

وزارة التعليم العالي  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

200

## ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : ELECTROTECHNIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

Comparaison des Réglages Classiques  
et par Contre - Réaction d'Etat

Proposé par :

Mr M.s. BOUCHERIT

Etudié par :

Mr TABET Ahmed

Mr CHENENE Mouloud

Dirigé par :

Mr M.s. BOUCHERIT

PROMOTION : Janvier 1988

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : ELECTROTECHNIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

Comparaison des Réglages Classiques  
et par Contre - Réaction d'Etat

Proposé par :

Mr M.s. BOUCHERIT

Etudié par :

Mr TABET Ahmed

Mr CHENENE Mouloud

Dirigé par :

Mr M.s. BOUCHERIT

PROMOTION : Janvier 1988

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَسُوَّلُونَكَ مِنَ الْبُحْرِ فَدَعَاكَ مِنْ أَسْرٍ رَبِّي  
وَمَا أُوْتِيْتُمْ مِنَ الْعَامِ إِلَّا قَلِيلًا  
- سورة الاسراء -

وَقَدْ رَبَّ زِدْنِي عِلْمًا  
- سورة طه -

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمِ

# DÉDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

A ma mère

A mon père

A mes frères et sœurs, à HADDOUR D.

A mon ami Mouloud

A tous mes amis

Je dédie ce modeste travail

AHMED TABET

A mes parents pour leur peine et leur confiance,

A ma femme,

A tous mes amis

Je dédie ce modeste travail

MOULOUD CHÉNÈNE

## Remerciements

Nous adressons nos vifs remerciements à Monsieur BOUCHRIT pour l'aide précieuse, qu'il nous a apportée, ainsi que ses conseils et suggestions, qui nous ont permis de mener à terme, ce travail.

Nous ajoutons notre profonde gratitude aux professeurs qui ont été de bons collaborateurs pour notre formation.

Sans oublier tout le personnel, du département de Génie. Electrique, et du centre de calcul, de l'ENPA.

## GLOSSAIRE

Symbole

Description :

Z

opérateur de la transformation en Z

W

grandeur de consigne.

e

écart de réglage.

Y

grandeur à régler.

U

grandeur de commande.

U'

grandeur de commande échantillonnée.

T

période d'échantillonnage.

T<sub>1</sub>

constante dominante du système.

T<sub>2</sub>

petite constante de temps du système.

ε

fraction de temps relatif entre deux instants d'échantillonnage.

K<sub>p</sub>

coefficient de proportionnalité du régulateur PI

K<sub>I</sub>

coefficient d'intégration du régulateur PI.

D(z)

Fonction de transfert du régulateur.

G<sub>s</sub>(s)

Fonction de transfert du système

G(z, ε)

fonction de transfert du système échantillonné.

G<sub>m</sub>(s)

Fonction de transfert de l'élément de maintien.

Symbole

$K_V, K_W$

$K_R$

$\alpha_i$

$\Phi$

$\Psi$

$Z_i$

$K^T$

$A$

$B$

$B_{SV}$

$F_S$

$F$

$F_G$

$H$

$H_{GV}, H_{GW}$

Description :

coefficients de l'intervention directe de la grandeur de perturbation et de la consigne

coefficient de la contre-réaction d'état du régulateur.

coefficient du vecteur  $a^T$

matrice de transition d'état.

intégrale de la matrice  $\phi$ .

pôle de la fonction de transfert échantillonnée.

vecteur ligne de la contre-réaction

matrice de système du modèle continu.

matrice d'entrée du système continu

Matrice d'entrée du système continu liant la perturbation au système à régler

Matrice du système à régler

Matrice du système global ouvert.

Matrice du système global fermé

Vecteur d'entrée du système global ouvert.

Vecteurs d'entrée du système fermé par rapport aux grandeurs de perturbation et de consigne.

# TABLE DES MATIÈRES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

- Introduction générale.

- CHAPITRE I : Généralités

I-1 SYSTÈME CONTINU AVEC ELEMENT DE MAINTIEN

I-2 FONCTION DE TRANSFERT ÉCHANTILLONNÉE

I-3 REPONSE HARMONIQUE ÉCHANTILLONNÉE

I-4. RÉPONSE INDICIELLE ÉCHANTILLONNÉE

- CHAPITRE II: Traitement du réglage échantillonné par la transformée en Z.

II.1 Description du système.

II.2 structure du réglage.

II.3 REPONSES INDICIELLES DU SYSTÈME

II.4. INFLUENCE DE LA VARIATION DE  $T_2$  SUR LES RÉPONSES INDICIELLES.

- CHAPITRE III: Analyse et réglage dans l'espace d'état.

III.1 Introduction

III.2 Equation d'état.

III.3 structure optimale.

III.4 structure du régulateur

III.5 système d'équations.

- CHAPITRE IV: Réglage d'état d'un système à deux constantes de temps.

- CHAPITRE V: Étude comparative des deux méthodes  
Conclusion.

## INTRODUCTION :

Les anciens calculateurs n'étaient pas assez rapides pour effectuer les tâches des régulateurs en temps réel par la suite l'accroissement de leurs performances a rendu techniquement possible la commande numérique des processus industriels, mais avec un prix de revient élevé. Grâce aux progrès réalisés par la micro-informatique, la réalisation des systèmes de régulation numériques devient possible économiquement et techniquement.

Le calculateur étant un système fonctionnant de manière discrète, on parle ainsi de réglages échantillonnés. Parmi les méthodes d'analyse qui tiennent compte de la discrétion des signaux, deux méthodes sont essentiellement utilisées :

- le traitement par la transformation en Z
- le traitement dans l'espace d'état.

L'objectif principal de ce travail est de comparer les performances statiques et dynamiques du réglage à deux constantes de temps. Nous appliquons pour cela les deux méthodes citées précédemment.

Le premier chapitre traite des généralités sur la transformée en Z.

Le second chapitre traite de l'application de la transformée en Z à un système à deux constantes de temps. Nous y avons ensuite examiné l'influence de la variation de la petite constante de temps sur les performances de réglage.



Le troisième et le quatrième chapitre traitent du réglage par retour d'état, appliqué au système à deux constantes de temps. Ils traitent également de l'étude de l'influence de la petite constante de temps, ainsi que l'influence du choix des pôles (assignés) sur les performances du système. Ses travaux se terminent par une étude comparative traitée dans le chapitre cinq.

# CHAPITRE I

## 1-1. Généralités :

Nous avons une disposition, ayant une grande importance dans le domaine des systèmes échantillonnés, celle où le premier système continu, est un élément de maintien figure 1-1.

Comme, ce cas est très fréquent, on déduira une relation permettant, de déterminer la fonction de transfert échantillonnée du système global, à partir de la fonction de transfert  $G_s(s)$  du deuxième système continu. La fonction de transfert de l'élément de maintien, est donnée par [1] :

$$G_m(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

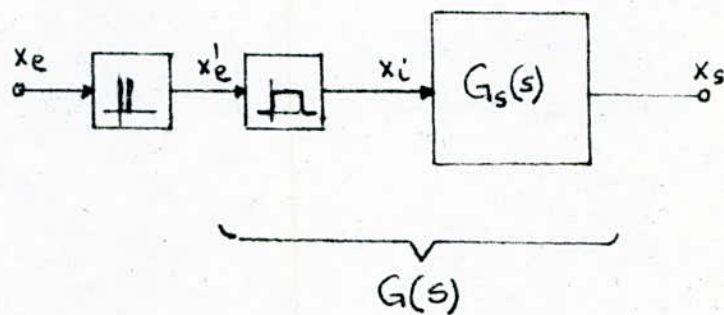


fig 1-1 SYSTÈME CONTINU AVEC ÉLÉMENT DE MAINTIEN

## 1-2 FONCTION DE TRANSFERT DU SYSTÈME GLOBAL :

Au préalable, on doit, déterminer la fonction de transfert du système global. Dans le cas présent, elle est donnée par :

$$G(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} G_s(s) \quad (1.1)$$

où  $G_s(s)$  est la fonction de transfert du système continu

Avec l'abréviation

$$G_I(s) = \frac{G_s(s)}{s} \quad (1-2)$$

où  $G_I(s)$ , correspond à la fonction de transfert de la combinaison du système, continu  $G_S(s)$ , avec un intégrateur, on obtient:

$$G(s) = (1 - e^{-sT}) G_I(s) \quad (1-3)$$

La transformée en  $Z$  de  $G(s)$ , devient, donc :

$$G(z, \varepsilon) = G_I(z, \varepsilon) - z^{-1} G_I(z, \varepsilon)$$

$$G(z, \varepsilon) = \frac{z-1}{z} G_I(z, \varepsilon) \quad (1-4)$$

### 1-3. FORMULE DE DÉVELOPPEMENT:

On établira une formule de développement permettant la détermination, de  $G(z, \varepsilon)$  à partir de  $G_S(s)$ . Dans ce but, on suppose, que la fonction de transfert du système, continu est donnée sous la forme de [1]:

$$G_S(s) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - p_i} \quad (1-5)$$

où  $p_i$  sont les pôles de  $G_S(s)$  et les coefficients  $r_i$  découlent de l'équation [1]. On suppose que tous les pôles sont différents. On a donc:

$$G_I(s) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s(s-p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{(-p_i)} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s-p_i} \right) \quad (1-6)$$

Avec les correspondances :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{s} \longrightarrow \frac{z}{z-1} \\ \frac{1}{s-p_i} \longrightarrow \frac{z}{z - e^{p_i T}} e^{\varepsilon p_i T} \end{array} \right\} \quad (1-7)$$

On tire les équations (1-8) et (1-9) :

$$G_I(z, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{(-p_i)} \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{p_i T}} e^{\varepsilon p_i T} \right]$$

ou

$$G(z, \varepsilon) = \frac{z-1}{z} G_I(z, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{-p_i} \frac{z(1 - e^{\varepsilon p_i T}) + (e^{\varepsilon p_i T} - e^{p_i T})}{z - e^{p_i T}}$$

#### 1.4. RÉPONSE HARMONIQUE ÉCHANTILLONNÉE :

La réponse harmonique échantillonnée, est définie par :

$$G(z, \varepsilon) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = G(e^{j\Omega}, \varepsilon) = G(j\Omega, \varepsilon) \quad (1.10)$$

La réponse harmonique échantillonnée dépend, en général, du paramètre  $\varepsilon$ , de sorte qu'il faut, calculer un réseau de courbes pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ . Normalement, on se limite à  $\varepsilon = 0$  et l'on désigne :

$$G(j\Omega, 0) = G(j\Omega). \quad (1.11)$$

Comme  $z = e^{j\Omega} = \cos \Omega + j \sin \Omega$ , nous voyons clairement que cette variable est périodique en  $\Omega$  par des multiples de  $2\pi$ .

$$G(j\Omega \pm jm2\pi, \varepsilon) = G(j\Omega, \varepsilon) \quad (1.12)$$

Étant donné que la fonction de transfert échantillonnée, est une fonction rationnelle en  $z$ , il est évident que :

$$G(-j\Omega, \varepsilon) = G^*(j\Omega, \varepsilon) \quad (1.13)$$

Toutes ces propriétés nous conduisent à étudier la réponse harmonique échantillonnée dans le domaine  $0 \leq \Omega \leq \pi$ .

#### 1.5. RÉPONSE INDICIELLE :

Si à l'entrée d'un système échantillonné apparaît un saut unité, on obtient, pour la transformée en  $z$  du signal de sortie :

$$X_s(z, \varepsilon) = G(z, \varepsilon) X_e(z) = G(z, \varepsilon) E(z, \varepsilon) = H(z, \varepsilon) \quad (1.14)$$

On obtient la réponse impulsionnelle par la transformation en  $z$  inverse.

$$H(z, \varepsilon) \longrightarrow h[k, \varepsilon]$$

## CHAPITRE II

### TRAITEMENT PAR LA TRANSFORMÉE EN Z

#### 2-1. Description du système :

La figure (2-1) montre le schéma bloc du système à deux constantes de temps étudié. Celui-ci est constitué d'un dispositif de retard du premier ordre qui possède une petite constante de temps  $T_2$ . La constante dominante du système, est  $T_1$ . En plus sur la figure 2-1, on distingue la grandeur de commande  $u$ , la grandeur de sortie  $y$ , ainsi que la grandeur de perturbation  $v$ .

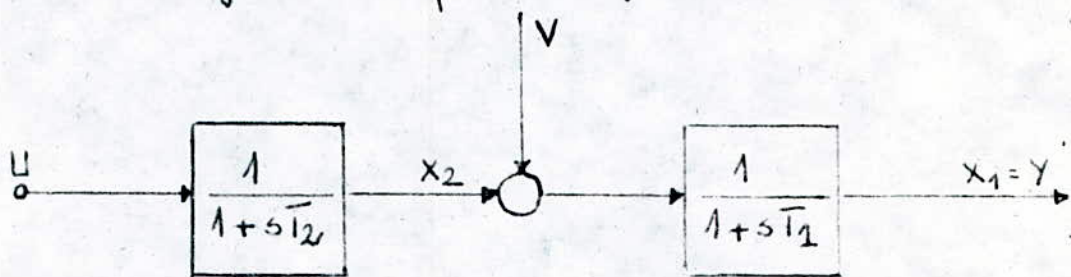


Figure 2-1. schéma bloc d'un système à deux constantes de temps.

#### 2-2. RÉGLAGE ÉCHANTILLONNÉ :

##### 2-2.1. STRUCTURE DE RÉGLAGE :

La figure 2-2 montre le schéma bloc de la structure de réglage échantillonné. La signification des différents symboles utilisés est la suivante :

- $w$ , grandeur de consigne
- $y$ , grandeur à régler
- $e$ , écart de réglage
- $u$ , grandeur de commande.

