

5/71

UNIVERSITE D'ALGER
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département Génie Civil

1 esc

THESE DE FIN D'ETUDES

ETUDE PARAMETRIQUE
DES ECOULEMENTS

Compressibles et sans Frottement

6.a



Handwritten red signature or initials.

Proposée par :

M^r GÉZA DE LAPRAY

Etudiée par :

C. DEROUICHE

Promotion 1971

UNIVERSITE

D'ALGER

6.a

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département Génie-Civil

ETUDE PARAMETRIQUE
DES ECOULEMENTS COMPRESSIBLES
SANS FROTTEMENT

Proposée par:

M. LAPRAY

Etudiée par:

DEROUICHE C.

PROMOTION 1971

Je tiens à remercier les
professeurs qui ont contribué à
ma formation d'ingénieur et,
particulièrement Monsieur Lapray,
mon promoteur -

Table des matières

	<u>Pages</u>
Introduction - - - - -	1
Symboles et unités - - - - -	3
Equations générales - - - - -	4
Ecoulements subsoniques - - - - -	5
Ecoulement mixte avec onde de choc droite - - - - -	9
Calcul du rendement isentropique - - - - -	22
Etudes des pertes de charge - - - - -	26
Représentation paramétrique - - - - -	30
Applications numériques - - - - -	31
Programmes - - - - -	36

Introduction

L'étude que m'a confié M. Lapay consiste en la détermination du rendement et des pertes de charges sur les écoulements isentropiques et tracer leur fonction dans les diagrammes paramétriques.

L'apport de ces deux derniers éléments permettra de résoudre complètement tous les problèmes que l'on ait omis à rencontrer dans la pratique uniquement à l'aide d'abaques.

Les hypothèses établies au préalable sont :

- a) L'écoulement doit être compressible.
- b) Il ne doit y avoir aucun frottement.
- c) Sans transfert de chaleur
- d) Les ouvrages doivent être courts

Nous envisagerons quatre cas :

- d'écoulement reste subsonique sur tout le parcours.
- d'écoulement subsonique devient sonique dans la section, rétrécit puis redevient supersonique.
- L'écoulement est subsonique, sonique dans les sections, rétrécit et redevient subsonique.
- L'écoulement est subsonique, sonique supersonique et par la formation d'une onde de choc redevient subsonique.

Les abaques ont été construits pour les gaz ci-après :

gaz	NH ₃	H _c	Co ₂	Air	So ₂	N ₂	H ₂	O ₂	CH ₄
K	1,31	1,66	1,28	1,40	1,26	1,40	1,40	1,40	1,31

Symboles et Unités

A	aire d'une section	m^2
A*	aire de la section hypothétique	m^2
C*	vitesse sonique ou hypothétique	m/s
D	diamètre	m
D*	diamètre de la section hypothétique	m
g	accélération de la pesanteur	m/s^2
k	exposant isentropique	sans dimensions
L	longueur	m
m	débit masse	kg/s
p	pression	Pa
p*	pression dans la section hypothétique	Pa
Q	débit volume	m^3/s
R	Constante du gaz en écoulement	$m/°K$
Re	nombre de Reynolds	sans dimensions
T	température absolue	$°K$
T*	température absolue dans la section hypothétique	$°K$
V	vitesse moyenne dans une section	m/s
α	facteur de correction de l'énergie cinétique	sans dimensions
β	facteur de correction de la quantité de mouvement	sans dimensions
ρ	masse volumique dans une section	kg/m
η	rendement	sans dimensions
ζ	perte de charge	calories

Equations générales

— Propriétés des fluides :

$$P = \rho g R T \quad (1)$$

$$R = \frac{848}{M} \quad (2)$$

$$\frac{P_1}{(\rho_1)^\kappa} = \frac{P}{(\rho)^\kappa} = c^k \implies \frac{P}{\rho_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^\kappa = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\kappa/\kappa-1} \quad (4P)$$

$$\frac{P}{\rho_1} = \left(\frac{P}{\rho_1}\right)^{1/\kappa} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{1/\kappa-1} \quad (4P')$$

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{P}{\rho_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{P}{\rho_1}\right)^{\kappa-1} \quad (4T)$$

— Equation de continuité

$$V \rho A = V_1 \rho_1 A_1 = V_n \rho_n A_n = C^k \quad (5)$$

— Equation de l'énergie :

$$g z_1 + \rho_1 \frac{V_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{P_1}{\rho_1} = g z + \rho \frac{V^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{P}{\rho} \quad (6)$$

$$\text{avec } z = z_1$$

$$\rho_1 \frac{V_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{P_1}{\rho_1} = \rho \frac{V^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{P}{\rho} \quad (6')$$

— Equation des quantites de mouvements :

$$P_3 A_3 - P_4 A_4 = \rho_4 A_4 V_4^2 - \rho_3 V_3^2 \quad (9)$$

Chapitre I

L'écoulement subsonique.

IV Section hypothétique.

a) Définition

Une section est dite hypothétique est une section pour laquelle l'écoulement serait sonique. Nous la représenterons pour la distinguer.

b) Conditions

Un écoulement est dit subsonique, lorsque l'on a les relations suivantes :

$$\frac{P_2}{P_1} > \frac{P^*}{P_1} \implies \frac{T_2}{T_1} > \frac{T^*}{T_1}, \quad \frac{P_2}{P_1} > \frac{P^*}{P_1} \text{ et } v < c^*$$

c) Valeurs critiques

$$c^* = \frac{2}{\kappa+1} \sqrt{\kappa g R T_1} = \frac{2\sqrt{\kappa}}{\kappa+1} \sqrt{\frac{P_1}{\rho_1}}$$

$$T^* = \frac{2}{\kappa+1} T_1$$

$$P^* = P_1 \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\kappa/\kappa-1}$$

$$\rho^* = \rho_1 \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{1/\kappa-1}$$

Ces valeurs ne sont fonctions que des conditions à l'amont. En effet, il suffit de connaître deux des 3 éléments T_1 , P_1 et ρ_1 pour en déduire c^* , T^* , P^* et ρ^* définissant les caractéristiques d'un écoulement sonique hypothétique.

d) Détermination de la section hypothétique.

En application de l'équation de continuité à cette section on a :

$$m = c^* \rho^* A^* = v \rho A$$

$$\rho = \rho_1 \left(T/T_1 \right)^{1/\kappa-1}$$

Exprimons v en fonction des conditions de température dans la section 1 (voir figure 1).

$$\text{Posons } v_1 = 0$$

dans la section 1 (voir figure 1)

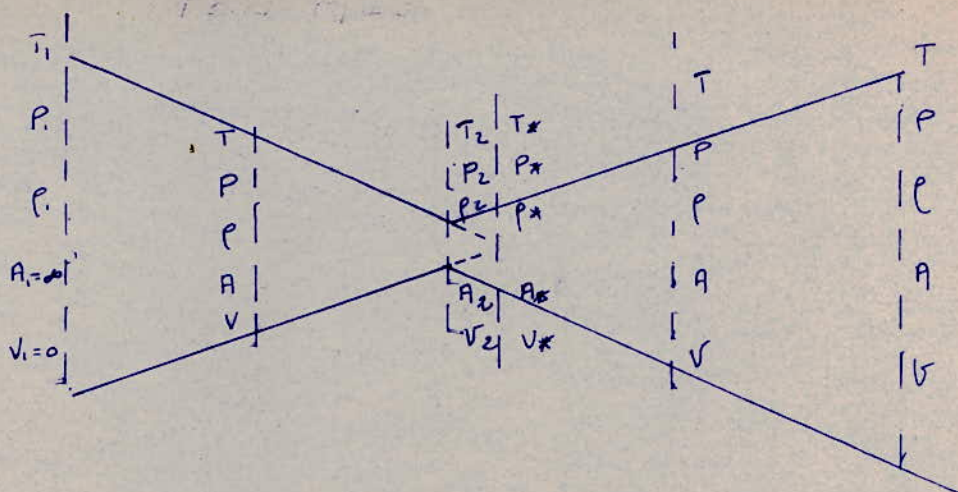


Fig 1.

L'équation d'énergie devient :

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} g R T_1 = \frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} g R T$$

En éliminant P et ρ entre cette dernière équation et les équations 4 on a :

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} g R T_1 = \frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} g R T$$

$$\text{d'où } v = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} g R T_1 \left(1 - \frac{T}{T_1}\right)} = A^* C^* P^*$$

Remplaçons C^* et P^* par leur valeurs

$$A^* = \frac{m}{\rho^* v^*} = \frac{A P_1 (T_1)^{1/\kappa-1} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} g R T_1 \left(1 - \frac{T}{T_1}\right)}}{\rho_1 \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{1/\kappa-1} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} g R T_1}}$$

d'où après simplification on tire :

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T}{T_1}\right) = \frac{\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{2/\kappa-1}}{\frac{T}{T_1}^{2/\kappa-1} - \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}$$

(12 T)

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{2/\kappa-1}}{\left(\frac{P}{P_1}\right)^{1/\kappa} - \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}} = \mathcal{Q}_P \left(\frac{P}{P_1}\right) \quad (12 P)$$

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \frac{\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{2}{\kappa+1}^{2/\kappa-1}}{\left(\frac{P}{P_1}\right)^2 - \left(\frac{P}{P_1}\right)^{\kappa+1}} = \mathcal{Q}_P \left(\frac{P}{P_1}\right) \quad (12 P)$$

Remarque :

Dans le cas où la vitesse devient réellement sonique, (cela ne peut se produire que dans la section 2 de la figure 1).

