

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Génie - civil

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

CALCUL DES DALLES  
PAR LA METHODE DES  
DIFFERENCES FINIES

Proposé Par :

SAETI

Etudié par :

Nedir - I  
Mana - O

Dirigé par :

M<sup>m</sup> Mouhabidine  
M<sup>r</sup> Benhouhou

PROMOTION : Jan 87

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

سُبْحَانَكَ لَا عِلْمَ لَنَا إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَا  
إِنَّكَ أَنْتَ الْعَلِيمُ الْحَكِيمُ .

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

## Dedicaces

Je dedie le modeste travail

- à mes très chers Parents pour leurs aides
- à ma fiancée à qui je dois beaucoup.
- à mes chers frères et sœurs, et surtout mes petites sœurs WASSILA et SIHAM qui m'aime bien.
- à mon père BABA-SIDI et à HACEN.
- à tout mes belles sœurs et leurs enfants.
- à mes beau-frères, à AZZEDINE
- à tout mes Amis sans exception  
à Rida et sa famille à Glasgow.

Gmar M  
S.

Je dedie ce modeste travail à

- mes chers parents, mes deux frères et mes sœurs, ainsi qu'à toute la famille Nedir.
- mes Amis de S10 Genie Civil, et tous les autres Amis(es) que j'ai connus.

I. NEDIR

## REMERCIEMENT

Nos remerciements vont à :

MM BENHOUGH  
et M<sup>me</sup> MOHABINE ; Nos promoteurs.

MM<sup>s</sup> KESSIR, MATOUK et Zourdani, nos collègues.  
Ainsi que tous le personnel du Centre de calcul  
pour leur aide et leur disponibilité  
ET tous ceux qui ont contribué de près ou de  
loin à notre formation, ainsi qu'à la réalisation  
de ce mémoire.



# SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

THEORIE DES PLAQUES

METHODE DES DIFFERENCES FINIES

EXEMPLES

PLAQUES RECTANGULAIRES SIMPLEMENT APPUYEES

SUR DEUX COTES OPPOSES

PLAQUES RECTANGULAIRES SIMPLEMENT APPUYEES

SUR TROIS COTES OPPOSES

DISCRETISATION DANS  $R_2$  DE L'OPERATEUR LAPLACIEN

$\Delta$  ET DOUBLE LAPLACIEN  $\Delta\Delta$

RESOLUTION DE L'EQUATION DE LAGRANGE PAR LA

METHODE DES DIFFERENCES FINIES

ETUDE DE LA DALLE EN BIAISE

ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE

## INTRODUCTION

Pour calculer une dalle de pont ou de bâtiment plusieurs méthodes existent notamment celle des séries de Navier ou encore celles de Maurice Levy qui sont beaucoup plus précises et plus fiables que les premières citées. Il y a également des méthodes approchées en particulier celle des éléments finis.

Le but de notre travail de fin d'études est de tester une solution du calcul des dalles par les différences finies fréquemment utilisés pour résoudre les problèmes en mécanique des fluides et en thermodynamique.

Alors que la méthode des éléments est basée sur une discrétisation de la structure, la méthode des différences finies procède par une discrétisation numérique des équations du problème à résoudre.

# THEORIE DES PLAQUES

## 1 Rappel des équations de la flexion pure

### 1-1 Théorie de Love Kirchhoff:

Relation entre les contraintes et les déformations:

Les hypothèses de Love Kirchhoff (équivalent à celle de Navier Bernoulli en théorie de poutre) conduisent à un champ de déplacements de composantes:

$$w = w(x, y) ; \quad u = -z \frac{\partial w}{\partial x} ; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Les seules composantes non nulles du tenseur déformation en ce point sont donc:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ (1) \quad \epsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

En effet nous avons:

$$\epsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \gamma_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Les relations de la théorie de l'élasticité entre les composantes du tenseur déformation et les composantes du tenseur contrainte, se réduisent donc aux 3 relations suivantes; dans lesquelles  $E$  désigne le module d'éYoung et  $\nu$  le coefficient de poisson du matériau

constitutif de la poutre (les contraintes normales de traction sont positives).

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \quad ; \quad \epsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) \quad ; \quad \gamma_3 = \frac{1 + \nu}{E} \tau_3$$

La loi de Hooke nous donne:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) = - \frac{E z}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ (2) \quad \sigma_2 &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1) = - \frac{E z}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_3 &= \frac{E}{1 - \nu^2} (1 - \nu) \gamma_3 = - \frac{E z}{1 - \nu^2} (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

On en déduit, les moments fléchissants  $M_1$ ,  $M_2$  et le moment de torsion  $C$  au point du plan moyen de coordonnées  $(x, y)$ .

$$\begin{aligned} (3) \quad M_1 &= D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_2 &= D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ C &= D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$\text{ou } D = \frac{E b^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

$D$ : étant la rigidité à la flexion de la poutre.

Les moments fléchissants  $M_1$ ,  $M_2$  et les moments de torsion  $C$  sont représentés dans les figures suivantes.

Figure (1)

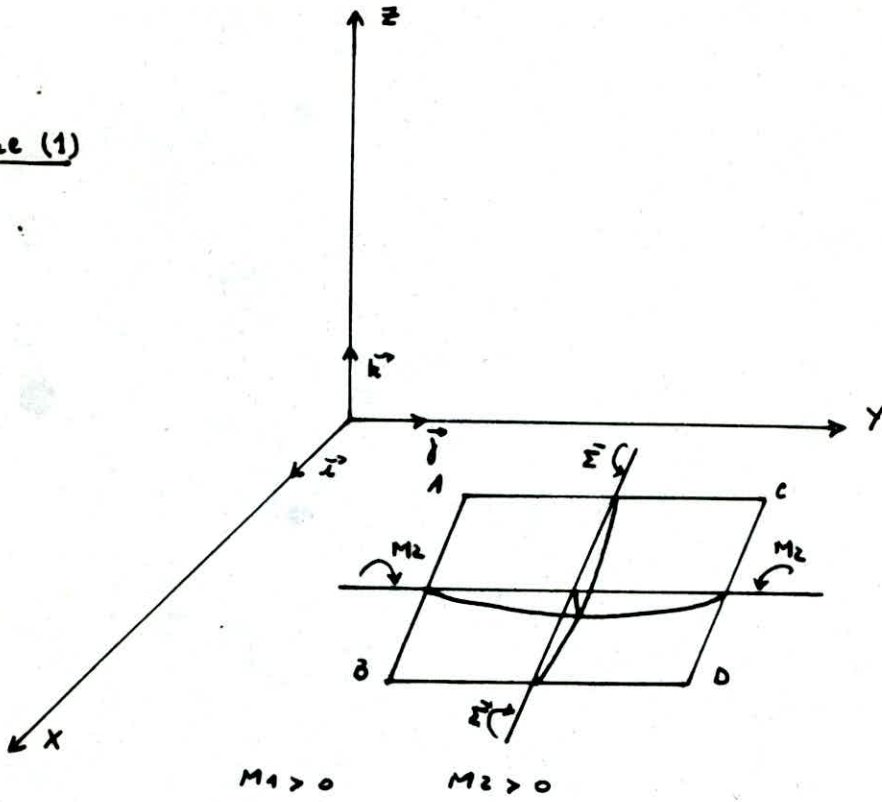
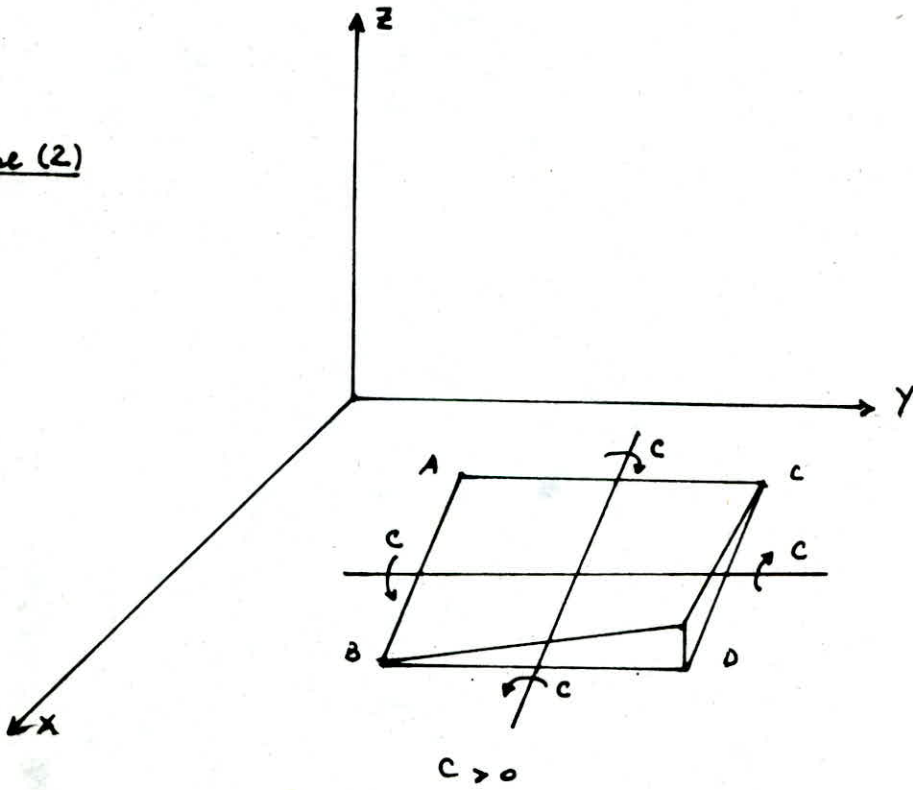


Figure (2)

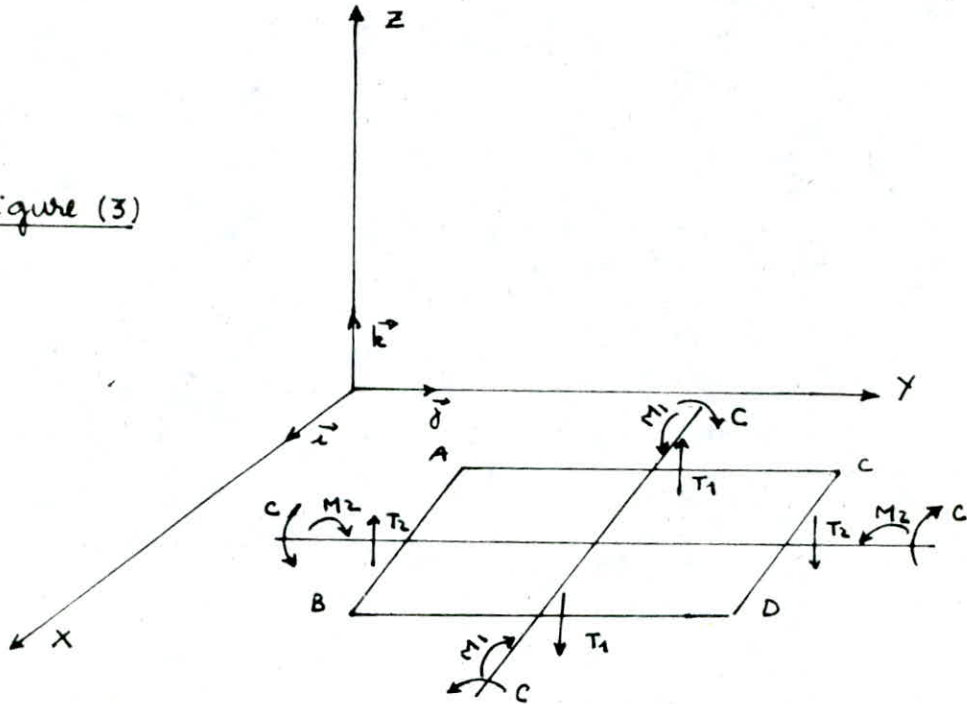




## 1-2 Equations d'équilibre, Equation de Lagrange.

considérons une plaque soumise à une densité superficielle de force  $p(x, y)$ , et écrivons les équations d'équilibre d'un élément rectangulaire  $ABCD$ , dont les côtés  $AB = dx$  et  $AC = dy$  sont parallèles aux axes  $Ox$  et  $Oy$ .

Figure (3)



Les six équations d'équilibre de l'élément se réduisent aux trois équations suivantes. La première exprime que la somme des projections des forces sur  $Oz$  est nulle, la seconde et la troisième expriment que la somme des projections des couples sur  $Oy$  et sur  $Ox$  est nulle.

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} = -p(x, y)$$

$$(4) \quad \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = T_1$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial x} = T_2$$

Portons les valeurs de  $T_1$  et de  $T_2$  déduites des deux dernières équations, dans la première équation.

En effet nous obtenons :

$$(5) \quad \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = -P(x, y)$$

Remplaçons dans l'équation précédente  $M_1$ ,  $M_2$  et  $C$  par leurs expressions (3); nous trouvons l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le déplacement  $w$  d'un point du plan moyen de la plaque.

$$(6) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{P(x, y)}{D}$$

L'équation (6) est l'équation de Lagrange; elle peut également s'écrire sous la forme concise.

$$(7) \quad \boxed{\Delta \Delta w = - \frac{P(x, y)}{D}}$$

$\Delta$  désigne le laplacien  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

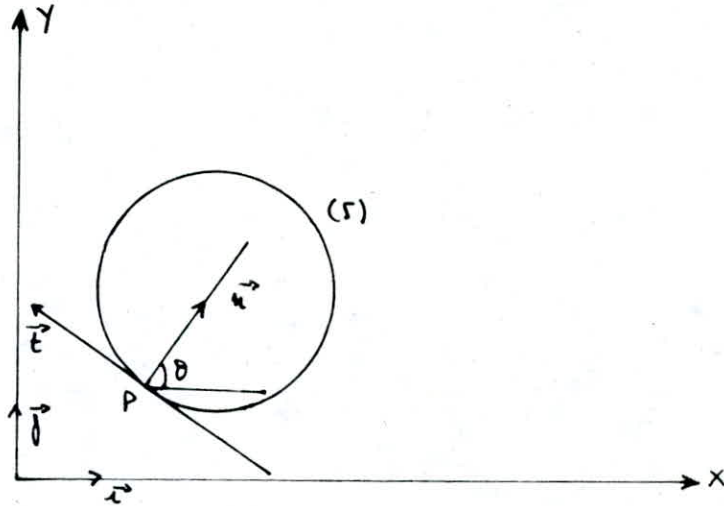
Si l'on remplace dans les deux dernières équations d'équilibre (4)  $M_1$ ,  $M_2$  et  $C$  par leurs valeurs (3), nous obtenons les expressions de  $T_1$  et de  $T_2$  en fonction de  $w$ .

$$(8) \quad \begin{aligned} T_1 &= D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ T_2 &= D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

### 1.3 Conditions aux limites

Le déplacement  $w$  doit satisfaire à l'équation de Lagrange et aux conditions aux limites sur le contour  $(\Gamma)$  de la plaque.

Figure (4)



Considérons une section de la plaque tangente en  $P$  au contour  $(\Gamma)$ , et soit  $\vec{n}$  le vecteur unité dirigé suivant la normale intérieure en  $P$ . En désignant par  $\theta$  l'angle  $(\vec{i}, \vec{n})$ , cette section tourne autour de la tangente  $P_t$  au contour de l'angle. Figure (4)

$$(9) \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \theta = \overrightarrow{\text{grad}} w \cdot \vec{n}$$

Elle supporte un moment fléchissant  $M(\theta)$ , un moment de torsion  $C(\theta)$  et un effort tranchant  $T(\theta)$  donnés par les formules suivantes.

$$M(\theta) = M_1 \cos^2 \theta + M_2 \sin^2 \theta + 2C \sin \theta \cos \theta$$

o)

$$C(\theta) = (M_1 - M_2) \sin \theta \cos \theta - C (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$T(\theta) = T_1 \cos \theta + T_2 \sin \theta$$

La densité de réaction d'appui  $R(\theta)$  est donnée par la formule de Kirchoff

$$(11) \quad R(\theta) = T(\theta) + \frac{\partial C(\theta)}{\partial s}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les conditions aux limites les plus souvent rencontrées en pratique.

1. Le long d'un bord encastré,  $w$  doit vérifier les conditions suivantes.  $w = 0$ ;  $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$
2. Le long d'un bord simplement appuyé,  $w$  doit vérifier les conditions suivantes.  $w = 0$ ;  $M(\theta) = 0$
3. Le long d'un bord libre,  $w$  doit vérifier les conditions suivantes.  $M(\theta) = 0$ ;  $R(\theta) = 0$

Bien entendu, le contour ( $\Gamma$ ) d'une plaque donnée peut comporter des bords encastrés, des bords simplement appuyés et des bords libres.



# METHODE DES DIFFERENCES FINIES

La méthode des différences finies est une méthode approchée de résolution des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Très utilisée, dans les problèmes de mécanique des fluides, elle l'est beaucoup moins en mécanique des solides, en raison probablement des difficultés dues aux conditions aux limites.