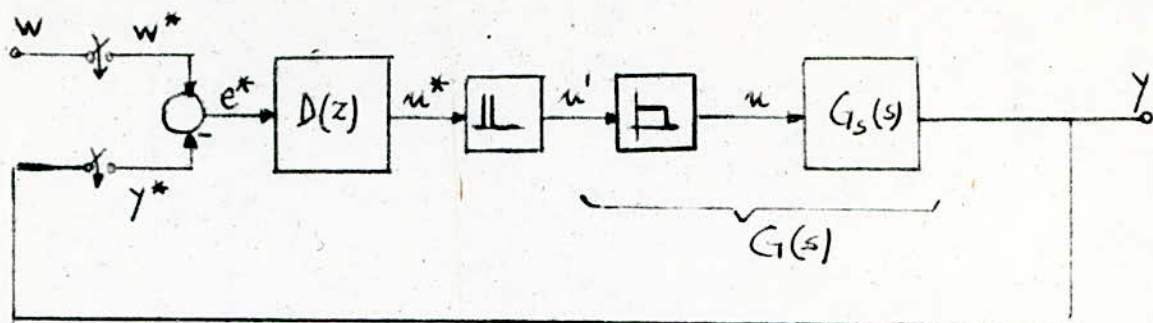


fig 2.2 structure de base d'un circuit de réglage échantillonné.

La grandeur de consigne  $w$  est échantillonnée par un échantillonneur idéal. De même la grandeur à régler  $y$  est soumise à un échantillonnage idéal. La différence entre les grandeurs discrètes  $w^*$  et  $y^*$  donne l'écart de réglage discret  $e^*$ .  $D(z)$  est la fonction de transfert du régulateur discret. Nous avons un échantillonneur à pulsations et un élément de maintien.

### 2.2.2 FONCTION DE TRANSFERT :

La fonction de transfert de l'élément de maintien est donnée par l'expression suivante [1]

$$G_m(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

La fonction de transfert du système à régler est donnée par :

$$G_s(s) = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$$

La fonction de transfert du système avec élément de maintien, est donnée par :

$G(s) = G_m(s) \cdot G_s(s)$ . On obtient alors

$$G(s) = \frac{(1 - e^{-sT}) \cdot 1}{s \cdot (1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad (2-1)$$

La commande étant une commande numérique, nous utilisons la fonction de transfert échantillonnée. La transformée en Z de la fonction de transfert  $G(s)$  est :

$$G(z, \varepsilon) = \left[ \frac{z}{(z-1)} + \frac{T_1 z_1^\varepsilon z}{(T_2 - T_1)(z - z_1)} - \frac{T_2 z_2^\varepsilon z}{(T_2 - T_1)(z - z_2)} \right] \frac{(z-1)}{z}$$

$$G(z, \varepsilon) = \frac{D_2(\varepsilon)z^2 + D_1(\varepsilon)z + D_0(\varepsilon)}{(z - z_2)(z - z_1)} = \frac{Q(z, \varepsilon)}{P(z)} \quad (2-2)$$

AVEC :

$$D_2(\varepsilon) = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \left[ T_2(1 - z_2^\varepsilon) - T_1(1 - z_1^\varepsilon) \right] \quad (2-3)$$

$$D_1(\varepsilon) = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \left[ T_1(z_1 + z_2) - T_2(z_1 + z_2) + T_2 z_2^\varepsilon z_1 - T_1 z_1^\varepsilon z_2 + T_2 z_2^\varepsilon - T_1 z_1^\varepsilon \right] \quad (2-4)$$

$$D_0(\varepsilon) = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \left[ T_2 z_2^\varepsilon z_1 - T_1 z_1^\varepsilon z_2 - T_2 z_2^\varepsilon z_1 + T_1 z_1^\varepsilon z_2 \right] \quad (2-5)$$

où :  $z_2 = \exp(-T/T_2)$  ;  $z_1 = \exp(-T/T_1)$ .

### 2.2.3 CHOIX ET DIMENSIONNEMENT DES RÉGULATEURS :

Nous remarquons que le système à régler possède une constante de temps dominante  $T_d$  et n'a pas de comportement intégrale. Nous choisissons, par conséquent un régulateur PI.

La fonction de transfert du régulateur est donnée par l'expression suivante :

$$D(z) = K \frac{z - z_1}{z - 1} \quad (2-6)$$

où  $z_1$  est le pôle dominant.

La fonction de transfert en boucle ouverte du circuit global aux instants d'échantillonnage est :

$$G_0(z, \varepsilon) = D(z) \cdot G_1(z, \varepsilon)$$

$$G_0(z, 0) = K \frac{z - z_1}{z - 1} \left[ \frac{D_2(1)z^2 + D_1(1)z + D_0(1)}{z(z - z_1)(z - z_2)} \right]$$

$$G_0(z, 0) = K \frac{D_2(1)z^2 + D_1(1)z + D_0(1)}{z(z - 1)(z - z_2)} \quad (2-7)$$

D'où nous obtenons :

$$G_0(z, 0) = K F(z, 0)$$

$$\text{où : } F(z, 0) = \frac{D_2(1)z^2 + D_1(1)z + D_0(1)}{z(z - 1)(z - z_2)}$$

Sachant que  $z = e^{j\Omega} = \cos \Omega + j \sin \Omega$ , nous pouvons écrire :

$$F(z, 0) = F(j\Omega) = \frac{D_2(1)e^{j2\Omega} + D_1(1)e^{j\Omega} + D_0(1)}{e^{j3\Omega} + (-z_2 - 1)e^{j2\Omega} + z_2 e^{j\Omega}} =$$

$$F(j\Omega) = \frac{[D_2(1)\cos 2\Omega + D_1(1)\cos \Omega + D_0(1)] + j[D_2(1)\sin 2\Omega + D_1(1)\sin \Omega]}{[\cos 3\Omega + z_2(\cos \Omega - \cos 2\Omega) - \cos 2\Omega] + j[z_2(\sin \Omega - \sin 2\Omega) + \sin \Omega]}$$

Nous mettons la fonction  $F(j\Omega)$  sous la

$$\text{forme } F(j\Omega) = \frac{P + jQ}{R + jS} \quad (2-8)$$

Avec :

$$P = D_2(1)\cos 2\Omega + D_1(1)\cos \Omega + D_0(1)$$

$$Q = D_2(1)\sin 2\Omega + D_1(1)\sin \Omega$$

$$R = \cos 3\Omega + z_2(\cos \Omega - \cos 2\Omega) - \cos 2\Omega$$

$$S = z_2(\sin \Omega - \sin 2\Omega) - \sin 2\Omega + \sin 3\Omega$$

Cette forme de  $F(j\Omega)$  nous a permis d'élaborer un programme traité par ordinateur et nous avons tracé les réponses harmoniques fig 2-3. Nous avons également déterminé les valeurs du coefficient  $K$  pour plusieurs valeurs de la petite constante de temps  $T_2$  tout en maintenant la valeur de la constante dominante  $T_1$  constante.



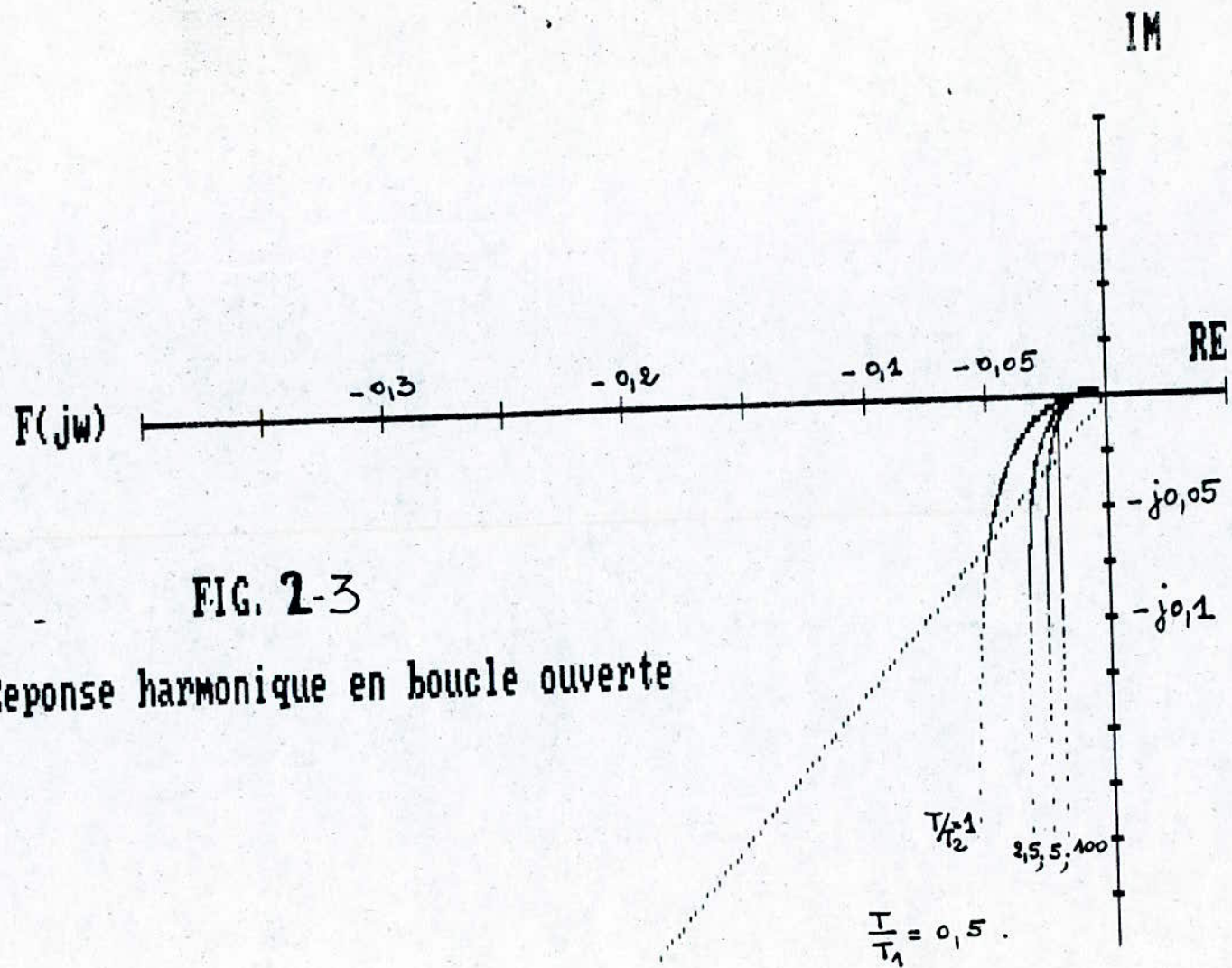


FIG. 2-3

Reponse harmonique en boucle ouverte

Les réponses harmoniques sont schématisées dans le plan complexe pour  $0 \leq \Omega \leq \pi$ . Ce qui nous permet de déterminer le module  $|F(j\Omega_{120})|$  et par conséquent  $K = \frac{1}{|F(j\Omega_{120})|}$  (2.9)

Ce traitement numérique nous a donné les résultats suivants :

$N_2 = T_2/T$	1	2,5	5	100
K	1,007	1,628	2,054	2,521

Tableau I :

Sachant K, nous pouvons déterminer les valeurs des coefficients du régulateur PI donnés par les relations suivantes :

$$K_p = K Z_1 \quad \text{et} \quad K_I = K(1 - Z_1) \quad (2-10)$$

Les valeurs de  $K_p$  et  $K_I$  sont rassemblées dans le tableau II suivant :

K	1,007	1,628	2,054	2,521
$K_p$	0,611	0,987	1,246	1,529
$K_I$	0,396	0,640	0,808	0,992

Tableau II :

## 2.3 REPONSES INDICIELLES :

La réponse indicielle est donnée par l'allure du signal de sortie d'un système échantillonné sous l'influence d'un seul unité échantillonnée. La fonction de transfert en boucle fermée du circuit de réglage d'un système est donnée par :

$$G_W(z, \varepsilon) = \frac{G_0(z, \varepsilon)}{1 + G_0(z, 0)} \quad (2.11)$$

Pour un échelon unitaire  $w(z) = \frac{z}{z-1}$ , la réponse indicielle de la grandeur à régler  $y$  sera :

$$Y(z, \varepsilon) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{G_0(z, \varepsilon)}{1 + G_0(z, 0)} \quad (2.12)$$

Nous mettons  $Y(z, \varepsilon)$  sous la forme d'un rapport de deux polynômes tel que :

$$Y(z, \varepsilon) = K \frac{b_4(\varepsilon)z^4 + b_3(\varepsilon)z^3 + b_2(\varepsilon)z^2}{z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0} \quad (2.13)$$

$$\text{ou : } \begin{aligned} b_4(\varepsilon) &= D_2(\varepsilon) \\ b_3(\varepsilon) &= D_1(\varepsilon) \\ b_2(\varepsilon) &= D_0(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\text{et : } \begin{aligned} a_3 &= K D_2(1) - I_2 - 1 \\ a_2 &= K [D_1(1) - D_2(1)] + 2I_2 + 1 \\ a_1 &= K [D_0(1) - D_1(1)] - I_2 \\ a_0 &= -K D_0(1) \end{aligned}$$

Nous pouvons établir la formule récursive [1] qui permet de déterminer numériquement la réponse indicielle du système.