Dans de telles conditions les rapports $\frac{T}{T_1}$, $\frac{P}{P_1}$ et $\frac{\rho}{\rho_1}$ doivent s'identifier aux rapports critiques définis ci-dessus et l'on aura :

$$P_1/P_1 = \frac{P^*}{P_1} ; T_2/T_1 = \frac{T^*}{T_1} \text{ et } \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho^*}{\rho_1}$$

$$\frac{A_2}{A^*} = 1 \text{ et } u_2 = c^*$$

II Conclusion

a) Les formules paramétriques \mathcal{Q}_P , \mathcal{Q}_T et \mathcal{Q}_ρ

découlent :

- de l'équation d'énergie
- de l'équation de quantité de mouvement
- de l'équation de continuité
- des relations isentropiques

valables à tous les écoulements isentropiques - Pour cette raison ces formules ont le caractère de validité générale et peuvent être appliquées, sans distinction aux écoulements compressibles tant que leur régime peut être considéré comme isentropique sans frottement et sans perte de charge, de caractère subsonique ou supersonique de l'écoulement n'ayant aucune influence au point de vue de leur applicabilité.

b) D'autre part les équations \mathcal{Q} possèdent 2 racines réelles distinctes lorsque $\frac{A}{A^*} > 1$ et

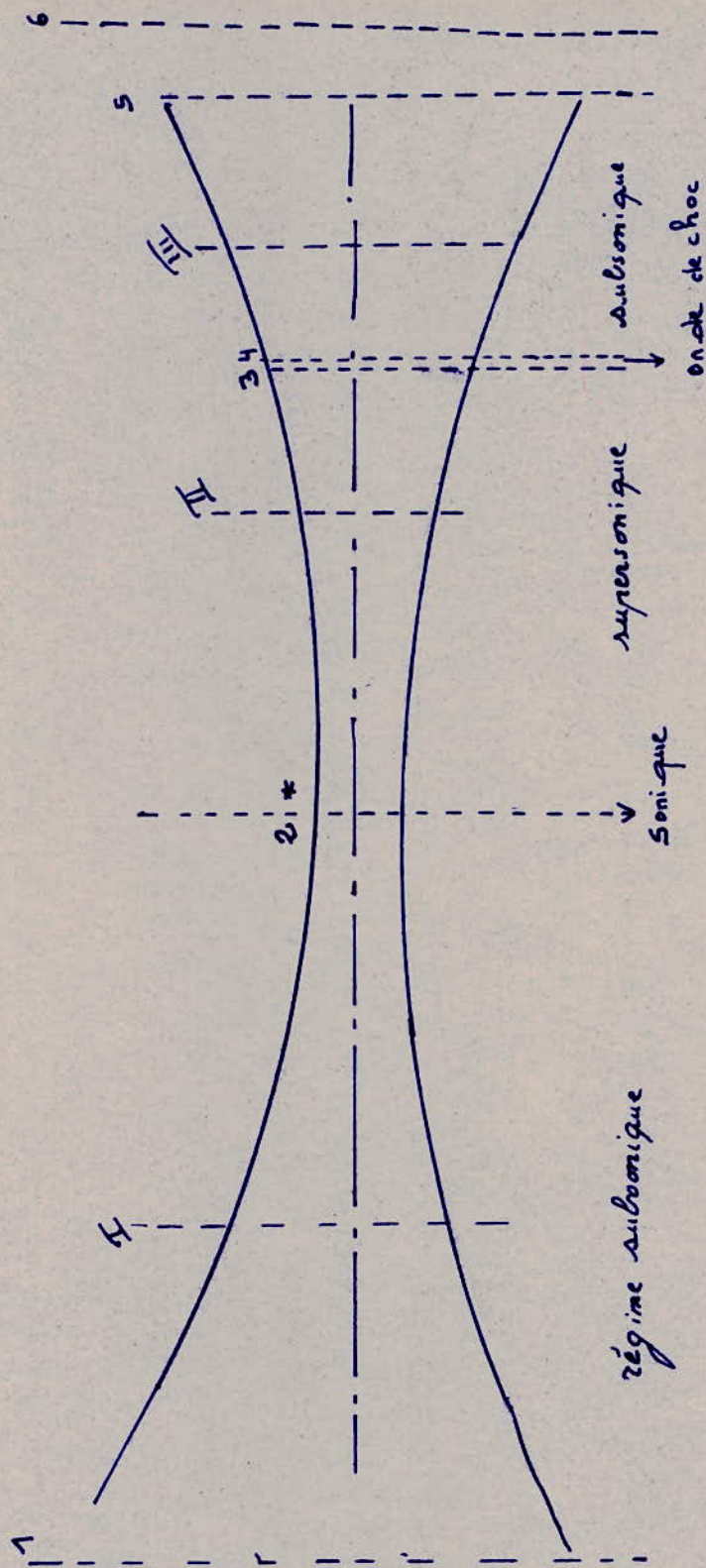
une valeur double lorsque $\left| \frac{A}{A^*} \right| = 1$

1) si $\left| \frac{A}{A^*} \right| > 1$ les 2 valeurs distinctes correspondantes signifie qu'il existe 2 sections où l'écoulement est subsonique l'une croissant de convergent et possédant les caractéristiques suivantes : p' , A' , v' , p' et l'autre croissant de convergent caractérisées par p'' , v'' , A'' et p''

2) si $\frac{A}{A^*} = 1$ la racine double correspondait à la section rétrécie -

Chapitre IV

Écoulement mixte avec onde
de choc droite



(Figure 2)

Y Caractéristiques de l'écoulement

L'écoulement d'un gaz passant par la tuyère représentée par la figure 2 :

- subit une accélération dans le convergent mais reste subsonique à l'amont de la section 2.
- devient sonique dans la section 2.
- se transforme immédiatement à l'aval de la section 2 en supersonique et subit une accélération entre les sections 2 et 3.
- produit une onde de choc entre les sections 3 et 4.
- Reste subsonique et subit une accélération à l'aval de la section 4.

Les lois physiques exprimées par les équations :

$$\frac{p}{\rho} = gRT \quad \text{et} \quad R = \frac{848}{\pi} \quad \text{ainsi que l'équa-}$$

- tion de continuité sont valables entre toutes les sections du fluide en écoulement passant par la tuyère.

Les relations isentropiques (3) et (4) en vigueur entre les sections 1 et 3 d'une part, et entre 4 et 6 d'autre part, ne sont pas valables entre 3 et 4.

L'équation des quantités de mouvement sera appliquée entre 3 et 4 à la zone du choc.

- A - Zone à l'amont du choc.

On a pour la tranche isentropique 1 - 3. Les relations paramétriques suivantes :

$$\left(\frac{v}{c^*}\right)^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T}{T_1}\right) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] \quad (13F)$$

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T}{T_1}\right) = \varphi\left(\frac{p}{p_1}\right) = \varphi\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)$$

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma-1} \quad (13T)$$

$$\frac{p}{p_1} = (T/T_1)^{\kappa/\kappa-1} = (p/p_1)^{\kappa} \quad (13 p)$$

$$\frac{p}{p_1} = (T/T_1)^{1/\kappa-1} = (p/p_1)^{1/\kappa} \quad (13 c)$$

Il suffit que l'une des 5 relations soient données pour que les autres s'en déduisent - les mêmes équations sont applicables à la section 3 se trouvant à l'extrémité aval de la tranche isentropique précédant la zone de choc.

Dans les abaques, nous portons en abscisse $\frac{T}{T_1}$ et en ordonnées les valeurs de $(A/A^*)^2$, $(\frac{U}{c^*})^2$, $\frac{p}{p_1}$, $\frac{T_1}{T}$ et $\frac{p^*}{p_1}$.

Exemple :

Dans la section $A_{II} = 7,07 \text{ cm}^2$ de l'écoulement représenté par la figure 2. circule de l'air à la pression $p_{II} = 10^4 \text{ Pa}$. ($\kappa = 1,4$). Déterminer la pression p_I dans la section $A_I = 7,75 \text{ cm}^2$ si l'aire de la section rétrécie est de $A_2 = 5 \text{ cm}^2$.

Solution :

$$A^* = A_2 = 5 \text{ cm}^2$$

$$\left(\frac{A_{II}}{A^*}\right)^2 = \left(\frac{7,07}{5}\right)^2 = 2 \implies \frac{T_{II}}{T_1} = 0,613 \implies \frac{p_{II}}{p_1} = 0,179$$

$$\left(\frac{A_I}{A^*}\right)^2 = \left(\frac{7,75}{5}\right)^2 = 2,4 \implies \frac{T_I}{T_1} = 0,967 \implies \frac{p_I}{p_1} = 0,88$$

$$p_I = \frac{p_I}{p_1} \times \frac{p_1}{p_{II}} \times p_{II} = \frac{0,88}{0,179} \times 10^4 = \underline{\underline{49.160 \text{ Pa}}}$$

Remarque :

Par la section 2 qui correspond à la section sonique réelle on a :

$$\left(\frac{U_2}{c^*}\right)^2 = 1 \text{ d'où } \left(\frac{A_2}{A^*}\right)^2 = 1$$

$$\text{et } \frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{\kappa+1} ; \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} ; \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

C'est à dire les rapports critiques déjà définis dans le paragraphe (I - c).

- B - Zone du choc.

Les relations isentropiques ne sont pas valables.
En application de l'équation de continuité et en admettant qu'en raison de l'exiguïté de leur distance :

$$A_4 = A_3 \implies \rho_4 v_4 = \rho_3 v_3 \quad (5')$$

Pour les mêmes raisons l'équation des quantités de mouvement pour les sections 3 et 4 se réduit à :

$$P_3 - P_4 = \rho_4 v_4^2 - \rho_3 v_3^2 \quad (9')$$

En divisant (9') par (5') on tire :

$$\frac{P_3}{\rho_3 v_3} - \frac{P_4}{\rho_4 v_4} = v_4 - v_3 \quad (14)$$

D'autre part en appliquant l'équation de l'énergie entre une section quelconque arbitrairement choisie d'une part et la section sonique d'autre part on tire :

$$v^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{P}{\rho} = c_*^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{P_*}{\rho_*}$$

En remplaçant $\frac{P_*}{\rho_*}$ par sa valeur $\left(\frac{P_*}{\rho_*} = c_*^2 \frac{\kappa+1}{2\kappa} \right)$

$$\text{on aura } \frac{P}{\rho} = \frac{(\kappa+1)c_*^2 - (\kappa-1)v^2}{2\kappa}$$

Appliquons cette dernière relation aux sections 3 et 4.

$$\frac{P_3}{\rho_3} = \frac{(\kappa+1)c_*^2 - (\kappa-1)v_3^2}{2\kappa}$$

$$\text{et } \frac{P_4}{\rho_4} = \frac{(\kappa+1)c_*^2 - (\kappa-1)v_4^2}{2\kappa}$$

Et d'après la relation (14) dans les valeurs de $\frac{P_3}{\rho_3}$ et de $\frac{P_4}{\rho_4}$ on a :

$$(v_4 - v_3) \left[\frac{(\kappa+1)c_*^2}{2\kappa v_3 v_4} + \frac{\kappa-1}{2\kappa} \right] = v_4 - v_3$$

Cette relation est vérifiée.

a) si $v_4 = v_3$ ce qui signifie absence d'onde de choc.

$$b) \text{ si } \frac{(\kappa+1) c_*^2}{2 \kappa v_3 v_4} + \frac{\kappa-1}{2 \kappa} = 1 \Rightarrow v_3 v_4 = c_*^2 \quad (16)$$

$$v_4 / c_* = c_* / v_3$$

Ainsi en tenant compte des relations trouvées en amont du choc (chapitre II paragraphe A) pour la section 3 on a :

$$\frac{v_4}{c_*} = \frac{c_*}{v_3} = \frac{\kappa-1}{(\kappa+1) \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right)}$$

$$\frac{v_4}{c_*} = \frac{\kappa-1}{(\kappa+1) \left[1 - \left(p_3/p_1\right)^{\kappa-1/\kappa}\right]}$$

$$\frac{v_4}{c_*} = \frac{\kappa-1}{(\kappa+1) \left[1 - \left(p_3/p_1\right)^{\kappa-1}\right]}$$