Cette méthode, n'est pas nouvelle, elle a été utilisée avec succès dans la théorie des plaques planes, ainsi que dans plusieurs autres domaines de la mécanique des constructions. A cause de sa généralité et de son accessibilité, nous estimons que lorsque la solution analytique n'est pas assez simple, ou bien qu'elle même pas connue, l'application de la méthode des différences finies constitue un instrument de calcul particulièrement utile et efficace.

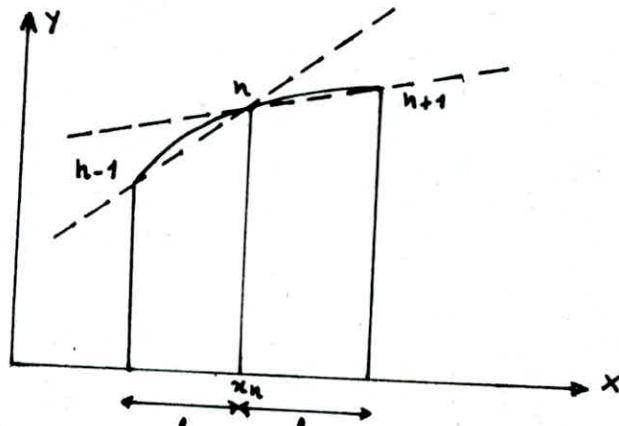
L'étude des problèmes d'élasticité revient généralement à la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles, avec des conditions données sur le contour.

Très souvent, il est difficile d'obtenir une solution analytique exacte de ces équations. On doit donc recourir à des méthodes numériques approchées telles que les différences finies.



## Principe de la méthode

Figure (1)



Nous supposons qu'entre deux points voisins  $n$  et  $(n+1)$  la fonction varie linéairement. Ceci revient à substituer à la courbe réelle, continue un polygone inscrit; plus le nombre des côtés sera grand, meilleure sera l'approximation de la courbe réelle. En écrivant l'équation de la droite  $(n, n+1)$ ,

$$y = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} (x - x_n) + y_n$$

et en dérivant une fois, nous obtenons

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

La même approximation est réalisée, en partant de l'équation de la droite  $(n, n-1)$ .

$$y = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} (x - x_n) + y_n$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

Les dérivées d'ordres supérieures peuvent être déduites par analogie. La dérivée seconde s'exprime par exemple sous la forme

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_n = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right)_n \approx \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n = \frac{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{n+1} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_n}{h} = \frac{\frac{y_{n+1} - y_n}{h} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h}}{h}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_n = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}$$

On obtiendra de même :

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_n = \frac{-y_{n-1} + 3y_n - 3y_{n+1} + y_{n+2}}{h^3}$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_n = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 6y_n - 4y_{n+1} + y_{n+2}}{h^4}$$

Le schéma des points intervenant dans les expressions des quatre dérivées premières est représenté par la figure ci-dessous. La règle générale suivante permet de former les coefficients de  $y_i$ .

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
$(y')_{12}$	1	1			
$(y'')_{23}$		1	1		
	1	2	1		
$(y''')_{234}$		1	2	1	
	1	3	3	1	
$(y^{(4)})_{345}$		1	3	3	1
	1	4	6	4	1

Les signes de ces coefficients sont alternés et le coefficient de  $y_i$  ayant l'indice  $i$  le plus élevé est toujours égal à  $\bar{n}+1$



$$= h \frac{dy}{dx}$$

$$= h^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= h^3 \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$= h^4 \frac{d^4y}{dx^4}$$

## EXEMPLES.

### 1 - Exemples d'applications en utilisant la méthode des différences finies.

#### Exemple 1

Soit l'équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre

$$(*) \begin{cases} y' = -\sin u \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad u \in [0, \pi/2]$$

Trouvons la solution de (\*) en utilisant la méthode des différences finies.

#### a) Solution analytique

$$y' = -\sin u \rightarrow \int y' dy = -\int \sin u du \rightarrow y = \cos u + C.$$

la condition au limite nous donne la valeur de C.

$$y(0) = \cos 0 + C = 1 \rightarrow C = 0$$

La solution générale de (\*) est:  $y = \cos x.$

#### b) Solution donnée par les différences finies

Subdivisons l'intervalle en 10 petits intervalles  $N = 10$

$h = \pi/20$  ( $h$ : étant le pas). Cherchons la solution  $(y_1, y_2, \dots, y_{10})$  donnée par cette méthode et comparons là, avec celle donnée par la méthode exacte.

$$f'(x_i) = y'_i = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$\begin{aligned}
 y_1 - y_0 &= -\pi/20 \sin \alpha_0 \\
 y_2 - y_1 &= -\pi/20 \sin \alpha_1 \\
 y_3 - y_2 &= -\pi/20 \sin \alpha_2 \\
 y_4 - y_3 &= -\pi/20 \sin \alpha_3 \\
 y_5 - y_4 &= -\pi/20 \sin \alpha_4 \\
 y_6 - y_5 &= -\pi/20 \sin \alpha_5 \\
 y_7 - y_6 &= -\pi/20 \sin \alpha_6 \\
 y_8 - y_7 &= -\pi/20 \sin \alpha_7 \\
 y_9 - y_8 &= -\pi/20 \sin \alpha_8 \\
 y_{10} - y_9 &= -\pi/20 \sin \alpha_9
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y_1 - y_0 &= 0 \\
 y_2 - y_1 &= -0,024572668 \\
 y_3 - y_2 &= -0,048540275 \\
 y_4 - y_3 &= -0,071312661 \\
 y_5 - y_4 &= -0,092329092 \\
 y_6 - y_5 &= -0,111072074 \\
 y_7 - y_6 &= -0,127080092 \\
 y_8 - y_7 &= -0,139958978 \\
 y_9 - y_8 &= -0,149391608 \\
 y_{10} - y_9 &= -0,155145722
 \end{aligned}$$

\* Matriciellement le problème devient

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 y_1 \\
 y_2 \\
 y_3 \\
 y_4 \\
 y_5 \\
 y_6 \\
 y_7 \\
 y_8 \\
 y_9 \\
 y_{10}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 -0,024572668 \\
 -0,048540275 \\
 -0,071312661 \\
 -0,092329092 \\
 -0,111072074 \\
 -0,127080092 \\
 -0,139958978 \\
 -0,149391608 \\
 -0,155145722
 \end{bmatrix}$$

Résolution par la méthode de relaxation ou de Gauss.

Les résultats de la méthode des différences finies, et celle de la méthode exacte sont donnés sous forme de tableau.



y	Méthode des D.F	Méthode Exacte	Différent.
1	1	0,98768834	0,0123117
2	0,97541332	0,98105116	0,0193178
3	0,926551061	0,931002324	0,068807
4	0,801217333	0,803000139	0,1978871
5	0,763243304	0,763101771	0,0001386
6	0,652173231	0,6577785252	0,0645178
7	0,525096139	0,4539905	0,0711026
8	0,375431161	0,309040984	0,0663922
9	0,235242553	0,156434465	0,0788081
10	0,080596834	0	0,080596834

Exemple 2

Soit l'équation différentielle du 2<sup>e</sup> ordre.

$$(**) \begin{cases} y'' = 1 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \quad x \in [1, 1,5]$$

Trouvons la solution de (\*\*). On utilisera la méthode des différences finies.

a) Solution exacte.

$$y'' = 1 \Rightarrow \int y'' = \int 1 \Rightarrow y' = x + C_1$$

$$\int y' dy = \int (x \log x - x + c) dx \rightarrow y = \frac{x^2}{2} \left( \log x - \frac{3}{2} \right) + Cx + D$$

Les deux conditions aux limites nous donne la valeur de C et D.

$$\left. \begin{aligned} y(1) &= \frac{1}{4} (2 \log 1 - 3) + C + D = 0 \\ y(1)' &= -1 + C = 0 \end{aligned} \right\} C = 1 \text{ et } D = -\frac{1}{4}$$

La solution générale de (\*\*\*) est:  $y = \frac{x^2}{2} \left( \log x - \frac{3}{2} \right) + x - \frac{1}{4}$

b) Solution donnée par les différences finies

Subdivisons l'intervalle en 20 petits intervalles  $N = 20$

$h = 0,2$  ( $h$  étant le pas).

Cherchons la solution  $(y_1, y_2, \dots, y_{19})$  donnée par cette méthode et comparons là, avec celle donnée par la méthode exacte.

$$f'(x_i)' = y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad i = 0$$

$$f''(x_i)'' = y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad i = 1, N-2$$

$$y_1 - y_0 = h \log x_0$$

$$y_1 - y_0 = 0$$

$$y_0 - 2y_1 + y_2 = h^2 \log x_1$$

$$y_0 - 2y_1 + y_2 = 7,29286 \cdot 10^{-3}$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 = h^2 \log x_2$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 = 13,4588 \cdot 10^{-3}$$

$$y_2 - 2y_3 + y_4 = h^2 \log x_3$$

$$y_2 - 2y_3 + y_4 = 18,8001 \cdot 10^{-3}$$

$$y_3 - 2y_4 + y_5 = h^2 \log x_4$$

$$y_3 - 2y_4 + y_5 = 23,5114 \cdot 10^{-3}$$

$$y_4 - 2y_5 + y_6 = h^2 \log x_5$$

$$y_4 - 2y_5 + y_6 = 27,7258 \cdot 10^{-3}$$

$$y_5 - 2y_6 + y_7 = h^2 \log x_6$$

$$y_5 - 2y_6 + y_7 = 31,5382 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{aligned}
 y_1 - 2y_2 + y_3 &= 1^2 \log 2 \\
 y_2 - 2y_3 + y_4 &= 2^2 \log 2 \\
 y_3 - 2y_4 + y_5 &= 3^2 \log 2 \\
 y_4 - 2y_5 + y_6 &= 4^2 \log 2 \\
 y_5 - 2y_6 + y_7 &= 5^2 \log 2 \\
 y_6 - 2y_7 + y_8 &= 6^2 \log 2 \\
 y_7 - 2y_8 + y_9 &= 7^2 \log 2 \\
 y_8 - 2y_9 + y_{10} &= 8^2 \log 2 \\
 y_9 - 2y_{10} + y_{11} &= 9^2 \log 2 \\
 y_{10} - 2y_{11} + y_{12} &= 10^2 \log 2 \\
 y_{11} - 2y_{12} + y_{13} &= 11^2 \log 2 \\
 y_{12} - 2y_{13} + y_{14} &= 12^2 \log 2 \\
 y_{13} - 2y_{14} + y_{15} &= 13^2 \log 2 \\
 y_{14} - 2y_{15} + y_{16} &= 14^2 \log 2 \\
 y_{15} - 2y_{16} + y_{17} &= 15^2 \log 2 \\
 y_{16} - 2y_{17} + y_{18} &= 16^2 \log 2 \\
 y_{17} - 2y_{18} + y_{19} &= 17^2 \log 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_6 - 2y_7 + y_8 &= 36,288 \cdot 10^{-3} \\
 y_7 - 2y_8 + y_9 &= 49,2204 \cdot 10^{-3} \\
 y_8 - 2y_9 + y_{10} &= 64,1847 \cdot 10^{-3} \\
 y_9 - 2y_{10} + y_{11} &= 81,3444 \cdot 10^{-3} \\
 y_{10} - 2y_{11} + y_{12} &= 100,526 \cdot 10^{-3} \\
 y_{11} - 2y_{12} + y_{13} &= 121,7204 \cdot 10^{-3} \\
 y_{12} - 2y_{13} + y_{14} &= 144,2273 \cdot 10^{-3} \\
 y_{13} - 2y_{14} + y_{15} &= 169,4 \cdot 10^{-3} \\
 y_{14} - 2y_{15} + y_{16} &= 196,4517 \cdot 10^{-3} \\
 y_{15} - 2y_{16} + y_{17} &= 225,4033 \cdot 10^{-3} \\
 y_{16} - 2y_{17} + y_{18} &= 256,444 \cdot 10^{-3} \\
 y_{17} - 2y_{18} + y_{19} &= 289,4847 \cdot 10^{-3}
 \end{aligned}$$



\* Matriciellament le problème devient.

$  \begin{bmatrix}  1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4  \end{bmatrix}  $	$  \begin{bmatrix}  y_1 \\  y_2 \\  y_3 \\  y_4 \\  y_5 \\  y_6 \\  y_7 \\  y_8 \\  y_9 \\  y_{10} \\  y_{11} \\  y_{12} \\  y_{13} \\  y_{14} \\  y_{15} \\  y_{16} \\  y_{17} \\  y_{18} \\  y_{19}  \end{bmatrix}  $	$  = \begin{bmatrix}  0 \\  7,29286 \cdot 10^{-3} \\  11,4588 \cdot 10^{-3} \\  18,8461 \cdot 10^{-3} \\  27,5154 \cdot 10^{-3} \\  37,7258 \cdot 10^{-3} \\  49,5382 \cdot 10^{-3} \\  62,9187 \cdot 10^{-3} \\  77,8204 \cdot 10^{-3} \\  94,1847 \cdot 10^{-3} \\  112,044 \cdot 10^{-3} \\  131,3517 \cdot 10^{-3} \\  152,044 \cdot 10^{-3} \\  174,1517 \cdot 10^{-3} \\  197,7033 \cdot 10^{-3} \\  222,724 \cdot 10^{-3} \\  249,2247 \cdot 10^{-3} \\  277,224 \cdot 10^{-3} \\  306,7247 \cdot 10^{-3}  \end{bmatrix}  $
--	---	--

Résolution par la méthode de relaxation.

Les résultats de la méthode des différences finies et celle de la méthode exacte sont donnés sous forme de tableau.

y	Méthode des D. F	Méthode exacte	Différence
1	0	48700. $10^{-3}$	4, 2700 . $10^{-3}$
2	7, 23 286 . $10^{-3}$	9, 74 993 . $10^{-3}$	2, 47 993 . $10^{-3}$
3	28, 0 445 . $10^{-3}$	34, 60 46 . $10^{-3}$	6, 56 016 . $10^{-3}$
4	67, 5552 . $10^{-3}$	72, 24 47 . $10^{-3}$	4, 64 81 9 . $10^{-3}$
5	130, 659 . $10^{-3}$	138, 294 . $10^{-3}$	5, 63 4 0 . $10^{-3}$
6	221, 447 . $10^{-3}$	228, 066 . $10^{-3}$	6, 645 0 . $10^{-3}$
7	343, 773 . $10^{-3}$	351, 348 . $10^{-3}$	7, 576 0 . $10^{-3}$
8	501, 117 . $10^{-3}$	509, 628 . $10^{-3}$	8, 511 0 . $10^{-3}$
9	696, 681 . $10^{-3}$	706, 108 . $10^{-3}$	9, 427 0 . $10^{-3}$
10	933, 423 . $10^{-3}$	943, 755 . $10^{-3}$	10, 333 . $10^{-3}$
11	1214, 120 . $10^{-3}$	1225, 330 . $10^{-3}$	11, 210 . $10^{-3}$
12	1541, 120 . $10^{-3}$	1553, 420 . $10^{-3}$	12, 300 . $10^{-3}$
13	1917, 490 . $10^{-3}$	1930, 450 . $10^{-3}$	12, 960 . $10^{-3}$
14	2344, 880 . $10^{-3}$	2358, 700 . $10^{-3}$	13, 820 . $10^{-3}$
15	2825, 670 . $10^{-3}$	2840, 350 . $10^{-3}$	14, 680 . $10^{-3}$
16	3361, 910 . $10^{-3}$	3377, 440 . $10^{-3}$	15, 530 . $10^{-3}$
17	3955, 55 . $10^{-3}$	3971, 930 . $10^{-3}$	16, 380 . $10^{-3}$
18	4610, 380 . $10^{-3}$	4625, 670 . $10^{-3}$	15, 240 . $10^{-3}$
19	5325, 880 . $10^{-3}$	5341, 400 . $10^{-3}$	15, 520 . $10^{-3}$



Remarque: Il est évident que plus le maillage est  
fin et meilleur sera la précision



# Plaques rectangulaires simplement appuyées sur deux côtés opposés

Solution de Maurice Lévy. Formules générales.

\* Cas d'une plaque munie d'une densité de charge  $p(x, y)$ .

Maurice Lévy a étudié les solutions de l'équation de

Lagrange :

$$\Delta \Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{1}{D} F(x, y)$$

qui peut être représentée par une série trigonométrique simple :

$$(1) \quad w(x, y) = -\frac{1}{D} \sum_n F_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

dont les coefficients sont des fonctions de  $y$ .

Les solutions, qui vérifient les conditions aux limites :

$$w=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{pour} \quad x=0 \quad \text{et} \quad x=a.$$

conviennent donc pour une plaque rectangulaire simplement appuyée le long des deux côtés opposés d'équations  $x=0$  et  $x=a$ .

