^{(5)}) \dot{q}_{2j} \dot{q}_{2k} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{Avec : } J_{11}^{(2)} = \int (x_2^2 + 2l_1 x_2 c_2 + l_1^2) dm_2$$

$$J_{12}^{(2)} = \int (x_2^2 + l_1 x_2 c_2) dm_2$$

$$J_{22}^{(2)} = \int x_2^2 dm_2$$

$$\Phi_{12j}^{(2)} = \int \phi_{2j}(x_2) (x_2 + l_1 c_2) dm_2$$

$$\Phi_{22j}^{(2)} = \int \phi_{2j}(x_2) x_2 dm_2$$

$$\Phi \Phi_{2jk}^{(2)} = \int \phi_{2j}(x_2) \phi_{2k}(x_2) dm_2$$

$$J_{11}^{(5)} = m_5 (l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2 + l_1^2)$$

$$J_{12}^{(5)} = m_5 (l_2^2 + l_1 l_2 c_2)$$

$$J_{22}^{(5)} = m_5 l_2^2$$

$$\Phi_{12j}^{(5)} = \phi_{2j}(l_2) m_5 (l_2 + l_1 c_2)$$

$$\Phi_{22j}^{(5)} = \phi_{2j}(l_2) m_2 l_2$$

$$\Phi\Phi_{2jk}^{(5)} = \phi_{2j}(l_2) \phi_{2k}(l_2) m_5$$

### c- Troisième articulation

Et enfin pour la troisième partie, la position d'un élément massique appartenant à la troisième partie du bras est :

$$r_{3,x_3} = R_3^0 \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

La vitesse sera alors :

$$\Rightarrow \dot{r}_{2,x_2} = \left( \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_1} (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) + \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_2} (\dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{2,l_2}) + \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_3 \right) \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

**Remarque :**

$$- \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_1} = \frac{\partial R_3^0}{\partial w'_{1,l_1}}$$

$$- \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_2} = \frac{\partial R_3^0}{\partial w'_{2,l_2}}$$

Et, l'énergie cinétique :

$$dI_3 = \frac{1}{2} \text{tr}(\dot{r}_{3,x_3} \dot{r}_{3,x_3}^T) dm_3 \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
dT_3 &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_1} \right)^T \right\} dm_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1})^2 + \\
&+ \operatorname{tr} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_3} \right)^T \right\} dm_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) \dot{\theta}_3 + \\
&+ \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_2} \right)^T \right\} dm_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{2,l_2})^2 + \\
&+ \operatorname{tr} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_3} \right)^T \right\} dm_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{2,l_2}) \dot{\theta}_3 + \\
&+ \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \frac{\partial R_3^0}{\partial \theta_3} \right)^T \right\} dm_3 \dot{\theta}_3^2 \\
\Rightarrow dT_3 &= \frac{1}{2} (x_3^2 + 2l_2 x_3 c_3 + 2l_1 x_3 c_{23} + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2 + l_1^2) dm_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1})^2 + \\
&+ (x_3^2 + 2l_2 x_3 c_3 + l_1 x_3 c_{23} + l_2^2 + l_1 l_2 c_2) dm_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) (\dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{2,l_2}) + \\
&+ (x_3^2 + l_2 x_3 c_3 + l_1 x_3 c_{23}) dm_3 (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} (x_3^2 + 2l_2 x_3 c_3 + l_2^2) dm_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{2,l_2})^2 + \\
&+ (x_3^2 + l_2 x_3 c_3) dm_3 (\dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{2,l_2}) \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} x_3^2 dm_3 \dot{\theta}_3^2
\end{aligned} \tag{19}$$

L'expression de l'énergie cinétique totale du troisième lien du bras sera, de la même manière que pour les deux premières articulations, l'énergie cinétique du bras et du point matériel représentant la charge se situant à son bout :

$$\Rightarrow T_3 = \frac{1}{2} \int \operatorname{tr} (\dot{r}_{3,x_3} \dot{r}_{3,x_3}^T) dm_3 + \frac{1}{2} m_6 (\dot{r}_{3,x_3} \dot{r}_{3,x_3}^T) \Big|_{x_3=l_3} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
T_3 = & \frac{1}{2} \left( \int (x_3^2 + 2l_2x_3c_3 + 2l_1x_3c_{2'3} + l_2^2 + 2l_1l_2c_{2'} + l_1^2) dm_3 \right) (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1})^2 + \\
& + \left( \int (x_3^2 + 2l_2x_3c_3 + l_1x_3c_{2'3} + l_2^2 + l_1l_2c_{2'}) dm_3 \right) (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) (\dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{2,l_2}) + \\
& + \left( \int (x_3^2 + l_2x_3c_3 + l_1x_3c_{2'3}) dm_3 \right) (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \left( \int (x_3^2 + 2l_2x_3c_3 + l_2^2) dm_3 \right) (\dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{2,l_2})^2 + \\
& + \left( \int (x_3^2 + l_2x_3c_3) dm_3 \right) (\dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{2,l_2}) \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \left( \int x_3^2 dm_3 \right) \dot{\theta}_3^2 + \\
& + \frac{1}{2} m_6 (l_3^2 + 2l_2l_3c_3 + 2l_1l_3c_{2'3} + l_2^2 + 2l_1l_2c_{2'} + l_1^2) (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1})^2 + \\
& + m_6 (l_3^2 + 2l_2l_3c_3 + l_1l_3c_{2'3} + l_2^2 + l_1l_2c_{2'}) (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) (\dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{2,l_2}) + \\
& + m_6 (l_3^2 + l_2l_3c_3 + l_1l_3c_{2'3}) (\dot{\theta}_1 + \dot{w}'_{1,l_1}) \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_6 (l_3^2 + 2l_2l_3c_3 + l_2^2) (\dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{2,l_2})^2 + \\
& + m_6 (l_3^2 + l_2l_3c_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{w}'_{2,l_2}) \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_6 l_3^2 \dot{\theta}_3^2 \\
\Rightarrow T_3 = & \frac{1}{2} (J_{11}^{(2)} + J_{11}^{(5)}) \dot{\theta}_1^2 + (J_{12}^{(2)} + J_{12}^{(5)}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} (J_{22}^{(2)} + J_{22}^{(5)}) \dot{\theta}_2^2 + \\
& + \sum_{j=1}^{n_1} (J_{11}^{(2)} + J_{11}^{(5)}) \phi'_{1j}(l_1) \dot{q}_{1j} \dot{\theta}_1 + \sum_{j=1}^{n_1} (J_{12}^{(2)} + J_{12}^{(5)}) \phi'_{1j}(l_1) \dot{q}_{1j} \dot{\theta}_2 + \\
& + \sum_{j=1}^{n_2} (\Phi_{12j}^{(2)} + \Phi_{12j}^{(5)}) \dot{q}_{2j} \dot{\theta}_1 + \sum_{j=1}^{n_2} (\Phi_{22j}^{(2)} + \Phi_{22j}^{(5)}) \dot{q}_{2j} \dot{\theta}_2 + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} (J_{11}^{(2)} + J_{11}^{(5)}) \phi'_{1j}(l_1) \phi'_{1k}(l_1) \dot{q}_{1j} \dot{q}_{1k} + \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_2} (\Phi_{12k}^{(2)} + \Phi_{12k}^{(5)}) \phi'_{1j}(l_1) \dot{q}_{1j} \dot{q}_{2k} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} (\Phi_{2jk}^{(2)} + \Phi_{2jk}^{(5)}) \dot{q}_{2j} \dot{q}_{2k}
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\text{avec : } J_{11}^{(3)} = \int (x_3^2 + 2l_2x_3c_3 + 2l_1x_3c_{2'3} + l_2^2 + 2l_1l_2c_{2'} + l_1^2) dm_3$$

$$J_{12}^{(3)} = \int (x_3^2 + 2l_2x_3c_3 + l_1x_3c_{2'3} + l_2^2 + l_1l_2c_{2'}) dm_3$$

$$J_{13}^{(3)} = \int (x_3^2 + l_2x_3c_3 + l_1x_3c_{2'3}) dm_3$$

$$J_{22}^{(3)} = \int (x_3^2 + 2l_2x_3c_3 + l_2^2) dm_3$$

$$J_{23}^{(3)} = \int (x_3^2 + l_2x_3c_3) dm_3$$

$$J_{33}^{(3)} = \int x_3^2 dm_3$$

$$J_{11}^{(6)} = m_6 (l_3^2 + 2l_2l_3c_3 + 2l_1l_3c_{2'3} + l_2^2 + 2l_1l_2c_{2'} + l_1^2)$$

$$J_{12}^{(6)} = m_6 (l_3^2 + 2l_2l_3c_3 + l_1l_3c_{23} + l_2^2 + l_1l_2c_2)$$

$$J_{13}^{(6)} = m_6 (l_3^2 + l_2l_3c_3 + l_1l_3c_{23})$$

$$J_{22}^{(6)} = m_6 (l_3^2 + 2l_2l_3c_3 + l_2^2)$$

$$J_{23}^{(6)} = m_6 (l_3^2 + l_2l_3c_3)$$

$$J_{33}^{(6)} = m_6 l_3^2 \dot{\theta}_3^2$$

#### d- Forme matricielle de l'énergie cinétique

Au final l'énergie cinétique totale du bras manipulateur sera la somme des énergies cinétiques de trois articulations :

$$T = \sum_{i=1}^3 T_i \quad (22)$$

Elle pourra être alors réécrite sous la forme suivante :

$$T = \sum_{i=1}^3 T_i \Leftrightarrow T = \frac{1}{2} \dot{p}^T M \dot{p} \quad (23)$$

Avec :  $p^T = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad q_{11} \quad \dots \quad q_{1n_1} \quad q_{21} \quad \dots \quad q_{2n_2}]$

$$M = \begin{bmatrix} M_{rr} & M_{fr} \\ M_{rf} & M_{ff} \end{bmatrix}$$

La matrice  $M$  est définie comme étant la matrice inertielle divisée en quatre parties :

- La matrice  $M_{rr}$  représente la matrice masse rigide pure.
- Les matrices  $M_{fr}$  et  $M_{rf}$  dénotent la relation entre les angles rigides et les modes de chaque bras.
- Et, la matrice  $M_{ff}$  représente la partie flexible pure.

Ces matrices sont définies comme suit :

- La partie rigide-rigide :

$$\circ M_{rr}(1,1) = \sum_{i=1}^6 J_{11}^{(i)}$$

$$\circ M_{rr}(1,2) = \sum_{i=2}^3 J_{12}^{(i)} + \sum_{i=5}^6 J_{12}^{(i)}$$

$$\circ M_{rr}(1,3) = J_{13}^{(3)} + J_{13}^{(6)}$$

$$\circ M_{rr}(2,1) = M_{rr}(1,2)$$

$$\circ M_{rr}(2,2) = \sum_{i=2}^3 J_{22}^{(i)} + \sum_{i=5}^6 J_{22}^{(i)}$$

$$\circ M_{rr}(2,3) = J_{23}^{(3)} + J_{23}^{(6)}$$

$$\circ M_{rr}(3,1) = M_{rr}(1,3)$$

$$\circ M_{rr}(3,2) = M_{rr}(2,3)$$

$$\circ M_{rr}(3,3) = J_{33}^{(3)} + J_{33}^{(6)}$$

- La partie flexible-rigide :

$$\circ M_{fr}(1,1) = \sum_{i=1}^6 J_{11}^{(i)}$$

$$\circ M_{fr}(1,i) = \Phi_{11i}^{(1)} + \Phi_{11i}^{(4)} + \left( \sum_{i=2}^3 J_{11}^{(i)} + \sum_{i=5}^6 J_{11}^{(i)} \right) \phi'_{1i}(l_1), i = \overline{1, n_1}$$

$$\circ M_{fr}(2,i) = \left( \sum_{i=2}^3 J_{12}^{(i)} + \sum_{i=5}^6 J_{12}^{(i)} \right) \phi'_{1i}(l_1), i = \overline{1, n_1}$$

$$\circ M_{fr}(3,i) = (J_{13}^{(3)} + J_{13}^{(6)}) \phi'_{1i}(l_1), i = \overline{1, n_1}$$

$$\circ M_{fr}(1, n_1 + i) = \Phi_{12i}^{(2)} + \Phi_{12i}^{(5)} + (J_{12}^{(3)} + J_{12}^{(6)}) \phi'_{2i}(l_2), i = \overline{1, n_2}$$

$$\circ M_{fr}(2, n_1 + i) = \Phi_{22i}^{(2)} + \Phi_{22i}^{(5)} + (J_{22}^{(3)} + J_{22}^{(6)}) \phi'_{2i}(l_2), i = \overline{1, n_2}$$

$$\circ M_{fr}(3, n_1 + i) = (J_{23}^{(3)} + J_{23}^{(6)}) \phi'_{2i}(l_2), i = \overline{1, n_2}$$

- La partie rigide-flexible :

$$\circ M_{rf} = (M_{fr})^T$$

- La partie flexible-flexible :

$$\circ M_{ff}(i,j) = \Phi \Phi_{1ij}^{(1)} + \Phi \Phi_{1ij}^{(4)} + \left( \sum_{i=2}^3 J_{11}^{(i)} + \sum_{i=5}^6 J_{11}^{(i)} \right) \phi'_{1i}(l_1) \phi'_{1j}(l_1), i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_1}$$

$$\circ M_{ff}(i, n_1 + j) = (\Phi_{12j}^{(2)} + \Phi_{12j}^{(5)}) \phi'_{1i}(l_1) + (J_{12}^{(3)} + J_{12}^{(6)}) \phi'_{1i}(l_1) \phi'_{2j}(l_2), i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}$$

$$\circ M_{ff}(n_1 + j, i) = M_{ff}(i, n_1 + j), i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}$$

$$\circ \quad M_{ff}(n_1 + i, n_1 + j) = \Phi\Phi_{2ij}^{(2)} + \Phi\Phi_{2ij}^{(5)} + (J_{22}^{(3)} + J_{22}^{(6)})\phi'_{2i}(l_2)\phi'_{2j}(l_2), i = \overline{1, n_2}, \\ j = \overline{1, n_2}$$

On peut remarquer que la matrice  $M$  ne dépend que du second et de troisième angle rigide. Pour simplifier les calculs, on peut écrire :

$$M = M_1 + M_2 c_2 + M_3 c_3 + M_{23} c_{23} \quad (24)$$

Ainsi, l'énergie cinétique du système a été totalement calculée.

#### Remarque :

Le choix s'est porté sur une représentation des flexibilités d'ordre 3, c'est-à-dire que les trois premiers modes seront pris en compte. Car, il est inutile de pousser la précision plus comme cela a été démontré dans [20]

### III.5.2. Energie potentielle

Elle est de deux natures différentes :

- La première est causée par la gravitation s'appliquant au niveau des centres de gravité des liens et au niveau des actionneurs.
- La seconde, quant à elle, est produite par l'élasticité des deux premiers liens.

Ainsi, on peut écrire que :

$$U = U_g + U_q \quad (25)$$

Telle que :

$$U_g = -\sum_{j=1}^3 m_j g R_1^0 \begin{bmatrix} \frac{l_j}{2} \\ w_{j, \frac{l_j}{2}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sum_{j=4}^6 m_j g R_1^0 \begin{bmatrix} l_{3-j} \\ w_{j, l_{3-j}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Sachant que :  $g = [g_x \quad g_y \quad g_z \quad 0]$  représentant le vecteur gravitation donnant la position du repère fixe.

Et, l'énergie potentielle due à l'élasticité sera sous la forme suivante :

$$U_q = \frac{1}{2} \dot{p}^T K \dot{p} \quad (27)$$

La matrice  $K$  est une matrice qui est propre à chaque bras. Elle est définie comme suit :

$$K = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times n_1} & 0_{3 \times n_2} \\ 0_{n_1 \times 3} & k_1 & 0_{n_1 \times n_2} \\ 0_{n_2 \times 3} & 0_{n_2 \times n_1} & k_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Les éléments de chaque sous matrice sera alors égaux à :

$$k_i(j, k) = \int (EI)_i \phi_{ij}''(x_i) \phi_{ik}''(x_i) dx_i, i = \overline{1,3}, j = \overline{1, n_1} \text{ et } k = \overline{1, n_1} \quad (29)$$

Dont, nous verrons le calcul au point III.7.1.a.

### III.5.3. Énergie dissipative

Elle est de deux natures différentes :

- les frottements visqueux
- et l'amortissement naturel de chaque lien flexible.

Et, est donnée par :

$$E_D = \frac{1}{2} \dot{p}^T D \dot{p} \quad (30)$$

Telle que la matrice  $D = \begin{bmatrix} d_{rr} & 0 \\ 0 & d_{ff} \end{bmatrix}$  qui est séparée en deux sous matrices diagonales ayant pour expression :

- $d_{rr} = \text{diag}(d_{rr}^1, d_{rr}^2, d_{rr}^3)$  : Elle est due aux frottements visqueux linéaires par rapport à la vitesse au niveau des actionneurs.



- $d_{ff}$  : quant à elle, est due à l'amortissement naturel du bras en flexion.

**Remarque :**

Vu que le lien flexible est équivalent à un système masse-amortisseur-ressort. La matrice amortissement flexible  $d_{ff}$  peut être obtenue à partir d'une matrice contenant les coefficients d'amortissement  $\xi$  tel que[4] :

$$d_{ff} = \xi K \quad (31)$$

### III.5.4. Application du formalisme de Lagrange

Nous allons maintenant calculer les équations dynamiques du système en appliquant le formalisme de Lagrange.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial p} &= \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial p} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{2} \dot{p}^T M \dot{p} \right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial p} = M \dot{p} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) = \frac{d}{dt} (M \dot{p}) \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) = M \ddot{p} + \dot{M} \dot{p} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial p} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial U_g}{\partial p} - \frac{\partial U_k}{\partial p}$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{2} \dot{p}^T M \dot{p} \right) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{1}{2} \dot{p}^T \frac{\partial M}{\partial p} \dot{p}$$

$$\frac{\partial U_g}{\partial p} = G(p)$$

$$\text{Avec : } G(p) = - \sum_{j=1}^3 m_j g \frac{\partial}{\partial p} (R_j^0) \begin{bmatrix} \frac{l_j}{2} \\ w_{i,l_j} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sum_{j=4}^6 m_j g \frac{\partial}{\partial p} (R_j^0) \begin{bmatrix} l_{3-i} \\ w_{i,l_j} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_k}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{2} p^T K p \right) \Rightarrow \frac{\partial U_k}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{2} p^T K p \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial p} = \frac{1}{2} \dot{p}^T \frac{\partial M}{\partial p} \dot{p} - G(p) - K p \end{aligned} \quad (33)$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{p}} = \frac{\partial}{\partial \dot{p}} \left( \frac{1}{2} \dot{p}^T D \dot{p} \right) \Rightarrow \frac{\partial E_D}{\partial \dot{p}} = D \dot{p} \quad (34)$$

Ainsi d'après (32), (33) et (34), l'équation dynamique du système sera :

$$M \ddot{p} + (C(p, \dot{p}) + D) \dot{p} + Kp + G(p) = b\tau \quad (35)$$

Telle que :  $C(p, \dot{p}) \dot{p} = \dot{M} \dot{p} - \frac{1}{2} \dot{p}^T \frac{\partial M}{\partial p} \dot{p}$  qui représente les forces centrifuges et de Coriolis

Sachant que :  $\dot{M} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial M}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\partial M}{\partial \dot{q}_{ij}} \dot{q}_{ij}$  et que la matrice masse ne dépend que des deux

angles rigides  $\theta_2$  et  $\theta_3$ . On peut écrire alors :  $\dot{M} = \sum_{i=2}^3 \frac{\partial M}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \Leftrightarrow \dot{M} = \dot{p}^T \frac{\partial M}{\partial p}$

$$\Rightarrow C(p, \dot{p}) \dot{p} = \frac{1}{2} \dot{p}^T \frac{\partial M}{\partial p} \dot{p} \quad (36)$$

$D \dot{p}$  représente les forces de frottement visqueux.

$Kp$  représente les forces dues aux flexibilités.

$G(p)$  quant à elle représente les forces gravitationnelle

### III.6. Mise sous la forme d'état de l'équation dynamique

On cherche maintenant à mettre l'équation dynamique du robot sous une configuration exploitable, c'est-à-dire sous la forme suivante :

- $\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$  dans le cas non linéaire
- et  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$  dans le cas linéaire.

Le système étudié dans notre cas est non linéaire. Cependant, on peut le réécrire sous une forme linéaire seulement les paramètres du système que sont les matrices  $A, B, C$  et  $D$  dépendront des variables d'état, c'est-à-dire de la position ainsi que des vibrations des bras. Donc, il faudra recalculer ces matrices à chaque changement de position. Ainsi d'après (35) :

$$\begin{aligned}
 \ddot{p} &= M(p)^{-1} (b\tau - (C(p, \dot{p}) + D)\dot{p} - Kp - G(p)) \\
 \Rightarrow \ddot{p} &= -M(p)^{-1} (C(p, \dot{p}) + D)\dot{p} - M(p)^{-1} Kp - M(p)^{-1} G(p) + M(p)^{-1} b\tau \\
 \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_{N \times N} & I_{N \times N} \\ -M(p)^{-1} K & -M(p)^{-1} (C(p, \dot{p}) + D) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{N \times 1} \\ -M(p)^{-1} G(p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{N \times 3} \\ M(p)^{-1} b \end{bmatrix} \tau \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = A(x)x + B(p)\tau + W(x) \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Avec:} \quad A(p) &= \begin{bmatrix} 0_{N \times N} & I_{N \times N} \\ -M(p)^{-1} K & -M(p)^{-1} (C(p, \dot{p}) + D) \end{bmatrix} \\
 \quad - B(p) &= \begin{bmatrix} 0_{N \times 3} \\ M(p)^{-1} b \end{bmatrix} \\
 \quad - W(p) &= \begin{bmatrix} 0_{N \times 1} \\ -M(p)^{-1} G(p) \end{bmatrix} \\
 \quad - C &= \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times (3+2 \times (n_1 + n_2))} \end{bmatrix} \\
 \quad - D &= 0_{3 \times 3} \\
 \quad - x &= \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

et  $N = 3 + n_1 + n_2$  : Dimension du vecteur coordonnée  $p$ .

De ce fait, nous avons pu mettre sous forme d'état l'équation déterminant le comportement dynamique du système qui sera utilisée lors de la simulation sur ordinateur.

### III.7. Analyse modale [17]

Nous allons nous intéresser maintenant au calcul des fonctions modales qui nous permettent de déterminer le déplacement de chaque bras flexible à n'importe quel instant. Mais avant toute chose, quelques notions de bases dans le domaine de la mécanique du solide sont nécessaires. Voici maintenant quelques méthodes de modélisation mécanique du solide pour

avoir les instruments nécessaires pour modéliser les parties flexibles du bras. Tout cela pour pouvoir obtenir des coordonnées généralisées pour les inclure dans le calcul des énergies cinétique, potentielle et dissipative.

