

UNIVERSITE D'ALGER

1/70

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE 1<sup>er</sup> ex.



## PROJET DE FIN D'ETUDES

Département Génie Civil

Détermination à l'aide de l'ordinateur des diagrammes paramétriques des écoulements isentropiques suivant la méthode de M. LAPRAY

5 PLANS

PROMOTION 70

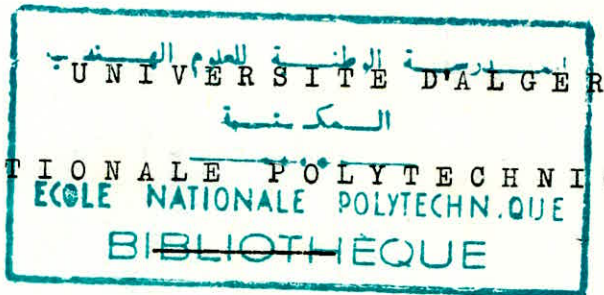
PROPOSE par.  
M Géza LAPRAY

ETUDIÉ par.  
M Mohsen Belkhiria

امدرسة الوطنية للعلوم الهندية

المكتبة

—♦♦♦—  
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
BIBLIOTHÈQUE



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

THESE DE FIN D'ETUDES

-----000000000000-----

DETERMINATION A L'AIDE DE L'ORDI-  
NATEUR DES DIAGRAMMES PARAMETRI-  
QUES DES ECOULEMENTS ISENTROPI-  
QUES SUIVANT LA METHODE DE M.

LAPRAY

-----000000000000-----

Proposée par

M. GESA DE LAPRAY

étudiée par

M. BELKHIRIA MOHSEN

PROMOTION 1970

-----000000000000-----



Je tiens à remercier M. LAPRAY pour avoir bien voulu proposer et diriger avec bienveillance cette présente étude .

Mes remerciements vont aussi à tous les professeurs qui ont contribué à ma formation d'ingénieur .



T A B L E    D E S    M A T I E R E S

- SYMBOLES ET UNITES
- FORMULES ET EQUATIONS UTILISEES
- INTRODUCTION
- CONDITIONS DANS LA SECTION \* SONIQUE REELLE OU HYPOTHETIQUE
- ECOULEMENT MIXTE AVEC ONDE DE CHOC
- RELATIONS PARAMETRIQUES DANS LA ZONE DU CHOC
- RELATIONS PARAMETRIQUES CONCERNANT LA SECTION 6. A L'AVAL DE LA SORTIE DE LA TUYERE
- RELATIONS PARAMETRIQUES DANS LE DOMAINE DU TRONÇON ISENTROPICQUE A L'AVAL DE LA ZONE DU CHOC
- REPRESENTATION GRAPHIQUE DES PARAMETRES
- CAS LIMITE
- CLASSEMENT DES ECOULEMENTS CI-DESSUS ANALYSES
- EQUATIONS UTILISEES POUR L'ETABLISSEMENT DES ABAQUES
- ETABLISSEMENT DES DIFFERENTS PROGRAMMES
  - a) Transformation des différentes caractéristiques des formules en langage fortran
  - b) Programmes permettant d'établir les abaques paramétriques

SYMBOLES ET UNITES

A	aire d'une section	$m^2$
$A_n$	aire de la section n.	$m^2$
$A_{*}$	aire de la section réelle ou hypothétique où la vitesse devient sonique	$m^2$
$c_{*}$	vitesse sonique réelle ou hypothétique	$m \text{ sec.}^{-1}$
D	diamètre	m
$D_n$	diamètre de la section n.	m
$D_{*}$	diamètre de la section *	m
g	accélération de la pesanteur	$m \text{ sec.}^{-2}$
k	exposant isentropique	sans dim.
L	longueur	m
$\dot{M}$	débit en masse	$Kg \text{ sec}^{-1}$
P	préssion	Pa
$P_n$	préssion dans la section n.	Pa
$P_{*}$	préssion dans la section *	Pa
Q	débit en volume	$m^3 \text{ sec}^{-1}$
R	constante du gaz en écoulement	$m/^{\circ}K$
Re	nombre de reynolds	sans dim.
T	température absolue	$^{\circ}K$
$T_n$	température absolue dans la section n.	$^{\circ}K$
$T_{*}$	température absolue dans la section *	$^{\circ}K$
v	vitesse moyenne dans une section	$m \text{ sec}^{-1}$
$v_n$	vitesse dans la section n.	$m \text{ sec}^{-1}$
$\alpha$	facteur de correction de l'énergie cinétique	sans dim.
$\beta$	facteur de correction de la quantité de mouvement	sans dim.
$\rho$	masse volumique dans une section	$Kg \text{ m}^{-3}$

$\rho_n$       masse volumique dans la section n.

kg m<sup>-3</sup>

$\rho_*$       masse volumique dans la section \*

kg m<sup>-3</sup>

FORMULES ET EQUATIONS UTILISEES

Propriétés des fluides:

$$\frac{p}{\rho} = gRT \quad (1) \quad R = \frac{848}{M} \quad (2) \quad \frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p}{\rho^k} = c^{te} \quad (3)$$

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^k = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{k/(k-1)} \quad (4_p)$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/k} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{1/(k-1)} \quad (4_\rho)$$

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{(k-1)/k} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{(k-1)} \quad (4_T)$$

Equation de continuité:

$$v_1 \rho_1 A_1 = v_2 \rho_2 A_2 = v_n \rho_n A_n = c^{te} \quad (5)$$

Equation de l'énergie par unité de masse des écoulements compressibles isentropiques sans frottement:

$$gz_1 + \rho_1 \frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = gz + \rho \frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} \quad (6)$$

en admettant que

$$z = z_1 \quad \text{et que} \quad \alpha = \alpha_1 = 1$$

l'équation de l'énergie devient :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} \quad (6')$$

*Bané de Saint-Venant  
incompressible?*

Vitesse sonique réelle ou hypothétique passant par la tuyère:

$$c_* = \sqrt{\frac{2}{k+1} kgRT_1} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} p_1/\rho_1} \quad (7)$$

Rapports critiques:

$$\frac{T_*}{T_1} = \frac{2}{k+1} \quad (8_T) \quad \frac{p_*}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} \quad (8_p)$$

$$\frac{\rho_x}{\rho_I} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} \quad (8)$$

Equation des quantités de mouvement:

appliquée à la zone de choc, en admettant que le facteur de correction de la quantité de mouvement  $\beta = 1$  ?

$$p_3 A_3 - p_4 A_4 = \rho_4 A_4 v_4^2 - \rho_3 A_3 v_3^2 \quad (9)$$



INTRODUCTION

Le sujet qui m'a été proposé par M. LAPRAY Consiste à établir les abaques paramétriques des écoulements isentropiques et de l'onde de choc , pour les cas de gaz ci-après:

	NH <sub>3</sub>	He	CO <sub>2</sub>	Air	O <sub>2</sub>	SO <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	CH <sub>4</sub>
k	1,31	1,66	1,28	1,40	1,40	1,26	1,40	1,40	1,31

d'après le cours qui nous a été donné en classe.

L'analyse des problèmes, concernant les écoulements compressibles, sans frottement et sans transfert de chaleur, passant par des ouvrages courts (orifices, tuyères etc.) en régime subsonique ou mixte, en présence ou en absence d'une onde de choc, est souvent assez complexe et laborieux, en raison des tentatives répétées nécessaires à leur solution; . ?  
la présente étude, dont le but a été de simplifier ces opérations, fournit une méthode directe et un instrument de travail de validité générale permettant la solution rapide de tous les problèmes de ce domaine.

Le développement des sus dits problèmes sera précédée par l'introduction

- du concept de la vitesse sonique  $c_x$  hypothétique, dans le cas des écoulements restant subsoniques sur la totalité de leur parcours,
  - de l'aire  $A_x$  de la section hypothétique y correspondante,
  - de la pression hypothétique  $p_x$
  - de la masse volumique hypothétique  $\rho_x$
  - et de la température absolue hypothétique  $T_x$
- caractéristiques de l'état du fluide d'ans cette même section.

L'étude de ces écoulements sera étendue aux 4 cas possibles ci-après:

1.- cas où la vitesse de l'écoulement, subsonique à l'amont, devient sonique dans la section rétrécie (température, pression et masse volumique critiques) pour changer aussitôt en supersonique et pour se retransformer plus loin par l'intermédiaire d'une onde de choc, en subsonique

2.- cas limite, où l'écoulement, devenant sonique dans le rétrécissement, redevient subsonique immédiatement à l'aval de celui-ci. La zone du choc reculant, jusqu'à atteindre la section rétrécie, donne lieu à une onde de choc réduite à zéro.

3.- Cas limite, où l'écoulement, devenant sonique dans la section rétrécie se transforme en supersonique immédiatement à l'aval de celle-ci et conserve cet état de son régime sur toute la longueur de son parcours. L'onde de choc se déplace vers l'aval, au delà de la sortie de la tuyère.

4.- cas, où l'écoulement, reste subsonique sur toute la longueur du parcours. On introduira dans l'étude de ce cas la section hypothétique  $a_x$  où la vitesse deviendrait sonique et où la température, la pression et la masse volumique atteindraient leurs valeurs critiques  $T_x$ ,  $p_x$  et  $\rho_x$  ce qui facilitera remarquablement la détermination quantitative de ces caractéristiques (vitesse, température, pression et masse volumique dans toutes sections)

Conditions dans la section  $x$  sonique réelle ou hypothétique

Le régime de l'écoulement à travers la section rétrécie peut être:

-sonique, si les rapports  $T_2/T_1$ ,  $p_2/p_1$  et  $\rho_2/\rho_1$  s'identifient aux rapports critiques définis par  $(\delta_T)$ ,  $(\delta_p)$  et  $(\delta_\rho)$  (ces rapports ne peuvent pas descendre, dans la section rétrécie, au dessous de la valeur

des rapports critiques, quelle que soit la valeur des dites caractéristiques à l'aval de celui-ci.

Pour déterminer la vitesse moyenne  $v$  d'un écoulement isentropique, subsonique ou supersonique passant par une section quelconque arbitrairement choisie, on applique l'équation (6) de l'énergie entre cette section et la section 1. (voir figure 1. page 13). Dans la section 1. la vitesse  $v_1 = 0$ , ainsi l'équation (6) devient:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}$$

en éliminant  $p$  et  $\rho$  entre cette dernière équation et (4) on tire:

$$\frac{k}{k-1} g R T_1 = \frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1} g R T$$

d'où 
$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} g R T_1 (1 - T/T_1)} \quad (10_T)$$

soit 
$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} g R T_1 \left[ 1 - (p/p_1)^{(k-1)/k} \right]} \quad (10_p)$$

soit 
$$v = \sqrt{\frac{2k}{k-1} g R T_1 \left[ 1 - (\rho/\rho_1)^{(k-1)} \right]} \quad (10_\rho)$$

En tenant compte de (10) de (5) et de (4) on tire le débit en masse

$$\dot{m} = A \rho_1 \frac{T}{T_1}^{(1/(k-1))} \sqrt{\frac{2k}{k-1} g R T_1 (1 - T/T_1)} \quad (11_T)$$

soit 
$$\dot{m} = A \rho_1 \frac{p}{p_1}^{1/k} \sqrt{\frac{2k}{k-1} g R T_1 (1 - p/p_1)^{(k-1)/k}} \quad (11_p)$$

soit 
$$\dot{m} = A \rho_1 \sqrt{\frac{2k}{k-1} g R T_1 (1 - \rho/\rho_1)^{(k-1)}} \quad (11_\rho)$$

En examinant les équations (7), (8<sub>T</sub>), (8<sub>p</sub>), (8<sub>ρ</sub>) on constate que la valeur de  $c_x$  de la vitesse sonique ainsi que les valeurs critiques  $T_x$ ,  $p_x$  et  $\rho_x$  de la température absolue, de pression et la

masse volumique sont bien déterminées par les seules conditions à l'amont

En effet il suff-



fit de connaître deux des trois éléments  $T_1$ ,  $p_1$  et  $\rho_1$  pour en tirer, en application de (3), la valeur de ces éléments ainsi que pour déterminer en application de (7), (8<sub>T</sub>), (8<sub>p</sub>) et (8<sub>ρ</sub>) les valeurs y correspondantes de  $c_*$ ,  $T_*$ ,  $p_*$  et de  $\rho_*$  définissant les caractéristiques d'un écoulement sonique, réelle ou hypothétique passant par une section rétrécie réelle ou hypothétique.