Sachant que  $Y[h, \varepsilon] = 0$  pour  $h < 0$ , les valeurs de  $Y$  pour  $K=0, 1, 2, 3$  et  $K > 3$  s'expriment d'une manière explicite par [1] :

$$Y[0, \varepsilon] = Kb_4(\varepsilon)$$

$$Y[1, \varepsilon] = Kb_3(\varepsilon) - a_3 h[0, \varepsilon] = Kb_3(\varepsilon) - a_3 Kb_4(\varepsilon)$$

$$Y[2, \varepsilon] = Kb_2(\varepsilon) - a_3 h[1, \varepsilon] - a_2 h[0, \varepsilon] = Kb_2(\varepsilon) - a_3 Kb_3(\varepsilon) + Kb_4(\varepsilon)[a_3^2 - a_2]$$

$$Y[3, \varepsilon] = -a_3 h[2, \varepsilon] - a_2 h[1, \varepsilon] - a_1 h[0, \varepsilon] = -a_3 Kb_2(\varepsilon) + Kb_3(\varepsilon)[a_3^2 - a_2] + Kb_4(\varepsilon)[-a_3^3 + 2a_2 a_3 - a_1]$$

-----  
 Pour  $K > 3$ , nous avons :

$$Y[k, \varepsilon] = -a_3 h[2, \varepsilon] - a_2 h[1, \varepsilon] - a_1 h[0, \varepsilon] - a_0 h[k-4, \varepsilon].$$

Les formules récursives, ainsi établies, nous traçons ensuite les réponses indicielles de notre système.

#### 2-4. INFLUENCE DE LA VARIATION DE LA PETITE CONSTANTE DE TEMPS $T_2$ SUR LES RÉPONSES INDICIELLES :

Dans, cette étude, nous faisons varier la petite constante de temps  $T_2$  par rapport à la constante de temps dominante  $T_1$  dans le but, de voir l'influence de cette dernière sur les performances du réglage. Un programme a été élaboré et nous donne les résultats suivants, au sujet du tracé de ces réponses (voir figure 2-4).

Il apparaît de ces réponses indicielles que lorsque  $T_2 \ll T_1$  le système présente les meilleures performances :

- la rapidité de réglage augmente ; on voit clairement le ralentissement du phénomène transitoire, de plus le dépassement diminue, ce qui montre le décalage des courbes à gauche

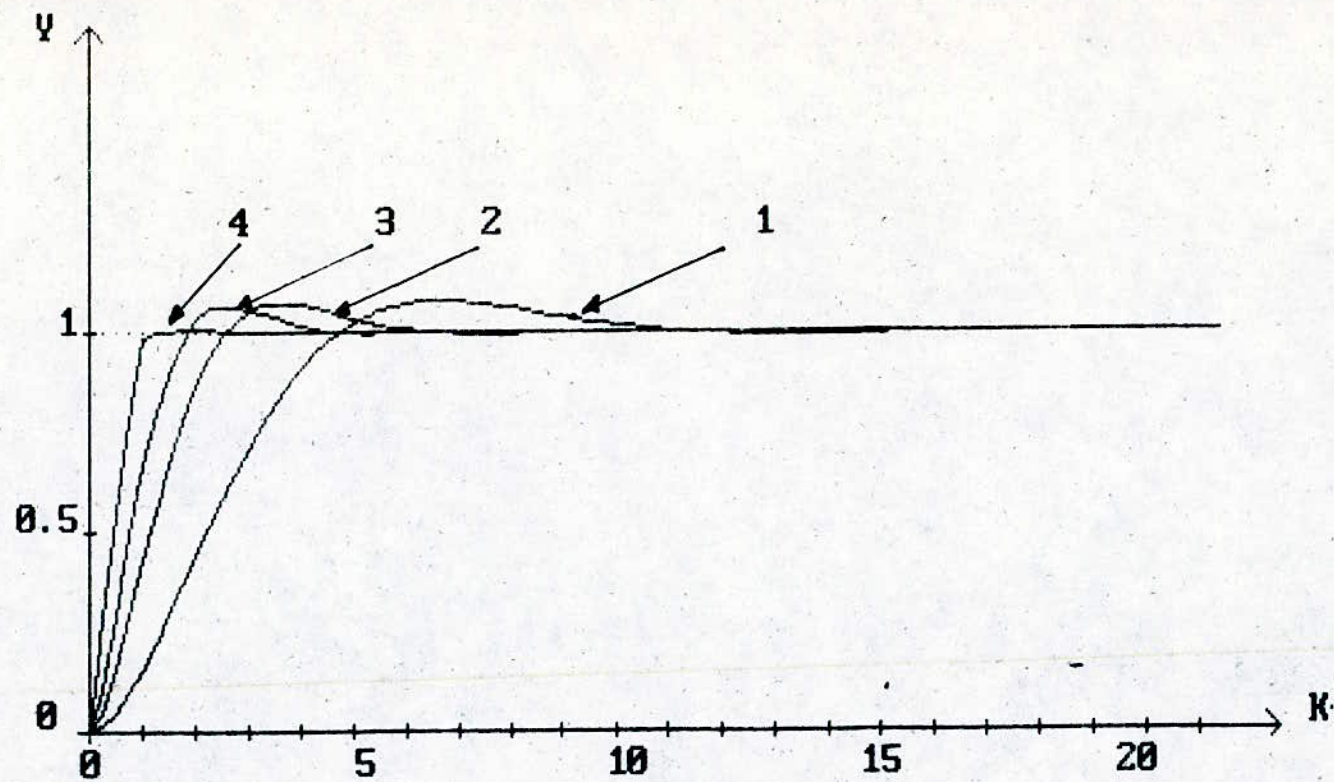


Fig 2-4 Réponses Indicielles de la grandeur a regler  $y$

## CHAPITRE III

### Analyse et réglage, dans l'espace d'état

#### 3.1 - Introduction

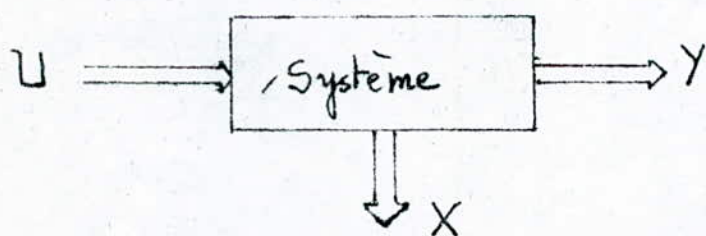
La théorie des variables d'état fournit, moyennant l'usage généralisé du langage vectoriel et matriciel, une description générale des systèmes multidimensionnels, tout particulièrement des systèmes linéaires. Elle est également à l'origine de la théorie de la commande optimale par rapport à un critère de qualité imposé.

Dans ce chapitre, on se propose de présenter, d'une manière aussi simple que possible la notion de commande par contre réaction.

On représentera également la structure optimale de commande, dont on déterminera les coefficients de réglage, ainsi que la structure du régulateur.

#### 3.2 - Equations d'état :

Un système peut être représenté par :



où :  $U$  : vecteur d'entrée réunissant les grandeurs d'entrée.

$Y$  : vecteur de sortie réunissant les grandeurs de sortie.

$X$  : vecteur d'état réunissant les grandeurs d'état du système.

3.2.1 - Equations, d'état, d'un système, continu :

Les équations différentielles régissant un système linéaire sont de la forme :

$$X(t) = AX(t) + BU(t) \quad (3-1)$$

$$Y(t) = CX(t) \quad (3-2)$$

où :

A : matrice, d'évolution (ou de dynamique)

B : matrice, de commande (ou d'entrée)

C : matrice, d'observation (ou de sortie)

3.2.2 - Equations, d'état, d'un système échantillonné :

Pour un système linéaire échantillonné les équations

(3-1) et (3-2) s'écrivent :

$$X(k+1) = FX(k) + HU(k) \quad (3-3)$$

$$Y(k) = CX(k) \quad (3-4)$$

Ces équations, donnent l'état, aux instants, d'échantillonnage.

Le passage, des équations, d'un système, continu aux équations, d'un système échantillonné se fait par l'intermédiaire d'une matrice  $\Phi(t)$ , appelée matrice, de transition, d'état telle, que :

$$\Phi(s) = (s.I - A)^{-1} \quad (3-5)$$

s étant l'opérateur Laplacien.

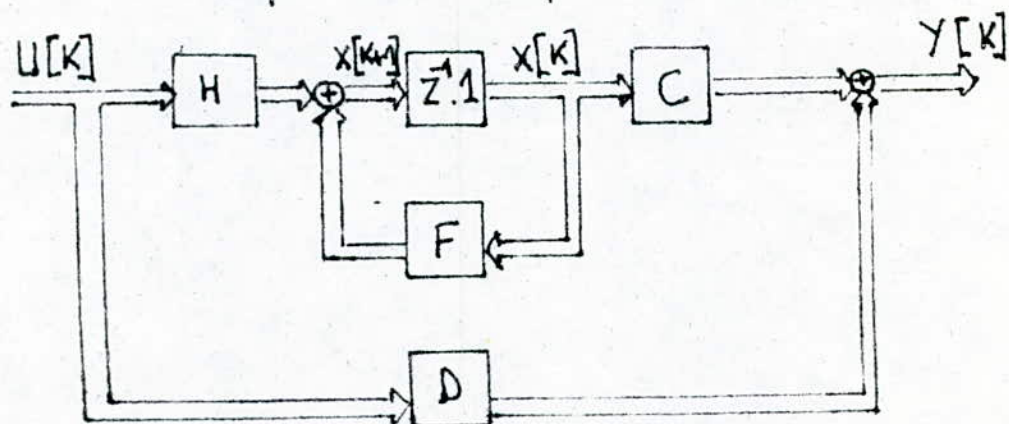


Fig. 3.1 REPRÉSENTATION D'ÉTAT SCHEMATIQUE DU SYSTEME.

### 3-3 , STRUCTURE OPTIMALE :

Cette structure, de réglage, est, déterminée, de sorte, qu'un, certain, critère, d'intégrale soit minimisé. Pour, cela, on, applique le principe, d'optimisation de BELLMAN.

Le, critère d'intégrale s'écrit sous la forme suivante :

$$I = X^T(0) \cdot Q \cdot X(0) + \sum_{K=0}^{N-1} I'(K) \quad (3-6)$$

avec :

$$I'(J-1) = X^T(J) \cdot Q \cdot X(J) + U^T(J-1) \cdot R \cdot U(J-1) \quad (3-7)$$

Selon le principe d'optimisation, de BELLMAN, on a :

$$\min(I) = \min \left( \sum_{K=0}^{N-1} I'(K) \right) \quad (3-8)$$

Q et R, sont des matrices relatives, au vecteur d'état  $X[K]$  et au, vecteur d'entrée  $U[K]$ .

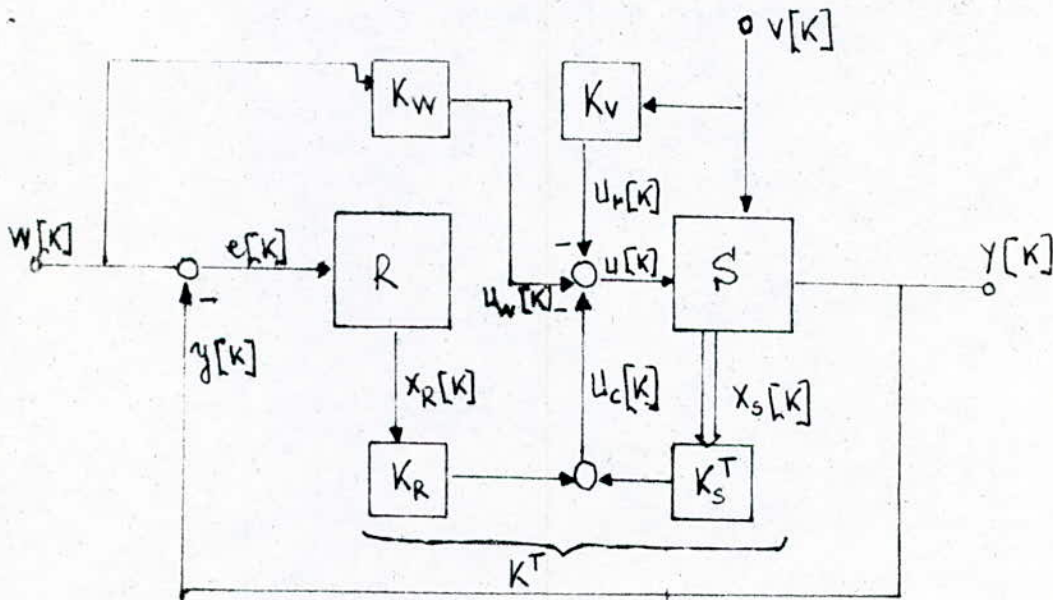


Fig 3-2. REPRÉSENTATION SCHÉMATIQUE DE LA STRUCTURE OPTIMALE DU RÉGLAGE D'ÉTAT D'UN SYSTÈME MONOVARIABLE.

La commande  $U[K]$  est donnée par la somme de 3 composantes, dues à la contre réaction, d'état et aux interventions, directes, des grandeurs, de consigne et, de perturbation.

$$U[K] = -u_c[K] + u_w[K] - u_v[K] \quad (3-9)$$



La composante  $U_c[k]$  est due à la contre réaction, d'état. Elle est donnée par la contre réaction, d'état  $X_s[k]$ , du système, à régler par l'intermédiaire, du vecteur ligne  $K_s^T$ , ainsi que par la contre réaction, d'état, du régulateur par l'intermédiaire du coefficient  $K_R$ .

