

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

38/87

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

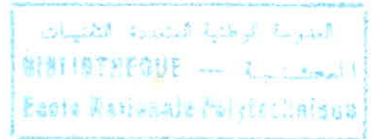
«0»

2/ ex

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

«0»



## PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE D'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

SUJET

### **Mise au point d'un Logiciel de Calcul des Structures Treillis Hyperstatiques**

Proposé par :

Mr A. BELARBI

Etudié par :

D. AMEUR Bouzid

H. NAIT Kaci

Dirigé par :

Mr A. BELARBI

PROMOTION : JUIN 1987



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

— «0» —

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

— «0» —



## PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE D'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

### SUJET

# Mise au point d'un Logiciel de Calcul des Structures Treillis Hyperstatiques

Proposé par :

Mr A. BELARBI

Etudié par :

D. AMEUR Bouzid

H. NAIT Kaci

Dirigé par :

Mr A. BELARBI

PROMOTION : JUIN 1987



## REMERCIEMENTS



Nous tenons à remercier notre promoteur M<sup>r</sup> Belarbi- Amar qui nous a été d'une aide appréciable. Nous remercions également M<sup>r</sup> DEMIDEM- Mustopha pour ses précieux conseils, ainsi que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.

## DEDICACES

A Nos parents.  
A Nos frères et sœurs.  
A Nos Amis.

# SOMMAIRE

## CHAPITRE 1 :

I-1: Historique	1
I-2: Introduction	2
I-3: Présentation du sujet	3

## CHAPITRE 2 :

II-1: Généralités sur les treillis	5
II-2: Méthode de calcul des structures	6
II-2-1: Méthode matricielle des déplacements	9
II-2-2: Principe de la méthode des déplacements	11

## CHAPITRE 3 :

III-1: Paramètres définissant les structures treillis	14
III-2: Organigramme général d'analyse hyperstatique des structures planes et spatiales	16
III-3: Construction de la matrice de rigidité élémentaire	21

III-4 :	Assemblage	30
III-5 :	Conditions aux Limites	34
III-5-1 :	Appuis élastiques	36
III-6 :	Charges agissant sur les structures	37
III-7 :	Résolution du système Linéaire	40
III-8 :	Lignes d'influence	49

## CHAPITRE 4 :

Calcul dynamique	51
------------------	----

## CHAPITRE 5 :

Programmation	55
Exemples de Calcul des structures treillis	73
Conclusion	77
Bibliographie	

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# CHAPITRE PREMIER



## I-1 Historique

La période de 1850 à 1875 constitue le point de départ logique de notre historique, bien qu'elle soit précédée des grands accomplissements, de l'école des élasticiens Français (citons Navier, Saint-Venant etc...)

Grâce aux travaux de Maxwell, Castiglione, Mohr, et d'autres, Les premières notions d'analyse des structures composées d'assemblages des barres naquirent, Ces notions représentent la pierre angulaire de la méthodologie pré-sidente à l'analyse matricielle des structures qui ne prit forme que 30 ans plus tard et sur laquelle repose l'analyse par éléments finis. Cette dernière constitue une approche du problème de l'analyse dont le développement, bien que très rapide est relativement récent.

L'idée de base de cette méthode lorsqu'elle est appliquée à des problèmes d'analyse des structures est la suivante:

On peut représenter de manière analytique un milieu continu en le subdivisant en domaines - éléments finis - possédant chacun ses propres fonctions pour décrire contraintes et déplacements.

## I-2 Introduction

Un grand nombre de structures utilisées par les ingénieurs sont composées d'une réunion de parties indépendantes reliées entre elles par des points. Ces structures sont appelées "structures treillis" et ces points "nœuds".

Les chercheurs se sont rendu compte depuis longtemps que l'analyse des structures peut s'effectuer en considérant d'abord le comportement de chaque partie indépendante, puis en assemblant ces parties de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

Cependant, quand on doit étudier une structure composée d'un grand nombre de parties, comme une poutre continue, ou un cadre comportant un grand nombre de travées, ces méthodes d'approche peuvent devenir très laborieuses, et entraîner la résolution des systèmes comportant un très grand nombre d'équations.

C'est pourquoi beaucoup d'efforts et de recherche ont été consacrés par le passé au développement de techniques basées sur une appréciation physique du comportement de la structure de façon à réduire la somme de travail requis pour une étude complète en évitant ainsi de résoudre un grand nombre d'équations.

### I-3 Présentation du sujet

L'évolution de l'informatique conduit naturellement à l'utilisation de l'ordinateur pour la résolution des problèmes de la résistance des matériaux.

Cette étude a pour objectif:

- Rappeler quelques résultats pragmatiques concernant les structures sans revenir sur les théories de bases qui sont exposées dans nombreux ouvrages.
- Présenter les modules de calcul correspondants dans un langage facilement adaptable aux différents micro-ordinateurs. C'est aussi une initiation au calcul automatique des structures treillis, discipline qui a eu essor particulier dans les dernières décennies et qui est au confluent de la R.D.M., de l'analyse numérique et de l'informatique.

Le développement de l'informatique a rendu possible la résolution des problèmes qui nécessitaient auparavant des moyens puissants et c'est ainsi que le calcul des structures va se vulgariser.

Notre programme d'analyse des structures à treillis hyperstatiques a été établi en langage FORTRAN.

Il permet:

- D'analyser les structures à treillis hyperstatiques planes,

et spatiales.

Cette analyse comprend :

- Une étude statique ; autrement dit étude du problème d'équilibre.
- Détermination des lignes d'influence.
- un calcul dynamique.

Ces deux derniers points concernent les structures planes.

# **CHAPITRE DEUXIEME**

## II.1 Généralités sur les treillis

Les treillis sont des structures constituées par plusieurs barres (en acier, en bois) assemblées entre elles, de manière à former un ensemble indéformable (en faisant abstraction des déformations élastiques). Les différentes barres qui concourent à chaque nœud sont articulées entre-elles.

Les forces extérieures sont appliquées aux nœuds, tandis que les barres sont soumises seulement à leurs poids propre. Dans ces conditions les barres sont sollicitées presque exclusivement par un effort normal de traction, ou de compression, car les moments fléchissants dus aux poids propre des barres sont insignifiants.

Les différentes parties du treillis, travaillent donc, dans les meilleures conditions, ce qui permet de réduire, au minimum, les sections résistantes et le matériau employé.

Les structures treillis permettent donc de réaliser avec une économie considérable, des constructions légères et de dimensions cependant gigantesques.

## II-2 Méthode de Calcul des Structures

Connaissances nécessaires :

Quelle que soit l'origine des forces et des déformations internes dans une structure, trois conditions doivent être vérifiées :

- 1°) l'équilibre des forces.
- 2°) la compatibilité des déplacements.
- 3°) Les lois de comportement des matériaux.

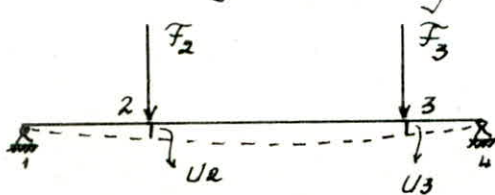
Trois méthodes de Calcul peuvent se présenter :

- 1°) Méthode de rigidité ou des déplacements.
- 2°) Méthode de souplesse ou des forces.
- 3°) Méthode mixte.

Matrice de flexibilité et matrice de rigidité :

On considère une structure élastique dont les nœuds "i" sont soumis à des forces  $F_i$  et subissent les déplacements  $U_i$ ; donc chaque déplacement  $U_i$  est causé par la force  $F_i$ . Puisque la structure est régie par la loi du domaine élastique le déplacement est proportionnel à la force correspondante.

Soit l'exemple de la poutre suivante :



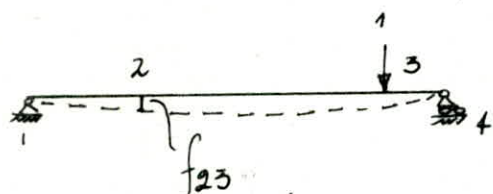
$$U_2 = f_{22} F_2 + f_{23} F_3$$

On peut écrire  $U_i = \sum_j \bar{L}_{ij} f_{ij} F_j$   
 et sous la forme matricielle :

$$\{U\} = [f] \{F\}$$

La matrice  $[f]$  est la matrice de flexibilité de la structure et ses termes  $f_{ij}$  sont les coefficients d'influence de flexibilité.

Soit l'exemple précédent avec  $F_3 \neq 0$  et toutes les autres forces appliquées sont nulles :



$$U_2 = f_{23} F_3 \quad \text{si } F_3 = 1 \Rightarrow U_2 = f_{23}$$

On peut dire donc que  $f_{23}$  est le déplacement du point 2 dû à une force unité appliquée au point 3.

La généralisation est immédiate :

$f_{ij}$  est le déplacement du point "i" dû à une force unité appliquée au point "j".

On peut traiter le problème inverse en posant l'équation suivante :

$$\{F\} = [k]^{-1} \{U\}$$

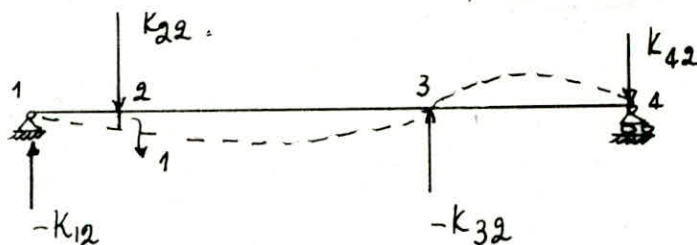
Alors on pose  $[k] = [f]^{-1}$   $[k]$  : s'appelle matrice de rigidité.

Les termes  $k_{ij}$  sont les coefficients d'influence de rigidité.



donc  $F_i = \sum_j K_{ij} u_j$

soit l'exemple de la poutre suivante:



$$F_1 = K_{11} U_1 + K_{12} U_2 + K_{13} U_3 + K_{14} U_4.$$

$$F_2 = K_{21} U_1 + K_{22} U_2 + K_{23} U_3 + K_{24} U_4$$

Si on impose un déplacement  $u_2=1$  et tous les autres déplacements sont nuls on aura :  $F_i = K_{i2}$

On peut dire donc que :

$K_{ij}$  est la force au point "i" due à un déplacement unité au point "j".

## II-2-1 Méthode matricielle des déplacements

On peut distinguer deux classes de méthodes matricielles :

- Méthode des forces dans laquelle les paramètres inconnus sont les contraintes ou les forces résultantes dans les éléments.
- Méthode des déplacements dans laquelle les paramètres inconnus sont les déplacements des noeuds.

Lorsqu'on utilise ces techniques matricielles, on est amené successivement à s'intéresser à deux niveaux de formulation

- La formulation élémentaire : au niveau de l'élément.
- La formulation globale : au niveau de la structure complète.

Ces méthodes matricielles peuvent facilement être systématisées et donc programmées sur ordinateur. On remarque néanmoins que la méthode des forces nécessite un choix préalable (et non automatique) d'inconnues hyperstatiques en fonction de la topologie de la structure, et des cas de charges appliquées.

Ceci limite sérieusement le domaine d'application de la méthode des forces à des structures relativement simples.

La méthode des forces est aujourd'hui pratiquement abandonnée pour la résolution des problèmes relatifs aux structures complexes ; parce que d'une part son efficacité <sup>numérique</sup> est moindre en comparaison avec celle de la méthode des déplacements ; d'autre part la méthode des déplacements est plus universelle en permettant plus aisément la résolution des problèmes dynamiques et non linéaires.

## II-2-2 Principe de la méthode des déplacements

Le problème de la mécanique des solides est équivalent à celui de la recherche de l'extrémum d'une fonctionnelle : l'énergie potentielle totale.

On peut mettre en évidence les différentes étapes :

- Formulation élémentaire : Calcul des matrices de rigidités élémentaires.

- Formulation globale : assemblage des matrices de rigidités de manière à satisfaire les équations d'équilibre des noeuds.

- Prise en compte des conditions des déplacements nuls ou imposés.
- Résolution des systèmes linéaire dont les inconnus sont les déplacements.
- Calcul des efforts dans les éléments.

a) La formulation élémentaire consiste à rechercher pour chaque élément les expressions matricielles des énergies (de déformation et cinétique) et du travail des forces appliquées en fonction des inconnues élémentaires, ici les déplacements des noeuds de l'élément. Ceci nécessite le calcul des matrices

Caractéristiques de l'élément : matrice de rigidité, de masse  
vecteur des forces équivalentes.

On a par exemple dans le cas de l'analyse statique, les expressions suivantes en fonction du vecteur  $X^e$  des déplacements des nœuds de l'élément :

$$\text{Énergie de déformation : } U^e = \frac{1}{2} X^{eT} K^e X^e$$

$$\text{Travail des forces appliquées : } \mathcal{C}^e = X^{eT} F^e$$

Avec :  $K^e$  : matrice de rigidité élémentaire.

$F^e$  : Vecteur des forces équivalentes élémentaires.

b) La formulation globale consiste à rechercher pour la structure complète l'expression matricielle des énergies et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements inconnus en tous les nœuds de la structure ; cela nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaires pour tous les éléments.

Si les forces sont appliquées statiquement on aura :

$$U = \frac{1}{2} X^T K X$$

$$\mathcal{C} = X^T F$$

$K$  : matrice de rigidité de la structure complète.

$F$  : vecteur des forces pour la structure complète.

Ces expressions permettent d'obtenir par application directe du principe des travaux virtuels, le système des équations d'équilibre des noeuds.

en effet on a:  $\partial U = \partial \bar{C}$   $\forall \partial X \neq 0$   
 $\partial X^T \cdot K \cdot X = \partial X^T \cdot F$

d'où  $[F] = [K] \cdot [X]$ .

La résolution de ce système linéaire des équations, d'équilibre permet de déterminer le vecteur  $X$  des déplacements inconnus.

Donc ; on appelle matrice de rigidité d'une structure, la matrice  $K$  permettant d'exprimer l'énergie de déformation sous une forme quadratique des déplacements.

$$U = \frac{1}{2} X^T \cdot K \cdot X.$$

Le théorème de Maxwell-Betti montre que  $K$  est symétrique.

# **CHAPITRE TROISIEME**

### III-1 Paramètres définissant les structures treillis

Une structure treillis se compose d'un ensemble de barres, pour repérer le début et la fin de ces barres, on est amené à définir les noeuds.

Le noeud: c'est un point particulier de l'espace auquel concourent deux ou plusieurs barres: ce sera au noeud que nous calculerons les déplacements.

Les liaisons avec le milieu extérieur se feront par l'intermédiaire des noeuds.

Ces noeuds seront définis par leur coordonnées:

$x, y$  cas d'une structure plane.

$x, y, z$  cas d'une structure spatiale.

La barre: elle représente l'élément essentiel de la structure treillis, elle est délimitée par deux noeuds: l'origine (ou début) et l'extrémité (ou fin), qui représentent la position du début et de la fin de la fibre neutre de la barre, cette dernière sera considérée droite et de dimensions constantes. Nous aurons besoin de connaître pour chaque barre son noeud de début, son noeud de fin, la section, la longueur, ainsi que le matériau avec lequel la barre est constituée.



Les appuis : ce sont des liaisons de la structure avec le milieu extérieur, dont on connaît certains déplacements. Ces déplacements peuvent être nuls ou ont des valeurs, imposées.

Les degrés de liberté de chaque sont spécifiés par un code: 'ISUP'.

Nous avons choisi le code suivant:

- 1 si le déplacement est bloqué (degré de liberté éliminé).
- 0 si le déplacement est libre.

Ces appuis sont supposés assurer la stabilité de la structure vis à vis de tout chargement.

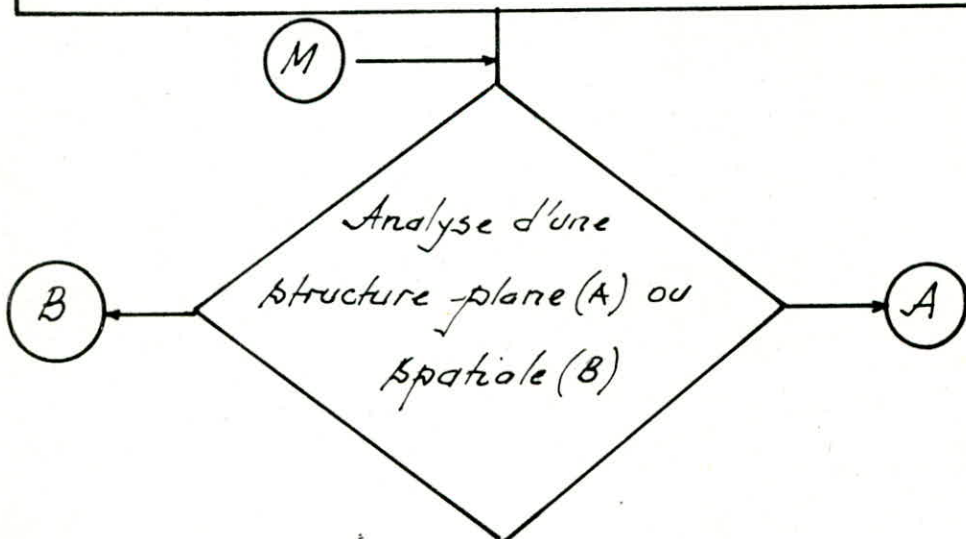
On peut formuler l'analyse des structures à treillis hyperstatiques par la méthode des déplacements dans les étapes suivantes:

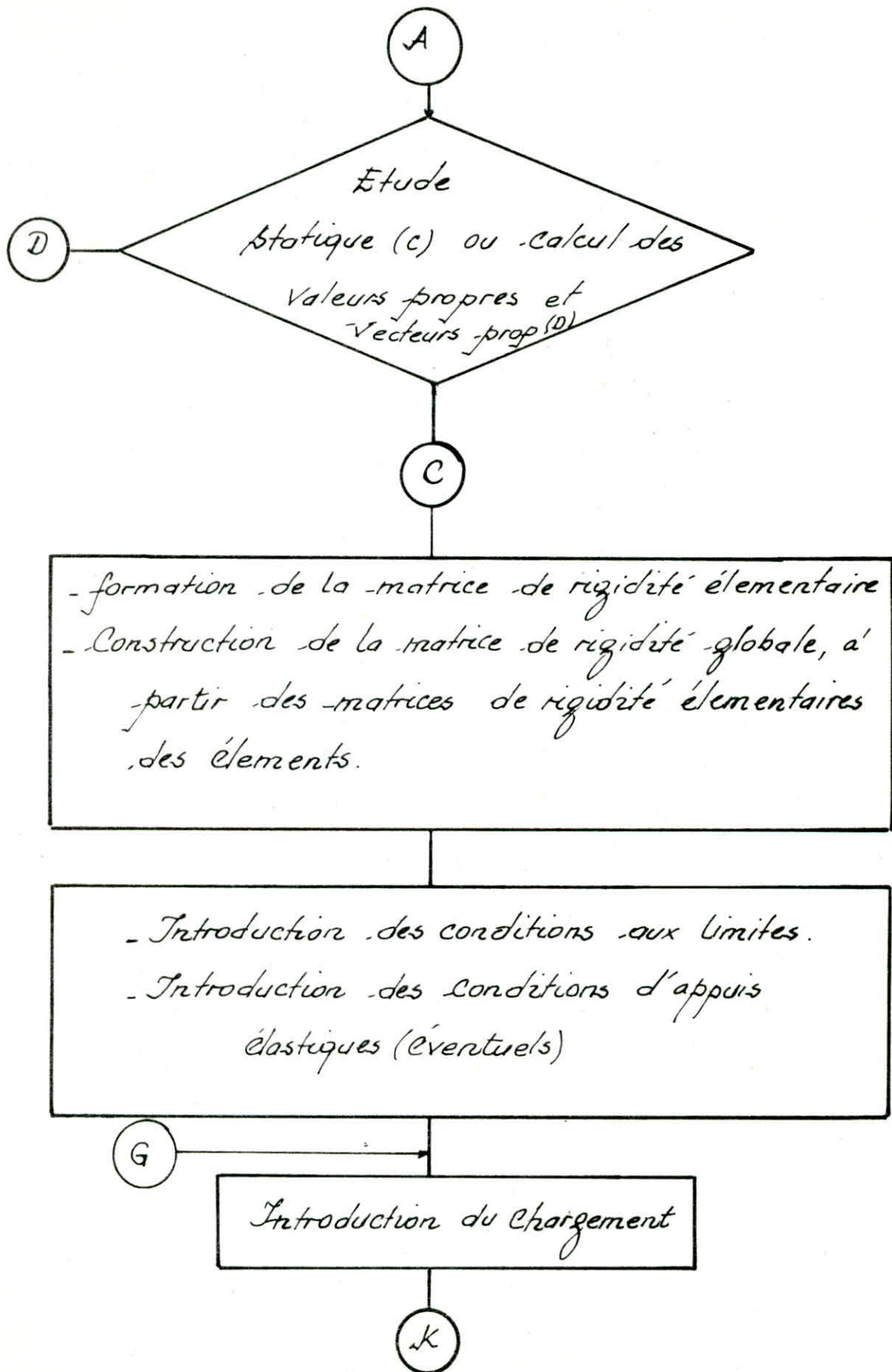
- Former les matrices de rigidité des éléments  $[k^e]$
- Assembler la matrice de rigidité de la structure  $[K]$  à partir des matrices de rigidité des éléments.
- Appliquer les conditions aux limites.
- Obtenir les déplacements.
- Utiliser les relations entre forces et déplacements pour obtenir les efforts dans les éléments.

L'organigramme général du programme est donné ci-après.

Début

- Lecture du type de la structure : plane ou spatiale
- Lecture des données relatives à la structure.
  - . Degré de liberté
  - . Nombre de Nœuds
  - . Nombre de barres.
- Lecture des propriétés physiques et mécaniques.
  - . Masse
  - . Modules d'élasticité.
- Lecture des coordonnées des nœuds.
- Lecture des sections des barres.