En application de l'équation (5) de continuité à cette section on tire en tenant compte de (11<sub>T</sub>)

$$\dot{m} = c_* \rho_* A_* = A_0 \rho_1 \left(\frac{T}{T_1}\right)^{1/(k-1)} \sqrt{\frac{2k}{k-1} gRT_1 (1-T/T_1)}$$

d'où l'aire de la section sonique est :

$$A_* = \frac{\dot{m}}{c_* \rho_*} = \frac{A_0 \rho_1 \left(\frac{T}{T_1}\right)^{1/(k-1)} \sqrt{\frac{2k}{k-1} gRT_1 (1-T/T_1)}}{\rho_1 \left(\frac{2}{k-1}\right)^{1/(k-1)} \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_1}}$$

d'où après simplification on tire :

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \frac{\frac{k-1}{k+1} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{2/(k-1)}}{\left(\frac{T}{T_1}\right)^{2/(k-1)} - \left(\frac{T}{T_1}\right)^{(k+1)/(k-1)}} = \varphi\left(\frac{T}{T_1}\right) \quad (12_T)$$

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \frac{\frac{k-1}{k+1} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{2/(k-1)}}{\left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/k} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{(k+1)/k}} = \varphi\left(\frac{p}{p_1}\right) \quad (12_p)$$

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \frac{\frac{k-1}{k+1} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{2/(k-1)}}{\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{(k+1)}} = \varphi\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) \quad (12_\rho)$$

Dans le cas où la vitesse devient réellement sonique, cela ne peut

se produire que dans la section rétrécie ( section 2. pour la tuyère représentée par la figure 1.) Dans de telles conditions les rapports  $T/T_1$ ,  $p/p_1$  et  $\rho/\rho_1$  doivent s'identifier aux rapports critiques définis par  $(s_T)$ ,  $(s_p)$  et  $(s_\rho)$ . En effet en substituant ces rapports en  $(12_T)$ ,  $(12_p)$  et  $(12_\rho)$  on trouve:

$$\frac{A}{A_*} = 1$$

DE même , en substituant les dites rapports en  $(10_T)$ ,  $(10_p)$  et  $(10_\rho)$  on tire

$$v = c_*$$

Les formules paramétriques  $(12_T)$ ,  $(12_p)$  et  $(12_\rho)$  découlent:

- de l'équation de l'énergie , (6)
- de l'équation de continuité, (5)
- et des relations isentropiques (4)

valables à tous les écoulements isentropiques . Pour cette raison les dites formules ont le caractère de validité générale et peuvent être appliquées , sans distinction , aux écoulements compressibles , tant que leur régime peut être considéré comme isentropique sans frottement et sans perte de charge; le caractère subsonique ou supersonique de l'écoulement n'ayant aucune influence au point de vue de leur applicabilité.

La signification physique des valeurs réelles de  $A_*$ ,  $p_*$ ,  $T_*$ ,  $\rho_*$  et  $c_*$  s'explique par la figure 1. montrant que c'est la section rétrécie (section 2.) , (pour la tuyère représentée) qui constitue le lieu géométrique des éléments distingués par  $*$ . on constate en plus que le rapport  $A/A_*$  est dans tous les cas supérieur ou égal à 1 , et que chaque fois où la valeur du dit rapport est supérieure à 1 , il y a deux sections de la tuyère représentées qui y correspondent , l'une, coupant le convergent , est lieu d'un écoulement subsonique , caractérisé par une pression  $p'$  , par une mas-



se volumique  $\rho'$  , par une température  $T'$  et par une vitesse  $v'$  ; l'autre copant le divergeant est le lieu d'un écoulement supersonique , caractérisé par une pression  $p''$  , par une masse volumique  $\rho''$  , par une température  $T''$  et par une vitesse  $v''$  . Cette observation est en parfait accord avec les équations  $(12_p)$  ,  $(12_\rho)$  et  $(12_T)$  , ayant chacune deux racines réelles , déterminant les valeurs de  $p'$  ,  $p''$  ,  $\rho'$  ,  $\rho''$  ,  $T'$  ,  $T''$  et définissant , en application de l'équation de continuité , les valeurs y correspondantes  $v'$  et  $v''$  de la vitesse moyenne dans les dites sections .

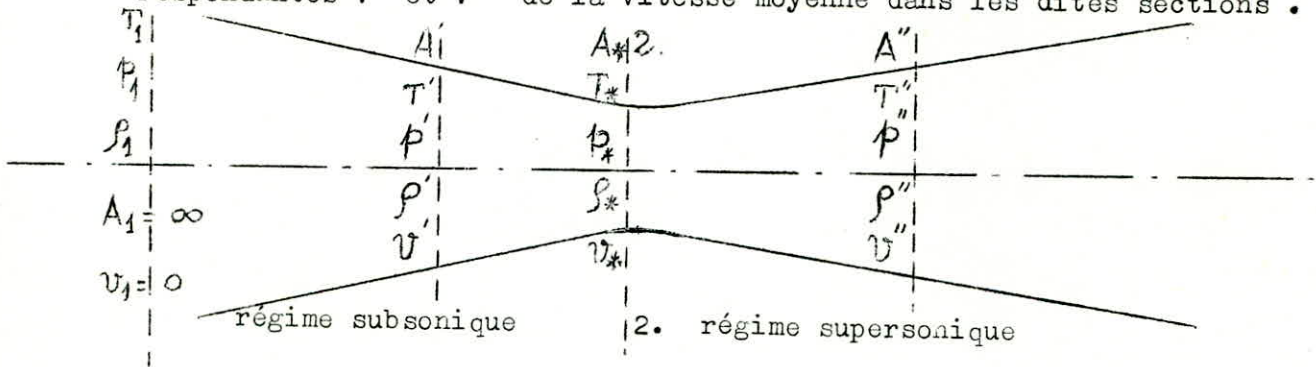


Figure 1.

La signification physique des valeurs hypothétiques  $A_*$   $T_*$   $\rho_*$   $p_*$   $c_*$  s'explique en considérant la figure 2.

Dans la section retrécie on a:

$$\frac{p_2}{p_1} > \frac{p_*}{p_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} > \frac{T_*}{T_1} , \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} > \frac{\rho_*}{\rho_1} \quad \text{et} \quad v < c_*$$

donc l'écoulement est subsonique.

Si la convergence continuait au delà de la section 2 . et si le décroissement des rapports  $T/T_1$   $p/p_1$   $\rho/\rho_1$  continuait suivant la loi régissant leur variations à l'amont de la section 2., ces rapports atteindraient dans une section hypothétique ayant son aire  $A = A_*$  les valeurs de

$$p/p_1 = p_*/p_1 ; \quad T/T_1 = T_*/T_1 ; \quad \rho/\rho_1 = \rho_*/\rho_1$$

et la vitesse y deviendrait sonique:  $v = c_*$

Dans le cas de l'écoulement subsonique représenté par la figure 2. il y a deux sections ayant l'aire égale à  $A$ , l'écoulement identique dans l'une et dans l'autre possède les mêmes caractéristique déterminées par la première racine des équations  $(12_T)$ ,  $(12_p)$  et  $(12_\rho)$  et par la valeur de  $v$  y correspondant calculée en application de l'équation de continuité.

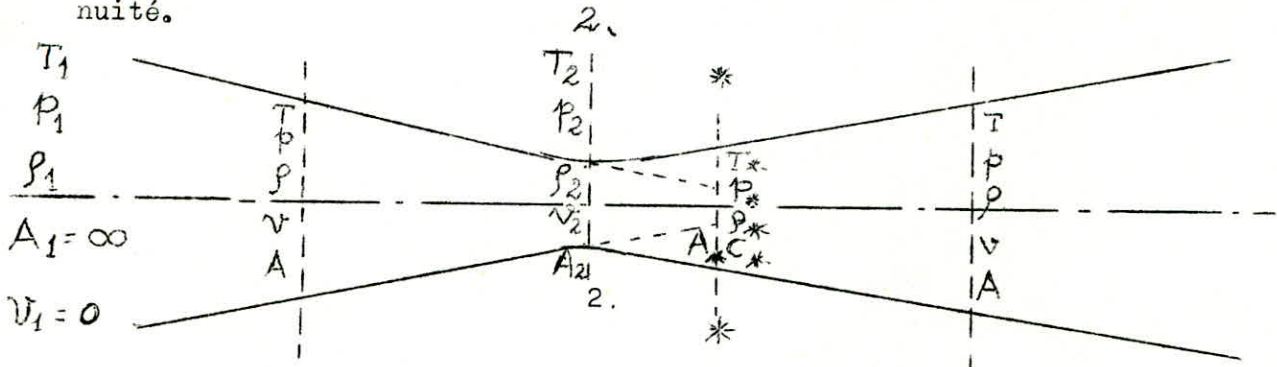


Figure 2.

ÉCOULEMENT MIXTE AVEC ONDE DE CHOC.

L'écoulement d'un gaz passant par la tuyère représentée par la figure 3. page 17

- subit une accélération dans le convergeant mais reste subsonique à l'amont de la section 2.
- devient sonique dans la section 2.
- se transforme en supersonique immédiatement à l'aval de la section 2. et subit une accélération entre les sections 2. et 3.
- produit une onde de choc entre les sections 3. et 4.
- reste subsonique et subit une décélération à l'aval de la section 4.

Les lois physiques exprimées par les équations (1), (2) ainsi que l'équation de continuité (5) sont valables entre toutes les sections du fluide en écoulement passant par la tuyère.

Les relations isentropiques (3) , (4) en vigueur entre 1. et 3. d'une part et entre 4. et 6. d'autre part , ne sont pas valables entre 3. et 4.

L'équation des quantités de mouvement (9) sera appliquée entre 3. et 4. à la zone du choc

Pour trouver une solution , ayant une validité générale au problème ci-dessus exposé, on établira des formules précisant la valeur des relations paramétriques

$$\left(\frac{v_n}{c_{\#}}\right)^2 \quad \left(\frac{A_n}{A_{\#}}\right)^2 \quad \frac{T_n}{T_1} \quad \frac{p_n}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{\rho_n}{\rho_1}$$

dans chacune des sections 1. , 2. , ... 6. , de même que des formules précisant la valeur des relations paramétriques

$$\left(\frac{v}{c_{\#}}\right)^2 \quad \left(\frac{A}{A_{\#}}\right)^2 \quad \frac{T}{T_1} \quad \frac{p}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{\rho_1}$$

dans toutes sections de chacune des zones 1-2 , 2-3 , 3-4 et 4-6.