La composante  $U_v[k]$  est due à l'intervention directe de la grandeur de perturbation  $V[k]$  par l'intermédiaire du facteur  $K_v$ .

La composante  $U_w[k]$  est due à l'intervention directe de la grandeur de consigne  $W[k]$  par l'intermédiaire du facteur  $K_w$ .

Pour obtenir un réglage optimal du système, nous exigeons la minimisation du critère d'intégrale en intervenant uniquement sur le vecteur d'entrée  $U[k]$  (de commande).

Cette minimisation tient compte du régulateur, de la consigne, la perturbation et l'état du système.

Le vecteur de commande, est donnée par la relation:

$$U[k] = -K_s X_s[k] + K_R X_R[k] + K_w W[k] - K_v V[k] \quad (3.10)$$

où :

$U_c[k] = K_s^T X_s[k] - K_R X_R[k]$  : représente la contre-réaction

$U_w[k] = K_w \cdot W[k]$  : intervention de la consigne.

$U_v[k] = K_v \cdot V[k]$  : intervention de la perturbation.

### 3.4. STRUCTURE DU RÉGULATEUR :

La figure 3.3 nous montre l'introduction d'un régulateur monovariable en série avec un système monovariable.

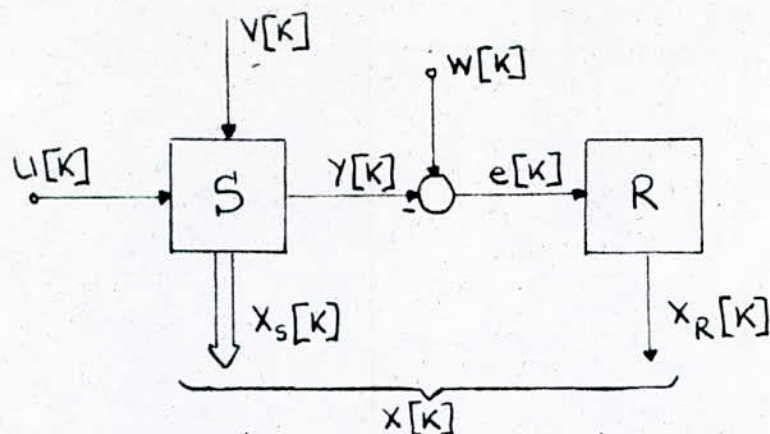


Fig 3-3. REPRÉSENTATION SCHEMATIQUE DU SYSTÈME À RÉGLER ET DU RÉGULATEUR.

La structure du régulateur  $R$  est déterminée de sorte que l'écart de réglage  $e(k)$  s'annule en régime établi.

$$e(k) = w(k) - y(k) \quad (3-11)$$

L'équation d'état du régulateur est :

$$x_R[k+1] = F_R \cdot x_R[k] + H_R [w(k) - y(k)] \quad (3-12)$$

On montre que  $F_R = 1$  et  $H_R = 1$

Le régulateur  $\bar{a}$ , choisi, est donc un régulateur intégrateur.

### 3-5. SYSTÈME D'ÉQUATIONS :

Les équations d'état du système  $\bar{a}$  à régler sont :

$$x_S[k+1] = F_S x_S[k] + H_S u[k] + H_{sv} \cdot v[k] \quad (3-13)$$

$$y[k] = C_S^T \cdot x_S[k] \quad (3-14)$$

L'équation d'état aux différences du régulateur est :

$$x_R[k+1] = \sum_{i=0}^k e(i) = x_R[k] + e[k]$$

Sachant que l'écart de réglage  $e[k]$  est donné par :

$$e[k] = w[k] - C_S^T x_S[k] \quad (3-15)$$

La relation (3-13) devient :

$$x_R[k+1] = x_R[k] + w[k] - C_S^T x_S[k] \quad (3-16)$$

Pour le système global, on peut introduire le vecteur d'état global :

$$X[K] = \begin{bmatrix} X_S[K] \\ X_R[K] \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

et les équations d'état en boucle ouverte sont :

$$X[K+1] = F \cdot X[K] + H U[K] + H_w W[K] + H_v V[K] \quad (3-18)$$

$$Y[K] = C^T X[K] \quad (3-19)$$

avec :

$$F = \begin{bmatrix} F_S & 0 \\ -C_S^T & 1 \end{bmatrix} ; \quad H = \begin{bmatrix} H_S \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad H_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H_v = \begin{bmatrix} H_{sv} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad C^T = \begin{bmatrix} C_S^T & 0 \end{bmatrix}$$

la grandeur de commande sera :

$$U[K] = -K^T X[K] + K_w W[K] - K_v V[K] \quad (3-20)$$

avec :

$$K^T = \begin{bmatrix} K_S^T & -K_R \end{bmatrix}$$

L'équation d'état du système global fermé est obtenue lorsqu'on fait intervenir la contre-réaction d'état et les grandeurs de consigne et de perturbation, on trouve :

$$X[K+1] = F_G X[K] + H_{Gw} W[K] + H_{Gv} V[K] \quad (3-21)$$

$$Y[K] = C^T X[K] \quad (3-22)$$

avec :

$$F_G = F - H K^T$$

$$H_{Gw} = H_w + H K_w$$

$$H_{Gv} = H_v - H K_v$$

Ces équations décrivent le comportement dynamique du système global fermé en particulier sous l'influence de la contre-réaction.

### 3-6. Détermination des coefficients de réglage :

Il existe plusieurs méthodes pour la détermination des coefficients de réglage, on ne citera ici que celles qui ont été utilisées pour notre réglage d'état.

#### 3-6.1 Détermination des coefficients de la contre-réaction d'état

Les éléments du vecteur ligne  $K^T$  peuvent être déterminés en utilisant la forme canonique de réglage faisant appel aux matrices de transformation et forme canonique de la matrice  $F$ .

En général, la relation (3.18), ne se trouve pas sous forme canonique, dans ce cas, on doit effectuer au préalable une transformation linéaire par :

$$X_R[K] = TX[K] \quad (3-23)$$

où  $T$ , est appelée matrice de transformation.

Après quelques transformations analytiques, on l'on trouve la matrice  $F_{GR}$ , et les éléments d'un vecteur ligne :

$$K_r^T \cdot T = [K_{s1} \quad K_{s2} \quad -K_R] \quad (3-24)$$

#### 3-6.2 Détermination des coefficients de l'intervention directe des grandeurs de consigne et de perturbation :

Les méthodes peuvent être utilisées pour la détermination du coefficient  $K_w$ .

- la compensation d'un pôle par rapport à la grandeur de consigne, donne :

$$K_w = \frac{K_R}{1 - Z_i} \quad (3-25)$$

le pôle à compenser  $Z_i$  doit être réel avec  $|Z_i| < 1$ .

- l'imposition de la grandeur d'état du régulateur nulle en régime établi donne :

$$K_w = \frac{1}{C^T (1 - F + H \cdot K^T)^{-1} H} \quad (3-26)$$

Par contre, pour le coefficient  $K_V$ , nous imposons une grandeur d'état nulle, en régime établi, on trouve, dans ce cas:

$$K_V = \frac{C_S^T [1 - F_S - H_S K_S^T]^{-1} H_{SV}}{C_S^T [1 - F_S - H_S K_S^T]^{-1} H_S} \quad (3-27)$$

### 3.7. CHOIX DES PÔLES:

Afin d'obtenir un comportement dynamique satisfaisant du réglage d'état, il est indispensable de faire un choix des pôles, à imposer, de manière adéquate. Il est ainsi préférable de choisir des pôles, garantissant un amortissement relatif optimal selon la relation:

$$Z_i = \exp(-\omega T) [\cos \omega T \pm j \sin \omega T] \quad (3-28)$$

où  $T$ , est la période, d'échantillonnage.

# CHAPITRE IV

## Réglage d'état d'un système à deux constantes de temps.

### 4-1, STRUCTURE DE RÉGLAGE :

Elle est constituée, d'un échantillonneur, à pulsations, d'un élément de maintien, d'un régulateur monovariable et du système, à régler défini par les fonctions de transfert données par le schéma bloc.

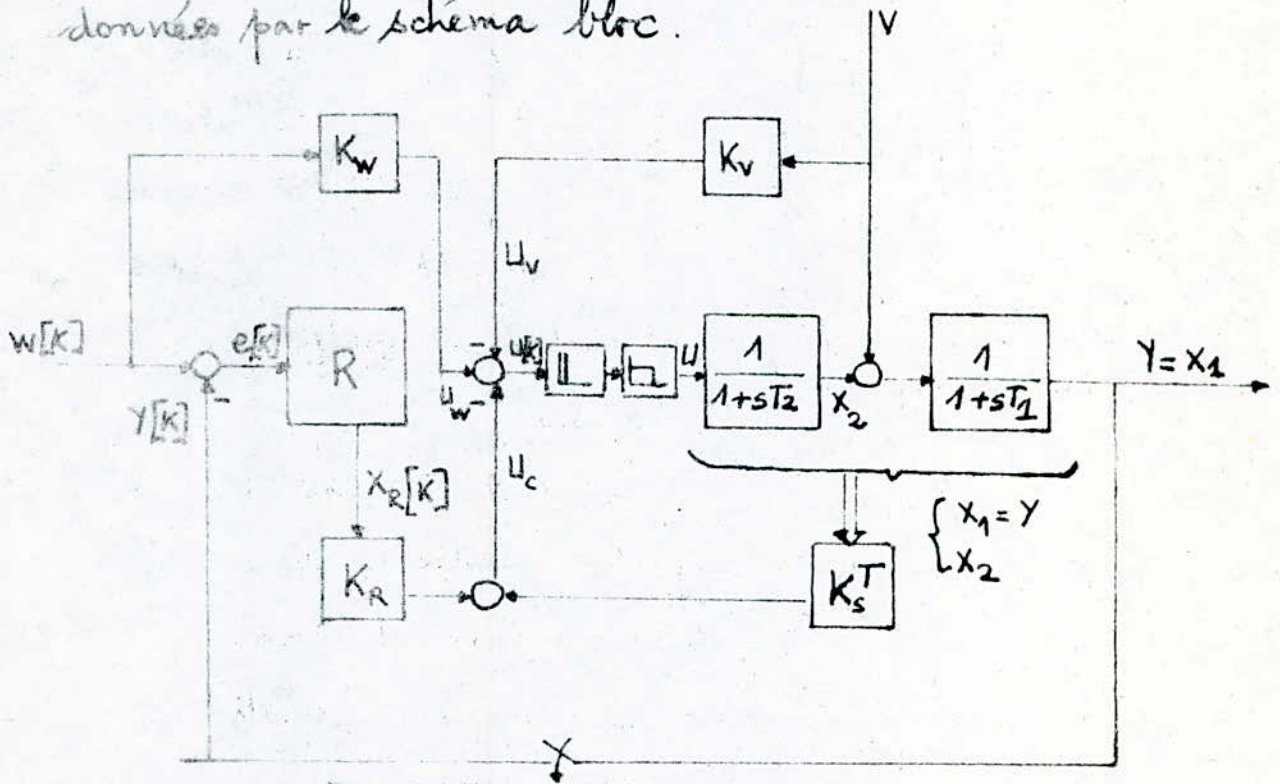


Fig 4-1. Circuit de réglage par contre réaction d'état avec intégrateur.

### 4-2. Équation d'état, du système, continu :

Les équations, du système, continu sont, données par :

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{T_1} x_1 + \frac{1}{T_1} x_2 - \frac{1}{T_1} V \quad (4-1)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2} x_2 + \frac{1}{T_2} U \quad (4-2)$$

En mettant sous la forme matricielle, on aboutit à :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & \frac{1}{T_1} \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} \\ 0 \end{bmatrix} V$$

Donc :

$$\dot{x}_s(t) = Ax_s(t) + B_s w(t) + B_{sv} v(t) \quad (4-4)$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & \frac{1}{T_1} \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix} ; \quad B_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_2} \end{bmatrix} ; \quad B_{sv} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

tandis que l'équation de la grandeur de sortie est :

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

Avec :

$$C_s^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour notre système, les grandeurs  $x, y, u, v$  représentent respectivement les états du système, la sortie du système, l'entrée du système, et la perturbation.

#### 4-3. ÉQUATIONS D'ÉTAT DU SYSTÈME ÉCHANTILLONNÉ :

sa commande étant numérique, il est nécessaire de tenir compte du caractère échantillonné de ce réglage.

Pour passer aux équations d'état du système échantillonné, on doit déterminer la matrice de transition d'état notée  $\Phi(t)$ .