On tire de (5')

$$p_4 = p_3 v_3 / v_4 \quad (5'')$$

$$\text{et de (16)} \quad v_4 = c_*^2 / v_3 \quad (16')$$

$$\text{d'où } p_4 = p_3 v_3^2 / c_*^2 \quad (18)$$

En éliminant p_3 et v_3 entre (18), (4 p) et (13) on tire :

$$\frac{p_4}{p_1} = \left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right) \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right) \quad (19T)$$

En éliminant v_4 et p_4 entre (9'), (5'') et (16') on tire :

$$p_3 - p_4 = p_3 \left(v_3/c_*\right)^2 \left(c_*^2/v_3\right)^2 - p_3 v_3^2$$

$$\text{soit } p_3 - p_4 = p_3 \left(c_*^2 - v_3^2\right) \quad (20)$$

En tenant compte de l'équation (13 p) l'équation (20)

devient :

$$p_3 - p_4 = p_3 \left[c_*^2 - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} c_*^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} c_*^2 (p_3 - p_3)^{(\kappa-1)} \right]$$

$$\text{soit } p_3 - p_4 = p_3 \left[\frac{-2}{\kappa-1} c_*^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{\kappa-1} c_*^2 \right]$$

d'où en éliminant c_* entre cette dernière équation et le

$$\text{rapport critique de } c_* = \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{p_1}{p_i} \text{ on a:}$$

$$p_3 - p_4 = p_3 \left[\frac{-2}{(\kappa-1)} \frac{2\kappa}{(\kappa+1)} \frac{p_1}{p_i} + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{p_1}{p_i} \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{\kappa-1} \right]$$

d'où en éliminant p_3 et p_1 de l'équation précédente (4p) et en divisant par p_1 on tire:

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{4\kappa}{\kappa^2-1} \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{1/\kappa} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\frac{p_3}{p_1} \right) \quad (21p)$$

En éliminant $\frac{p_3}{p_1}$ entre cette dernière équation et (4p) on en déduit les équations suivantes:

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{4\kappa}{\kappa^2-1} \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{1/\kappa-1} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\kappa/\kappa-1} \quad (21T)$$

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{4\kappa}{\kappa^2-1} \frac{p_3}{p_1} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^\kappa \quad (21p)$$

En appliquant (1) dans la section (4) on a:

$$\frac{p_4}{p_4} = g R T_4 \implies T_4 = \frac{p_4}{p_4 g R} \quad (1')$$

d'où en éliminant p_4 entre cette dernière équation et (21T) et en divisant par T_1 on tire:

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{\frac{4\kappa}{\kappa^2-1} \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{1/\kappa-1} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\kappa/\kappa-1}}{\left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{1/\kappa-1} \left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \right) \left(1 - \frac{T_3}{T_1} \right) g R T_1}$$

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{4\kappa/(\kappa+1)^2 - T_3/T_1}{1 - T_3/T_1} \quad (22T)$$

J'ai en tenant compte de 4T on tire aussi les équations suivantes :

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{\frac{4\kappa}{(\kappa+1)^2} - \left(\frac{P_3}{P_1}\right) \frac{\kappa-1}{\kappa}}{1 - \left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{\kappa-1/\kappa}} \quad (22p)$$

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{4\kappa(\kappa+1)^2 - (P_3/P_1)^{\kappa-1}}{1 - \left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{\kappa-1}} \quad (22c)$$

C. Zone à l'aval de la sortie de la tuyère.

En appliquant l'équation de l'énergie aux sections 4 et 6 on a :

$$v_4^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} g R T_4 = g R T_6$$

$$\text{d'où } T_6 = T_4 - v_4^2 / \frac{2\kappa}{\kappa-1} g R$$

En exprimant T_4 par (22), v_4^2 par (21) et c^* par sa valeur on tire :

$$T_6 = \frac{\frac{4\kappa}{(\kappa+1)^2} - \frac{T_3}{T_1}}{1 - \frac{T_3}{T_1}} + \frac{\frac{2\kappa}{(\kappa+1)} g R T_1}{\frac{2\kappa}{\kappa-1} g R \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right)}$$

$$\frac{T_6}{T_1} = \frac{1 - T_3/T_1}{1 - T_3/T_1} = 1 \quad (23)$$

En appliquant l'équation de l'énergie entre la section 1 et 6 on a :

$$g R T_1 = g R T_6 \text{ constituant la confirmation de (23)}$$

Le paramètre de pression dans la section 6 peut être exprimé comme le produit de 2 rapports.

$$\frac{P_6}{P_1} = \frac{P_4}{P_1} \times \frac{P_6}{P_4}$$

$$\text{Or } \frac{P_6}{P_4} = \left(\frac{T_6}{T_4} \right)^{\kappa/\kappa-1} = \left(\frac{T_1}{T_4} \right)^{\kappa/\kappa-1}$$

En éliminant $\frac{T_1}{T_4}$ entre cette dernière équation et (22 T) et en exprimant $\frac{P_4}{P_1}$ par (21 T) on tire :

$$\frac{P_6}{P_1} = \frac{\left[\left(\frac{4\kappa}{\kappa-1} \right) \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{1/\kappa-1} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\kappa/\kappa-1} \right] \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\kappa/\kappa-1}}{\left[\frac{4\kappa}{(\kappa+1)^2} - \frac{T_3}{T_1} \right]^{\kappa/\kappa-1}} = \psi \left(\frac{T_3}{T_1} \right) \quad (24)$$

Le paramètre de la masse volumique dans la section 6 est :

$$\frac{\rho_6}{\rho_1} = \frac{P_6}{P_1} \quad \text{puisque } T_6 = T_1 \text{ isotherme.}$$

IV. Zone à l'aval du choc.

Paramètre de pression dans une section quelconque, arbitrairement choisie de la tranche de conduite considérée :

$$\frac{P}{P_6} = \left(\frac{T}{T_6} \right)^{\kappa/\kappa-1} = \left(\frac{T}{T_6} \times \frac{T_6}{T_1} \right)^{\kappa/\kappa-1} \quad \text{car } T_6 = T_1 \quad (25)$$

$$\text{d'où } \frac{P}{P_6} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{1/\kappa-1} \quad (4'p)$$

$$\text{D'autre part on a : } \frac{P'}{P_1} = \frac{P}{P_6} \times \frac{P_6}{P_1}$$

d'où en éliminant $\frac{P}{P_6}$ et $\frac{P_6}{P_1}$ entre cette dernière équation,

(4'p) et (24) on tire :

$$\frac{P}{P_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\kappa/\kappa-1} \psi \left(\frac{T_3}{T_1} \right) \quad (26)$$

L'équation (26) montre que le paramètre de pression, qui à l'amont du choc ne dépendait que d'une seule variable, la connaissance, d'une seule des autres paramètres ($\frac{A}{A^*}$, $\frac{V}{c^*}$, $\frac{T}{T_1}$ ou $\frac{P}{P_1}$) ayant été suffisant pour sa détermination; devient à l'aval du choc une fonction de 2 variables:

— la première concernant l'état du gaz dans la section considérée.

— la deuxième concernant l'état du gaz dans la section initiale du choc.

L'équation (26) n'est que l'une des formes explicites de la relation existant entre les 3 variables $\frac{P}{P_1}$, $\frac{T}{T_1}$ et $\frac{T_3}{T_1}$, les deux autres étant les suivantes:

$$\frac{T}{T_1} = \left[\frac{P/P_1}{\psi \left(\frac{T_3}{T_1} \right)} \right]^{(\kappa-1)/\kappa} \quad (27)$$

$$\text{et } \psi \frac{T_3}{T_1} = \frac{P/P_1}{\left(\frac{T}{T_1} \right)^{\kappa/\kappa-1}}$$

Le paramètre de masse volumique

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_1}$$

d'où en application de (25), de (4p) et de (23)

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{1/(\kappa-1)} \psi \frac{T_3}{T_1} \quad (29)$$

$$\text{Inversement: } \frac{T}{T_1} = \left[\frac{P/P_1}{\psi \left(\frac{T_3}{T_1} \right)} \right]^{\kappa-1} \quad (30)$$

$$\psi \left(\frac{T_3}{T_1} \right) = \frac{P/P_1}{\left(\frac{T}{T_1} \right)^{1/\kappa-1}} \quad (31)$$

L'équation de l'énergie appliquée entre :

— une section quelconque, arbitrairement choisie, du tronçon considéré d'une part,

— et la section 6 d'autre part,

donne :

$$v^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} g R T = \frac{2\kappa}{\kappa-1} g R T_6$$

d'où en tenant compte de (23)

$$v^2 = \frac{2\kappa}{\kappa-1} g R T_1 \left(1 - \frac{T}{T_1}\right)$$

d'où en tenant compte de la valeur de c^* :

$$c^* = \frac{2\kappa}{(\kappa+1)} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{2\kappa g R T_1}{(\kappa+1)}$$

En application de l'équation de continuité :

$$A^2 = \frac{c^{*2} A_*^2 \rho_*^2}{v^2 \rho^2}$$

d'où en tenant compte de (3) on tire :

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \frac{(\kappa-1) \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{2/\kappa-1}}{(\kappa+1) \left(1 - \frac{T}{T_1}\right)} \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^2$$

soit en éliminant $\frac{\rho}{\rho_1}$ entre cette dernière équation et (29)

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T}{T_1}\right) \psi^{-2}\left(\frac{T_3}{T_1}\right)$$

soit :

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T}{T_1}\right) \psi^{-2}\left(\frac{T_3}{T_1}\right) \quad (30)$$

En élevant au carré, l'équation (26) devient :

$$\left(\frac{P}{P_1}\right) = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{2k}{k-1}} \varphi^{+2} \left(\frac{T_3}{T_1}\right) \quad (26')$$

On élimine $\frac{T_3}{T_1}$ en formant le produit de (26') par (32) et en tenant compte de la racine carrée on obtient :

$$\frac{A}{A^*} \frac{P}{P_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{k/k-1} \varphi^{1/2} \left(\frac{T}{T_1}\right) = \psi \left(\frac{T}{T_1}\right) \quad (33)$$

En procédant d'une manière analogue on élimine $\varphi \left(\frac{T_3}{T_1}\right)$ entre (29) et (32) et on tire :