### III.7.1. Introduction à la mécanique du solide

Voici, sur la figure III.3., une illustration simple d'une barre en déformation.  $F$  et  $M$  représentent les forces internes et le moment s'appliquant sur chaque coté de chaque petit segment, et se contrecarrant. Sachant que les déformations sont considérés comme petites, il est démontré dans [17] qu'elle sera dans la direction des  $y$  et aura pour conséquence un moment de surface  $I$  définie plus bas.  $u$  est la déformation fonction de  $x$ .

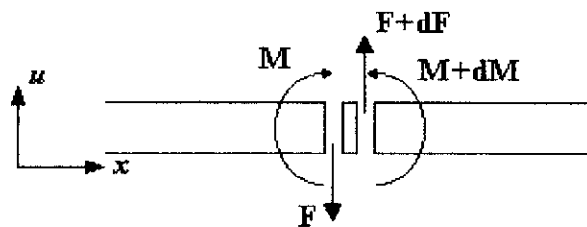


Figure III.3. : Barre en flexion

$$M = \frac{EI}{\rho_r} \Rightarrow M = EI \frac{d^2u}{dx^2} \tag{38}$$

$$I = \int_A y^2 dA \tag{39}$$

$$EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -F = \frac{dM}{dx} \tag{40}$$

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f_d \tag{41}$$

- où  $E$  : Module de Young
- $I$  : Inertie de surface
- $\rho_r$  : Rayon de courbure

Voici quelques exemples selon le type de section :

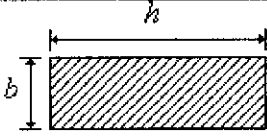
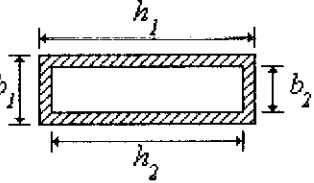
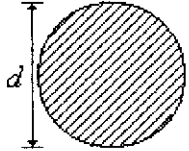
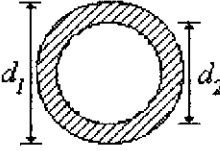
Type de section		Valeur
Rectangulaire pleine		$I = \frac{1}{12}bh^3$
Rectangulaire creuse		$I = \frac{1}{12}(b_1h_1^3 - b_2h_2^3)$
Circulaire pleine		$I = \frac{1}{64}\pi d^4$
Circulaire creuse		$I = \frac{1}{12}\pi(D_1^4 - D_2^4)$

Tableau III.1. : Moments d'inertie pour différents types de surface

Et après quelques manipulations démontrées dans [17], les énergies cinétique et potentielle sont données par :

$$U = \frac{1}{2}EI \int \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (42)$$

$$T = \frac{1}{2}\rho A \int (\dot{u}(x))^2 dx \quad (43)$$

En faisant quelques manipulations sur l'équation (42), nous donne la relation d'équation Euler-Bernoulli défini par l'équation aux dérivées partielles suivante, décrivant les vibrations transversales :

$$f_d = -\rho A \ddot{u} = EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (44)$$

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \ddot{u} = 0 \quad (45)$$

C'est une équation continue et décrit l'état de chaque fraction de la barre. Du fait qu'elle doit être évaluée pour chaque point, la solution sera d'ordre infini. Ce qui est impossible à réaliser en pratique. C'est pourquoi une « discrétisation » en élément finis sera nécessaire.

### a- Discrétisation

Tout d'abord, on suppose que  $u$  peut être décrite par un ensemble de fonctions linéairement indépendantes,  $q_1, \dots, q_n$  qui sont fonctions du temps. Ainsi, on pourra calculer les énergies cinétique et potentielle et les matrices d'élasticité  $K$  et masse  $M$ .

$$u(x, t) = [\phi_1(x) \quad \dots \quad \phi_n(x)] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow u(x, t) = \phi^T q \Leftrightarrow u(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (46)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = \frac{d^4 \phi^T}{dx^4} q(t) \Leftrightarrow \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) = \sum_{i=1}^n \frac{d^4}{dx^4} \phi_i(x) q_i(x) \quad (47)$$

$$\ddot{u}(x, t) = \phi^T \ddot{q}(t) \Leftrightarrow \ddot{u}(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \ddot{q}_i(x) \quad (48)$$

Et, on obtiendra :

$$U = \frac{1}{2} q^T K q \quad (49)$$

$$T = \frac{1}{2} q^T M_{ff} q \quad (50)$$

La matrice  $K$  sera alors définie par :

$$K(i, j) = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}, i, j = \overline{1, n} \Leftrightarrow K = EI \int \phi^{nT} \phi^n dx \quad (51)$$

Et, la matrice  $M_{ff}$  correspond à la partie purement flexible de la matrice masse calculée plus haute :

$$M_{ff}(i, j) = \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial q_j}, i, j = \overline{1, n} \quad (52)$$

Les coordonnées généralisées peuvent maintenant être choisies selon l'utilisation désirée. Elle peuvent décrire une variable physique telle une distance en mètres ou un angle en radian. Comme, elle peut très bien être fictives.

#### b- Forme des modes pour différentes conditions aux limites

On entend par forme des modes d'une barre les différentes formes que peut prendre la barre lorsqu'elle vibre à certaines fréquences. La forme et les fréquences dépendent de la structure de la barre aux limites. Dont, on peut voir les différentes formes sur les figures III.4.a, III.4.b. et III.4.c suivantes :

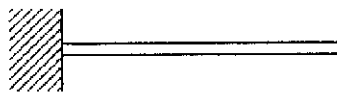


Figure III.4.a. : Barre encastrée-libre

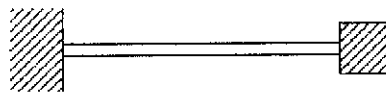


Figure III.4.b. : Barre encastrée-inertie

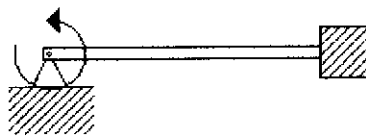


Figure III.4.c. : Barre libre-inertie

La première condition aux limites est connue comme étant encastrée avec extrémité libre. La seconde condition aux limites est définie comme étant encastrée avec présence d'inertie sur l'extrémité libre. C'est la même chose que la condition précédente sauf que l'extrémité libre sera avec une charge inertielle. Enfin, la troisième est définie comme étant rotule avec inertie sur les deux extrémités. Elle est libre de se mouvoir autour de son axe de rotation. Elle est équivalente à une articulation sur laquelle il n'y aurait d'application d'un couple, donc inutilisable dans notre cas. Toutefois lorsque l'inertie est assez grande au niveau de l'extrémité autour de laquelle elle tourne, elle sera alors équivalente à la seconde condition.

On préférera utiliser la deuxième condition aux limites. Car, elle illustre au mieux la configuration où l'on a un couple appliqué sur une extrémité et une charge sur l'autre.

**Remarque :**

Lorsqu'il y a flexion dans le sens des  $y$ , il y aura aussi dans le sens des  $x$ . Ce qui aura pour effet d'affecter l'inertie du système. Inclure ce déplacement rendrait certes le modèle plus précis, mais aura pour conséquence d'augmenter sa complexité. Mais, comme l'effet de cette flexion trop petite comparé à celui de la flexion dans le sens des  $y$ , il peut être négligé. Pour plus de détails sur l'effet de cette flexion, il est possible de se référer à [17].

**III.7.2. Calcul des différents modes de vibration d'une structure flexible**

La forme de chaque mode correspond aux différentes formes que peut prendre la barre lorsqu'elle vibre à certaines pulsations en partant d'une position de déséquilibre et sans intervention de forces extérieures. On peut faire une analogie avec le système masse-ressort qui vibrerait avec une amplitude fixe et à une pulsation facilement calculable. Dans le cas de la structure flexible, l'amplitude serait variable selon l'abscisse et la pulsation serait valable tout le long de la structure.

La solution de l'équation de Euler-Bernouilli,  $u(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)q_i(t)$ , s'écrit alors :

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \ddot{u} &= 0 \Rightarrow EI \sum_{i=1}^n \frac{d^4 \phi_i}{dx^4}(x)q_i(t) + \rho A \sum_{i=1}^n \phi_i(x)\ddot{q}_i(t) = 0 \\ \Rightarrow EI \frac{d^4 \phi_i}{dx^4}(x)q_i(t) + \rho A \phi_i(x)\ddot{q}_i(t) &= 0, i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (53)$$

Sachant que les deux fonctions sont indépendantes l'une de l'autre pour tout  $i = \overline{1, n}$ , on pourra alors les séparer en deux équations :

$$\Rightarrow \begin{cases} EI \frac{d^4 \phi_i}{dx^4}(x) + \rho A \phi_i(x) = 0 \\ \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0 \end{cases} \quad (54)$$

$$\text{Avec : } \omega_i = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \beta_i^2$$

La solution à la première équation aura pour forme générale :

$$\phi_i(x) = A_i \sin(\beta_i x) + B_i \cos(\beta_i x) + C_i \sinh(\beta_i x) + D_i \cosh(\beta_i x) \quad (55)$$



Les termes  $A_i, B_i, C_i, D_i$  et  $\beta_i$  sont déterminées à partir des conditions aux limites définies plus haut. La barre peut avoir différentes combinaisons de conditions aux limites illustrées par le tableau suivant :

$x$	Libre	Encastrée	Avec inertie
0	$\phi'' = 0$ $\phi''' = 0$	$\phi = 0$ $\phi' = 0$	$EI\phi'' + \omega^2 I_C \phi' = 0$ $EI\phi''' - \omega^2 M_C \phi = 0$
$l$	$\phi'' = 0$ $\phi''' = 0$	$\phi = 0$ $\phi' = 0$	$EI\phi'' - \omega^2 I_C \phi' = 0$ $EI\phi''' + \omega^2 M_C \phi = 0$

Tableau III.2. : Conditions aux limites pour une barre

Les différentes conditions aux limites peuvent s'interpréter physiquement par :

$u$	Position
$u'$	Angle
$Elu''$	Moment
$Elu'''$	Force

Tableau III.3. : Equivalence des termes

A partir de ces conditions aux limites, on obtiendra alors quatre équations. Le système d'équation peut être mit sous forme matricielle, comme suit :

$$Mod \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{56}$$

La matrice  $Mod$  doit alors être singulière sous peine d'avoir des solutions nulles  $A_i = B_i = C_i = D_i = 0$ . Donc, le déterminant de la matrice doit être nul. Maintenant pour déterminer les  $\beta_i$ , on peut définir la condition aux limites suivante [17] :

$$\phi_i(l) = (-1)^{i+1} \tag{57}$$

Ainsi, on aura pu déterminer la forme de tous les modes de la barre en flexion. Voici maintenant, le calcul de ces modes dans le cas d'une barre encastree à extrémité libre et en charge.

### a- Encastree-libre

C'est une méthode simple pour déterminer les différents modes de vibration d'une barre et approxime son comportement dans le cas réel. Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \phi = 0 \\ \phi' = 0 \\ \phi'' = 0 \\ \phi''' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.A_i + B_i + 0.C_i + D_i = 0 \\ \beta_i.A_i + 0.B_i + \beta_i.C_i + 0.D_i = 0 \\ -\beta_i^2 \sin(\beta_i l)A_i - \beta_i^2 \cos(\beta_i l)B_i + \beta_i^2 \sinh(\beta_i l)C_i + \beta_i^2 \cosh(\beta_i l)D_i = 0 \\ -\beta_i^3 \cos(\beta_i l)A_i + \beta_i^3 \sin(\beta_i l)B_i + \beta_i^3 \cosh(\beta_i l)C_i + \beta_i^3 \sinh(\beta_i l)D_i = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_i & 0 & \beta_i & 0 \\ -\beta_i^2 \sin(\beta_i l) & -\beta_i^2 \cos(\beta_i l) & \beta_i^2 \sinh(\beta_i l) & \beta_i^2 \cosh(\beta_i l) \\ -\beta_i^3 \cos(\beta_i l) & \beta_i^3 \sin(\beta_i l) & \beta_i^3 \cosh(\beta_i l) & \beta_i^3 \sinh(\beta_i l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_i & 0 & \beta_i & 0 \\ -\beta_i^2 \sin(\beta_i l) & -\beta_i^2 \cos(\beta_i l) & \beta_i^2 \sinh(\beta_i l) & \beta_i^2 \cosh(\beta_i l) \\ -\beta_i^3 \cos(\beta_i l) & \beta_i^3 \sin(\beta_i l) & \beta_i^3 \cosh(\beta_i l) & \beta_i^3 \sinh(\beta_i l) \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \cos(\beta_i l) \cosh(\beta_i l) + 1 = 0 \quad (58)$$

Les trois premiers modes obtenus sont :

Solution	Premier mode	Second mode	Troisième mode
$\beta_i l$	1.875	4.694	7.855
$A_i$	0.367	0.509	0.500
$B_i$	-0.500	-0.500	0.500
$C_i$	-0.367	-0.509	-0.500
$D_i$	0.500	0.500	0.500

Tableau III.4. : Différentes solutions

En plus de la simplicité de calcul en utilisant ces conditions aux limites, lors du calcul de intégrales  $\int \phi_i^{\prime 2} \phi_j^{\prime 2} dx$  et  $\int \phi_i^2 \phi_j^2 dx$ , on remarque que lorsque  $i \neq j$ , le résultat sera nul.

### b- Encastrée-inertie

Dans le cas de ces conditions aux limites, la manière de faire reste la même mais plus complexe à déterminer vu qu'il y a plus de variables mis en jeu. L'équation calculée à partir des conditions aux limites sera :

$$\begin{aligned}
 & -\beta_i^4 I_C m_C + \beta_i^4 I_C m_C \cos(\beta_i l) \cosh(\beta_i l) + \beta_i^3 \rho A I_C \cos(\beta_i l) \sinh(\beta_i l) + \beta_i^3 \rho A I_C \sin(\beta_i l) \cosh(\beta_i l) \\
 & + \beta_i \rho A M_C \sin(\beta_i l) \cosh(\beta_i l) - \beta_i \rho A M_C \cos(\beta_i l) \sinh(\beta_i l) - (\rho A)^2 \cos(\beta_i l) \cosh(\beta_i l) - (\rho A)^2 = 0
 \end{aligned} \quad (59)$$

Lorsque  $I_C$  l'inertie et  $M_C$  la masse à l'extrémité libre approchent du zéro, la solution approchera le cas des conditions aux limites précédentes.

Cette équation a été déterminée à partir des conditions aux limites suivantes correspondant à la situation décrite à la figure III.4.b. :

$$\begin{cases}
 \phi = 0 \\
 \phi' = 0 \\
 EI\phi'' - \omega^2 I_C \phi' = 0 \\
 EI\phi''' + \omega^2 M_C \phi = 0
 \end{cases} \quad (60)$$

Mais, nous ne rentrerons pas dans les détails de calcul. On peut juste dire que cela revient à prendre par exemple les trois premières équations de (60) et la relation (57).

### III.8. Caractéristiques physiques du bras [17] [21]

Les caractéristiques physiques du bras qui sera utilisé dans notre cas sont :

Matériau utilisé		Aluminium
Forme de la section de chaque bras		Rectangulaire creuse
Longueur du premier bras		0.5 m
Longueur du second bras		0.5 m
Longueur du troisième bras		0.1 m
Dimensions de la section	$h_1 / h_2$	0.010 / 0.005 m
	$b_1 / b_2$	0.055 / 0.050 m
Densité volumique		2700 kg / m <sup>3</sup>
Module de Young		69 10 <sup>9</sup> Pa
Moment d'inertie		3.047 10 <sup>-7</sup> kg . m <sup>2</sup>
Masses des trois charges dont les deux premières représentent les deux derniers moteurs et la troisième quant à elle sera la charge :	$m_1$	0.250 kg
	$m_2$	0.250 kg
	$m_3$	0.200 kg
Pulsation de vibration des trois premiers modes du :	premier bras	38.95 rad / s
		374.95 rad / s
		1009.07 rad / s
	second bras	53.01 rad / s
		384.21 rad / s
		1019.05 rad / s

Tableau III.5. : Caractéristiques physiques du bras

On remarque que les trois premiers modes choisis sont suffisants puisque la pulsation du troisième mode se rapproche des hautes fréquences.

Les matrices élasticités sont égales à :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 572.15 & 1.42 & 0 \\ 1.42 & 4186.9 & 0.78 \\ 0 & 0.78 & 9008.9 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 319.10 & 3.24 & 0 \\ 3.24 & 1651.1 & 1.28 \\ 0 & 1.28 & 3404.3 \end{bmatrix} \quad (61)$$

On constate que les matrices élasticité rappellent le cas d'une barre encastrée libre où elles sont diagonales.

### III.9. Commande en boucle ouverte

Voyons maintenant l'effet d'une commande en boucle ouverte sur le bras en appliquant des échelons sur chaque articulation.

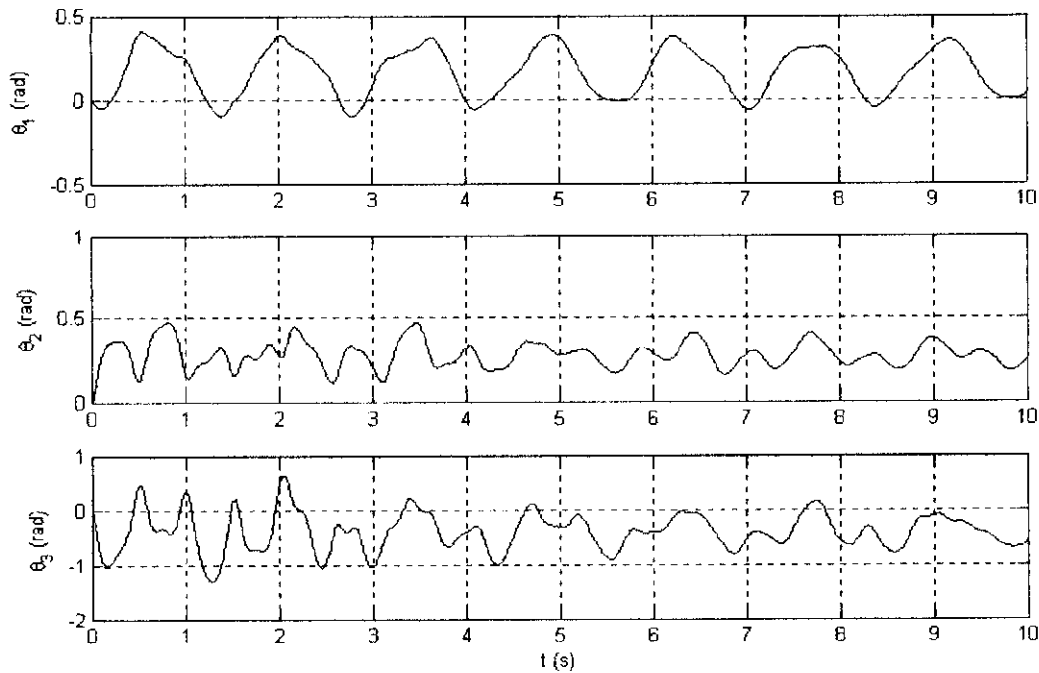


Figure III.5.a. : Variation des trois angles du bras en régime libre à partir d'une position quelconque

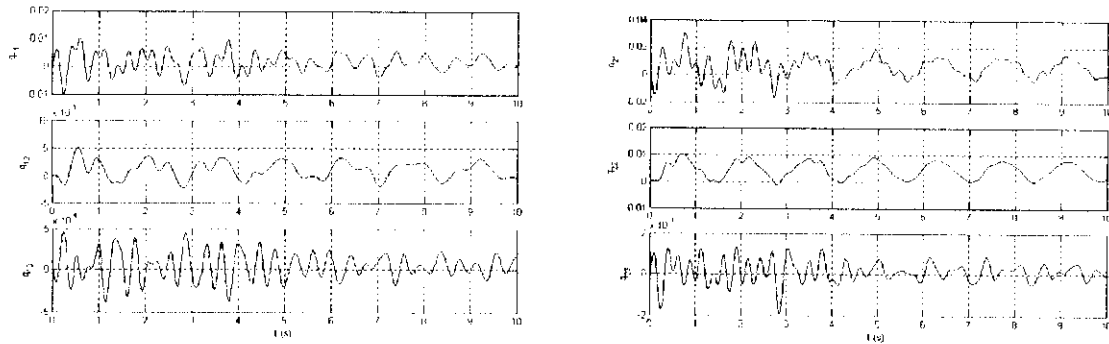


Figure III.5.b. : Variation des trois variables modales des deux liens flexibles du bras en régime libre à partir d'une position quelconque

Au delà du fait que les trois angles soient instables, on remarque aussi que les six variables modales sont elles aussi de nature instable, d'où la nécessité d'une boucle de suivi pour trouver une commande modérée n'excitant pas ces flexibilités. Les oscillations du bras sont illustrées sur la figure III.6. où l'on a sur les figures de gauche et de droite les positions autour desquelles oscillera le bras sans qu'il ne puisse s'arrêter.

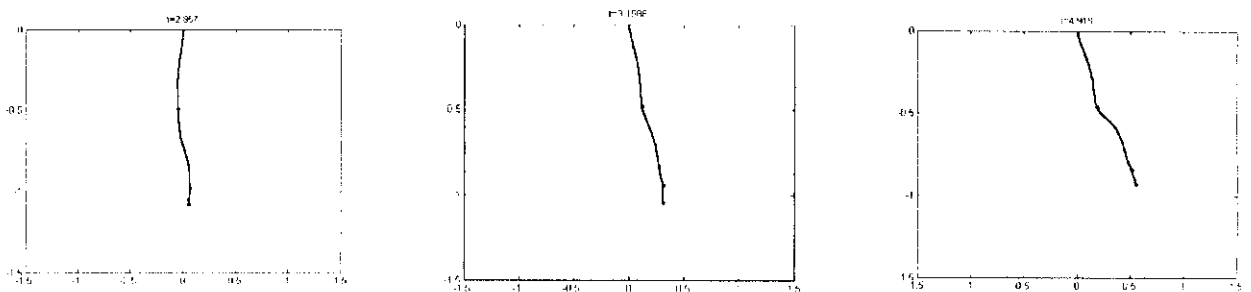


Figure III.6. : Position du bras à trois instants différents lorsque la commande se fait en boucle ouverte

### III.10. Conclusion

Ainsi grâce au formalisme d'Euler-Lagrange et à la technique d'analyse modale, nous avons pu modéliser le bras flexible à trois articulations et l'avons mis sous forme exploitable (37) pour pouvoir appliquer la commande qui a été décrite au chapitre précédent, tout en essayant d'approcher la réalité. Car, le modèle avec amortissement obtenu est en fait une analogie avec le cas du système masse-ressort-amortisseur comme cela a été fait dans [4].