Développons la densité de charge  $p(x, y)$  en série de sinus :

$$(2) \quad p(x, y) = \sum_n P_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Reportons les développements (1) et (2) de  $w(x, y)$  et de  $p(x, y)$  dans l'équation de Lagrange. Nous trouvons que  $w(x, y)$  sera une intégrale de l'équation de Lagrange si les fonctions  $F_n(y)$  sont des intégrales des équations différentielles :

$$(3) \quad \frac{d^4 F_n}{dy^4} - 2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 F_n}{dy^2} + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^4 F_n = P_n(y)$$

L'intégrale générale de l'équation (3) a pour expression

$$(4) F_m(y) = \varphi_m(Y) + (A_m \operatorname{ch} Y + B_m Y \operatorname{sh} Y) + (C_m \operatorname{sh} Y + D_m Y \operatorname{ch} Y)$$

$$\text{avec } Y = \frac{m\pi y}{a}$$

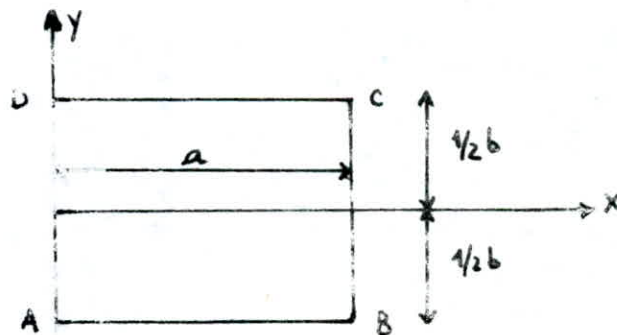
$A_m, B_m, C_m$  et  $D_m$  étant des constantes arbitraires et  $\varphi_m(Y)$  une intégrale particulière que l'on peut toujours déterminer par la méthode de la variation des constantes.

La densité de charge constante  $P$  répartie entre les droites d'équations  $x = x_1$  et  $x = x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) a pour expression

$$(5) P_m = \frac{2P}{m\pi} \left( \cos \frac{m\pi x_1}{a} - \cos \frac{m\pi x_2}{a} \right)$$

Étudions maintenant 2 types de floques.

\*\* Floque simplement épinglée pour  $x=0$  et  $x=a$  et libre pour  $y = 1/2 b$  et  $y = -1/2 b$



Cette floque est soumise à une densité de charge  $p(x, y)$  donnée par (5); Dans ce cas  $F_m(y)$  est une fonction paire que l'on peut écrire sous la forme suivante.

$$(1) F_m(y) = P_m \left( \frac{a}{m\pi} \right)^2 (A_m \operatorname{ch} Y + B_m Y \operatorname{sh} Y)$$

Les conditions aux limites suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} F_m''(1/2b) - \nu \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 F_m(1/2b) = 0 \\ F_m''(1/2b) - (2-\nu) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 F_m'(1/2b) = 0 \end{cases}$$

permettent de calculer les constantes  $A_m$  et  $B_m$

$$(3) \quad \begin{cases} A_m = \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right) \frac{(1+\nu) \operatorname{sh} \lambda - (1-\nu) \lambda \operatorname{ch} \lambda}{(3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - (1-\nu) \lambda} \\ B_m = \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right) \frac{(1-\nu) \operatorname{sh} \lambda}{(3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - (1-\nu) \lambda} \end{cases}$$

avec  $\lambda = \frac{m\pi b}{2a}$

Nous obtenons ainsi la solution :

$$(4) \quad w(x, y) = w_0(x) - \frac{1}{D} \sum_m \frac{P_m a^4}{m^4 \pi^4} (A_m \operatorname{ch} Y + B_m Y \operatorname{sh} Y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

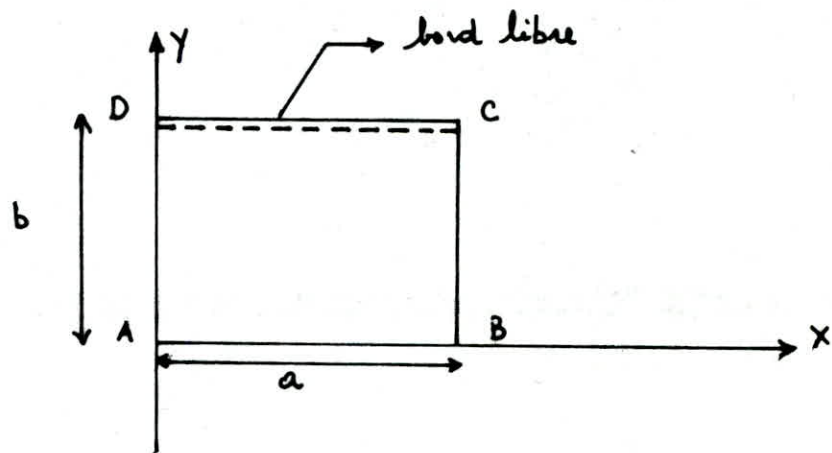
avec  $w_0(x) = -\frac{1}{D} \sum_m \frac{P_m a^4}{m^4 \pi^4} \sin \frac{m\pi x}{a}$

De plus, on peut déterminer le moment fléchissant  $M_1(x)$  le long du bord libre  $y = 1/2 b$

$$(5) \quad M_1(x) = (1-\nu^2) \sum_m \frac{P_m a^2}{m^2 \pi^2} (1 + A_m \operatorname{ch} \lambda + B_m \lambda \operatorname{sh} \lambda) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

### 3. PLAQUES RECTANGULAIRES SIMPLEMENT APPUYEES SUR TROIS COTES

\*\*\* Plaque simplement appuyée pour  $x=0$ ,  $x=a$  et  $y=0$ , libre pour  $y=b$



Cette plaque est soumise à une densité de charge  $p(x, y)$  donnée par (5); Dans ce cas nous pouvons écrire la fonction  $F_m(y)$  sous la forme:

$$(1) \quad F_m(y) = P_m \left( \frac{a}{m\pi} \right)^4 \left( 1 + A_m \operatorname{ch} Y + B_m Y \operatorname{sh} Y + C_m \operatorname{sh} Y + D_m Y \operatorname{sh} Y \right)$$

Les conditions aux limites le long du côté  $y=0$

$$(2) \quad F_m(0) = 0 \quad \text{et} \quad F_m''(0) = 0$$

montrent que  $A_m$  et  $B_m$  ont pour valeurs:

$$A_m = -1 \quad \text{et} \quad B_m = \frac{1}{2}$$

Les conditions aux limites le long du côté  $y=b$

$$(3) \quad \begin{cases} F_m''(b) - \nu \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 F_m(b) = 0 \\ F_m'''(b) - (2 - \nu) \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 F_m'(b) = 0 \end{cases}$$

montrent que  $C_m$  et  $D_m$  ont pour valeurs:



$$(4) \begin{cases} C_m = \frac{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh}^2 \lambda - \nu(1-\nu) \lambda \operatorname{sh} \lambda + \nu(1+\nu)(\operatorname{ch} \lambda - 1) - \frac{1}{2}(1-\nu)^2 \lambda^2}{(1-\nu) \left[ (3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + (1-\nu) \lambda \right]} \\ D_m = \frac{-\frac{1}{2}(3+\nu) \operatorname{sh}^2 \lambda + \nu(\operatorname{ch} \lambda - 1)}{(3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + (1-\nu) \lambda} \end{cases}$$

avec  $\lambda = \frac{m\pi b}{a}$

Nous obtenons ainsi la solution :

$$(5) w(x, y) = w_0(x) - \frac{1}{D} \sum_m \frac{P_m a^4}{m^4 \pi^4} \left( -\operatorname{ch} \gamma + \frac{1}{2} \gamma \operatorname{sh} \gamma + C_m \operatorname{sh} \gamma + D_m \gamma \operatorname{ch} \gamma \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$\text{avec } w_0(x) = -\frac{1}{D} \sum_m \frac{P_m a^4}{m^4 \pi^4} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

De plus, on peut déterminer le moment fléchissant  $M_1(x)$  le long du bord libre  $y=b$ .

$$(6) M_1(x) = (1-\nu^2) \sum_m \frac{P_m a^2}{m^2 \pi^2} \left( 1 - \operatorname{ch} \lambda + \frac{1}{2} \lambda \operatorname{sh} \lambda + C_m \operatorname{sh} \lambda + D_m \lambda \operatorname{ch} \lambda \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

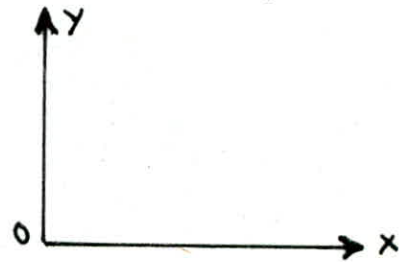
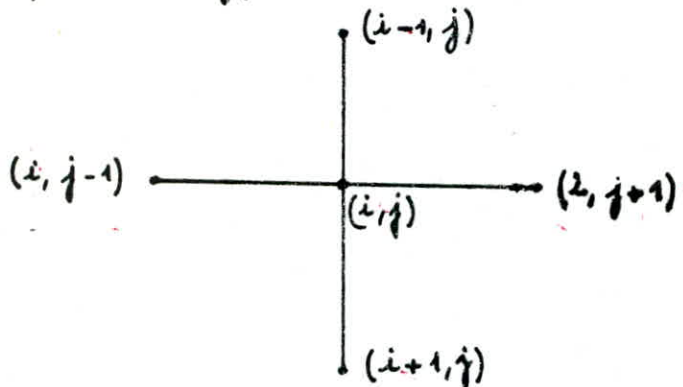


# Discretisation Dans $R^2$ De L'opérateur Laplacien $\Delta$ Et Double Laplacien $\Delta\Delta$

L'équation de Lagrange faisant intervenir le double Laplacien de la flèche; il faut donc discrétiser le Laplacien ( $\Delta$ ) ainsi que le double Laplacien ( $\Delta\Delta$ )

## a) Discretisation de Laplacien ( $\Delta$ )

Dans le plan  $R^2$ , rapporté au repère orthonormé  $(x, y)$  soit le point  $(i, j)$ .



$$\text{En posant } \frac{\partial w(i, j)}{\partial x} = \frac{w(i, j+1) - w(i, j)}{h}$$

et

$$\frac{\partial^2 w(i, j)}{\partial x^2} = \frac{1}{h} \left[ \frac{w(i, j+1) - w(i, j)}{h} - \frac{w(i, j) - w(i, j-1)}{h} \right]$$

$$\text{ce qui donne } \frac{\partial^2 w(i, j)}{\partial x^2} = \frac{w(i, j-1) - 2w(i, j) + w(i, j+1)}{h^2}$$

$$\text{De même } \frac{\partial w(i, j)}{\partial y} = \frac{w(i+1, j) - w(i, j)}{h}$$

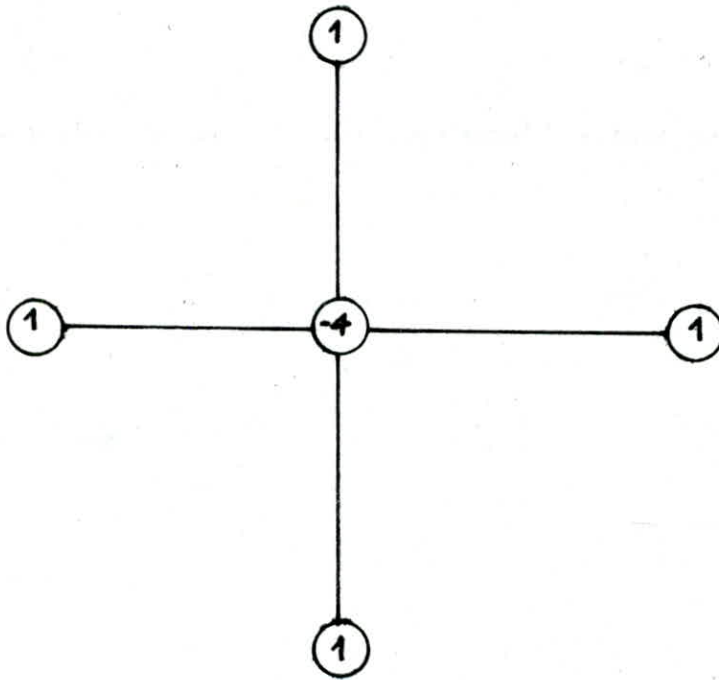
$$\text{et } \frac{\partial^2 w(i, j)}{\partial y^2} = \frac{1}{h} \left[ \frac{w(i+1, j) - w(i, j)}{h} - \frac{w(i, j) - w(i-1, j)}{h} \right]$$

$$\text{ce que donne } \frac{\partial^2 w(i, j)}{\partial y^2} = \frac{w(i+1, j) - 2w(i, j) + w(i-1, j)}{h^2}$$

$$\text{avec } \Delta = \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \text{ et } \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

On obtient une relation fondamentale par la suite :

$$\Delta w(i, j) = \frac{w(i, j-1) + w(i, j+1) + w(i-1, j) + w(i+1, j) - 4w(i, j)}{h^2}$$



### b) Discretisation du double laplacien ( $\Delta\Delta$ )

On procède de la même façon que précédemment

$$\frac{\partial^4 w(i, j)}{\partial x^4} = \frac{w(i, j+2) - 4w(i, j+1) + 6w(i, j) - 4w(i, j-1) + w(i, j-2)}{h^4}$$

$$\frac{\partial^4 w(i, j)}{\partial y^4} = \frac{w(i+2, j) - 4w(i+1, j) + 6w(i, j) - 4w(i-1, j) + w(i-2, j)}{h^4}$$

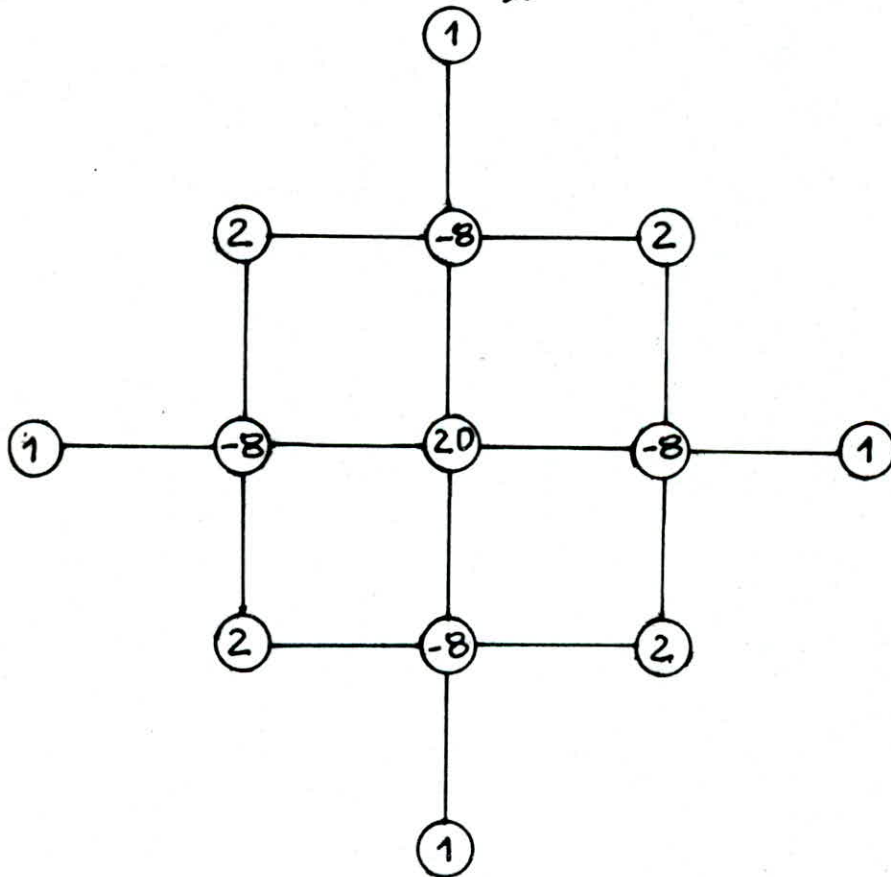
$$\frac{\partial^4 w(i, j)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{4w(i, j) - 2(w(i+1, j) + w(i-1, j) + w(i, j+1) + w(i, j-1))}{h^4}$$

$$\text{avec } \Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$$

$$\text{et } \Delta \Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2 \partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$$

On obtient une relation fondamentale par la suite.

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w(i, j) = & \frac{w(i, j-2) - 8w(i, j-1) - 8w(i, j+1) + w(i, j+2)}{h^4} + \\ & + \frac{w(i-2, j) - 8w(i-1, j) - 8w(i+1, j) + w(i+2, j)}{h^4} + \\ & + \frac{2w(i-1, j-1) + 2w(i-1, j+1) + 20w(i, j) + 2w(i+1, j-1) + 2w(i+1, j+1)}{h^4} \end{aligned}$$



# Résolution De L'équation De Lagrange Par La Méthode Des Differences Finies

Il faut comparer les résultats obtenus par la méthode théorique, celle des séries de Maurice Levy, par une méthode celle des différences finies.

Cas d'une dalle appuyée sur deux côtés :

L'équation des dalles est donnée par

$$\Delta \Delta(w) = -p(x, y)/D$$

$p(x, y)$  : étant la densité surfacique sollicitant la dalle

$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$  : Rigidité à la flexion de la plaque.

$E$  : Module d'Young de la dalle.

$\nu$  : Coefficient de Poisson de la dalle.