##### 4-3.1 Détermination de la matrice de transition :

Il existe deux méthodes pour le calcul de cette matrice ( $\Phi(t)$ ). Dans notre cas, on utilisera la transformation de Laplace. Pour cela, on forme la matrice  $(sI - A)$ , qu'on doit inverser et appliquer la transformation de Laplace à ses éléments [1][2]

$$\left[ sI - A \right]^{-1} = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T_1} & -\frac{1}{T_1} \\ 0 & s + \frac{1}{T_2} \end{bmatrix}^{-1}$$

Nous trouvons, après calcul :

$$\bar{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} & \frac{1}{T_1(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})} \\ 0 & \frac{1}{s + \frac{1}{T_2}} \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

Les transformations inverses de Laplace donnent :

$$\frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \longrightarrow \exp(-t/T_1)$$

$$\frac{1}{T_1(s + \frac{1}{T_1})(s + \frac{1}{T_2})} \longrightarrow \frac{T_2}{(T_1 - T_2)} \left[ \exp(-\frac{t}{T_1}) - \exp(-\frac{t}{T_2}) \right]$$

$$\frac{1}{s + \frac{1}{T_2}} \longrightarrow \exp(-t/T_2)$$

d'où

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \exp(-t/T_1) & \frac{T_2}{(T_1 - T_2)} \left[ \exp(-\frac{t}{T_1}) - \exp(-\frac{t}{T_2}) \right] \\ 0 & \exp(-t/T_2) \end{bmatrix}$$

Pour transformer les matrices  $B_S$  et  $B_{SV}$ , on introduit également une matrice  $\Psi(t)$  obtenue par intégration des éléments de la matrice  $\Phi(t)$  tel que :

$$\Psi(t) = \int_0^t \Phi(\tau) d\tau \quad (4-7)$$

On trouve :

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} T_1 \left[ 1 - \exp(-\frac{t}{T_1}) \right] & \frac{T_2}{(T_1 - T_2)} \left[ T_1 (1 - \exp(-\frac{t}{T_1})) - T_2 (1 - \exp(-\frac{t}{T_2})) \right] \\ 0 & T_2 \left[ 1 - \exp(-\frac{t}{T_2}) \right] \end{bmatrix}$$



Les équations d'état aux différences du système échantillonné peuvent se mettre sous la forme :

$$X_s[k+1] = F_s X_s[k] + H_s U[k] + H_{sv} \cdot V[k] \quad (4-8)$$

$$Y[k] = C_s^T X_s[k] \quad (4-9)$$

Le passage des équations d'état du système continu aux équations du système échantillonné nécessite les transformations suivantes :

$$F_s = \Phi(T) \quad ; \quad H_s = \Psi(T) B_s \quad , \quad \text{et} \quad H_{sv} = \Psi(T) \cdot B_{sv} \quad (4-10)$$

On tire ainsi :

$$F_s = \begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right) & \frac{T_2}{T_1 - T_2} \left[ \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right) - \exp\left(-\frac{T}{T_2}\right) \right] \\ 0 & \exp\left(-\frac{T}{T_2}\right) \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

$$H_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1 - T_2} \left[ T_1 (1 - \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right)) - T_2 (1 - \exp\left(-\frac{T}{T_2}\right)) \right] \\ \left[ 1 - \exp\left(-\frac{T}{T_2}\right) \right] \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

$$H_{sv} = \begin{bmatrix} \left( \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right) - 1 \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad C_s^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

D'après l'équation (3-18), les équations d'état du système en boucle ouverte, avec régulateur s'écrivent:

$$\begin{aligned} X[K+1] &= FX[K] + HU[K] + H_W W[K] + B_V \cdot V[K] \\ Y[K] &= C^T X[K] \end{aligned} \quad (4-14)$$

avec:

$$F = \begin{bmatrix} F_s & 0 \\ -C_s^T & 1 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} H_s \\ 0 \end{bmatrix}; \quad H_W = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad H_V = \begin{bmatrix} H_{sv} \\ 0 \end{bmatrix}$$

et:

$$C_s^T = (1 \ 0); \quad C^T = (1 \ 0 \ 0)$$

Ainsi pour  $\frac{T}{T_1} = 1/2$  et  $\frac{T}{T_2} = 1$ , les matrices du système global, en boucle ouverte, deviennent:

$$F = \begin{bmatrix} 0,607 & 0,239 & 0 \\ 0 & 0,368 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0,155 \\ 0,632 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et:

$$H_W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad H_V = \begin{bmatrix} 0,393 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec l'introduction de la contre réaction d'état et l'intervention directe des grandeurs de consigne et de perturbation, on obtient l'équation d'état du système global fermé, de la forme:

$$\begin{aligned} X[K+1] &= F_G \cdot X[K] + H_{GW} \cdot W[K] + H_{GV} \cdot V[K] \\ Y[K] &= C^T X[K] \end{aligned} \quad (4-15)$$

La connaissance des matrices  $F_G$ ,  $H_{GW}$ , et  $H_{GV}$  nécessite

la détermination.

- du vecteur ligne de contre-réaction  $K^T$ .
- du coefficient  $K_w$  (intervention directe de la consigne).
- du coefficient  $K_v$  (intervention directe de la perturbation).

#### 4-3.2 Détermination des coefficients de réglage :

##### 4-3.2.1 Détermination du coefficient $K^T$

Le vecteur ligne  $K^T$  est déterminé à partir de la forme canonique de réglage, cette méthode exige une imposition des pôles pour le système global fermé.

Afin d'obtenir un bon comportement dynamique du système, on doit choisir des pôles garantissant un amortissement relatif optimal; ces pôles doivent alors vérifier la relation suivante [2].

$$z_i = \exp(-\omega T) [\cos \omega T \pm j \sin \omega T].$$

Notre système est du troisième ordre, on choisit alors une paire de pôles complexes et un pôle réel.

$$z_{1,2} = 0,200 \pm j0,310 \quad ; \quad z_3 = 0,250.$$

Nous commençons d'abord par le calcul de la matrice  $S'$ .

Cette matrice étant définie par:

$$S = T^{-1}$$

où  $T$  est la matrice de transformation (passage à la forme canonique).

La matrice  $S'$  est définie par [2] :

$$\begin{cases} S'_3 = H \\ S'_2 = FS'_3 + a_2 S'_3 \\ S'_1 = FS'_2 + a_1 S'_3 \end{cases}$$

Il est alors nécessaire de connaître les coefficients  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  de l'équation caractéristique en boucle ouverte du système. Cette dernière est donnée par :

$$\det(Z.I - F) = 0$$

d'où, cette équation peut se mettre sous la forme:

$$Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0 = 0$$

avec:

$$a_2 = -1,974 ; a_1 = 1,198 ; a_0 = -0,223.$$

Nous déduisons:

$$S = \begin{bmatrix} -0,094 & -0,061 & 0,155 \\ 0,383 & -1,016 & 0,632 \\ -0,094 & -0,155 & 0 \end{bmatrix}$$

L'inversion de cette matrice, conduit à la matrice T :

$$T = \begin{bmatrix} -3,315 & -0,812 & -4,021 \\ 2,010 & -0,492 & -4,021 \\ -5,240 & 0,299 & -4,021 \end{bmatrix}$$

Sachant, que [2] :  $K^T = K_r^T \cdot T$

avec:

$$K_{r1} = \alpha_0 - a_0.$$

$$K_{r2} = \alpha_1 - a_1.$$

$$K_{r3} = \alpha_2 - a_2.$$

Les coefficients  $\alpha_i$  sont les coefficients, de l'équation, caractéristique en boucle fermée, du système. Les pôles étant, déjà imposés, nous aboutissons, à l'équation:

$$P(Z) = (Z - z_1)(Z - z_2)(Z - z_3).$$

En mettant l'équation sous la forme: les valeurs

$$P(Z) = Z^3 + \alpha_2 Z^2 + \alpha_1 Z + \alpha_0$$

Les coefficients  $\alpha_i$  sont, donnés par :

$$\alpha_2 = -0,650$$

$$\alpha_1 = 0,236$$

$$\alpha_0 = -0,234$$

Il vient alors:

$$K_r^T = \begin{bmatrix} 0,189 & -0,962 & 1,324 \end{bmatrix}$$

En remplaçant dans la relation (3-24), on trouve:

$$K^T = \begin{bmatrix} 4,380 & 1,022 & -2,219 \end{bmatrix}$$

4-3.2.2. Détermination des coefficients  $K_w$  et  $K_v$ :

En utilisant les résultats du chapitre précédent (3-25), (3-26), (3-27), nous pouvons déterminer les coefficients  $K_w$  et  $K_v$ .

Pour la méthode de la compensation d'un pôle par rapport à la grandeur de consigne:

$$K_w = 2,959.$$

Pour la méthode de la grandeur d'état du régulateur nulle en régime établi:

$$K_w = 6,402.$$

Par contre la grandeur  $K_v$  vaut:

$$K_v = 2,022.$$

Ayant calculé les coefficients, nous pouvons déterminer les équations d'état du système global en boucle fermée.

Nous aboutissons ainsi aux résultats:

$$F_G = \begin{bmatrix} -0,072 & 0,080 & 0,344 \\ -2,769 & -0,278 & 1,403 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{Gw} = H_w + HK_w \quad ; \quad H_{Gw} = \begin{bmatrix} 0,991 \\ 4,047 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad H_{Gv} = \begin{bmatrix} 0,080 \\ -1,278 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$H_{Gv} = H_v - HK_v$$

des équations d'état du système, en boucle fermée étant déterminées nous pouvons tracer les réponses indicielles du système.

Un programme a été élaboré pour le tracé de ces réponses et il donne les résultats suivants:

La figure (4-2) montre le comportement transitoire que présente le système global fermé, à partir d'un certain état initial, à savoir:

$$X_{s1}[0] = 1 ; X_{s2}[0] = 1 ; X_R[0] = 0$$

On voit que l'état final  $X_{s1\infty} = X_{s2\infty} = X_{R\infty} = 0$ , est pratiquement atteint après  $K=6$  périodes d'échantillonnage. On peut donc conclure que les pôles assignés garantissent un amortissement rapide du phénomène transitoire.

La figure (4-3) montre la réponse indicielle des trois grandeurs d'état par rapport à la consigne pour  $K_w = 0$  et  $K_v = 0$  (sans intervention directe). On peut remarquer qu'on obtient un phénomène transitoire relativement lent. En particulier, les grandeurs d'état du système à régler ne varient qu'après une période d'échantillonnage. Ce retard est dû au fait que la variation de la consigne intervient uniquement sur le régulateur intégrateur qui impose seulement à  $K=1$  une grandeur de commande  $u[K] \neq 0$ . La grandeur de sortie  $y[K, \varepsilon]$ , égale à la grandeur d'état  $X_{s1}[K, \varepsilon]$ , atteint avec un petit dépassement d'environ 1,5% la valeur finale.

La figure (4-4) montre la réponse indicielle des trois grandeurs d'état par rapport à la perturbation pour  $K_w = 0$  et  $K_v = 0$ .

On peut remarquer, que la grandeur d'état  $X_{S1}$  varie à partir de  $k=0$  à cause de l'influence de la grandeur de perturbation sa grandeur  $X_R[k]$  du régulateur varie seulement à partir de  $k=1$ . Par contre, on constate, que la grandeur d'état  $X_{S2}$  varie à partir de  $k=1$ . Ceci est dû, au fait, que la contre-réaction d'état (en particulier celle de  $X_{S1}$ ) fait varier à  $k=1$  la grandeur de commande  $u[k]$ .

Les figures (4-5) et (4-6) donnent les réponses indiciales par rapport à la grandeur de consigne respectivement avec compensation d'un pôle et avec grandeur du régulateur nul en régime établi. Dans le premier cas, on voit, que la grandeur à régler  $Y[k, \varepsilon]$  ne possède qu'un dépassement maximum de 4% avec un temps de montée tout à fait acceptable. Sa qualité de réglage est donc très bonne. Sa grandeur d'état du régulateur  $X_R[k]$  ne s'annule pas en régime établi. Dans le deuxième cas, on voit une intervention rapide du réglage d'état qui se manifeste surtout par une variation transitoire très élevée de la grandeur d'état  $X_{S2}$ . Cependant la grandeur à régler  $Y = X_{S1}$  présente un dépassement maximum important de 59%, ce qui en général n'est pas acceptable. Quant à la grandeur d'état  $X_R[k]$  du régulateur, on voit qu'elle s'annule effectivement en régime établi.

Étant donné ces résultats, on optera pour la première méthode, qui a donné un meilleur réglage.

Les figures (4-7) et (4-8) donnent les réponses indiciales par rapport à la grandeur de perturbation respectivement avec compensation d'un pôle et avec grandeur d

régulateur nulle en régime établi.

Dans le premier cas, on voit que la grandeur à régler  $Y$  possède un dépassement maximum de 16%. La grandeur d'état  $X_R[K]$ , du régulateur prend une valeur finie en régime établi. Dans le deuxième cas, on voit que la grandeur à régler  $Y[K, \varepsilon]$  ne présente qu'un dépassement maximum faible de 12,5%. Ceci est dû à l'intervention directe de la grandeur de perturbation qui impose déjà à  $K=0$  une grandeur de commande avec une valeur correspondant à celle en régime établi. Quant à la grandeur du régulateur, elle s'annule effectivement en régime établi.

La figure (4-9) montre la réponse du système pour une grandeur de consigne et son comportement vis à vis de la perturbation. On voit que cette dernière n'influence que sur la grandeur d'état  $X_{s2}$ .



## CHAPITRE V

Étude comparative des deux méthodes

L'objectif principal de ce chapitre est de faire une étude comparative des deux méthodes utilisées pour notre réglage échantillonné du système à deux constantes de temps.

On commencera d'abord par une étude de l'influence de la variation de la petite constante de temps  $T_2$  par rapport à la constante dominante  $T_1$  du système, suivie de l'étude de l'influence des pôles sur les performances du système.

### 5-1. INFLUENCE DE $T_2$ :

Comme pour le cas du réglage classique nous faisons varier la petite constante de temps  $T_2$  par rapport à la constante dominante  $T_1$  du système afin de voir son influence sur les performances du réglage. Le traitement numérique nous permet de déterminer les réponses indicielles en fonction de la variation de  $T_2$ . La figure 5-1 représente la réponse indicielle du système en fonction de  $T_2$ . Il apparaît que le dépassement est de 4% et que la réponse du système devient de plus en plus rapide pour des valeurs de  $T_2$  inférieures à  $T_1$ .