La nécessité d'appliquer une commande robuste telle que la commande  $H_\infty$  est plus qu'évidente vu que les équations exprimant l'état du système varie selon la position et la vitesse de ce dernier et qu'il pourra exister des erreurs d'identification des paramètres liés aux flexibilités telle que les modes et leur amortissement.

Et pour voir l'évolution du bras dans le temps, une animation a été conçue pour avoir une meilleure idée sur l'effet les flexions. Car, de simples courbes ne permettent pas cela.

## **Chapitre IV :**

# **Application de la commande $H_\infty$ sur le bras flexible**



## IV.1. Introduction

Après avoir modéliser le bras flexible à trois articulations et décrit la commande robuste  $H_\infty$ , nous allons maintenant passer à l'essentiel de ce travail en d'autres termes la recherche du régulateur robuste pour commander ce bras.

Après avoir donné la trajectoire, linéarisé le modèle dépendant des angles des trois articulations, nous étudierons tout d'abord le cas du robot travaillant dans le plan horizontal, c'est-à-dire libre de toute gravité et cela principalement pour pouvoir obtenir un modèle décentralisé fiable comme nous le verrons plus bas. Puis, nous généraliserons au cas du robot travaillant cette fois dans n'importe quel plan de travail en utilisant la notion de compensation gravitationnelle.

## IV.2. Génération de la trajectoire

La commande d'un bras manipulateur a pour but de déplacer l'outil (charge) d'un point à un autre suivant une trajectoire donnée qui doit être continue en position, en vitesse et en accélération à cause du comportement dynamique du bras.

Dans le cas des robots flexibles, on utilise les trajectoires traditionnellement utilisées dans le cas rigide telles que les trajectoires polynomiale et cycloïdale. Notre choix s'est porté sur la trajectoire cycloïdale. Elle a pour expression analytique :

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_{t_f} + \frac{\Delta}{2\pi} (\omega t - \sin(\omega t)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ \theta_{t_f} & t \geq t_f \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Avec : } \omega = \frac{2\pi}{t_f}$$

$$\Delta = \theta_{t_f} - \theta_{t_0}$$

$t_f$  : Instant d'arrivé à la position finale

$t_0$  : Instant initial

### IV.3. Linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement

Le modèle non linéaire du bras manipulateur sera sous la forme suivante d'après l'équation (35) du chapitre III :

$$M\ddot{p} + (C(p, \dot{p}) + D)\dot{p} + Kp + G(p) = b\tau$$

Il est évident qu'il faudra passer par une linéarisation du modèle pour pouvoir synthétiser le régulateur  $H_\infty$  qui devra être robuste aux variations dues aux non linéarités.

Le point d'équilibre étant défini par :

$$\ddot{p} = \ddot{p}^* = 0_{3+n(1)+n(2)} \quad (2)$$

$$\dot{p} = \dot{p}^* = 0_{3+n(1)+n(2)} \quad (3)$$

$$p = p^* \quad (4)$$

$$Kp^* + G(p^*) = b\tau^* \quad (5)$$

On obtiendra alors par linéarisation du modèle non linéaire autour d'un point de fonctionnement d'après la méthode linéarisation expliqué en annexe A :

$$M^* \delta\ddot{p} + D\delta\dot{p} + K\delta p = b\delta\tau - G(p^*) \quad (6)$$

Avec :  $\delta\ddot{p} = \ddot{p} - \ddot{p}^*$

$$\delta\dot{p} = \dot{p} - \dot{p}^*$$

$$\delta p = p - p^*$$

$$\delta\tau = \tau - \tau^*$$

$$M^* = M(p^*)$$

### IV.4. Sources d'incertitudes

On peut énoncé deux sources d'incertitudes :

- Incertitude multiplicative due à la décentralisation.
- Incertitudes paramétriques dues à la mauvaise identification des modes de flexibilités et des amortissements des articulations mais aussi à cause de la variation de la charge.

### IV.4.1. Incertitudes multiplicatives

La première incertitude pourra être contournée en utilisant la notion de compensation gravitationnelle, telle qu'illustrée à la figure IV.1., qui nous permettra d'éliminer  $G(p)$  de l'équation dynamique simulant ainsi un bras travaillant dans le plan horizontal dont l'approximation pourra être atténuée en adaptant un gain déterminé à partir du gain statique du régulateur synthétisé plus bas. L'équation dynamique résultante sera sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} M_{rr}^* & M_{fr}^* \\ M_{rf}^* & M_{ff}^* \end{bmatrix} \delta \ddot{p} + \begin{bmatrix} D_{rr} & 0 \\ 0 & D_{ff} \end{bmatrix} \delta \dot{p} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 6} \\ 0_{6 \times 3} & k \end{bmatrix} \delta p = h \delta u \quad (7)$$

Avec :  $k = \begin{bmatrix} k_1 & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & k_2 \end{bmatrix}$

Et la boucle de commande sera alors sous la forme suivante :

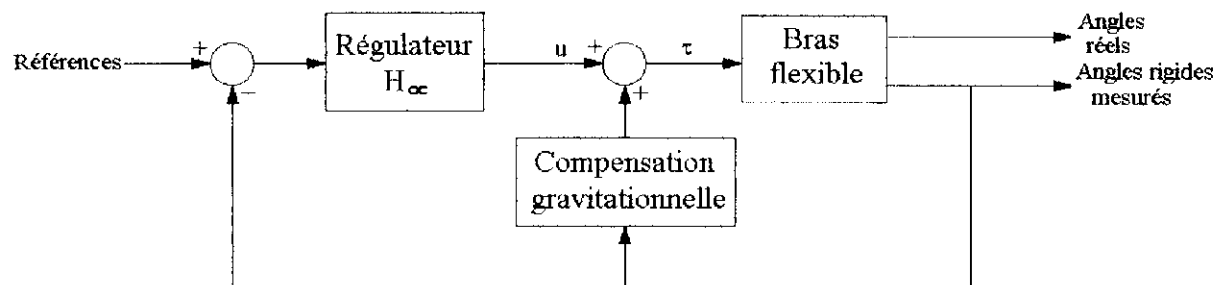


Figure IV.1. : Principe de la boucle de commande

Vu que les flexibilités sont d'après [3] bornées et assez petites, on pourra alors approximer ce modèle par un modèle rigide pure tel que :

$$M_{rr}^* \ddot{\Theta} + D_{rr} \dot{\Theta} = u \quad (8)$$

Avec :  $\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$

En calculant la matrice de transfert, on remarque la structure suivante :

$$G_{rr}(s) = (M_{rr}^* s^2 + D_{rr} s)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{G_{11}^r(s)}{s} & G_{12}^r(s) & G_{13}^r(s) \\ G_{21}^r(s) & \frac{G_{22}^r(s)}{s} & G_{23}^r(s) \\ G_{31}^r(s) & G_{32}^r(s) & \frac{G_{33}^r(s)}{s} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Avec :  $G_{ij}^r(s), i, j = \overline{1,3}$  fonction de transfert rationnelle et propre de norme finie.

$$\Rightarrow G_{rr}(s) = \begin{bmatrix} \frac{G_{11}^r(s)}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G_{22}^r(s)}{s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{33}^r(s)}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s \frac{G_{12}^r(s)}{G_{11}^r(s)} & s \frac{G_{13}^r(s)}{G_{11}^r(s)} \\ s \frac{G_{21}^r(s)}{G_{22}^r(s)} & 1 & s \frac{G_{23}^r(s)}{G_{22}^r(s)} \\ s \frac{G_{31}^r(s)}{G_{33}^r(s)} & s \frac{G_{32}^r(s)}{G_{33}^r(s)} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G_{rr}(s) \approx \begin{bmatrix} \frac{G_{11}^r(s)}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{G_{22}^r(s)}{s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_{33}^r(s)}{s} \end{bmatrix}$$

Ainsi, la norme de valeur infinie des éléments diagonaux rend l'erreur de décentralisation négligeable sans qu'il n'y ait à utiliser aucune matrice de pondération. L'ajout de la partie flexible rajoutera des modes mal amortis mais laissera la structure générale semblable au cas rigide.

Au final, il suffira d'analyser la variation du comportement fréquentiel des éléments diagonaux du système linéarisé, comme cela est illustré aux figures IV.2.a., IV.2.b. et IV.2.c. pour obtenir un modèle décentralisé contenant les modes les plus important. Notre choix s'est porté sur le modèle décentralisé suivant :

$$G_D(s) = \begin{bmatrix} 50 \frac{(s/0.1032+1)}{s(s/0.0185+1)(s/0.84+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 50 \frac{(s/12.5+1)}{s(s/0.3+1)(s/20.5+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 50 \frac{1}{s(s/11.26+1)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

En faisant varier les trois angles, on constate bien que la condition (75) du chapitre III est bien respectée faisant du modèle décentralisé une bonne approximation du modèle réel.

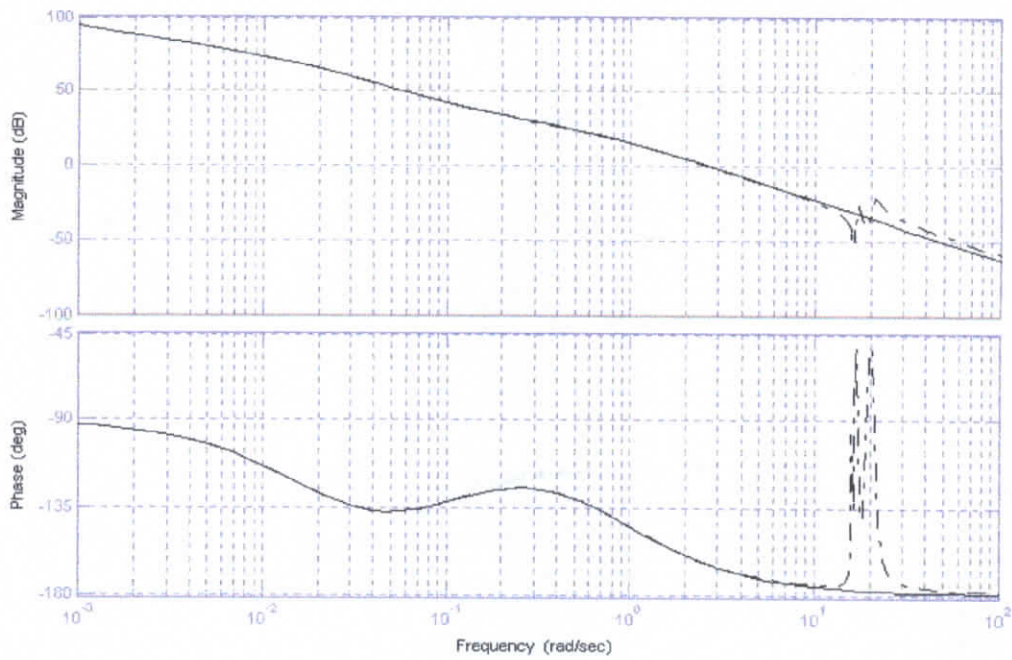


Figure IV.2.a : Comparaison entre  $G_{11}(s)$  (en pointillé) et  $G_{11}^d(s)$  (en trait plein) pour  $0^\circ < \theta_1 < 180^\circ$

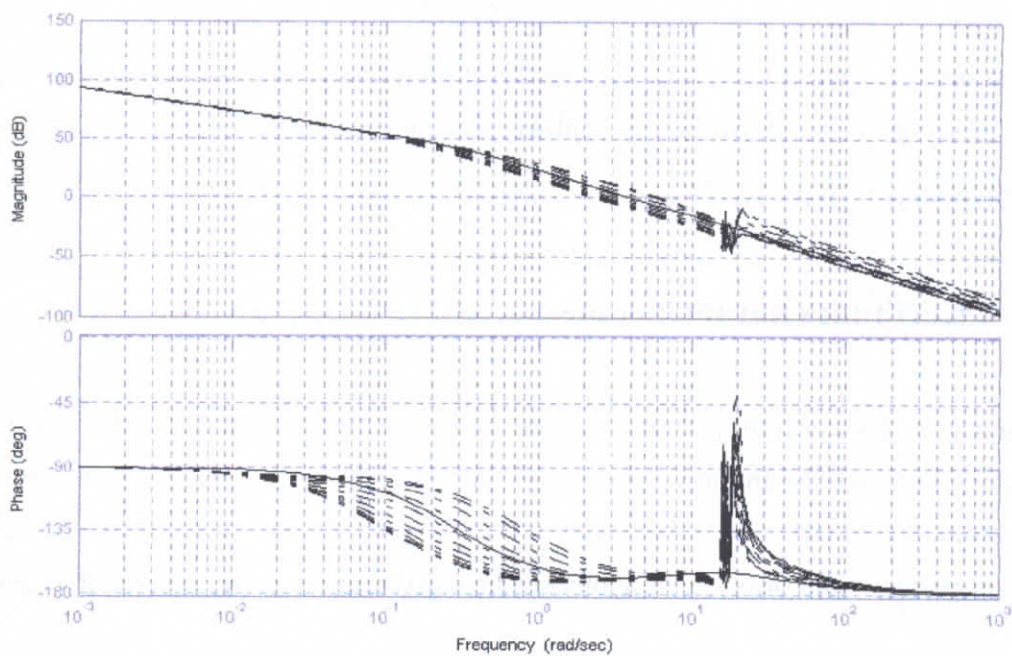


Figure IV.2.b : Comparaison entre  $G_{22}(s)$  (en pointillé) et  $G_{22}^d(s)$  (en trait plein) pour  $0^\circ < \theta_2 < 180^\circ$

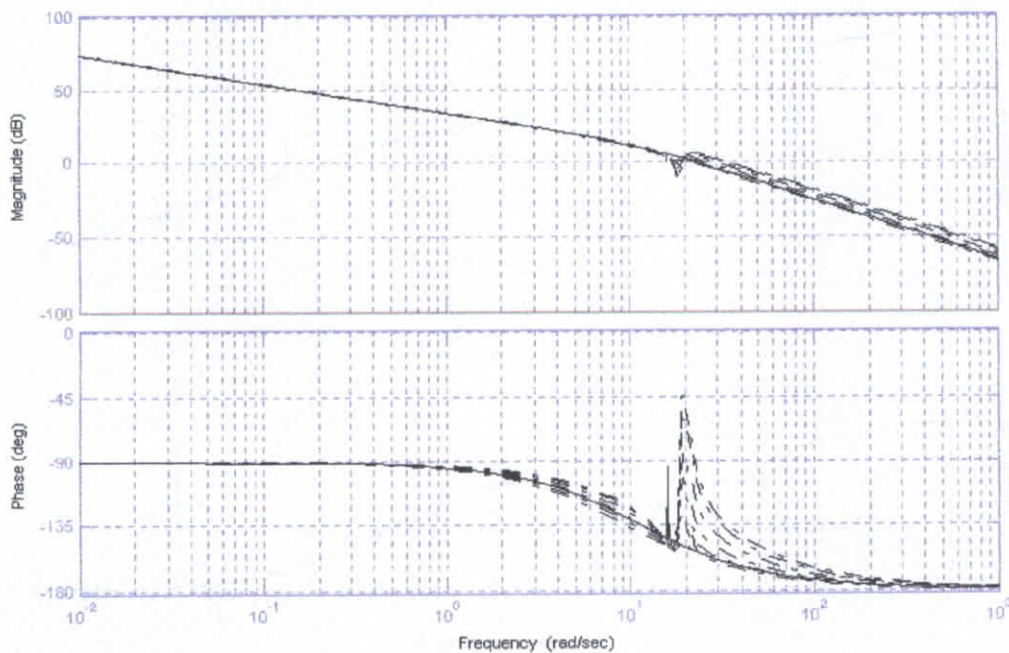


Figure IV.2.c. : Comparaison entre  $G_{33}(s)$  (en pointillé) et  $G_{33}^d(s)$  (en trait plein)  
pour  $0^\circ < \theta_3 < 180^\circ$

#### Remarque :

Les fonctions de transfert ne varient pas avec le premier angle ceci s'explique par le fait que la matrice inertie varie en fonction des angles  $\theta_2$  et  $\theta_3$  seulement la rendant ainsi indépendante et donc invariante quelque soit la valeur la valeur de  $\theta_1$ .

#### IV.4.2. Incertitudes paramétriques

Le second type d'incertitudes a pour origine la variation des modes et amortissement des articulations flexibles faisant apparaître au niveau des réponses fréquentielles des modes mal amortis comme cela est illustré dans la figure IV.2.a., IV.2.b. et IV.2.c. Dans ce cas là, on utilise des pondérations lors de la synthèse du régulateur nous permettant d'atténuer leur effets.

Ces variations paramétriques sont soit causées par une mauvaise identification des modes proprement dit ou de la charge au bout du bras. On verra plus bas qu'il sera possible d'atténuer la variation en modifiant le gain statique ajouté au régulateur.

Maintenant comment choisir ces pondérations ? Vu que les flexibilités apparaissent au niveau de la première et de la deuxième articulation, une atténuation de ces flexibilités rendra la troisième articulation insensible à ces modes. Mais comme une robustesse face aux bruits de mesure est nécessaire, on appliquera une pondération à ce niveau là. Donc, la matrice pondération aura la forme générale suivante :

$$W_D(s) = \begin{bmatrix} W_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & W_2(s) & 0 \\ 0 & 0 & W_3(s) \end{bmatrix}$$

Et après avoir analysé les réponses fréquentielles des éléments diagonaux du modèle linéarisé du système figure IV.2.a., IV.2.b. et IV.2.c., on constate que les flexibilités influenceront pour des pulsations supérieures à 10 rad/s. Ainsi, l'expression finale de la pondération sera :

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s/10+1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s/10+1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(s/200+1)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

En utilisant la synthèse du régulateur par factorisation première pour la fonction de transfert pondérée  $G_D(s)W(s)$ , on obtiendra le régulateur suivant :

$$K_1'(s) = 2.3317 \frac{(s+9.995)(s+0.1008)(s+1.506)}{(s+0.1032)(s^2+13.51s+81.8)}$$

$$K_2'(s) = 2.6418 \frac{(s+9.993)(s+20.5)(s+1.648)}{(s+26.17)(s+13.68)(s^2+21.48s+133.8)}$$

$$K_3'(s) = 1.9192 \frac{(s+16.49)(s+200)}{(s+63.88)(s+190.2)}$$

$$K'(s) = \begin{bmatrix} K_1'(s) & 0 & 0 \\ 0 & K_2'(s) & 0 \\ 0 & 0 & K_3'(s) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Que l'on peut réduire pour obtenir le régulateur final prenant en compte la pondération, on obtient alors :

$$K_1(s) = 332 \frac{(s + 1.506)}{(s + 15.86)(s^2 + 13.51s + 81.8)}$$

$$K_2(s) = 623.35 \frac{(s + 20.5)(s + 1.698)}{(s + 26.17)(s + 13.68)(s^2 + 21s + 171.2)}$$

$$K_3(s) = 383.84 \frac{(s + 16.49)}{(s + 63.88)(s + 190.2)}$$

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & K_2(s) & 0 \\ 0 & 0 & K_3(s) \end{bmatrix} \quad (13)$$

La décentralisation nous a permis d'utiliser plus précisément la notion de pondération rendant la synthèse du régulateur plus fiable que dans le cas où l'on aurait pris un modèle approximatif non décentralisé.

Si cela était le cas, la synthèse serait faite à partir d'un modèle de la forme suivante :

$$G_{app}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}^{app}(s) & G_{12}^{app}(s) & G_{13}^{app}(s) \\ G_{21}^{app}(s) & G_{22}^{app}(s) & G_{23}^{app}(s) \\ G_{31}^{app}(s) & G_{32}^{app}(s) & G_{33}^{app}(s) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Le régulateur obtenu sera d'ordre 84 avec des réponses fréquentielles proche de celle obtenu dans le cas du régulateur décentralisé sachant qu'il a été plus difficile de choisir les pondérations qui n'auront plus le même impact. Voilà pourquoi une décentralisation a été



nécessaire pour la synthèse du régulateur nous permettant d'obtenir une synthèse simple pour de bonnes performances.

Les fonctions caractéristiques auront la forme suivante :

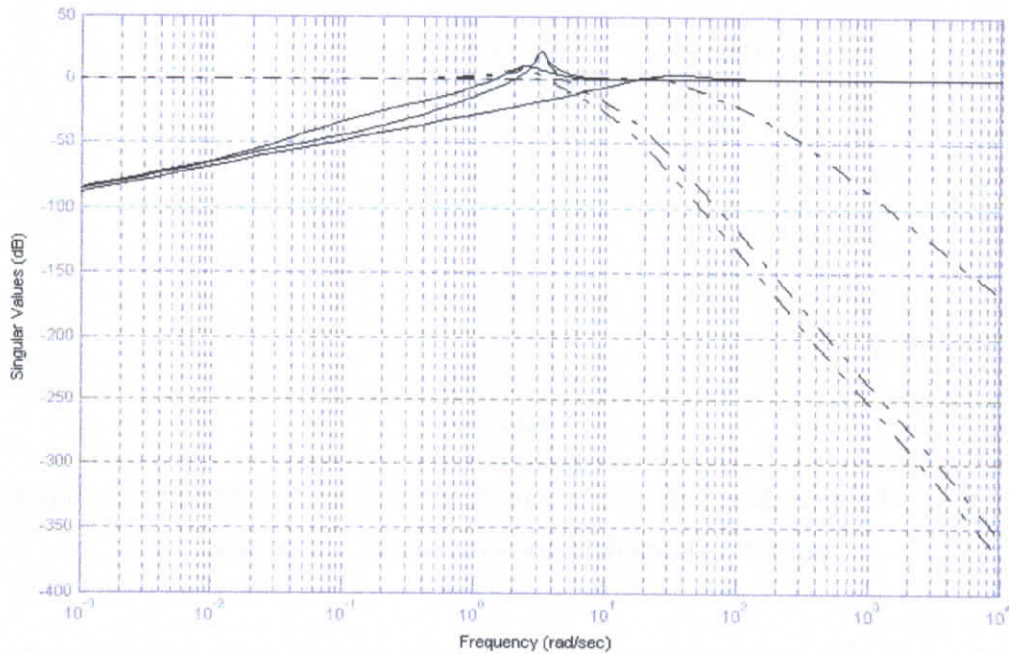


Figure IV.3. : Fonction de sensibilité (en trait plein) et de sensibilité complémentaire (en pointillé) du modèle décentralisé

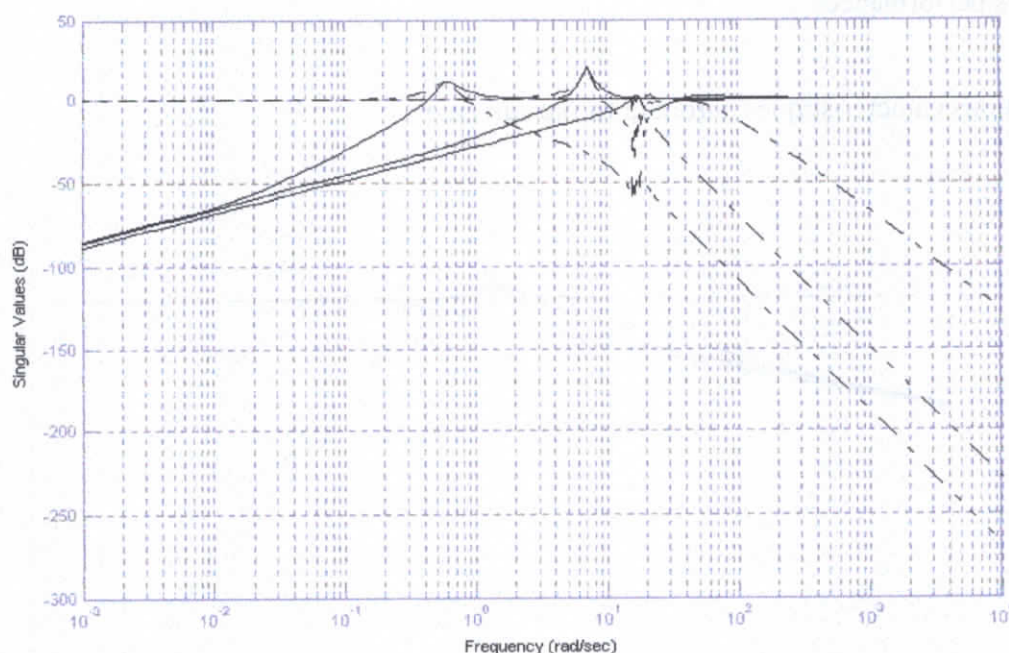


Figure IV.4. : Fonction de sensibilité (en trait plein) et de sensibilité complémentaire (en pointillé) du modèle linéarisé autour de l'origine

La forme des fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire indique que la boucle de suivi rejettera les modes mal amortis générés par les flexibilités.