Dans la section 1. , on a pour des raisons bien évidentes:

$$\left(\frac{v_1}{c_{\#}}\right)^2 = 0, \quad \left(\frac{A_1}{A_{\#}}\right)^2 = \infty, \quad \frac{T_1}{T_1} = \frac{p_1}{p_1} = \frac{\rho_1}{\rho_1} = 1$$

dans toutes sections coupant la tranche isentropique supérieure 1-3.: en y appliquant l'équation de l'énergie entre la section 1. , d'une part et une autre section quelconque , arbitrairement choisie , d'autre part , on a:

$$v^2 + \frac{2k}{k-1} gRT = \frac{2k}{k-1} gRT_1$$

soit 
$$v^2 = \frac{2k}{k-1} gRT_1 (1 - T/T_1)$$

d'où on multipliant par  $(k+1)/(k-1)$  et en divisant par

$$c_{\#}^2 = \frac{2k}{k+1} gRT_1 \quad (7)$$

on tire

$$\left(\frac{v}{c_*}\right)^2 = \frac{k+1}{k-1} (1 - T/T_1) \quad (13_T)$$

en application de (4<sub>T</sub>) cette dernière équation peut être écrite aussi sous les formes suivantes :

$$\left(\frac{v}{c_*}\right)^2 = \frac{k+1}{k-1} \left[1 - (p/p_1)\right]^{(k-1)/k} \quad (13_p)$$

et

$$\left(\frac{v}{c_*}\right)^2 = \frac{k+1}{k-1} \left[1 - (\rho/\rho_1)\right]^{(k-1)} \quad (13_\rho)$$

En application de l'équation de continuité (5) on a

$$A^2 = \frac{c_*^2 A_2^2 \rho_2^2}{v^2 \rho^2}$$

d'où , en éliminant  $v^2/c_*^2$  entre cette dernière équation et (13<sub>T</sub>) on tire:

$$\left(\frac{A}{A_2}\right)^2 = \frac{k-1}{k+1} \frac{(\rho_2/\rho)^2}{1 - T/T_1}$$

d'où en tenant compte de (8<sub>ρ</sub>) , de (4<sub>T</sub>) et du fait que , l'écoulement devenant réellement sonique en 2.

$$A_2 = A_*$$

on tire

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \frac{\frac{k-1}{k+1} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{2/(k-1)}}{\left(\frac{T}{T_1}\right)^{2/(k-1)} - \left(\frac{T}{T_1}\right)^{(k+1)/(k-1)}} = \phi\left(\frac{T}{T_1}\right) \quad (12_T)$$

montrant que l'équation (12<sub>T</sub>) et , par voie de conséquence , les équations (12<sub>p</sub>) et (12<sub>ρ</sub>) sont bien valables pour toutes les sections de la tranche de l'écoulement entre 1. et 3. ce qui est par ailleurs bien évident du fait que l'écoulement reste isentropique sur toute la longueur de cette



tranche.

Pour cette même raison les relations paramétriques  $T/T_1$ ,  $p/p_1$ , et  $\rho/\rho_1$  suivent entre 1. et 3., la loi isentropique exprimée par les équations (4<sub>T</sub>), (4<sub>p</sub>) et (4<sub>ρ</sub>)

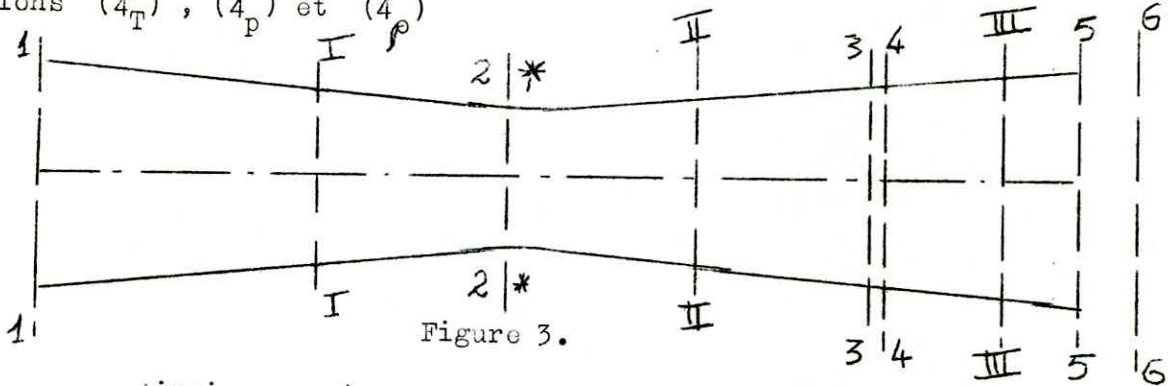


Figure 3.

Ainsi, en résumant, on a pour la tranche isentropique 1.-3. les relations paramétriques suivantes:

$$\left(\frac{v}{c_*}\right)^2 = \frac{k+1}{k-1}(1-T/T_1) = \frac{k+1}{k-1} \left[1 - (p/p_1)\right]^{\frac{k-1}{k}} = \frac{k+1}{k-1} \left[1 - (\rho/\rho_1)\right]^{(k-1)} \quad (13)$$

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \varphi(T/T_1) = \varphi_p(p/p_1) = \varphi_\rho(\rho/\rho_1) \quad (12)$$

$$\frac{T}{T_1} = (p/p_1)^{(k-1)/k} = (\rho/\rho_1)^{(k-1)} \quad (4_T)$$

$$\frac{p}{p_1} = (T/T_1)^{k/(k-1)} = (\rho/\rho_1)^k \quad (4_p)$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = (T/T_1)^{1/(k-1)} = (p/p_1)^{1/k} \quad (4_\rho)$$

Les relations paramétriques ci-dessus précisées ne sont pas indépendantes les unes des autres. Il suffit en réalité que l'une des cinq soit donnée pour en tirer les valeurs de chacun des quatre autres. nous avons représenté les valeurs de ces paramètres calculés avec les différentes valeurs de  $k$  indiquées au début du présent traité, dans un système de coor-



données à division logarithmique en portant en abscisse, les valeurs de  $T/T_1$  et en portant en ordonnées les valeurs de:

$$(A/A_*)^2, \quad (v/c_*)^2, \quad (p/p_1) \quad \text{et} \quad (\rho/\rho_1)$$

Exemple 1.- Dans la section  $A_{II} = 7,07 \text{ cm}^2$  de l'écoulement représenté par la figure 3. la pression  $p_{II} = 10^4 \text{ Pa}$ .

Déterminer la pression  $p_I$  dans la section  $A_I = 7,75 \text{ cm}^2$  si l'aire de la section  $A_2 = 5 \text{ cm}^2$

supposons que le gaz véhiculé soit de l'air tel que  $k=1,4$

$$\left(\frac{A_{II}}{A_*}\right)^2 = \left(\frac{7,05}{5}\right)^2 = 2 \implies T_{II}/T_1 = 0,613 \implies p_{II}/p_1 = 0,18..$$

$$\left(\frac{A_I}{A_*}\right)^2 = \left(\frac{7,75}{5}\right)^2 = 2,4 \implies T_I/T_1 = 0,96727 \implies p_I/p_1 = 0,884$$

$$p_I = \frac{p_I/p_1}{p_{II}/p_1} p_{II} = \frac{0,884}{0,180} \cdot 10^4 = 49100 \text{ Pa}$$

Faisons ce même exemple pour le cas où le gaz véhiculé soit du  $\text{SO}_2$  tel que  $k = 1,66$

$$\left(\frac{A_{II}}{A_*}\right)^2 = \left(\frac{7,05}{5}\right)^2 = 2 \implies T_{II}/T_1 = 0,415 \implies p_{II}/p_1 = 0,109$$

$$\left(\frac{A_I}{A_*}\right)^2 = \left(\frac{7,75}{5}\right)^2 = 2,4 \implies T_I/T_1 = 0,9488 \implies p_I/p_1 = 0,875$$

$$p_I = \frac{0,875}{0,109} = 79800 \text{ Pa}$$

REMARQUE : -Dans les exercices qui vont suivre on a considéré que le gaz véhiculé sera de l'air ayant pour exposant isentropique  $k = 1,4$  lesquels exercices facilitent la tâche à l'utilisateur concerné.

En appliquant les équations (4), (12) et (13) à la section 2.,  
coïncidant avec la section \*, on tire:

$$\left(\frac{v_2}{c_*}\right)^2 = 1 \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{A_2}{A_*}\right)^2 = 1 ; \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{k+1} \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

c'est-à-dire les rapports critiques déjà définis en partie par les équations  
(8)

Les mêmes équations appliquées à la section 3. se trouvant à l'ex-  
trémité aval de la tranche isentropique précédant la zone du choc déterminent  
les relations paramétriques

$$\left(\frac{v_3}{c_*}\right)^2 = \frac{k+1}{k-1} (1 - T_3/T_1) = \frac{k+1}{k-1} \left[ 1 - \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right] = \frac{k+1}{k-1} \left[ 1 - \left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)^{k-1} \right]$$

$$\left(\frac{A_3}{A_*}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_3}{T_1}\right) = \varphi_p\left(\frac{p_3}{p_1}\right) = \varphi_\rho\left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)$$

et les relations (4<sub>T</sub>), (4<sub>p</sub>) et (4<sub>ρ</sub>) appliquées entre 1. et 3.

### RELATIONS PARAMÉTRIQUES DANS LA ZONE

#### DU CHOC

En application de l'équation de continuité (5) aux sections 3. et  
4. et en admettant qu'en raison de l'exiguité de leur distance

$$A_4 = A_3$$

on aura

$$\rho_4 v_4 = \rho_3 v_3 \quad (5')$$

Pour les mêmes raisons l'équation des quantités de mouvement appli-

quée aux dites sections se réduit à

$$p_3 - p_4 = \rho_4 v_4^2 - \rho_3 v_3^2 \quad (9')$$

En divisant (9') par (5') on tire

$$\frac{p_3}{\rho_3 v_3} - \frac{p_4}{\rho_4 v_4} = v_4 - v_3 \quad (14)$$

D'autre part en appliquant l'équation de l'énergie (6) entre une section quelconque arbitrairement choisie, d'une part et la section sonique, d'autre part on tire:

$$v^2 + \frac{2k}{k-1} \frac{p}{\rho} = c_*^2 + \frac{2k}{k-1} \frac{p_*}{\rho_*}$$

d'où en tenant compte de (7) on tire

$$v^2 + \frac{2k}{k-1} \frac{p}{\rho} = c_*^2 + \frac{2}{k-1} c_*^2$$

soit

$$v^2 + \frac{2k}{k-1} \frac{p}{\rho} = \frac{k+1}{k-1} c_*^2$$

d'où

$$\frac{p}{\rho} = \frac{k+1}{k-1} c_*^2 - v^2 \frac{k-1}{2k}$$

soit

$$\frac{p}{\rho} = \frac{(k+1) c_*^2 - (k-1) v^2}{2k} \quad (15)$$

En appliquant (15) aux sections 3. et 4. on a

$$\frac{p_3}{\rho_3} = \frac{(k+1) c_*^2 - (k-1) v_3^2}{2k} \quad (15')$$

et

$$\frac{p_4}{\rho_4} = \frac{(k+1) c_*^2 - (k-1) v_4^2}{2k} \quad (15'')$$

En éliminant  $p_3/\rho_3$  et  $p_4/\rho_4$  entre (14), (15') et (15'') on ti-

re:

$$\frac{(k+1) c_*^2 - (k-1) v_3^2}{2 k v_3} - \frac{(k+1) c_*^2 - (k-1) v_4^2}{2 k v_4} = v_4 - v_3$$

en reduisant au même dénominateur on aura

$$\frac{(k+1) c_*^2 v_4 - (k-1) v_3^2 v_4 - (k+1) c_*^2 v_3 + (k+1) v_4^2 v_3}{2 k v_3 v_4} = v_4 - v_3$$