$h$  : Epaisseur de la plaque

	1	$Q+1$	$(P-2)(Q+1)$	$(P-1)(Q+1)$
	2	$Q+2$	$(P-2)(Q+2)$	$(P-1)(Q+2)$
	3	$Q+3$	$(P-2)(Q+3)$	$(P-1)(Q+3)$
	$Q-2$	$2Q-2$	$(P-1)(Q-2)$	$PQ-2$
	$Q-1$	$2Q-1$	$(P-1)(Q-1)$	$PQ-1$
	$Q$	$2Q$	$(P-1) \cdot Q$	$PQ$



Soit la dalle ci dessus ayant  $u$  lignes de noeuds et  $v$  colonnes de noeuds. Elle est considérée comme un grillage de mailles, <sup>carrées</sup> de côté  $h$  chaque.

En tenant compte uniquement des noeuds ayant un déplacement différent de zéro ( $w \neq 0$ ) On obtient:

$Q$  lignes de noeuds  $Q = u$

$P$  colonnes de noeuds  $P = v - 2$

En effet les 2 colonnes extrêmes n'entrent pas en compte dans le calcul des déplacements.

La dalle étant numérotée comme ci dessus:

On pose  $N = P \cdot Q$

$N$  étant le nombre de noeuds dans la dalle.

Tout le problème sera résolu, si on trouve le déplacement des  $N$  points (noeuds) de la dalle.

$$\Delta \Delta(w) = -p(x, y)/D$$

### Condition aux limites

Les noeuds qui se trouvent sur la périphérie de la dalle, font appel à des points fictifs. On peut les connaître si l'on se souvient que:

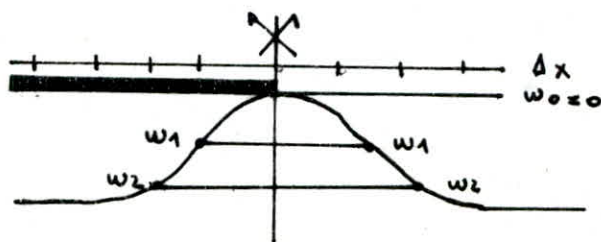
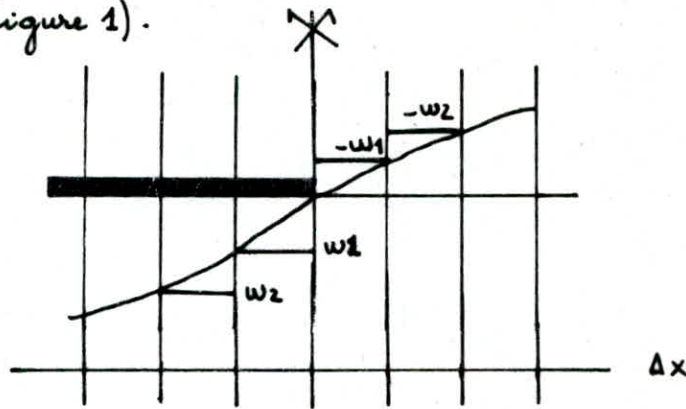


Figure 1

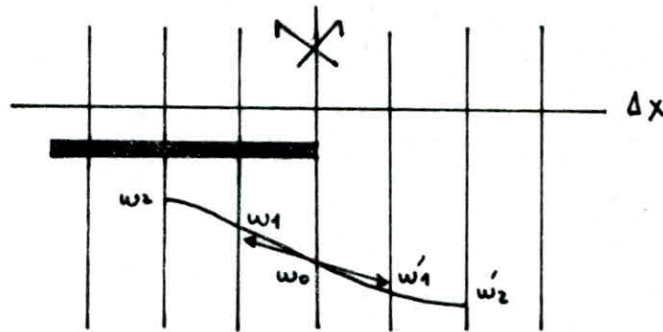
Un encastrement correspond à une symétrie par rapport à un plan (Figure 1).

Figure 2



Un appui simple correspond à une symétrie par rapport à un point (Figure 2).

Figure 3



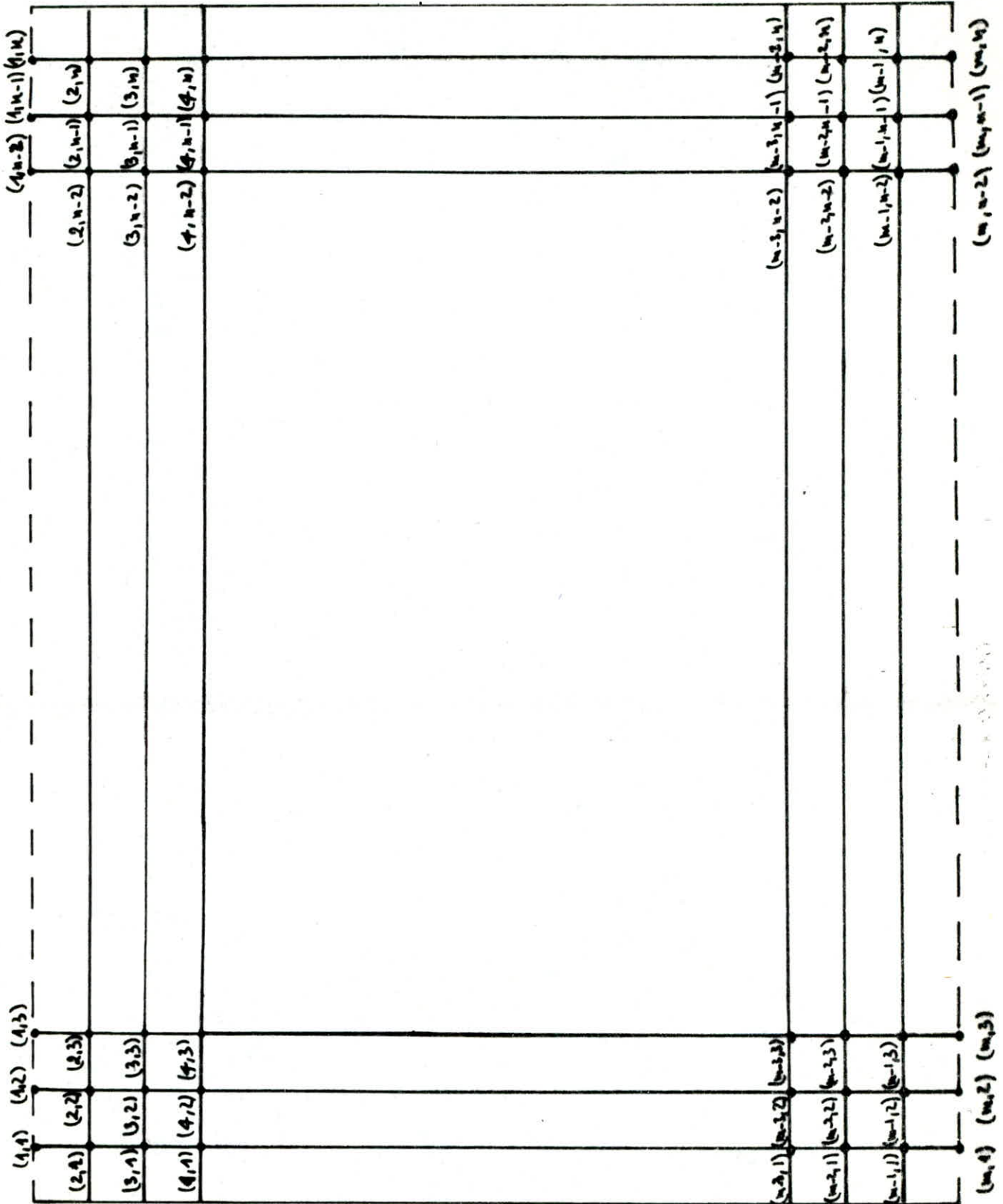
Un bord libre correspond à une symétrie par rapport au point, caractérisé par  $w_0 \neq 0$  (Fig3).

$$w_1' = w_0 + (w_0 - w_1) = 2w_0 - w_1$$

$$w_2' = 2w_0 - w_2$$

Dans ce cas, on est en mesure de connaître le déplacement de tous les nœuds, se trouvant sur la dalle.

La dalle, contient  $n$  colonnes, et  $m$  lignes.



$$(1,1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(1,1) = 5w(i,j) - 4w(i,j+1) + w(i,j+2)$$

$$(1,2) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(1,2) = -4w(i,j-1) + 6w(i,j) - 4w(i,j+1) + w(i,j+2)$$

$$(1,3) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(1,3) = w(i,j-2) - 4w(i,j-1) + 6w(i,j) - 4w(i,j+1) + w(i,j+2)$$

$$(1,n-1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(1,n-1) = w(i,j-2) - 4w(i,j-1) + 6w(i,j) - 4w(i,j+1)$$

$$(1,n) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(1,n) = w(i,j-2) - 4w(i,j-1) + 5w(i,j)$$

$$(2,1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(2,1) = 2w(i,j-5) - 6w(i,j-6) + 18w(i,j) - 8w(i,j+1) + w(i,j+2) - 8w(i,j+6) + 2w(i,j+7) + w(i,j+12)$$

$$(2,2) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(2,2) = 2w(i,j-7) - 6w(i,j-6) + 2w(i,j-5) - 8w(i,j-1) + 19w(i,j) - 8w(i,j+1) + w(i,j+2) + 2w(i,j+5) - 8w(i,j+6) + 2w(i,j+7) + w(i,j+12)$$

$$(2,3) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(2,3) = 2w(i,j-7) - 6w(i,j-6) + 2w(i,j-5) + w(i,j-2) - 8w(i,j-1) + 19w(i,j) - 8w(i,j+1) + w(i,j+2) + 2w(i,j+5) - 8w(i,j+6) + 2w(i,j+7) + w(i,j+12)$$

$$(2,n-1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(2,n-1) = 2w(i,j-7) - 6w(i,j-6) + 2w(i,j-5) + w(i,j-2) - 8w(i,j-1) + 19w(i,j) - 8w(i,j+1) + 2w(i,j+5) - 8w(i,j+6) + 2w(i,j+7) + w(i,j+12)$$

$$(2,n) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(2,n) = -6w(i,j-6) + 2w(i,j-7) + w(i,j-2) - 8w(i,j-1) + 18w(i,j) + 2w(i,j+5) - 8w(i,j+6) + w(i,j+12)$$



$$(3,1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(3,1) = w(i, j-12) + 2w(i, j-5) - 8w(i, j-6) + \\ + 19w(i, j) - 8w(i, j+1) + w(i, j+2) - 8w(i, j+3) + \\ + 2w(i, j+7) + w(i, j+12)$$

$$(3,2) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(3,2) = w(i, j-12) + 2w(i, j-7) - 8w(i, j-6) + 2w(i, j-5) - \\ - 8w(i, j-1) + 20w(i, j) - 8w(i, j+1) + \\ + w(i, j+2) + 2w(i, j+5) - 8w(i, j+6) + \\ + 2w(i, j+7) + w(i, j+12)$$

$$(3,3) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(3,3) = w(i, j-12) + 2w(i, j-7) - 8w(i, j-6) + \\ + 2w(i, j-5) + w(i, j-2) - 8w(i, j-1) + \\ + 20w(i, j) - 8w(i, j+1) + w(i, j+2) + \\ + 2w(i, j+5) - 8w(i, j+6) + 2w(i, j+7) + \\ + w(i, j+12)$$

$$(3, n-1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(3, n-1) = w(i, j-12) + 2w(i, j-7) - 8w(i, j-6) + \\ + 2w(i, j-5) + w(i, j-2) - 8w(i, j-1) + 20w(i, j) - \\ - 8w(i, j+1) + 2w(i, j+5) - 8w(i, j+6) + \\ + 2w(i, j+7) + w(i, j+12)$$

$$(3, n) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(3, n) = w(i, j-12) - 8w(i, j-6) + 2w(i, j-7) + w(i, j-8) - \\ - 8w(i, j-1) + 19w(i, j) + 2w(i, j+5) - \\ - 8w(i, j+6) + w(i, j+12)$$

$$(n-1, 1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(n-1, 1) = w(i, j-12) + 2w(i, j-5) - 8w(i, j-6) + \\ + 18w(i, j) - 8w(i, j+1) + w(i, j+2) - \\ - 6w(i, j+6) + 2w(i, j+7)$$

$$(m-1, 2) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(m-1, 2) = w(i, j-12) + 2w(i, j-7) - 8w(i, j-6) + 2w(i, j-5) \\ - 8w(i, j-1) + 19w(i, j) - 8w(i, j+1) + w(i, j+2) + \\ + 2w(i, j+5) - 6w(i, j+6) + 2w(i, j+7)$$

$$(m-1, 3) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(m-1, 3) = w(i, j-12) + 2w(i, j-7) - 8w(i, j-6) + 2w(i, j-5) \\ + w(i, j-2) - 8w(i, j-1) + 19w(i, j) - 8w(i, j+1) \\ + w(i, j+2) + 2w(i, j+5) - 6w(i, j+6) + 2w(i, j+7)$$

$$(m-1, n-1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(m-1, n-1) = w(i, j-12) + 2w(i, j-7) - 8w(i, j-6) + 2w(i, j-5) \\ + w(i, j-2) - 8w(i, j-1) + 19w(i, j) - 8w(i, j+1) \\ + 2w(i, j+5) - 6w(i, j+6) + 2w(i, j+7)$$

$$(m-1, n) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta w(m-1, n) = w(i, j-12) + 2w(i, j-7) - 8w(i, j-6) + w(i, j-2) \\ - 8w(i, j-1) + 18w(i, j) + 2w(i, j+5) - 6w(i, j+6)$$

les points de (1, 3) jusqu'à (1, n-2) obéissent au même algorithme.

les points de (2, 3) jusqu'à (2, n-2) obéissent au même algorithme

les points de (3, 1) jusqu'à (m-2, 1) obéissent au même algorithme

les points de (3, 2) jusqu'à (m-2, 2) obéissent au même algorithme

les points de (3, n-1) jusqu'à (m-2, n-1) obéissent au même algorithme.

Les points de  $(3, n)$  jusqu'à  $(m-2, n)$  obéissent au même algorithme

Les points de  $(m-1, 3)$  jusqu'à  $(m-1, n-2)$  obéissent au même algorithme.

Les points  $(m, 1)$  et  $(1, 1)$  ont même algorithme

Les points  $(m, 2)$  et  $(1, 2)$  ont même algorithme

Les points  $(m, n-1)$  et  $(1, n-1)$  ont même algorithme

Les points  $(m, n)$  et  $(1, n)$  ont même algorithme.

Les points de  $(m, 3)$  jusqu'à  $(m, n-2)$  ont même algorithme.

Les points se trouvant dans le rectangle constitué par 4 sommets  $(3, 3)$ ;  $(3, n-2)$ ;  $(m-2, n-2)$  et  $(m-2, 3)$  ont même algorithme

En appliquant le double Laplacien pour chaque noeuds, on aura un système d'équations linéaires à  $m \times n$  inconnues. Les inconnues du problème sont les déplacements  $w(i, j)$





6-4 1  
 -4 6-4 1  
 1-4 6-4 1  
 1-4 6-4 1  
 1-4 6-4 1  
 1-4 5

2 0 0 0 0 0 18-8 1 0 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 0 1  
 6 2 0 0 0 0 -8 19-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 2-6 2 0 0 0 0 1-8 19-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 2-6 2 0 0 0 0 1-8 19-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 2-6 2 0 0 0 0 1-8 19-8 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 2-6 0 0 0 0 0 1-8 18 0 0 0 0 2-8 0 0 0 0 0 0 1  
 0 0 0 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 0 19-8 1 0 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 -8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 1-8 20-8 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 0 0 0 0 0 1-8 19 0 0 0 0 0 2-8 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 0 19-8 1 0 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 -8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 1-8 20-8 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 0 0 0 0 0 1-8 19 0 0 0 0 0 2-8 0 0 0 0 0 0  
 1 0 0 0 0 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 0 19-8 1 0 0 0 0 -6 2  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 -8 19-8 1 0 0 0 2-6 2  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 1-8 19-8 1 0 0 0 2-6 2  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 1-8 19-8 1 0 0 0 2-6 2  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 1-8 19-8 1 0 0 0 2-6 2  
 1 0 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 1-8 18 0 0 0 0 0 2  
 5-4 1  
 -4 6-4 1  
 1-4 6-4 1  
 1-4 6-4 1  
 1-4 6-4 1  
 1-4 6-4 1  
 1-4

Dalle SUR 2 cotes  $n=7$   
 $m=6$   
 Matrice [42. 42]

Cas d'une dalle appuyée sur trois côtés :

Soit la dalle ci dessous ayant  $u$  lignes de noeuds et  $v$  colonnes de noeuds. Elle est considérée comme un quillage de mailles, de côté  $h$ , chacune.