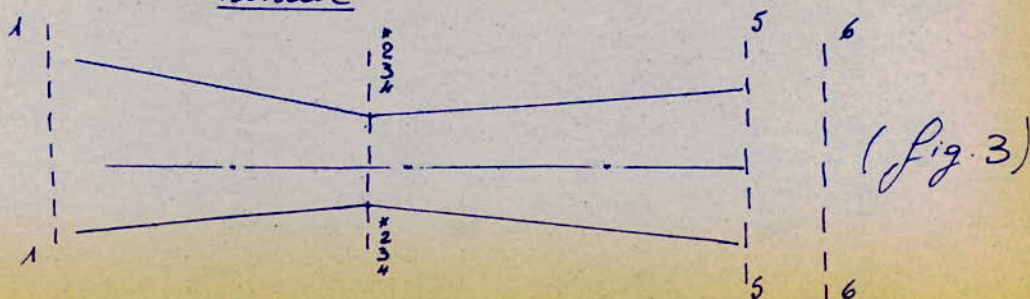
$$\frac{A}{A^*} \frac{P}{P_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{1/k-1} \varphi^{1/2} \left(\frac{T}{T_1}\right) = W \left(\frac{T}{T_1}\right) \quad (34)$$

$$\text{On tire } \left(\frac{\sigma}{c^*}\right)^2 = \frac{k+1}{k-1} \left(1 - \frac{T}{T_1}\right) \quad (13T)$$

Montrant que cette dernière équation, déterminant la valeur du paramètre de vitesse, valable pour le tronçon isentropique supérieur, concorde sa validité sur toute la longueur de l'écoulement par la tuyère.

L. Cas limites

V. Lorsque la zone de choc coïncide avec la section
rétrécie



Les sections 2, 3 et 4 coïncident on a :

$$T_4 = T_3 = T_2 = T^* \implies \frac{T_3}{T_1} = \frac{2}{\gamma+1} \implies \frac{P_3}{P_1} \implies \frac{P_6}{P_1} = 1.$$

Dans la section terminale (5) on aura une application de l'équation (32)

$$\frac{A_5}{A^*} = \varphi \left(\frac{T'_{15}}{T_1} \right) \quad (38)$$

L'abscisse du point d'intersection de la tranche subsonique de la courbe $\varphi \left(\frac{T}{T_1} \right)$ par l'horizontale déterminée par l'ordonnée $\left(\frac{A_5}{A^*} \right)^2$ définit la valeur de $\frac{T'_{15}}{T_1}$ du paramètre de température correspondant à ce cas limite. La connaissance de ce paramètre permet la lecture directe des paramètres permet la lecture directe des paramètres-

$$\left(\frac{v_{15}}{c^*} \right)^2 ; \frac{P'_{15}}{P_1} ; \frac{\rho'_{15}}{\rho_1}$$

correspondant à ce premier cas limite.

II - lorsque la zone du choc coïncide avec la zone terminale

Les sections 3, 4 et 5 coïncident on aura :

— à l'amont du choc :

$$\frac{T''_{5.3}}{T_1} = \frac{T_3}{T_1} ; \frac{P''_{5.3}}{P_1} = \frac{P_3}{P_1} ; \frac{\rho''_{5.3}}{\rho_1} = \frac{\rho_3}{\rho_1} ; \left(\frac{v''_{5.3}}{c^*} \right)^2 = \left(\frac{v_3}{c^*} \right)^2$$

— à l'aval du choc :

$$\frac{T''_{5.4}}{T_1} = \frac{T_4}{T_1} ; \frac{P''_{5.4}}{P_1} = \frac{P_4}{P_1} ; \frac{\rho''_{5.4}}{\rho_1} = \frac{\rho_4}{\rho_1} \text{ et } \left(\frac{v''_{5.4}}{c^*} \right)^2 = \left(\frac{v_4}{c^*} \right)^2$$

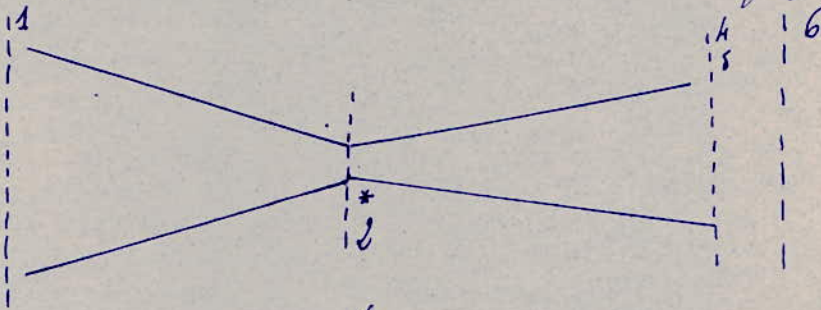
En application de 12T on peut écrire :

$$\left(\frac{A_5}{A^*}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T''_{5.3}}{T_1}\right)$$

l'abscisse du point d'intersection de la tranche supersonique de la courbe $\varphi\left(\frac{T}{T_1}\right)$ par l'horizontale déterminée par l'ordonnée $\left(\frac{A_5}{A^*}\right)^2$ définit la valeur $\frac{T''_{5.3}}{T_1}$ du paramètre de température correspondant à ce cas limite - La connaissance de ce paramètre définit la verticale permettant la lecture directe des paramètres.

$$\frac{T''_{5.4}}{T_1}, \left(\frac{V''_{5.3}}{c^*}\right)^2, \left(\frac{V''_{5.4}}{c^*}\right)^2; \frac{P''_{5.3}}{P_1}, \frac{P''_{5.4}}{P_1}, \frac{\rho''_{5.4}}{\rho_1}$$

correspondant à ce cas limite (voir figure 4)



(Fig. 4.)

Chapitre III

Calcul du rendement isentropique

Rendement isentropique de la compression par onde droite

Pour définir ce rendement on compare la compression par onde de choc droite à la compression isentropique entre les mêmes pressions.



Les transformations idéales et réelles se représentent sur le diagramme T-s entre les 2 mêmes isobares.

La transformation idéale entre P_3 et P_4 s'effectue suivant le trajet 3-4-5 (compression isentropique), alors que la transformation réelle s'effectue suivant le trajet 3-4 c'est à dire une transformation adiabatique.

Il est évident que le maximum de travail au cours d'une transformation entre deux isobares est donné par une transformation isentropique.

On s'attache donc dans les bureaux d'étude à se rapprocher des conditions idéales.

Le rendement isentropique sera défini comme étant le rapport de la variation d'enthalpie dans la

• compression isentropique à la variation d'enthalpie dans la compression par onde droite.

En approchant 3, 4 s et 4 les points figuratifs correspondants on a :

$$\eta = \frac{H_{4s} - H_3}{H_4 - H_3} = \frac{c_p (T_{4s} - T_3)}{c_p (T_4 - T_3)} = \frac{\frac{T_{4s}}{T_3} - 1}{\frac{T_4}{T_3} - 1}$$

$$\eta = \frac{\left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\frac{T_4}{T_3} - 1}$$

$$\text{or on a } \frac{P_4}{P_1} = \frac{4\kappa}{\kappa^2 - 1} \left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\frac{P_3}{P_1}\right)$$

$$\text{et } \frac{T_4}{T_1} = \frac{\frac{4\kappa}{(\kappa+1)^2} - \frac{T_3}{T_1}}{1 - \frac{T_3}{T_1}}$$

En multipliant respectivement $\frac{P_4}{P_1}$ et $\frac{T_4}{T_1}$ par $\frac{P_1}{P_3}$ et $\frac{T_1}{T_3}$ on obtient les relations suivantes :

$$\frac{P_4}{P_3} = \frac{4\kappa}{\kappa^2 - 1} \left(\frac{P_1}{P_3}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1}$$

$$\text{or } \frac{P_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{P_3} = \frac{T_1}{T_3}$$

la relation devient donc :

$$\frac{P_4}{P_3} = \frac{4\kappa}{\kappa^2 - 1} \frac{T_1}{T_3} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1}$$

Et de même pour :

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{4\kappa}{\kappa^2 - 1} \frac{T_1}{T_3} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \right) \frac{T_1}{T_1 - T_3} \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{4K}{(K+1)^2} \frac{T_1}{T_3} - 1 \right) \frac{T_1}{T_1 - T_3}$$

L'expression du rendement devient donc :

$$\eta = \frac{\left[\frac{4K}{K^2-1} \frac{T_1}{T_3} - \frac{K+1}{K-1} \right]^{\frac{K-1}{K}} - 1}{\left(\frac{4K}{(K+1)^2} \frac{T_1}{T_3} - 1 \right) \frac{T_1}{T_1 - T_3} - 1}$$

Tracons la courbe $\eta = f\left(\frac{T_1}{T_3}\right)$ avec les points trouvés :

$$\underline{K = 1,26}$$

$\frac{T_3}{T_1}$	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,880
η	0,03	0,163	0,273	0,375	0,478	0,584	0,698	0,819	1

$$\underline{K = 1,66}$$

$\frac{T_3}{T_1}$	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,754
η	0,102	0,367	0,532	0,661	0,771	0,864	0,941	0,991	1

$$\underline{K = 1,28}$$

$\frac{T_3}{T_1}$	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,879
η	0,033	0,175	0,290	0,395	0,500	0,608	0,721	0,84	1

$$\kappa = 1,31$$

$\frac{T_3}{T_1}$	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,865
η	0,038	0,192	0,134	0,424	0,531	0,640	0,752	0,866	1

$$\kappa = 1,4$$

T_3/T_1	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,834
η	0,053	0,241	0,380	0,50	0,612	0,721	0,827	0,924	1

Remarques :

Le rendement η est proportionnel à l'exposant isentropique. À autre part le rendement est égal à l'unité lorsque le rapport $\frac{T_3}{T_1}$ est égal au rapport critique $\frac{T^*}{T_1}$, c'est à dire :

$$\text{Lorsque } T_3 = T^*.$$

$$\text{En effet pour } \kappa = 1,4 ; \eta = 1 \text{ pour } \frac{T^*}{T_1} = \frac{2}{\kappa+1} = 0,833$$

$$\kappa = 1,66 ; \eta = 1 \text{ pour } \frac{T^*}{T_1} = \frac{2}{\kappa+1} = 0,754$$

$$\kappa = 1,26 ; \eta = 1 \text{ pour } \frac{T^*}{T_1} = \frac{2}{\kappa+1} = 0,880$$

$$\kappa = 1,28 ; \eta = 1 \text{ pour } \frac{T^*}{T_1} = \frac{2}{\kappa+1} = 0,879$$

$$\kappa = 1,31 ; n=1 \text{ pour } \frac{T^*}{T_1} = \frac{2}{\kappa+1} = 0,865$$