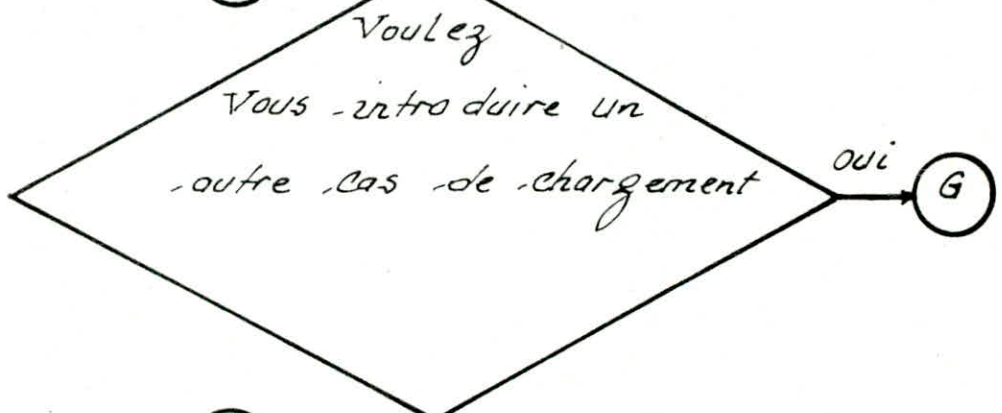


K

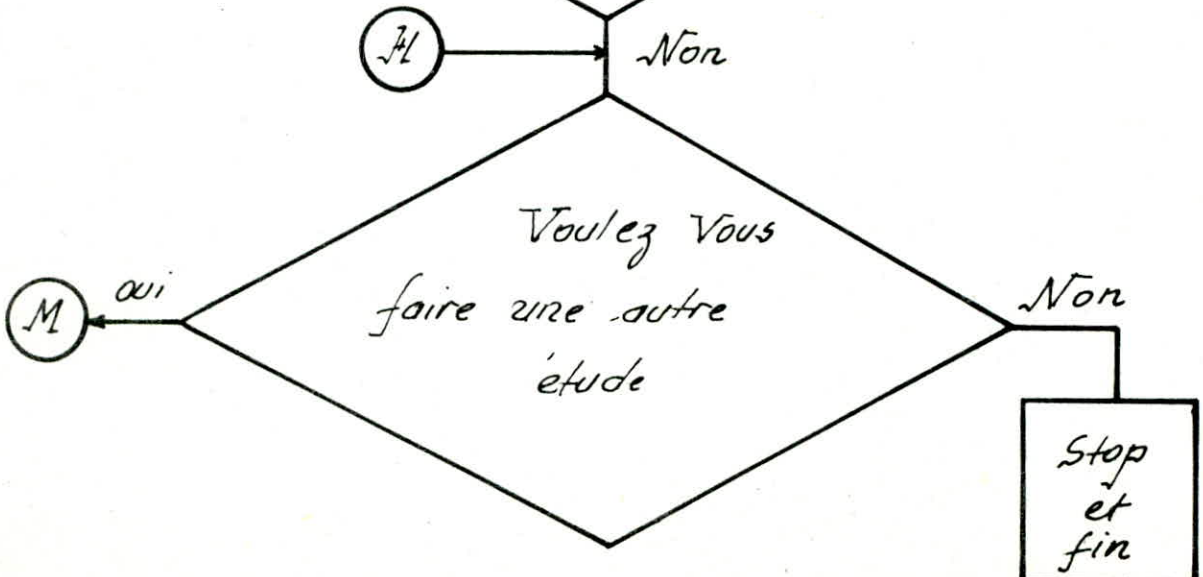
Résolution du système linéaire  
 $K \cdot U = \tilde{F}$   
Détermination de U.

calcul des réactions d'appuis et des efforts dans les barres.

B



H



D

formation de la matrice de rigidité globale

- Construction de la matrice de masse élémentaire
- Placer la matrice de masse élémentaire dans la matrice de masse globale
- Obtention de la matrice de masse globale.

Résolution du système  
 $KM^{-1} - \lambda I = 0$

Détermination des valeurs propres et vecteurs propres.

H

B

- Formation de la matrice de rigidité élémentaire
- Formation de la matrice de rigidité globale de la structure spatiale.

- Introduction des conditions aux limites
- Introduction des conditions d'appuis élastiques (éventuels)

Introduction du chargement.

- Résolution du système linéaire  
 $K \cdot U = F$
- Détermination des déplacements  $U$ .

Calcul des réactions d'appuis et efforts dans les barres.

JL

### III-3 Construction de la matrice de rigidité élémentaire locale

théorie de base:

Les forces extérieures qu'on applique à un corps effectuent un travail extérieur qui est en général dépensé pour déformer le corps et produire de l'énergie cinétique. Si les forces sont appliquées statiquement, c'est à dire si elles augmentent assez lentement pour ne pas produire l'accélération sensible, tout le travail extérieur  $\mathcal{W}_e$  est dépensé pour déformer le corps.

Si de plus le corps est parfaitement élastique,  $\mathcal{W}_e$  sert seulement à vaincre les résistances élastiques intérieures, et se transforme intégralement en énergie potentielle élastique de déformation, mesurée aussi par le travail interne  $\mathcal{W}_i$ , produit par les efforts internes pendant la déformation.

$$\mathcal{W}_e = \mathcal{W}_i$$

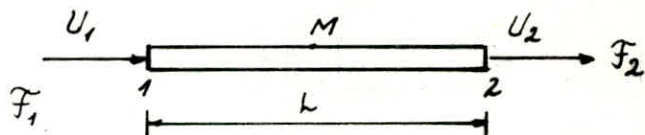
Dans ces conditions, le système est conservatif; c'est à dire que le travail de déformation dépend seulement de l'état initial et de l'état final, et non des états intermédiaires par lesquels il passe.

L'énergie élastique accumulée dans le corps déformé est ensuite restituée sous forme de travail lorsque le corps reprend sa forme primitive.

Nous supposons aussi, non seulement que le corps se déforme en respectant la loi de Hooke, mais encore que le système des forces extérieures n'est pas influencé par la déformation élastique du corps; par conséquent, les déplacements et les déformations sont des fonctions linéaires et homogènes des forces extérieures qui les produisent et on peut leur appliquer le principe de la superposition des effets.

Dans le cas d'un corps élastique de forme prismatique; l'expression de l'énergie de déformation est:

$$\bar{O}_i = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x) dV$$



Si en vertu de la loi de Hooke, on exprime les tensions en fonction des déformations, on obtient le travail en fonction des déformations seulement:

$$\bar{O}_i = \int_0^L \frac{EA}{2} \epsilon_x^2 dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = E \cdot \epsilon_x \\ dv = A \cdot dx \end{array} \right. \quad \epsilon_x = \text{cte.}$$

On exprime le déplacement  $U(x)$  d'un point M en fonction des déplacements des noeuds  $U_1$  et  $U_2$ . On sait que pour une barre uniquement soumise à des forces d'extrémité la déformation  $\epsilon_x$  est constante.



$\epsilon_x$  étant constante, le déplacement  $U(x)$  varie linéairement entre  $U_1$  et  $U_2$  :

$$U(x) = U_1 + (U_2 - U_1) \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad \epsilon_x = \frac{U'(x)}{x} = \frac{U_2 - U_1}{L}$$

On a donc pour l'énergie de déformation :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \int_0^L \frac{E \cdot A}{2} \frac{(U_2 - U_1)^2}{L} dx = \frac{E \cdot A}{2 \cdot L^2} (U_2 - U_1)^2 \cdot L \\ &= \frac{E \cdot A}{2 \cdot L} (U_2^2 - 2 U_1 U_2 + U_1^2) \end{aligned}$$

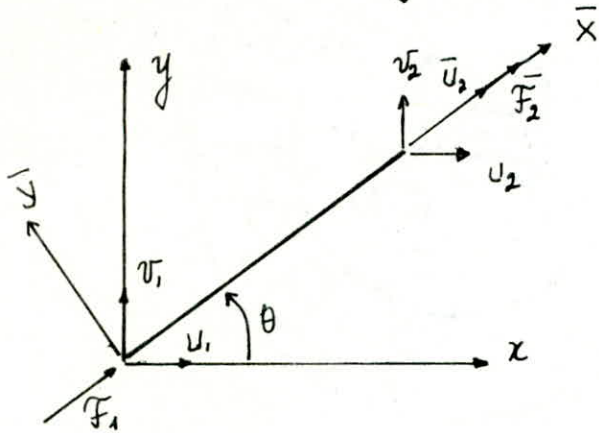
On peut mettre cette expression sous la forme suivante :

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} U^T \cdot K \cdot U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

d'où l'expression de la matrice de rigidité d'une barre en traction ou compression :  $K = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

## Matrice de rigidité d'une barre dans le repère global

a) Barre dans le plan :



On a :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix} = \frac{A \cdot E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\bar{F}_1 = F_{x1} \cos \theta + F_{y1} \sin \theta$$

$$0 = -F_{x1} \sin \theta + F_{y1} \cos \theta$$

Si l'on projette les forces et les déplacements  $\bar{u}_1$  et  $\bar{u}_2$  sur les axes globaux  $x, y$  il vient :

On pose :  $\lambda = \cos \theta$  et  $\mu = \sin \theta$

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ 0 \\ \bar{F}_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix}$$

Ces deux équations correspondent à :

$$\{\bar{F}\} = [R] \{F\} \quad \text{et} \quad \{\bar{D}\} = [R] \{D\}$$

où  $[R]$  est la matrice de passage du système d'axes

Local ou système d'axes global.

$$[R] = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix}$$

Connaissant la matrice de rigidité d'une membrure dans les axes locaux reliés à la membrure ( $[\bar{K}]$ ), On peut déterminer la matrice de rigidité de la membrure dans les axes globaux reliés à la structure complète ( $[K]$ ).

écrivons  $[\bar{F}] = [\bar{K}] \{ \bar{D} \}$  Avec :  $[\bar{K}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

On a :  $\{ \bar{F} \} = [R] \{ F \}$  et  $\{ \bar{D} \} = [R] \{ D \}$

On aura donc :

$$[R] \{ F \} = [\bar{K}] [R] \{ D \}$$

$$\{ F \} = [R]^{-1} [\bar{K}] [R] \{ D \}$$

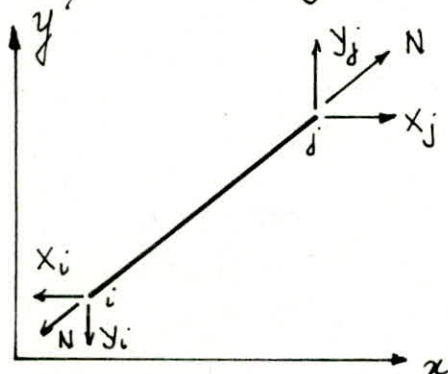
d'où :

$$[K] = [R]^{-1} [\bar{K}] [R]$$

On aura alors :

$$[K] = \frac{A \cdot E}{L} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu \\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \end{bmatrix}$$

Connaissant les déplacements  $u_i$  et  $v_i$  d'un nœud "i" et  $u_j$ ,  $v_j$  d'un nœud "j" d'une barre de treillis, On peut déterminer les forces  $X_i$ ,  $Y_i$  et  $X_j$ ,  $Y_j$  qui produisent les déplacements à partir du système suivant :



$$\{F\} = [K] \{D\}$$

La force  $N$  dans la barre est donnée par :

$$N = X_j \cos \theta + Y_j \sin \theta = X_j \lambda + Y_j \mu$$

$$\text{ou } N = \begin{Bmatrix} \lambda & \mu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \end{Bmatrix}$$

$$\text{Avec : } \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} = \frac{A \cdot E}{L} \begin{Bmatrix} -\lambda^2 u_i - \lambda\mu v_i + \lambda^2 u_j + \lambda\mu v_j \\ -\lambda\mu u_i - \mu^2 v_i + \lambda\mu u_j + \mu^2 v_j \end{Bmatrix}$$

$$N = \frac{A \cdot E}{L} \left[ \lambda^3 (u_j - u_i) + \lambda^2 \mu (v_j - v_i) + \lambda \mu^2 (u_j - u_i) + \mu^3 (v_j - v_i) \right]$$

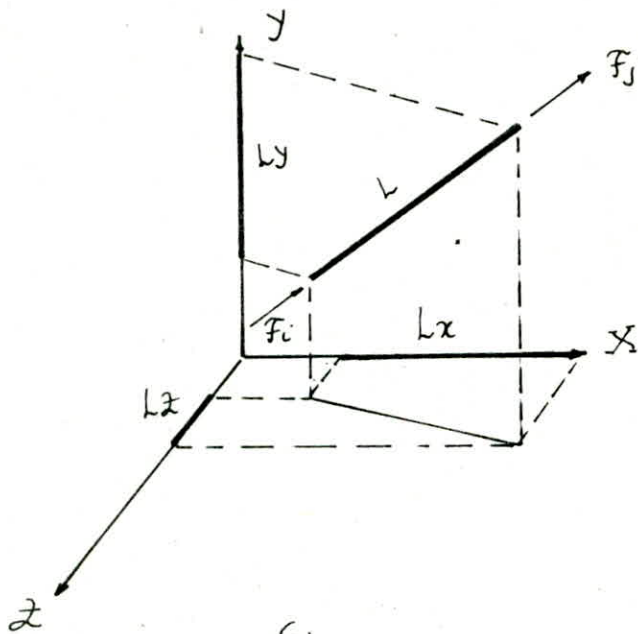
$$N = \frac{A \cdot E}{L} \left[ (u_j - u_i) \lambda (\lambda^2 + \mu^2) + (v_j - v_i) \mu (\lambda^2 + \mu^2) \right]$$

$$\text{Avec : } \lambda^2 + \mu^2 = 1. \text{ On aura : } N = \frac{A \cdot E}{L} \begin{Bmatrix} \lambda & \mu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix}$$

b) Barre dans l'espace:

Pour une barre dans l'espace, les

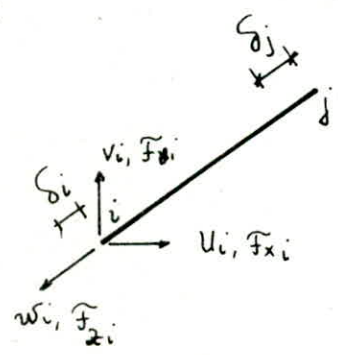
relations entre les grandeurs mesurées dans le système local et celles mesurées dans le système global s'expriment par les relations suivantes:



$$\lambda = \frac{L_x}{L}$$

$$\mu = \frac{L_y}{L}$$

$$\beta = \frac{L_z}{L}$$



$$\begin{cases} F_{xi} = \lambda F_i & ; & F_{xj} = \lambda F_j \\ F_{yi} = \mu F_i & ; & F_{yj} = \mu F_j \\ F_{zi} = \beta F_i & ; & F_{zj} = \beta F_j \end{cases}$$

$$\delta_i = \lambda u_i + \mu v_i + \beta w_i$$

$$\delta_j = \lambda u_j + \mu v_j + \beta w_j$$

sous forme matricielle on aura:

$$\begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} = [k_1] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & \lambda \\ 0 & \mu \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{zj} \end{bmatrix} = [k_2] \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix}$$

en effectuant les transformations comme precedemment, et sachant que:

$$\begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} = \frac{A.E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix}$$

On aura:

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{zj} \end{bmatrix} = [k_2] \cdot \frac{A.E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} = [k_2] \frac{A.E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot [k_1] \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

Tout calcul fait on aura la forme de la matrice de rigidité d'une barre en traction ou en compression dans l'espace:

$$[K] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\beta & -\lambda^2 & -\lambda\mu & -\lambda\beta \\ \mu\lambda & \mu^2 & \mu\beta & -\mu\lambda & -\mu^2 & -\mu\beta \\ \beta\lambda & \beta\mu & \beta^2 & -\beta\lambda & -\beta\mu & -\beta^2 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & -\lambda\beta & \lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\beta \\ -\mu\lambda & -\mu^2 & -\mu\beta & \mu\lambda & \mu^2 & \mu\beta \\ -\beta\lambda & -\beta\mu & -\beta^2 & \beta\lambda & \beta\mu & \beta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_i \\ w_i \\ v_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{xi} \\ \tilde{F}_{yi} \\ \tilde{F}_{zi} \\ \tilde{F}_{xj} \\ \tilde{F}_{yj} \\ \tilde{F}_{zj} \end{bmatrix}$$

### III-4 Assemblage des matrices de rigidité élémentaires dans la matrice de rigidité de la structure.

Un système complet d'équations reliant les forces et les déplacements relatifs d'un élément non assemblé à  $n$  degrés de liberté s'écrit :

$$F_1 = k_{11} \Delta_1 + k_{12} \Delta_2 + \dots + k_{1j} \Delta_j + \dots + k_{1n} \Delta_n.$$

$$F_i = k_{i1} \Delta_1 + k_{i2} \Delta_2 + \dots + k_{ij} \Delta_j + \dots + k_{in} \Delta_n.$$

$$F_n = k_{n1} \Delta_1 + k_{n2} \Delta_2 + \dots + k_{nj} \Delta_j + \dots + k_{nn} \Delta_n.$$

Nous supposons que les transformations de coordonnées adéquates ont déjà été effectuées, de sorte que les degrés de liberté qui interviennent ici correspondent au repère global de la structure.

Les indices  $1, \dots, i, \dots, n$  se rapportent aux degrés de liberté associés aux nœuds de l'élément.

Lorsque les coefficients de rigidité des équations forces-déplacements de chacun des éléments de la structure sont numériquement connus. Appliquer la méthode de rigidité directe consiste à les combiner algébriquement entre eux conformément



aux conditions d'équilibre et de la Compatibilité aux nœuds, cela fournit un système global d'équations de forces-déplacements rapporté aux nœuds de tous les éléments ainsi assemblés.

La méthode de rigidité directe :

Nous pourrions constituer les équations forces-déplacements selon l'algorithme suivant :

1°) Chaque coefficient de rigidité de l'élément est évalué numériquement et se voit affecter un double indice global  $(k_{ij})$  : le premier  $(i)$  désigne la force pour laquelle l'équation est centrée, et le second  $(j)$  est le numéro global du degré de liberté considéré.

2°) On prévoit un tableau ayant la forme d'une matrice carrée dont l'ordre est égal au nombre total de degrés de liberté du système complet, de sorte que chaque composante de force puisse y trouver un lieu avec chaque composante de déplacement, appartient au système. Chacun des éléments du tableau est repéré par deux indices : le premier (indice de ligne) se rapporte au degré de liberté considéré.

3°) Les opérations ci-dessus sont répétées pour le degré de liberté 1 jusqu'à épuisement des éléments. Si un coefficient à positionner à un emplacement déjà occupé, c'est la somme des 2 valeurs que l'on y place.

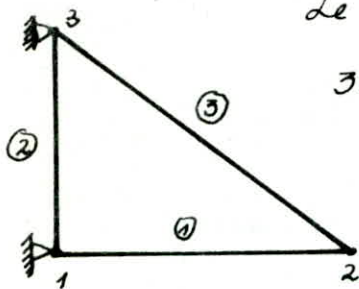
A l'issue de cette étape, tous les éléments, de la 1<sup>ère</sup> ligne

de la matrice globale ont leur valeur finale pour le 1<sup>er</sup> indice de degré de liberté.

$$K_{ii} = \sum k_{ii}$$

1<sup>o</sup>) Les étapes 2 et 3 sont répétées pour tous les autres degrés de liberté. On obtient ainsi le système complet des coefficients de rigidités relatifs aux équations de la structure complète (mais sans aucune indication sur les conditions d'appuis).

Exemple:



Soit la structure suivante à 3 nœuds et 3 barres  
Le système d'équations aura pour dimension  
 $3 \cdot 2 = 6$  La largeur de la bande sera:

$$[(3-1)+1] \cdot 2 = 6$$

l'assemblage de la matrice de rigidité

S'effectuera comme suit:

	$U_1$	$V_1$	$U_2$	$V_2$	$U_3$	$V_3$	
1	{	$1+2$	$1+2$	1	1	2	2
			$1+2$	1	1	2	2
2	{			$1+3$	$1+3$	3	3
					$1+3$	3	3
3	{				$2+3$	$2+3$	
							$2+3$

L'élément n° ② - par exemple a - pour nœuds 1 et 3 donc la rigidité de l'élément n° ② sera introduite dans la matrice de rigidité de la structure complète à l'emplacement des lignes et des colonnes correspondant aux nœuds prédéfinis.

Remarquons que les termes diagonaux sont obtenus par sommation des rigidités de tous les éléments aboutissant à un nœud donné.

Ceci s'explique par le fait qu'un nœud fait l'objet de connexion d'au moins deux barres.

### III-5 - Conditions aux limites

Arrivé à ce stade des calculs, nous connaissons la matrice de rigidité complète  $[K]$ , et pour pouvoir résoudre le problème, nous tenons compte des différentes conditions aux limites, autrement dit prendre en considération des appuis.

On peut envisager deux techniques d'introduction des conditions d'appuis :

1) Méthode du terme diagonal dominant.

Le principe de cette méthode est le suivant :

les conditions aux limites  $U_i = \bar{U}_i$  seront introduites en remplaçant  $K_{ii}$  par  $K_{ii} + \alpha$ ,  $\alpha$  étant un nombre très grand par rapport à tous les éléments de la matrice de rigidité globale ; et  $F_i$  par  $\alpha \bar{U}_i$ . On aura donc :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{21} & K_{22} + \alpha & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ \alpha \bar{U}_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

$K_{ii} U_i + \dots + (K_{ii} + \alpha) U_i + \dots = F_i$  et on a  $F_i = \bar{U}_i \alpha$   
 $\alpha U_i + \sum_{i \neq j}^n K_{ij} U_j = \alpha \bar{U}_i$  - pour  $\alpha$  suffisamment grand  
 On obtient:

$$U_i + \left( \sum_{i=1}^n K_{ij} U_j \right) \frac{1}{\alpha} = \bar{U}_i$$

Appui rigide :  $\alpha$  est très grand  $\Rightarrow \left( \frac{\sum_{i=1}^n K_{ij} U_j}{\alpha} \right) \rightarrow 0$

implique :  $U_i = \bar{U}_i \approx 0$

Appui élastique :  $\alpha$  moyen  $\Rightarrow U_i = \frac{F_i}{\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^n K_{ij} U_j}{\alpha}$

## 2.) Méthode du terme diagonal unitaire

Cette méthode consiste à conserver la disposition de la matrice tout en remplaçant les lignes et les colonnes correspondant aux nœuds appuis par des 0 en mettant un "1" pour le terme diagonal, afin d'éviter que la matrice ne soit singulière. On placera également un 0 sur la ligne correspondante du vecteur force.

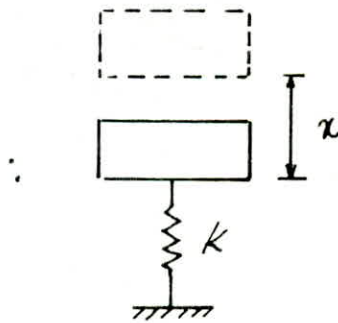
Ainsi si  $U_k$  est l'inconnue du déplacement, on aura à résoudre sur cette ligne :

$1 \cdot U_k = 0$  d'où  $U_k = 0$ , c'est ce qui est le résultat pour un appui, et en plus  $U_k$  n'interviendra dans aucune autre équation, compte tenu de la colonne de 0.

### III-5 Appuis élastiques :

Les problèmes de liaisons sol-structure présentent des difficultés de schématisation de plus en plus complexes à résoudre. Jusqu'à là, nous avons considéré que notre noeud était soit totalement libre de se déplacer soit complètement bloqué. L'appui élastique permet de trouver un compromis entre noeud libre et noeud fixe, c'est à dire qu'à la fois ce noeud peut se déplacer et reprendre des efforts. Pour cela on donne, en 1<sup>ère</sup> approximation une relation linéaire entre déplacement et réaction.