En tenant compte uniquement des noeuds ayant un déplacement différent de zéro ( $w \neq 0$ ) on obtient :

$$Q \text{ lignes de noeuds } Q = u - 1$$

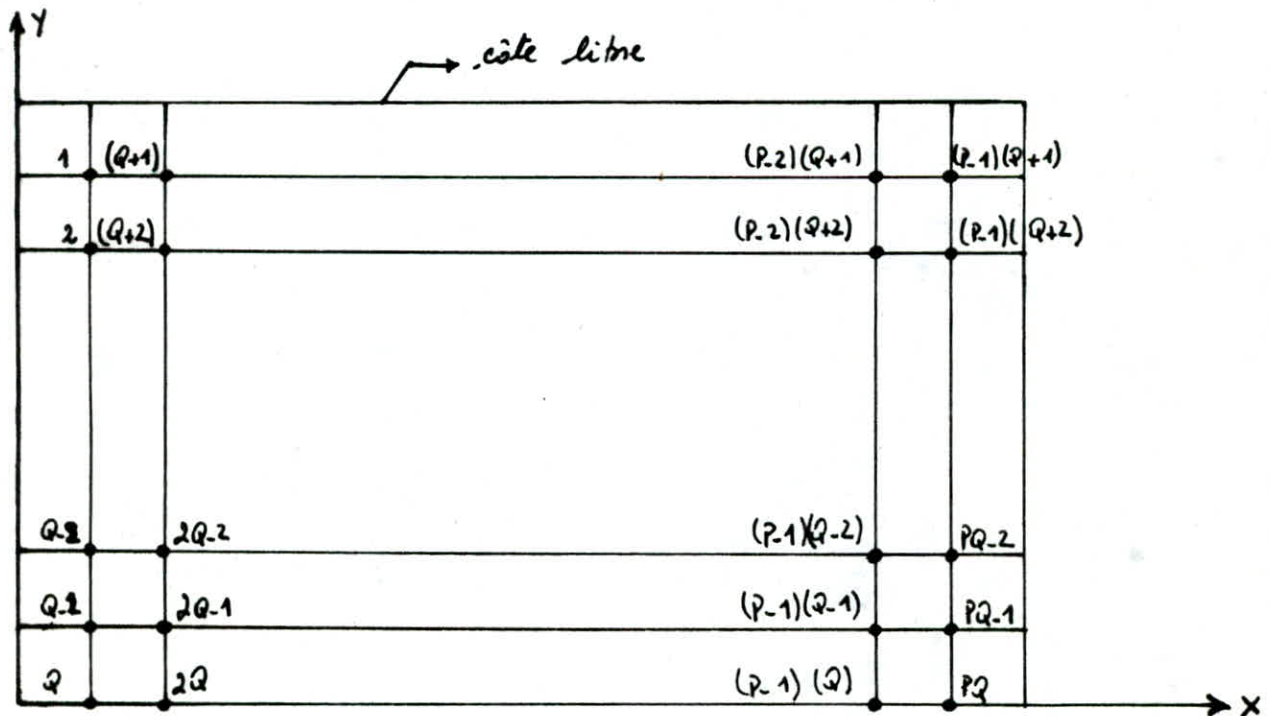
$$P \text{ colonnes de noeuds } P = v - 2$$

En effet les deux colonnes, ainsi que la ligne extrêmes n'entrent pas en compte dans le calcul des déplacements.

La dalle étant numérotée comme ci dessous.

$$\text{On pose } N = P \cdot Q$$

avec  $N$  le nombre de noeuds dans la dalle.



$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,n-2)$	$(1,n-1)$	$(1,n)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,n-2)$	$(2,n-1)$	$(2,n)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,n-2)$	$(3,n-1)$	$(3,n)$
$(n-2,1)$	$(n-2,2)$	$(n-2,3)$	$(n-2,n-2)$	$(n-2,n-1)$	$(n-2,n)$
$(n-1,1)$	$(n-1,2)$	$(n-1,3)$	$(n-1,n-2)$	$(n-1,n-1)$	$(n-1,n)$
$(n,1)$	$(n,2)$	$(n,3)$	$(n,n-2)$	$(n,n-1)$	$(n,n)$

Tout le problème sera résolu, si on trouve le déplacement des  $N$  points (nœuds) de la dalle.

$$\Delta\Delta(w) = -p(x, y)/D$$

Dans ce cas, on est en mesure de connaître le déplacement de tous les nœuds, se trouvant sur la dalle.

La dalle contient  $n$  colonnes et  $m$  lignes.

$$(1,1) \longrightarrow h^4 \Delta\Delta(1,1) = 5w(i, j) - 4w(i, j+1) + w(i, j+2)$$

$$(1,2) \longrightarrow h^4 \Delta\Delta(1,2) = -4w(i, j-1) + 6w(i, j) - 4w(i, j+1) + w(i, j+2)$$

$$(1,3) \longrightarrow h^4 \Delta\Delta(1,3) = w(i, j-2) - 4w(i, j-1) + 6w(i, j) - 4w(i, j+1) + w(i, j+2)$$

$$(1, n-1) \longrightarrow h^4 \Delta\Delta(1, n-1) = w(i, j-2) - 4w(i, j-1) + 6w(i, j) - 4w(i, j+1)$$

$$(1, n) \longrightarrow h^4 \Delta\Delta(1, n) = w(i, j-2) - 4w(i, j-1) + 5w(i, j)$$

$$(2,1) \longrightarrow h^4 \Delta\Delta(2,1) = 2w(i, j-5) - 6w(i, j-6) + 18w(i, j) - 8w(i, j+1) + w(i, j+2) - 8w(i, j+6) + 2w(i, j+7) + w(i, j+12)$$

$$(2,2) \longrightarrow h^4 \Delta\Delta(2,2) = 2w(i, j-7) - 6w(i, j-6) + 2w(i, j-5) - 8w(i, j-1) + 19w(i, j) - 8w(i, j+1) + w(i, j+2) + 2w(i, j+5) - 8w(i, j+6) + 2w(i, j+7) + w(i, j+12)$$

$$(2,3) \longrightarrow h^4 \Delta\Delta(2,3) = 2w(i, j-7) - 6w(i, j-6) + 2w(i, j-5) + w(i, j-2) - 8w(i, j-1) + 19w(i, j) - 8w(i, j+1) + w(i, j+2) + 2w(i, j+5) - 8w(i, j+6) + 2w(i, j+7) + w(i, j+12)$$

$$(2, n-1) \longrightarrow h^4 \Delta\Delta(2, n-1) = 2w(i, j-7) - 6w(i, j-6) + 2w(i, j-5) + w(i, j-2) - 8w(i, j-1) + 19w(i, j) - 8w(i, j+1) + 2w(i, j+5)$$



$$\rightarrow 8w(i, j+6) + 2w(i, j+7) + w(i, j+12)$$

$$(2, n) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta(2, n) = -6w(i, j-6) + 2w(i, j-7) + w(i, j-2) - \\ -8w(i, j-1) + 18w(i, j) + 2w(i, j+5) - \\ -8w(i, j+6) + w(i, j+12)$$

$$(3, 1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta(3, 1) = w(i, j-12) + 2w(i, j-5) - 8w(i, j-6) + 19w(i, j) \\ - 8w(i, j+1) + w(i, j+2) + 2w(i, j+7) - 8w(i, j+6) \\ + w(i, j+12)$$

$$(3, 2) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta(3, 2) = w(i, j-12) + 2w(i, j-7) - 8w(i, j-6) + 2w(i, j-5) \\ - 8w(i, j-1) + 20w(i, j) - 8w(i, j+1) + w(i, j+2) \\ + 2w(i, j+5) - 8w(i, j+6) + 2w(i, j+7) + w(i, j+12)$$

$$(3, 3) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta(3, 3) = w(i, j-12) + 2w(i, j-7) - 8w(i, j-6) + 2w(i, j-5) \\ + w(i, j-2) - 8w(i, j-1) + 20w(i, j) - 8w(i, j+1) \\ + w(i, j+2) + 2w(i, j+5) - 8w(i, j+6) + 2w(i, j+7) \\ + w(i, j+12)$$

$$(3, n-1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta(3, n-1) = w(i, j-12) + 2w(i, j-7) - 8w(i, j-6) + 2w(i, j-5) \\ + w(i, j-2) - 8w(i, j-1) + 20w(i, j) - 8w(i, j+1) \\ + 2w(i, j+5) - 8w(i, j+6) + 2w(i, j+7) + w(i, j+12)$$

$$(3, n) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta(3, n) = w(i, j-12) - 8w(i, j-6) + 2w(i, j-7) + \\ + w(i, j-2) - 8w(i, j-1) + 19w(i, j) - 8w(i, j+6) \\ + 2w(i, j+5) + w(i, j+12)$$

$$(m-1, 1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta(m-1, 1) = w(i, j-12) + 2w(i, j-5) - 8w(i, j-6) + \\ + 19w(i, j) - 8w(i, j+1) + w(i, j+2) + 2w(i, j+7) \\ - 8w(i, j+6)$$

$$\begin{aligned}
 (m-1, 2) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta (m-1, 2) &= \omega(i, j-12) + 2\omega(i, j-7) - 8\omega(i, j-6) \\
 &+ 2\omega(i, j-5) - 8\omega(i, j-2) + 20\omega(i, j) \\
 &- 8\omega(i, j+1) + \omega(i, j+2) + 2\omega(i, j+5) \\
 &- 8\omega(i, j+6) + 2\omega(i, j+7).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (m-1, 3) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta (m-1, 3) &= \omega(i, j-12) + 2\omega(i, j-5) - 8\omega(i, j-4) + 2\omega(i, j-3) \\
 &+ \omega(i, j-2) - 8\omega(i, j-1) + 20\omega(i, j) - 8\omega(i, j+1) \\
 &+ \omega(i, j+2) + 2\omega(i, j+3) - 8\omega(i, j+4) + 2\omega(i, j+5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (m-1, n-1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta (m-1, n-1) &= \omega(i, j-12) + 2\omega(i, j-7) - 8\omega(i, j-6) + \\
 &+ 2\omega(i, j-5) + \omega(i, j-2) - 8\omega(i, j-1) + 20\omega(i, j) \\
 &- 8\omega(i, j+1) + 2\omega(i, j+5) - 8\omega(i, j+6) + \\
 &+ 2\omega(i, j+7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (m-1, n) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta (m-1, n) &= \omega(i, j-12) - 8\omega(i, j-6) + 2\omega(i, j-7) + \\
 &+ \omega(i, j-2) - 8\omega(i, j-1) + 19\omega(i, j) - \\
 &- 8\omega(i, j+6) + 2\omega(i, j+5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (m, 1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta (m, 1) &= \omega(i, j-12) + 2\omega(i, j-5) - 8\omega(i, j-6) + \\
 &+ 18\omega(i, j) - 8\omega(i, j+1) + \omega(i, j+2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (m, 2) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta (m, 2) &= \omega(i, j-12) + 2\omega(i, j-7) - 8\omega(i, j-6) + \\
 &+ 2\omega(i, j-5) - 8\omega(i, j-1) + 19\omega(i, j) - \\
 &- 8\omega(i, j+1) + \omega(i, j+2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (m, 3) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta (m, 3) &= \omega(i, j-12) + 2\omega(i, j-7) - 8\omega(i, j-6) + \\
 &+ 2\omega(i, j-5) + \omega(i, j-2) - 8\omega(i, j-1) + \\
 &+ 19\omega(i, j) - 8\omega(i, j+1) + \omega(i, j+2)
 \end{aligned}$$

$$(m, n-1) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta (m, n-1) = w(i, j-4) + 2w(i, j-3) - 8w(i, j-2) + 2w(i, j-1) + w(i, j) - 8w(i, j+1) + 19w(i, j+2) - 8w(i, j+3) + w(i, j+4)$$

$$(m, n) \longrightarrow h^4 \Delta \Delta (m, n) = w(i, j-12) - 8w(i, j-6) + 2w(i, j-3) + w(i, j-2) + 8w(i, j-1) + 18w(i, j) -$$

les points de  $(1, 3)$  jusqu'à  $(1, n-2)$  possèdent le même algorithme.

les points de  $(2, 2)$  jusqu'à  $(2, n-2)$  possèdent le même algorithme.

les points de  $(3, 1)$  jusqu'à  $(m-2, 1)$  possèdent le même algorithme.

les points de  $(3, 2)$  jusqu'à  $(m-2, 2)$  possèdent le même algorithme.

les points de  $(3, n-1)$  jusqu'à  $(m-2, n-1)$  possèdent le même algorithme.

les points de  $(3, n)$  jusqu'à  $(m-2, n)$  possèdent le même algorithme.

les points de  $(m-1, 3)$  jusqu'à  $(m-1, n-2)$  possèdent le même algorithme.

les points de  $(m, 3)$  jusqu'à  $(m, n-2)$  possèdent le même algorithme.

Les points se trouvent dans le rectangle, constitué par 4 sommets  $(3,3)$ ;  $(3, n-2)$ ;  $(m-2, n-2)$  et  $(m-2, 3)$  possèdent le même algorithme.

En appliquant le double Laplacien pour chaque noeuds, on aura un système d'équations linéaires à  $m \times n$  inconnues. Les inconnues du problème sont les déplacements  $w(i, j)$



... 1972 ...

-4 1  
 6 4 1  
 -4 6 -4 1  
 1 -4 6 -4 1  
 1 -4 6 -4  
 1 -4 5  
 2 0 0 0 0 18 -8 1 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 1  
 -6 2 0 0 0 -8 19 -8 1 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 2 -6 2 0 0 1 -8 19 -8 1 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 2 -6 2 0 0 1 -8 19 -8 1 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 2 -6 2 0 0 1 -8 19 -8 0 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 2 -6 0 0 0 1 -8 18 0 0 0 0 2 -8 0 0 0 0 0 1  
 0 0 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 19 -8 1 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 0 -8 20 -8 1 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 1 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 1 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 0 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 0 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 1 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 1 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 0 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 0 0 0 1 -8 19 0 0 0 0 2 -8 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 0 0 0 1 -8 19 0 0 0 0 2 -8 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 0 1 -8 20 -8 1 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 1 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 1 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 0 0 0 2 -8 2 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 0 0 0 1 -8 19 0 0 0 0 2 -8 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 0 1 -8 20 -8 1 0 0 2 -8 2  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 0 -8 20 -8 1 0 0 2 -8 2  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 1 0 0 2 -8 2  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 1 0 0 2 -8 2  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 20 -8 0 0 0 2 -8 2  
 1 0 0 0 0 2 -8 0 0 0 1 -8 19 0 0 0 0 2 -8  
 1 0 0 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 18 -8 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 0 -8 19 -8 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 19 -8 1  
 1 0 0 0 0 2 -8 2 0 0 1 -8 19 -8  
 1 0 0 0 0 2 -8 0 0 0 1 -8 18

w<sub>1</sub>  
 w<sub>2</sub>  
 w<sub>3</sub>  
 ...  
 w<sub>34</sub>  
 w<sub>35</sub>  
 w<sub>36</sub>

6-4 1  
 4 6-4 1  
 1-4 6-4 1  
 1-4 6-4 1  
 1-4 6-4 1  
 1-4 5  
 2 0 0 0 0 0 18-8 1 0 0 0 0-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 6 2 0 0 0 0 -8 19-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 1-6 2 0 0 0 1-8 19-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 2-6 2 0 0 0 1-8 19-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 2-6 2 0 0 0 1-8 19-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 2-6 2 0 0 0 1-8 19-8 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 2-6 0 0 0 0 1-8 18 0 0 0 0 0 2-8 0 0 0 0 0 0 1  
 0 0 0 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 0 19-8 1 0 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 -8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 20-8 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 0 0 0 0 1-8 19 0 0 0 0 0 2-8 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 19-8 1 0 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 -8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 20-8 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 0 0 0 0 1-8 19 0 0 0 0 0 2-8 0 0 0 0 0 0 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 19-8 1 0 0 0 0 -8 2  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 -8 20-8 1 0 0 0 2-8 2  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8 2  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 20-8 1 0 0 0 2-8  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 20-8 0 0 0 0 2-8  
 1 0 0 0 0 0 2-8 0 0 0 0 1-8 19 0 0 0 0 0 0 0 0  
 1 0 0 0 0 0 0 -8 2 0 0 0 0 0 0 18-8 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 0 -8 19-8 1  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 19-8  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 19-8  
 1 0 0 0 0 0 2-8 2 0 0 0 1-8 19-8  
 1 0 0 0 0 0 2-8 0 0 0 0 0 1

DALLE SUR 3 côtés

n = 7  
m = 6

matrice [42. 42.]

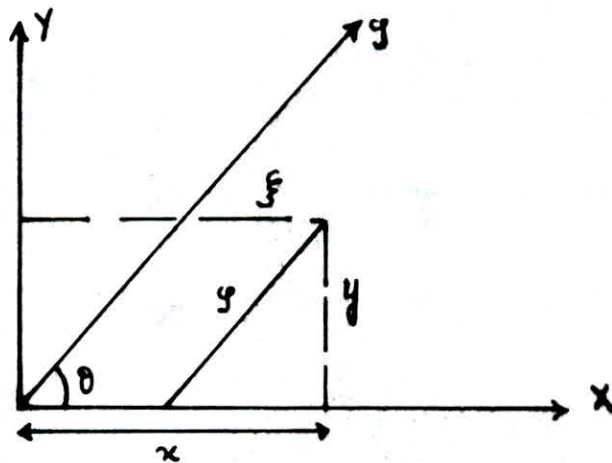
# Etude De La Dalle en Biaisé

## Coordonnées obliques :

L'expression des équations aux différences finies ne soulève aucune difficulté lorsque les relations différentielles sont exprimées dans un système de coordonnées donné.