$K = 1,26$

Courbe rendement

$\eta = f(T_3/T_1)$

η

T_3/T_1

10^{-2}

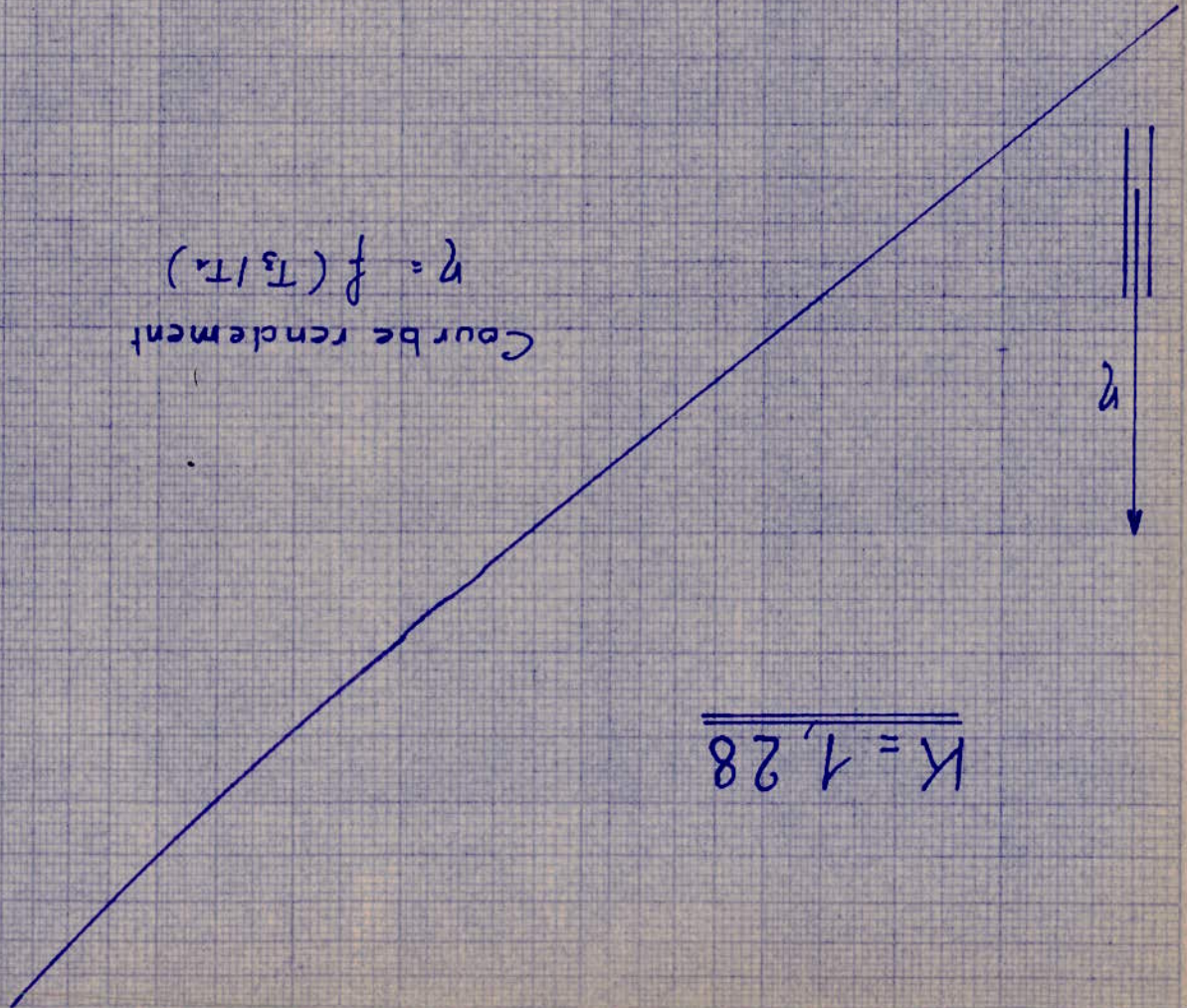
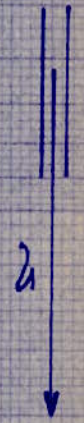
10^{-1}