#### IV.5. Commande d'un bras travaillant dans le plan horizontal

Nous allons voir maintenant différents essais nous permettant de tester la robustesse de cette boucle de régulation face aux différentes incertitudes citées plus haut en faisant varier les différents modes ainsi que leur amortissement.

Une diminution de l'amortissement rendrait le système plus sensible. Car, une augmentation de ce dernier ne ferait qu'augmenter la rigidité des bras et atténuer les flexibilités.

La trajectoire choisie est telle que le système passe par toutes ses dynamiques afin de montrer la robustesse du régulateur obtenu.

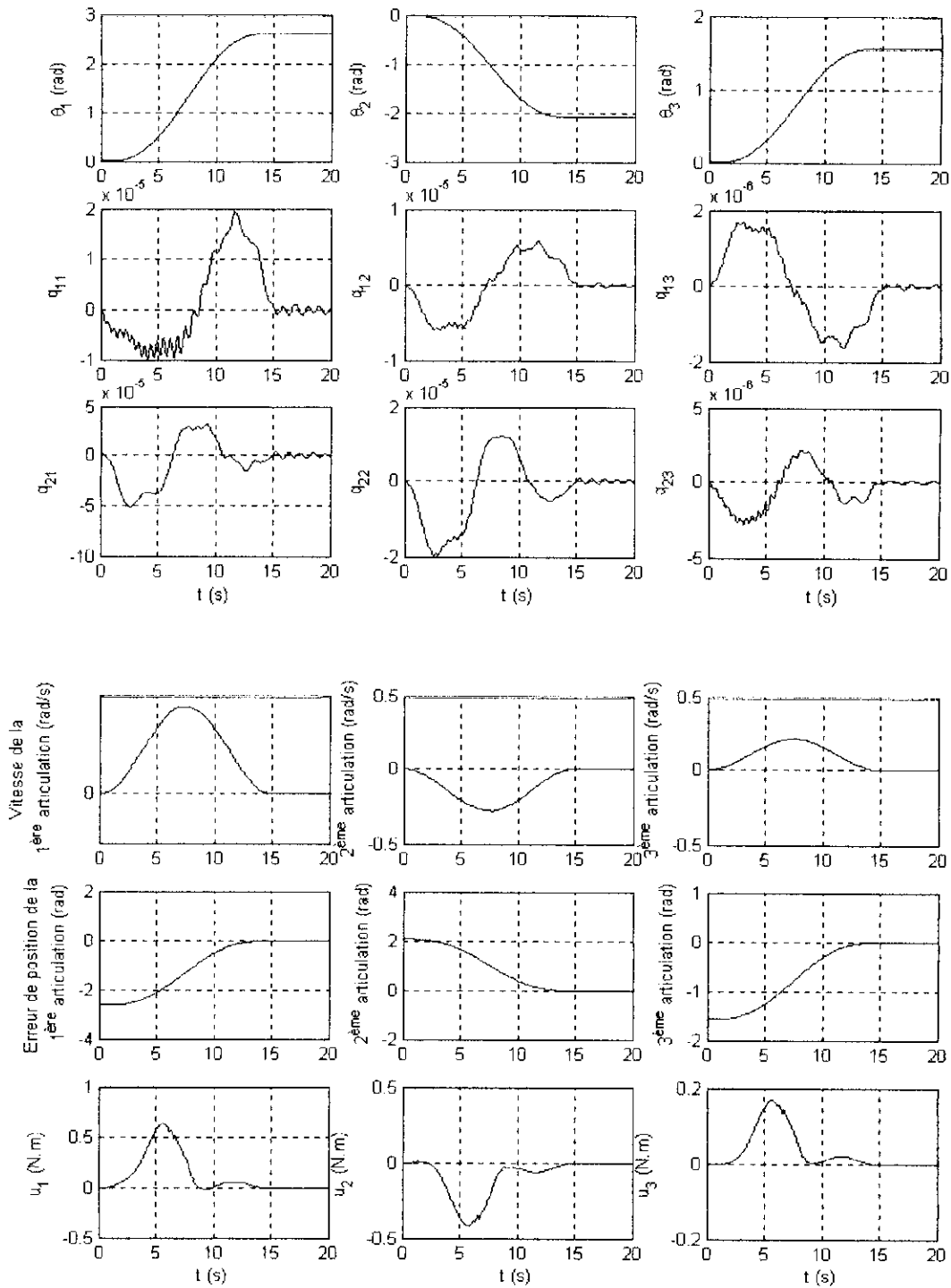


Figure IV.5. : Commande du bras flexible dans le plan horizontal de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$

$$\text{vers } \theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$$

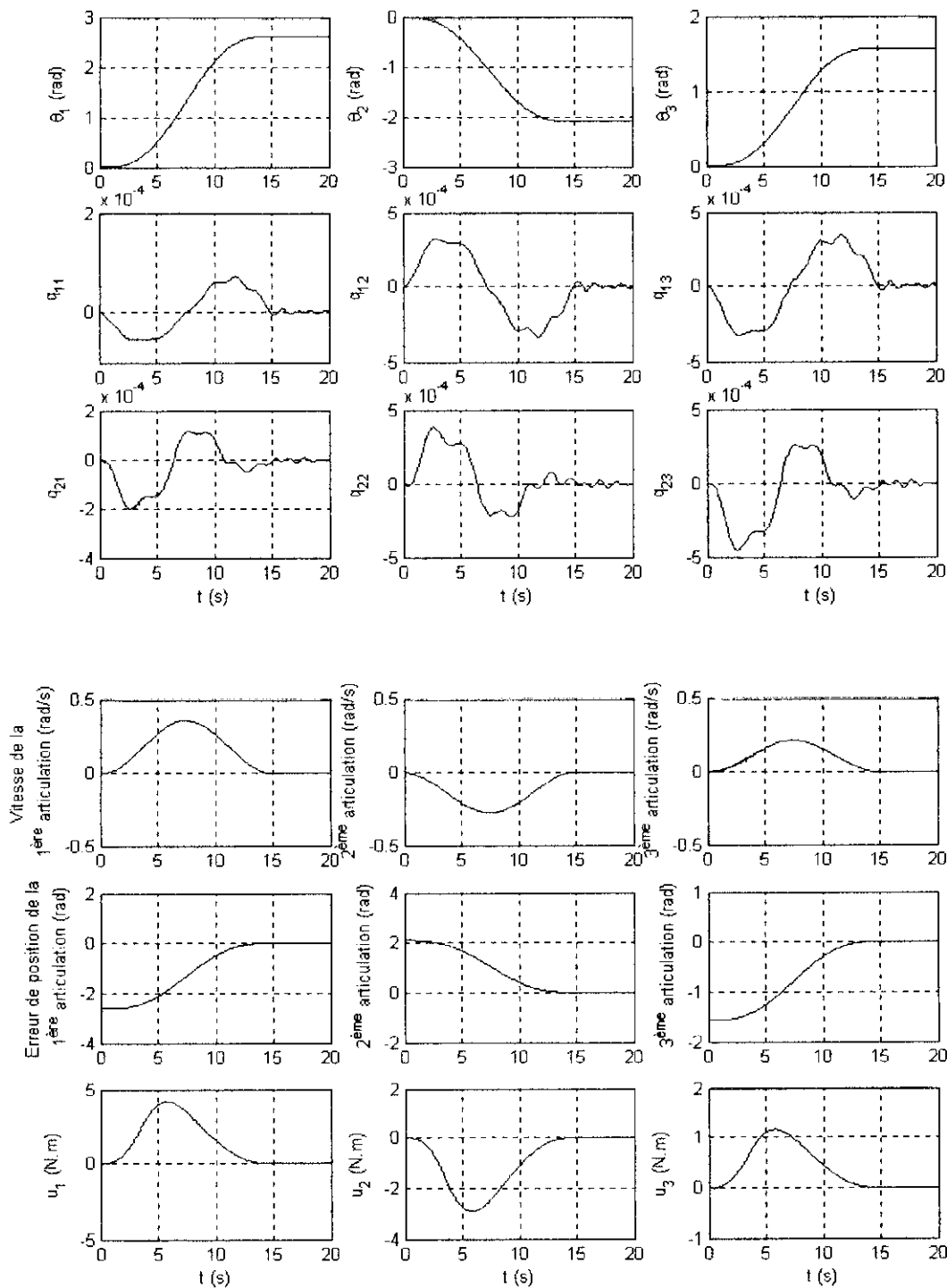


Figure IV.6. : Commande du bras flexible dans le plan horizontal de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec erreur de 25% sur les modes

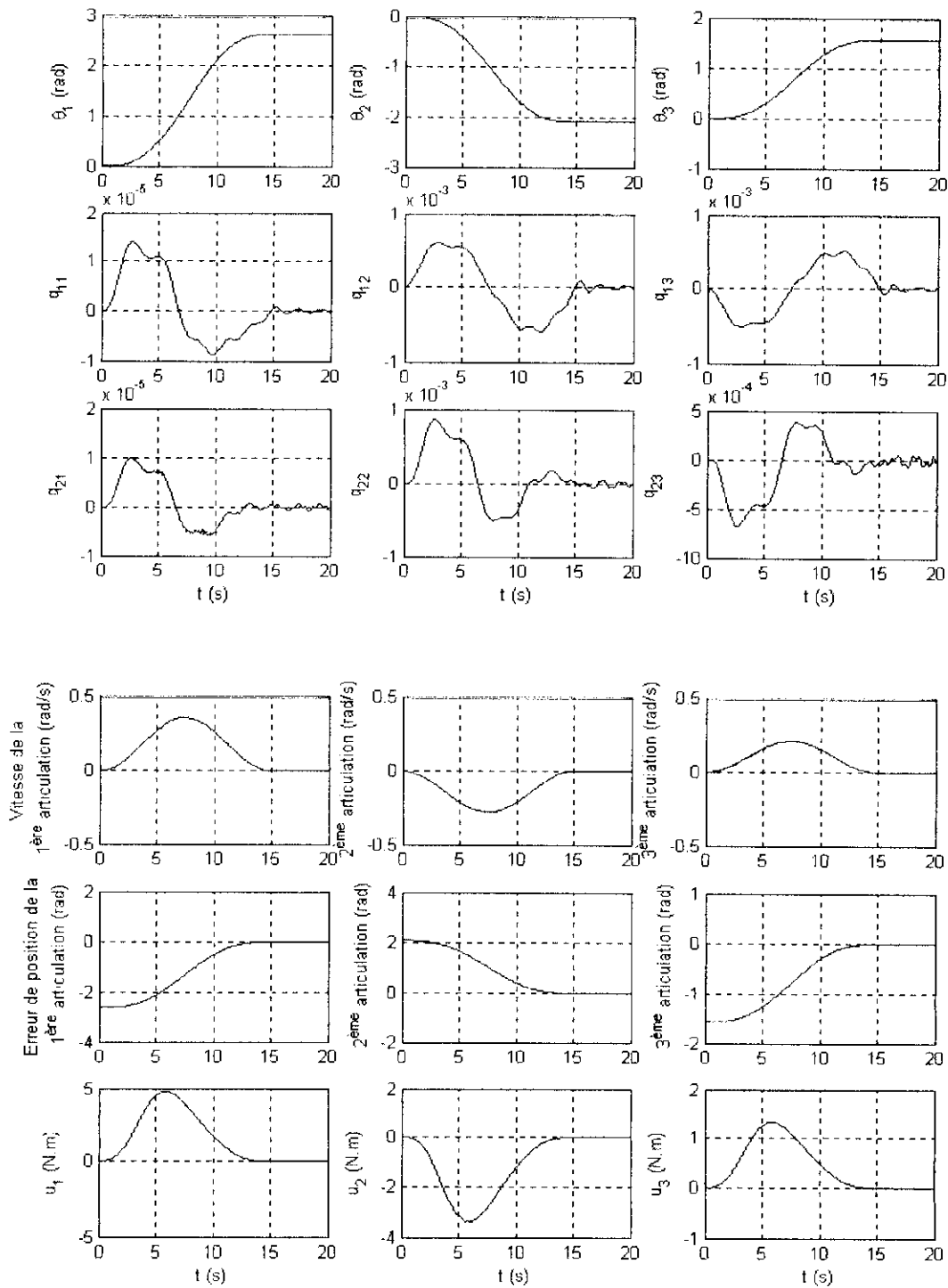


Figure IV.7. : Commande du bras flexible dans le plan horizontal de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$

vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec erreur de -25% sur les modes

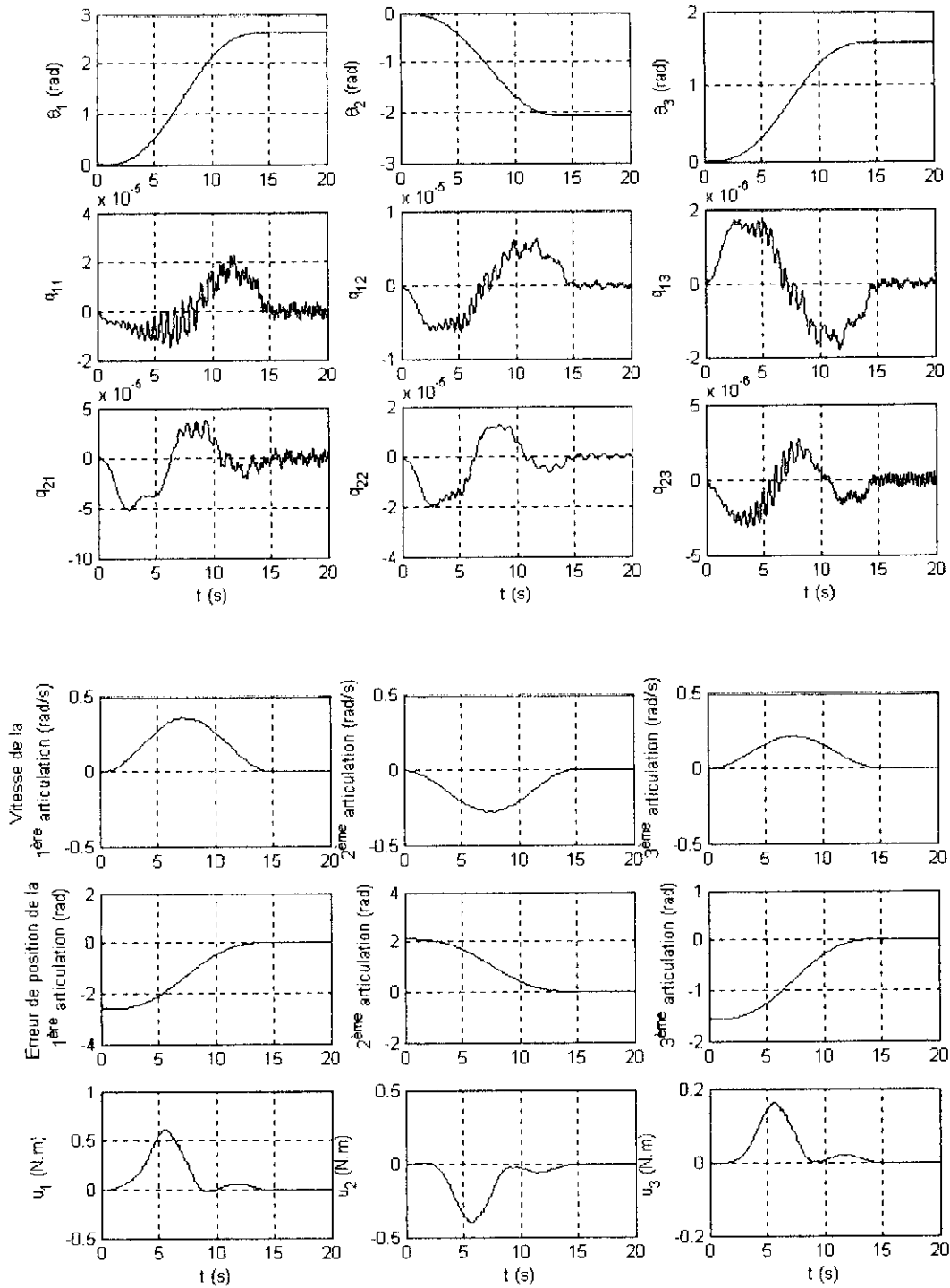


Figure IV.8. : Commande du bras flexible dans le plan horizontal de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec erreur de -100% sur l'amortissement des modes

On constate que la précision de la réponse est intéressante d'autant plus que la commande obtenue soit modérée sans qu'il n'y ait à utiliser de compensation en utilisant le gain statique du régulateur.

En faisant varier les modes et amortissement du bras, on constate que la réponse reste valable même si dans les figures IV.5., IV.6. , IV.7. et IV.8. les modes sont encore non nuls, mais trop petits pour être pris en compte.

## **IV.6. Commande d'un bras travaillant dans un plan quelconque**

### **IV.6.1. Compensation gravitationnelle**

Pour passer au cas d'un bras travaillant dans un plan quelconque, nous utiliserons trois méthodes pour générer la compensation gravitationnelle :

- compensation utilisant la totalité du vecteur d'état qui réclamerait dans la réalité, en plus de la mesure des angles rigides, la mesure des flexibilités,
- compensation utilisant la valeur des angles rigides nécessitant la mise à jour des valeurs mesurés par les capteurs au niveau des actionneurs,
- compensation utilisant les valeurs initiales et finales des angles rigides et utilisant les valeurs générées par la trajectoire cycloïdale.

La compensation ne pourra agir que sur les trois premières lignes de l'équation dynamiques étant la seule manière d'y accéder. On considérera les autres termes comme des approximations négligeables.

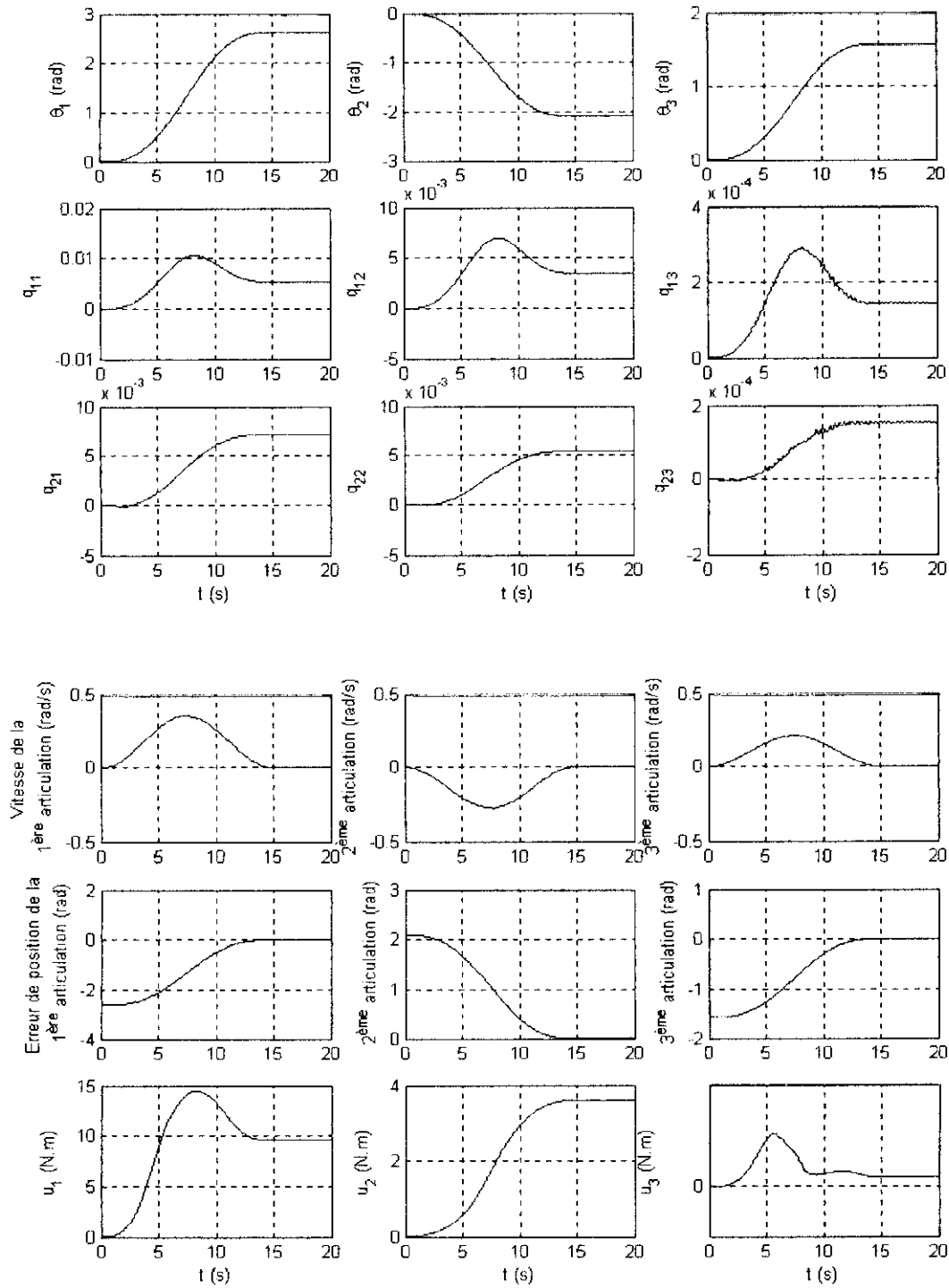


Figure IV.9. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance de tout le vecteur d'état

On constate l'augmentation de la commande en particulier pour la première articulation cela s'explique par le fait qu'il doit répondre à la contrainte due à la gravitation.