Les différences de tout ordre s'évaluent suivant les mêmes règles indiquées précédemment en substituant à  $x$  et  $y$  les variables relatives au système de coordonnées utilisé.

L'aspect particulier n'apparaît qu'au moment où nous voulons passer d'un système de coordonnées dans un autre. En effet, les expressions des équations différentielles peuvent parfois se compliquer. Nous montrons ci-après comment on passe de coordonnées cartésiennes rectangulaires aux coordonnées obliques.



$$x = \xi + y \cos \theta \quad \longrightarrow \quad \xi = x - y / \cos \theta$$

$$y = y \sin \theta \quad \longrightarrow \quad y = y / \sin \theta$$



$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{\tan \theta}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sin \theta} \left[ \frac{\partial F}{\partial \xi} - \cos \theta \frac{\partial F}{\partial \eta} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ -\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \cos \theta + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \cos \theta \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} \right] \end{aligned}$$

$$(1) \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ -2 \cos \theta \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \right]$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3}$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4}$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ 3 \cos^3 \theta \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^2 \partial \eta} - 3 \cos \theta \frac{\partial^3 F}{\partial \xi \partial \eta^2} - \cos^3 \theta \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3} \right]$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ 6 \cos^3 \theta \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^3 \partial \eta} - 4 \cos^2 \theta \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - 4 \cos \theta \frac{\partial^4 F}{\partial \xi \partial \eta^3} + \cos \theta \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} \right]$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \right] \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \cos^2 \theta \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} - 2 \cos \theta \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^3 \partial \eta} + \frac{\partial^4 F}{\partial \xi \partial \eta^2} \right]$$

$$\Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}$$



$$(2) \quad \Delta \Delta F = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - 4 \cos \theta \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} - 4 \cos \theta \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} + 2(1+2 \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \right]$$

Discretisation dans  $\mathbb{R}^2$  de Laplacien

$$\frac{\partial^2 F(i, j)}{\partial x^2} = \frac{F(i, j+1) - 2F(i, j) + F(i, j-1)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 F(i, j)}{\partial y^2} = \frac{F(i+1, j) - 2F(i, j) + F(i-1, j)}{h^2}$$

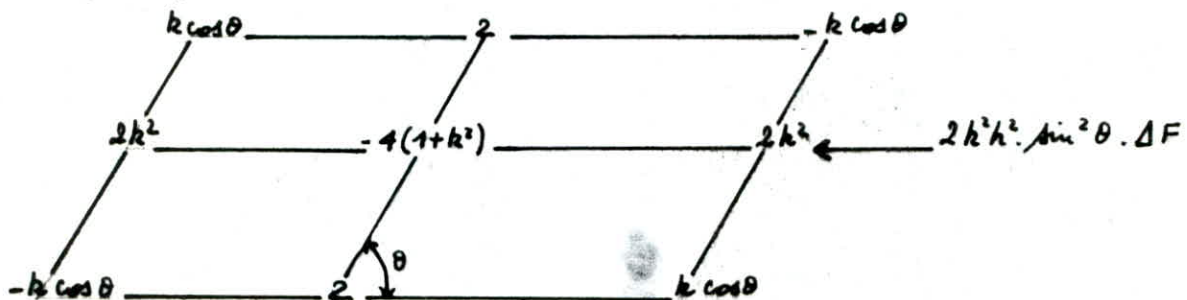
$$\Delta F(i, j) = \frac{\partial^2 F(i, j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(i, j)}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial^2 F(i, j)}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 F(i, j)}{\partial \xi \partial \eta} \cos \theta + \frac{\partial^2 F(i, j)}{\partial \eta^2} \right]$$

$$\Delta F(i, j) = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \frac{F(i, j+1) - 2F(i, j) + F(i, j-1)}{\Delta \xi^2} + \frac{F(i+1, j) - 2F(i, j) + F(i-1, j)}{\Delta \eta^2} - 2 \cos \theta \frac{F(i+1, j+1) - F(i+1, j-1) - F(i-1, j+1) + F(i-1, j-1)}{4 \Delta \xi \Delta \eta} \right]$$

$$\Delta \xi = h \quad \text{et} \quad \Delta \eta = h k$$

$$\Delta F(i, j) = \frac{1}{2 \sin^2 \theta h^2 k^2} \left[ -4(1+k^2) F(i, j) + 2k^2 F(i, j+1) + 2k^2 F(i, j-1) + k \cos \theta F(i+1, j) + k \cos \theta F(i-1, j-1) + 2F(i+1, j) + 2F(i-1, j) - k \cos \theta F(i-1, j+1) - k \cos \theta F(i-1, j-1) \right]$$

Le schéma de discretisation de Laplacien est représenté ci-dessous.

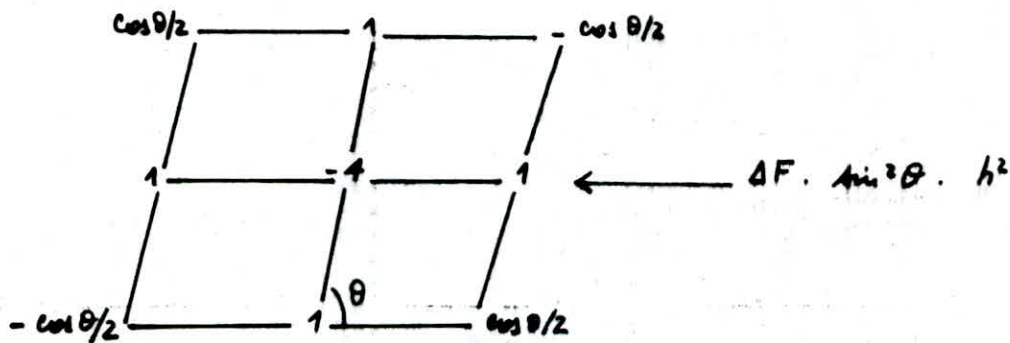


## Discretisation dans $\mathbb{R}^2$ du double Laplacien

$$\Delta \Delta F = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^4} - 4 \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2 \partial x^2} \right] + 2(1 + 2 \cos^2 \theta) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right]$$

$$\Delta \Delta F(i, j) = \frac{1}{h^2 \sin^2 \theta} \left[ \Delta F(i-1, j-1) + \Delta F(i+1, j+1) + \Delta F(i-1, j+1) + \Delta F(i+1, j-1) \right. \\ \left. + 4 \left[ \Delta F(i, j+1) + \Delta F(i, j-1) + \Delta F(i+1, j) + \Delta F(i-1, j) \right] - 16 \Delta F(i, j) \right]$$

Pour un maillage carré,  $h=1$  on aura le schéma de discretisation suivant.



$$\Delta F(i-1, j-1) = -4F(i, j) + F(i-1, j) + F(i-1, j-2) + F(i-2, j-1) + F(i, j-1) \\ + \cos \theta/2 F(i, j) + \cos \theta/2 F(i-2, j-2) - \cos \theta/2 F(i, j-2) - \cos \theta/2 F(i-2, j)$$

$$\Delta F(i+1, j+1) = -4F(i+1, j+1) + F(i+1, j+2) + F(i+1, j) + F(i, j+1) + F(i+2, j+1) \\ + \cos \theta/2 F(i+2, j+2) + \cos \theta/2 F(i, j) - \cos \theta/2 F(i+2, j) - \\ - \cos \theta/2 F(i, j+2)$$

$$\Delta F(i-1, j+1) = -4F(i-1, j+1) + F(i-1, j+2) + F(i-1, j) + F(i-2, j+1) + \\ + F(i, j+1) + \cos \theta/2 F(i, j+2) + \cos \theta/2 F(i-2, j) - \cos \theta/2 F(i, j) - \\ - \cos \theta/2 F(i-2, j+2)$$

$$\Delta F(i+1, j-1) = -4F(i+1, j-1) + F(i+1, j) + F(i+1, j-2) + F(i, j-1) + \\ + F(i+2, j-1) + \cos \theta/2 F(i+2, j) + \cos \theta/2 F(i, j-2) - \cos \theta/2 F(i+2, j+2) \\ - \cos \theta/2 F(i, j)$$

$$\Delta F(i, j) = -4F(i, j) + F(i, j+1) + F(i, j-1) + F(i-1, j) + F(i+1, j) - \\ - \cos \theta/2 F(i+1, j-1) - \cos \theta/2 F(i-1, j+1) + \cos \theta/2 F(i-1, j-1) + \\ + \cos \theta/2 F(i+1, j+1)$$

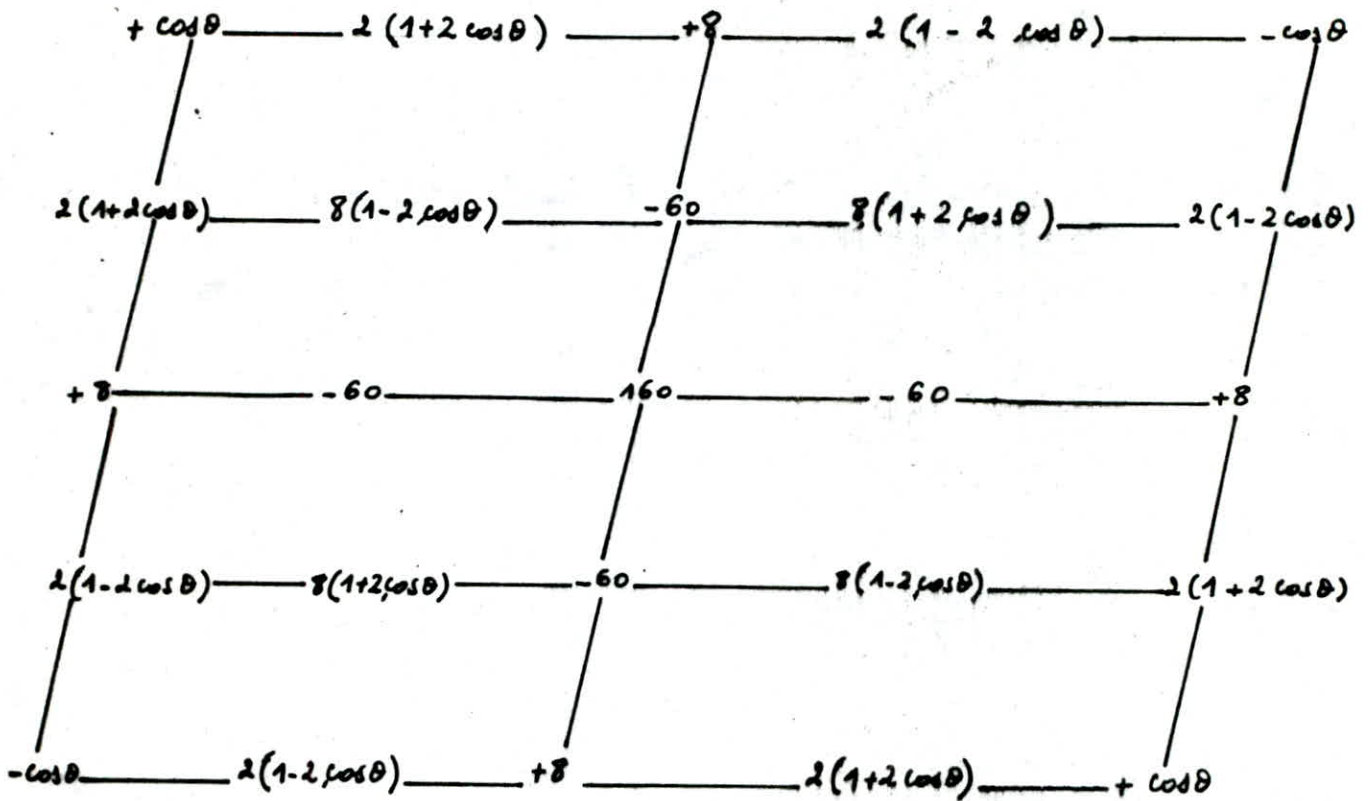
$$\Delta F(i, j-1) = -4F(i, j-1) + F(i, j-2) + F(i, j) + F(i+1, j-1) + F(i-1, j-1) + \\ + \cos \theta/2 F(i-1, j-2) + \cos \theta/2 F(i+1, j) - \cos \theta/2 F(i+1, j-2) - \\ - \cos \theta/2 F(i-1, j)$$

$$\Delta F(i+1, j) = -4F(i+1, j) + F(i+1, j+1) + F(i+1, j-1) + F(i+2, j) + F(i, j) \\ + \cos \theta/2 F(i, j-1) + \cos \theta/2 F(i+2, j+1) - \cos \theta/2 F(i, j+1) - \\ - \cos \theta/2 F(i+2, j-1)$$

$$\Delta F(i-1, j) = -4F(i-1, j) + F(i-1, j-1) + F(i-1, j+1) + F(i-2, j) + F(i, j) \\ + \cos \theta/2 F(i-2, j-1) + \cos \theta/2 F(i, j+1) - \cos \theta/2 F(i-2, j+1) - \\ - \cos \theta/2 F(i, j-1)$$

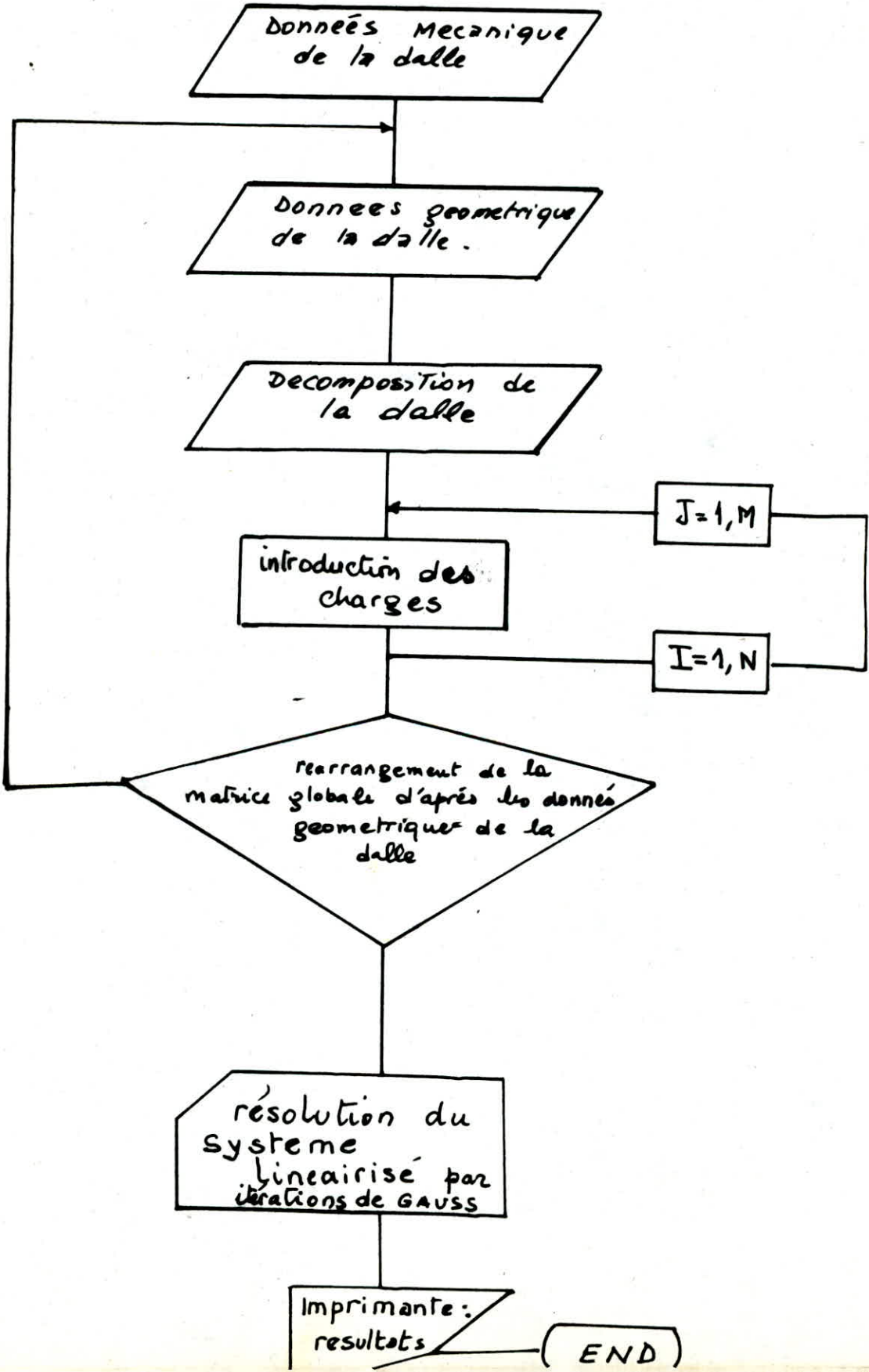
$$\cdot \text{Ans } \theta. \text{ h}^2 \Delta \Delta F(i, j) = \frac{1}{2} \left[ 160 F(i, j) + (8-16 \cos \theta) F(i-1, j-1) + (8-16 \cos \theta) F(i+1, j+1) \right. \\ + (8+16 \cos \theta) F(i+1, j-1) + (8+16 \cos \theta) F(i-1, j+1) - \\ - \cos \theta F(i-2, j+2) - \cos \theta F(i+2, j-2) + \cos \theta F(i+2, j+2) + \\ + \cos \theta F(i-2, j-2) - 60 F(i-1, j) - 60 F(i, j-1) - 60 F(i+1, j) \\ - 60 F(i, j+1) + 8 F(i+2, j) + 8 F(i, j+2) + 8 F(i-2, j) + \\ + 8 F(i, j-2) + (2+4 \cos \theta) F(i+2, j+1) + (2+4 \cos \theta) F(i-2, j-1) \\ + (2+4 \cos \theta) F(i-1, j-2) + (2-4 \cos \theta) F(i+1, j-2) + (2-4 \cos \theta) F(i-1, j+2) \\ \left. + (2-4 \cos \theta) F(i-2, j+1) + (2+4 \cos \theta) F(i+1, j+2) + (2-4 \cos \theta) F(i+2, j-1) \right]$$