Si on prend le cas d'un ressort de raideur  $k$  on obtient la relation  $F = -kx$ , où  $F$  est la réaction d'appui.



Il est donc nécessaire pour prendre en compte les appuis élastiques d'ajouter aux termes diagonaux de la matrice de rigidité de la structure complète, la valeur  $k$  correspondante de la raideur du ressort.

### III-6 Charges agissant sur les structures à treillis.

L'étude de l'équilibre statique d'une structure se fait en tenant compte des différentes natures de chargement. Quatre types de charges sont prévus:

- 1) Forces extérieures agissant directement sur la structure au niveau des nœuds.
- 2) poids propre de la structure.
- 3) Effet de la température.
- 4) Effet des déplacements imposés des appuis

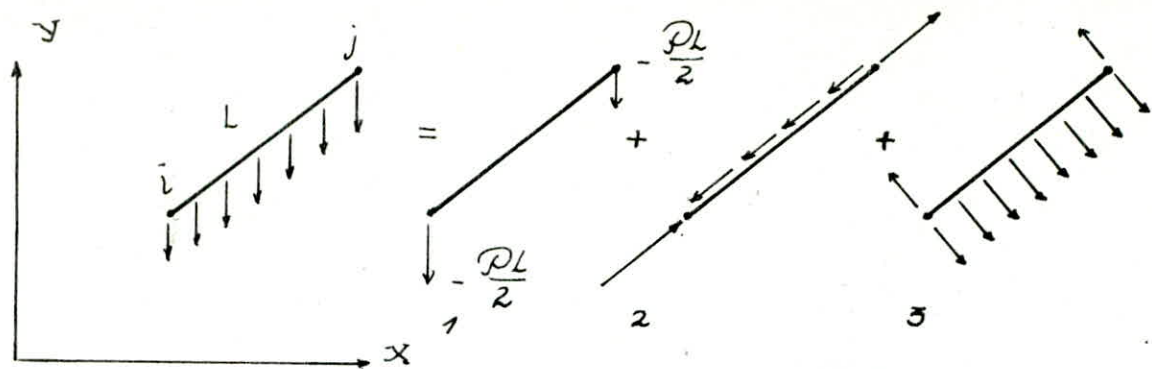
1) Forces agissant aux nœuds:

Les forces extérieures sont des forces concentrées au niveau des nœuds.

2) poids propre de la structure:

Le poids propre est une charge répartie. L'action de la pesanteur s'exerce suivant l'axe  $y$ , pour les structures planes comme pour les structures spatiales; ce cas de charge est généré automatiquement à partir de la donnée de la densité du matériau.

Les charges nodales sont calculées à partir de la section des barres et des longueurs de celles-ci.



$P$ : est le poids propre de la barre par unité de longueur.

Les chargement 2 et 3 sont auto-équilibrés, alors ils n'ont pas d'influence sur les déplacements des noeuds et les réactions d'appuis; par contre il faut tenir compte de la variation d'effort normal dans la membrure due au chargement 2 lors du calcul des efforts normaux à partir des déplacements des noeuds.

### 3) Effet de la température :

Les variations de température ne produisent dans les constructions ni forces intérieures ni contraintes, mais seulement des déformations dont les valeurs sont :

$$\delta = \alpha \cdot \Delta t \cdot L$$

où  $\Delta t$  : est la différence de température.

$\alpha$  : Coefficient d'expansion thermique.



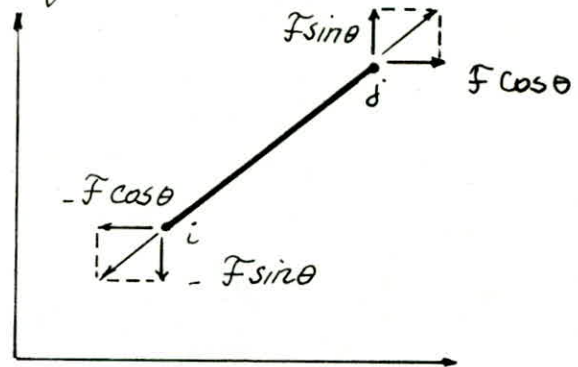
L'action de la température est assimilée à un effort axial provoquant le même allongement de la barre ; cet effort est généré par la différence de température ( $\Delta t$ ) dans une barre de caractéristiques géométriques  $A, E, L, \alpha$

$$F = E \cdot A \cdot \Delta t \cdot \alpha$$

Puisque cet effort n'existe pas et que dans la réalité on a

une déformation ; Lors du calcul

des efforts normaux à partir des déplacements et des matrices de rigidité, il faudra le soustraire.



#### A) Effet des déplacements imposés des appuis:

Un appui qui se déplace, dans une direction donnée induit une force.

Pour tenir compte de ce déplacement, il suffit de modifier le second membre.

L'effort induit par les déplacements d'appuis est donné par la relation suivante :

$$F = \Delta S \cdot K$$

$\Delta S$  : est le déplacement d'appui.

$K$  : la rigidité de l'appui.

### III-7 Résolution du système linéaire.

Pour la résolution du système linéaire on envisage deux méthodes : méthode de GAUSS, et méthode de Cholesky.

#### 1) Méthode de Gauss :

Cette méthode est appelée méthode de substitution, elle consiste à exprimer successivement chacune des inconnues en fonction des autres, puis remplacer dans les autres équations cette inconnue par l'expression obtenue.

Par cette méthode on élimine chaque fois une inconnue ; jusqu'à la dernière équation qui fournit alors la première solution.

Celle-ci connue, on reprend l'avant-dernière équation qui fournit alors la deuxième solution, et ainsi de suite jusqu'à la première équation.

On explicite cette formulation mathématique, très proche de nombreuses solutions manuelles, de la façon suivante :

$$k_{11} u_1 + \sum_{i=1}^n k_{1i} u_i = f_1$$

$$\text{d'où on déduit (si } k_{11} \neq 0) \quad u_1 = \frac{1}{k_{11}} \left[ f_1 - \sum_{i=1}^n k_{1i} u_i \right]$$

remplaçons  $U_1$  par cette valeur dans l'équation  $j$ ; nous avons :

$$K_{j1} U_1 + \sum_{i=2}^n K_{ji} U_i = f_j$$

Nous obtenons : 
$$\frac{K_{j1}}{K_{11}} \left[ f_1 - \sum_{i=2}^n K_{1i} U_i \right] + \sum_{i=2}^n K_{ji} U_i = f_j$$

ou encore : 
$$\sum_{i=2}^n \left( K_{ji} - \frac{K_{j1} K_{1i}}{K_{11}} \right) U_i = f_j - \frac{K_{j1}}{K_{11}} f_1$$

Cette équation étant valable pour  $j=2$  jusqu'à  $n$

On continuera ensuite pour les lignes 2, 3 jusqu'à  $n-1$  où

On obtiendra alors :

$$K'_{nn} U_n = f'_n \quad (\text{le ' indique que les termes ont été modifiés par les calculs successifs.})$$

Ce qui nous donnera  $U_n$  par simple division, puis en remplaçant l'équation  $n-1$  jusqu'à 1 nous déterminerons les valeurs  $U_i$  en utilisant la dernière équation de la ligne  $i$  :

$$K'_{ii} U_i + \sum_{j=i+1}^n K'_{ij} U_j = f'_i$$

## 2) Méthode de Cholesky :

Le principe de cette méthode est de décomposer la matrice de rigidité  $K$  en un produit d'une matrice triangulaire supérieure par une matrice triangulaire inférieure soit donc :

$$K = S^T \cdot S$$

produit d'une matrice triangulaire  $S$  par sa transposée. La résolution du système linéaire  $K \cdot U = F$  se fait par deux étapes, une descente et une montée :

Factorisation de  $K = S^T \cdot S$

$$S^T \cdot S \cdot U = F$$

Résolution du système triangulaire  $S^T \cdot Y = F$

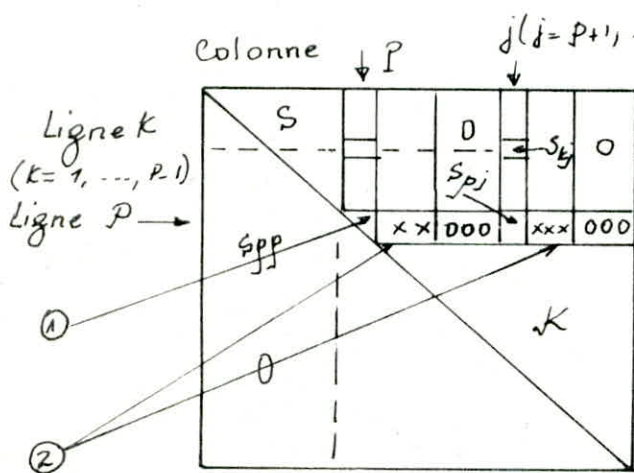
Résolution du système triangulaire  $S \cdot U = Y$ .

Cette méthode est adaptée au cas des matrices symétriques et définies positives. Dans la phase de Factorisation, elle ne nécessite que la mémorisation d'une partie triangulaire (supérieure par exemple) de la matrice  $K$ . En cours de factorisation, on peut modifier successivement les termes affectés par les équations :

$$S_{pp} = \sqrt{K_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} S_{kp}^2}$$

$$S_{pj} = \frac{1}{S_{pp}} \left[ K_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} S_{kp} S_{kj} \right] \quad j = p+1 \dots n.$$

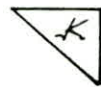
De manière à obtenir en fin la factorisation de la matrice triangulaire supérieure  $S$ . Les opérations de factorisation correspondantes à la colonne  $p$  sont illustrées ci-dessous. On peut y remarquer que la méthode CHOLESKY peut être mise en œuvre avec un système de gestion de données tenant compte de la structure creuse de la matrice  $K$ , pour minimiser les opérations sur les termes nuls.



① Calcul de  $s_{pp}$

② Calcul de  $s_{pj} (j=p+1, \dots, n)$

termes de la matrice  $K$



qui ne sont pas affectés



termes de la matrice  $S$

qui n'interviennent pas dans

cette phase de décomposition.

$\boxed{S \quad \times \times \times \times}$  termes de la matrice  $S$  qui sont modifiés

L'erreur de troncature initiale est complètement indépendante de la précision de la méthode de résolution. Il est impossible de restituer l'information perdue par troncature initiale. Une fois que la matrice de rigidité est construite il sera nécessaire de faire les calculs en double précision.

Après la résolution du système linéaire par la méthode de Gauss, ou la méthode de Cholesky, et l'obtention des déplacements des nœuds, on peut calculer les efforts dans les barres, et les réactions d'appuis.

1) Calcul des efforts dans les barres:

a) Barre dans le plan:

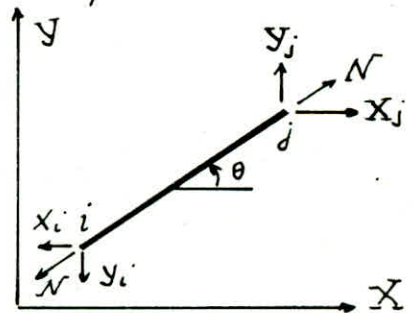
Connaissant les déplacements  $u_i, v_i$  d'un nœud  $i$  et  $u_j$  et  $v_j$  d'un nœud  $j$  d'une barre, on peut déterminer les forces  $X_i, Y_i$  et  $X_j, Y_j$

$$\begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \end{Bmatrix} = \frac{A \cdot E}{L} \begin{Bmatrix} -\lambda^2 u_i - \lambda \mu v_i + \lambda^2 u_j + \lambda \mu v_j \\ -\lambda \mu u_i - \mu^2 v_i + \lambda \mu u_j + \mu^2 v_j \end{Bmatrix}$$

où  $\lambda = \cos \theta$ ,  $\mu = \sin \theta$ .

où  $N = X_j \lambda + Y_j \mu$ .

$$N = \begin{Bmatrix} \lambda & \mu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_j \\ Y_j \end{Bmatrix}$$



$$\text{Il vient : } N = \frac{A \cdot E}{L} \left[ (u_j - u_i) \lambda (\lambda^2 + \mu^2) + (v_j - v_i) \mu (\lambda^2 + \mu^2) \right]$$

$$N = \frac{A \cdot E}{L} \begin{Bmatrix} \lambda & \mu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix} \Rightarrow N = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \Delta$$

Delta: peut être un allongement (traction) ou raccourcissement (c)

Lorsqu'on a tenu compte de l'effet de la température, la force générée par celle-ci devra être retranchée de l'effort normal  $N$ , car il s'agit d'une déformation et non d'un état de contrainte :

$$N = \frac{A \cdot E}{L} (\Delta t - L \cdot \alpha \cdot \Delta t)$$

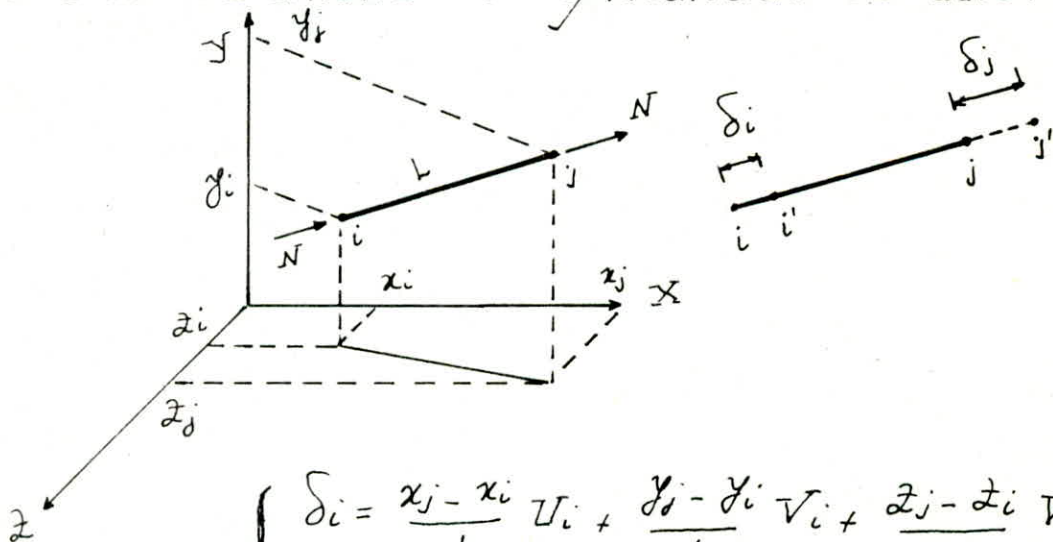
$\alpha$  : coefficient d'expansion thermique.

$\Delta t$  : Variation de température.

### b) Barre dans l'espace

Pour la barre dans l'espace, les déplacements des nœuds, seront dans les trois directions du repère global.

Après avoir déterminé ces déplacements on aura :



$$\begin{cases} \delta_i = \frac{x_j - x_i}{L} U_i + \frac{y_j - y_i}{L} V_i + \frac{z_j - z_i}{L} W_i \\ \delta_j = \frac{x_j - x_i}{L} U_j + \frac{y_j - y_i}{L} V_j + \frac{z_j - z_i}{L} W_j \end{cases}$$

Les déplacements des nœuds  $\delta_i$  et  $\delta_j$  dans le repère local de

La barre étant déterminé, On déduira l'effort axial comme suit:

$$\frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix}$$

On remarquera que  $N_i = -N_j$ .

$$N_i = (\delta_i - \delta_j) \frac{E \cdot A}{L}$$

$$N_j = (\delta_j - \delta_i) \frac{E \cdot A}{L}$$

$$N = N_i = -N_j$$

$$N = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \Delta t \cdot \alpha$$

$N$  peut être un effort de traction ou de compression. En retranchant l'effet de la température  $N$  devient:

$$N = \frac{E \cdot A}{L} (\Delta t - L \cdot \alpha \cdot t)$$

## 2) Calcul des Réactions d'appuis:

Le calcul des réactions se fait en fonction de la technique d'introduction des conditions aux limites

a) Réactions d'appuis selon la méthode du terme diagonal dominant:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ k_{i1} & \dots & k_{ii+\alpha} & \dots & k_{in} \\ k_{n1} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ \vdots \\ \alpha U_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$



L'équation (i) devient :

$$\alpha U_i + \sum_{j=1}^n k_{ij} U_j = \alpha \bar{U}_i$$

$$U_i + \left( \sum_{j=1}^n k_{ij} U_j \right) \frac{1}{\alpha} = \bar{U}_i \Rightarrow U_i + U_i' = \bar{U}_i$$

$$\bar{U}_i = \bar{U}_i - U_i' \quad U_i' : \text{très petit} \Rightarrow U_i \approx \bar{U}_i$$

Dans cette méthode, on a simulé les supports d'un des ressorts de grande rigidité  $\alpha$ ,  $\alpha$  est calculée à partir de la rigidité la plus grande, soit  $k_{ii}$  :

donc on aura :

$$\alpha = k_{ii} \cdot 1000 \quad (1000 \text{ est choisi arbitrairement}).$$

La réaction du support aura pour valeur :

$$R_s = \alpha \cdot U_i$$

b) Réactions d'appuis selon la méthode du terme diagonal unitaire.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & 0 & \dots & k_{1n} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ k_{n1} & & 0 & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

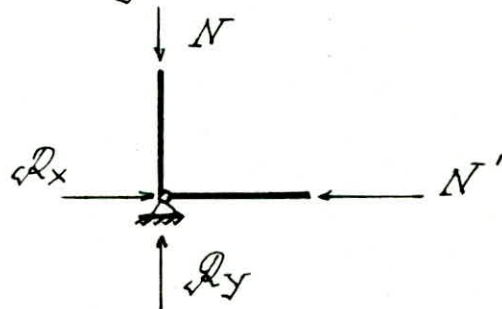
$$1. \sum U_i = 0 \Rightarrow \sum U_i = 0$$

donc la réaction d'appui sera calculée à partir de l'équilibre du noeud support ; c'est à dire on peut trouver les réactions du support suivant les trois directions principales en projetant les efforts internes ( $N$ ) dans les barres, concourant au noeud support, sur les trois axes principaux.

par exemple :

$$R_x = N'$$

$$R_y = N$$



### III-8 Lignes d'influence.

Déformations et lignes d'influence des systèmes hyperstatiques :

La ligne d'influence  $\eta$  d'un déplacement  $v$  est obtenu, comme ligne élastique d'une charge  $P_v = 1$  agissant au lieu et dans la direction du déplacement cherché.

Si l'on reporte en coordonnées les composantes des déplacements  $\delta$  dans une direction donnée  $\eta$  de points successifs d'une construction en partant d'une droite de référence, on obtient la ligne élastique ou déformée dans la direction  $\eta$  de la construction. Les déformations d'un treillis sont déterminées par les déplacements de ses noeuds ; les déformées sont aussi des polygones. Habituellement on se contente de les représenter pour une membrure de la poutre à treillis (pour les poutres de ponts, par exemple, on choisit la membrure soumise directement à l'action des charges roulantes) et les déformées de la membrure non chargée ne s'en écartent le plus souvent qu'assez peu.

Dans l'étude pratique des constructions, c'est la

Composante verticale  $\eta$  de la déformation qui intéresse en premier lieu. Nous orienterons donc l'étude qui suit de la détermination des déformées verticales.

L'importance primordiale du théorème Maxwell Mohr pour la pratique de la stabilité des constructions tient à ce qu'il permet de représenter les lignes d'influences des déformations comme des déformées dues à des charges convenablement choisies. Ainsi la déformée verticale d'une poutre due à la charge verticale  $P_m=1$  représente en même temps la ligne d'influence de la flèche verticale  $\eta$  du point d'application  $m$  de la charge verticale  $P_i$  et la flèche  $\eta_m$  due à un convoi de charges verticales prend la forme :

$$\eta_m = \sum_i P_i \eta_{mi} = \sum_i P_i \eta_{im}$$

Dans le logiciel qu'on a mis au point, on ne considère que les charges concentrées aux noeuds et supports d'appuis.

On ne traite que les lignes d'influence des réactions et des lignes d'influence des efforts dans les membrures.

# **CHAPITRE QUATRIÈME**

## Calcul dynamique.

Nous avons étudié les comportements statiques des structures, c'est à dire l'équilibre de celles-ci, vis à vis des forces extérieures. Mais dans la réalité, certains phénomènes sont difficilement assimilables à des forces statiques, par exemple les séismes, le vent, les machines tournantes, on peut ajouter à ceux-ci les phénomènes de fatigue, qui peuvent entraîner des ruptures sous l'effet répété du chargement.

Le calcul dynamique des structures se propose non plus de trouver un état d'équilibre de la structure mais de trouver un ou plusieurs modes de vibration. Le but du calcul dynamique est donc de trouver, ce mode de vibration, ainsi que la fréquence associée, et par conséquent la période.

Propriétés des systèmes discrets :

Les équations du  $U^t$  d'un système discret à  $n$  degrés de liberté s'écrivent :

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = F(t)$$

où :  $M$  : est la matrice de masse  
 $C$  : est la matrice d'amortissement.  
 $K$  : est la matrice de rigidité.

On appelle modes, les solutions propres du système sans second membre, dans le cas général, ces modes au nombre de  $n$  sont complexes et leur interprétation physique n'est pas évidente. On évite cet inconvénient en étudiant les vibrations libres des structures sans amortissement, c'est à dire en cherchant les solutions du système :

$$M\ddot{U} + K U = 0$$

les solutions sont harmoniques du type :  $U = X e^{j\omega t}$ , d'où les équations :

$$\omega^2 M X = K X \quad K, M \text{ sont symétriques.}$$

le système homogène de dimension  $n$ ,  $n$  valeurs propres réelles (Carrées de pulsations propres),  $\lambda_1 = \omega_1^2$ ,  $\lambda_2 = \omega_2^2$ , ...,  $\lambda_n = \omega_n^2$ , auxquelles correspondent  $n$  solutions propres réelles non triviales qui sont les modes propres de vibrations du système sans amortissement, souvent appelés modes réels, soient  $X^{(1)}$ ,  $X^{(2)}$ , ...,  $X^{(n)}$

On appelle matrice modale  $\Phi$ , la matrice  $(n \times n)$  dont les colonnes sont constituées par les  $n$  vecteurs propres soit :

$$\Phi = [X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}]$$

Les coefficients d'influence de la matrice de masse peuvent être obtenus par une procédure analogue à celle utilisée pour déterminer les coefficients de rigidité. La matrice obtenue s'appelle matrice de masse cohérente.

Les énergies cinétique et potentielle des systèmes linéaires courants soumis à des oscillations de faible amplitude peuvent s'exprimer sous forme quadratique:

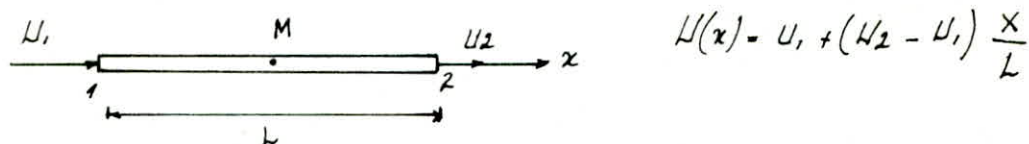
$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T m \dot{q}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N k_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} q^T k q$$

$N$  = nbre de d.d.L du système.