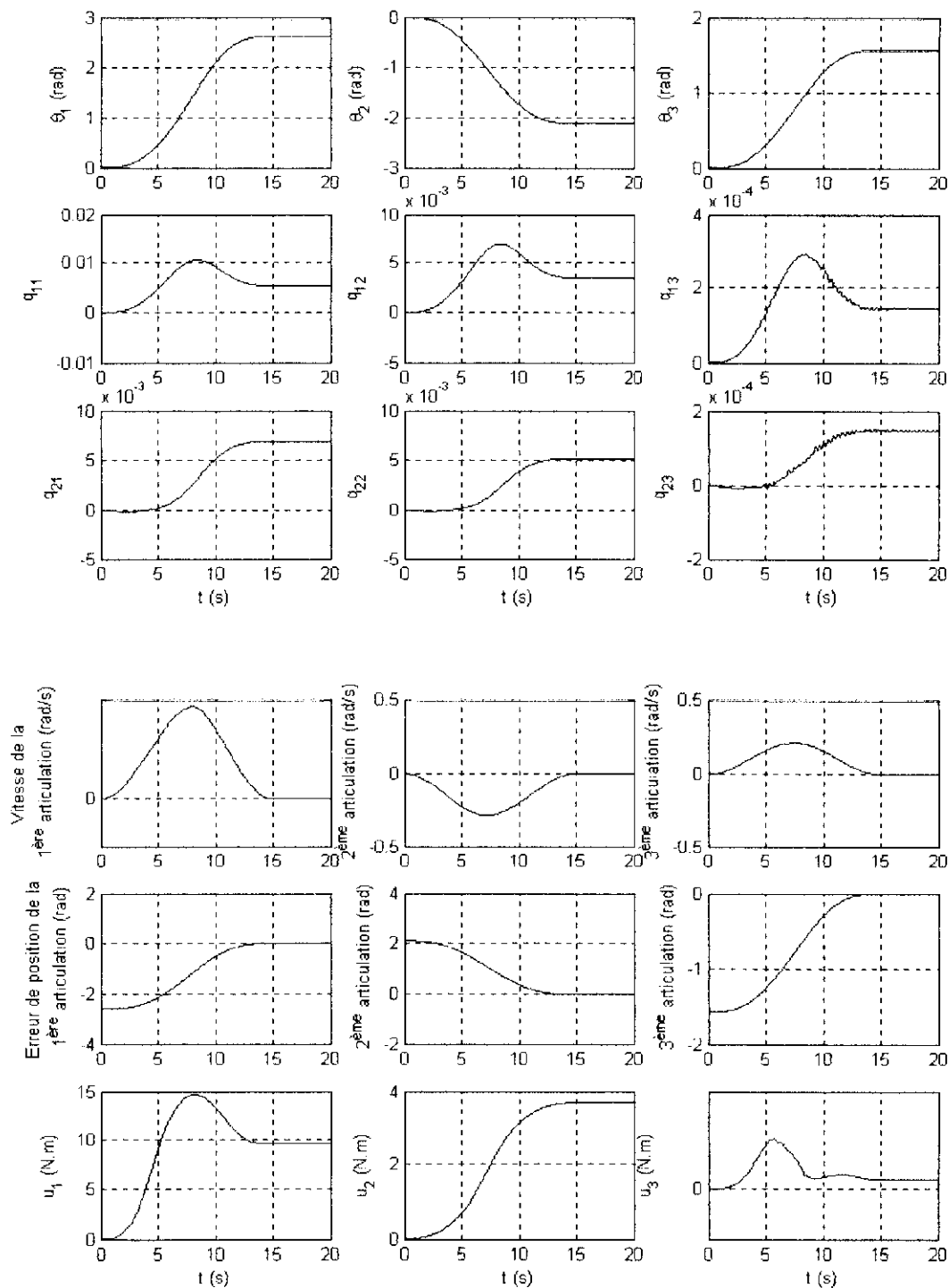


Figure IV.10. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$   
 vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides

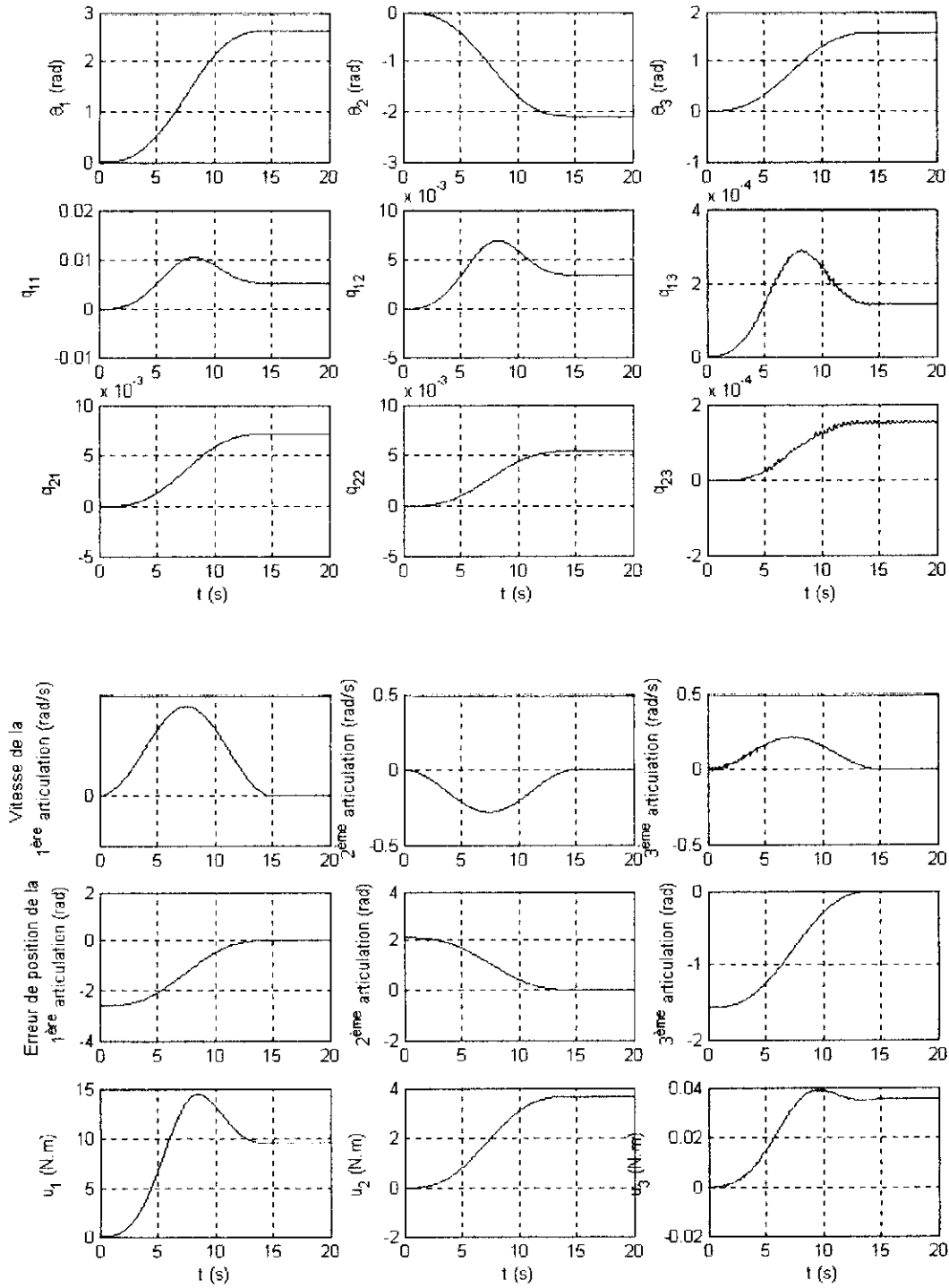


Figure IV.11. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux

On constate dans les trois cas que la réponse reste précise sans qu'il y ait détérioration de ses performances telle que la commande.

IV.6.2. Différents tests de robustesse

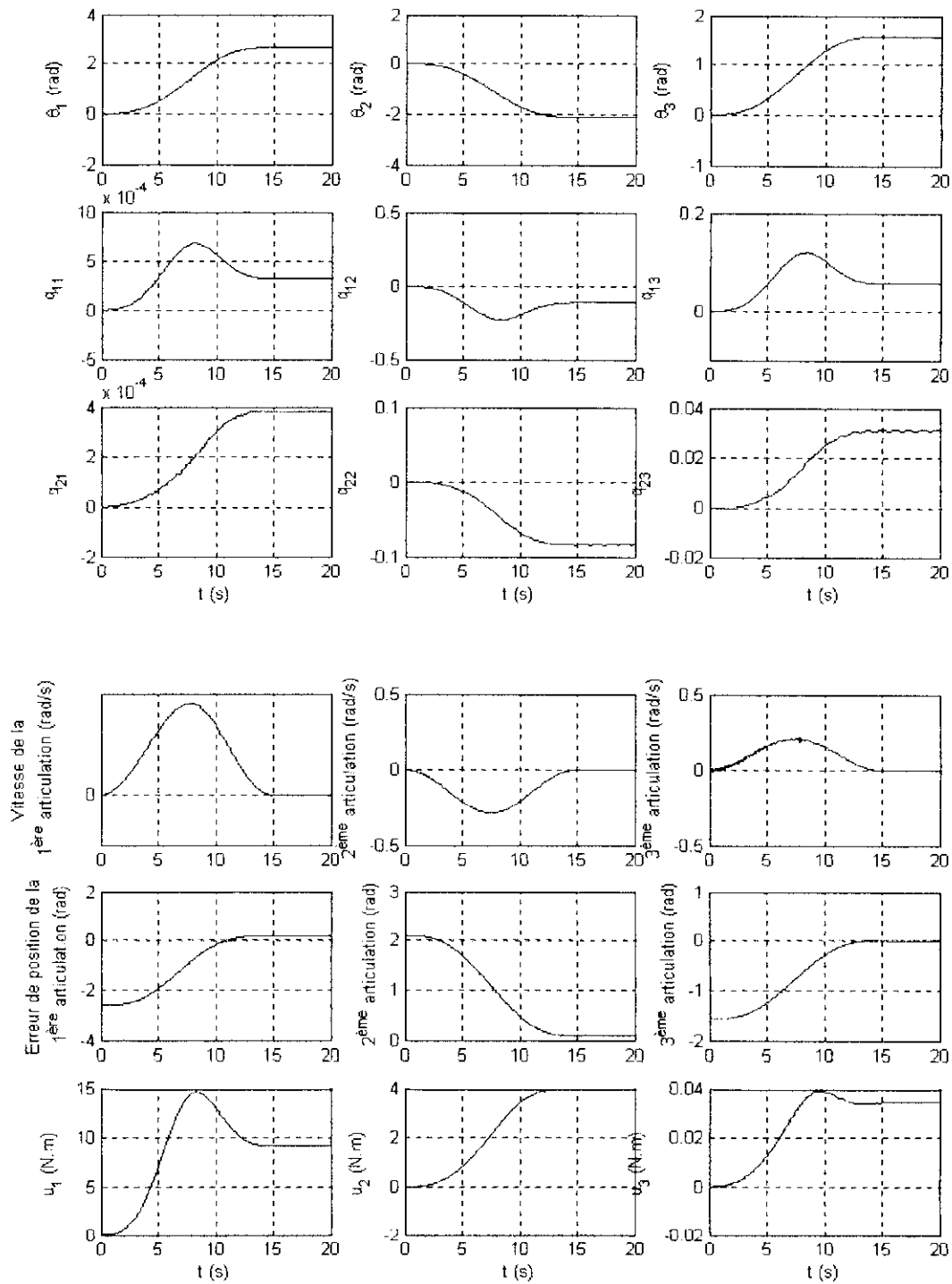


Figure IV.12. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de -25% sur les modes de flexibilités

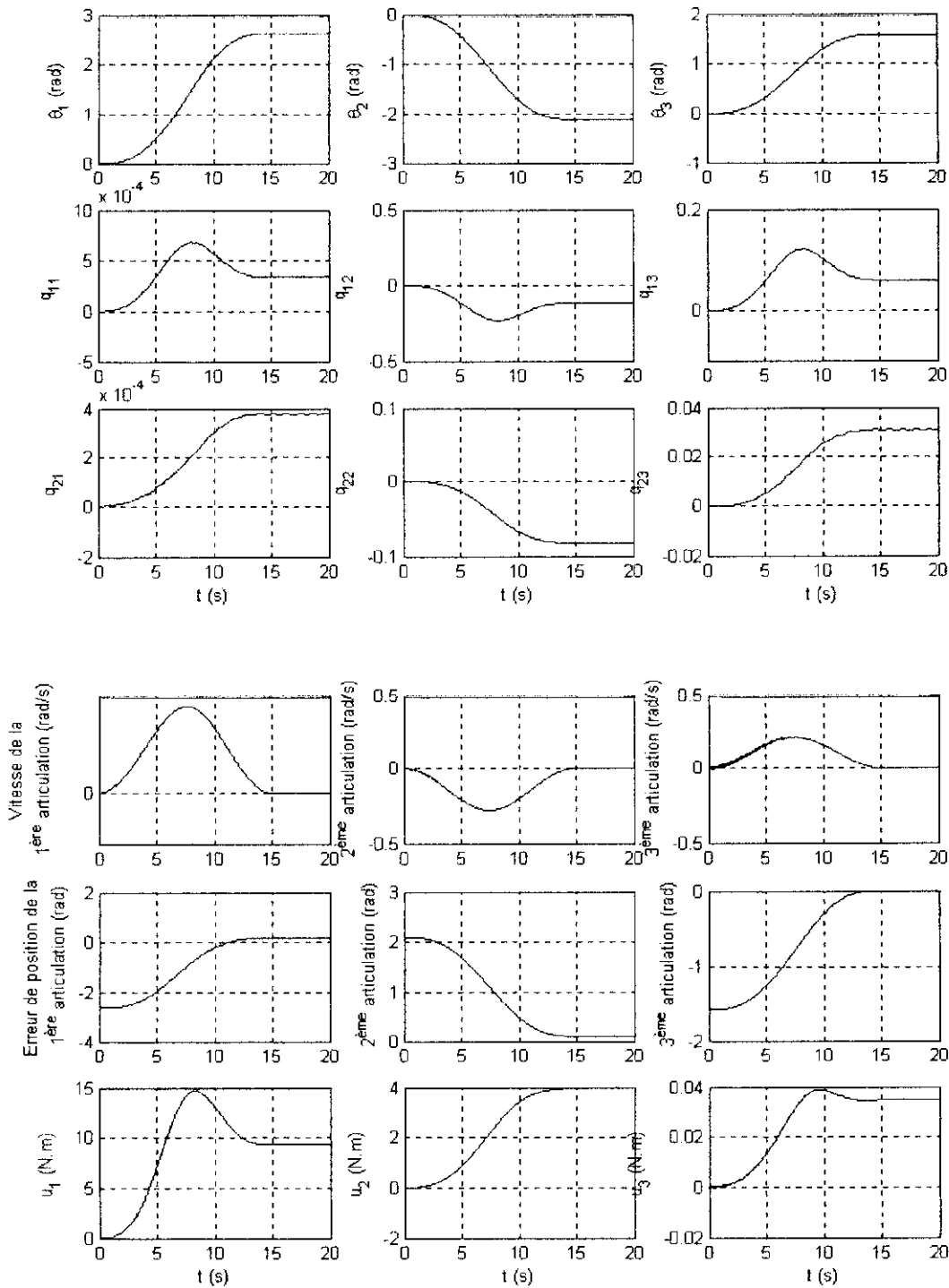


Figure IV.13. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de -25% sur les modes de flexibilité et de -50% sur l'amortissement des modes de flexibilités

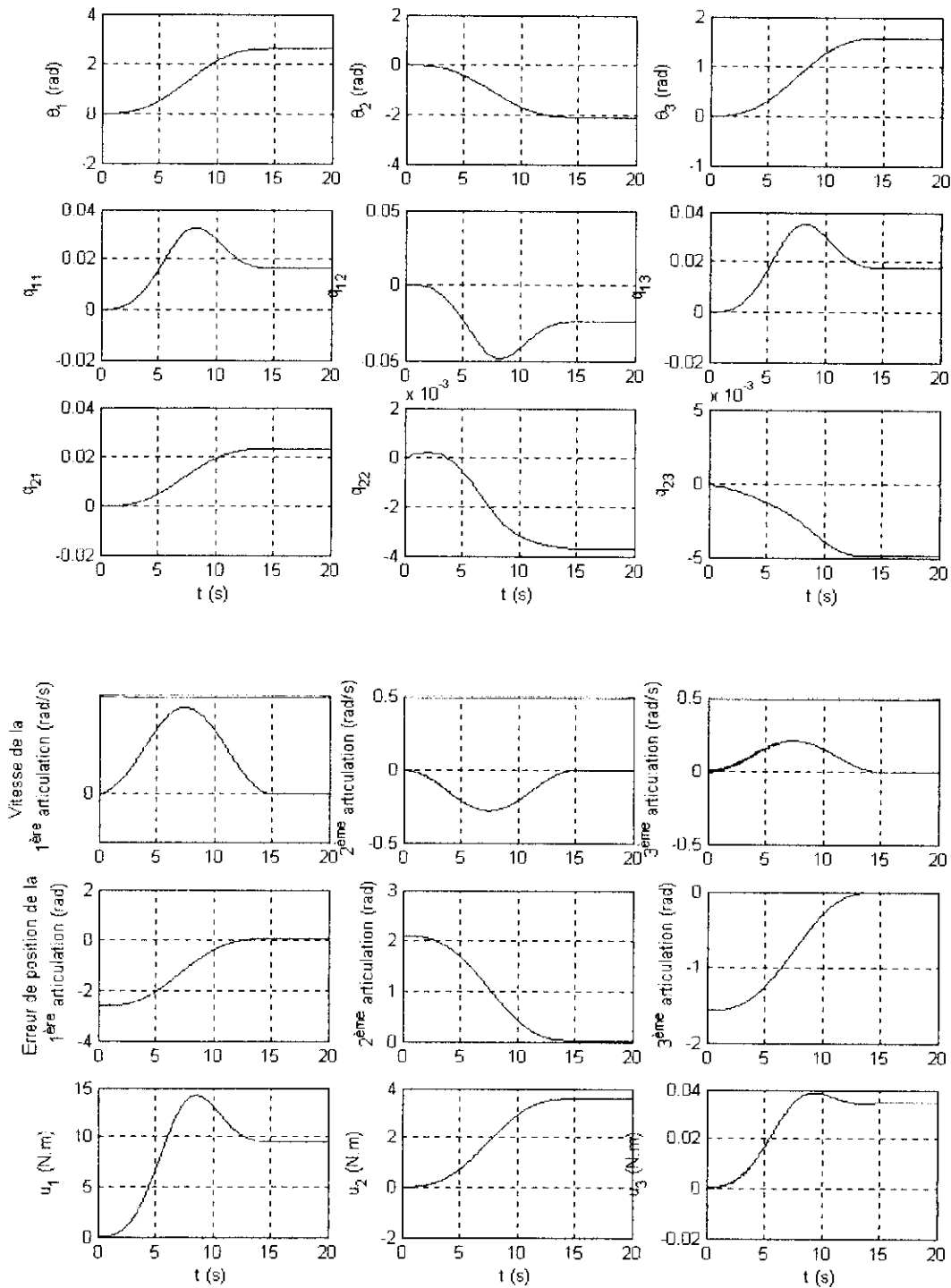


Figure IV.14. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 25% sur les modes de flexibilité et de -50% sur l'amortissement des modes de flexibilités

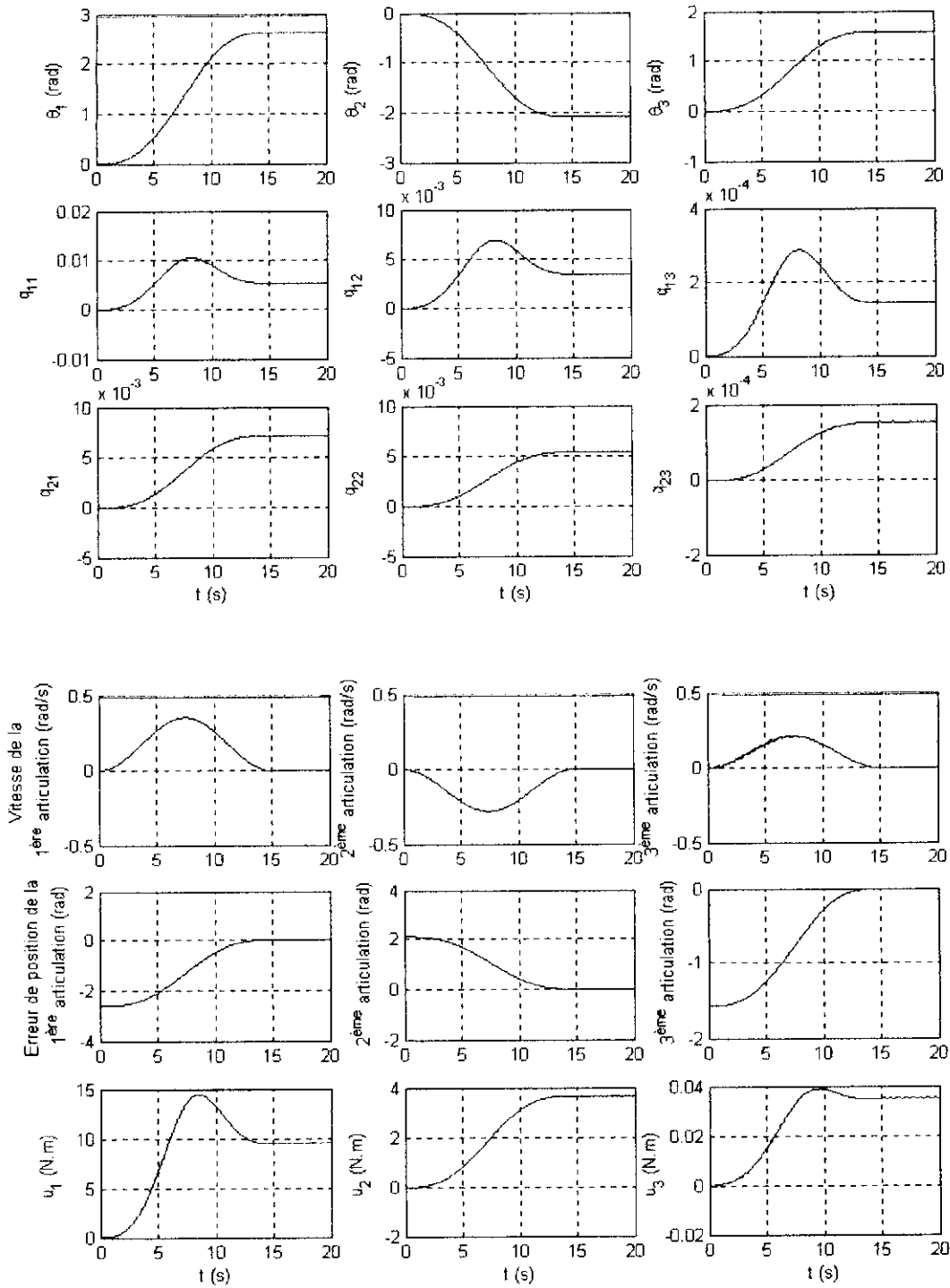


Figure IV.15. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de -100% sur l'amortissement des modes de flexibilités