### 5-2. INFLUENCE DES PÔLES :

Le calcul des coefficients de réglage nécessite une imposition des pôles; il est très intéressant

de voir l'influence, du choix des pôles à assigner sur les performances, du système. Pour cette étude nous avons pris quatre triplets de pôles, garantissant un amortissement relatif optimal, c'est à dire vérifiant la relation [1][2]. Le tracé, dans le plan complexe de la courbe, qui représente les pôles, assurant un amortissement relatif optimal, a donné l'allure fig (5-2).

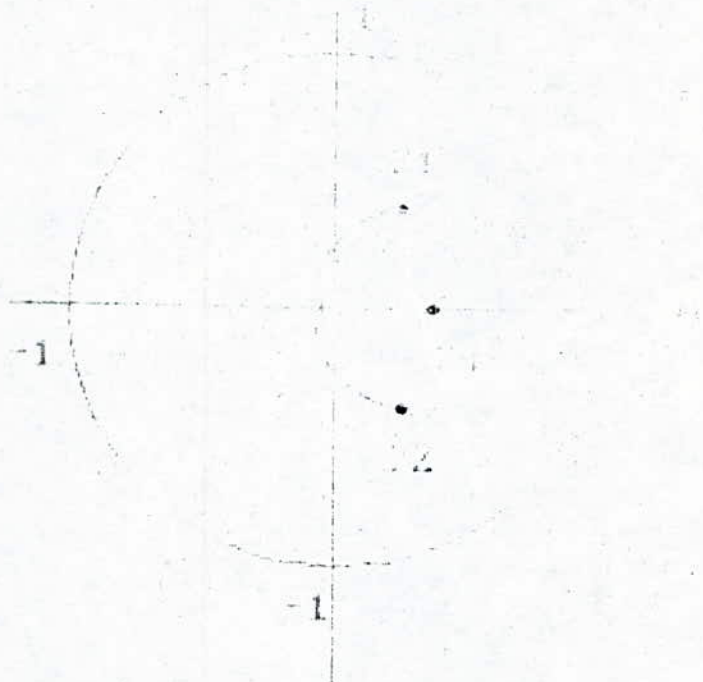


Fig Disposition des pôles pour un amortissement relatif optimal

Pour les pôles, ainsi choisis, le traitement, a donné les réponses indicielles figure 5-3.

De ces réponses, il ressort, que plus on s'approche de l'origine, les performances, du système s'améliorent, ceci apparaît sur la rapidité de la réponse tout en gardant le même dépassement (4%).

5-3. Étude comparative:

- D', après l'allure, des réponses indicielles,

de la grandeur à régler  $Y$  par les deux méthodes de la théorie du réglage échantillonné, on peut faire les constatations suivantes :

- La grandeur à régler  $Y$  présente un dépassement plus petit, dans le cas, de l'étude par variable d'état. Pendant le régime transitoire la grandeur à régler  $Y$  trouvée par le réglage d'état, atteint une valeur maximale relativement plus petite que par le traitement par la transformation en  $Z$ . Cela est dû à la minimisation du critère d'intégrale, qui optimise la grandeur de commande.

La comparaison des résultats nous montre l'intérêt de la méthode des variables d'état par rapport à celle utilisant la transformée en  $Z$  dans le cas de notre application, à notre système.

En effet, le plus grand avantage dans la théorie des variables d'état, est la possibilité d'imposer les pôles indépendamment de la grandeur de consigne et de la perturbation. Ainsi le choix des pôles permet d'améliorer d'avantage les performances du circuit de réglage. La figure 4.10 représente l'influence des pôles sur la grandeur à régler.

De plus l'introduction directe de la consigne provoque un effet d'anticipation et l'intervention directe de la perturbation ayant pour conséquence un effet de compensation de celle-ci, donne de meilleurs résultats que par le réglage classique.

sa souplesse, que possède la méthode des variables  
d'état pour le traitement analytique et numérique des  
systèmes fait, qu'on peut introduire facilement une  
perturbation et voir son influence sur le circuit de  
réglage, ce qui est relativement plus complexe par  
l'autre méthode.

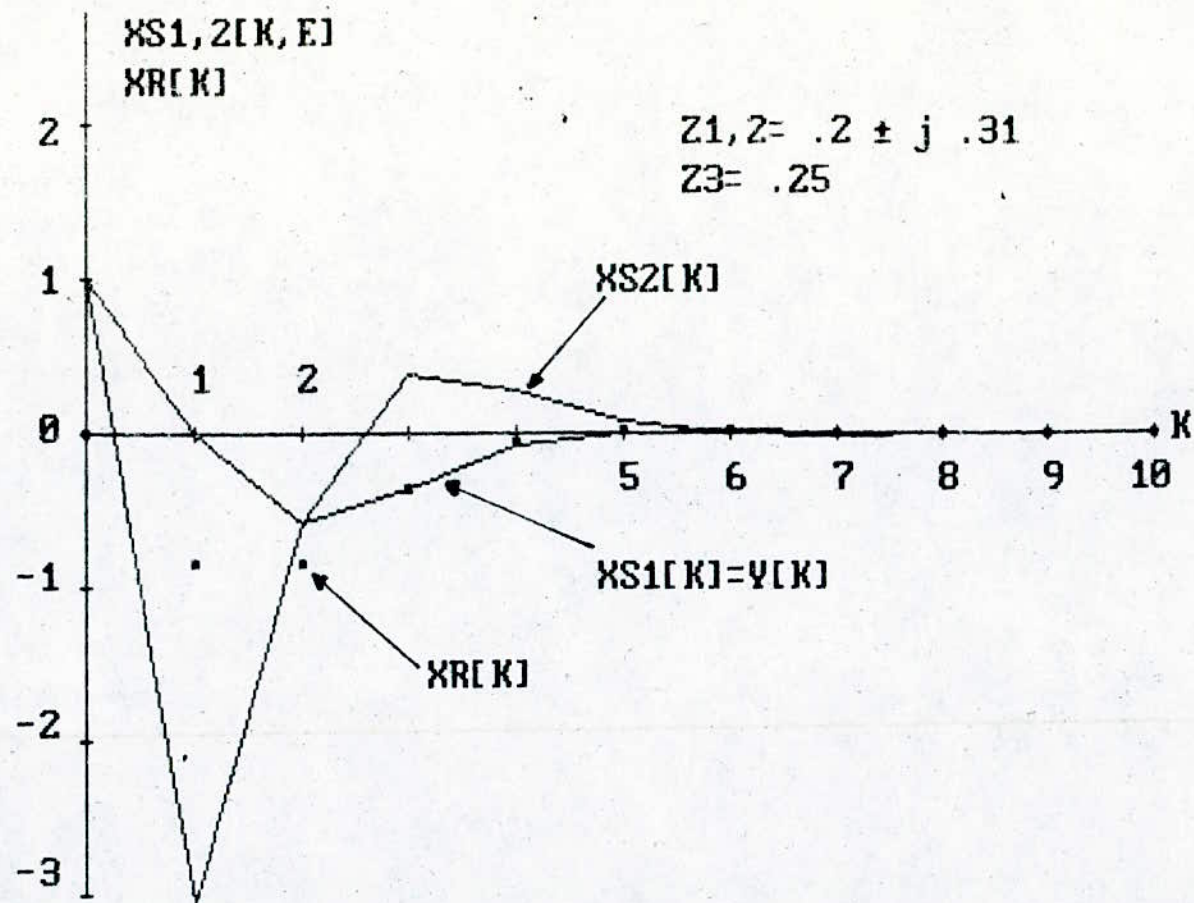


FIG4-2 comportement transitoire du systeme global ferme pour le choix des poles

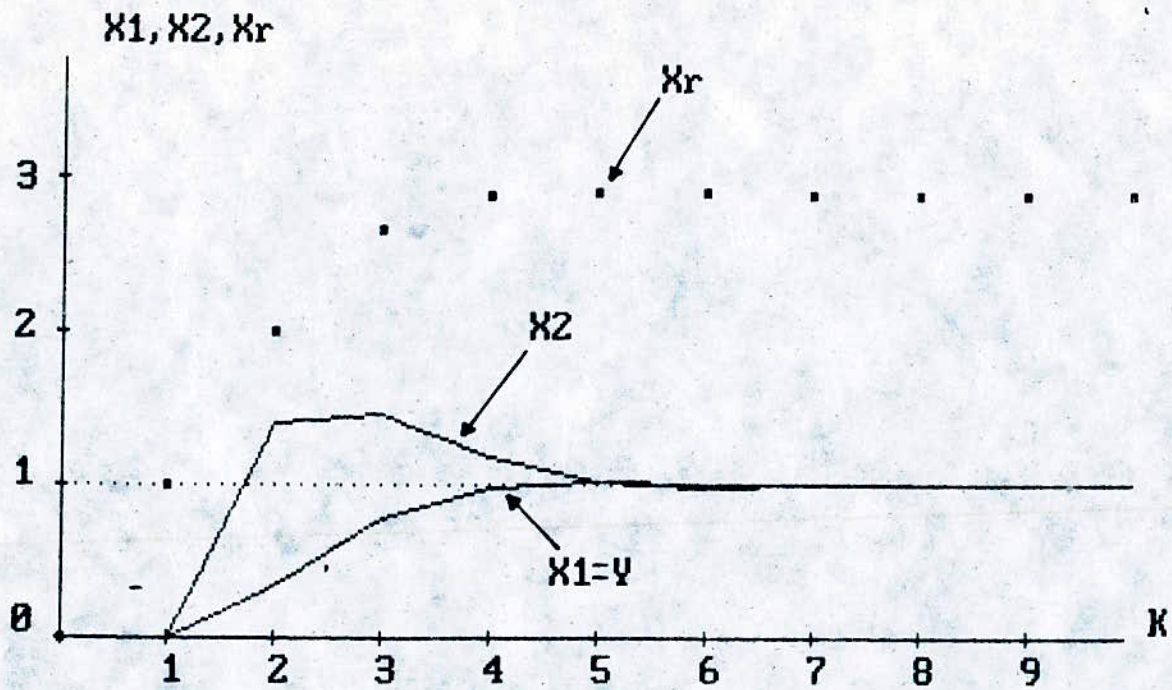


fig4-3 reponse indicielle par rapport a la grandeur de consigne, sans intervention directe

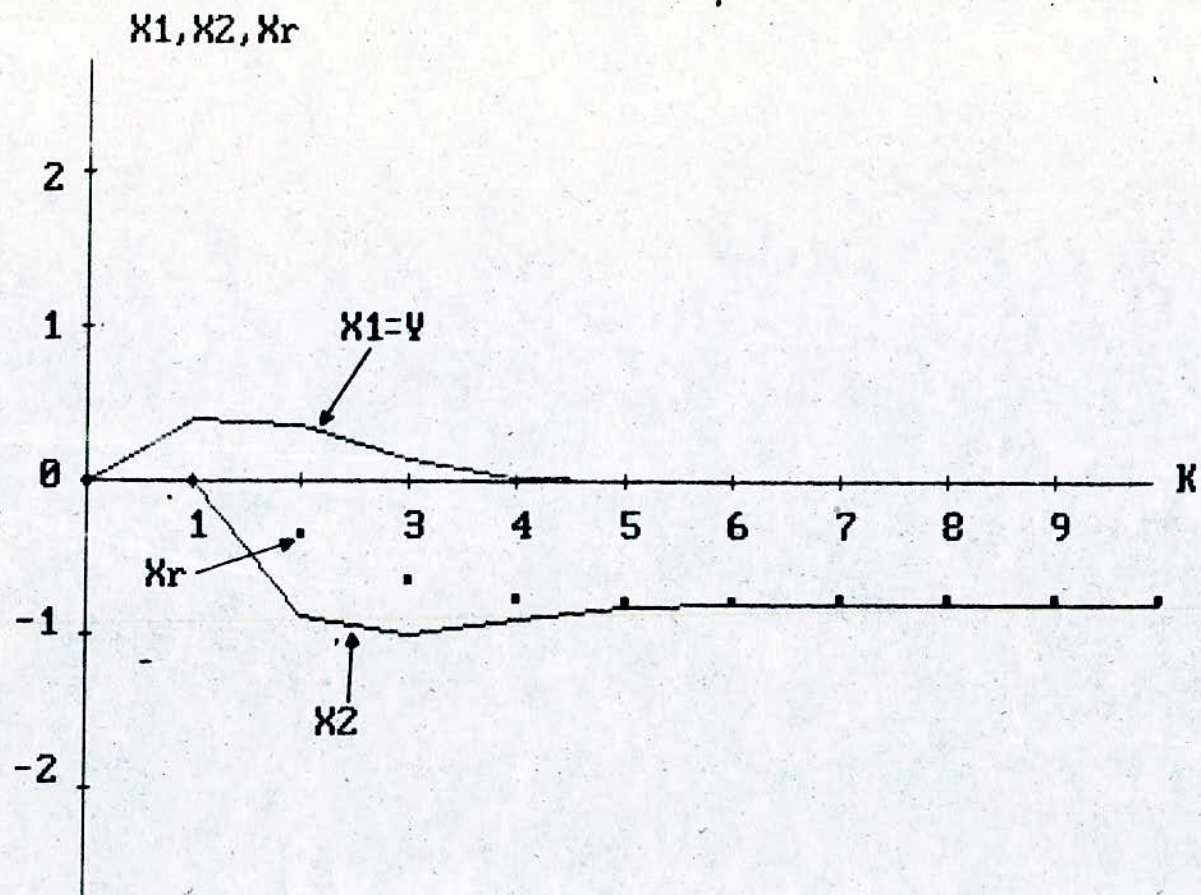


fig4-4reponse indicielle par rapport a la grandeur de perturbation, sans intervention directe