$q_i$  = coordonnée généralisée.

Considérons un élément de barre, avec section et masse volumique constantes. On a dans un repère local lié à l'élément:



Le déplacement d'un point  $M$  de l'élément peut s'écrire de la manière suivante:

$$[U(x,t)] = [A(x)^e] [q(t)]^e = \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{L}) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \end{bmatrix}$$



$[U]^e$  vecteur de déplacement d'un point M de l'élément.

$[A(x)]^e$  matrice d'interpolation pour l'élément e.

$$A(x) = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} \right].$$

On a :

$$M^e = \int_V \rho A^T A dV = \rho \cdot S \int_0^L A^T A dx =$$

$$= \rho \cdot S \int_0^L \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 & \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x^2}{L^2} \end{bmatrix} dx$$

Soit tout calcul fait la matrice de masse pour un élément de

barre :

$$M^e = \frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{avec } m = \rho \cdot S \cdot L$$

L'assemblage de la matrice de masse globale se fera de la même manière que la matrice de rigidité.

# **CHAPITRE CINQUIÈME**

# Programmation

Présentation du programme :

les paramètres définissant une structure peuvent être très importants et nombreux, ce qui rend leur introduction très fastidieuse, pour pallier cet inconvénient on a opté pour le stockage des données dans un fichier.

de cette manière le programme lira les données interactivement à partir du fichier correspondant à la structure.

La lecture de ces données est assurée par le sous-programme 'Lectre'.

Nous définissons en conséquence quelques paramètres importants :

$NN$  : Nombre de noeuds que comporte la structure.

$NBR$  : Nombre de barres de la structure.

$NMAT$  : Nombre de matériaux différents.

$NSECT$  : Nombre de sections différentes.

$E(I)$  : Vecteur définissant la valeur du module d'élasticité pour chaque matériau.

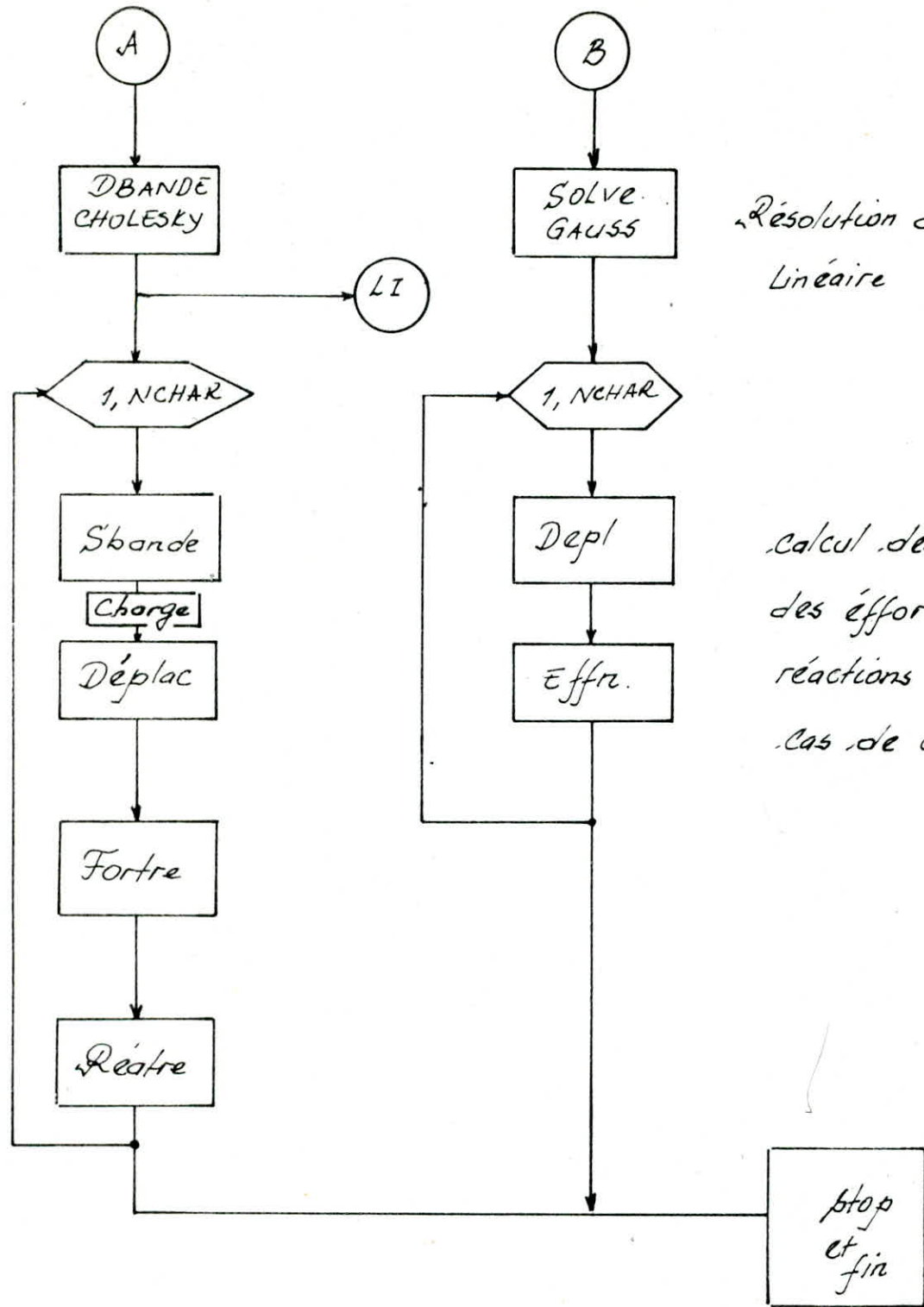
$SECT(I)$  : Vecteur définissant la valeur de la section pour chaque barre

$\rho_0(I)$  : Vecteur contenant la densité de chaque matériau.

$CT(I)$  : Vecteur contenant le coefficient thermique du matériau.

$DSX(I)$  : Vecteur du tassement des supports dans la direction  $X$

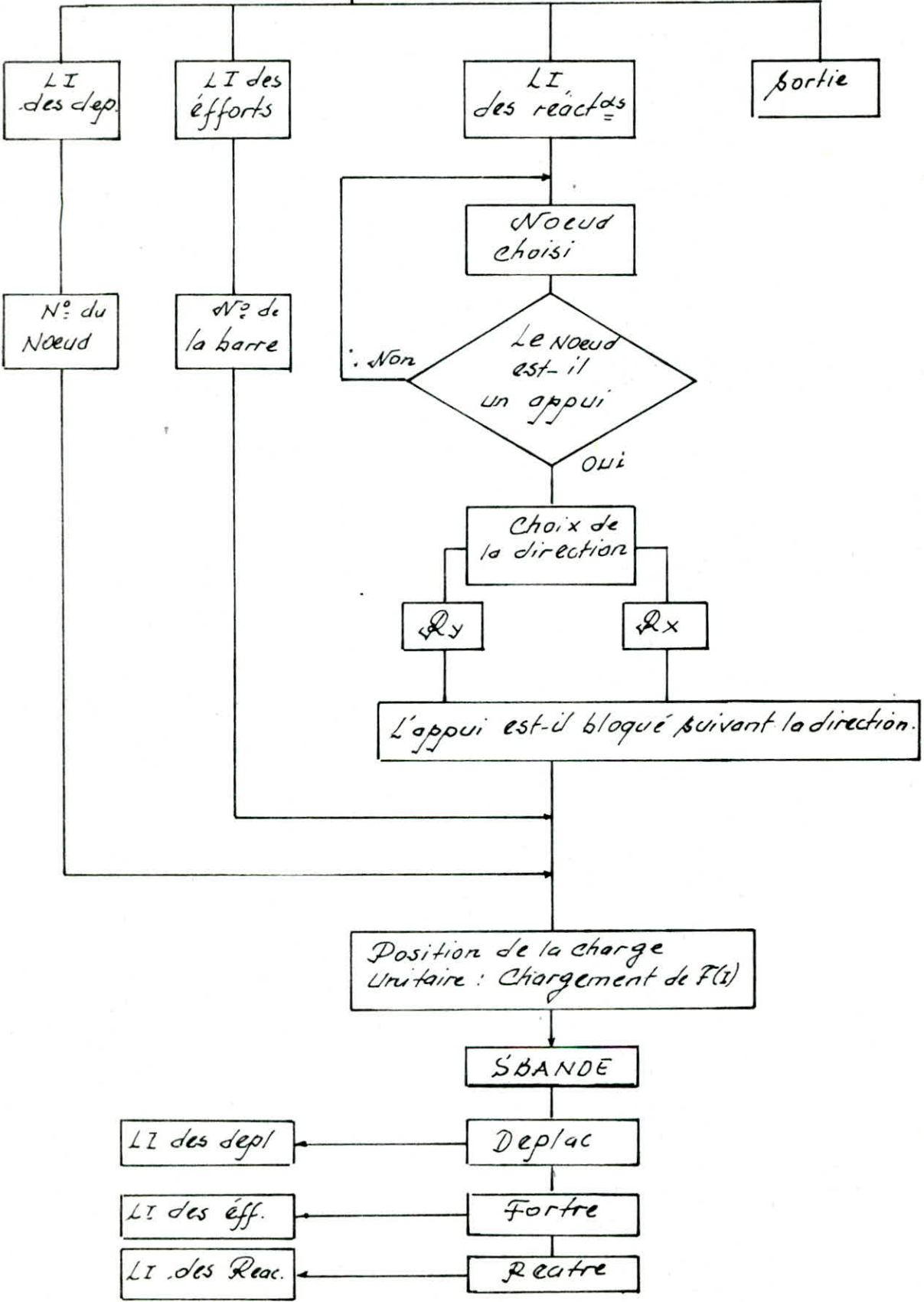
- $DSY(I)$  : Vecteur du tassement des appuis de la direction  $Y$ .
- $QS(I)$  : Vecteur contenant les angles de rotation des supports.
- $Idebut(I)$  : Vecteur contenant le numéro du noeud de début de la barre  $I$ .
- $Jfin(I)$  : Vecteur contenant le numéro du noeud de fin de la barre  $I$ .
- $F(I)$  : Vecteur contenant les forces appliquées au système.
- $NCHAR$  : Nombre de cas de chargement.



Résolution du système  
Linéaire

calcul des déplacements,  
des efforts, et des  
réactions pour chaque  
cas de chargement.

LI

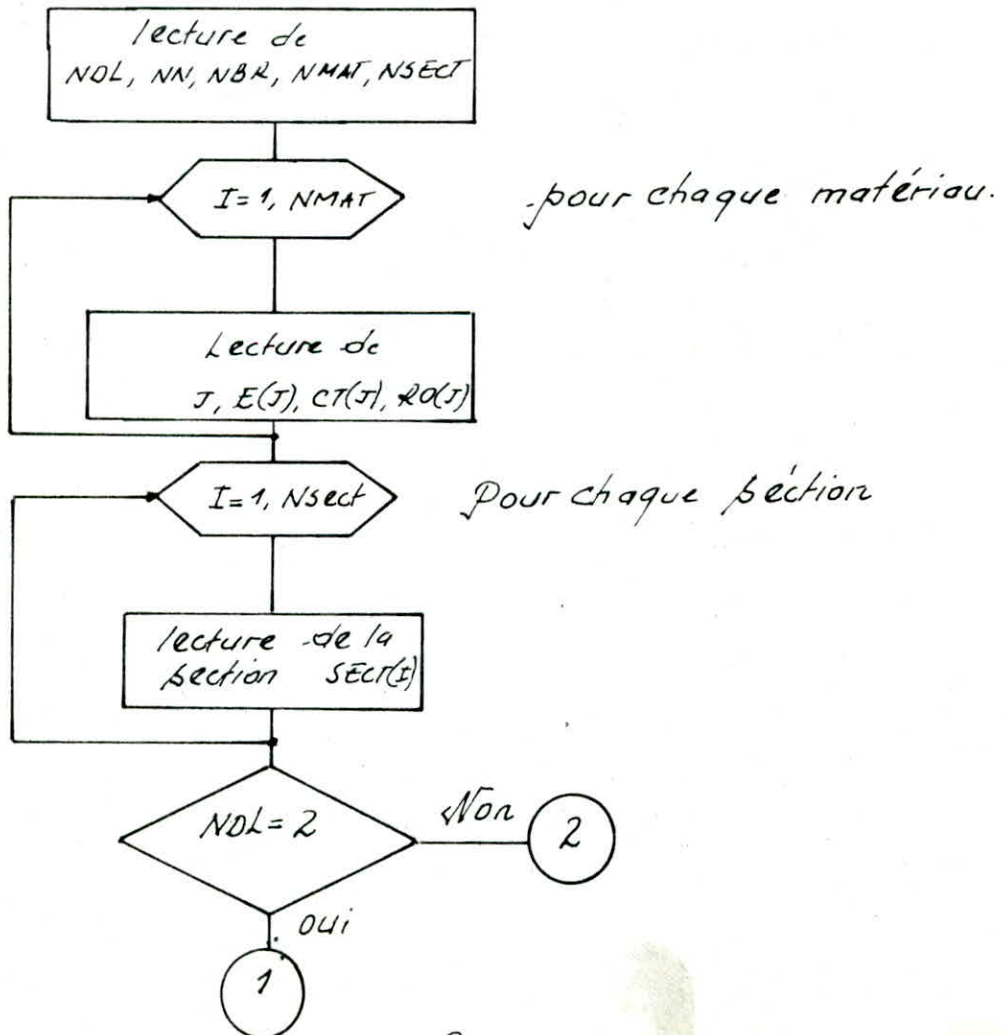


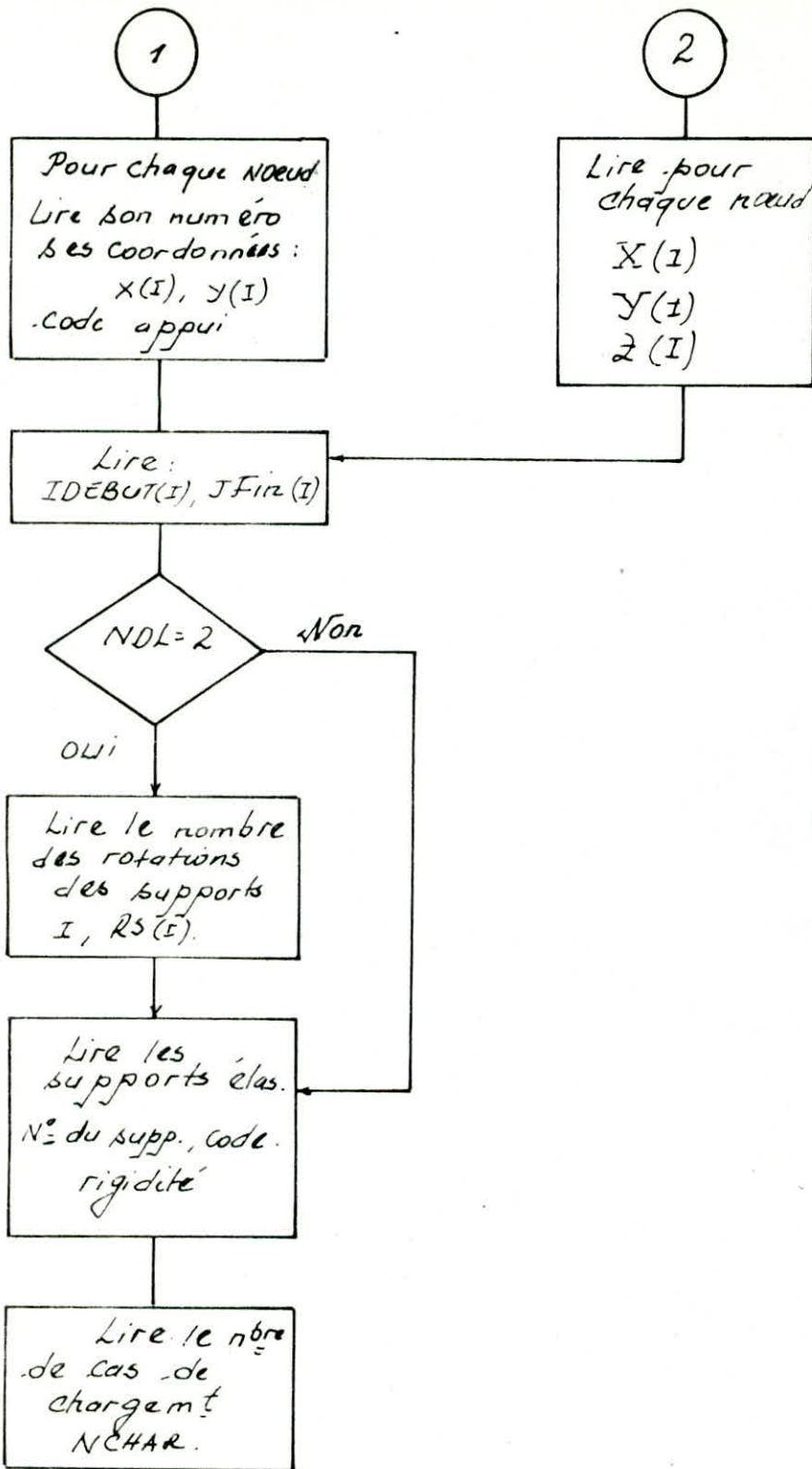
# Description des sous-programmes :

## sous-programme 'lectre' :

lors de l'exécution du programme interactivement, celui-ci demande à l'utilisateur de lui fournir le nom de fichier de données contenant, dans un mode bien précis, la description géométrique et l'énumération des propriétés physiques de la structure à analyser, ainsi que le cas de chargement à étudier.

## sous-programme 'lectre' :







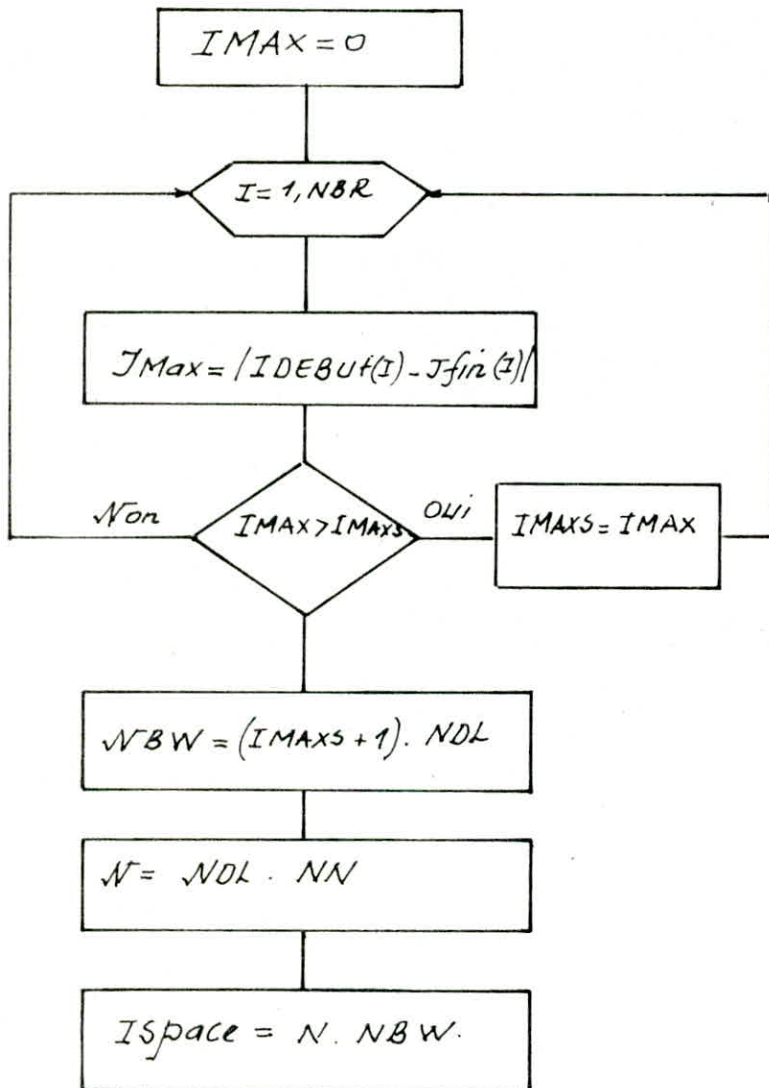
## Presentation du Fichier de données

Les données doivent être introduites dans le Fichier de données de la manière suivante:

<p>Lecture des données</p> <p>X1 X2 X3 X4 X5</p> <p>X6 X7 X8 X9</p> <p>⋮</p> <p>X10 X11</p> <p>⋮</p> <p>Coordonnées des nœuds</p> <p>X1 X2 X3 X4</p> <p>⋮</p> <p>Incidence des membrures</p> <p>X1 X2 X3 X4 X5</p> <p>⋮</p> <p>Rotation des supports</p> <p>X1</p> <p>X2 X3</p> <p>⋮</p> <p>Alphas élastiques</p> <p>X1</p> <p>X2 X3 X4</p> <p>⋮</p> <p>Nombre de cas de chargement</p> <p>X1</p> <p>⋮</p> <p>Chargement N° 1</p> <p>X1 X2 X3</p> <p>⋮</p> <p>0 0 0</p> <p>⋮</p> <p>EFFET DU POIDS PROPRE</p> <p>X1</p> <p>EFFET DE LA TEMPERATURE</p> <p>X1</p> <p>X2 X3 X4</p> <p>⋮</p> <p>EFFET DE L'ASSEMENT DES SUPPORTS</p> <p>X1</p> <p>X2 X3 X4</p>	<p>X1 : Nombre de degrés de liberté</p> <p>X2 : " de nœuds</p> <p>X3 : " de barres</p> <p>X4 : " de matériaux</p> <p>X5 : " de sections</p> <p>X6 : Numéro du matériau, X7: E(I)</p> <p>X8 : coef. thermique ; X9: densité</p> <p>X10: numéro de la section, X11: section</p> <p>⋮</p> <p>X1: numéro du nœud.</p> <p>X2, X3: coordonnées x et y (éventuellement z)</p> <p>X4: code appui (10: bloqué suivant X) libre suivant Y</p> <p>⋮</p> <p>X1: numéro de la membrure</p> <p>X2: numéro du nœud de début de la barre</p> <p>X3: " de la fin de la barre</p> <p>X4: " de la section covariante</p> <p>X5: " du matériau</p> <p>⋮</p> <p>X1: nombre de rotations de supports,</p> <p>X2: numéro du nœud ; X3: angle de rotation</p> <p>⋮</p> <p>X1: nombre de supports élastiques</p> <p>X2: N° du nœud ; X3: direction (1, 2, 3)</p> <p>X4: valeur de la rigidité.</p> <p>⋮</p> <p>X1: nombre de cas de chargement</p> <p>⋮</p> <p>X1: N° du nœud ;</p> <p>X2, X3: forces appliquées suivant X et Y</p> <p>La fin de chargement des forces appliquées aux nœuds est définie par trois zéros</p> <p>⋮</p> <p>X1=1 si on tient compte du poids propre</p> <p>X1=0 dans le cas contraire</p> <p>⋮</p> <p>X1=1 si on tient compte de la température</p> <p>X2, X3: toutes les barres de X2 à X3</p> <p>ont affectées par une température X4</p> <p>⋮</p> <p>X1: nombre de cas de tassements</p> <p>X2: N° du nœud, X3: direction (1, 2, 3)</p> <p>X4: valeur du tassement.</p>
---	---

## Sous-programme 'Variab' :

Après la lecture des données, le programme évalue quelques Variables.