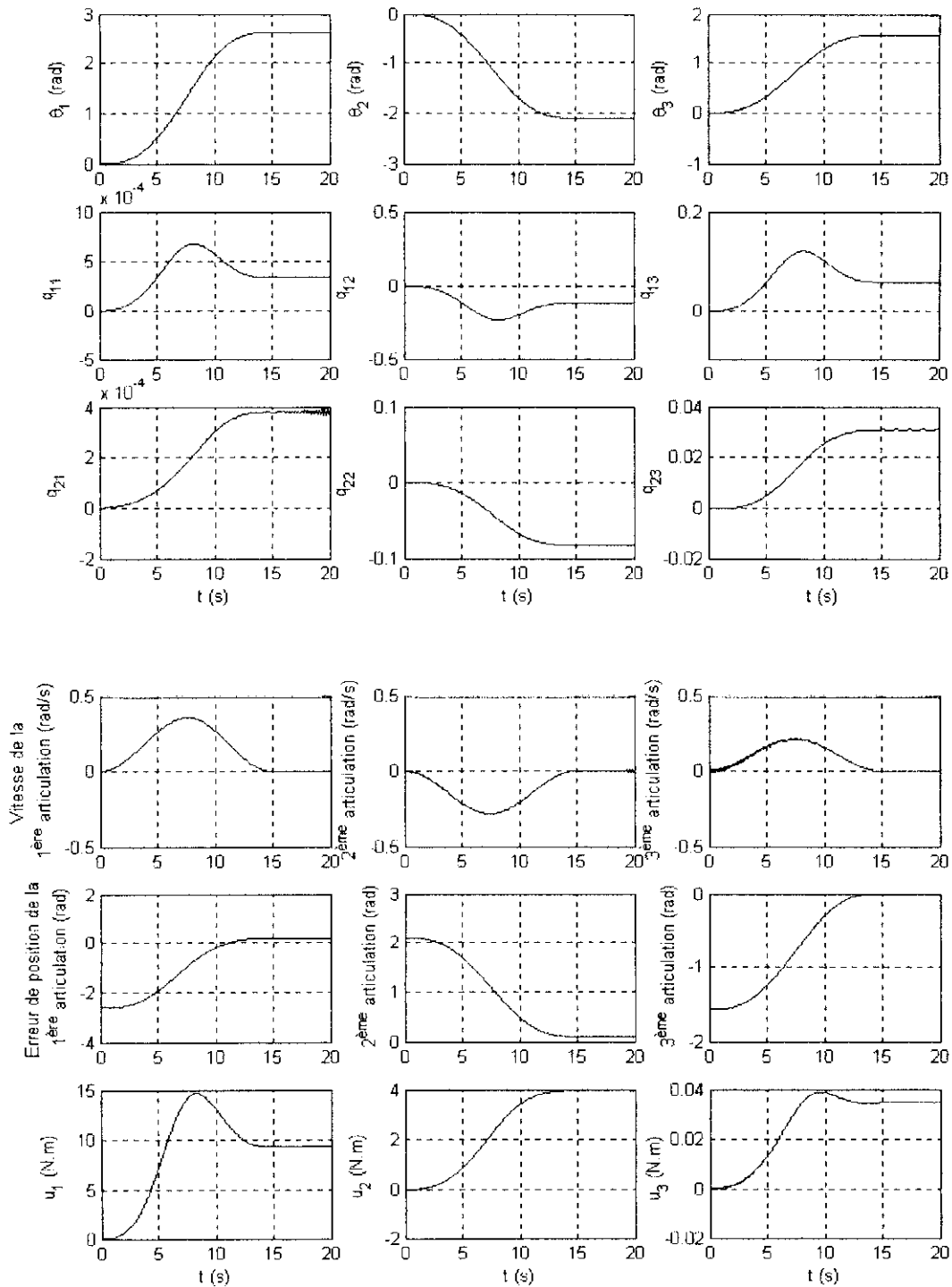


Figure IV.16. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de -25% sur les modes de flexibilité et de -100% sur l'amortissement des modes de flexibilités

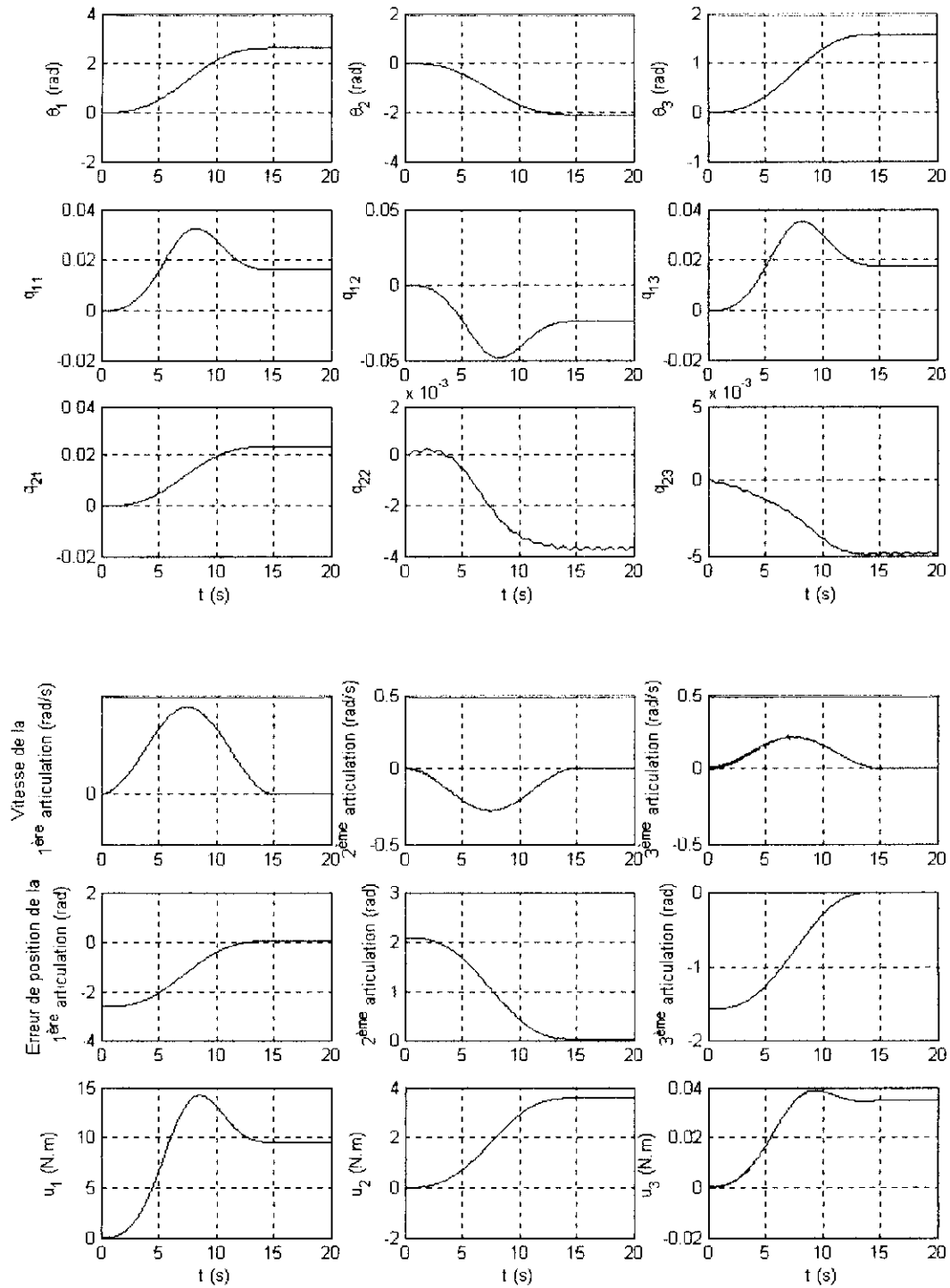


Figure IV.17. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 25% sur les modes de flexibilité et de -100% sur l'amortissement des modes de flexibilités



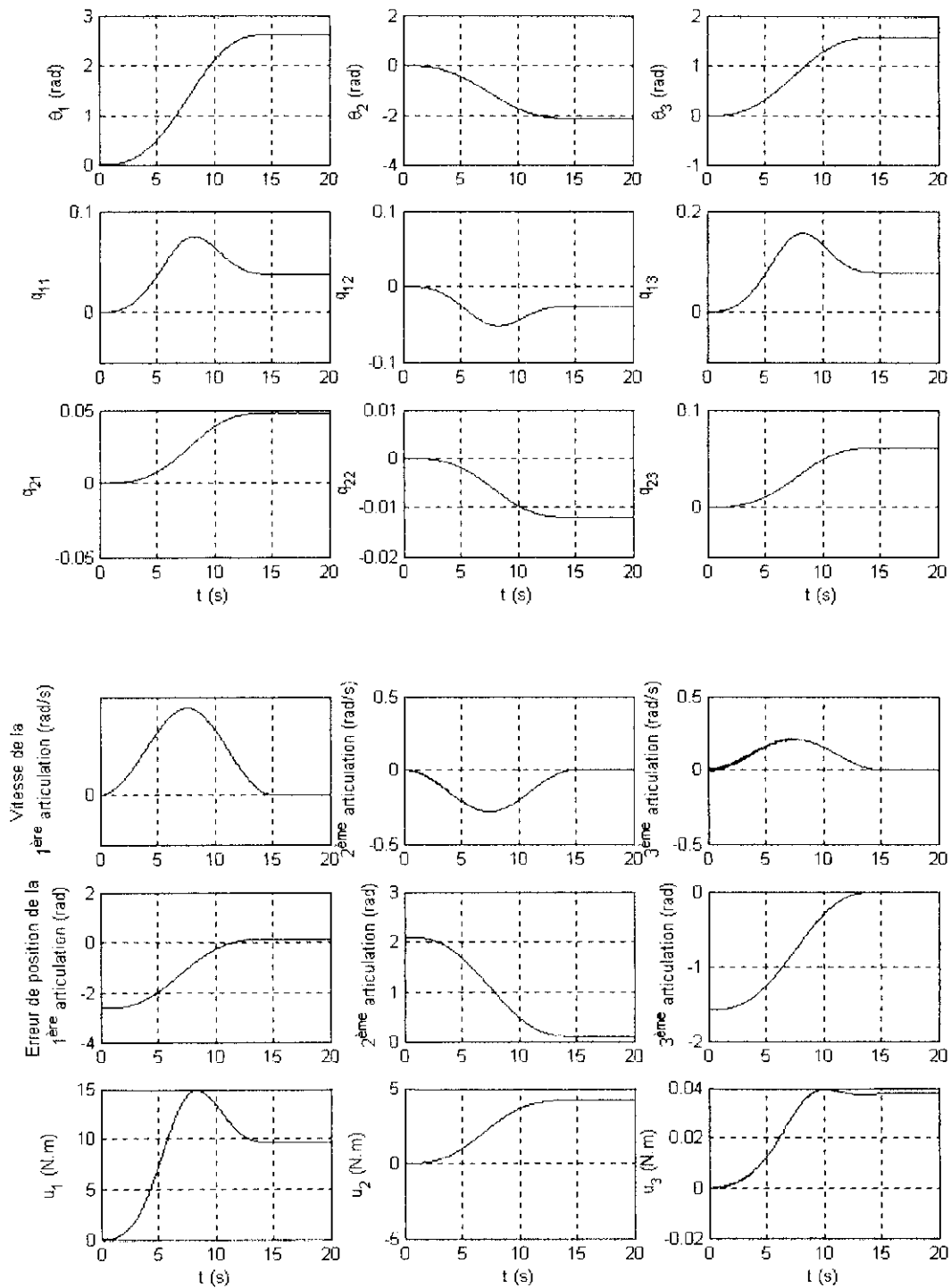


Figure IV.18. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 50% sur les modes de flexibilité et de -100% sur l'amortissement des modes de flexibilités

On constate d'après les figures IV.13., IV.14., IV.15. et IV.16. que l'erreur sur l'amortissement ne modifiera ni la qualité de la réponse ni la qualité de la commande qui restent bonne tout en ayant une stabilisation des modes de flexibilités.

Aussi, on constate d'après les figures IV.17. et IV.18. que la variation sur les modes de flexibilités avec une erreur totale sur l'amortissement ne modifie en rien la qualité de la boucle de suivi.

Voyons maintenant l'effet de la variation de la charge sur le système :

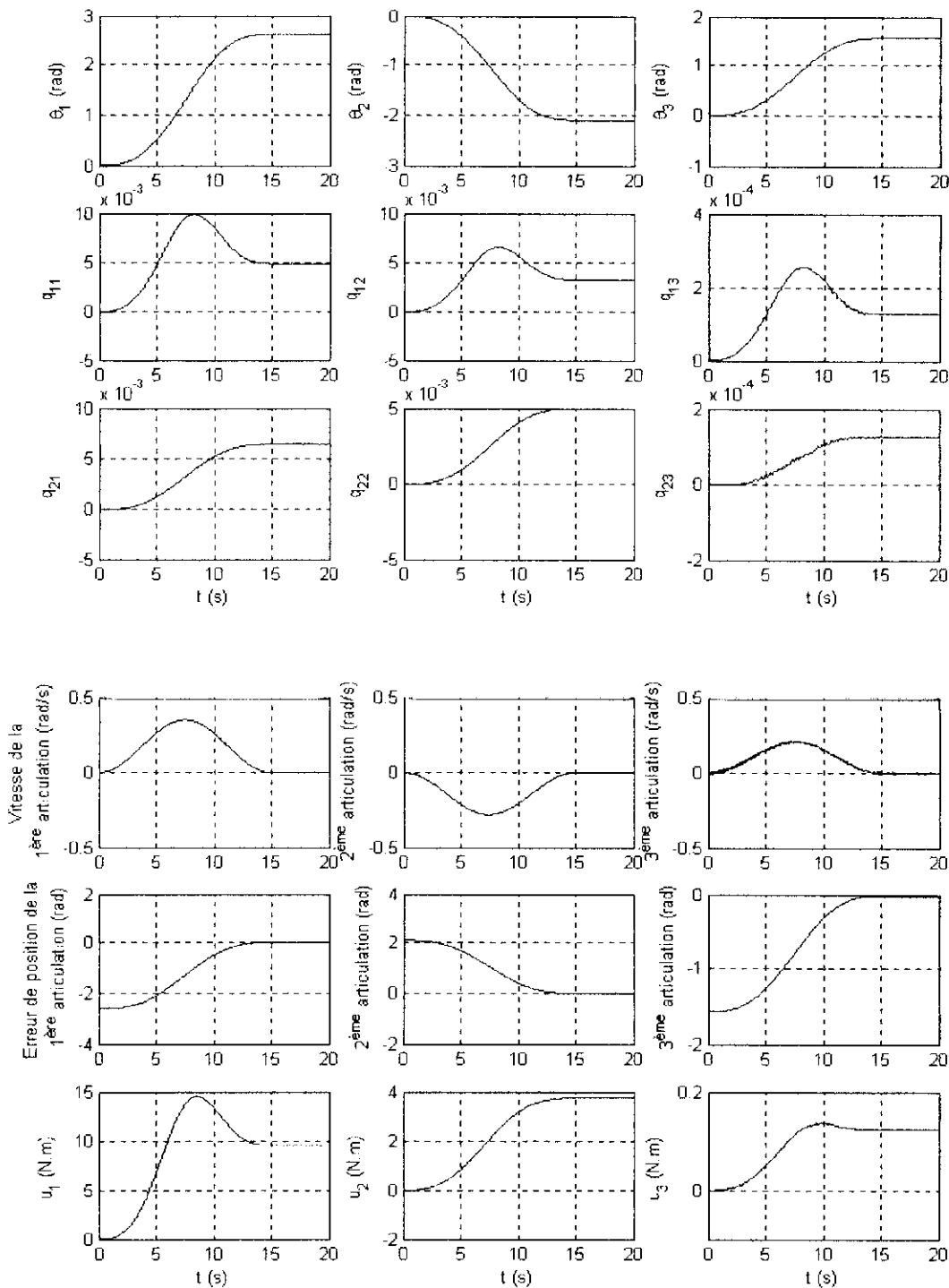


Figure IV.19. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 10% sur la charge

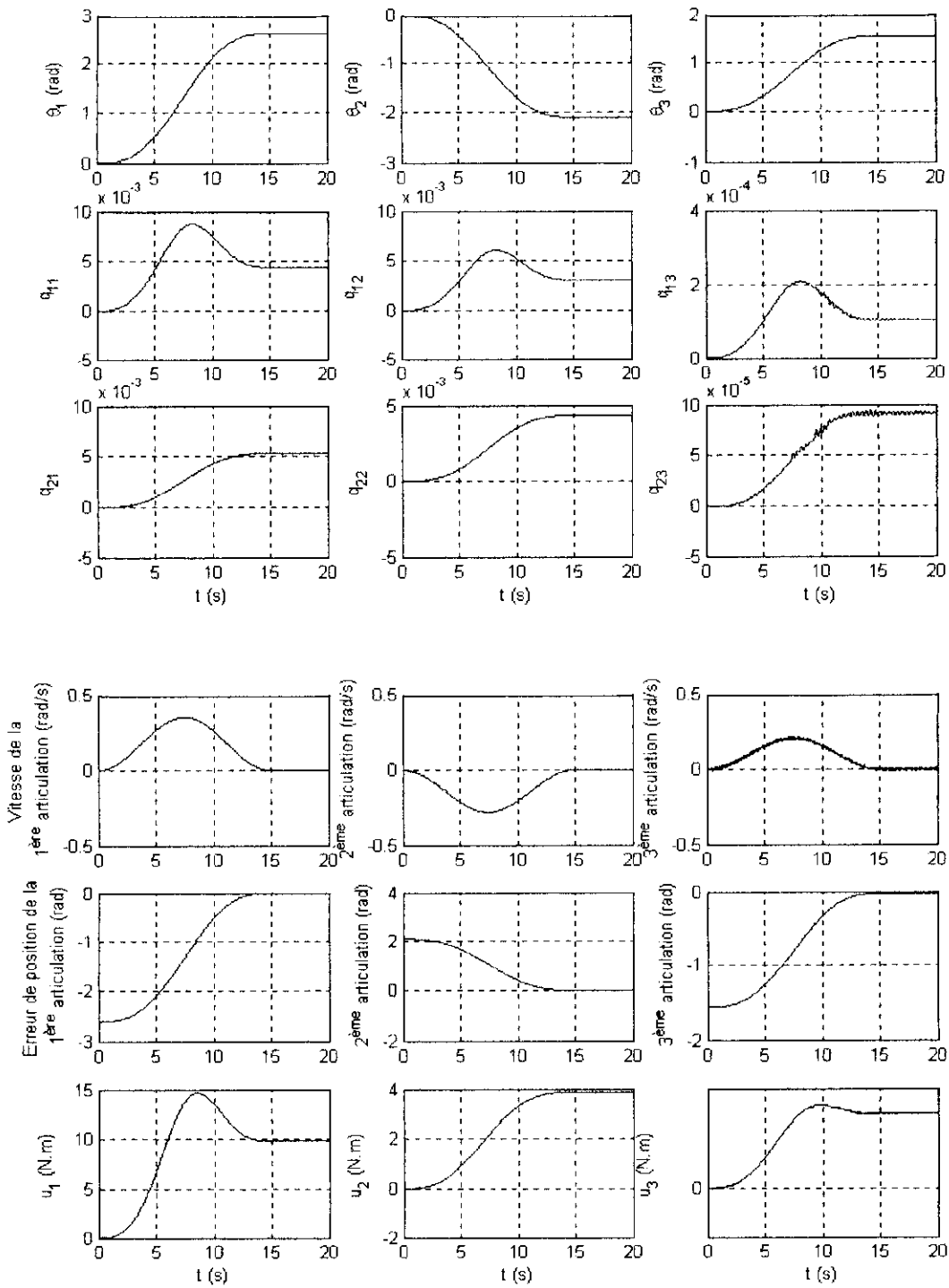


Figure IV.20. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$   
 vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et  
 erreurs de 150% sur la charge