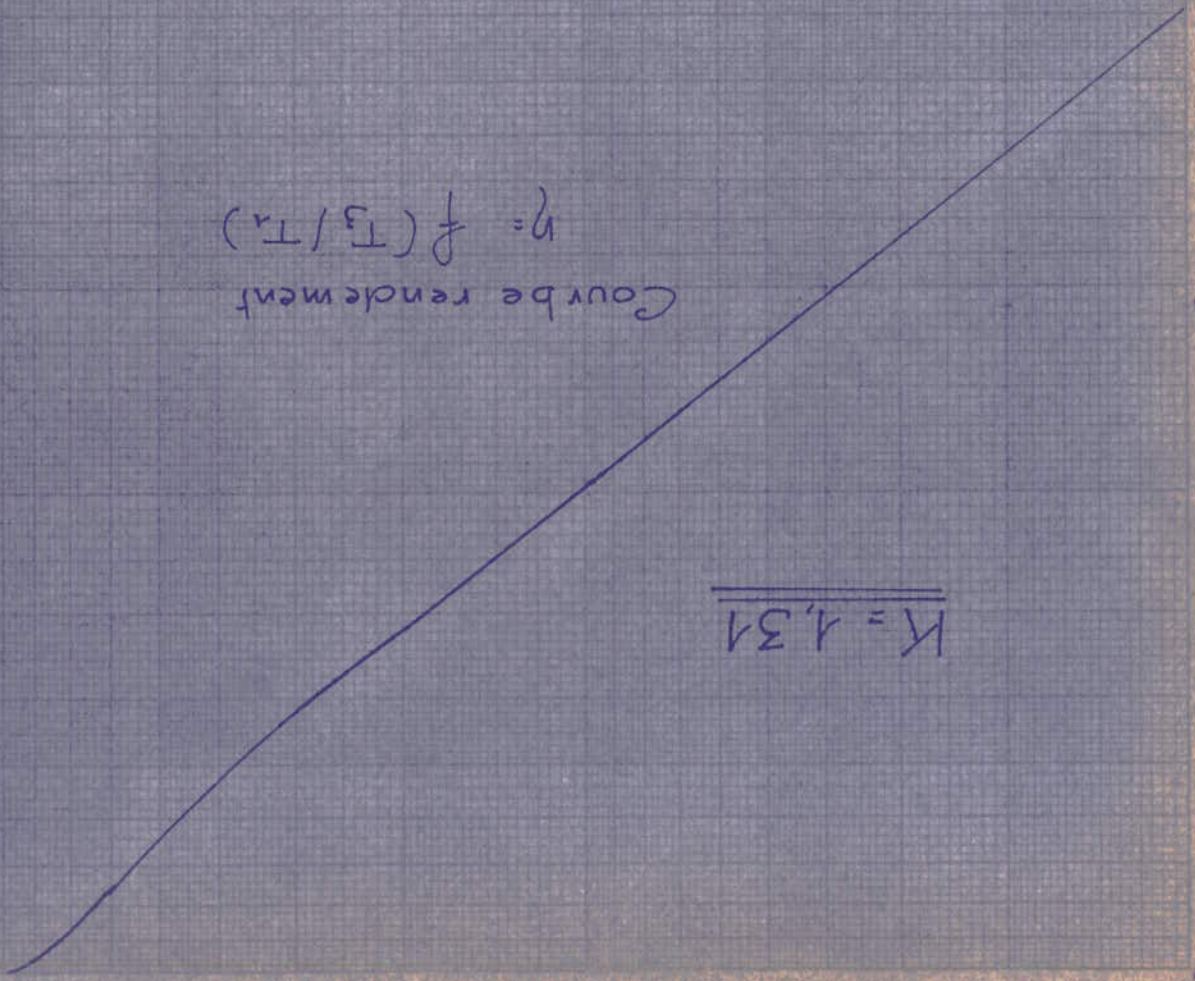
10^1

T_1/T_2

Courbe rendement
 $\eta = f(T_2/T_1)$

$K = 1,28$



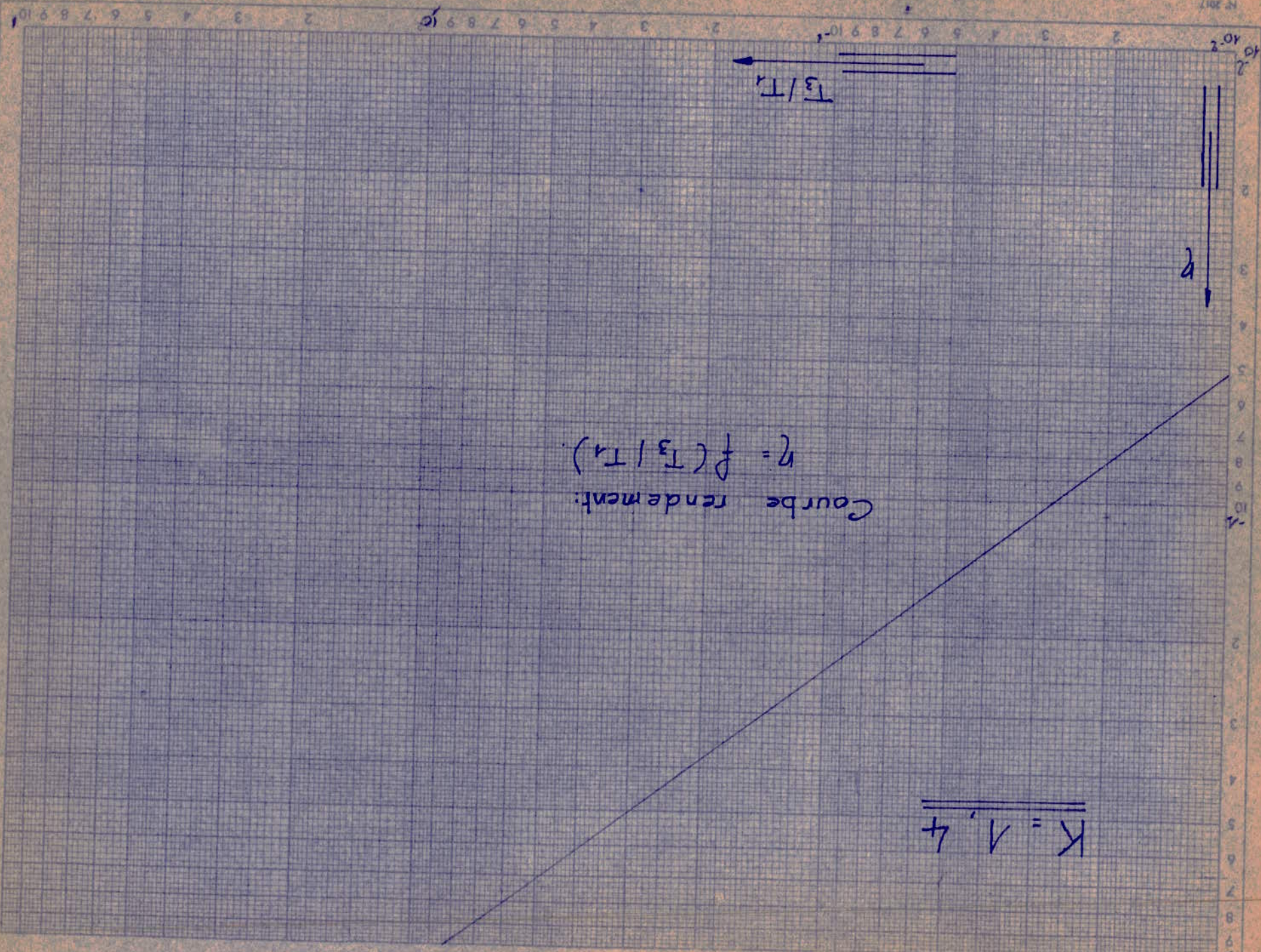


Courbe rendement
 $\eta = f(T_3/T_1)$

$K = 1.31$

T_3/T_1

0.1
0

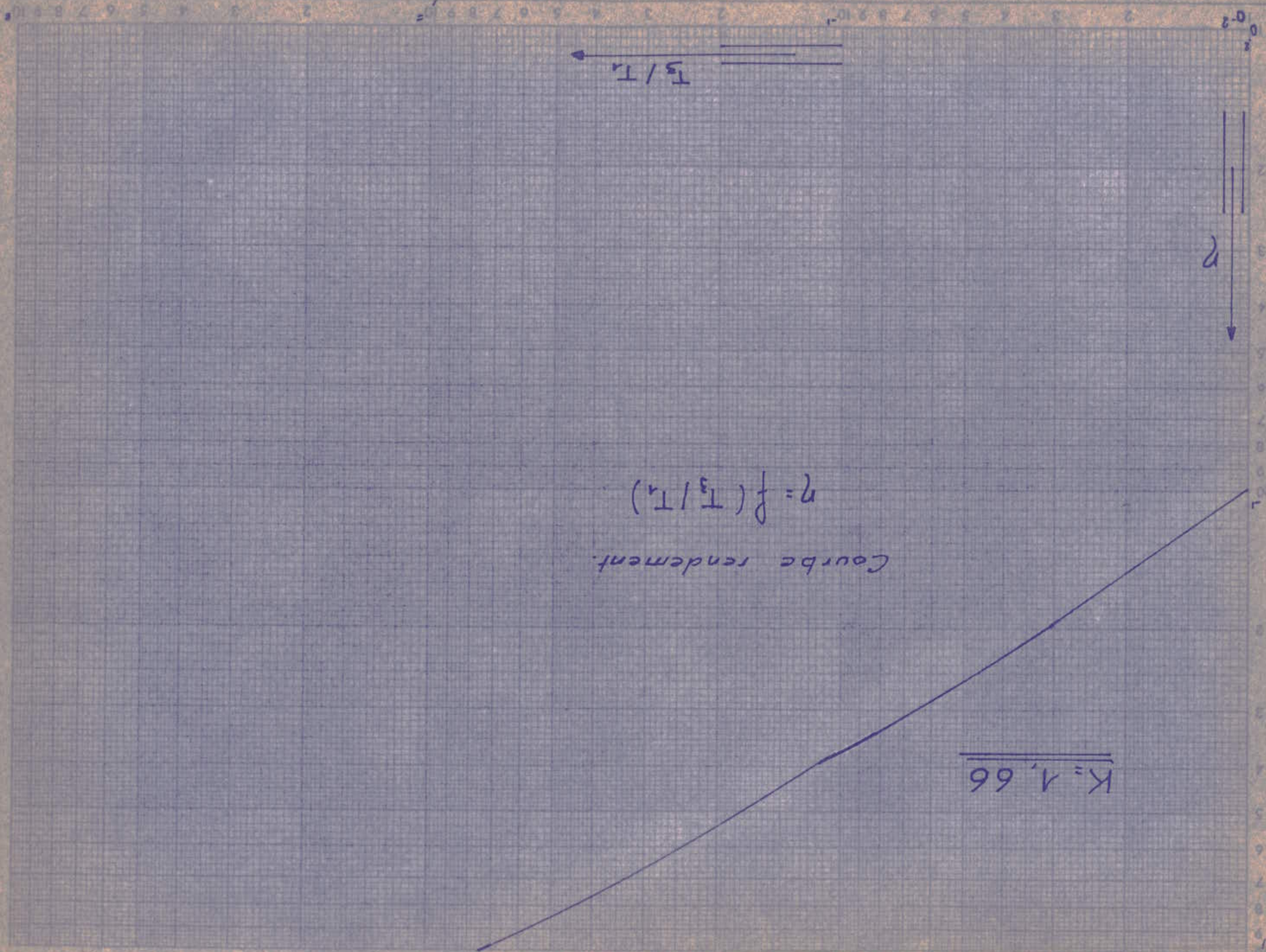


Courbe rendement:
 $\eta = f(T_3/T_4)$

$K = 1,4$

T_3/T_4

r



T_3/T_1

r

Courbe rendement.
 $\eta = f(T_3/T_1)$

$K = 1,66$

Chapitre IV

Calcul des pertes de charge

Étude des pertes de charges dues à l'onde de choc droite

La transformation due à une onde de choc droite est irréversible et s'accompagne d'une augmentation d'entropie

$$\text{or on a : } \frac{P_6}{P_1} = \frac{P_6}{P_1} = \psi \left(\frac{T_3}{T_1} \right).$$

$$= \frac{\left[\frac{4\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{1/\kappa-1} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \left(1 - \frac{T_3}{T_1} \right)^{\kappa/\kappa-1}}{\left(\frac{4\kappa}{(\kappa+1)^2} - \frac{T_3}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$

La connaissance de $\psi \left(\frac{T_3}{T_1} \right) = \frac{P_6}{P_1}$ permet de calculer les pertes de charges (énergie mécanique par unité de masse transformée "chaleur") due à l'onde de choc.

En effet, l'écoulement entre les sections 1 et 3 d'une part et, 4 et 6 d'autre part est isentropique sans frottement et en conséquence sans perte de charge.

Il en découle que la totalité de l'énergie mécanique dépensée à l'expansion isotherme de l'unité de masse est dissipée par le choc.

$$\Delta E = g R T_1 \log \frac{P_1}{P_6} = g R T_1 \log \psi^{-1} \left(\frac{T_3}{T_1} \right)$$

On aboutirait au même résultat en appliquant l'équation de l'énergie des écoulements compressibles isothermes aux sorties 1 et 6.

$$g R T_1 \log P_1 = g R T_1 \log P_6 + \frac{\Delta E}{m}$$

$$\text{d'où } \Delta E = g R T_1 \log \frac{P_1}{P_6} = g R T_1 \log \psi^{-1} \left(\frac{T_3}{T_1} \right)$$

Pour faciliter les opérations, nous introduisons le paramètre de perte de charge :

$$\frac{\Delta E}{T_1} = g R \log \frac{P_1}{P_2} = g R \log \psi^{-1} \left(\frac{T_3}{T_1} \right)$$

Traçons la courbe $\frac{\Delta E}{T_1} = f \left(\frac{T_3}{T_1} \right)$ à l'aide des tableaux de résultat ci-dessous :

— Air $K = 1,40$ $R = -29,30$

$\frac{T_3}{T_1}$	0,01	0,06	0,2099	0,3099	0,4099	0,6099	0,7099	0,8099	0,834
PDC	2776,62	1502,88	648,47	403,71	242,68	57,73	14,55	0,18	0

— NH₃ $K = 1,31$ $R = 49,80$

$\frac{T_3}{T_1}$	0,01	0,06	0,2099	0,3099	0,4099	0,6099	0,7099	0,8099	0,889
PDC	6252,20	3452,28	1557,09	1004,10	632,81	183,28	62,25	5,27	0

— He $K = 1,66$ $R = 212$

$\frac{T_3}{T_1}$	0,01	0,06	0,2099	0,3099	0,4099	0,6099	0,7099	0,754	
PDC	11431,09	5881,75	2253,52	1268,92	660,78	75,68	2,92	0	

CO₂ $K=1,28$ $R = 19,30$

$\frac{T_i}{T_3}$	0,01	0,06	0,1099	0,1599	0,2099	0,2599	0,3099	0,3599	0,879
PDC	2708,43	1506,11	1105,98	862,87	689,83	556,90	450,19	362,14	0

O₂ $K = 1,40$ $R = 26,50$

$\frac{T_i}{T_3}$	0,01	0,06	0,2099	0,3099	0,4099	0,6099	0,7099	0,8099	0,834
PDC	2511,27	1359,26	586,50	365,13	219,49	52,21	13,16	0,16	0

SO₂ $K = 1,26$ $R = 13,20$

$\frac{T_i}{T_3}$	0,01	0,06	0,2099	0,3099	0,4099	0,6099	0,7099	0,8099	0,879
PDC	2008,16	1122,13	519,36	341,68	221,06	70,89	27,58	4,02	0

N₂ $K = 1,40$ $R = 30,30$

$\frac{T_i}{T_3}$	0,01	0,06	0,2099	0,3099	0,4099	0,6099	0,7099	0,8099	0,834
PDC	2871,38	1554,18	670,60	417,48	250,96	59,70	15,04	0,18	0

CH₂

$\kappa = 1,40$

$R = 420,6$

$\frac{T_1}{K_3}$	0,01	0,06	0,2099	0,3099	0,4099	0,6099	0,7099	0,8099	0,834
PDC	39858,26	21573,8	9308,84	5795,24	3483,68	828,81	208,87	2,63	0

CH₄

$\kappa = 1,31$

$R = 52,90$

$\frac{T_1}{K_3}$	0,01	0,06	0,2099	0,3099	0,4099	0,6099	0,7099	0,8099	0,865
PDC	6841,39	3667,18	1654,02	1066,61	672,20	194,69	66,13	5,60	0

Chapitre V

Représentation Paramétrique

En vue de la représentation graphique des fonctions paramétriques résultant des considérations précédentes. On a adopté un système de coordonnées à divisions logarithmique dans le sens des ordonnées et des abscisses. On obtient une telle échelle en portant sur les abscisses des longueurs représentant $\log(1-x)$ et en inscrivant ainsi aux divisions obtenues la valeur de x .