NN: Nbre de Noeuds.

IMAXS: la plus grande différence entre 2 noeuds d'une même barre.

NBW: largeur de bande de la matrice de rigidité

N: Nbre d'équations

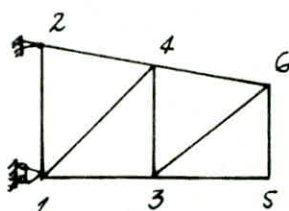
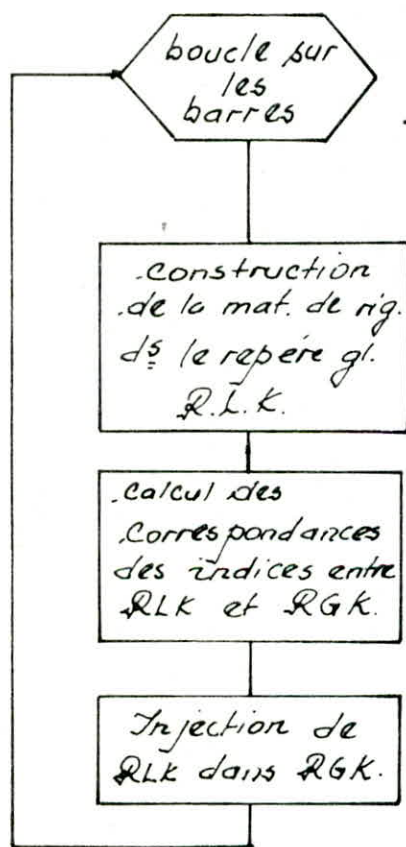
ISpace: dimension du vecteur contenant la partie supérieure de la matrice de rigidité.

On voit que la dimension du vecteur contenant la partie supérieure de la matrice de rigidité, dépend de la manière avec laquelle on numérote les noeuds.

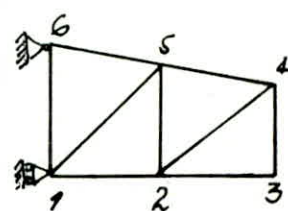
## sous-programme 'Assembl'

ce sous-programme a pour tâche de stocker les termes de rigidité suivant un arrangement sous forme de bande. Cette matrice bande aura une largeur minimale si on numérote les noeuds de la structure de la manière la plus avantageuse.

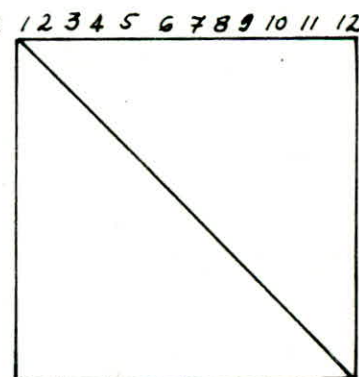
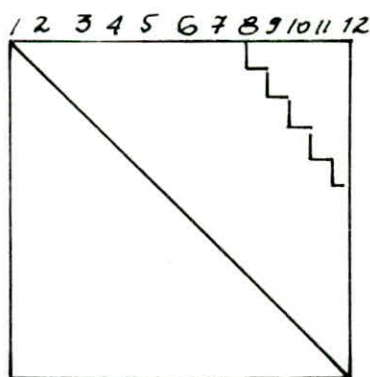
exemple:



$$NBW = (3+1) \times 2 = 8$$



$$NBW = (5+1) \cdot 2 = 12$$



La structure de donnée la plus simple pour la mémorisation des matrices de rigidité consiste à les considérer comme des matrices bandes, dans ce cas, on considère que les termes de rigidité extérieurs à la bande sont nuls :  $K_{ij} = 0$   $\left\{ \begin{array}{l} i = 1, n \\ j = (NBW + i), n \end{array} \right.$

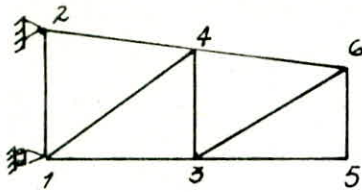
dans le cas de la résolution par la méthode de Gauss, on a utilisé un artifice pour bloquer les termes de la matrice de rigidité pour minimiser la place requise à la mémorisation. la méthode choisie est appelée 'Ligne de ciel' et consiste à ranger dans un tableau à un seul indice les coefficients situés au dessus de la diagonale, en ne tenant pas compte des termes nuls situés au dessus du premier terme non nul d'une colonne.

On aura pour l'exemple pré-cité l'arrangement suivant:

	1	2	3	4	5	6
1	1	3	6	10		
		2	5	9		
2			4	8		
				7		
					41	47
					40	46

On notera que le chargement se fait juste après l'assemblage et dans le même tableau.

exemple d'assemblage d'une structure plane:



	1	2	3	4	5	6
1						
2		1 3		6 10		
3		2		5 9		
4				4 8		
5				7		
6						

le tableau d'adresses:

IAD pour la barre 2-4

sera:

IAD = 

3	4	7	8
---	---	---	---

on rappelle que :

$$IAD(I) = NDL \cdot (J1 - 1) + I$$

$$I = 1, NDL.$$

$$IAD(I + NDL) = NDL \cdot (J2 - 1) + I$$

$$J1 = IDEBUT(I).$$

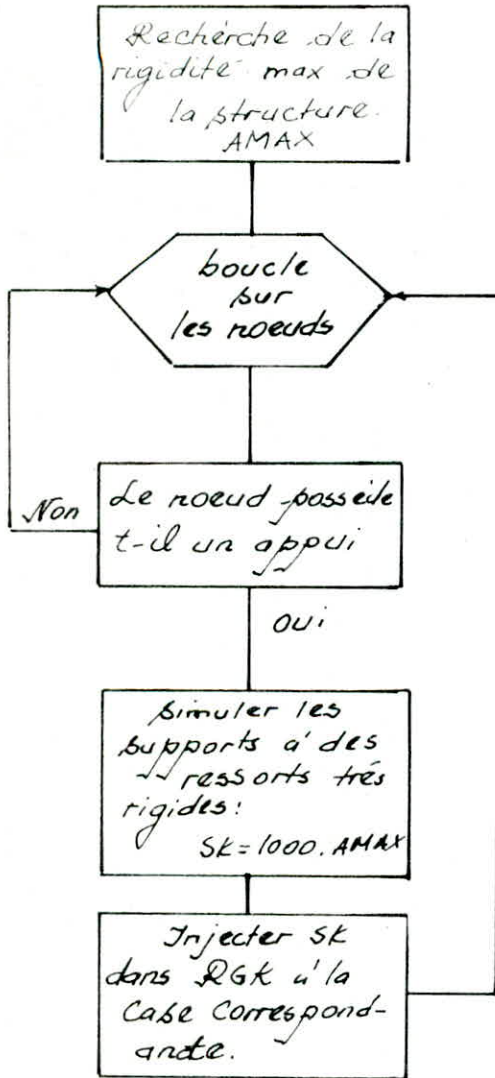
$$J2 = JFIN(I).$$

sous-programme 'ISUPTR':

La matrice de rigidité de la structure obtenue en assemblant les matrices de rigidité des éléments libres a un nombre de singularité égal au nombre max de modes de déplacements d'ensemble possibles. Cette <sup>mat. de la</sup> structure libre est donc semi-définie positive. Les conditions d'appuis, si elles sont en nombre suffisant empêchent toute possibilité de déplacement et rendent donc la matrice définie positive.

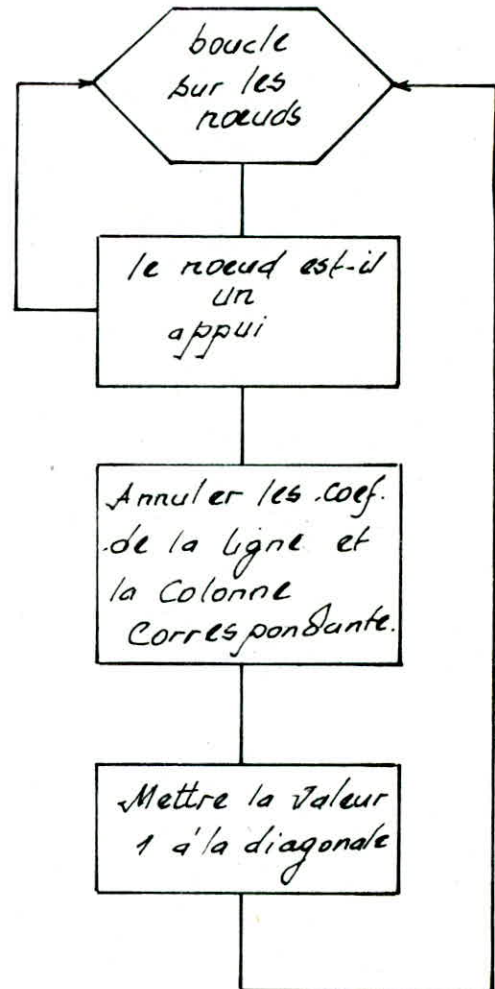
Sous-programme 'suptre'

cette subroutine introduit les conditions d'appuis avec la méthode du terme diagonal dominant.



Sous-programme 'suptre 2'

cette subroutine introduit les conditions d'appuis par la méthode du terme diagonal unitaire

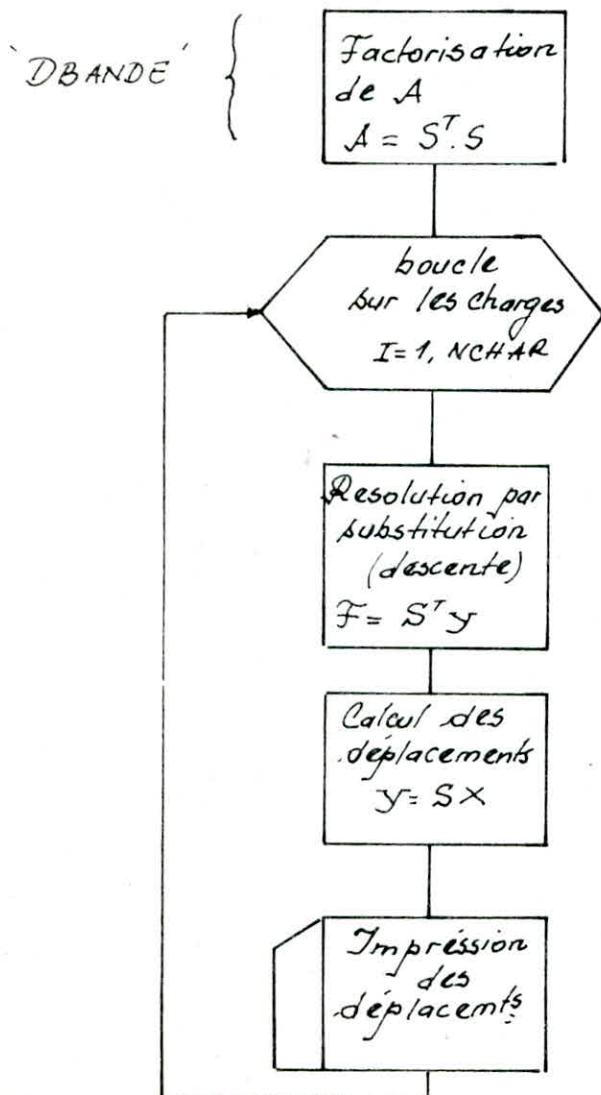


## Sous-programme 'DBANDE':

Après avoir introduit les conditions d'appuis, On passera à la phase de résolution du système linéaire.

le sous-programme 'SBANDE' fait partie du processus de résolution du système d'équations linéaires.

Résolution du système par la méthode de Cholesky.



$$F = K \cdot X = S^T S \cdot X$$

$$F = S^T \cdot y$$

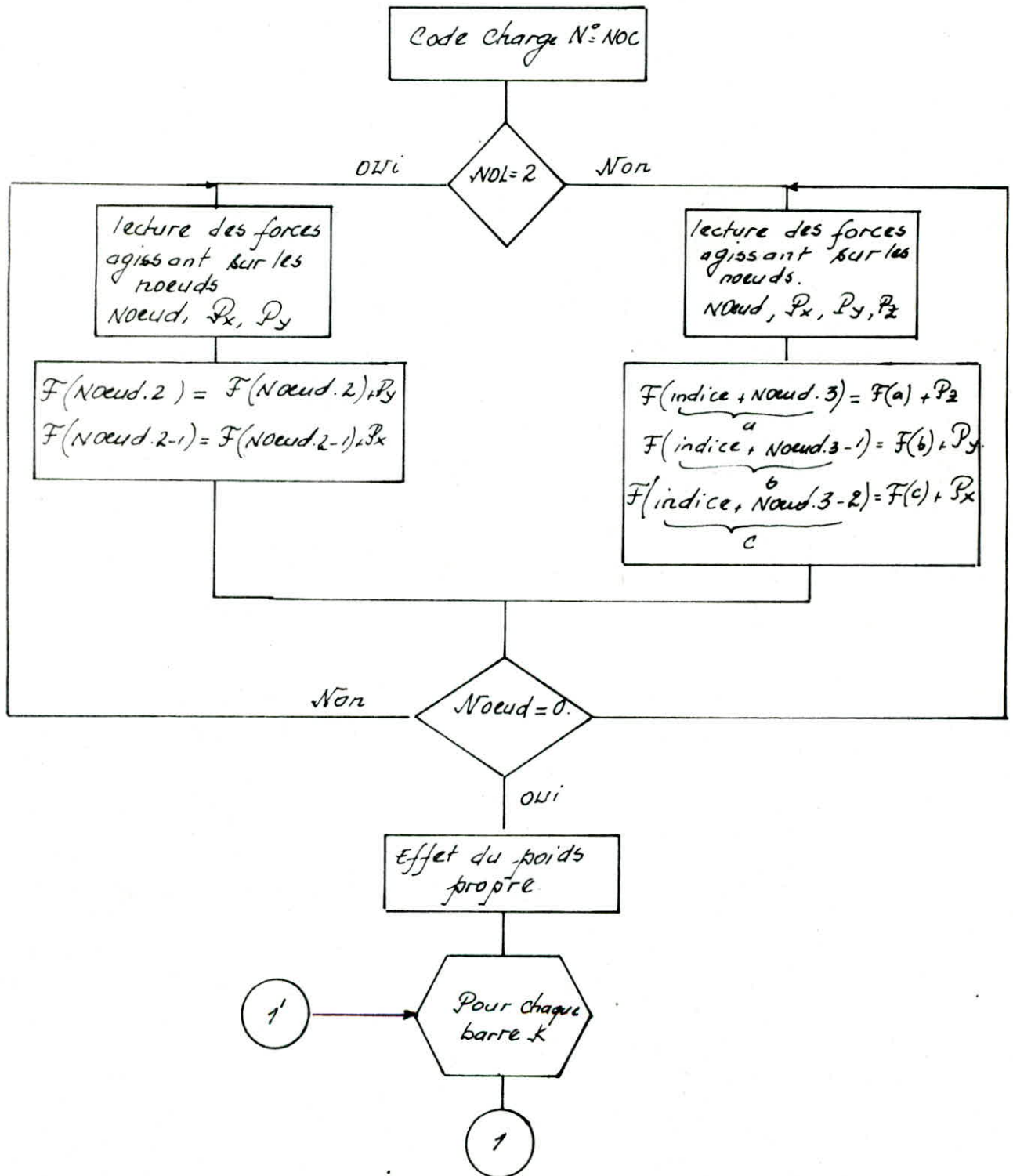
$$y = S \cdot X$$

'SBANDE'

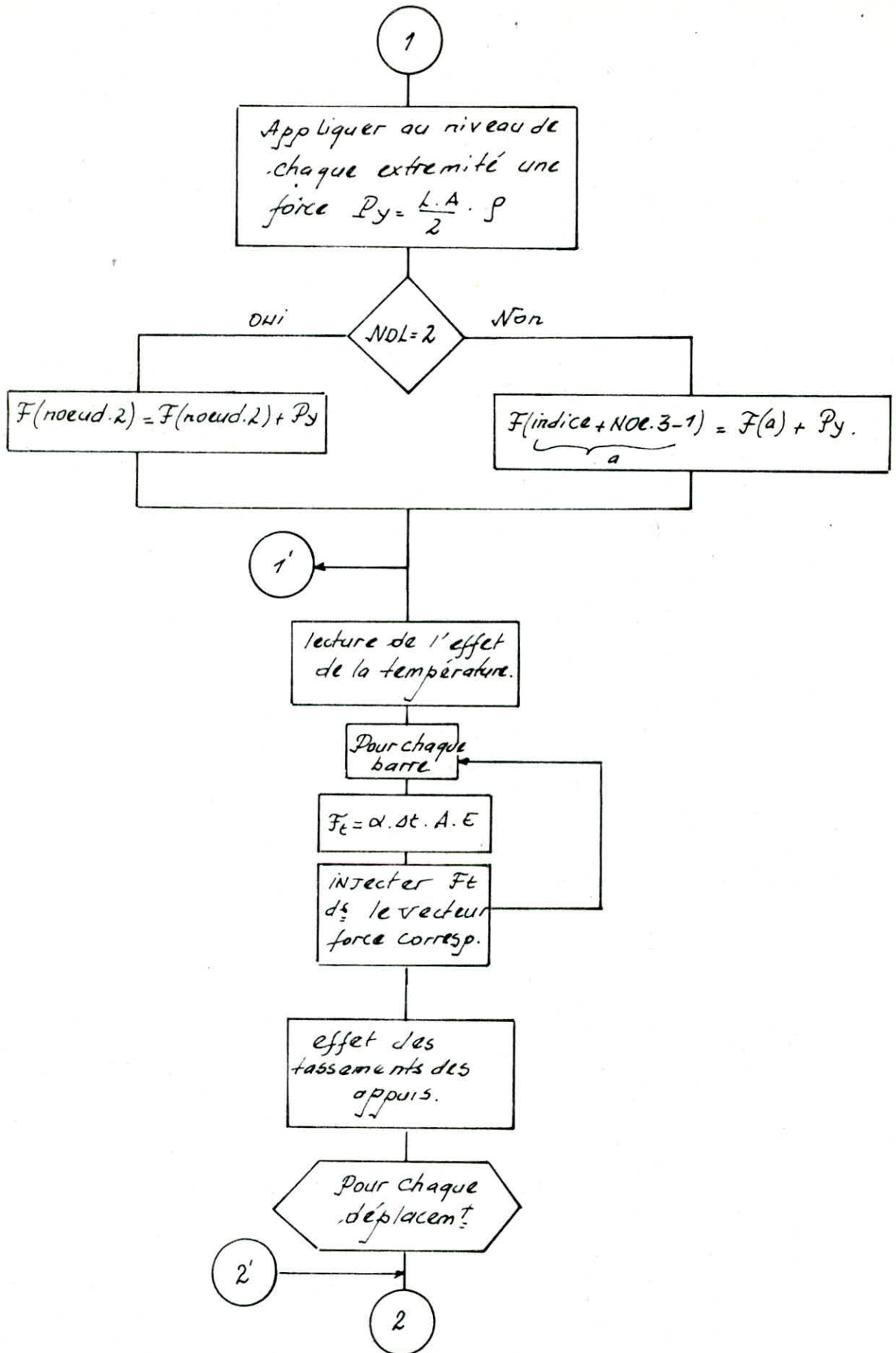
la méthode de Cholesky est très lente comparée à la méthode de Gauss, mais elle occupe moins de mémoire et utilise moins d'opérations.

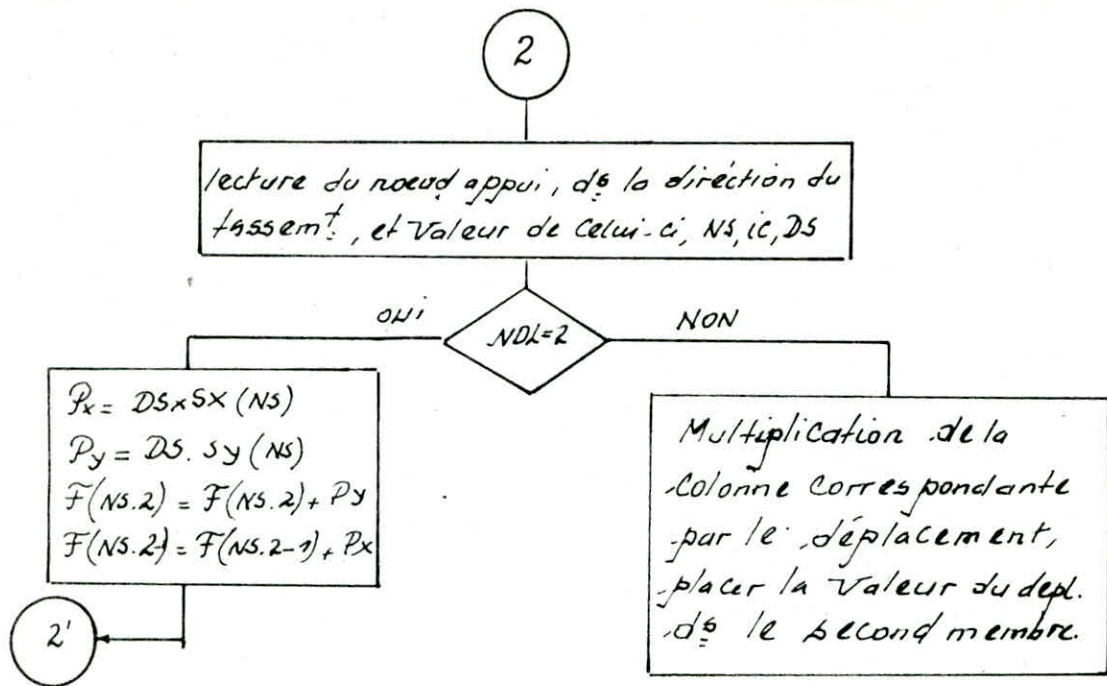
# Sous-programme 'Charge'

Les conditions de chargement sont introduites par le biais de la subroutine 'charge'.