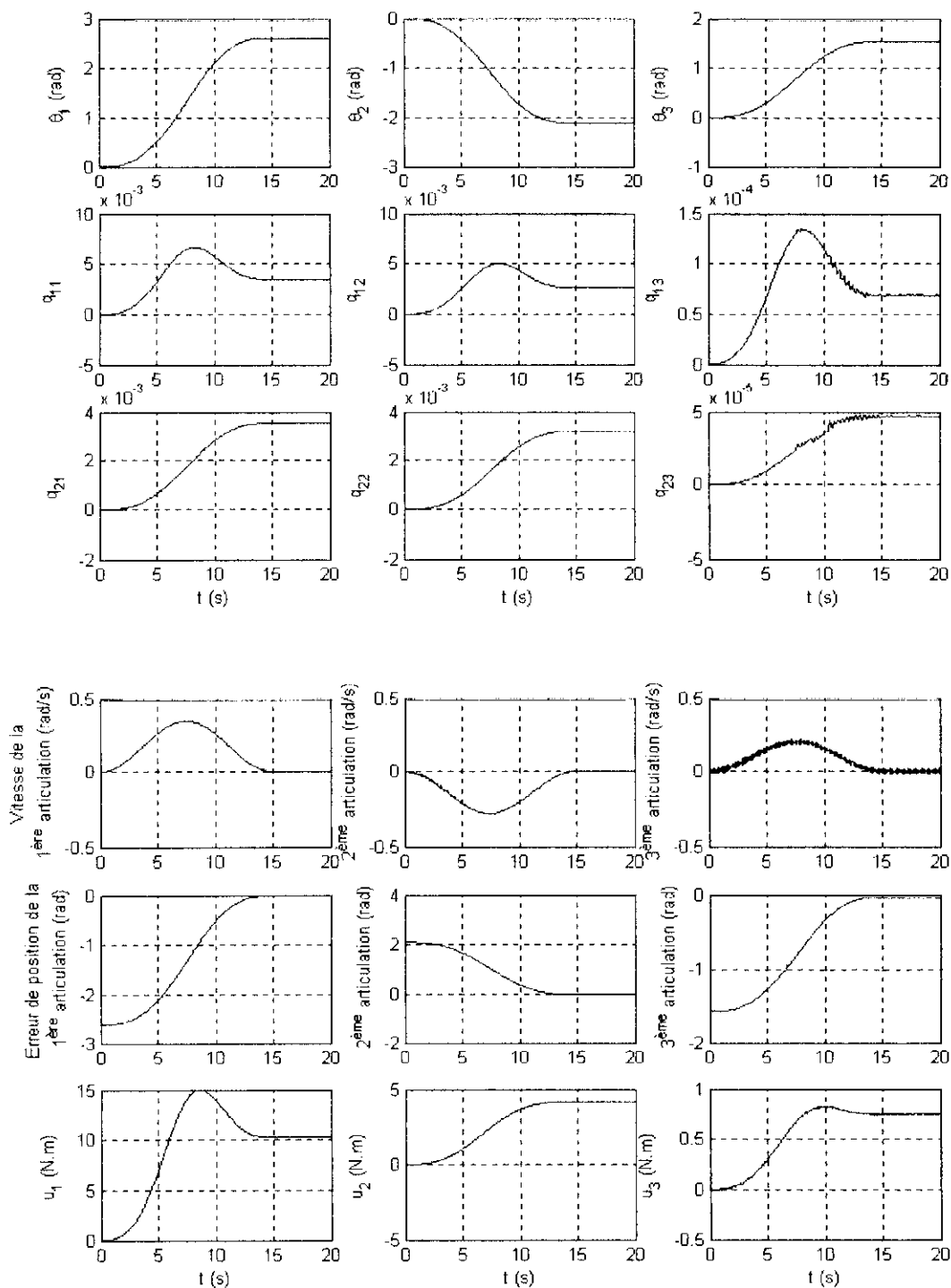


Figure IV.21. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 400% sur la charge

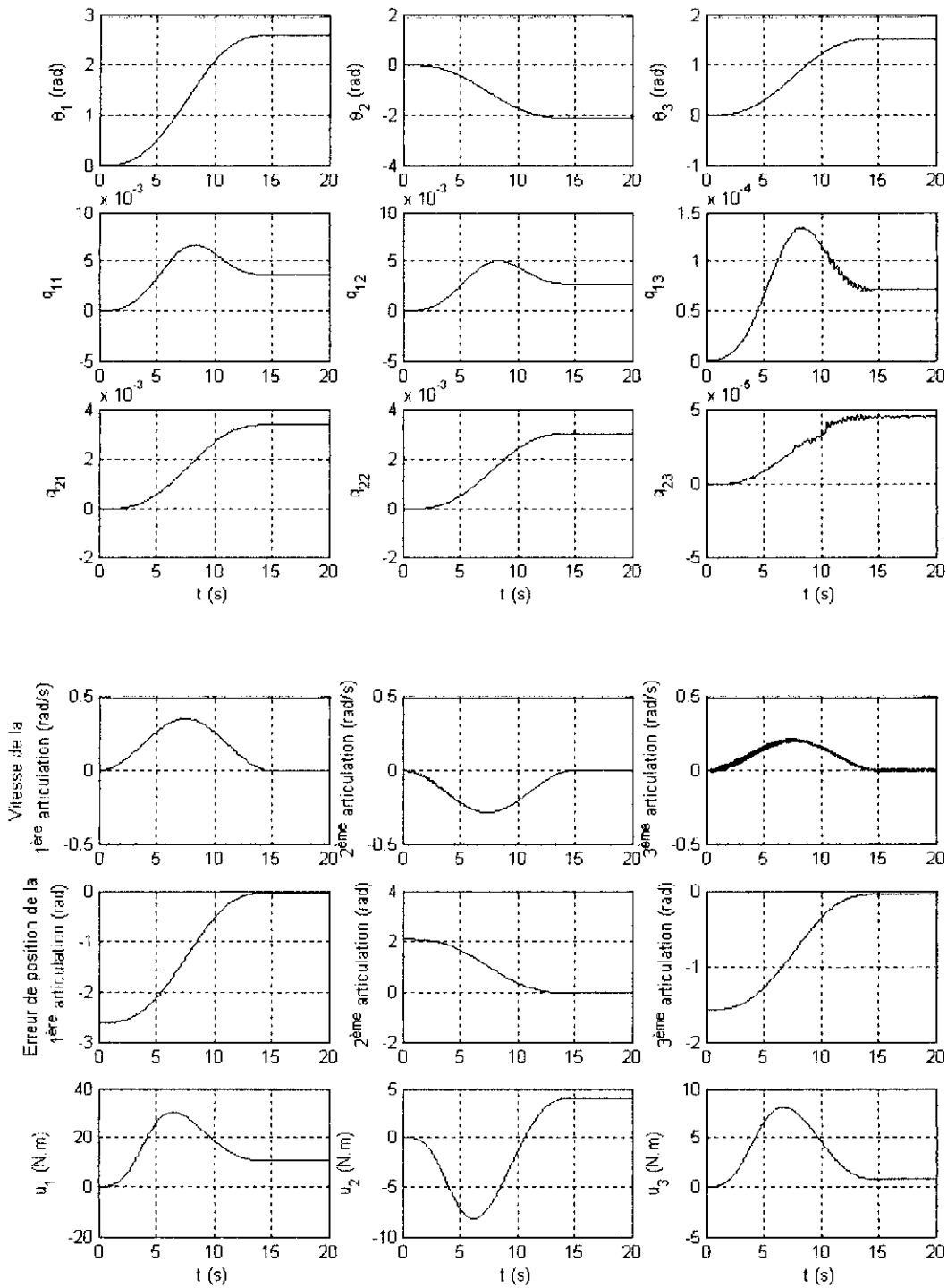


Figure IV.22. : Commande du bras flexible dans le plan vertical

de  $\theta = [-150^\circ \ 120^\circ \ -90^\circ]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 400% sur la charge

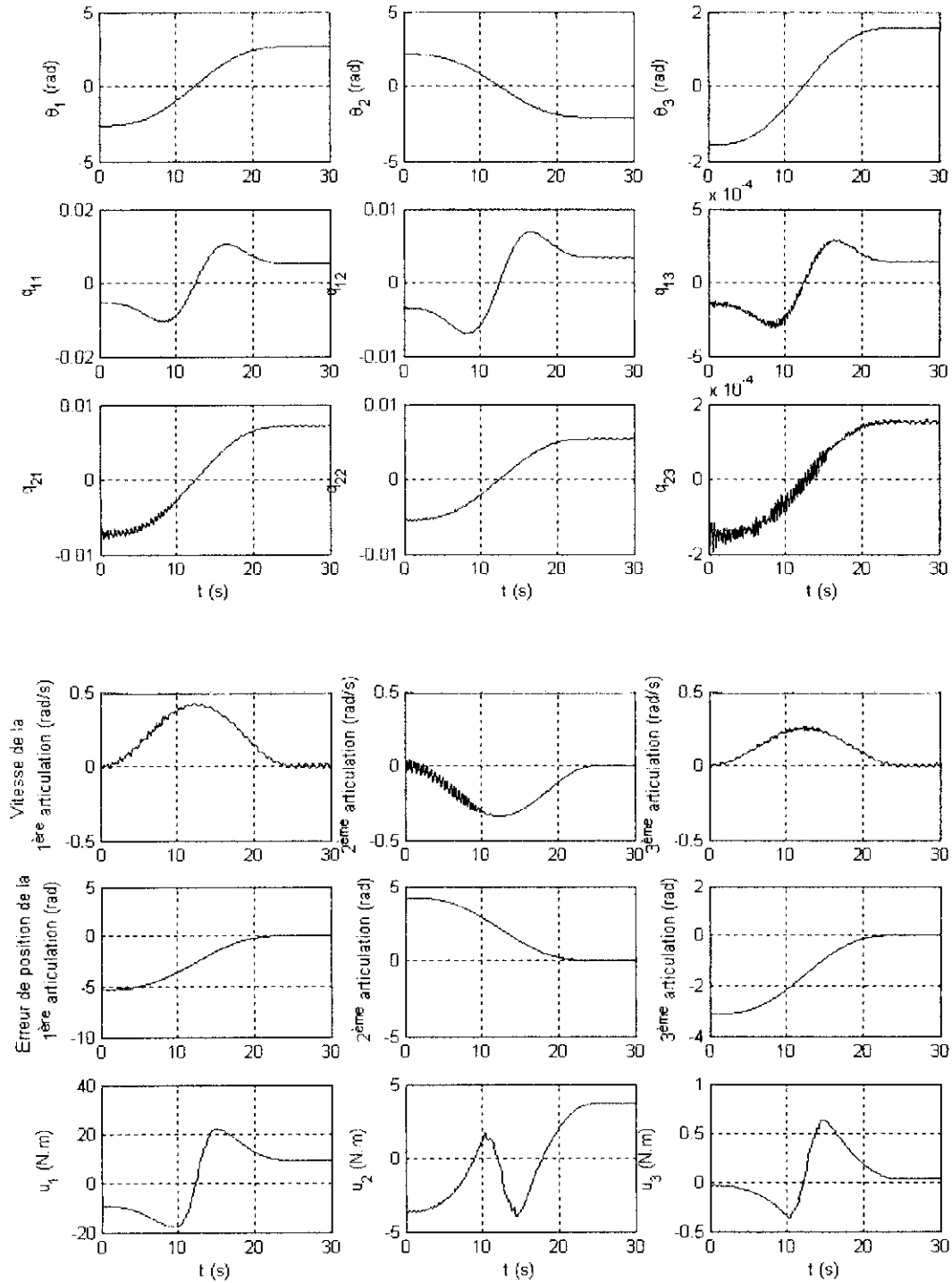


Figure IV.23. : Commande du bras flexible dans le plan vertical

de  $\theta = [-150^\circ \ 120^\circ \ -90^\circ]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec connaissance des angles rigides initiaux et finaux et erreurs de 650% sur la charge

Une forte variation de la charge (de 0.200 kg à 1.500 kg) rajoutera des oscillations au niveau des flexibilités sans altérer les performances du système.

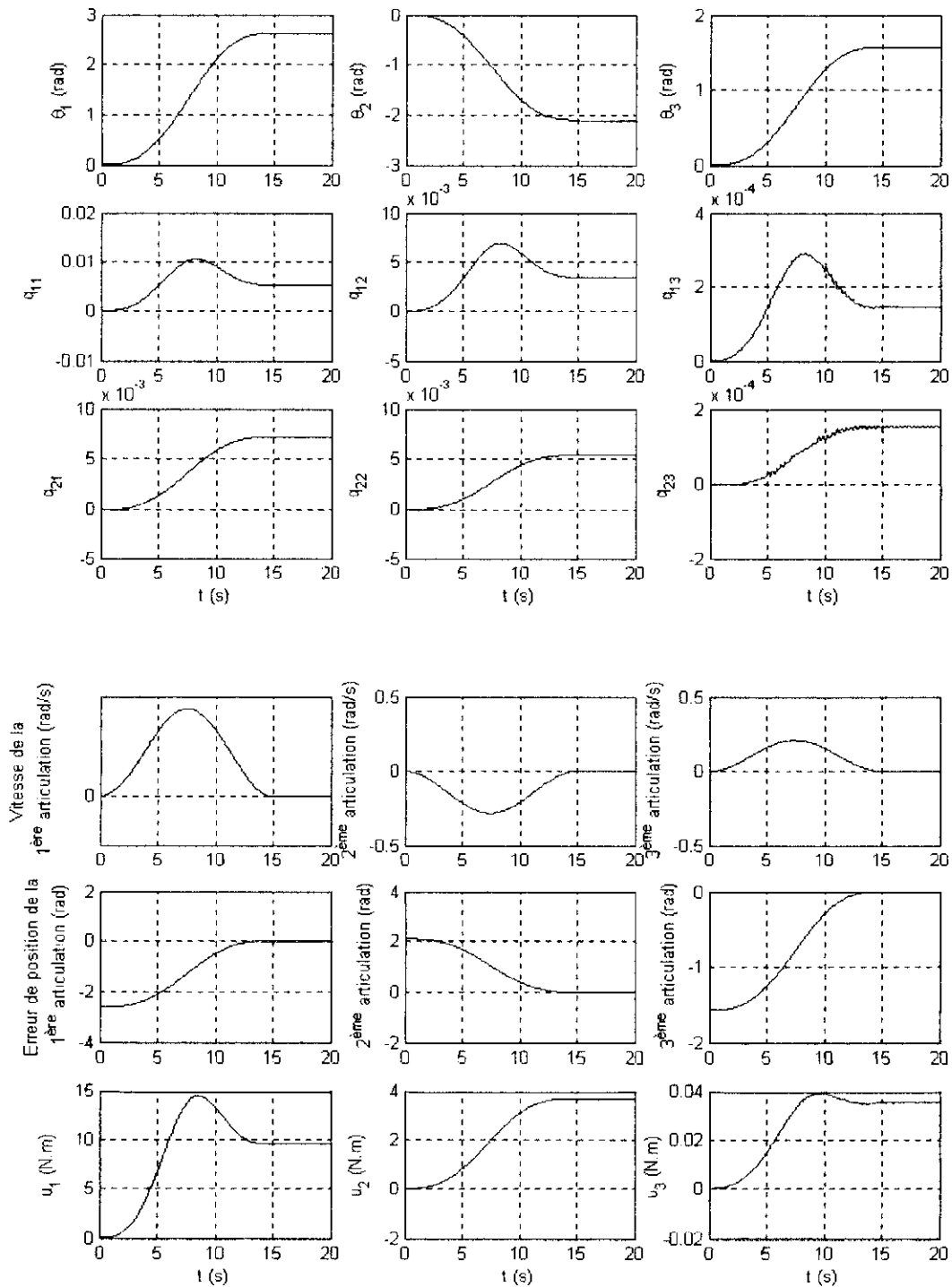


Figure IV.24. : Commande du bras flexible dans le plan vertical de  $\theta = [0 \ 0 \ 0]^T$  vers  $\theta_f = [150^\circ \ -120^\circ \ 90^\circ]^T$  avec des bruits hautes fréquences au niveau des capteurs



Nous pouvons voir dans cette dernière figure (IV.24.) que même avec la présence des bruits de mesures qui sont en général de type hautes fréquences la réponse reste précise avec une bonne atténuation des perturbations au niveau de la commande aussi.

#### **IV.7. Conclusion**

Grâce à la commande  $H_\infty$  décentralisée avec compensation gravitationnelle, on a pu réaliser la commande d'un système possédant des variations de paramètres que ce soit les modes de flexibilité, leurs amortissements ou la charge au bout du bras en ayant besoin que des valeurs initiales et finales des angles et en utilisant la trajectoire cycloïdale générée.

Les différents intérêts de cette commande sont la simplicité de conception du régulateur obtenant un régulateur robuste tout en étant de structure simple. Mais, l'autre avantage de cette méthode a été d'éviter l'utilisation des boucles d'identification utilisant des algorithmes d'adaptation paramétrique alourdissant les calculs et demandant l'utilisation de calculateurs puissants.

## Conclusion

Nous avons donc réussi à concevoir une commande  $H_\infty$  décentralisée. Ceci a été possible grâce à une compensation gravitationnelle simplifiant l'équation dynamique et donc la décentralisation. Cette dernière a facilité la synthèse du régulateur par la méthode de Glover-Doyle appliquée aux éléments diagonaux du modèle décentralisé. Ainsi, il a été possible d'utiliser des pondérations qui nous ont permis de répondre aux différentes spécificités du cahier des charges.

Le régulateur obtenu est valable pour tous les points de fonctionnement sans utiliser d'algorithme d'identification paramétrique en ligne et robuste aux incertitudes généralement rencontrées dans le domaine des bras flexibles généralement causées par une mauvaise identification des modes et de leur amortissement ainsi que par la variation de la charge. En plus de cette robustesse, la commande est générée à partir d'un seul régulateur valable pour tous les points de fonctionnement rendant son implémentation facile sur un simple calculateur numérique.

Cette étude peut servir de base à de futurs travaux en développant certains points tels que la conception d'une compensation gravitationnelle déterminée à partir d'une approximation initiale et adaptée à partir d'un algorithme d'apprentissage par exemple.

## Bibliographie

- [1] Alazard, D., C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, G. Ferreres (1999). "Robustesse et commande optimale", Cépaduès-Edition
- [2] Armstrong, E.S. (1993). "Robust controller design for flexible structures using normalized coprime factor plant descriptions". Langley Research Center. Hampton, Virginia.
- [3] Artega, M.A., B. Siciliano (2000). "On tracking control of flexible robot", IEEE Trans. Auto. Cont. Vol. 45, pp 520-527.
- [4] Boulet, B., A. Francis, P.C. Hughes, T. Hong (1997). "Uncertainty modelling and experiments in  $H_2$  control of large flexible space structures". IEEE Trans. Auto. Cont. Vol. 5, pp 504-519.
- [5] Damen, A., S. Weiland (2002). "Robust control". Measurement and Control Group. Department of Electrical Engineering. Eindhoven University of Technology.
- [6] Doyle, J. (1996). "Robust and optimal control", Conf. Decision Control, Kobe, Japan.
- [7] Doyle, J., K. Glover, P.P. Khargonekar, B.A. Francis (1989). "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems", IEEE Trans Auto. Cont. Vol. 34, pp. 831-847.
- [8] Francis, A.B. (1987). "A course in  $H_\infty$  theory". Lectures notes in control and information sciences, Vol. 88. Springer-Verlag : New York.
- [9] Francis, A.B., J. Doyle (1987) "Linear control theory with an  $H_\infty$  optimality criterion", SIAM J. Control and Optimization, Vol. 25, pp. 815-844.
- [10] Francis, A.B., J.W. Helton, G. Zames (1984). " $H_\infty$ -optimal feedback controllers for linear multivariable systems", IEEE Trans. Auto. Cont., Vol. 10, pp888-900.
- [11] Francis, A.B., G. Zames (1984). "On  $H_\infty$ -optimal sensitivity theory for SISO feedback systems", IEEE TRANS. Auto. Cont., Vol. 1, pp9-16.
- [12] Gahinet, P., P. Apkarian (1994). "A linear matrix inequality approach of  $H_\infty$  control". Int. J. Robust and Nonlinear Contr., pp 421-448.
- [13] Glover, K., D. McFarlane (1989). "Robust Stabilization of Normalized Coprime Factor Plant Descriptions With  $H_\infty$ -Bounded Uncertainty". IEEE Trans. Autom. Control, vol. 34, no. 8, pp. 821-830.
- [14] Kimura, H. (1984). "Robust stabilizability for a class of transfer functions", IEEE Trans. Auto. Cont., Vol. 29 pp. 788-793.

- [15] Mc Farlane, D., K. Glover (1990). "Robust controller desing using normalized coprime factor plant descriptions", Lectures notes in control and information sciences. Springer-Verlag.
- [16] Messas, O. (1999). "Commande robuste  $H_\infty$  décentralisée Application robotique". Projet de fin d'études. ENP.
- [17] Nielsen, H.S. (2000). "Control of fast flexible robots", Department of automation. Technical university of Denmark.
- [18] Scherer, C. (1990). "The Riccati inequality and state-space  $H_\infty$ -optimal Control". Phd thesis, University of Wurzburg.
- [19] Scorletti, G. (2002). "Introduction à la commande multivariable des systèmes : méthodes de synthèse fréquentielle", Cours de 3A Instru Auto de l'ENSI de Caen.
- [20] Scott, M.A. (1996). "Time varying compensator design for reconfigurable structures using non-collocated feedback". Langley Research Center. Hampton, Virginia.
- [21] Artenum - <http://www.artenum.org/fr/formulaire/eng/meca/young.php>

## A.1. Rappels sur l'algèbre linéaire

### A.1.1. Généralités [1]

#### a- Matrice orthogonale

Toute matrice  $U \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  est orthogonale si :

$$U^T U = U U^T = I$$

#### b- Matrice unitaire

Toute matrice  $U \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  est unitaire si :

$$U^* U = U U^* = I$$

#### c- Valeurs propres et vecteurs propres associés

##### - Valeurs singulières

Soit  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont les racines de l'équation caractéristique  $\det(\lambda I - A) = 0$ .

##### - Vecteurs propres associés

###### o à droite

Ce sont les vecteurs  $v_i \in \mathfrak{R}^n$  associé à la valeur propre  $\lambda_i(A)$  tel que :

$$(\lambda_i I - A)v_i = 0$$

###### o à gauche

Ce sont les vecteurs  $u_i \in \mathfrak{R}^m$  associé à la valeur propre  $\lambda_i(A)$  tel que :

$$u_i(\lambda_i I - A) = 0$$

#### d- Forme de Schur

Toute matrice  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  peut se décomposer sous la forme :

$$A = U^* T U$$

où  $U$  est unitaire et  $T$  est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de  $A$ .

#### e- Valeurs singulières

Soit  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ . Notées  $\sigma_i(A)$ , ce sont les racines carrées des valeurs propres de  $A^T A$  si  $m > n$ , sinon  $AA^T$ .

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$$

Par convention, on note :

$$\bar{\sigma}(A) = \sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots \geq \underline{\sigma}(A) = \sigma_{\min(m,n)}(A) \geq 0$$

où  $\bar{\sigma}(A) = \sigma_{\max}(A)$  et  $\underline{\sigma}(A) = \sigma_{\min}(A)$

Alors que les valeurs propres donnent les directions invariantes par la transformation linéaire associée à  $A$ , les valeurs singulières quant à elle donnent plutôt une information sur cette transformation.