$$\text{et } (v_4 - v_3) \left[ \frac{(k+1) c_*^2}{2 k v_3 v_4} + \frac{k-1}{2k} \right] = v_4 - v_3$$

cette dernière équation est satisfaite si:

$$v_4 = v_3$$

c'est-à-dire, s'il n'y a pas d'onde de choc, ou si

$$\frac{(k+1) c_*^2}{2 k v_3 v_4} + \frac{k-1}{2k} = 1$$

c'est-à-dire si

$$\frac{c_*^2}{v_3 v_4} = 1$$

$$\text{d'où } v_3 v_4 = c_*^2 \quad (16)$$

c'est-à-dire la vitesse sonique dans la section rétrécie  $c_*$  constitue la moyenne géométrique de la vitesse supersonique  $v_3$  et de la vitesse subsonique  $v_4$  respectivement à l'amont et à l'aval du choc

$$\frac{v_4}{c_*} = \frac{c_*}{v_3}$$

d'où en tenant compte des équations (13) appliquées à la section 3. (voir page 16) on tire

$$\left( \frac{v_4}{c_*} \right)^2 = \frac{k-1}{(k+1)(1 - T_3/T_1)} \quad (17_T)$$

d'où en application de (4<sub>T</sub>)

$$\left(\frac{v_4}{c_*}\right)^2 = \frac{k-1}{(k-1)\left[1 - (\rho_3/\rho_1)^{(k-1)/k}\right]} \quad (17_T)$$

$$\text{et } \left(\frac{v_4}{c_*}\right)^2 = \frac{k-1}{(k+1)\left[1 - (\rho_3/\rho_1)^{(k-1)}\right]} \quad (17_\rho)$$

on tire de (5')

$$\rho_4 = \rho_3 v_3 / v_4 \quad (5'')$$

et de (16)

$$v = \frac{c_*^2}{v_3} \quad (16')$$

d'où

$$\rho_4 = \rho_3 v_3^2 / c_*^2 \quad (18)$$

En divisant par  $\rho_1$  et en éliminant  $\rho_3$  et  $v_3$  entre (18), (4<sub>o</sub>) et (13) on tire

$$\frac{\rho_4}{\rho_1} = \left(\frac{T_3}{T_1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{k+1}{k-1} (1 - T_3/T_1) \quad (19_T)$$

ou en tenant compte de (4<sub>T</sub>)

$$\frac{\rho_4}{\rho_1} = \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{1/k} \frac{k+1}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{(k-1)/k}\right] \quad (19_p)$$

$$\frac{\rho_4}{\rho_1} = \left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left[1 - (\rho_3/\rho_1)^{(k-1)}\right] \quad (19_\rho)$$

En éliminant  $v_4$  et  $\rho_4$  entre (9'), (5'') et (16') on tire

$$p_3 - p_4 = \rho_3 (v_3/c_*)^2 (c_*^2/v_3)^2 - \rho_3 v_3^2$$

soit

$$p_3 - p_4 = \rho_3 (c_*^2 - v_3^2) \quad (20)$$

En tenant compte de (13<sub>o</sub>) page 16 l'équation (20) devient :



$$p_3 - p_4 = \rho_3 \left[ c_*^2 - \frac{k+1}{k-1} c_*^2 + \frac{k+1}{k-1} c_*^2 \left( \frac{\rho_3}{\rho_1} \right)^{(k-1)} \right]$$

soit

$$p_3 - p_4 = \rho_3 \left[ \frac{-2}{k-1} c_*^2 + \frac{k+1}{k-1} \left( \frac{\rho_3}{\rho_1} \right)^{(k-1)} c_*^2 \right]$$

d'où, en éliminant  $c_*^2$  entre cette dernière équation et (7)

$$p_3 - p_4 = \rho_3 \left[ \frac{-2}{k-1} \frac{2k}{k+1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{k+1}{k-1} \left( \frac{2k}{k+1} \right) \frac{p_1}{\rho_1} \left( \frac{\rho_3}{\rho_1} \right)^{(k-1)} \right]$$

d'où en éliminant  $\rho_3$  entre cette dernière équation et (4)

$$p_3 - p_4 = \rho_1 \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^{1/k} \frac{2k}{k^2-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ -2 + (k+1) \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right]$$

d'où, en éliminant  $\rho_1$  entre cette dernière équation et (4)

$$p_4 = p_3 - \left\{ \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^{1/k} \frac{2k}{k^2-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ -2 + (k+1) \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^{(k-1)/k} \right] \right\}$$

d'où, en divisant par  $p_1$

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_3}{p_1} - \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^{1/k} \frac{2k}{k^2-1} \left[ (k+1) \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^{(k-1)/k} - 2 \right]$$

soit

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{k-1-2k}{k-1} \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^{1/k} + \frac{4k}{k^2-1} \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^{1/k}$$

et finalement

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{4k}{k^2-1} \left( \frac{p_3}{p_1} \right)^{1/k} - \frac{k+1}{k-1} \frac{p_3}{p_1} \quad (21_p)$$

d'où, en éliminant  $p_3/p_1$  entre cette dernière équation et (4<sub>p</sub>) on tire les équations suivantes:

$$\frac{P_4}{P_1} = \frac{4k}{k^2-1} \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{1/(k-1)} - \frac{k+1}{k-1} \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k-1)} \quad (21_T)$$

$$\frac{P_4}{P_1} = \frac{4k}{k^2-1} \frac{\rho_3}{\rho_1} - \frac{k+1}{k-1} \left( \frac{\rho_3}{\rho_1} \right)^k \quad (21_\rho)$$

En appliquant (1) à la section 4. on a:

$$\frac{P_4}{\rho_4} = g R T_4 \implies T_4 = \frac{P_4}{\rho_4 g R} \quad (1')$$

d'où, en éliminant  $\rho_4$  entre cette dernière équation et (19<sub>T</sub>) et en divisant par  $T_1$  on tire

$$\begin{aligned} \frac{T_4}{T_1} &= \frac{\frac{4k}{k^2-1} \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{1/(k-1)} - \frac{k+1}{k-1} \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k-1)}}{\left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{1/(k-1)} \frac{k+1}{k-1} \left( 1 - \frac{T_3}{T_1} \right) g R T_1} \frac{P_1}{\rho_1} \\ &= \frac{\frac{4k}{k^2-1} - \frac{k+1}{k-1} \frac{T_3}{T_1}}{\frac{k+1}{k-1} \left( 1 - \frac{T_3}{T_1} \right)} \end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{\frac{4k}{(k+1)^2} - \frac{T_3}{T_1}}{1 - \frac{T_3}{T_1}} \quad (22_T)$$

d'où, en tenant compte de (4<sub>T</sub>) on tire aussi les équations suivantes:

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{\frac{4k}{(k+1)^2} - \left( \frac{P_3}{P_1} \right)^{(k-1)/k}}{1 - \left( \frac{P_3}{P_1} \right)^{(k-1)/k}} \quad (22_P)$$

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{\frac{4k}{(k+1)^2} \left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)^{(k-1)}}{1 - \left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right)^{(k-1)}} \quad (22)$$

En résumant , on a pour la section 4. , succédant à la zone du choc , les relations paramétriques suivantes:

$$\left(\frac{A_4}{A_*}\right)^2 = \left(\frac{A_3}{A_*}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_3}{T_1}\right) = \varphi_P\left(\frac{P_3}{P_1}\right) = \varphi\left(\frac{\rho_3}{\rho_1}\right) \quad (13')$$

$\left(\frac{v_4}{c_*}\right)^2$  définie par les équations (17) voir page 21

$\frac{T_4}{T_1}$  définie par les équations (22) voir page 23

$\frac{\rho_4}{\rho_1}$  définie par les équations (19) voir page 22

$\frac{P_4}{P_1}$  définie par les équations (21) voir page 23

### RELATIONS PARAMETRIQUES CONCERNANT LA SECTION 6.

#### à LAVAL DE LA SORTIE DE LA TUYERE

En application de l'équation ~~de~~ de l'énergie aux sections 4. et 6. on aura:

$$v_4^2 + \frac{2k}{k-1} g R T_4 = \frac{2k}{k-1} g R T_6$$

doù  $T_6 = T_4 + v_4^2 / \frac{2k}{k-1} g R$

en exprimant  $T_4$  par (22)  $v_4^2$  par (22) et  $c_*^2$  par (7) on tire

$$T_6 = \frac{\frac{4k}{(k+1)} \left( 1 - \frac{T_3}{T_1} \right) + \frac{2k}{k-1} \frac{g R T_1}{g R \frac{k+1}{k-1} (1 - T_3/T_1)}}{1 - \frac{T_3}{T_1}}$$

cette dernière équation devient apres simplification:

$$\frac{T_6}{T_1} = \frac{\frac{4k}{(k+1)^2} \left( 1 - \frac{T_3}{T_1} \right) + \frac{(k-1)^2}{(k+1)^2}}{1 - \frac{T_3}{T_1}} = \frac{1 - \frac{T_3}{T_1}}{1 - \frac{T_3}{T_1}} = 1 \quad (23)$$

En appliquant l'équation de l'énergie entre 1. et 6. on a

$$g R T_1 = g R T_6$$

constituant la confirmation de (23)

Le paramètre de pression dans la section 6. peut être exprimé comme le produit de deux rapports:

$$\frac{p_6}{p_1} = \frac{p_4}{p_1} \frac{p_6}{p_4} \quad (24')$$

En tenant compte de (23) on a en application de (4<sub>p</sub>)

$$\frac{p_6}{p_4} = \left( \frac{T_6}{T_4} \right)^{k/(k-1)} = \left( \frac{T_1}{T_4} \right)^{k/(k-1)} \quad (24'')$$

En éliminant  $T_1/T_4$  entre cette dernière équation et (22<sub>T</sub>) et en exprimant  $p_4/p_1$  par (21<sub>T</sub>) on tire

$$\frac{p_6}{p_1} = \frac{\left[ \frac{4k}{(k^2-1)} \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{1/(k-1)} - \frac{k+1}{k-1} \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k-1)} \right] \left( 1 - \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k-1)}}{\left[ \frac{4k}{(k+1)^2} - \frac{T_3}{T_1} \right]^{k/(k-1)}} = \psi \left( \frac{T_3}{T_1} \right) \quad (24)$$

Le paramètre de la masse volumique dans la section 6.



$$\frac{\rho_6}{\rho_1} = \frac{p_6}{p_1} \quad \text{puisque} \quad T_6 = T_1 \quad (\text{isotherme.})$$

RELATIONS PARAMETRIQUES DANS LE DOMAINE DU TRONÇON ISENTROPIQUE

A L'AVANT DE LA ZONE DU CHOC

Paramètre de pression dans une section quelconque, arbitrairement choisie de la tranche de conduite considérée:

$$\frac{p}{p_6} = \left( \frac{T}{T_6} \right)^{k/(k-1)} = \left( \frac{T}{T_6} \times \frac{T_6}{T_1} \right)^{k/(k-1)}$$

ce qui est permis puisque  $T_6 = T_1$

d'où on tire

$$\frac{p}{p_6} = \left( \frac{T}{T_1} \right)^{k/(k-1)} \tag{4'}$$

d'autre part on a

$$\frac{p}{p_1} = \frac{p}{p_6} \cdot \frac{p_6}{p_1}$$

d'où en éliminant  $p/p_6$  et  $p_6/p_1$  entre cette dernière équation, (4') et (24), on tire

$$\frac{p}{p_1} = \left( \frac{T}{T_1} \right)^{k/(k-1)} \psi \left( \frac{T_3}{T_1} \right) \tag{26}$$