Le schéma de discrétisation du double Laplacien pour une dalle en trapeze est le suivant:





ORGANIGRAMME GENERAL



# ANNEXES

=====

#####

CAS D'UNE DALLE APPUYEE SUR DEUX COTES  
 =====

```

DIMENSION Z1(3),Z2(4),Z3(5),Z4(4),Z5(3),C1(5),
1 C2(5),C3(5),C4(5),C5(5),C6(5),C7(5),C8(5),C9(5),
1 C10(5),G1(2),G2(3),G5(3),D1(3),D2(3),D5(3),D11(3),D15(2)
COMMON VKG(750,750),VFG(750)
DATA Z1/5,-4,1/,Z2/-4,6,-4,1/,Z3/1,-4,6,-4,1/
DATA Z4/1,-4,6,-4/,Z5/1,-4,5/
DATA C1/0,0,18,-8,1/,C2/0,-3,19,-8,1/,C3/1,-8,19,-8,1/
DATA C4/1,-8,19,-8,0/,C5/1,-8,18,0,0/,C6/0,0,19,-8,1/
DATA C7/0,-8,20,-8,1/,C8/1,-8,20,-8,1/,C9/1,-8,20,-8,0/
DATA C10/1,-8,19,0,0/,G1/-6,2/,G2/2,-6,2/,G5/2,-6,0/
DATA D1/0,-8,2/,D2/2,-8,2/,D5/2,-8,0/,D11/0,-6,2/,D15/2,-6/
COMMON /ZONE/ A(750,750), B(750)
PRINT*, 'DONNER LA LARGEUR DE LA CALLE X5'
ACCEPT*, X5
PRINT*, 'DONNER LA LONGUEUR DE LA DALLE Y5'
ACCEPT*, Y5
PRINT*, 'LE PAS H='
ACCEPT*, H
M=X5/H-1
N=Y5/H+1
PRINT*, 'NOMBRE DE NOEUDS S/X', N
PRINT*, 'NOMBRE DE NOEUDS S/Y', M
NEQ=M*N
PRINT*, 'NBRE D EQUATION NEQ=', NEQ
PRINT*, 'MODULE DE YOUNG E='
ACCEPT*, E
PRINT*, 'EPAISSEUR DE LA DALLE EP='
ACCEPT*, EP
PRINT*, 'COEFFICIENT DE POISSON TNU='
ACCEPT*, TNU
D=E*(EP**3)/((1-TNU**2)*12)
PRINT*, 'REGIDITE DE LA PLAQUE A LA FLEXION D=', D
-----INTRODUCTION DU VECTEUR B(I)-----
PRINT*, 'DONNER LA VALEUR CHARGE P(X,Y)='
ACCEPT*, CH
DD=-(CH/D)*H**4
DO 13 I=1,NEQ
B(I)=DD
CONTINUE
-----CALCUL-----
DO 1 I=1,NEQ
IF(I.EQ.1)THEN
CALL SUB(I,I,I+2,Z1,3)
ENDIF
IF(I.EQ.2)THEN
CALL SUB(I,I-1,I+2,Z2,4)
ENDIF
IF(I.GE.3.AND.I.LE.(N-2))THEN
CALL SUB(I,I-2,I+2,Z3,5)
ENDIF
IF(I.EQ.(N-1))THEN
CALL SUB(I,I-2,I+1,Z4,4)

```

```

ENDIF
IF(I.EQ.N)THEN
CALL SUB(I,I-2,I,Z5,3)
ENDIF
IF(I.EQ.(N+1))THEN
CALL CUB(I,C1,G1,2,D1,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.(N+2))THEN
CALL CUB(I,C2,G2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.GE.(N+3).AND.I.LE.(2*N-2))THEN
CALL CUB(I,C3,G2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.(2*N-1))THEN
CALL CUB(I,C4,G2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.2*N)THEN
CALL CUB(I,C5,G5,3,D5,3,M,N)
ENDIF
DO 2 S=2,M-3
IF(I.EQ.(S*N+1))THEN
CALL CUB(I,C6,D1,3,D1,3,M,N)
ENDIF
CONTINUE
DO 100 P=2,M-3
IF(I.EQ.(P*N+2))THEN
CALL CUB(I,C7,D2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
CONTINUE
DO 101 K=2,M-3
IF(I.LE.((K+1)*N-2).AND.I.GE.((K*N)+3))THEN
CALL CUB(I,C8,D2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
CONTINUE
DO 3 LL=3,M-2
IF(I.EQ.(LL*N-1))THEN
CALL CUB(I,C9,D2,3,D2,3,A-2,N)
ENDIF
CONTINUE
DO 102 Q=3,M-2
IF(I.EQ.(Q*N))THEN
CALL CUB(I,C10,D5,3,D5,3,M,N)
ENDIF
CONTINUE
IF(I.EQ.((M-2)*N+1))THEN
CALL CUB(I,C1,D1,3,D11,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.((M-2)*N+2))THEN
CALL CUB(I,C2,D2,3,G2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.LE.((M-1)*N-2).AND.I.GE.((M-2)*N+3))THEN
CALL CUB(I,C3,D2,3,G2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.((M-1)*N-1))THEN
CALL CUB(I,C4,D2,3,G2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.((M-1)*N))THEN
CALL CUB(I,C5,D5,3,D15,2,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.((M-1)*N+1))THEN
CALL SUB(I,I,I+2,Z1,3)
ENDIF

```



```

CALL SUB(I,I-1,I+2,Z2,4)
ENDIF
IF(I.LE.(NEQ-2).AND.I.GE.((M-1)*N+3))THEN
CALL SUB(I,I-2,I+2,Z3,5)
ENDIF
IF(I.EQ.(NEQ-1))THEN
CALL SUB(I,I-2,I+1,Z4,4)
ENDIF
IF(I.EQ.(NEQ))THEN
CALL SUB(I,I-2,I,Z5,3)
ENDIF
CONTINUE

```

```

1
C #####
DO 31 I=1,NEQ
DO 31 J=1,NEQ
VKG(I,J)=A(I,J)
31 VFG(I)=B(I)
NSYM=1
CALL RESOL(NSYM,NEQ)
DO 151 I=1,NEQ
WRITE(14,114)I,VFG(I)
114 FORMAT(10X,('VFG(',I3,')='E30.20,3X))
PRINT*,('VFG(',I,')=',VFG(I)
151 CONTINUE
STOP
END

```

```

SUBROUTINE CUB(I,SEC,SEG,KDIM,SED,MDIM,M,N)
DIMENSION SEC(5),SEG(3),SED(3)
COMMON/ZONE/ A(750,750),B(750)
IC=1
DO 2 LC=I-2,I+2
A(I,LC)=SEC(IC)
IC=IC+1
2 CONTINUE
IG=1
DO 3 LG=I-N-1,I-N+1
IF(LG.LE.0) GO TO 3
A(I,LG)=SEG(IG)
IG=IG+1
3 CONTINUE
LI=1
DO 4 LD=I+N-1,I+N+1
IF(LD.GT.M*N) GO TO 4
A(I,LD)=SED(LI)
LI=LI+1
4 CONTINUE
LGG=I-2*N
IF(LGG.GT.0) THEN
A(I,LGG)=1
ENDIF
LDD=I+2*N
IF(LDD.LE.M*N) THEN
A(I,LDD)=1
ENDIF
RETURN
END

```

A-3-

```

C #####
C SUBROUTINE SUB(I,J,K,VEC,IDIM)
#####
DIMENSION VEC(IDIM)
COMMON/ZONE/A(750,750),B(750)
ID=1
DO 2 I=1,NEQ

```

A(I,L)=VEC(IC)

ID=ID+1

2 CONTINUE

RETURN

END

C #####

SUBROUTINE RESOL(NSYM,NEQ)

C =====

C  
C RESOLUSION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS NON SYMETRIQUE PAR LA  
C METHODE DE GAUSS

C  
C ENTREES  
C NSYM .EQ.1 SYSTEME NON SYMETRIQUE  
C NEQ NOMBRE D'EQUATIONS (.GE.2)  
C VKG MATRICE K STOCKEE DANS UNE TABLE A 2 DIMENSIONS  
C VFG SECONDE MEMBRE

C  
C SORTIE  
C VFG SOLUTION

C =====

C  
C -----TRIANGULARISATION-----

C COMMON VKG(750,750),VFG(750)  
C ZERO=0  
C N1=NEQ-1  
C DO 50 IS=1,N1  
C PIV=VKG(IS,IS)  
C IF(PIV)20,10,20  
10 WRITE(6,2000) IS  
2000 FORMAT('PIVOT NUL,EQUATION',I5)  
C STOP

20 IS1=IS+1  
C DO 50 II=IS1,NEQ  
C CL=VKG(II,IS)/PIV  
C IF(CL.EQ.ZERO) GO TO 50  
C VFG(II)=VFG(II)-CL\*VFG(IS)  
C IF(NSYM.NE.1) GO TO 32

30 DO 30 IJ=IS1,NEQ  
C VKG(II,IJ)=VKG(II,IJ)-CL\*VKG(IS,IJ)  
C GO TO 50

32 DO 40 IJ=II,NEQ  
C VKG(II,IJ)=VKG(II,IJ)-CL\*VKG(IS,IJ)  
C VKG(IJ,II)=VKG(II,IJ)

40 CONTINUE  
50  
C RESOLUSION DU SYSTEME TRIANGULAIRE

VFG(NEQ)=VFG(NEQ)/VKG(NEQ,NEQ)  
C DO 70 II=1,N1  
C IS1=IS1-1  
C CL=ZERO  
C IJ1=IS1+1  
C DO 60 IJ=IJ1,NEQ  
60 CL=CL+VKG(IS1,IJ)\*VFG(IJ)  
70 VFG(IS1)=(VFG(IS1)-CL)/VKG(IS1,IS1)

RETURN  
END

#####  
 CALCUL DES DALLES PAR LA METHODE DE MAURICE LEVY  
 #####

=====  
 CAS D'UNE DALLE APPUYEE SUR DEUX COTES  
 =====

```
#####
DIMENSION W(180000),W1(180000),N1(180000),M1(180000)
REAL M,L,S,N,H,X1,X2,NU,EP,E,D,Q,V,Y,X,B,Z,AM,BM,FM,PM,NS,A
INTEGER R
PRINT*, 'DONNER SOMMATION SUR M'
ACCEPT*,U
PRINT*, 'DIMENSION DE LA DALLE SUIVANT X(CM) = '
ACCEPT*,A
PRINT*, 'DIMENSION DE LA DALLE SUIVANT Y(CM) = '
ACCEPT*,E
PRINT*, 'DEBUT DE LA SURCHARGE X0 = '
ACCEPT*,X1
PRINT*, 'FIN DE LA SURCHARGE XN = '
ACCEPT*,X2
PRINT*, 'SURCHARGE= '
ACCEPT*,CU
PRINT*, 'MODULE DE YOUNG E= '
ACCEPT*,E
PRINT*, 'COEFFICIENT DE POISSON NU = '
ACCEPT*,NU
PRINT*, 'EPAISSEUR DE LA DALLE EP = '
ACCEPT*,EP
C=(E*EP**3)/(12*(1-NU**2))
PRINT*, 'LA RIGIDITE A LA FLEXION D = ',D
PRINT*, ' DONNER LE COTE DE LA MAILLE : (CM)'
ACCEPT*,H
PRINT*, ' PROGRAMME DE CALCUL DES FLECHES PAR LA METHODE DE MORICE LEVY'
PRINT*, ' DIMENSION DE LA DALLE APPUYEE SUR DEUX COTES POUR X=C ET X=A'
PRINT*, ' ET LIBRE POUR Y=B/2 ET Y=-B/2'
P1=3.141592654
Q=(A/H)-1
V=(B/H)+1
N=Q*V
PRINT*, 'NBRE DE NOEUDS DE LA DALLE; N = ',N
R=0
DO 10 Y=B/2,-B/2,-H
DO 20 X=H,A-H,H
W1(R)=0
M1(R)=0
N1(R)=0
R=R+1
DO 30 M=1,U
Z=0
L=0
S=0
AM=0
BM=0
NS=0
FM=0
PM=0
Z=Z+(M*P1*Y)/A
L=L+(M*P1*B)/(2*A)
S=S+(NU/(1-NU))/((3+NU)*SINH(L)*COSH(L)-(1-NU)*L)
AM=AM+S*((1+NU)*SINH(L)-(1-NU)*L*COSH(L))
#####
```

A - 6 -

```

PM=PM+(2*CU/(M*P1))*(COS(M*P1*X1/A)-COS(M*P1*X2/A))
NS=(A/(M*P1))**4
FM=FM+PM*NS*(1+AM*COSH(Z)+BM*Z*SINH(Z))
W1(R)=W1(R)-(FM*SIN(M*P1*X/A))/D
N1(R)=N1(R)+SIN(M*P1*X/A)*(1+AM*COSH(L)+BM*L*SINH(L))*PM*NS**(0.5)
30 CONTINUE
M1(R)=N1(R)*(1-NU)**2
W(R)=W1(R)
234 WRITE(17,234)R,W(R)
FORMAT(2X,'W(',I3,')='E30.20)
20 PRINT*,'W(',R,')=(CM)',W(R),'M1(',R,')=(KGCM)',M1(R)
10 CONTINUE
CONTINUE
STOP
END

```



RESULTATS DONNEES PAR MDF DANS LE CAS D'UNE DALLE

APPUYEE SUR DEUX COTES

DIMENSION: .LARGEUR =250[CM]  
 LONGUEUR=350[CM]  
 EPAISSEUR=20[CM]  
 CHARGE UNIFORME=C.5[KG/CM2]  
 MODULE DE YONG =200000[KG/CM2]  
 COEFFICIENT DE POISSON=0.1  
 NOMBRE DE NOEUDS=36  
 LE PAS UTILISE=50[CM]

VFG( 1)= -0.32484463817710876465E+00  
 VFG( 2)= -0.58007979393005371094E+00  
 VFG( 3)= -0.71929889917373657227E+00  
 VFG( 4)= -0.71929889917373657227E+00  
 VFG( 5)= -0.58007973432540893555E+00  
 VFG( 6)= -0.32484462857246398926E+00  
 VFG( 7)= -0.32484465837478637695E+00  
 VFG( 8)= -0.58007961511611938477E+00  
 VFG( 9)= -0.71929860115051269531E+00  
 VFG( 10)= -0.71929866075515747070E+00  
 VFG( 11)= -0.58007961511611938477E+00  
 VFG( 12)= -0.32484459877014160156E+00  
 VFG( 13)= -0.32484468817710876465E+00  
 VFG( 14)= -0.58007955551147460938E+00  
 VFG( 15)= -0.71929836273193359375E+00  
 VFG( 16)= -0.71929836273193359375E+00  
 VFG( 17)= -0.58007931709289550781E+00  
 VFG( 18)= -0.32484441995620727539E+00  
 VFG( 19)= -0.32484471797943115234E+00  
 VFG( 20)= -0.58007961511611938477E+00  
 VFG( 21)= -0.71929830312728861836E+00  
 VFG( 22)= -0.71929824352264404297E+00  
 VFG( 23)= -0.58007913827896118164E+00  
 VFG( 24)= -0.32484430074691772461E+00  
 VFG( 25)= -0.32484456896781921387E+00  
 VFG( 26)= -0.58007949590682983398E+00  
 VFG( 27)= -0.71929824352264404297E+00  
 VFG( 28)= -0.71929812431335449219E+00  
 VFG( 29)= -0.58007919788360595703E+00  
 VFG( 30)= -0.32484433054924011230E+00  
 VFG( 31)= -0.32484463817710876465E+00  
 VFG( 32)= -0.58007979393005371094E+00  
 VFG( 33)= -0.71929889917373657227E+00  
 VFG( 34)= -0.71929889917373657227E+00  
 VFG( 35)= -0.58007973432540893555E+00  
 VFG( 36)= -0.32484462857246398926E+00