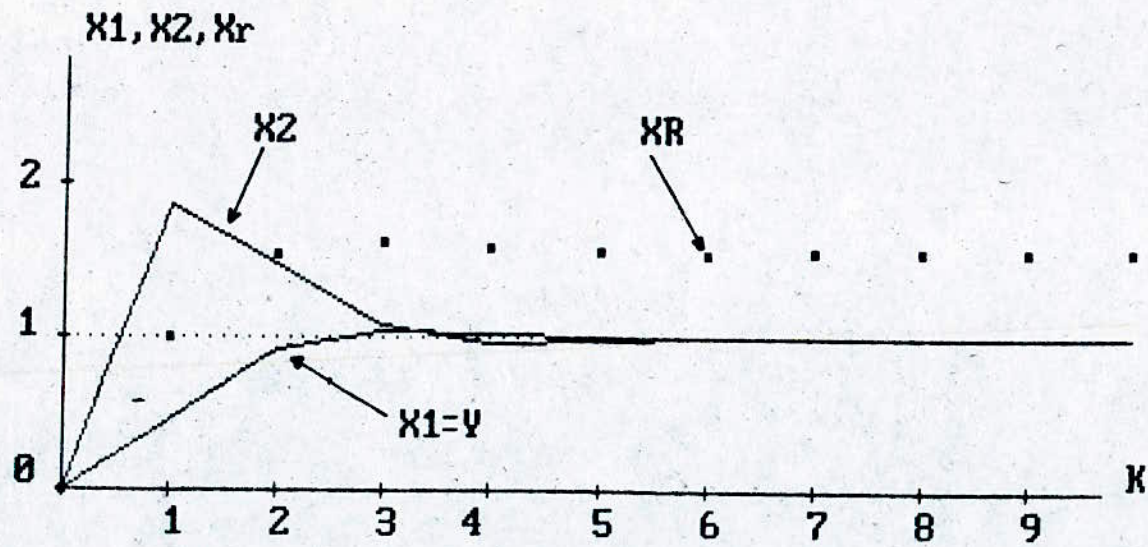


fig4-5 reponse indicielle par rapport a la grandeur de consigne, compensation d'un pole



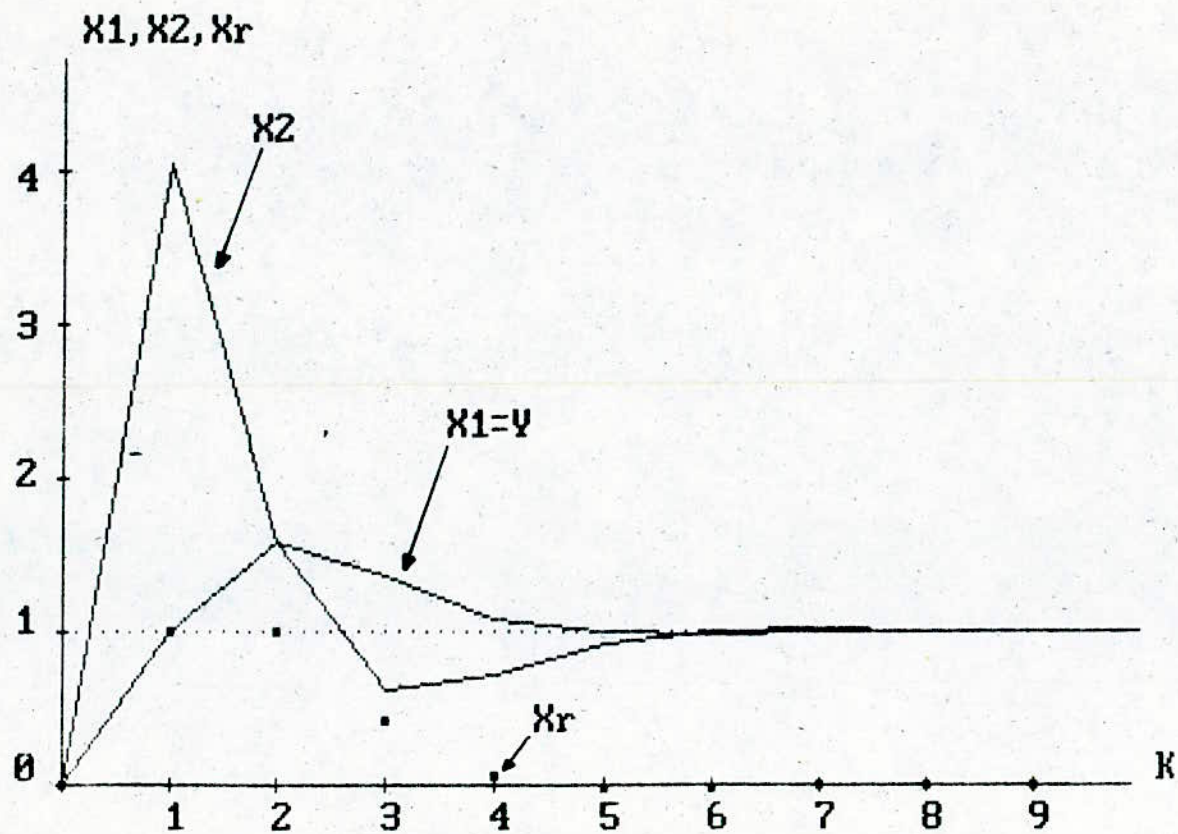


fig4-6 reponse indicielle par rapport a la grandeur de consigne, grandeur d'etat du regulateur nulle en regime etabli

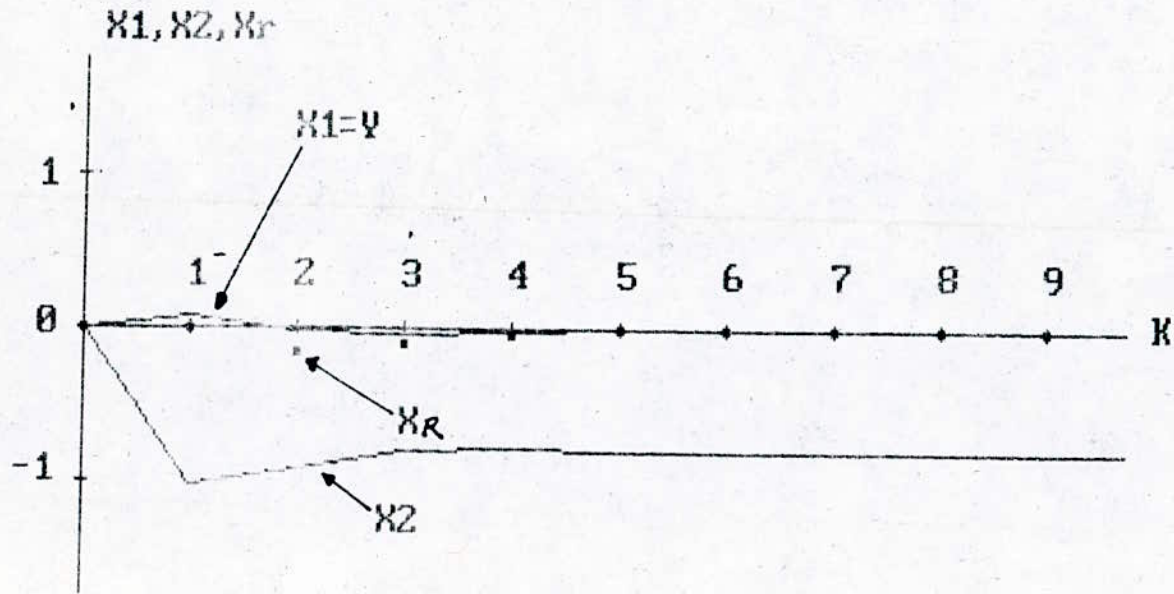


fig4-7 reponse indicielle par rapport a la grandeur de perturbation compensation d'un pole

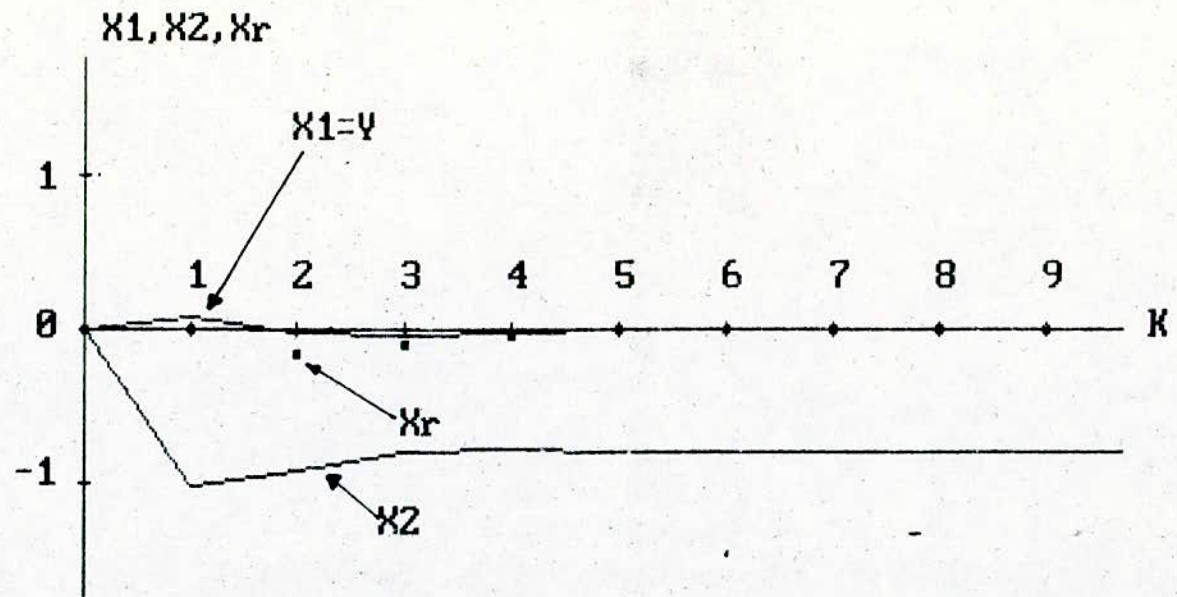
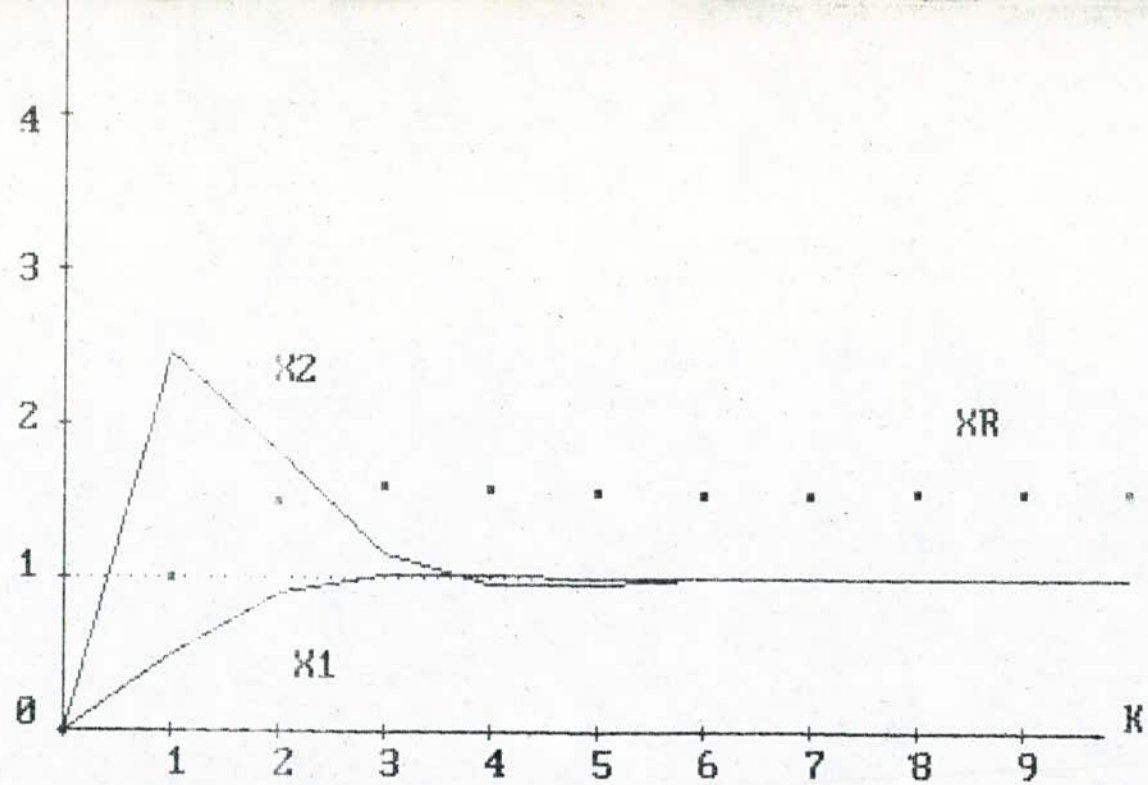


fig4-8 reponse indicielle par rapport a la grandeur de perturbation grandeur d'etat du regulateur nulle en regime etabli