L'équation (26) montre que le paramètre de pression, qui, à l'amont du choc ne dépendait que d'une seule variable, la connaissance d'une seule des autres paramètres ( $A/A_*$ ,  $v/c_*$ ,  $T/T_1$  ou  $\rho/\rho_1$ ) ayant été suffisant pour sa détermination; devient à l'aval du choc une fonction de deux variables: une première concernant l'état du gaz dans la section con-

sidérée et une autre concernant l'état du gaz dans la section initiale du choc. Ainsi l'équation (26) n'est que l'une des formes explicites de la relation existant entre les trois variables :  $p/p_1$ ,  $T/T_1$  et  $T_3/T_1$ , les deux autres étant les suivants:

$$\frac{T}{T_1} = \left( \frac{p/p_1}{\psi\left(\frac{T_3}{T_1}\right)} \right)^{(k-1)/k} \quad (27)$$

et

$$\psi\left(\frac{T_3}{T_1}\right) = \frac{p/p_1}{(T/T_1)^{k/(k-1)}} \quad (28)$$

Le paramètre de la masse volumique

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{\rho}{\rho_6} \cdot \frac{\rho_6}{\rho_1}$$

d'où en application de (25), de (4<sub>ρ</sub>) et de (23)

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left( \frac{T}{T_1} \right)^{1/(k-1)} \psi\left(\frac{T_3}{T_1}\right) \quad (29)$$

inversement

$$\frac{T}{T_1} = \left( \frac{\rho/\rho_1}{\psi\left(\frac{T_3}{T_1}\right)} \right)^{(k-1)} \quad (30)$$

$$\psi\left(\frac{T_3}{T_1}\right) = \frac{\rho/\rho_1}{(T/T_1)^{1/(k-1)}} \quad (31)$$

L'équation de l'énergie (6) appliquée entre

- une section quelconque, arbitrairement choisie, du tronçon considérée, d'une part;

- et la section 6., d'autre part,

donne

$$v^2 + \frac{2k}{k-1} g R T = \frac{2k}{k-1} g R T_6$$

d'où , en tenant compte de (23)

$$v^2 = \frac{2k}{k-1} g R T_1 (1 - T/T_1)$$

d'où , en tenant compte de (7) , on tire

$$\left( \frac{v}{c_*} \right)^2 = \frac{k+1}{k-1} (1 - T/T_1) \quad (13_T)$$

montrant que cette dernière équation , déterminant la valeur du paramètre de la vitesse , valable pour le tronçon isentropique supérieur , conserve sa validité sur toute la longueur de l'écoulement passant par la tuyère .

En application de l'équation de continuité(5) on a

$$A^2 = \frac{c_*^2 A_*^2 \rho_*^2}{v^2 \rho^2}$$

d'où en tenant compte de (13<sub>T</sub>) et de (8<sub>o</sub>) on tire

$$\left( \frac{A}{A_*} \right)^2 = \frac{k-1 \left( \frac{2}{k+1} \right)^{2/(k-1)}}{k+1 (1-T/T_1)} \left( \frac{\rho_*}{\rho} \right)^{k/2}$$

soit en éliminant  $\rho/\rho_1$  entre cette dernière équation et (29)

$$\left( \frac{A}{A_*} \right)^2 = \frac{k-1 \left( \frac{2}{k+1} \right)^{2/(k-1)}}{k+1 (1-T/T_1)} \left( \frac{T_1}{T} \right)^{2/(k-1)} \psi^{-2} \left( \frac{T_3}{T_1} \right)$$

soit

$$\left( \frac{A}{A_*} \right)^2 = \psi \left( \frac{T}{T_1} \right) \psi^{-2} \left( \frac{T_3}{T_1} \right) \quad (32)$$

En élevant au carré , l'équation (26) devient

$$\left( \frac{P}{P_1} \right)^2 = \left( \frac{T}{T_1} \right)^{2k/(k-1)} \psi^2 \left( \frac{T_3}{T_1} \right) \quad (26')$$

On élimine  $T_3/T_1$  en formant le produit de (26') par (32) et en tirant la racine carré on obtient:

$$\frac{A}{A_*} \frac{P}{P_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{k/(k-1)} \varphi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{T}{T_1}\right) = \cancel{\psi}\left(\frac{T}{T_1}\right) \quad (33)$$

En procédant d'une manière analogue on élimine  $\psi(T_3/T_1)$  entre (29) et (32) et on tire :

$$\frac{A}{A_*} \frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{1/(k-1)} \varphi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{T}{T_1}\right) = W\left(\frac{T}{T_1}\right) \quad (34)$$

En résumant, on a dans une section quelconque arbitrairement choisie coupant la tranche isentropique de l'écoulement à l'aval du choc on a les relations paramétriques suivantes :

$$\frac{T_6}{T_1} = 1 \quad (23) \quad \frac{P_6}{P_1} = \frac{\rho_6}{\rho_1} = \psi\left(\frac{T_3}{T_1}\right) \quad (24)$$

$\frac{P}{P_1}$  définie par l'équation (26) voir page 27

$\frac{\rho}{\rho_1}$  définie par l'équation (29) voir page 28

$\frac{T}{T_1}$  définie par les équations (27) et (30) voir pages 28

$\left(\frac{v}{c_*}\right)^2$  définie par l'équation (13) voir page 46

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T}{T_1}\right) \psi^{-2}\left(\frac{T_3}{T_1}\right) \quad (32) \quad \text{voir page 29}$$

$$\frac{A}{A_*} \frac{P}{P_1} = \cancel{\psi}\left(\frac{T}{T_1}\right) \quad (33) \quad \frac{A}{A_*} \frac{\rho}{\rho_1} = W\left(\frac{T}{T_1}\right) \quad (34) \quad \text{voir si dessus}$$



REPRESENTATION GRAPHIQUE DES PARAMETRES

En vue de la représentation graphique des fonctions paramétriques résultant des considérations précédentes on a adopté un système de coordonnées à division logarithmique dans le sens vertical et à division logarithmique inverse dans le sens horizontal . On obtient une telle échelle en prenant sur les abscisses des longueurs représentant  $\log(1-X)$  et en inscrivant aux divisions ainsi obtenues la valeur de X . L'utilisation d'une telle échelle permet une discrimination aisée entre des valeurs à représenter très peues inférieure à l'unité . En effet la distance de 0,35 mm , représentant le rapport de 0,99/0,98 à l'échelle de l'imprimé utilisé, devient égale à 27 mm à l'échelle inverse, permettant une très grande précision dans la lecture des valeurs portées en abscisse , spécialement dans le secteur où une telle précision revête une importance particulière.

Cette représentation graphique a été réalisée pour les différents exposants isentropiques k cités au début du présent traité; et dont la méthode est la même, tel que:

-pour la tranche isentropique supérieure on a porté en ordonnées les valeurs des paramètres

$$p/p_1 \quad (4_p) \quad , \quad \rho/\rho_1 \quad (4_\rho) \quad , \quad (A/A_x)^2 = \varphi(T/T_1) \quad (12) \quad \text{et}$$

$$(v/c_x)^2 \quad (13) \quad \text{en fonction du paramètre de la température } (T/T_1) \text{ porté en abscisse;}$$

- pour les sections 4. et 6. on a porté en ordonnées

$$(v_4/c_x)^2 \quad (17) \quad , \quad (\rho_4/\rho_1) \quad (19) \quad , \quad (p_4/p_1) \quad (21) \quad (T_4/T_1) \quad (22)$$

$$(p_6/p_1) = (\rho_6/\rho_1) = \psi(T_3/T_1) \quad (24) \quad \text{en fonction du paramètre de la température } (T_3/T_1) \text{ , dans la section initiale du choc , porté en abscisse;}$$

-pour la tranche isentropique à l'aval du choc; en portant en ordonnées  $(A/A_*) (p/p_1) = \psi(T/T_1)$  (33) et  $(A/A_*) (\rho/\rho_1) = \mathcal{W}(T/T_1)$  (34) en fonction du paramètre de la température  $(T/T_1)$  porté en abscisse.

Les courbes représentant  $(1-p/p_1)$ ,  $(1-\rho/\rho_1)$ ,  $1-\mathcal{W}(T_3/T_1)$  et  $1-(T_4/T_1)$  sont destinées à faciliter une plus grande précision de la lecture de  $\psi(T_3/T_1)$  et de  $(T_4/T_1)$  dans la zone où leur valeur se rapproche à l'unité.

Pour déterminer toutes les caractéristiques de l'écoulement isentropique à l'amont du choc, ou, s'il n'y a pas, sur toute la longueur de la tuyère il suffit de connaître l'un des groupes composés de trois éléments suivants:

$$A, T, p \quad A, T, \rho \quad A, p, \rho \quad A, v, p \quad A, v, \rho \quad (35)$$

dont A et v dans la section \*, les autres: T, p ou  $\rho$  soit dans la section \*, soit dans le récipient amont, ou encore dans une section quelconque, arbitrairement choisie, mais alors il faut y connaître l'un des cinq paramètres

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 \quad \left(\frac{v}{c_*}\right)^2 \quad \frac{T}{T_1} \quad \frac{p}{p_1} \quad \frac{\rho}{\rho_1} \quad (36)$$

Lorsque l'écoulement se complique par la présence d'une onde de choc, la détermination complète de toutes ses caractéristiques nécessite la connaissance, dans une section à l'aval du choc, de l'une des couples de paramètres:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{A}{A_*}, \frac{p}{p_1} & \frac{A}{A_*}, \frac{\rho}{\rho_1} & \frac{A}{A_*}, \frac{T}{T_1} & \frac{A}{A_*}, \frac{v}{c_*} & \frac{T}{T_1}, \frac{p}{p_1} & \frac{T}{T_1}, \frac{\rho}{\rho_1} \\ & & & & & \\ & \frac{p}{p_1}, \frac{\rho}{\rho_1} & \frac{v}{c_*}, \frac{p}{p_1} & \frac{v}{c_*}, \frac{\rho}{\rho_1} & & \end{array} \quad (37)$$

et l'un des groupes (35) dans la même section dont A et v dans la section \* les autres: T p et ρ soit dans la section \* soit dans la section amont, ou encore dans une section quelconque, arbitrairement choisie, mais alors il faut y connaître l'un des cinq paramètres (36)

Exemple 2.- Dans la section I arbitrairement choisie à l'amont du retrécissement, coupant l'écoulement passant par la tuyère représentée par la figure 3. on a:

$$A_I = 1,4142 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \quad T_I = 287,5^\circ\text{K} \quad \rho_I = 0,90 \text{ Kg/m}^3$$

l'aire de la section 2. est

$$A_2 = A_* = 10^{-2} \text{ m}^2$$

Dans la section III arbitrairement choisie à l'aval de la zone du choc, on a:

$$A_{III} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \quad \text{et} \quad P_{III} = 77600 \text{ Pa}$$

Déterminer:

$$P_I \quad v_I \quad T_I \quad P_I \quad \rho_I \quad P_* \quad T_* \quad P_* \quad \rho_*$$

$$A_3 \quad v_3 \quad T_3 \quad P_3 \quad \rho_3 \quad v_4 \quad T_4 \quad P_4 \quad \rho_4$$

$$v_{III} \quad T_{III} \quad P_{III} \quad P_6 \quad \rho_6$$

Solution

On tire de (1)

$$P_I = \rho_I g R T_I = 0,90 \cdot 9,8 \cdot 29,3 \cdot 287,5 = 74 \, 297 \text{ Pa}$$

Avec les aires de sections  $A_I$  et  $A_*$  connues on peut constituer le paramètre:

$$\left( \frac{A_I}{A_*} \right)^2 = (1,414)^2 = 2$$

L'intersection de l'horizontale ainsi déterminée par la tranche subsonique de la courbe  $(T/T_1)$  donne l'abscisse représentant la valeur du paramètre de la température dans la section I.