### A.1.2. Décomposition en valeurs singulières

#### a- Définitions

Toute matrice  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ ) peut se décomposer comme suit :

$$A = U \Sigma V^T$$

où  $U$  et  $V$  sont des matrices unitaires de dimensions  $m \times m$  et  $n \times n$  respectivement et  $\Sigma \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les colonnes de  $U$  et  $V$  sont les vecteurs singuliers gauches et droits, respectivement. La matrice  $A$  peut être écrite sous la forme suivante :

$$A = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i u_i v_i$$

où  $u_i$  et  $v_i$  sont les  $i^{\text{ème}}$  colonnes de  $U$  et  $V$ , respectivement.

#### b- Propriétés des valeurs singulières

- $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}$
- $\sigma_{\max}(A) = \sigma_1(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$
- $\sigma_{\min}(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\max}(A)}$
- $\sigma_{\max}(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{\min}(A)}$
- $\sigma_{\min}(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \sigma_{\max}(A)$

- $\sigma_{\max}(A)$  est une norme matricielle<sup>1</sup>.
- $\text{rang}(A)$  est le nombre de valeurs singulières non nulles.
- $\sigma_{\max}(UAV) = \sigma_{\max}(A)$ ,  $\forall U, V$  unitaires.
- Si  $m = n \Rightarrow \sigma_i(A) = |\lambda_i(A)|$
- **Propriété de dilatation et de contraction**

$$\max\{\sigma_{\max}(A), \sigma_{\max}(B)\} \leq \left\| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\| \leq \sqrt{2} \max\{\sigma_{\max}(A), \sigma_{\max}(B)\}$$

$$\max\{\sigma_{\max}(A), \sigma_{\max}(B)\} \leq \|A \quad B\| \leq \sqrt{2} \max\{\sigma_{\max}(A), \sigma_{\max}(B)\}$$

$$\sigma_{\max}(A \quad B) \leq \sigma_{\max}(A) + \sigma_{\max}(B)$$

- **Théorème de Fan**

$$\sigma_i(A) - \sigma_{\max}(B) \leq \sigma_{\max}(A+B) \leq \sigma_i(A) + \sigma_{\max}(B)$$

$$\Rightarrow \sigma_{\min}(A) - 1 \leq \frac{1}{\sigma_{\max}(I+A)^{-1}} \leq \sigma_{\min}(A) + 1$$

- **Propriété de singularité :**

$$\sigma_{\max}(E) < \sigma_{\min}(A) \Rightarrow \sigma_{\min}(A+E) > 0$$

## A.2. Rappels sur les systèmes linéaires [1]

### A.2.1. Transformée de Laplace

Cette transformée nous permet le passage de l'espace temporel vers l'espace fréquentiel telle que la transformée d'un signal temporel  $x(t) \in \mathfrak{R}^+$  est la fonction :

$$X(s) = L[x(t)] = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

<sup>1</sup> Voir normes de matrice

Dont les propriétés sont les suivantes :

- $L[x(t + \tau)] = e^{s\tau} X(s)$
- $L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$
- $L\left[\int_0^t x(u)du\right] = \frac{X(s)}{s}$
- $L[x(t) * y(t)] = X(s)Y(s)$
- Théorème de la valeur initiale :  $L\left[\lim_{t \rightarrow 0} x(t)\right] = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s)$
- Théorème de la valeur finale :  $L\left[\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)\right] = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

## A.2.2. Représentations d'un système

### a- Fonction de transfert (Représentation externe)

Le système est caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $g(t)$  définie dans l'espace fréquentiel par la transformée de Laplace autrement dit sa fonction de transfert  $G(s)$ . Elle permet de trouver la réponse du système  $y(t)$  au signal d'entrée du système  $u(t)$ .

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (2)$$



Figure A.1. : Fonction de transfert

### b- Forme d'état d'un système (Représentation interne)

Le système peut être représenté par des variables d'état internes. On obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3)$$

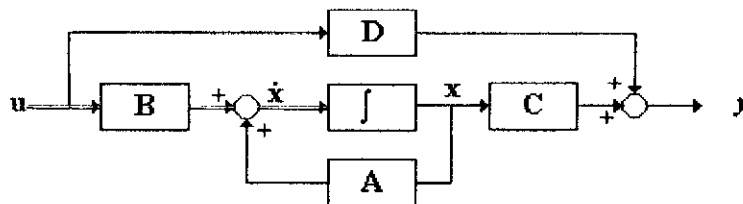


Figure A.2. : Forme d'état d'un système



- où  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur d'état,  
 $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  est le vecteur des entrées du système (commande),  
 $y(t) \in \mathfrak{R}^p$  est le vecteur des sorties du système,  
 $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  est la matrice d'état (dynamique) du système,  
 $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  est la matrice d'entrée du système,  
 $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$  est la matrice de sortie du système,  
 $D \in \mathfrak{R}^{p \times m}$  est la matrice de transmission directe du système,  
 $n \times n$  est la dimension de l'espace d'état,  
 $m$  est le nombre d'entrées du système,  
 $p$  est le nombre de sorties du système.

On peut passer de la représentation interne à la représentation externe par la relation suivante :

$$G(s) = C(sI_{n \times n} - A)^{-1}B + D \Leftrightarrow G = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (4)$$

On appelle le quadruplet  $(A, B, C, D)$  une réalisation minimale de  $G(s)$ . Elle sera minimale dans le cas où les paires  $(A, B)$  et  $(C, A)$  sont respectivement commandable<sup>2</sup> et observable<sup>3</sup>.

### c- Factorisation copremière [16]

#### - Théorème de Bezout

Soient  $m, n \in RH_{\infty}$  deux polynômes à coefficients réels. Ils sont dit premiers entre eux s'il existe deux polynômes  $x, y \in RH_{\infty}$  tel que :

$$xm + yn = 1 \quad (5)$$

En d'autres termes, ces deux polynômes  $m$  et  $n$  ont pour plus grand diviseur commun 1.

<sup>2</sup>  $Com = [B \cdots A^{n-1} B] \subset \mathfrak{R}^n$

<sup>3</sup>  $Obs = [C \cdots CA^{n-1}]^T \subset \mathfrak{R}^n$

- **Cas MIMO**

On peut reformuler ce théorème dans le cas matriciel comme suit :

Deux matrices  $M, N \in RH_\infty$  sont dites copremière à droite si elles ont le même nombre de colonnes et s'il existe deux matrices  $X_d, Y_d \in RH_\infty$  tel que :

$$\begin{bmatrix} X_d & Y_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = X_d M + Y_d N = I \quad (6)$$

De la même manière, deux matrices  $\tilde{M}, \tilde{N} \in RH_\infty$  sont dites copremière à gauche si elles ont le même nombre de lignes et s'il existe deux matrices  $X_g, Y_g \in RH_\infty$  tel que :

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & \tilde{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \end{bmatrix} = \tilde{M} X_g + \tilde{N} Y_g = I \quad (7)$$

Soit  $G$  une matrice réelle, propre et rationnelle. Elle peut s'écrire de deux manières différentes soit sous la forme d'une factorisation :

- copremière à droite  $G = NM^{-1}$

ou

- copremière à gauche  $G = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$

Cette matrice  $G$  admet une factorisation double si elle admet une factorisation copremière à droite et à gauche.

et on peut écrire sous forme condensée :

$$\begin{bmatrix} X_d & Y_d \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -Y_g \\ N & X_g \end{bmatrix} = I \quad (8)$$

**Remarque :**

Les matrices  $M$  et  $\tilde{M}$  doivent être carrées et non singulières.

- **Représentation d'état**

La représentation d'état d'un système peut aussi s'écrire à partir de la forme copremière comme suit :

Soit  $G(s)$  une fonction de transfert réelle, propre et rationnelle. Donc, elle peut s'écrire sous la forme d'une représentation interne stabilisable et détectable :

$$G = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (9)$$

Le système peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} M & -Y_s \\ N & X_s \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A+BF & B & -L \\ \hline F & I & 0 \\ C+DF & D & I \end{array} \right] \Leftrightarrow G = NM^{-1} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} X_s & Y_s \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A+LC & -(B+LD) & L \\ \hline F & I & 0 \\ C & -D & I \end{array} \right] \Leftrightarrow G = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \quad (11)$$

Avec  $F$  et  $L$  telles que  $A+BF$  et  $A+LC$  aient des valeurs propres à parties réelle négative.

#### - Factorisation première normalisée

La factorisation première à gauche normalisée d'une matrice  $G(s)$  est constituée des matrices de transfert  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$  propres et stables :

$$\begin{cases} G = \tilde{M}^{-1}\tilde{N} \\ \tilde{M}\tilde{M}^* + \tilde{N}\tilde{N}^* = I \end{cases} \quad (12)$$

Par dualité, la factorisation première à droite normalisée d'une matrice  $G(s)$  est constituée des matrices de transfert  $M$  et  $N$  propres et stables :

$$\begin{cases} G = NM^{-1} \\ M^*M + N^*N = I \end{cases} \quad (13)$$

Les matrices définissant les deux factorisations normalisées peuvent être déduite à partir de la représentation d'état minimale de  $G(s)$  [16].

Soit  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ . On a alors :

$$\begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} = C(sI - A + YC^T C)^{-1} \begin{bmatrix} B & -YC^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ -B^T X \end{bmatrix} (sI - A + BB^T X)^{-1} B + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (15)$$

où  $X$  et  $Y$  sont des matrices définies positives, solutions de l'équation de Riccati :

$$A^T X + XA - XBB^T X + C^T C = 0 \quad (16)$$

$$AY + YA^T - YC^T CY + BB^T = 0 \quad (17)$$

D'après la proposition énoncée par Vidyasagar, les facteurs coprimés gauches normalisés  $\tilde{M}$  et  $\tilde{N}$ , d'une matrice de transfert  $G(s)$ , existent et sont uniques pour une multiplication à gauche par une matrice unitaire.

#### d- Transformation linéaire fractionnaire (LFT<sup>4</sup>) [1]

Cette transformation est utilisée dans le cas de la connexion de deux systèmes par retour tel qu'illustré sur la figure II.3. :

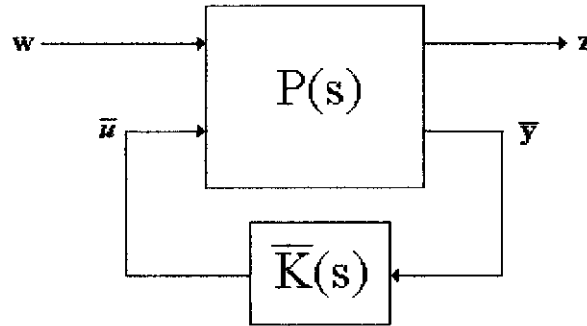


Figure A.3. : Transformation fractionnaire linéaire

Les signaux d'entrée  $w$  et  $\bar{u}$  et de sortie  $\bar{y}$  et  $z$  sont liés par  $P(s)$  :

$$\begin{bmatrix} z \\ \bar{y} \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ \bar{u} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Et vu le rebouclage sur la commande :

$$\bar{u} = \bar{K}(s)\bar{y} \quad (19)$$

La fonction donnant la relation entre les deux signaux  $w$  et  $z$  est connue sous le nom de Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT<sup>5</sup>) et définie par :

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}\bar{K}(I - P_{22}\bar{K})^{-1}P_{21} \quad (20)$$

Les réalisations minimales de  $P(s)$  et  $\bar{K}(s)$  sont :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\bar{K}(s) = C_K (sI - A_K)^{-1} B_K + D_K \quad (22)$$

Et une réalisation (pas nécessairement minimale) de  $F_l(P, \bar{K})$  :

$$F_l(P, \bar{K}) = C_{BF} (sI - A_{BF})^{-1} B_{BF} + D_{BF} \quad (23)$$

<sup>4</sup> Linear Fractional Transformation

<sup>5</sup> Linear Fraction Transfer

Avec :

$$A_{BF} = \begin{bmatrix} A + B_2(I - D_K D_{22})^{-1} D_K C_2 & B_2(I - D_K D_{22})^{-1} C_K \\ B_K(I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 & A_K + B_K(I - D_{22} D_K)^{-1} D_{22} C_K \end{bmatrix}$$

$$B_{BF} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2(I - D_K D_{22})^{-1} D_K D_{21} \\ B_K(I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21} \end{bmatrix}$$

$$C_{BF} = \begin{bmatrix} C_1 + D_{22}(I - D_K D_{22})^{-1} D_K C_2 & D_{12}(I - D_K D_{22})^{-1} C_K \end{bmatrix}$$

$$D_{BF} = D_{11} + D_{12}(I - D_K D_{22})^{-1} D_K D_{21}$$

La stabilité interne est réalisée si  $Re(\lambda_i(A_{BF})) < 0$ .

### A.2.3. Linéarisation d'un modèle

Soit une fonction  $f(\lambda, \mu, \eta) = 0$ . La linéarisation de cette fonction autour d'un point de fonctionnement  $\lambda = \lambda_0$ ,  $\mu = \mu_0$  et  $\eta = \eta_0$  est sous la forme suivante :

$$\delta\lambda = -\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, \mu, \eta)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mu}(\lambda, \mu, \eta) \delta\mu - \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, \mu, \eta)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \eta}(\lambda, \mu, \eta) \delta\eta \quad (24)$$

Avec :  $\delta\lambda = \lambda - \lambda_0$

$\delta\mu = \mu - \mu_0$

$\delta\eta = \eta - \eta_0$

**Preuve :**

Soit  $y = f(x)$ . En appliquant le théorème de Taylor, on obtient alors :

$$y = y_0 + \left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x=\xi} \Rightarrow y = y_0 + \left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x=\xi} (x - x_0) + \left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x=x_0} (x - x_0) - \left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

$$\Rightarrow y = y_0 + \left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x=x_0} (x - x_0) + \left[ \left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x=\xi} - \left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x=x_0} \right] (x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \delta y = \left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x=x_0} \delta x + o(x)$$

Avec :  $\delta x = x - x_0$

$\delta y = y - y_0$

En généralisant pour une fonction multivariable  $v = f(\lambda, \mu, \eta)$ , on obtient :

$$\delta v = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, \mu, \eta)\delta\lambda + \frac{\partial f}{\partial \mu}(\lambda, \mu, \eta)\delta\mu + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\lambda, \mu, \eta)\delta\eta + g(\lambda, \mu, \eta)$$

et plus particulièrement lorsque  $f(\lambda, \mu, \eta) = 0$ , le résultat sera alors :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, \mu, \eta)\delta\lambda + \frac{\partial f}{\partial \mu}(\lambda, \mu, \eta)\delta\mu + \frac{\partial f}{\partial \eta}(\lambda, \mu, \eta)\delta\eta = 0 \\ \Rightarrow \delta\lambda &= -\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, \mu, \eta)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mu}(\lambda, \mu, \eta)\delta\mu - \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, \mu, \eta)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \eta}(\lambda, \mu, \eta)\delta\eta \end{aligned}$$

#### A.2.4. Pôles et zéros d'un système [1]

Dans le cas SISO (Single Input/Single Output) défini par  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ , les pôles (ou modes) sont les racines du dénominateur  $D(s)$  et les zéros sont les racines du numérateur  $N(s)$ . Dans le cas MIMO (Multi Input/Multi Output), les pôles sont les valeurs propres de la matrice  $A$  et les zéros sont les valeurs complexes pour lesquelles la matrice :

$$\begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (25)$$

est déficiente, c'est-à-dire inférieure à la plus petite dimension de la matrice.

#### A.2.5. Stabilité [1]

On peut distinguer deux types de stabilité :

##### a- Stabilité BIBO (Bounded Input/Bounded Output)

Le système est BIBO-stable si à entrée à énergie finie correspond une sortie à énergie finie. Elle est réalisée si tout les pôles de la forme irréductible de  $G(s)$  son dans le demi plan gauche ( $Re(s) < 0$ ).

##### b- Stabilité interne

Le système est stable de façon interne si tous les pôles de la matrice  $A$  sont à partie réelle négative. On assurera alors la décroissance du vecteur  $x(t)$  vers 0 quelque soit la condition initiale en régime libre.

**Remarque :**

- La stabilité interne implique la stabilité BIBO mais la réciproque est fautive. Car dans le cas de pôles non commandable instable par exemple, la sortie sera à énergie finie mais ce ne sera pas le cas des variables internes.
- Les deux notions coïncident dans le cas d'une réalisation minimale de  $(A, B, C)$ .

**A.2.6. Normes de vecteurs, matrices, signaux et systèmes [16]**

Une notion importante pour pouvoir quantifier les performances d'un système est la norme nous permettant aussi de manipuler le comportement fréquentiel du système.

**a- Norme d'un vecteur**

On appelle norme sur un ensemble  $E \subset \mathbb{C}$  toute application  $f$ , définie de  $E$  dans  $\mathfrak{R}$ , toute application satisfaisant aux conditions suivantes :

- $\forall x \in E, f(x) > 0$ ,
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E, f(\lambda x) = |\lambda|f(x)$ ,
- $\forall x, y \in E, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ ,
- $\forall x \in E, f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ .

Le couple  $(f, E)$  est appelé espace normé. On désigne  $f$  par  $\|\cdot\|$ .

Un exemple de norme est :

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, x \in \mathfrak{R}^n \quad (26)$$

en particulier dans le cas où :

$$p = 1 \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (27)$$

$$p = 2 \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad (\text{Norme euclidienne}) \quad (28)$$

$$p = \infty \quad \|x\|_\infty = \sup_i |x_i| \quad (\text{Norme infinie}) \quad (29)$$

**Remarque :**

On peut assimiler la norme d'un vecteur à une distance.

**b- Norme d'une matrice**

On parle plutôt d'une norme induite. Car, elle est définie par le biais d'une norme vectorielle. Telle que :

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}, x \in \mathfrak{R}^n, A \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (30)$$

La norme la plus usitée est la norme euclidienne.

**Remarque :**

On peut définir aussi la norme de Frobenius :

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} \quad (31)$$

**c- Norme d'un signal**

Sur l'espace  $\ell_2$  des signaux sommables sur  $(0, +\infty)$ , on définit le produit scalaire comme étant :

$$\langle x, y \rangle = \int_0^{+\infty} x(t)y(t)dt$$

induisant la norme de l'énergie :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} \|x(t)\|^2 dt} \quad (32)$$

La transformée de Fourier envoie  $\ell_2$  sur l'espace  $H_2$  des fonctions  $X(s)$  analytique dans  $\text{Re}(s) \geq 0$  et de carré sommable. Par l'identité de Parseval, par :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(j\omega)\|^2 d\omega} \quad (33)$$

On définit aussi la norme infinie, pour les signaux admettant une transformée de Laplace  $X(s)$  analytique dans  $\text{Re}(s) \geq 0$ , par :

$$\|X\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s) \geq 0} \|X(s)\| = \sup_{\omega} \|X(j\omega)\| \quad (34)$$

On appelle  $H_\infty$  l'espace des fonctions  $X(s)$  analytique dans  $\text{Re}(s) \geq 0$  et telles que  $\|X\|_\infty < \infty$ . Contrairement à  $H_2$ , cet espace n'est pas un espace d'Hilbert. Car, il ne dispose pas de notion de produit vectoriel.



#### d- Norme d'un système

Soit un système linéaire stationnaire de fonction de transfert  $G(s)$ . Nous allons maintenant définir deux normes liant l'entrée du système à sa sortie.

##### - Norme $H_2$

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(G^*(j\omega)G(j\omega))d\omega} = \sup_{U(s) \in H_2} \frac{\|G(s)U(s)\|_2}{\|U(s)\|_2} \quad (35)$$

Elle correspond à l'énergie injectée par le système en réponse à un dirac. Elle est finie si et seulement si  $G(s)$  est strictement propre<sup>6</sup>.

##### - Norme $H_\infty$

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(G(j\omega)) = \sup_{U(s) \in H_2} \frac{\|G(s)U(s)\|_2}{\|U(s)\|_2} \quad (36)$$

Elle correspond à la valeur maximale de la réponse fréquentielle de  $G(s)$ .

##### - Norme de Hankel

$$\|G(s)\|_H = \sigma_{\max}(G(j\omega)) \quad (37)$$

Elle correspond à la plus grande valeur singulière de  $G(s)$ .

### A.2.7. L'hamiltonien [1]

Cette notion sera utilisée lors de la synthèse du régulateur  $H_\infty$ . On définit la matrice hamiltonienne :

$$H = \begin{bmatrix} A & -P \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (38)$$

Avec  $P$  et  $Q$  symétriques. Et,  $X = Ric(H)$  solution de l'équation de Riccati associée à la matrice hamiltonienne  $H$ .

$$XA + A^T X - XPX + Q = 0 \quad (39)$$

Où  $X$  est symétrique. Cette solution est stabilisante si les valeurs propres de  $A - PX$  ont toutes une partie réelles strictement négatives.

<sup>6</sup> Nombre de pôles strictement supérieur au nombre de zéros

## Résumé :

L'objectif de ce travail est de concevoir un régulateur  $H_\infty$  décentralisé utilisant une compensation gravitationnelle pour commander un bras flexible à trois degrés de liberté. Le modèle du bras est déterminé à partir du formalisme d'Euler-Lagrange en utilisant en plus des variables traditionnellement utilisées dans le cas rigide sous la forme d'angles des variables fictives représentant les flexions des deux premières articulations du bras. Les modes de flexibilité sont déterminés à partir d'une analyse modale en faisant l'analogie avec une barre encastrée-inertie. Le régulateur obtenu est unique, valable pour tous les points de fonctionnement et robuste aux incertitudes liées à une mauvaise identification des modes et de leur amortissement.

## Summary:

The object of this work is to design an  $H_\infty$  decentralized controller using a gravitational compensation to control a flexible arm with three degrees of freedom. The arm model is made from the Euler-Lagrange formalism using in addition to the traditional generalized coordinates represented by the angles, fictitious variables to represent the flexion of the first two links. The flexibility modes are determined from the modal analysis by modelling each flexible link with embedded-inertia beam. The resulting controller is single, valid for all the positions and robust to uncertainty caused by a bad identification of the modes and their corresponding damping.

## ملخص:

هدف هذا العمل إنجاز منظم لامركزي باستعمال معوض جاذبي لتقييد ذراع لين ذات ثلاث درجات للتحرك . يحدد نموذج الذراع ابتداء من شكلية أولور لاغرانج بإضافة الزوايا المستعملة في حالة ذراع عنيد متغيرات وهمية لتمثيل التوائت المتلفطات الأولى . تحتم درجات المرنة من تحليل درجي بتشابه إلى قضيب مرصع كتلة . المنظم المتحصل عليه وحيد مقبول لكل مجال العمل جلمود لكل الترددات المرتبطة لسوء حساب الدرجات و مخمداتها .

**Mots clés :** Bras flexible, commande  $H_\infty$ , décentralisation

**Keywords :** Flexible arm,  $H_\infty$  controller, decentralisation

كلمات المفتاحية : ذراع لين, منظم , الامركزية