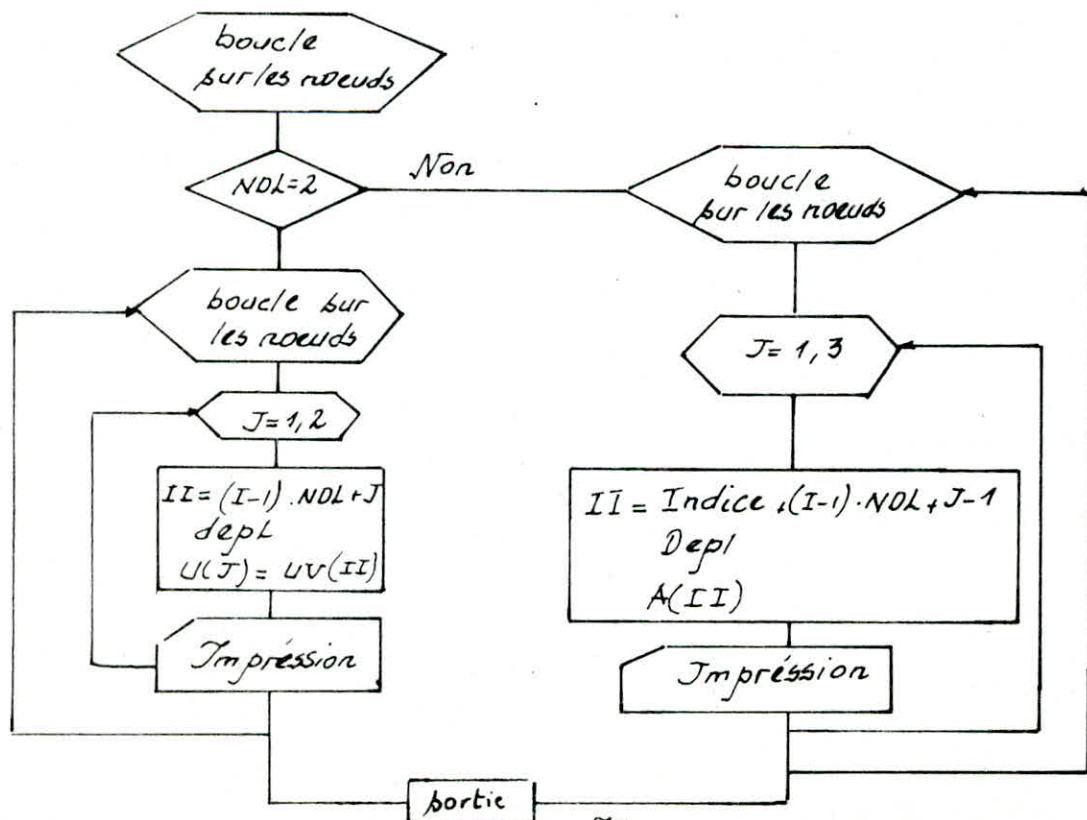






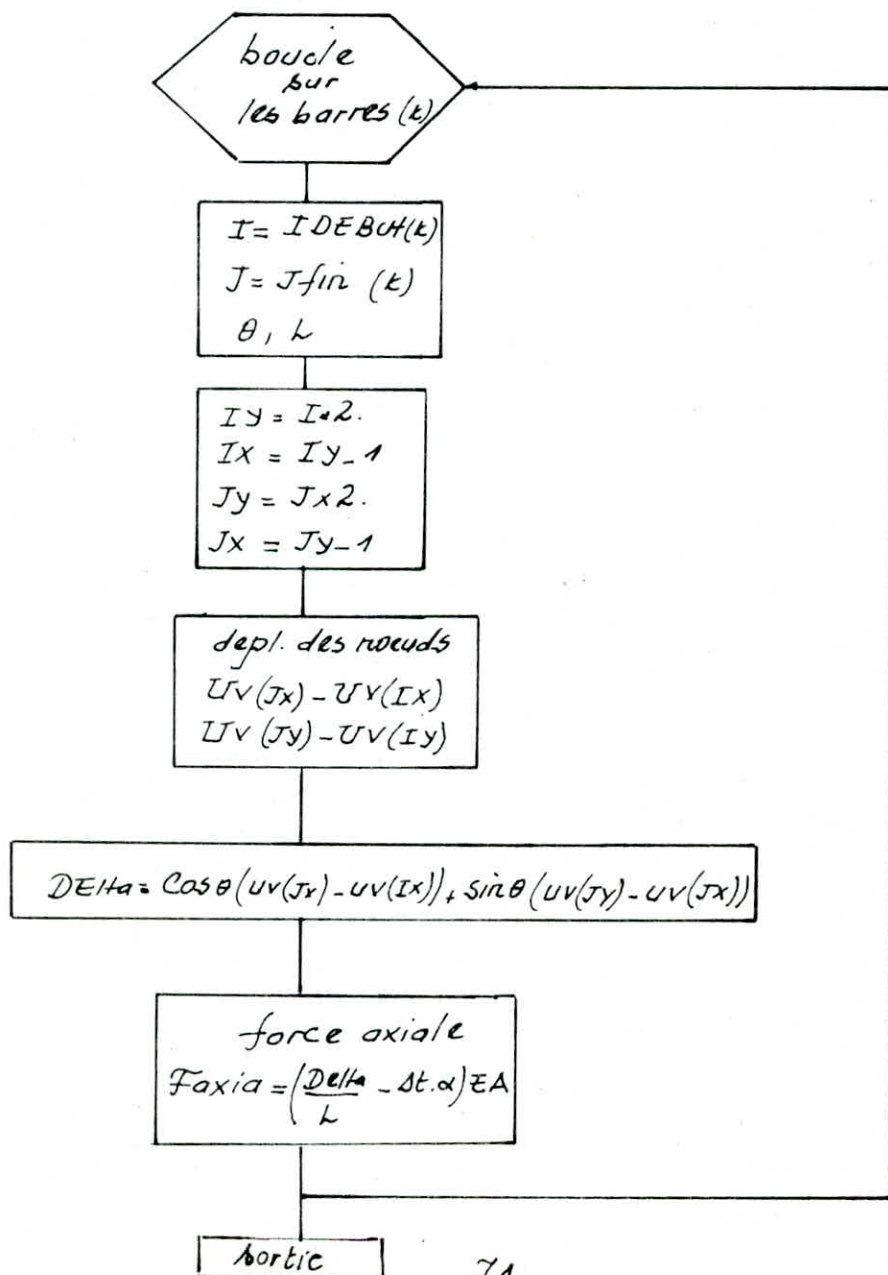
### sous-programme 'Deplac':

cette subroutine permet d'imprimer les déplacements des noeuds après avoir résolu le système linéaire.



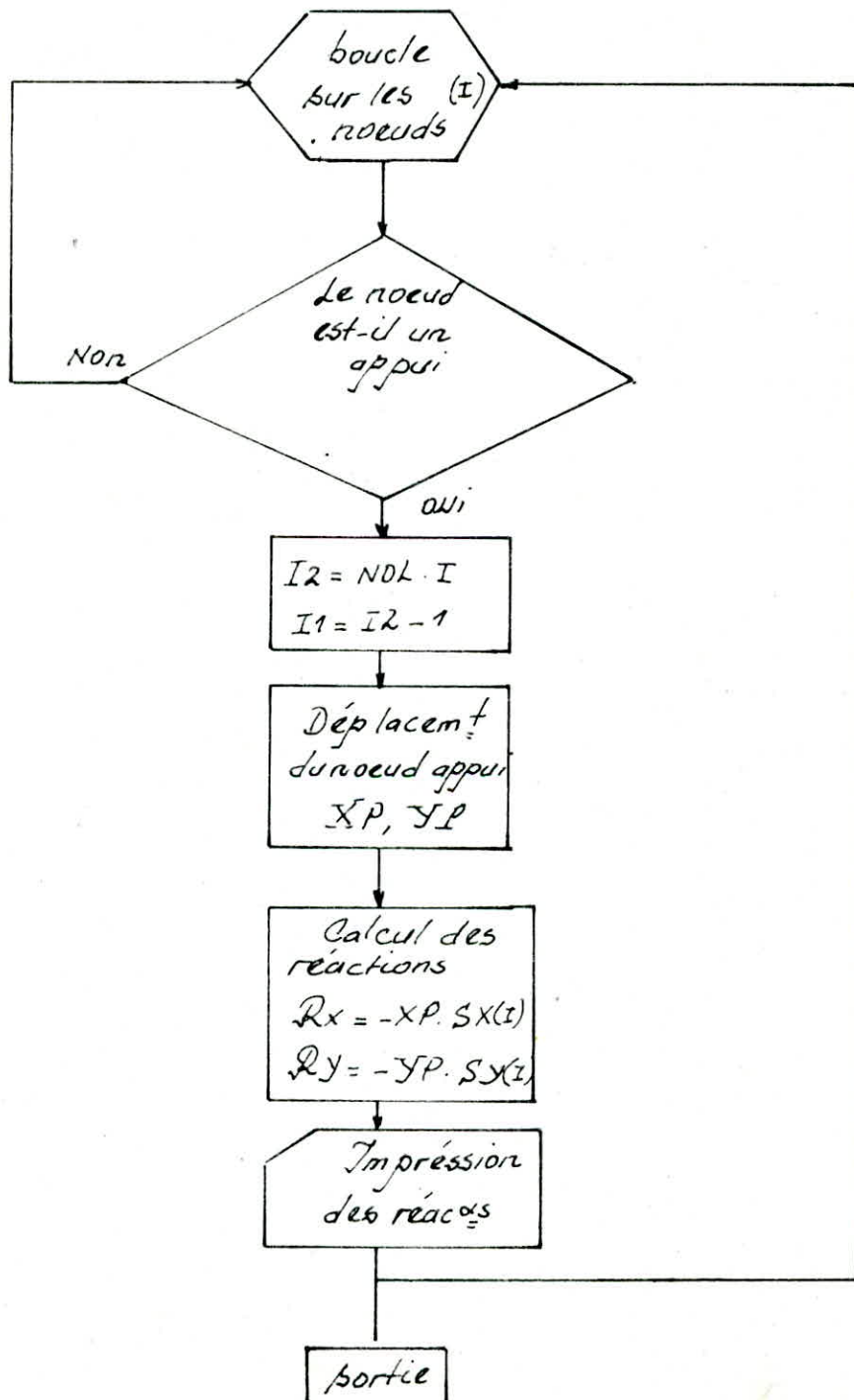
sous-programme 'Fortre':

Après avoir déterminé les déplacements des noeuds le sous-programme 'Fortre' détermine les efforts de chaque barre ainsi que les déformations subies par les éléments. le sous-programme 'Effen' pour les structures spatiales suit le même principe.



## Sous-programme 'Réotré':

ce sous-programme calcule les réactions d'appuis.

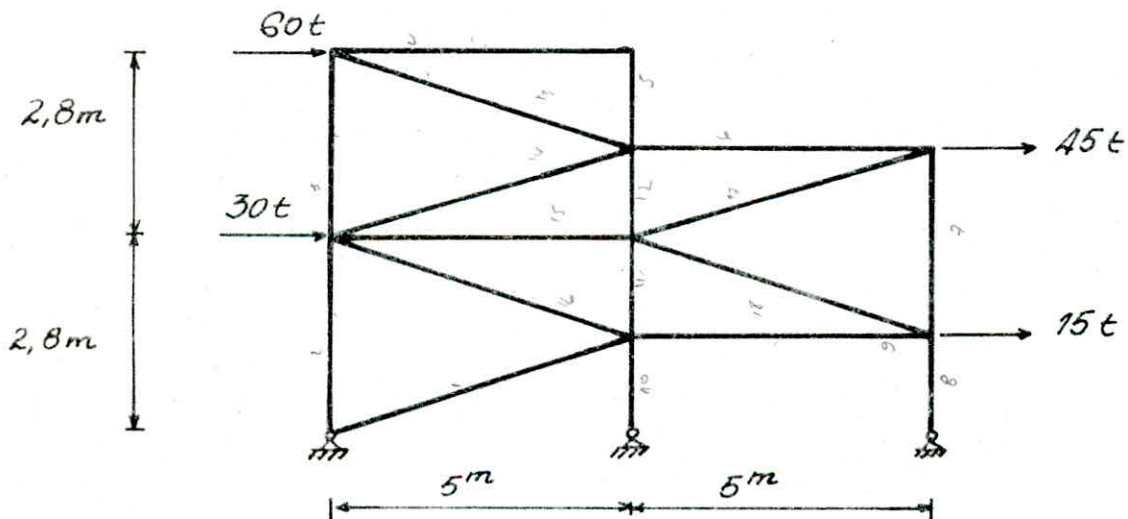


## Exemples de calcul des structures planes et spatiales

1) exemple de calcul d'une ossature plane:  
Palée de stabilité d'un parking.

On détermine pour cet exemple:

- Déplacements des nœuds.
- Efforts et déformations dans toutes les barres.
- Réactions d'appuis.



Nombre de nœuds : 11

Nombre de membrures : 19.

Nombre de matériaux : 1

Nombre de sections : 1

Aire de la section :  $50\text{cm}^2$

Module d'Young :

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

Les résultats de calcul sont donnés ci-après.

ANALYSE HYPERSTATIQUE DES TREILLIS PLANS

CARACTERISTIQUES PRINCIPALES DU TREILLIS

INFORMATIONS GENERALES

NOMBRE DE NOEUDS \_\_\_\_\_ : 11  
 NOMBRE DE MEMBRURES \_\_\_\_\_ : 19  
 NOMBRE DE MATERIAUX \_\_\_\_\_ : 1  
 NOMBRE D'EQUATIONS \_\_\_\_\_ : 22  
 LARGEUR DE BANDE \_\_\_\_\_ : 12

COORDONNEES DES NOEUDS

NOEUD	COORD.X	COORD.Y	TYPE	DEPL.X	DEPL.Y	INCLINAISON DU SUPPORT
1	0.000	0.000	SUPPORT	BLOQUE	BLOQUE	0.000
2	5.000	0.000	SUPPORT	BLOQUE	BLOQUE	0.000
3	10.000	0.000	SUPPORT	BLOQUE	BLOQUE	0.000
4	5.000	1.400	LIBRE	PERMIS	PERMIS	0.000
5	10.000	1.400	LIBRE	PERMIS	PERMIS	0.000
6	0.000	2.800	LIBRE	PERMIS	PERMIS	0.000
7	5.000	2.800	LIBRE	PERMIS	PERMIS	0.000
8	10.000	4.200	LIBRE	PERMIS	PERMIS	0.000
9	5.000	4.200	LIBRE	PERMIS	PERMIS	0.000
10	0.000	5.600	LIBRE	PERMIS	PERMIS	0.000
11	5.000	5.600	LIBRE	PERMIS	PERMIS	0.000

INCIDENCES DES MEMBRURES

NO. MEMBRURE                      NOEUD DE DEPART                      NOEUD DE LA FIN

NO. MEMBRURE	AIRE DE LA SECTION	COEF. THERM.
1	0.500000D-02	0.117000D-04
2	0.500000D-02	0.117000D-04
3	0.500000D-02	0.117000D-04
4	0.500000D-02	0.117000D-04
5	0.500000D-02	0.117000D-04
6	0.500000D-02	0.117000D-04
7	0.500000D-02	0.117000D-04
8	0.500000D-02	0.117000D-04
9	0.500000D-02	0.117000D-04
10	0.500000D-02	0.117000D-04
11	0.500000D-02	0.117000D-04
12	0.500000D-02	0.117000D-04
13	0.500000D-02	0.117000D-04
14	0.500000D-02	0.117000D-04
15	0.500000D-02	0.117000D-04
16	0.500000D-02	0.117000D-04
17	0.500000D-02	0.117000D-04
18	0.500000D-02	0.117000D-04
19	0.500000D-02	0.117000D-04

\*\*\*\*\*

DONNEES D'ENTREES DU CHARGEMENT NO.: 1

FORCES APPLIQUEES SUR LES NOEUDS

NO. NOEUD	FORCE.X	FORCE.Y
10	60.000	0.000
6	30.000	0.000
8	45.000	0.000
5	15.000	0.000
SOMME DES FORCES		0.000

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

DEPLACEMENT DES NOEUDS

NO. NODE

DEPL. X

DEPL. Y

1	0.00000482	0.00000462
2	0.00000498	-0.00000101
3	0.00000000	-0.00000361
4	0.04072610	-0.00490483
5	0.04271403	-0.00737442
6	0.06295895	0.01335387
7	0.07640296	-0.00445536
8	0.11015685	-0.01154261
9	0.11531111	-0.00853126
10	0.15468980	0.01783387
11	0.15468980	-0.00853126

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

EFFORTS ET DEFORMATIONS AXIALES DES MEMBRURES

BAURE	FORCE	DEFORMATION
1	50.060	0.013349
11	16.800	0.004480
4	-0.6230+02	-0.030811
5	0.000	0.000000
6	51.067	0.025253
7	-0.9570+01	-0.004556
8	-0.7230+02	-0.035746
9	76.621	0.037889
10	-0.1080+02	-0.005154
11	-0.3060+02	-0.004076
12	57.971	0.028667
13	3.871	0.000449
14	-0.6790+02	-0.033580
15	-0.1560+02	-0.004168
16	4.175	0.001988
17	-0.3680+02	-0.004904
18	79.148	0.039139
19	-0.5530+02	-0.007371

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

REACTIONS-AUX SUPPORTS

1	-70.783	-70.719	0.000005	0.000005
2	-76.217	15.438	0.000005	-0.000001
3	0.000	55.281	0.000000	-0.000004

\*\*\*\*\*

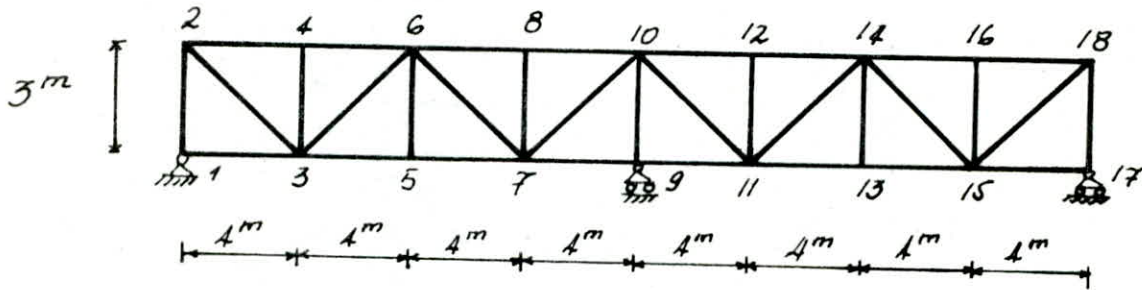


2) exemple de calcul de la ligne d'influence :

On détermine pour cet exemple :

• Ligne d'influence des réactions d'appuis '1' et '9'.

• Ligne d'influence des efforts dans les barres 16, 22, 18, 9.



Nombre de barres : 33

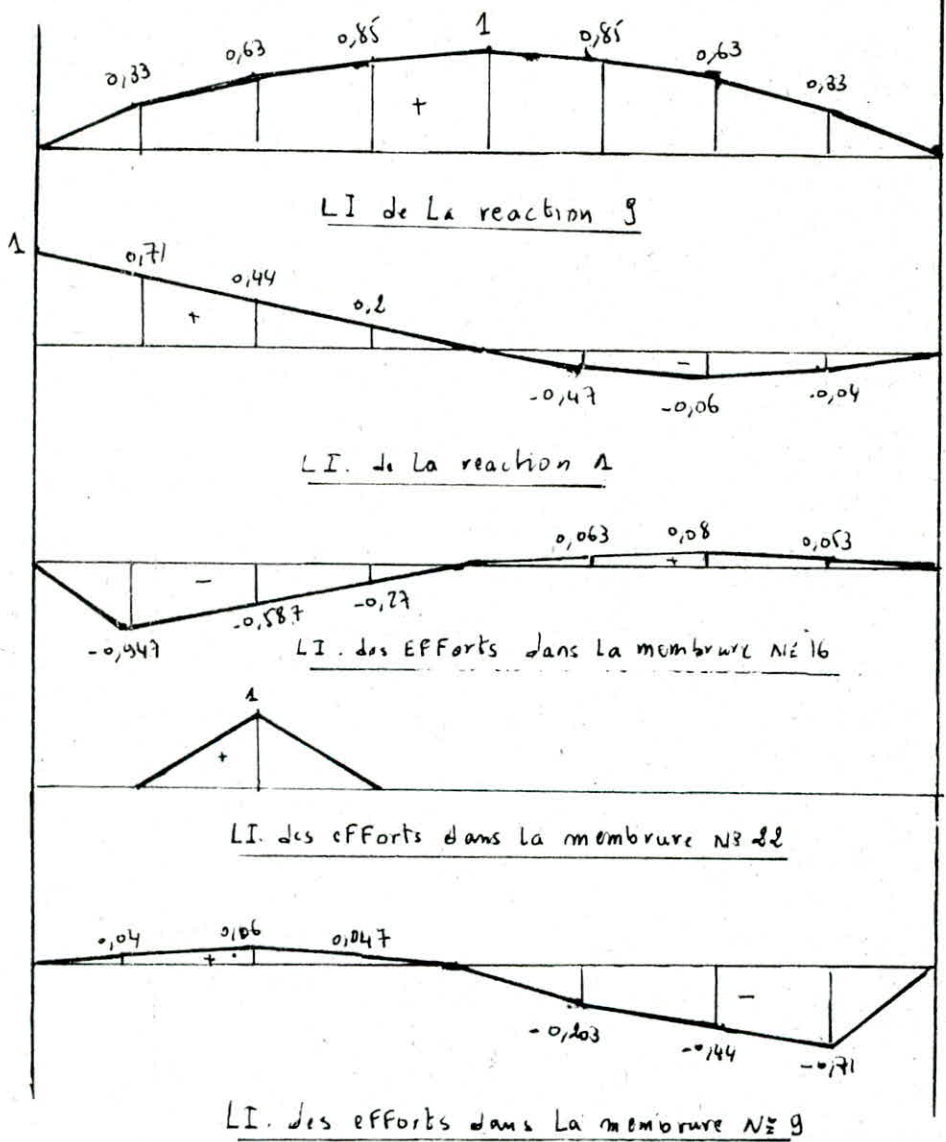
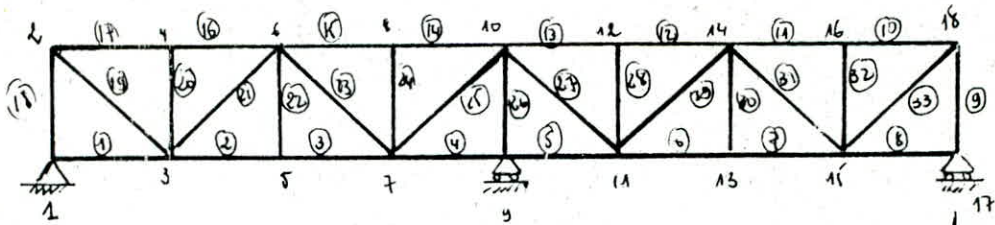
Nombre de noeuds : 18

Nombre de matériaux : 1.

Nombre de sections : 1

Aire des sections :  $50 \text{ cm}^2$

Les résultats de calcul sont donnés ci-après.