$$\frac{T_I}{T_1} = 0,9589$$

(quatre chiffres significatifs aisément lisibles sur l'échelle des abscisses)

on lit sur la verticale ainsi déterminée, les valeurs de tous les autres paramètres concernant la section I.

$$\frac{p_I}{p_1} = 0,863 \quad \frac{\rho_I}{\rho_1} = 0,9005 \quad \left(\frac{v_I}{c_*}\right)^2 = 0,249$$

Avec les valeurs de  $T_I$  et  $\rho_I$  données à l'énoncé de la valeur de  $p_I$  déterminée en application de (1) et avec les paramètres ci-dessus déterminée on tire

$$T_1 = \frac{T_I}{(T_I/T_1)} = \frac{287,5}{0,9589} = 300^\circ\text{K}$$

$$p_1 = \frac{p_I}{(p_I/p_1)} = \frac{74297}{0,863} = 86100 \text{ Pa}$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_I}{(\rho_I/\rho_1)} = \frac{0,9000}{0,9005} = 0,9935 \text{ Kg/m}^3$$

La valeur de  $T_1$  ci-dessus déterminée permet de calculer en application de (7) la valeur de la vitesse sonique

$$c_* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_1}$$

en substituant dans cette formule la valeur de  $k = 1,4$  de  $g = 9,8$  et de  $R = 29,3$  ; on aura:



$$c_* = 18,3\sqrt{T_1} = 317\text{m/sec}$$

d'où en tenant compte du paramètre  $\gamma$  correspondant déjà déterminé on tire

$$v_I = c_*(v_I/c_*) = 317\sqrt{0,249} = 158,5$$

les valeurs des éléments correspondant à la section 2. (sonique  $*$ ) sont déterminées par  $A_*$   $c_*$   $T_1$   $p_1$   $\rho_1$  et les rapports critiques correspondant aux trois derniers:

$$A_* = 10^{-2} \text{ m}^2 \quad (\text{donné à l'énoncé})$$

$$c_* = 317 \text{ m/sec} \quad (\text{déterminé ci dessus})$$

$$T_* = \frac{2T_1}{k+1} = 0,8333T_1 = 0,8333 \times 300 = 250^\circ\text{K}$$

$$p_* = p_1 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{k/(k-1)} = 0,528p_1 = 0,528 \times 86100 = 45500 \text{ Pa}$$

$$\rho_* = \rho_1 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)} = 0,634\rho_1 = 0,634 \times 0,9935 = 0,63 \text{ kg/m}^3$$

En connaissant l'aire de la section III et la pression dans cette même section on peut former les paramètres

$$\frac{A_{III}}{A_*} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{p_{III}}{p_1} = \frac{77\ 600}{86\ 100} = 0,899$$

ainsi que leur produit

$$\frac{A_{III}}{A_*} \cdot \frac{p_{III}}{p_1} = 2 \times 0,899 = 1,798 = \frac{\rho}{\rho_*} (T_{III}/T_1)$$

le point d'intersection de l'horizontale déterminée par l'ordonnée 1,798 définit l'abscisse représentant la valeur du paramètre de température

$$T_{III}/T_1 = 0,9804$$

permettant de déterminer

$$T_{III} = T_1 (T_{III}/T_1) = 300 \times 0,9804 = 294,12^\circ\text{K}$$

d'où on tire en application de (1)

$$\rho_{III} = \frac{P_{III}}{gRT_{III}} = \frac{77\ 600}{9,8 \times 29,3 \times 294,12} = 0919 \text{ kg/m}^3$$

d'autre part on lit sur la verticale de  $T_{III}/T_1$

$$\varphi(T_{III}/T_1) = 3,73$$

et on tire de (32)

$$\psi^{-2}\left(\frac{T_3}{T_1}\right) = \frac{(A_{III}/A_*)^2}{\varphi(T_{III}/T_1)} = \frac{4}{3,73} = 1,075$$

Le point d'intersection de l'horizontale définie par l'ordonnée 1,075 détermine l'abscisse représentant la valeur du paramètre de température  $T_3/T_1$  valable dans la section amont de la zone du choc

$$T_3/T_1 = 0,7285$$

montrant, comme il est bien évident, que cette section se trouve dans la zone supersonique. On lit sur la verticale déterminée par l'abscisse 0,7285 les valeurs des paramètres  $\gamma$  correspondants:

$$\left(\frac{v_3}{c_*}\right)^2 = 1,63 \quad \frac{p_3}{p_1} = 0,33 \quad \frac{\rho_3}{\rho_1} = 0,453 \quad \left(\frac{A_3}{A_*}\right)^2 = 1,195$$

ce qui permet de déterminer:

$$v_3 = 317 \cdot 1,63 = 405 \text{ m/sec}$$

$$p_3 = 86100 \times 0,33 = 28400 \text{ Pa}$$

$$\rho_3 = 0,9935 \times 0,453 = 0,449 \text{ kg/m}^3$$

$$A_3 = 1,195 \cdot 10^{-2} = 1,094 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-2}$$

on lit sur la même verticale, déterminée par  $T_3/T_1 = 0,7285$  les paramètres

et  $\left(\frac{v_4}{c_*}\right)^2 = 0,612$      $\frac{p_4}{p_1} = 0,659$      $\frac{\rho_4}{\rho_1} = 0,738$      $\frac{T_4}{T_1} = 0,8975$

$$\frac{p_6}{p_1} = \frac{\rho_6}{\rho_1} = \psi\left(\frac{T_3}{T_1}\right) = 0,968$$

avec les valeurs ainsi trouvées de ces paramètres on a

$$v_4 = 317 \cdot 0,612 = 248 \text{ m/sec}$$

$$p_4 = 0,659 \times 86100 = 56750 \text{ Pa}$$

$$\rho_4 = 0,738 \times 0,9935 = 0,735 \text{ kg/m}^3$$

$$T_4 = 0,8975 \times 300 = 269,25 \text{ °K}$$

$$p_6 = 0,968 \times 86100 = 83400 \text{ Pa}$$

$$\rho_6 = 0,968 \times 0,9935 = 0,962 \text{ kg/m}^3$$

CAS LIMITE

La zone du choc reculant vers l'amont (voir figure 4. ) atteint la section 2.

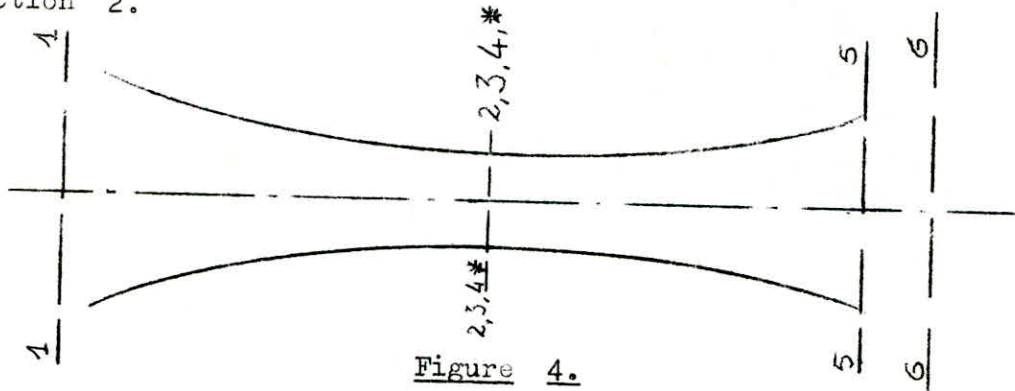


Figure 4.

En conséquence les sections 2., 3., 4. coïncident. On a:

$$T_4 = T_3 = T_* \Rightarrow (T_3/T_1) = \frac{2}{k+1} \Rightarrow p_6/p_1 = \rho_6/\rho_1 = 1$$

et dans la section terminale on a en application de (32)

$$\left(\frac{A_5}{A_*}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_5'}{T_1}\right) \quad (38)$$

L'abscisse du point d'intersection de la tranche subsonique de la courbe  $\varphi(T/T_1)$  par l'horizontale déterminée par l'ordonnée  $(A_5/A_2)^2$  définit la valeur de  $T_5'/T_1$  du paramètre de température correspondant à ce cas limite. La connaissance de ce paramètre permet la lecture directe des paramètres

$$\left(\frac{v_5'}{c_*}\right)^2 \quad \frac{p_5'}{p_1} \quad \frac{\rho_5'}{\rho_1}$$

correspondant à ce premier cas limite.

2.- Dans un second cas limite la zone du choc, se déplaçant vers l'aval, atteint la section terminale 5. de la tuyère. Par conséquent la zone du choc délimitée par les sections 3. et 4. très peu distantes l'une de l'autre, coïncident avec la section 5.



Immédiatement à l'amont du choc on a les paramètres:

$$\frac{T''_{53}}{T_1} = \frac{T_3}{T_1}, \quad \frac{p''_{53}}{p_1} = \frac{p_3}{p_1}, \quad \frac{\rho''_{53}}{\rho_1} = \frac{\rho_3}{\rho_1}, \quad \left(\frac{v''_{53}}{c_*}\right)^2 = \left(\frac{v_3}{c_*}\right)^2$$

Immédiatement à l'aval du choc on a les paramètres:

$$\frac{T''_{54}}{T_1} = \frac{T_4}{T_1}, \quad \frac{p''_{54}}{p_1} = \frac{p_4}{p_1}, \quad \frac{\rho''_{54}}{\rho_1} = \frac{\rho_4}{\rho_1} \text{ et } \left(\frac{v''_{54}}{c_*}\right)^2 = \left(\frac{v_4}{c_*}\right)^2$$

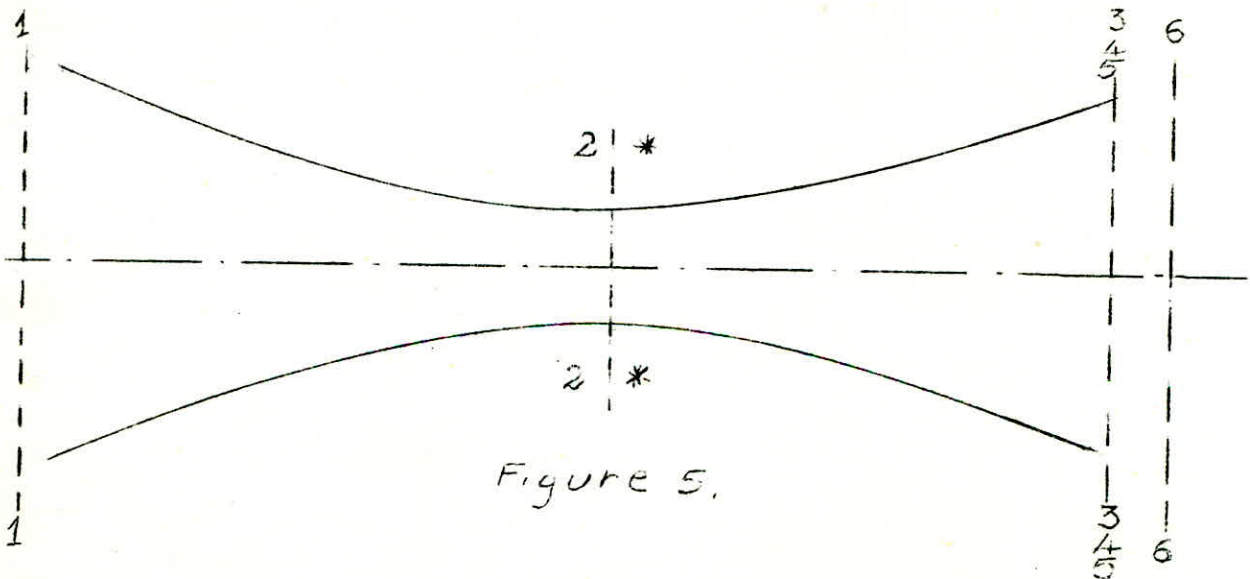
en application de (12<sub>T</sub>) on peut écrire:

$$\left(\frac{A_5}{A_*}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T''_{53}}{T_1}\right)$$

l'abscisse du point d'intersection de la tranche supersonique de la courbe  $\varphi(T/T_1)$  par l'horizontale déterminée par l'ordonnée  $(A_5/A_*)^2$  définit la valeur  $T''_{53}/T_1$  du paramètre de température correspondant à ce cas limite. La connaissance de ce paramètre définit la verticale permettant la lecture directe des paramètres

$$\left(\frac{T''_{54}}{T_1}\right), \left(\frac{v''_{53}}{c_*}\right)^2, \left(\frac{v'_{54}}{c_*}\right)^2, \left(\frac{p''_{53}}{p_1}\right), \left(\frac{p'_{54}}{p_1}\right), \left(\frac{\rho''_{53}}{\rho_1}\right), \left(\frac{\rho'_{54}}{\rho_1}\right)$$

correspondant à ce second cas limite. (voir figure 5.)