RESULTATS DONNES PAR LA METHODE DE  
MAURICE LEVY D'UNE DALLE APPUYEE  
SUR DEUX CÔTES

$\nu = 0,1$

$E = 200000 \text{ [kg/cm}^2\text{]}$ . largeur : 250 [cm] ; epaisseur : 20 [cm]  
longueur : 350 [cm] ; charge uniforme = 0,5 kg/cm<sup>2</sup>

W( 1) =	-0.33042195439338684082E+00
W( 2) =	-0.59058499336242675781E+00
W( 3) =	-0.73264724016189575195E+00
W( 4) =	-0.73264724016189575195E+00
W( 5) =	-0.59058487415313720703E+00
W( 6) =	-0.33042183518409729004E+00
W( 7) =	-0.32179513573646545410E+00
W( 8) =	-0.57532769441604614258E+00
W( 9) =	-0.71383386850357055664E+00
W( 10) =	-0.71383386850357055664E+00
W( 11) =	-0.57532757520675659180E+00
W( 12) =	-0.32179501652717590332E+00
W( 13) =	-0.31828922033309936523E+00
W( 14) =	-0.56903666257858276367E+00
W( 15) =	-0.70601493120193481445E+00
W( 16) =	-0.70601493120193481445E+00
W( 17) =	-0.56903654336929321289E+00
W( 18) =	-0.31828913092613220215E+00
W( 19) =	-0.31828922033309936523E+00
W( 20) =	-0.56903666257858276367E+00
W( 21) =	-0.70601493120193481445E+00
W( 22) =	-0.70601493120193481445E+00
W( 23) =	-0.56903654336929321289E+00
W( 24) =	-0.31828913092613220215E+00
W( 25) =	-0.32179513573646545410E+00
W( 26) =	-0.57532769441604614258E+00
W( 27) =	-0.71383386850357055664E+00
W( 28) =	-0.71383386850357055664E+00
W( 29) =	-0.57532757520675659180E+00
W( 30) =	-0.32179501652717590332E+00
W( 31) =	-0.330421554(2)333684082E+00
W( 32) =	-0.59058499336242675781E+00
W( 33) =	-0.73264724016189575195E+00
W( 34) =	-0.73264724016189575195E+00
W( 35) =	-0.59058487415313720703E+00
W( 36) =	-0.33042183518409729004E+00

Le pas utilise = 50 cm.



PROGRAMME DE RESOLUTION DE  $A(I, J) \times (W) = B(I)$

CAS D'UNE DALLE APPUYEE SUR TROIS COTES

```

DIMENSION Z1(3),Z2(4),Z3(5),Z4(4),Z5(3),C1(5),
1 C2(5),C3(5),C4(5),C5(5),C6(5),C7(5),C8(5),C9(5),C17(3),
1 C10(5),G1(2),G2(3),G5(3),D1(3),D2(3),D5(3),D11(3),D15(2)
COMMON VKG(750,750),VFG(750)
DATA Z1/5,-4,1/,Z2/-4,6,-4,1/,Z3/1,-4,6,-4,1/
DATA Z4/1,-4,6,-4/,Z5/1,-4,5/,C17/1,-8,18/
DATA C1/0,0,18,-8,1/,C2/0,-8,19,-8,1/,C3/1,-8,19,-8,1/
DATA C4/1,-8,19,-8,0/,C5/1,-8,18,0,0/,C6/0,0,19,-8,1/
DATA C7/0,-8,20,-8,1/,C8/1,-8,20,-8,1/,C9/1,-8,20,-8,0/
DATA C10/1,-8,19,0,0/,G1/-6,2/,G2/2,-6,2/,G5/2,-6,0/
DATA D1/0,-8,2/,D2/2,-8,2/,D5/2,-8,0/,D11/0,-6,2/,D15/2,-6/
COMMON /ZONE/A(750,750),B(750)

```

PRINT\*, 'DONNER LA LARGEUR DE LA DALLE X5'

ACCEPT\*, X5

PRINT\*, 'DONNER LA LONGUEUR DE LA DALLE Y5'

ACCEPT\*, Y5

PRINT\*, 'LE PAS H='

ACCEPT\*, H

M=X5/H

N=Y5/H-1

PRINT\*, 'NOMBRE DE NOEUDS S/X', N

PRINT\*, 'NOMBRE DE NOEUDS S/Y', M

NEQ=M\*N

PRINT\*, 'NBRE D EQUATION NEQ=', NEQ

PRINT\*, 'MODULE DE YOUNG E='

ACCEPT\*, E

PRINT\*, 'EPAISSEUR DE LA DALLE EP='

ACCEPT\*, EP

PRINT\*, 'COEFFICIENT DE POISSON TNU='

ACCEPT\*, TNU

D=E\*(EP\*\*3)/((1-TNU\*\*2)\*12)

PRINT\*, 'REGIDITE DE LA PLAQUE A LA FLEXION D=', D

-----INTRODUCTION DU VECTEUR B(I)-----

PRINT\*, 'DONNER LA VALEUR CHARGE P(X,Y)='

ACCEPT\*, CH

DD=-(CH/D)\*H\*\*4

DO 13 I=1,NEQ

B(I)=DD

CONTINUE

-----CALCUL-----

DO 1 I=1,NEQ

IF(I.EQ.1)THEN

CALL SUB(I,I,I+2,Z1,3)

ENDIF

IF(I.EQ.2)THEN

CALL SUB(I,I-1,I+2,Z2,4)

ENDIF

IF(I.GE.3.AND.I.LE.(N-2))THEN

CALL SUB(I,I-2,I+2,Z3,5)

ENDIF

IF(I.EQ.(N-1))THEN

```

IF(I.EQ.N)THEN
CALL SUB(I,I-2,I,Z5,3)
ENDIF
IF(I.EQ.(N+1))THEN
CALL CUB(I,C1,5,G1,2,D1,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.(N+2))THEN
CALL CUB(I,C2,5,G2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.GE.(N+3).AND.I.LE.(2*N-2))THEN
CALL CUB(I,C3,5,G2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.(2*N-1))THEN
CALL CUB(I,C4,5,G2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.2*N)THEN
CALL CUB(I,C5,5,G5,3,D5,3,M,N)
ENDIF
DO 2 S=2,M-3
IF(I.EQ.(S*N+1))THEN
CALL CUB(I,C6,5,D1,3,D1,3,M,N)
ENDIF
CONTINUE
DO 100 P=2,M-3
IF(I.EQ.(P*N+2))THEN
CALL CUB(I,C7,5,D2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
CONTINUE
DO 101 K=2,M-3
IF(I.LE.((K+1)*N-2).AND.I.GE.((K*N)+3))THEN
CALL CUB(I,C8,5,D2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
CONTINUE
DO 3 LL=3,M-2
IF(I.EQ.(LL*N-1))THEN
CALL CUB(I,C9,5,D2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
CONTINUE
DO 102 Q=3,M-2
IF(I.EQ.(Q*N))THEN
CALL CUB(I,C10,5,D5,3,D5,3,M,N)
ENDIF
CONTINUE
IF(I.EQ.((M-2)*N+1))THEN
CALL CUB(I,C6,5,D1,3,D1,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.((M-2)*N+2))THEN
CALL CUB(I,C7,5,D2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.LE.((M-1)*N-2).AND.I.GE.((M-2)*N+3))THEN
CALL CUB(I,C8,5,D2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.((M-1)*N-1))THEN
CALL CUB(I,C9,5,D2,3,D2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.((M-1)*N))THEN
CALL CUB(I,C10,5,D5,3,D5,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.((M-1)*N+1))THEN
CALL DUB(I,C1,5,D1,3,M,N)
ENDIF

```

B -2-



```

CALL DUB(I,C2,5,D2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.LE.(NEQ-2).AND.I.GE.((M-1)*N+3))THEN
CALL DUB(I,C3,5,D2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.(NEQ-1))THEN
CALL DUB(I,C4,5,D2,3,M,N)
ENDIF
IF(I.EQ.(NEQ))THEN
CALL DUB(I,C17,3,D5,3,M,N)
ENDIF
1 CONTINUE
C #####
DO 31 I=1,NEQ
DO 31 J=1,NEQ
31 VKG(I,J)=A(I,J)
VFG(I)=B(I)
NSYM=1
CALL RESCL(NSYM,NEQ)
DO 151 I=1,NEQ
114 WRITE(15,114)I,VFG(I)
FORMAT(10X,('VFG(',I3,')='E30.20,3X))
PRINT*,'VFG(',I,')=',VFG(I)
151 CONTINUE

IM=0
PP=(M-1)*H
PM=N*H
C OPEN FILE=FORO14
C WRITE(14,282)H
C DO 91 X=0,PP,H
C DO 91 Y=H,PM,H
C IM=IM+1
C WRITE(14,601)IM,X,Y,VFG(IM)
C601 FORMAT(1X,3H I=,I3,3X,'W(',I3,I3,')='E30.20,3X)
C91 CONTINUE
C282 FORMAT(1X,30HMETHODE DES DIFFERENCES FINIES//27X,'PAS UTILISE'F5.
STOP
END
B - 3 -
SUBROUTINE CUB(I,SEC,LDIM,SEG,KDIM,SED,MDIM,M,N)
DIMENSION SEC(5),SEG(3),SED(3)
COMMON/ZONE/ A(750,750),B(750)
IC=1
DO 2 LC=I-2,I+2
A(I,LC)=SEC(IC)
IC=IC+1
2 CONTINUE
IG=1
DO 3 LG=I-N-1,I-N+1
IF(LG.LE.0) GO TO 3
A(I,LG)=SEG(IG)
IG=IG+1
3 CONTINUE
LI=1
DO 4 LD=I+N-1,I+N+1
IF(LD.GT.M*N) GO TO 4
A(I,LD)=SED(LI)
LI=LI+1
4 CONTINUE
LGG=I-2*N
IF(LGG.GT.0) THEN
A(I,LGG)=1

```

```

LDD=I+2*N
IF(LDD.LE.M*N) THEN
A(I,LDD)=1
ENDIF
RETURN
END
SUBROUTINE DUB(I,SEC,LDIM,SEG,KDIM,M,N)
DIMENSION SEC(5),SEG(3)
COMMON/ZONE/ A(750,750),B(750)
IC=1
DO 2 LC=I-2,I+2
A(I,LC)=SEC(IC)
IC=IC+1
CONTINUE
IG=1
DO 3 LG=I-N-1,I-N+1
IF(LG.LE.0) GO TO 3
A(I,LG)=SEG(IG)
IG=IG+1
CONTINUE
LGG=I-2*N
IF(LGG.GT.0) THEN
A(I,LGG)=1
ENDIF
RETURN
END

```

```

#####
SUBROUTINE SUB(I,J,K,VEC,IDIM)
#####
DIMENSION VEC(IDIM)
COMMON/ZONE/A(750,750),B(750)
ID=1
DO 2 L=J,K
A(I,L)=VEC(ID)
ID=ID+1
CONTINUE
RETURN
END
#####
SUBROUTINE RESOL(NSYM,NEQ)

```

```

=====
RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS NON SYMETRIQUE PAR LA
METHODE DE GAUSS

ENTREES
NSYM      .EQ.1   SYSTEME NON SYMETRIQUE
NEQ       NOMBRE D'EQUATIONS (.GE.2)
VKG       MATRICE K STOCKEE DANS UNE TABLE A 2 DIMENSIONS
VFG       SECOND MEMBRE

SORTIE
VFG       SOLUTION

```

```

=====
-----TRIANGULARISATION-----
COMMON VKG(750,750),VFG(750)
ZERO=0
N1=NEQ-1
DO 50 IS=1,N1
PIV=VKG(IS,IS)
IF(PIV)20,10,20

```

```

2000  FORMAT(' PIVOT NUL,EQUATION',I5)
      STOP
20    IS1=IS+1          B - 5 -
      DO 50 II=IS1,NEQ
      CL=VKG(II,IS)/PIV
      IF(CL.EQ.ZERO) GO TO 50
      VFG(II)=VFG(II)-CL*VFG(IS)
      IF(NSYM.NE.1) GO TO 32
      DO 30 IJ=IS1,NEQ
30    VKG(II,IJ)=VKG(II,IJ)-CL*VKG(IS,IJ)
      GO TO 50
32    DO 40 IJ=II,NEQ
      VKG(II,IJ)=VKG(II,IJ)-CL*VKG(IS,IJ)
40    VKG(IJ,II)=VKG(II,IJ)
50    CONTINUE
C      RESOLUSION DU SYSTEME TRIANGULAIRE
      VFG(NEQ)=VFG(NEQ)/VKG(NEQ,NEQ)
      DO 70 II=1,N1
      IS1=IS1-1
      CL=ZERO
      IJ1=IS1+1
      DO 60 IJ=IJ1,NEQ
60    CL=CL+VKG(IS1,IJ)*VFG(IJ)
70    VFG(IS1)=(VFG(IS1)-CL)/VKG(IS1,IS1)
      RETURN
      END

```





```

ANS=0
Z=Z+(M*P1*Y)/A
L=L+(M*P1*B)/A
S=S+(3+NU)*SINH(L)*CCOSH(L)+(1-NU)*L
FG=FG+NU*(1+NU)*(COSH(L)-1)-((1-NU)*L)**2/2
RG=RG+(3+NU)*(1-NU)*SINH(L)**2-NU*(1-NU)*L*SINH(L)
CM=CM+(FG+RG)/S
DM=DM+(NU*(COSH(L)-1)-(3+NU)*SINH(L)**2/2)/S
PM=PM+((2*CU)/(M*P1))*(COS(M*P1*X1/A)-COS(M*P1*X2/A))
ANS=(A/(M*P1))**4
FM=FM+PM*ANS*(1-COSH(Z)+Z*SINH(Z)/2+CM*SINH(Z)+DM*Z*COSH(Z))
W1(R)=W1(R)-FM*SIN(M*P1*X/A)/D
T=CM*SINH(L)
C=DM*L*COSH(L)
N1(R)=N1(R)+SIN(M*P1*X/A)*(1+AM*COSH(L)+BM*L*SINH(L)+T+O)*PM*ANS*
30 CONTINUE
M1(R)=N1(R)*(1-NU**2)
W(R)=W1(R)
WRITE(16,245)R,W(R)
245 FORMAT(2X,'W(',I3,')='E30.20)
PRINT*,'W(',R,')=(CM)',W(R),'M1(',R,')=(KGCM)',M1(R)
20 CONTINUE
10 CONTINUE
STOP
END

```

C\*\*\*\*\*

C PROGRAMME DE COMPARAISON ENTRE LES VALEURS DONNEES  
C PAR MDDP ET M.LEVY  
C

C=====

```

DIMENSION VFG(750),W(750),A(750)
PRINT*, 'DONNER LE NOMBRES D EQUATIONS '
ACCEPT*,NEQ
PRINT*, ' VOULEZ VOUS FAIRE LA DIVISION OU LA DIFFERENCE'
1 W(I) PAR VFG(I) ?'
PRINT*, '
PRINT*, ' SI VOUS VOULEZ LA DIFFERENCE TAPEZ SUR 1'
PRINT*, '
PRINT*, ' SI VOUS VOULEZ LE RAPPORT TAPEZ SUR 2'
PRINT*, '
ACCEPT*,ICODE
IF(ICODE.EQ.2) GO TO 35
DO 10 I=1,NEQ
100 READ(14,100) VFG(I)
110 FORMAT(22X,E30.20)
110 FORMAT(12X,E30.20)
READ(17,110) W(I)
A(I)= VFG(I)-W(I)
WRITE(10,120) I,A(I)
PRINT*, 'A(',I,')=' ,A(I)
120 FORMAT(20X, 'LA COMPARAISONT EST FAITE PAR LA DIFFERENCE'
1 VFG(I)-W(I)')
1 20X, '-----'
1 '-----'
1 10X, 'A(',I3,')=' ,F15.12)
10 CONTINUE
GOTO 40
35 DO 15 I=1,NEQ
READ(14,100) VFG(I)
READ(17,110) W(I)
A(I)= VFG(I)/W(I)
WRITE(10,130)
130 FORMAT(10X, 'LA COMPARAISON A ETE FAITE DANS C. PAR LE RAP
1 RAPPORT DE VFG(I) PAR W(I)')
1 10X, '-----'
1 '-----')
WRITE(10,121) I,A(I)
121 FORMAT(10X, 'A(',I3,')=' ,F15.12)
PRINT*, 'A(',I,')=' ,A(I)
15 CONTINUE
40 STOP
END

```

# BIBLIOGRAPHIE

**P**LAQUES MINCES ELASTIQUES DE JEAN COURBON  
(EDITION EYROLLES)

**M**ETHODES DE CALCUL NUMERIQUE EN ELASTICITE  
(CHEC)

**R**EPRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS  
FINIS (EDITION EYROLLES)