## LIGNE 0"INFLUENCE DES REACTIONS

REACTION NO: 9

- CHARGE UNITAIRE EN: 1----->LI=0.000  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 3----->LI=0.329  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 5----->LI=0.619  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 7----->LI=0.845  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 9----->LI=1.000  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 11----->LI=0.845  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 13----->LI=0.619  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 15----->LI=0.329  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 17----->LI=0.000

## LIGNE 0"INFLUENCE DES REACTIONS

REACTION NO: 1

- CHARGE UNITAIRE EN: 1----->LI=1.000  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 3----->LI=0.710  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 5----->LI=0.440  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 7----->LI=0.203  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 9----->LI=0.000  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 11----->LI=-.047  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 13----->LI=-.060  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 15----->LI=-.040  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 17----->LI=0.000

## \* LIGNE 0"INFLUENCE DES EFFORTS DANS LES MEMBRURES\*

\*\*\*\*\* MEMBRURE NO: 16\*\*\*\*\*

- CHARGE UNITAIRE EN: 1----->LI= 0.000  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 3----->LI= -0.947  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 5----->LI= -0.587  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 7----->LI= -0.270  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 9----->LI= 0.000  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 11----->LI= 0.063  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 13----->LI= 0.080  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 15----->LI= 0.053  
 - CHARGE UNITAIRE EN: 17----->LI= 0.000

\*\*\*\*\* MEMBRURE NO: 22\*\*\*\*\*

- CHARGE UNITAIRE EN: 1----->LI= 0.000

- CHARGE UNITAIRE EN: 3----->LI= 0.000
- CHARGE UNITAIRE EN: 5----->LI= 1.000
- CHARGE UNITAIRE EN: 7----->LI= 0.000
- CHARGE UNITAIRE EN: 9----->LI= 0.000
- CHARGE UNITAIRE EN: 11----->LI= 0.000
- CHARGE UNITAIRE EN: 13----->LI= 0.000
- CHARGE UNITAIRE EN: 15----->LI= 0.000
- CHARGE UNITAIRE EN: 17----->LI= 0.000

\*\*\*\*\* MEMBRURE NO: 18\*\*\*\*\*

- CHARGE UNITAIRE EN: 1----->LI= 0.000
- CHARGE UNITAIRE EN: 3----->LI= -0.710
- CHARGE UNITAIRE EN: 5----->LI= -0.440
- CHARGE UNITAIRE EN: 7----->LI= -0.203
- CHARGE UNITAIRE EN: 9----->LI= 0.000
- CHARGE UNITAIRE EN: 11----->LI= 0.047
- CHARGE UNITAIRE EN: 13----->LI= 0.060
- CHARGE UNITAIRE EN: 15----->LI= 0.040
- CHARGE UNITAIRE EN: 17----->LI= 0.000

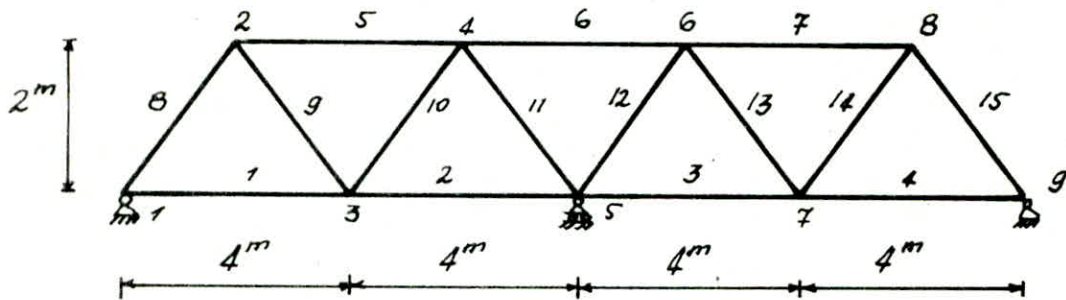
\*\*\*\*\* MEMBRURE NO: 9\*\*\*\*\*

- CHARGE UNITAIRE EN: 1----->LI= 0.000
- CHARGE UNITAIRE EN: 3----->LI= 0.040
- CHARGE UNITAIRE EN: 5----->LI= 0.060
- CHARGE UNITAIRE EN: 7----->LI= 0.047
- CHARGE UNITAIRE EN: 9----->LI= 0.000
- CHARGE UNITAIRE EN: 11----->LI= -0.203
- CHARGE UNITAIRE EN: 13----->LI= -0.440
- CHARGE UNITAIRE EN: 15----->LI= -0.710
- CHARGE UNITAIRE EN: 17----->LI= 0.000

3) exemple de calcul dynamique d'une structure plane :  
Poutre à treillis.

on calcule pour cet exemple :

- Valeurs propres  $\lambda$  classées par ordre croissant.
- Vecteurs propres correspondants.



Nombre de barres : 15

Nombre de noeuds : 9

Nombre de sections différentes : 1

Aire de la section :  $20 \text{ cm}^2$

Module d'élasticité :  $2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$

Densité du matériau : 8.

Les résultats du calcul sont donnés ci-après.

NBRE DE VALEURS PROPRES= 9  
NOMBRE DES NOEUDS= 9  
NOMBRE D'ELEMENTS= 15  
NOMBRE D.D.T= 13

-----RESULTAS DU CALCUL DYNAMIQUE-----

1 VALEUR PROPRES= 0.385E+05  
1VECT.PROP= 0.000E+00 VECT.PROP= 0.000E+00  
2VECT.PROP= 0.796E+00 VECT.PROP= -.753E+00  
3VECT.PROP= 0.737E+00 VECT.PROP= -.712E+00  
4VECT.PROP= 0.741E+00 VECT.PROP= -.534E+00  
5VECT.PROP= 0.105E+01 VECT.PROP= 0.000E+00  
6VECT.PROP= 0.741E+00 VECT.PROP= 0.534E+00  
7VECT.PROP= 0.737E+00 VECT.PROP= 0.712E+00  
8VECT.PROP= 0.796E+00 VECT.PROP= 0.753E+00  
9VECT.PROP= 0.000E+00 VECT.PROP= 0.000E+00

2 VALEUR PROPRES= 0.117E+06  
1VECT.PROP= 0.000E+00 VECT.PROP= 0.000E+00  
2VECT.PROP= 0.349E+00 VECT.PROP= -.171E+01  
3VECT.PROP= -.360E+00 VECT.PROP= -.339E+01  
4VECT.PROP= -.140E+01 VECT.PROP= -.219E+01  
5VECT.PROP= 0.133E+00 VECT.PROP= 0.000E+00  
6VECT.PROP= -.140E+01 VECT.PROP= 0.219E+01  
7VECT.PROP= -.360E+00 VECT.PROP= 0.339E+01  
8VECT.PROP= 0.349E+00 VECT.PROP= 0.171E+01  
9VECT.PROP= 0.000E+00 VECT.PROP= 0.000E+00

3 VALEUR PROPRES= 0.135E+06  
1VECT.PROP= 0.000E+00 VECT.PROP= 0.000E+00  
2VECT.PROP= -.170E+01 VECT.PROP= 0.265E+01  
3VECT.PROP= -.652E+00 VECT.PROP= 0.396E+01  
4VECT.PROP= 0.147E+00 VECT.PROP= 0.130E+01  
5VECT.PROP= 0.106E-05 VECT.PROP= 0.000E+00  
6VECT.PROP= -.147E+00 VECT.PROP= 0.130E+01  
7VECT.PROP= 0.652E+00 VECT.PROP= 0.396E+01  
8VECT.PROP= 0.170E+01 VECT.PROP= 0.265E+01  
9VECT.PROP= 0.000E+00 VECT.PROP= 0.000E+00

4 VALEUR PROPRES= 0.246E+06  
1VECT.PROP= 0.000E+00 VECT.PROP= 0.000E+00  
2VECT.PROP= -.124E+01 VECT.PROP= 0.235E+00  
3VECT.PROP= -.196E+01 VECT.PROP= -.160E+01  
4VECT.PROP= -.132E+01 VECT.PROP= -.228E+01  
5VECT.PROP= -.245E-05 VECT.PROP= 0.000E+00  
6VECT.PROP= 0.132E+01 VECT.PROP= -.228E+01  
7VECT.PROP= 0.196E+01 VECT.PROP= -.160E+01  
8VECT.PROP= 0.124E+01 VECT.PROP= 0.235E+00  
9VECT.PROP= 0.000E+00 VECT.PROP= 0.000E+00

5 VALEUR PROPRES= 0.488E+06  
1VECT.PROP= 0.000E+00 VECT.PROP= 0.000E+00  
2VECT.PROP= 0.151E+01 VECT.PROP= -.483E+00

4VECT.PROP=	0.383E+00	VECT.PROP=	0.104E+01
5VECT.PROP=	-.207E+01	VECT.PROP=	0.000E+00
6VECT.PROP=	0.383E+00	VECT.PROP=	-.104E+01
7VECT.PROP=	-.117E+00	VECT.PROP=	0.699E+00
8VECT.PROP=	0.151E+01	VECT.PROP=	0.483E+00
9VECT.PROP=	0.000E+00	VECT.PROP=	0.000E+00

6 VALEUR PROPRE= 0.508E+06

1VECT.PROP=	0.000E+00	VECT.PROP=	0.000E+00
2VECT.PROP=	-.174E+00	VECT.PROP=	-.100E+01
3VECT.PROP=	0.137E+01	VECT.PROP=	0.190E+00
4VECT.PROP=	-.768E+00	VECT.PROP=	0.174E+01
5VECT.PROP=	-.492E+00	VECT.PROP=	0.000E+00
6VECT.PROP=	-.768E+00	VECT.PROP=	-.174E+01
7VECT.PROP=	0.137E+01	VECT.PROP=	-.190E+00
8VECT.PROP=	-.174E+00	VECT.PROP=	0.100E+01
9VECT.PROP=	0.000E+00	VECT.PROP=	0.000E+00

7 VALEUR PROPRE= 0.640E+06

1VECT.PROP=	0.000E+00	VECT.PROP=	0.000E+00
2VECT.PROP=	0.136E+01	VECT.PROP=	0.138E+01
3VECT.PROP=	-.112E+01	VECT.PROP=	0.285E+00
4VECT.PROP=	0.955E+00	VECT.PROP=	-.816E+00
5VECT.PROP=	0.308E-04	VECT.PROP=	0.000E+00
6VECT.PROP=	-.955E+00	VECT.PROP=	-.815E+00
7VECT.PROP=	0.112E+01	VECT.PROP=	0.285E+00
8VECT.PROP=	-.136E+01	VECT.PROP=	0.137E+01
9VECT.PROP=	0.000E+00	VECT.PROP=	0.000E+00

8 VALEUR PROPRE= 0.127E+07

1VECT.PROP=	0.000E+00	VECT.PROP=	0.000E+00
2VECT.PROP=	-.859E+00	VECT.PROP=	-.113E+01
3VECT.PROP=	0.279E-01	VECT.PROP=	-.459E+00
4VECT.PROP=	0.501E+00	VECT.PROP=	-.650E-01
5VECT.PROP=	-.404E+00	VECT.PROP=	0.000E+00
6VECT.PROP=	0.501E+00	VECT.PROP=	0.650E-01
7VECT.PROP=	0.279E-01	VECT.PROP=	0.459E+00
8VECT.PROP=	-.859E+00	VECT.PROP=	0.113E+01
9VECT.PROP=	0.000E+00	VECT.PROP=	0.000E+00

9 VALEUR PROPRE= 0.158E+07

1VECT.PROP=	0.000E+00	VECT.PROP=	0.000E+00
2VECT.PROP=	0.116E+01	VECT.PROP=	0.110E+01
3VECT.PROP=	0.678E-02	VECT.PROP=	0.246E+00
4VECT.PROP=	-.125E+01	VECT.PROP=	0.116E+01
5VECT.PROP=	-.367E-05	VECT.PROP=	0.000E+00
6VECT.PROP=	0.125E+01	VECT.PROP=	0.116E+01
7VECT.PROP=	-.676E-02	VECT.PROP=	0.246E+00
8VECT.PROP=	-.116E+01	VECT.PROP=	0.110E+01
9VECT.PROP=	0.000E+00	VECT.PROP=	0.000E+00

4) Exemple de calcul d'une ossature spatiale :

On détermine pour cet exemple :

- Les déplacements des nœuds.
- Les efforts dans les barres
- Réactions d'appuis.

cette structure est soumise à deux cas de chargements :

1) son poids propre.

2) Déplacements imposés de ses appuis :

support N° 1 :  $D_x = 0$        $D_y = 0.01\text{m}$        $D_z = 0$ .

support N° 37 :  $D_x = 0$        $D_y = -0.01\text{m}$        $D_z = 0$

Nombre de nœuds : 41.

Nombre de barres : 128.

Nombre de sections différentes : 1.

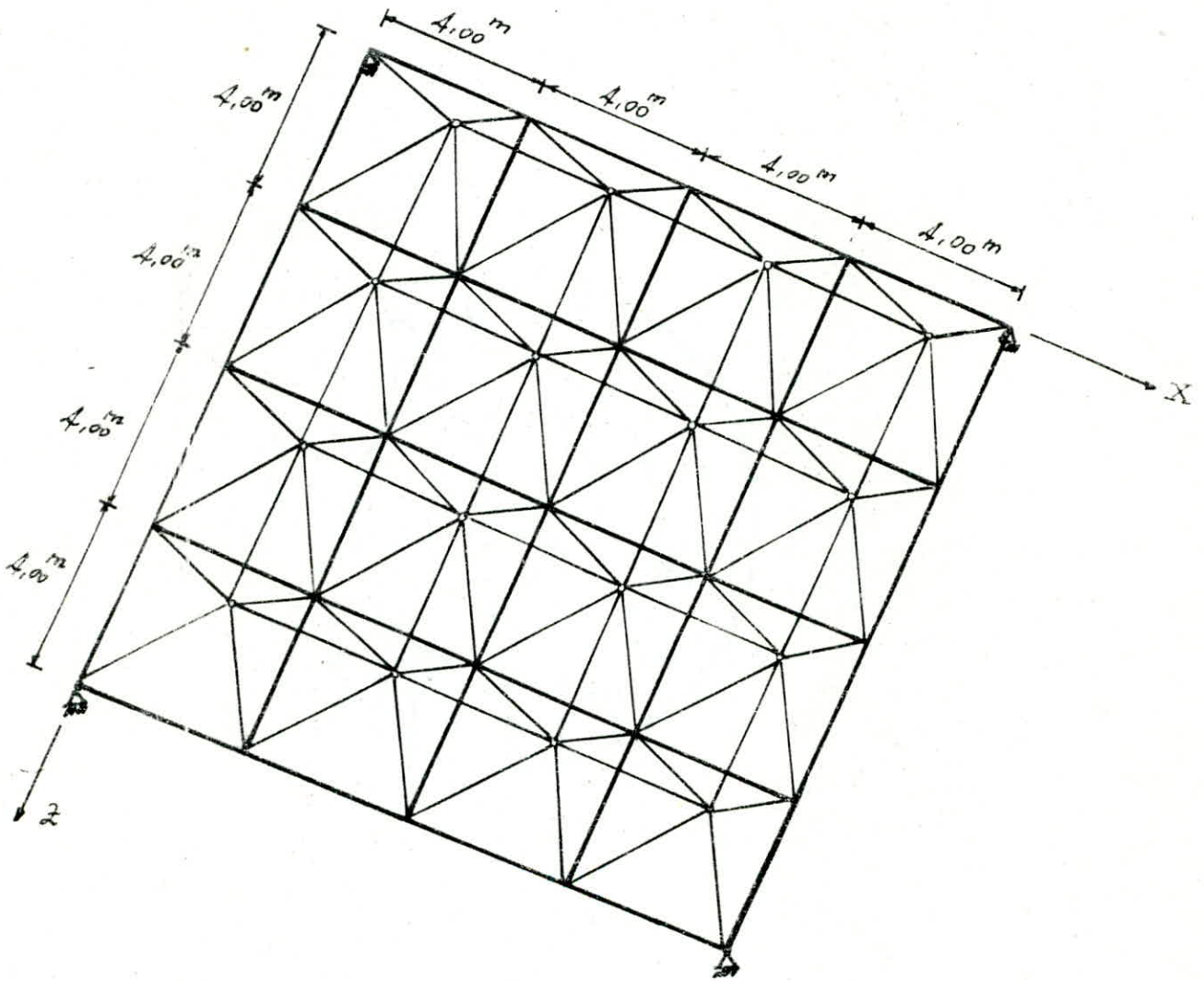
Aire de chaque section :  $0,02\text{ m}^2$

Nombre de Modules d'élasticité : 1.

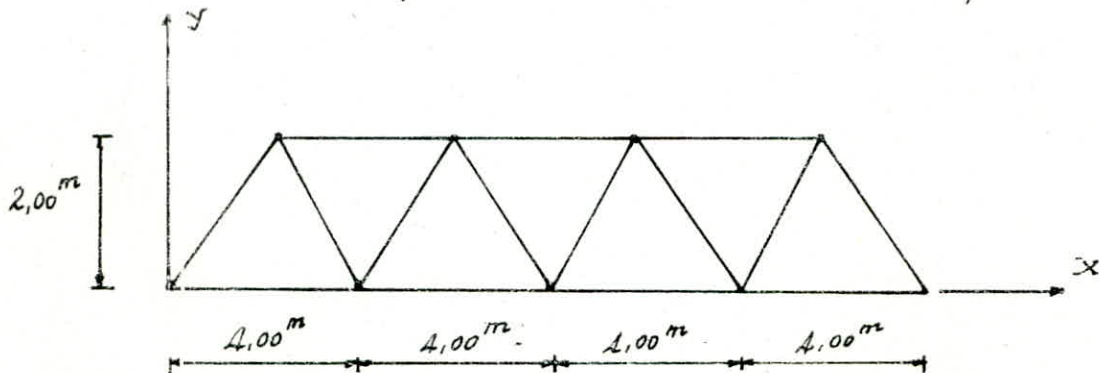
Module d'Young :  $2,1 \cdot 10^6\text{ kg/cm}^2$ .

Densité du matériau :  $8.000\text{ kg/m}^3$ .





*. Perspective de la structure spatiale.*



COBATURE SPATIALE (AXE Y VERTICAL)

CARACTERISTIQUES PRINCIPALES DU TREILLIS

INFORMATIONS GENERALES

NOMBRE DE NOEUDS	_____ :	41
NOMBRE DE MEMBRURES	_____ :	128
NOMBRE DE MATERIAUX	_____ :	1
NOMBRE DE SECTIONS	_____ :	1
NOMBRE DE CAS DE CHARGEMENT	_____ :	2

COORDONNEES DES NOEUDS

NOUVEAU NOEUD	COORD.X	COORD.Y	COORD.Z	CODE AP
1	0.000000	0.000000	0.000000	111
2	4.000000	0.000000	0.000000	0
3	8.000000	0.000000	0.000000	0
4	12.000000	0.000000	0.000000	0
5	16.000000	0.000000	0.000000	111
6	2.000000	2.000000	2.000000	0
7	6.000000	2.000000	2.000000	0
8	10.000000	2.000000	2.000000	0
9	14.000000	2.000000	2.000000	0
10	0.000000	0.000000	4.000000	0
11	4.000000	0.000000	4.000000	0
12	8.000000	0.000000	4.000000	0
13	12.000000	0.000000	4.000000	0
14	16.000000	0.000000	4.000000	0
15	2.000000	2.000000	6.000000	0
16	6.000000	2.000000	6.000000	0
17	10.000000	2.000000	6.000000	0
18	14.000000	2.000000	6.000000	0
19	0.000000	0.000000	8.000000	0
20	4.000000	0.000000	8.000000	0
21	8.000000	0.000000	8.000000	0
22	12.000000	0.000000	8.000000	0
23	16.000000	0.000000	8.000000	0
24	2.000000	2.000000	10.000000	0

00	0.000000	2.000000	10.000000	0
01	10.000000	0.000000	10.000000	0
02	14.000000	0.000000	10.000000	0
03	7.000000	0.000000	12.000000	0
04	4.000000	0.000000	12.000000	0
05	0.000000	0.000000	12.000000	0
06	12.000000	0.000000	12.000000	0
07	10.000000	0.000000	12.000000	0
08	0.000000	0.000000	14.000000	0
09	0.000000	0.000000	14.000000	0
10	11.000000	0.000000	14.000000	0
11	14.000000	0.000000	14.000000	0
12	0.000000	0.000000	15.000000	111
13	7.000000	0.000000	15.000000	0
14	0.000000	0.000000	15.000000	0
15	12.000000	0.000000	15.000000	0
16	10.000000	0.000000	15.000000	111

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

INCIDENCE DES MEMBRURES

NOUVEAU	NOUVEAU DEPART	NOUVEAU FIN	SECTION	MODULE E
	1	2	.200000-02	.210000+08
	3	4	.200000-02	.210000+08
	5	6	.200000-02	.210000+08
	7	8	.200000-02	.210000+08
	9	10	.200000-02	.210000+08
	11	12	.200000-02	.210000+08
	13	14	.200000-02	.210000+08
	15	16	.200000-02	.210000+08
	17	18	.200000-02	.210000+08
	19	20	.200000-02	.210000+08
	21	22	.200000-02	.210000+08
	23	24	.200000-02	.210000+08
	25	26	.200000-02	.210000+08
	27	28	.200000-02	.210000+08
	29	30	.200000-02	.210000+08
	31	32	.200000-02	.210000+08
	33	34	.200000-02	.210000+08
	35	36	.200000-02	.210000+08
	37	38	.200000-02	.210000+08
	39	40	.200000-02	.210000+08
	41	42	.200000-02	.210000+08
	43	44	.200000-02	.210000+08
	45	46	.200000-02	.210000+08
	47	48	.200000-02	.210000+08
	49	50	.200000-02	.210000+08
	51	52	.200000-02	.210000+08
	53	54	.200000-02	.210000+08
	55	56	.200000-02	.210000+08
	57	58	.200000-02	.210000+08
	59	60	.200000-02	.210000+08
	61	62	.200000-02	.210000+08
	63	64	.200000-02	.210000+08
	65	66	.200000-02	.210000+08
	67	68	.200000-02	.210000+08
	69	70	.200000-02	.210000+08
	71	72	.200000-02	.210000+08
	73	74	.200000-02	.210000+08
	75	76	.200000-02	.210000+08
	77	78	.200000-02	.210000+08
	79	80	.200000-02	.210000+08
	81	82	.200000-02	.210000+08
	83	84	.200000-02	.210000+08
	85	86	.200000-02	.210000+08
	87	88	.200000-02	.210000+08
	89	90	.200000-02	.210000+08
	91	92	.200000-02	.210000+08
	93	94	.200000-02	.210000+08
	95	96	.200000-02	.210000+08
	97	98	.200000-02	.210000+08
	99	100	.200000-02	.210000+08