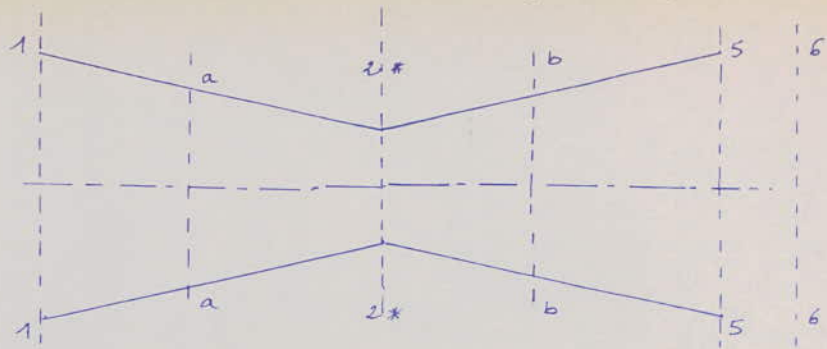
L'utilisation d'une telle échelle permet une discrimination aisée entre des valeurs à représenter très peu inférieures à l'unité.

En effet la distance de 0,35 mm représentant le rapport 0,99/0,98 à l'échelle de l'imprimé utilisé devient égale à 27 mm à l'échelle inverse, permettant une très grande précision dans la lecture des valeurs portées en abscisse, spécialement dans le secteur où une telle précision revêt une importance particulière.

Chapitre VI

Applications numériques

I. Exemple : l'écoulement passant par la tuyère.



(figure 8)

représentée ci-dessous (figure 8) est déterminé par ses caractéristiques ci après :

$T_1 = ?$

$A_4 = ?$

$P_1 = ?$

$V_4 = ?$

$\rho_1 = ?$

$T_4 = ?$

$A_4 = 14,14 \text{ cm}^2$

$P_4 = ?$

$v_a = ?$

$\rho_4 = ?$

$T_a = 300^\circ \text{K}$

$A_b = 15,81 \text{ cm}^2$

$P_a = 1,00 \text{ bar}$

$v_b = ?$

$\rho_a = ?$

$T_b = 295^\circ \text{K}$

$A^* = 10,00 \text{ cm}^2$

$P_b = ?$

$C^* = ?$

$\rho_b = ?$

$T^* = ?$

$A_5 = 17,31 \text{ cm}^2$

$P^* = ?$

$v_5 = ?$

$\rho^* = ?$

$T_5 = ?$

$A_3 = ?$

$P_5 = ?$

$v_3 = ?$

$\rho_5 = ?$

$$T_3 = ?$$

$$P_3 = ?$$

$$\rho_3 = ?$$

$$T_6 = ?$$

$$P_6 = ?$$

$$\rho_6 = ?$$

Déterminer les valeurs demandées des caractéristiques inconnues

Solution:

$$\frac{Aa^2}{A^*} = 2 = \varphi\left(\frac{T_a}{T_1}\right) \Rightarrow \frac{T_a}{T_1} = 0,9583 \quad T_1 = 313^\circ\text{K}$$

On tire en application de (7):

$$c^* = 18,3\sqrt{313} = 324 \text{ m/s}$$

Et on lit dans l'abaque sur la verticale $\frac{T_a}{T_1} = 0,9583$ les valeurs de chacun des paramètres concernant la tranche isocentrique située à l'amont du choc:

$$\frac{P_a}{P_1} = 0,862 \Rightarrow P_1 = \frac{10^5}{0,862} = 1,16 \cdot 10^5$$

$$\Rightarrow \rho_1 = \frac{1,16 \cdot 10^5}{9,8 \cdot 29,3 \cdot 313} = 1,29 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = 0,900 \Rightarrow \rho_a = 0,900 \cdot 1,29 = 1,16 \text{ kg/m}^3$$

En application de (32)

$$\psi^{-2} \frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{A_b}{A^*}\right)^2 \varphi^{-1}\left(\frac{T_b}{T_1}\right)$$

$$\psi^{-2} \frac{T_3}{T_1} = \frac{2,50}{\varphi\left(\frac{295}{313,1}\right)} = \frac{2,50}{1,54} = 1,623$$

$$\text{d'où } \frac{T_3}{T_1} = 0,593 \Rightarrow T_3 = 185,6^\circ\text{K}$$

On lit sur la verticale de $T_3/T_1 = 0,593$ les paramètres :

$$\left(\frac{A_3}{A^*}\right)^2 = 2,25 \implies A_3 = 15 \text{ cm}^2$$

$$\left(\frac{V_3}{C^*}\right)^2 = 2,44 \implies V_3 = 506 \text{ m/s}$$

$$\frac{P_3}{P_1} = 0,161 \implies P_3 = 1,87 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$\frac{\rho_3}{\rho_1} = 0,268 \implies \rho_3 = 0,346 \text{ kg/m}^3$$

$$\left(\frac{V_4}{C^*}\right)^2 = 0,41 \implies V_4 = 207,5 \text{ m/s}$$

$$\frac{P_4}{P_1} = 0,615 \implies P_4 = 7,13 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$\frac{\rho_4}{\rho_1} = 0,660 \implies \rho_4 = 0,851 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{P_6}{P_4} = 0,79 \implies P_6 = 9,17 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$\frac{\rho_6}{\rho_1} = 0,79 \implies \rho_6 = 1,02 \text{ kg/m}^3$$

En application de (23) $T_1 = T_6 = 313,1^\circ \text{K}$

En application de (32) :

$$\left(\frac{A_5}{A^*}\right)^2 = 4^{-2} \left(\frac{T_3}{T_1}\right) \varphi\left(\frac{T_5}{T_1}\right) = 3 = 1,6234 \frac{T_5}{T_1}$$

$$\text{d'où } \varphi \frac{T_5}{T_1} = 1,848 \implies \frac{T_5}{T_1} = 0,954 \implies T_5 = 298,8^\circ \text{K}$$

On lit sur la verticale de $T_5/T_1 = 0,954$ les paramètres :

$$(26) \implies \frac{P_5}{P_6} = 0,848 \implies P_5 = 7,77 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$(29) \implies \frac{\rho_5}{\rho_6} = 0,890 \implies \rho_5 = 0,908 \text{ kg/m}^3$$

$$(13 T) \Rightarrow \left(\frac{v_5}{c^*}\right)^2 = 0,276 \Rightarrow v_5 = 89,4 \text{ m/s}$$

$$T_b/T_1 = \frac{295}{313} = 0,942 \Rightarrow P_b/P_6 = 0,812 = P_b/P_6 = 0,862$$

$$\Rightarrow \frac{v_b^2}{c^{*2}} = 0,35$$

$$\text{d'où } P_b = 7,44 \cdot 10^4 \text{ Pa} \quad \rho_b = 0,880 \text{ kg/m}^3$$

$$v_b = \underline{191,7 \text{ m/s}}$$

II Exemple : Dans la tuyère véhiculant de l'air représentée par la figure 8 on a :

$$A_2 = 20 \text{ cm}^2 \quad P_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad T_1 = 348,2 \text{ K}$$

$$P_6 = 1,22 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Déterminer A_3 , v_3 , v_4 et \dot{m}

Solution :

$$(7) \Rightarrow c^* = 18,3 \quad 348,2 = 341 \text{ m/s}$$

$$(24) \Rightarrow P_6/P_1 = \psi(T_3/T_1) = 0,61 \Rightarrow T_3/T_1 = 0,5$$

On lit sur la verticale de $T_3/T_1 = 0,5$ les paramètres :

$$\left(\frac{A_3}{A^*}\right)^2 = 4,32 \quad \Rightarrow \underline{A_3 = 41,5 \text{ cm}^2}$$

$$\left(\frac{v_3}{c^*}\right)^2 = 3,03 \quad \Rightarrow \underline{v_3 = 594 \text{ m/s}}$$

$$\left(\frac{v_4}{c^*}\right)^2 = 0,332 \quad \Rightarrow \underline{v_4 = 196,7 \text{ m/s}}$$

$$\dot{m} = \frac{0,634 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 341,3}{9,8 \cdot 29,3 \cdot 348,2} = \underline{0,0865 \text{ kg/s}}$$

Exemple : Dans la tuyerie véhiculant de l'air représentée par la figure 8 on a :

$$A_a = 7,07 \text{ cm}^2 \quad P_a = 2 \text{ bar} \quad T_a = 270^\circ \text{K}$$

$$A_b = 7,91 \text{ cm}^2 \quad P_b = 1,49 \text{ bar} \quad A_2 = 5 \text{ cm}^2$$

Déterminer T_1 , P_1 , T_b/T_1 , T_3/T_1 , P_6/P_1 , P_6 et vérifier l'opération en retrouvant P_b

Solution : $\left(\frac{A_a}{A_2}\right)^2 \frac{7,07}{5} = 2 = \varphi\left(\frac{T_a}{T_1}\right) \implies \frac{T_a}{T_1} = 0,9583 \implies T_1 = 281,7^\circ \text{K}$

On lit sur la verticale de $\frac{T_a}{T_1} = 0,9583$:

$$\frac{P_a}{P_1} = 0,862 \implies P_1 = 2 \cdot 10^5 / 0,862 = 2,321 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

En application de (33) :

$$A_b P_b / A_2 P_2 = \psi(T_b/T_1) = 1,014 \implies \frac{T_b}{T_1} = 0,943$$

En application de (32) :

$$\left(\frac{A_b}{A_2}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_b}{T_1}\right) \psi^{-2} \frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{7,91}{5}\right)^2 = 2,5$$

$$= 1,56 \psi^{-2} \left(\frac{T_3}{T_1}\right)$$

$$\psi^{-2} \left(\frac{T_3}{T_1}\right) = \frac{2,50}{1,56} = 1,602 \implies \frac{T_3}{T_1} = 0,595$$

On lit sur la verticale de $T_3/T_1 = 0,595$

$$P_6/P_1 = 0,79 \implies P_6 = 0,79 \cdot 2,325 \cdot 10^5 = 1,832 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

On lit sur la verticale de $T_b/T_1 = 0,943$

$$\left(\frac{T_b}{T_1}\right)^{3,5} = \frac{P_b}{P_6} = 0,813 \implies P_b = \underline{1,49 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

Opération vérifiée

Chapitre VIII

Programmes

Programme 1 : permettant de construire la courbe des pertes de charge.

Real R

Dimension PDC (300)

Read (2, 1) K, R.

1 Format (F4.3, F5.2)

Write (3, 10) K, R

10 Format (2X, "K=", F4.2, 2X, "R=", F5.2)

EPS = +1.00E-02.