$U=1$  &  $V=.5$

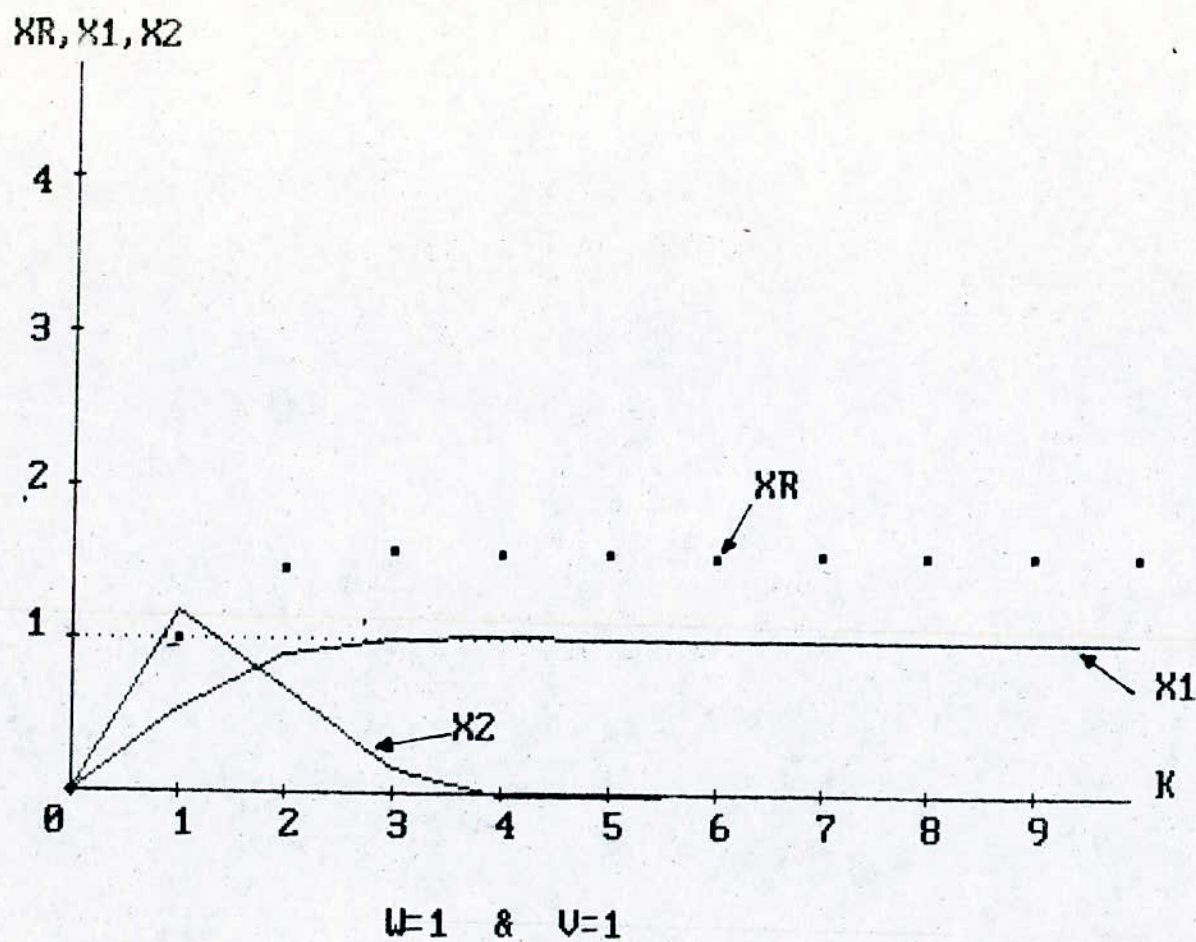


FIG 4-9 INFLUENCE DE LA GRANDEUR DE PERTURBATION SUR LES  
 REPONSES INDICIELLES \*COMPENSATION D'UN POLE \*

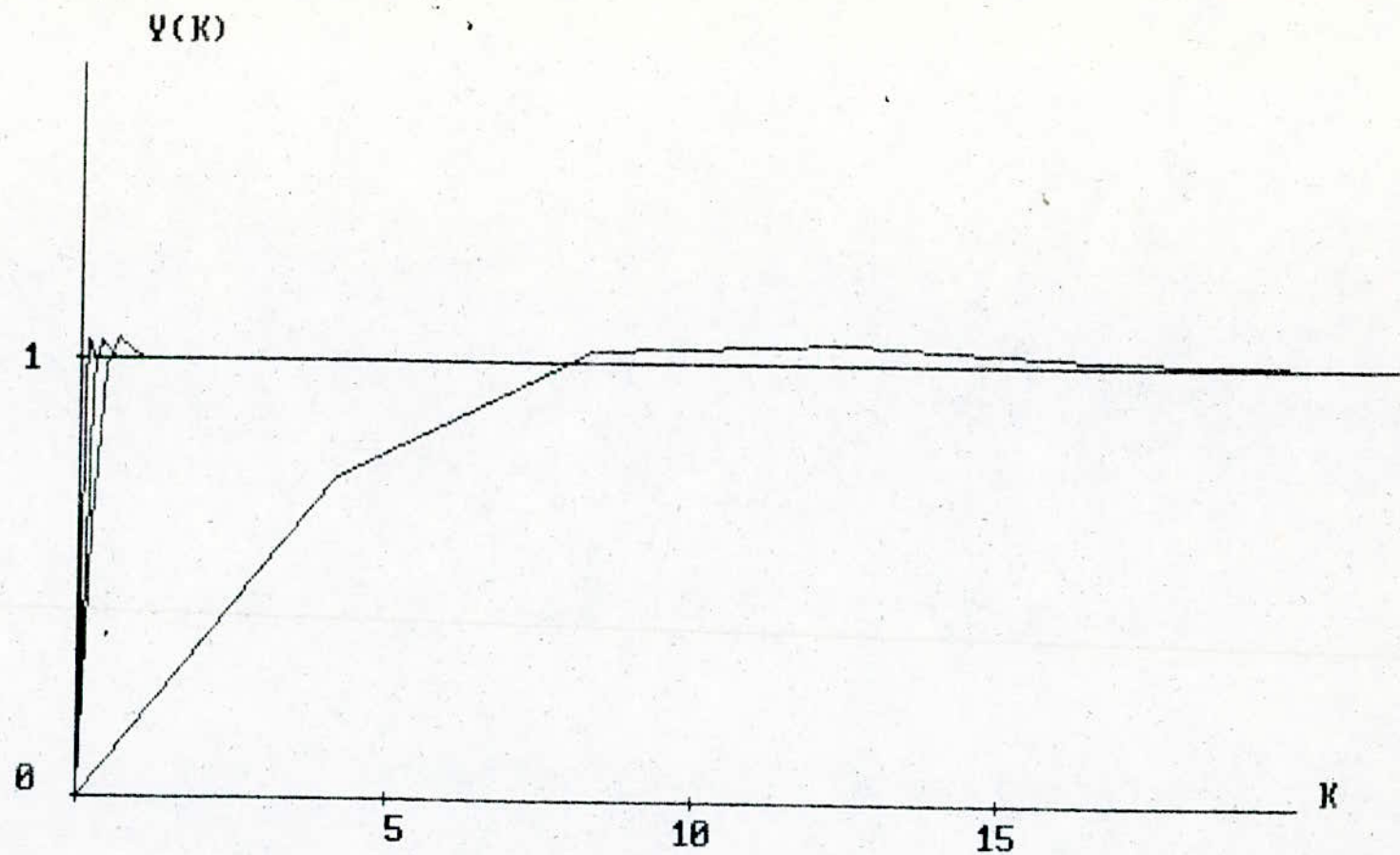


FIG 5-4 influence de  $T_2$  sur la reponse indicielle

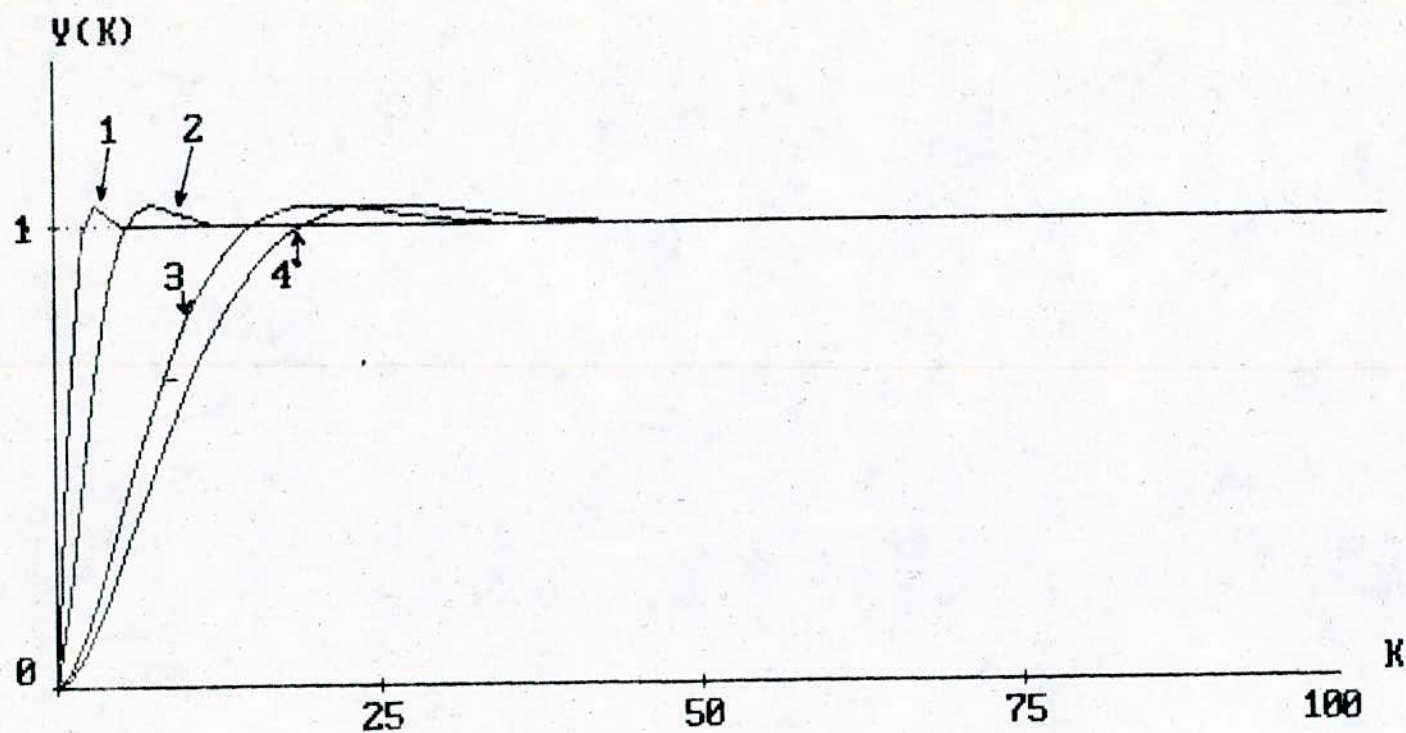


FIG5-3INFLUENCE DES POLES SUR LA REPONSE INDICIELLE

(1)  $Z_{1,2} = .2000 + J.3100$  &  $Z_3 = .2500$

(2)  $Z_{1,2} = .6000 + J.2680$  &  $Z_3 = .6370$

(3)  $Z_{1,2} = .8442 + J.1336$  &  $Z_3 = .8547$

(4)  $Z_{1,2} = .8750 + J.1104$  &  $Z_3 = .2250$

CONCLUSION : Le réglage par retour d'état, est une étude comparative des performances de la commande numérique par le réglage classique, et le réglage d'état, d'un système à deux constantes de temps.

Le traitement de la régulation par la transformée en  $Z$ , donne des résultats acceptables. Tandis que le réglage d'état permet d'obtenir de meilleures performances dynamiques, ceci apparaît nettement sur les réponses indicielles, qui présentent des dépassements voisins mais des réponses beaucoup plus rapides.

Les résultats obtenus permettent aussi de dire que le réglage d'état, est plus général que le réglage classique (par régulateurs standards). Par un choix judicieux des pôles à assigner, il est possible de retrouver les performances données par ce dernier. Cette méthode présente l'avantage du choix des pôles du système global fermé.

Le réglage par retour d'état, est en plus une méthode plus puissante car, elle permet l'étude des systèmes complexes et multidimensionnels où le réglage classique devient un cas particulier.



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. BUHLER, "Réglages échantillonnés"  
vol 1, traitement par la transformée en Z.  
Presses polytechniques romandes - 1982.
- [2] H. BUHLER, "Réglages échantillonnés"  
vol 2, traitement dans l'espace d'état.  
Presses polytechniques romandes - 1983.
- [3] A. FOSSARD, "Systèmes multi-entrées - multi-sorties"  
Technique, de l'ingénieur, mesure et contrôle 1983.
- [4] Y. FAES, "Commande des processus industriels par  
calculateurs" Ed. MASSON 1981
- [5] C FOULARD, S. GENTIL, J. P. SANDRAZ.  
"Commande et régulation par calculateur numérique"  
Ed. EYROLLES. 1977.
- [6] M.S BOUCHERIT, "Réglage digital optimal de l'association  
hacheur - moteur à courant continu"  
Thèse de magister E.N.P (à paraître).
- [7] CHIA-CHI TSUI, "An algorithm for computing state  
feed back in multi - input linear systems" IEEE,  
Trans. aut. cont. March. 1986.
- [8] H.M SONER, "OPTimal control with state space constraints"  
SIAM, may 1986, nov. 1986.
- [9] Y. SEVELY, "Système et asservissements linéaires  
échantillonnés". 2<sup>e</sup> ed. DUNOD 1973.

[10] P.J. RIEDO " , Comparaison, des réglages, classiques et, des  
réglages par, contre-réaction, d'état"  
rapport interne N° 85/05, EPF LAUSANNE 1985.