\*\*\*\*\*  
CAS DE CHARGE NO.: 1

CHARGE AUX NOEUDS

NO.NOEUD	FORCE.X	FORCE.Y	FORCE.Z
0	0.0000000+00	0.0000000+00	0.0000000+00

POIDS PROPRE

NO: BARRE DENSITE

toutes les barres 8.000000

\*\*\*\*\*  
CAS DE CHARGE NO.: 2

CHARGE AUX NOEUDS

NO.NOEUD	FORCE.X	FORCE.Y	FORCE.Z
0	0.0000000+00	0.0000000+00	0.0000000+00

DEPLACEMENTS IMPOSES DES APPUIS

NO.NOEUD	DEPL.X	DEPL.Y	DEPL.Z
1	0.000000	0.010000	0.000000
37	0.000000	-0.010000	0.000000

RESULTATS

CAS DE CHARGE NO.: 1

\*\*\*\*\*  
DEPLACEMENTS DES NOEUDS

\*\*\*\*\*

NO.NOEUD	DEPL.X	DEPL.Y	DEPL.Z
1	0.0000000+00	0.0000000+00	0.0000000+00
2	-0.6176740-04	-0.1304780-02	-0.1853300-04
3	0.7495240-19	-0.1800710-02	0.6700940-05
4	0.6176740-04	-0.1304780-02	-0.1853300-04
5	0.0000000+00	0.0000000+00	0.0000000+00
6	0.3161120-03	-0.1082330-02	-0.3161120-03
7	0.1242260-03	-0.1780750-02	0.1297000-03
8	-0.1242260-03	-0.1780750-02	0.1297000-03
9	-0.3161120-03	-0.1082330-02	0.3161120-03
10	-0.1853300-04	-0.1304780-02	-0.6176740-04
11	-0.3295450-04	-0.1828890-02	-0.3295450-04
12	0.2290550-10	-0.2071550-02	-0.7720550-05
13	0.3295450-04	-0.1828890-02	-0.3295450-04
14	0.1853300-04	-0.1304780-02	-0.6176740-04
15	0.1297000-03	-0.1780750-02	0.1242260-03
16	0.5470810-04	-0.2078880-02	0.5470810-04
17	-0.5470810-04	-0.2078880-02	-0.5470810-04
18	-0.1297000-03	-0.1780750-02	0.1242260-03
19	0.6700940-05	-0.1800710-02	0.3918850-19
20	-0.7720550-05	-0.2071550-02	0.1210130-18
21	0.2690550-10	-0.2203070-02	0.1706640-18
22	0.7720550-05	-0.2071550-02	0.1796770-18
23	-0.6700940-05	-0.1800710-02	0.4403250-10
24	0.1297000-03	-0.1780750-02	-0.1242260-03
25	0.5470810-04	-0.2078880-02	-0.5470810-04
26	-0.5470810-04	-0.2078880-02	-0.5470810-04
27	-0.1297000-03	-0.1780750-02	-0.1242260-03
28	-0.1853300-04	-0.1304780-02	0.6176740-04
29	-0.3295450-04	-0.1828890-02	0.3295450-04
30	0.1645360-18	-0.2071550-02	0.7720550-05
31	0.3295450-04	-0.1828890-02	0.3295450-04
32	0.1853300-04	-0.1304780-02	0.6176740-04
33	0.3161120-03	-0.1082330-02	-0.3161120-03
34	0.1242260-03	-0.1780750-02	-0.1297000-03
35	-0.1242260-03	-0.1780750-02	-0.1297000-03
36	-0.3161120-03	-0.1082330-02	-0.3161120-03
37	0.0000000+00	0.0000000+00	0.0000000+00
38	-0.6176740-04	-0.1304780-02	0.1853300-04
39	0.7623300-20	-0.1800710-02	-0.6700940-05
40	0.6176740-04	-0.1304780-02	0.1853300-04
41	0.0000000+00	0.0000000+00	0.0000000+00

## EFFORTS DANS LES BARRES(+TRACTION)

NO.BARRE	ORIG.	EXTR.	EFF.NORM.OR	EFF.NORM..EXT.
1	1	2	-0.6485580+00	-0.6485580+00
2	2	3	0.6485580+00	0.6485580+00
3	3	4	0.6485580+00	0.6485580+00

4	4	5	-0.6485580+00	-0.6485580+00
5	10	11	-0.1514260+00	-0.1514260+00
6	11	12	0.3460220+00	0.3460220+00
7	12	13	0.3460220+00	0.3460220+00
8	13	14	-0.1514260+00	-0.1514260+00
9	19	20	-0.1514260+00	-0.1514260+00
10	20	21	0.8106580-01	0.8106580-01
11	21	22	0.8106580-01	0.8106580-01
12	22	23	-0.1514260+00	-0.1514260+00
13	23	29	-0.1514260+00	-0.1514260+00
14	29	30	0.3460220+00	0.3460220+00
15	30	31	0.3460220+00	0.3460220+00
16	31	32	-0.1514260+00	-0.1514260+00
17	37	38	-0.6485580+00	-0.6485580+00
18	38	39	0.6485580+00	0.6485580+00
19	39	40	0.6485580+00	0.6485580+00
20	40	41	-0.6485580+00	-0.6485580+00
21	1	10	-0.6485580+00	-0.6485580+00
22	10	19	0.6485580+00	0.6485580+00
23	19	28	0.6485580+00	0.6485580+00
24	28	37	-0.6485580+00	-0.6485580+00
25	2	11	-0.1514260+00	-0.1514260+00
26	11	20	0.3460220+00	0.3460220+00
27	20	29	0.3460220+00	0.3460220+00
28	29	38	-0.1514260+00	-0.1514260+00
29	38	12	-0.1514260+00	-0.1514260+00
30	12	21	0.8106580-01	0.8106580-01
31	21	30	0.8106580-01	0.8106580-01
32	30	39	-0.1514260+00	-0.1514260+00
33	4	13	-0.1514260+00	-0.1514260+00
34	13	22	0.3460220+00	0.3460220+00
35	22	31	0.3460220+00	0.3460220+00
36	31	40	-0.1514260+00	-0.1514260+00
37	5	14	-0.6485580+00	-0.6485580+00
38	14	23	0.6485580+00	0.6485580+00
39	23	32	0.6485580+00	0.6485580+00
40	32	41	-0.6485580+00	-0.6485580+00
41	6	7	-0.2014800+01	-0.2014800+01
42	7	8	-0.2608750+01	-0.2608750+01
43	8	9	-0.2014800+01	-0.2014800+01
44	15	16	-0.7874140+00	-0.7874140+00
45	16	17	-0.1148870+01	-0.1148870+01
46	17	18	-0.7874140+00	-0.7874140+00
47	24	25	-0.7874140+00	-0.7874140+00
48	25	26	-0.1148870+01	-0.1148870+01
49	26	27	-0.7874140+00	-0.7874140+00
50	33	34	-0.2014800+01	-0.2014800+01
51	34	35	-0.2608750+01	-0.2608750+01
52	35	36	-0.2014800+01	-0.2014800+01
53	6	15	-0.2014800+01	-0.2014800+01
54	15	24	-0.2608750+01	-0.2608750+01
55	24	33	-0.2014800+01	-0.2014800+01
56	7	16	-0.7874140+00	-0.7874140+00



57	15	25	-0.1148870+01	-0.1148870+01
58	25	34	-0.7874140+00	-0.7874140+00
59	0	17	-0.7874140+00	-0.7874140+00
60	17	26	-0.1148870+01	-0.1148870+01
61	26	35	-0.7874140+00	-0.7874140+00
62	9	18	-0.2014800+01	-0.2014800+01
63	18	27	-0.2608750+01	-0.2608750+01
64	27	36	-0.2014800+01	-0.2014800+01
65	1	6	-0.3166770+01	-0.3166770+01
66	2	6	0.1238470+01	0.1270470+01
67	10	6	0.1238470+01	0.1270470+01
68	11	6	0.3229590+00	0.3549590+00
69	2	7	-0.1008200+01	-0.9761970+00
70	11	7	0.2826850+00	0.3148850+00
71	12	7	0.1880970+00	0.2200970+00
72	3	7	0.1151380+00	0.1471380+00
73	4	8	-0.1008200+01	-0.9761970+00
74	3	8	0.1151380+00	0.1471380+00
75	12	8	0.1880970+00	0.2200970+00
76	13	8	0.2826850+00	0.3148850+00
77	5	9	-0.3166770+01	-0.3166770+01
78	4	9	0.1238470+01	0.1270470+01
79	13	9	0.3229590+00	0.3549590+00
80	14	9	0.1238470+01	0.1270470+01
81	11	15	0.2826850+00	0.3148850+00
82	10	15	-0.1008200+01	-0.9761970+00
83	19	15	0.1151380+00	0.1471380+00
84	20	15	0.1880970+00	0.2200970+00
85	12	16	-0.1324610-01	0.1875390-01
86	11	16	-0.5066360+00	-0.5066360+00
87	20	16	-0.1324610-01	0.1875390-01
88	21	16	0.0742560-01	0.1194260+00
89	18	17	-0.5066360+00	-0.5066360+00
90	12	17	-0.1324610-01	0.1875390-01
91	21	17	0.0742560-01	0.1194260+00
92	22	17	-0.1324610-01	0.1875390-01
93	14	18	-0.1008200+01	-0.9761970+00
94	13	18	0.2826850+00	0.3148850+00
95	22	18	0.1880970+00	0.2200970+00
96	23	18	0.1151380+00	0.1471380+00
97	20	24	0.1880970+00	0.2200970+00
98	19	24	0.1151380+00	0.1471380+00
99	28	24	-0.1008200+01	-0.9761970+00
100	29	24	0.2826850+00	0.3148850+00
101	21	25	0.0742560-01	0.1194260+00
102	20	25	-0.1324610-01	0.1875390-01
103	29	25	-0.5066360+00	-0.5066360+00
104	30	25	-0.1324610-01	0.1875390-01
105	22	26	-0.1324610-01	0.1875390-01
106	21	26	0.0742560-01	0.1194260+00
107	30	26	-0.1324610-01	0.1875390-01
108	31	26	-0.5066360+00	-0.5066360+00
109	22	27	0.1151380+00	0.1471380+00

110	22	27	0.1880970+00	0.2200970+00
111	31	27	0.2826850+00	0.3146850+00
112	32	27	-0.1008200+01	-0.9761970+00
113	29	33	0.3229690+00	0.3549690+00
114	28	33	0.1238470+01	0.1270470+01
115	37	33	-0.3186770+01	-0.3134770+01
116	30	33	0.1238470+01	0.1270470+01
117	30	34	0.1880970+00	0.2200970+00
118	29	34	0.2826850+00	0.3146850+00
119	36	34	-0.1008200+01	-0.9761970+00
120	39	34	0.1151380+00	0.1471380+00
121	31	35	0.2826850+00	0.3146850+00
122	38	35	0.1880970+00	0.2200970+00
123	39	35	0.1151380+00	0.1471380+00
124	40	35	-0.1008200+01	-0.9761970+00
125	32	36	0.1238470+01	0.1270470+01
126	31	36	0.3229690+00	0.3549690+00
127	40	36	0.1238470+01	0.1270470+01
128	41	36	-0.3186770+01	-0.3134770+01

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

REACTIONS DES APPUIS

NO.NOEUD	REAC.X	REAC.Y	REAC.Z
1	2.467655	1.918810	2.467655
5	-2.467655	1.918810	2.467655
37	2.467655	1.918810	-2.467655
41	-2.467655	1.918810	-2.467655

-----  
CAS DE CHARGE NO.: 2  
-----

\*\*\*\*\*

DEPLACEMENTS DES NOEUDS

\*\*\*\*\*

NO.NOEUD	DEPL.X	DEPL.Y	DEPL.Z
1	0.0000000+00	0.1000000-01	0.0000000+00
2	-0.2438670-03	0.7798920-02	-0.1001960-03
3	-0.3227050-03	0.5000000-02	0.1250190-17
4	-0.2438670-03	0.2206130-02	0.1001960-03
5	0.0000000+00	0.0000000+00	0.0000000+00
6	0.3349730-03	0.6868860-02	0.2084970-02
7	0.3374200-03	0.4813410-02	0.1545550-02

8	0.8374200-03	0.2680590-02	0.9544540-03
9	0.8349700-03	0.6311350-03	0.4150300-03
10	-0.1331960-03	0.5293820-02	-0.2438670-03
11	-0.1331960-03	0.3900090-02	-0.1331960-03
12	-0.1330950-03	0.2500000-02	0.1253190-17
13	-0.1331960-03	0.1099910-02	0.1331960-03
14	-0.1331960-03	-0.2938170-03	0.2438670-03
15	0.2955460-03	0.2319410-02	0.2087420-02
16	0.2881970-03	0.1602470-02	0.1538200-02
17	0.2881970-03	0.8975280-03	0.9618030-03
18	0.2955460-03	0.1805890-03	0.4125800-03
19	-0.4531640-18	0.2774880-17	-0.3227060-03
20	-0.4424530-18	0.2502140-17	-0.1380950-03
21	-0.4442830-18	0.2008510-17	0.1308520-17
22	-0.4575270-18	0.1284100-17	0.1380950-03
23	-0.4551350-18	0.4133520-18	0.3227060-03
24	-0.2955460-03	-0.2319410-02	0.2087420-02
25	-0.2881970-03	-0.1602470-02	0.1538200-02
26	-0.2881970-03	-0.8975280-03	0.9618030-03
27	-0.2955460-03	-0.1805890-03	0.4125800-03
28	0.1331960-03	-0.5293820-02	-0.2438670-03
29	0.1331960-03	-0.3900090-02	-0.1331960-03
30	0.1330950-03	-0.2500000-02	0.1036590-17
31	0.1331960-03	-0.1099910-02	0.1331960-03
32	0.1331960-03	0.2938170-03	0.2438670-03
33	-0.8349700-03	-0.6868860-02	0.2084970-02
34	-0.8374200-03	-0.4819410-02	0.1545550-02
35	-0.8374200-03	-0.2680590-02	0.9544540-03
36	-0.8349700-03	-0.6311350-03	0.4150300-03
37	0.0000000+00	-0.1000000-01	0.0000000+00
38	0.2438670-03	-0.7793820-02	-0.1331960-03
39	0.3227060-03	-0.5000000-02	0.1489670-17
40	0.2438670-03	-0.2206180-02	0.1331960-03
41	0.0000000+00	0.0000000+00	0.0000000+00

## EFFORTS DANS LES BARRES(+TRACTION)

NO. BARRE	ORIG.	EXTR.	EFF. NORM. OR	EFF. NOR. EXT.
1	1	2	-0.2560600+01	-0.2560600+01
2	2	3	-0.8278150+00	-0.8278150+00
3	3	4	0.8278150+00	0.8278150+00
4	4	5	0.2560600+01	0.2560600+01
5	10	11	-0.1423020-14	-0.1423020-14
6	11	12	-0.5143860-01	-0.5143860-01
7	12	13	0.5143860-01	0.5143860-01
8	13	14	0.0000000+00	0.0000000+00
9	19	20	0.1019140-15	0.1019140-15
10	20	21	0.5428300-16	0.5428300-16
11	21	22	-0.1390010-15	-0.1390010-15
12	22	23	0.2511570-16	0.2511570-16
13	23	24	-0.7470630-15	-0.7470630-15

14	29	30	0.514386D-01	0.514386D-01
15	30	31	-0.514386D-01	-0.514386D-01
16	31	32	-0.711508D-16	-0.711508D-16
17	37	33	0.256060D+01	0.256060D+01
18	38	39	0.827815D+00	0.827815D+00
19	39	40	-0.827815D+00	-0.827815D+00
20	40	41	-0.256060D+01	-0.256060D+01
21	1	10	-0.256060D+01	-0.256060D+01
22	10	19	-0.827815D+00	-0.827815D+00
23	19	20	0.827815D+00	0.827815D+00
24	20	37	0.256060D+01	0.256060D+01
25	2	11	-0.355754D-16	-0.355754D-16
26	11	20	-0.514386D-01	-0.514386D-01
27	20	29	0.514386D-01	0.514386D-01
28	29	38	0.120956D-14	0.120956D-14
29	8	12	0.252778D-30	0.252778D-30
30	12	21	0.580972D-15	0.580972D-15
31	21	30	0.819809D-15	0.819809D-15
32	30	39	0.242357D-15	0.242357D-15
33	4	13	0.355754D-16	0.355754D-16
34	13	22	0.514386D-01	0.514386D-01
35	22	31	-0.514386D-01	-0.514386D-01
36	31	40	-0.711508D-16	-0.711508D-16
37	5	14	0.256060D+01	0.256060D+01
38	14	23	0.827815D+00	0.827815D+00
39	23	32	-0.827815D+00	-0.827815D+00
40	32	41	-0.256060D+01	-0.256060D+01
41	6	7	0.257193D-01	0.257193D-01
42	7	8	-0.426905D-14	-0.426905D-14
43	8	9	-0.257193D-01	-0.257193D-01
44	15	16	-0.771579D-01	-0.771579D-01
45	16	17	-0.498055D-15	-0.498055D-15
46	17	18	0.771579D-01	0.771579D-01
47	24	25	0.771579D-01	0.771579D-01
48	25	26	0.327294D-14	0.327294D-14
49	26	27	-0.771579D-01	-0.771579D-01
50	33	34	-0.257193D-01	-0.257193D-01
51	34	35	0.103880D-13	0.103880D-13
52	35	36	0.257193D-01	0.257193D-01
53	6	15	0.257193D-01	0.257193D-01
54	15	24	0.341524D-14	0.341524D-14
55	24	33	-0.257193D-01	-0.257193D-01
56	7	16	-0.771579D-01	-0.771579D-01
57	16	25	0.569206D-15	0.569206D-15
58	25	34	0.771579D-01	0.771579D-01
59	8	17	0.771579D-01	0.771579D-01
60	17	26	0.426905D-15	0.426905D-15
61	26	35	-0.771579D-01	-0.771579D-01
62	9	18	-0.257193D-01	-0.257193D-01
63	18	27	0.498055D-15	0.498055D-15
64	27	36	0.257193D-01	0.257193D-01
65	1	6	-0.147836D+01	-0.147836D+01
66	2	6	0.150064D+01	0.150064D+01

67	0.150064D+01	0.150064D+01	6
68	-0.152291D+01	-0.152291D+01	8
69	-0.150064D+01	-0.150064D+01	7
70	0.147836D+01	0.147836D+01	7
71	-0.141154D+01	-0.141154D+01	7
72	0.143832D+01	0.143832D+01	7
73	0.150064D+01	0.150064D+01	9
74	0.143832D+01	0.143832D+01	9
75	0.141154D+01	0.141154D+01	8
76	-0.147836D+01	-0.147836D+01	9
77	0.147836D+01	0.147836D+01	9
78	-0.150064D+01	-0.150064D+01	9
79	0.152291D+01	0.152291D+01	9
80	-0.150064D+01	-0.150064D+01	9
81	0.147836D+01	0.147836D+01	15
82	-0.150064D+01	-0.150064D+01	15
83	0.143832D+01	0.143832D+01	15
84	-0.141154D+01	-0.141154D+01	15
85	0.150064D+01	0.150064D+01	16
86	-0.143832D+01	-0.143832D+01	16
87	0.150064D+01	0.150064D+01	16
88	-0.156746D+01	-0.156746D+01	16
89	0.143832D+01	0.143832D+01	17
90	-0.150064D+01	-0.150064D+01	17
91	0.156746D+01	0.156746D+01	17
92	-0.150064D+01	-0.150064D+01	17
93	0.147836D+01	0.147836D+01	18
94	-0.141154D+01	-0.141154D+01	18
95	0.143832D+01	0.143832D+01	19
96	-0.143832D+01	-0.143832D+01	19
97	0.141154D+01	0.141154D+01	24
98	-0.143832D+01	-0.143832D+01	24
99	0.150064D+01	0.150064D+01	24
100	-0.147836D+01	-0.147836D+01	24
101	0.156746D+01	0.156746D+01	25
102	-0.150064D+01	-0.150064D+01	25
103	0.143832D+01	0.143832D+01	25
104	-0.150064D+01	-0.150064D+01	26
105	0.150064D+01	0.150064D+01	26
106	-0.156746D+01	-0.156746D+01	26
107	0.150064D+01	0.150064D+01	26
108	-0.143832D+01	-0.143832D+01	26
109	0.143832D+01	0.143832D+01	27
110	-0.141154D+01	-0.141154D+01	27
111	0.147836D+01	0.147836D+01	27
112	-0.150064D+01	-0.150064D+01	27
113	0.152291D+01	0.152291D+01	28
114	-0.150064D+01	-0.150064D+01	28
115	0.147836D+01	0.147836D+01	28
116	-0.150064D+01	-0.150064D+01	28
117	0.141154D+01	0.141154D+01	29
118	-0.147836D+01	-0.147836D+01	29
119	0.150064D+01	0.150064D+01	34

120	39	34	-0.143382D+01	-0.143382D+01
121	31	35	0.147836D+01	0.147836D+01
122	30	35	-0.141154D+01	-0.141154D+01
123	39	35	0.143382D+01	0.143382D+01
124	40	35	-0.150064D+01	-0.150064D+01
125	32	36	0.150064D+01	0.150064D+01
126	31	36	-0.152291D+01	-0.152291D+01
127	40	36	0.150064D+01	0.150064D+01
128	41	36	-0.147836D+01	-0.147836D+01

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

REACTIONS DES APPUIS

NO.NOEUD	REAC.X	REAC.Y	REAC.Z
1	3.414137	0.853534	3.414137
5	3.414137	+0.853534	-3.414137
37	-3.414137	-0.853534	3.414137
41	-3.414137	0.853534	-3.414137

-----  
 FIN DU PROBLEME

## Conclusion

Le travail que nous avons mené nous a conduit à utiliser un outil mathématique assez nouvel et très puissant et qui est celui de l'analyse matricielle et numérique des problèmes souvent rencontrés en Génie-Civil.

Notons que toute notre étude a été faite dans le domaine de l'élasticité linéaire des matériaux, et qu'une étude plus poussée peut étendre le champ d'utilisation du programme.

Ce travail a abouti à l'élaboration d'un programme qui pourra résoudre certains problèmes qui sont peut-être difficiles à solutionner avec les méthodes manuelles.

Notons que les résultats, auxquels nous avons abouti, étaient très satisfaisants.

## BIBLIOGRAPHIE

1. Calcul des structures et Informatique (J.F. AUBOIN)
2. Calcul des structures en basic (B. ASANCHEYEV)
3. Analyse des structures (Mohammed Osman. ZAKARIA)  
t. II O.P.U.
4. Traité de R.D.M (Odonne Belluzzi)
5. Analyse des structures par éléments finis (J.F. Imbert)
6. Analyse numérique appliquée à l'art de l'ingénieur  
(Lascaux)
7. Introduction à la méthode des éléments finis.  
(GALLAGHER)
8. Analyse des structures par les méthodes numériques  
et matricielles (P.C. WANG)
9. Analyse des structures (Fernand. ellyin).