CLASSEMENT DES ECOULEMENTS CI - DESSUS ANALYSES.

C'est l'étude des cas limites qui permet de classer les écoulements faisant objet du présent traité en 4 groupes.

1.- Dans le cas où

$$T_5/T_1 > T'_5/T_1 \Rightarrow p_5/p_1 > p'_5/p_1 \Rightarrow \rho_5/\rho_1 > \rho'_5/\rho_1$$

l'écoulement reste subsonique et isentropique sur toute la longueur de la tuyère et c'est par l'introduction des valeurs hypothétiques  $c_{*x}$  et  $A_{*x}$  que l'utilisation du diagramme paramétrique peut être étendue à l'analyse d'un tel phénomène déterminé

- et par les conditions à l'amont,
- et par les conditions à l'aval de la tuyère

2.- Dans les cas où:

$$T_5/T_1 = T'_5/T_1 \Rightarrow p_5/p_1 = p'_5/p_1 \Rightarrow \rho_5/\rho_1 = \rho'_5/\rho_1$$

nous sommes en présence du premier cas limite. L'écoulement ne devient sonique sur la distance infinitésimale correspondant au passage par le retréssissement et ne donnant pas lieu à une onde de choc, reste isentropique sur toute la longueur de la tuyère.

3.- Dans le cas où:

$$T'_5/T_1 > T_5/T_1 > T''_{54}/T_1 \Rightarrow p'_5/p_1 > p_5/p_1 > p''_{54}/p_1 \quad \text{et}$$

$$\rho'_5/\rho_1 > \rho_5/\rho_1 > \rho''_{54}/\rho_1$$

l'écoulement reste subsonique à l'amont de la section retrécie, devient sonique dans celle-ci pour se transformer aussitôt en supersonique immédiatement à l'aval de cette même section. cet écoulement supersonique va en accélérant jusqu'à atteindre la section 3. pour changer, en produisant une onde de choc, en subsonique, décélérant jusqu'à la sortie de la tuyère. C'est ce cas géné-

ral, qui a fait l'objet des considérations détaillées du présent traité. Les caractéristiques d'un tel écoulement à l'amont de la zone du choc ne dépendent que des conditions amont, alors que la section de la zone du choc et les caractéristiques de la tranche à l'aval de celle-ci sont influencées par les conditions existant à l'aval de la tuyère.

4.- Dans le cas où :

$$T_{54}''/T_1 \geq T_5/T_1 \Rightarrow p_{54}''/p_1 \geq p_5/p_1 \Rightarrow \rho_{54}''/\rho_1 \geq \rho_5/\rho_1$$

l'écoulement, subsonique à l'amont du retrécissement, y devient sonique, et supersonique à l'aval de celle-ci, conservant cette nature de son régime jusqu'à la sortie de la tuyère. Un tel écoulement reste isentropique sur toute la longueur de son parcours et ne dépend que des conditions existant à l'amont de la tuyère

Exemple 3. Un écoulement d'azote passant par la conduite représentée par la figure 6. est déterminé par la pression  $p_1 = 10^5$  Pa et par la température absolue  $T_1 = 293^\circ\text{K}$  du gaz dans le réservoir à l'amont, d'une part ; et par le débit en masse  $\dot{m} = 1,887$  kg/sec. ( $R = 30,3$ ,  $A_2 = 10^{-2}$  m<sup>2</sup>) déterminer :

- la vitesse  $v_a$ , la température absolue  $T_a$ , la masse volumique  $\rho_a$  dans la section  $A_a = 1,4142 \cdot 10^{-2}$  m<sup>2</sup>

- et l'aire de la section  $A_b$  où la vitesse devient  $v_b = 79,5$  m/sec.

### Solution

En application de (7) on a

$$c_* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_1} = 18,6 \sqrt{T_1} = 318 \text{ m/sec.}$$

et en application de (1)

$$\rho_1 = \frac{p_1}{gRT_1} = \frac{10^5}{9,8 \times 30,3 \times 293} = 1,149 \text{ kg/m}^3$$

On lit dans le diagramme la valeur critique du paramètre de la masse volumique:

$$\frac{\rho_*}{\rho_1} = 0,6336 \Rightarrow \rho_* = 0,6336 \times 1,149 = 0,728$$

En application de l'équation de continuité on a:

$$A_* = \frac{\dot{m}}{\rho_* c_*} = \frac{1,887}{0,728 \times 318} = 81,6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

On constate que  $A_* < A_2 \Rightarrow$  l'écoulement reste subsonique sur toute la longueur de son parcours.

On forme le paramètre

$$\left( \frac{A_a}{A_*} \right)^2 = \left( \frac{1,4142}{0,8160} \right)^2 = 3,005$$

L'abscisse du point d'intersection de l'horizontale représentant le lieu géométrique de l'ensemble des points ayant pour ordonnée 3,005 par la tranche subsonique de la courbe  $\varphi(T/T_1)$  définit la valeur du paramètre de la température absolue dans la section a.

$$\frac{T_a}{T_1} = 0,9748 \Rightarrow \left( \frac{v_a}{c_*} \right)^2 = 0,152 \Rightarrow \frac{p_a}{p_1} = 0,9142 \Rightarrow$$

$$\frac{\rho_a}{\rho_1} = 0,9381$$

d'où:

$$T_a = 0,9748 \times 293 = 285,62 \text{ °K}$$

$$v_a = 318 \sqrt{0,152} = 318 \times 0,3895 = 123,86 \text{ m/sec}$$



$$p_a = 0,9142 \times 10^5$$

$$\rho_a = 0,9381 \times 1,149 = 1,079 \text{ kg/m}^3$$

La vitesse  $v_b = 79,5 \text{ m/sec}$ , détermine le paramètre:

$$\left(\frac{v_b}{c_*}\right)^2 = \left(\frac{79,5}{318}\right)^2 = 0,0625 \implies \left(\frac{A_b}{A_*}\right)^2 = 6,77$$

$$\text{d'où } A_b = 81,6 \cdot 10^{-4} \cdot 6,77 = 2,1216 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

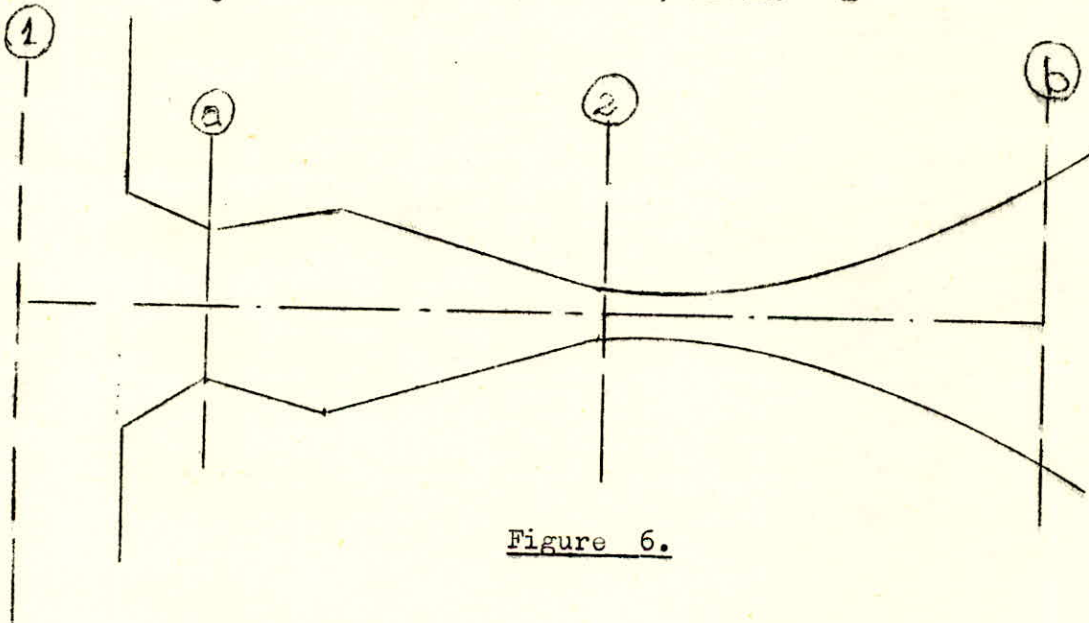


Figure 6.

REMARQUE: L'expérience montre que,  $k$  diminue quand  $T$  augmente et compte tenu des variations de  $k$  en fonction de  $T$ , les abaques correspondants aux données

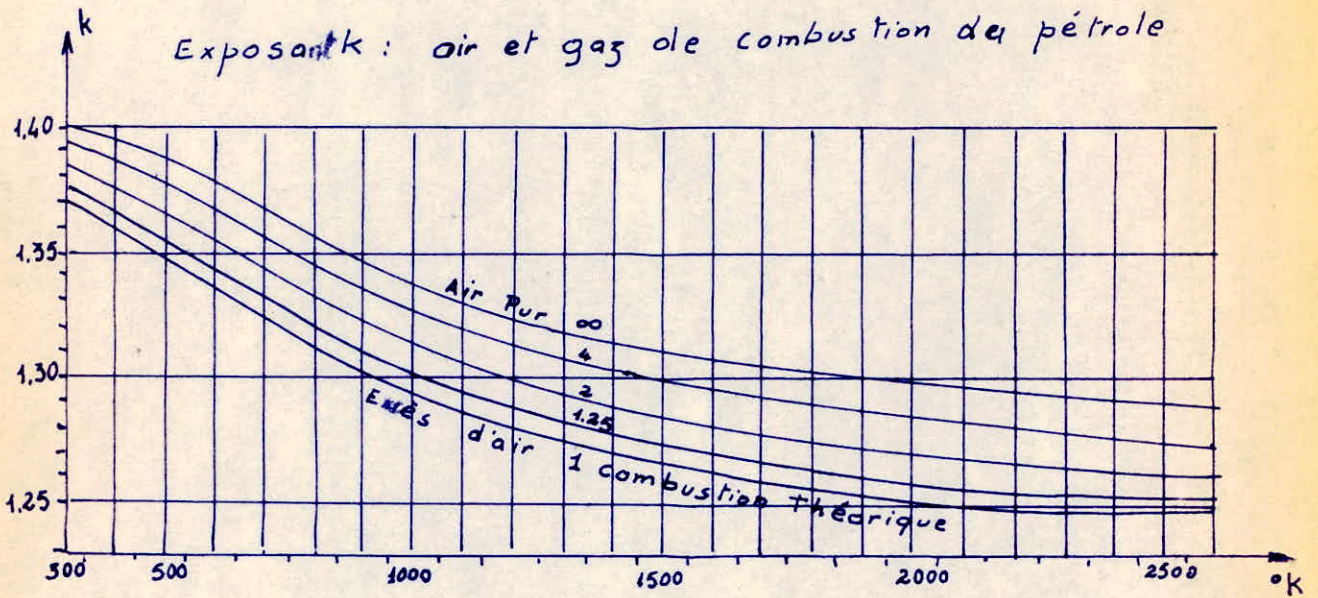
$$k = 1,31$$

$$k = 1,28$$

$$k = 1,26$$

pourront être utilisés au lieu de  $k = 1,4$  pour le cas où la température est élevée à l'entrée de la tuyère (voir variation de  $k$  en fonction de  $T$  représenté par le diagramme ci-après.)