QT = 0.01

2 I = 1

$$U = (4. * K / ((K+1) ** 2) - QT) ** (K / (K-1))$$

$$T = (K+1) / (K-1) * (QT ** (K / (K-1)))$$

$$S = (4. * K / (K ** 2 - 1)) * (QT ** (1. / (K-1)))$$

$$V = (S - T) * ((1. - QT) ** (K / (K-1)))$$

$$PDC(I) = 9.81 * R * ALOG(V/V)$$

IF (PDC(I) - EPS) 3, 4, 4

4 Write (3, 8) I, PDC(I), QT

8 Format (5X, "PDC(", I3, ")=", F8.2, 5X, "QT=", F8.4)

I = I + 1

QT = QT + 0.05

Go To 2

3 Continue

Programme 2 permettant de construire les courbes de rendement.

Real K

Dimension ETA(100)

Read (2, 1) K

1 Format (F5.2)

QT = 0.001

I = 1

6 U = (((4. * K) / (K * * 2 - 1) * QT) - (K+1)/(K-1)) * * ((K-1)/K) - 1.

V = (4. * K) / ((K+1.) * * 2 * QT) - 1.) * ((1. / (1. - QT)) - 1.

ETA (I) = U/V

Write (3, 2) I, ETA (I), QT

2 Format 5x " ETA(", I3, ") = " , F5.2,

5x, " QT = " , F5.2)

IF (ETA (I) - 1.) 4, 5, 5

4 I = I + 1

QT = QT + 0.05.

GO TO 6

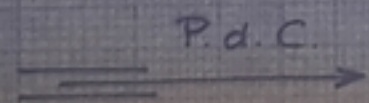
5 Continue -

Courbe Pertes de Charge

$$K = 1,40$$

$$R = 30,30$$

Gaz: N_2



T_3/T_2

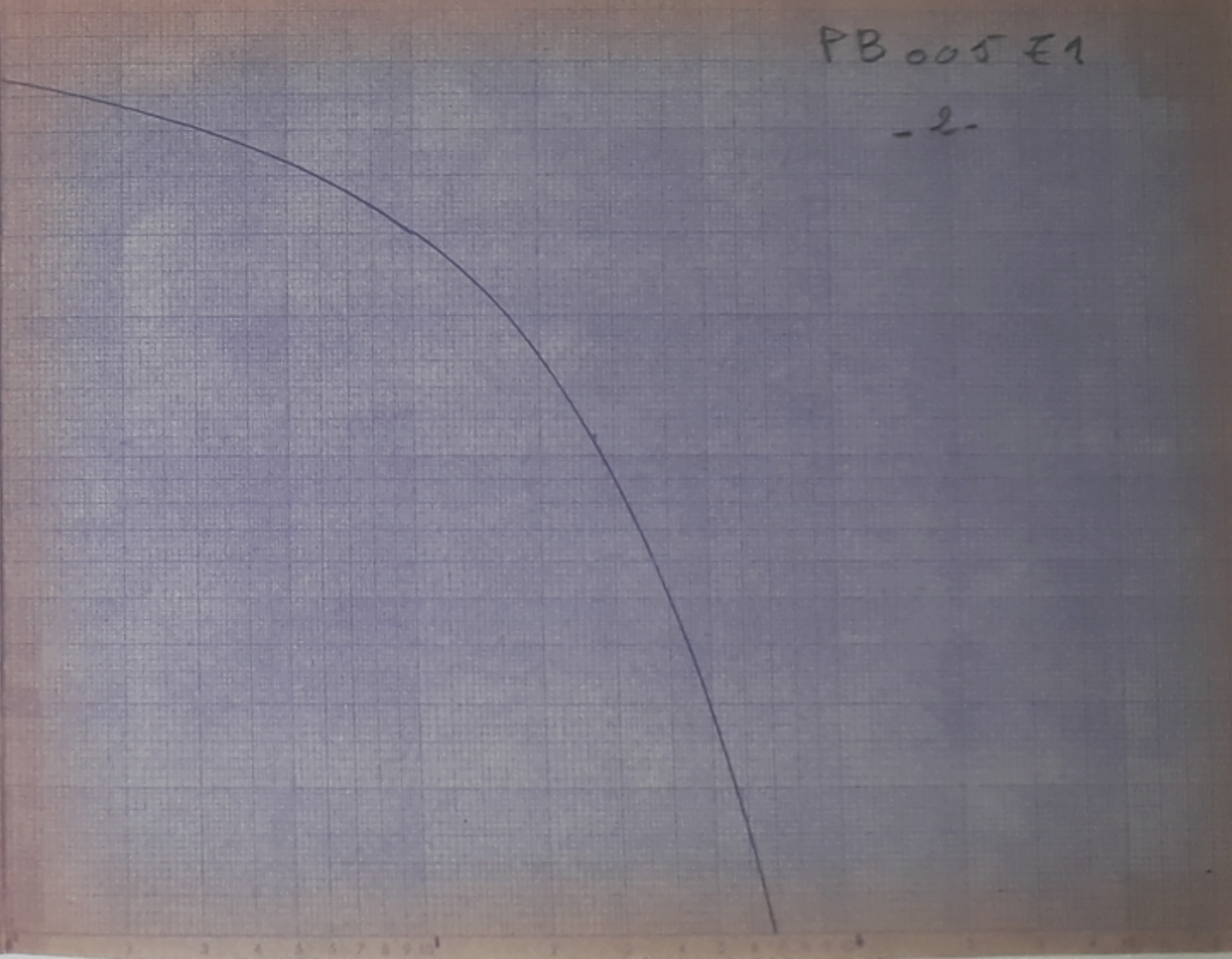
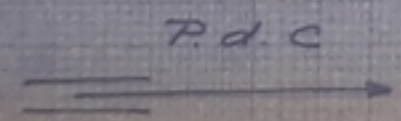
Courbe Pertes de Charge

$K = 1,31$

$R = 52,90$

Gas: CH_4

T_3 / T_2



PB 005 F1

-4-

Courbe Pertes de Charge

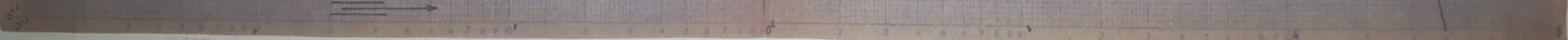
$$K = 1,40$$

$$R = 420,6$$

Gaz: H₂

$\frac{1}{3} \text{IT}_2$

P.d.C



Courbe Pertes de Charge

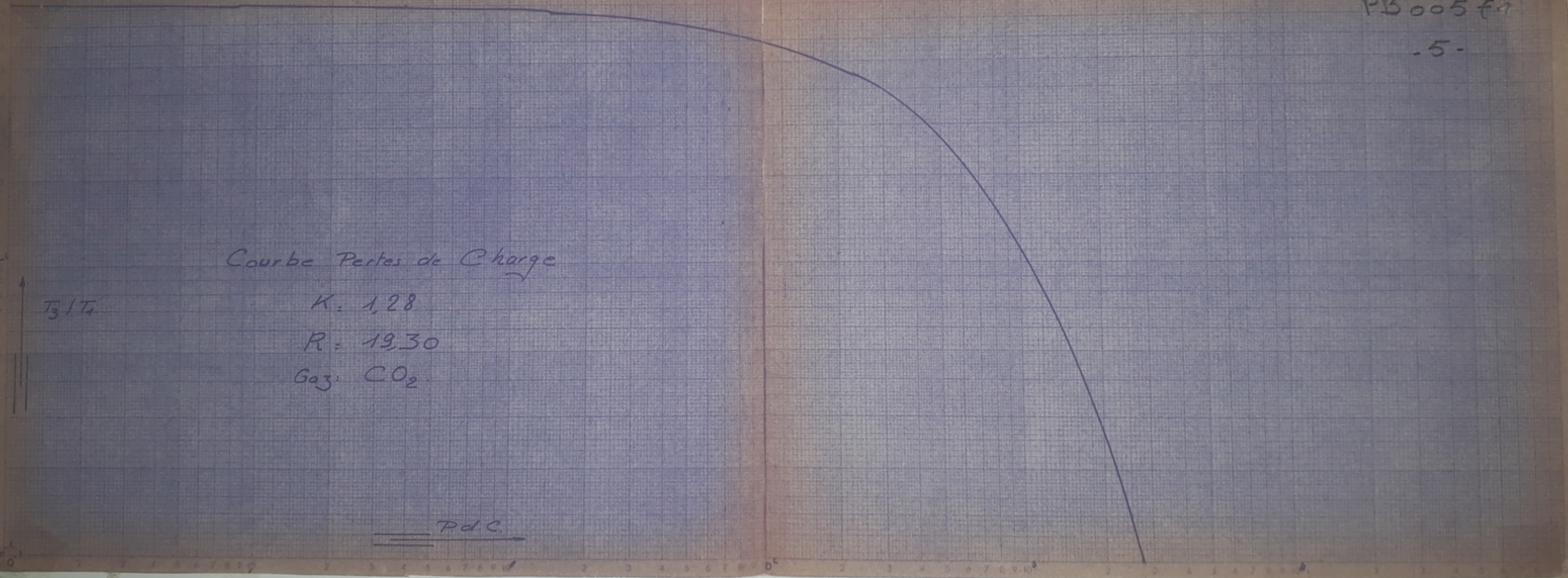
T_3/T_1

$K = 1,28$

$R = 19,30$

Gas: CO_2

P.d.C.



PB00571

06.

Courbe pertes de charge: P.d.C. $f(T_3/T_1)$

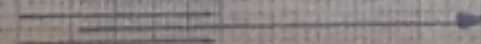
$K = 1,31$

$R = 49,8$

Gaz: NH_3

T_3/T_1

P.d.C.



PB00571
- 08 -

Courbe des pertes de charge
P.d.C. $f(T_3/T_2)$

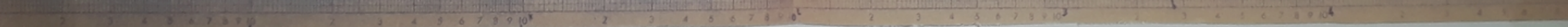
$K = 1,4$

$R = 29,3$

Gaz : Air

T_3/T_2

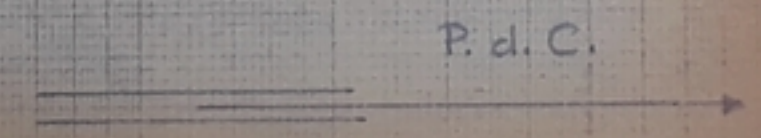
P.d.C.



Courbe Pertes de Charge.

$K = 1,66$
 $R = 212$
Gaz: He

13/4



PB 0057A

- 09.

Curva Perdas de Carga

$K = 2,23$

$R = 13,2$

Gaz: SO_2

P.d.C. →

↑
T.M.