Exposant  $k$  : air et gaz de combustion de pétrole



EQUATIONS UTILISEES POUR L'ETABLISSEMENT

DES ABAQUES

$$\varphi \left( \frac{T}{T_1} \right) = \left( \frac{A}{A_*} \right)^2 = \frac{\frac{k-1}{k+1} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{2/(k-1)}}{\left( \frac{T}{T_1} \right)^{2/(k-1)} - \left( \frac{T}{T_1} \right)^{(k+1)/(k-1)}} \quad (12_T)$$

$$\left( \frac{v}{c_*} \right)^2 = \frac{k+1}{k-1} \left( 1 - \frac{T}{T_1} \right) \quad (13_T)$$

$$\frac{p}{p_1} = \left( \frac{T}{T_1} \right)^{k/(k-1)} \quad (4_p)$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left( \frac{T}{T_1} \right)^{1/(k-1)} \quad (4_\rho)$$

$$\left( \frac{v_4}{c_*} \right)^2 = \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{1 - \frac{T_3}{T_1}} \quad (17_T)$$

$$\frac{\rho_4}{\rho_1} = \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{1/(k-1)} \frac{k+1}{k-1} \left( 1 - \frac{T_3}{T_1} \right) \quad (19_T)$$

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{4k}{k^2 - 1} \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{1/(k-1)} - \frac{k+1}{k-1} \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k-1)} \quad (21_T)$$

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{\frac{4k}{(k+1)^2} - \frac{T_3}{T_1}}{1 - \frac{T_3}{T_1}} \quad (22_T)$$

$$\psi \left( \frac{T_3}{T_1} \right) = \frac{p_6}{p_1} = \frac{\left[ \frac{4k}{(k^2-1)} \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{1/(k-1)} - \frac{k+1}{k-1} \left( \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k-1)} \right] \left( 1 - \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k-1)}}{\left( \frac{4k}{(k+1)^2} - \frac{T_3}{T_1} \right)^{k/(k-1)}} \quad (24_T)$$

$$\mathcal{F} \left( \frac{T}{T_1} \right) = \frac{A}{A_*} \frac{P}{P_1} = \left( \frac{T}{T_1} \right)^{k/(k-1)} \frac{1}{2} \varphi \left( \frac{T}{T_1} \right) \quad (33)$$

$$\mathcal{W} \left( \frac{T}{T_1} \right) = \frac{A}{A_*} \frac{\rho}{\rho_1} = \left( \frac{T}{T_1} \right)^{1/(k-1)} \frac{1}{2} \varphi \left( \frac{T}{T_1} \right) \quad (34)$$

$$\Psi^{-2} \left( \frac{T_3}{T_1} \right) \text{ correspondant à la formule (32)}$$

Ces formules ont été transformées en langage fortran dans cinq programmes (4 pour la partie supersonique et un seul pour la partie subsonique), vu que la mémoire de la machine ne peut tout faire en un seul programme correspondant à un des exposants isentropiques

Etablissement des différents programmes

a) Transformation des différentes caractéristiques des formules en langage fortran

k	devi nt	AK
$\frac{1}{k-1}$	"	AK1 = 1./(AK-1.)
$\frac{k}{k-1}$	"	AK2 = AK*AK1
$\frac{k+1}{k-1}$	"	AK3 = (AK+1.)*AK1
$\frac{4k}{(k+1)^2}$	"	AK4 = 4*AK/(AK+1.)*2
$\frac{4k}{(k^2-1)}$	"	AK5 = 4*AK/(AK*2-1.)
$\frac{2}{(k-1)}$	"	AK6 = 2*AK1
$\frac{2}{(k+1)}$	"	AK7 = 2./(AK+1.)



$\varphi\left(\frac{T}{T_1}\right)$	devient	BE
$\left(\frac{v}{c_*}\right)^2$	"	AB
$\frac{T_4}{T_1}$	"	GH
$1 - \frac{T_4}{T_1}$	"	HG
$\psi\left(\frac{T_3}{T_1}\right)$	"	FA
$1 - \psi\left(\frac{T_3}{T_1}\right)$	"	AF
$\psi^{-2}\left(\frac{T_3}{T_1}\right)$	"	TO
$\frac{\rho_4}{\rho_1}$	"	AL
$\frac{p_4}{p_1}$	"	SA
$\left(\frac{v_4}{c_*}\right)^2$	"	TUN
$\frac{\rho}{\rho_1}$	"	EF
$1 - \frac{\rho}{\rho_1}$	"	FE
$\frac{p}{p_1}$	"	FG
$1 - \frac{p}{p_1}$	"	GF

$\frac{T}{T_1}$  devient QT

b) Programmes permettant d'établir les abaques paramétriques (pour

1- Programme k=1,4)

DIMENSION FA(750),AF(750),TO(750)

AK=1.4

AK1 = 1./(AK-1.)

AK2 = AK\*AK1

AK3 = (AK+1.)\*AK1

AK4 = 4.\*AK/(AK+1.)\*2

AK5 = 4.\*AK/(AK\*2-1.)

QT = 0.1

I = 1

70 FA(I) = (AK5\*QT\*\*AK1-AK3\*QT\*\*AK2)\*(1.-QT)\*\*AK2/(AK4-QT)\*\*AK2

AF(I) = 1.-FA(I)

TO(I) = 1./FA(I)\*\*2

I = I+1

IF(I-734)20,20,25

20 QT = QT+0.001

GO TO 70

25 WRITE(3,1)(FA(I),I=1,734)

WRITE(3,2)(AF(I),I=1,734)

WRITE(3,3)(TO(I),I=1,734)

1 FORMAT(1H ,10(4X,F7.5))

2 FORMAT(1H ,5(4X,F10.5))

3 FORMAT(1H ,5(4X,F15.3))

2-Programme

DIMENSION GH(750),HG(750),TUN(750)

AK =1.4

AK1 = 1./(AK-1.)

AK2 = AK\*AK1

AK3 = (AK+1.)\*AK1

AK4 = 4.\*AK/(AK+1.)\*AK2

AK5 = 4.\*AK/(AK\*\*2-1.)

QT = 0.1

I =1

30 GH(I) = (AK4-QT)/(1.-QT)

HG(I) = 1.-GH(I)

TUN(I) = (1./AK3)\*(1.-QT)

I =I+1

IF(I-734)10,10,15

10 QT = QT+0.001

GO TO 30

15 WRITE(3,1)(GH(I),I=1,734)

WRITE(3,2)(HG(I),I=1,734)

WRITE(3,3)(TUN(I),I=1,734)

1 FORMAT(1H ,10(4X,F7.5))

2 FORMAT(1H ,10(4X,F8.6))

3 FORMAT(1H ,10(4X,F9.7))

3-Programme

```
DIMENSION BE(750),AB(750),EF(750)

AK = 1.4

AK1 = 1./(AK-1.)

AK3 = (AK+1.)*AK1

AK6 = 2.*AK1

AK7 = 2./(AK+1.)

QT = 0.1

I = 1

90 BE(I) = (1./AK3)*AK7**AK6/(QT**AK6 - QT**AK3)

AB(I) = AK3*(1.-QT)

EF(I) = QT**AK1

I = I+1

IF(I-734)12,12,13

12 QT = QT+0,001

GO TO 90

13 WRITE(3,1)(BE(I),I=1,734)

WRITE(3,2)(AB(I),I=1,734)

WRITE(3,3)(EF(I),I=1,734)

1 FORMAT(1H ,10(4X,F7.4))

2 FORMAT(1H ,5(4X,F15.2))

3 FORMAT(1H ,10(4X,F8.6))
```



4-Programme

DIMENSION AL(750),SA(750),FG(750)

AK=1.4

AK1 = 1./(AK-1)

AK2 = AK\*AK1

AK3 = (AK+1.)\*AK1

AK5 = 4.\*AK/(AK\*\*2-1.)

QT = 0.1

I = 1

110 AL(I) =(QT\*\*AK1)\*AK3\*(1.-QT)

SA(I) = (QT\*\*AK1)\*AK5 - AK3\*QT\*\*AK2

FG(I) = QT\*\*AK2

I = I+1

IF(I-734)12,12,13

12 QT = QT+0.001

GO TO 110

13 WRITE (3,4)(AL(I),I = 1,734)

WRITE (3,5)(SA(I),I = 1,734)

WRITE((3,6)(FG(I),I = 1,734)

4 FORMAT(1H ,10(4X,F7.5))

5 FORMAT(1H ,10(4X,F7.5))

6 FORMAT(1H ,10(4X,F7.5))

5-Programme

```
DIMENSION AB(180),BE(180),EF(180),FE(180),FG(180),GF(180),HA(180),
1,ZO(180)
AK = 1.4
AK1 = 1./(AK-1.)
AK2 = AK*AK1
AK3 = (AK+1.)*AK1
AK6 = 2.*AK1
AK7 = 2./(AK+1.)
QT = 0.833
I = 1
50 AB(I) = AK3*(1.-QT)
BE(I) = AK3*AK7**AK6/QT**AK6-QT**AK3
EF(I) = QT**AK1
FE(I) = 1.-EF(I)
FG(I) = QT**AK2
GF(I) = 1.-FG(I)
HA(I) = EF(I)*BE(I)**0.5
ZO(I) = FG(I)*BE(I)**0.5
I = I+1
IF(I-167)15,15,16
15 QT =QT+0.001
GO TO 50
16 write(3,1)(AB(I),I = 1,167)
WRITE(3,2)(BE(I),I = 1,167)
WRITE(3,3)(EF(I),I = 1,167)
WRITE(3,4)(FE(I),I = 1,167)
WRITE(3,5)(FG(I),I =1,167)
WRITE(3,6)(GF(I),I = 1,167)
WRITE(3,7)(HA(I),I = 1,167)
WRITE(3,8)(ZO(I),I = 1,167)
1 FORMAT(1H ,10(4X,F8.4))
2 FORMAT(1H ,10(4X,F7.4))
```

```
3 FORMAT(1H ,10(4X,F7.4))
4 FORMAT(1H ,10(4X,F7.4))
5 FORMAT(1H ,10(4X,F7.4))
6 FORMAT(1H ,10(4X,F7.5))
7 FORMAT(1H ,10(4X,F7.4))
8 FORMAT(1H ,10(4X,F7.4))
```

o o o o o o o o o

Pour écrire les programmes correspondants aux autres exposants isentropiques il suffira de lire les deux tableaux suivants qui donnent les chiffres à changer dans les différentes cartes.

Le premier tableau est valable pour les quatre premiers programmes, et le deuxième tableau est valable pour le cinquième programme.

1<sup>a</sup>) Tableau

k	1,40	1,66	1,31	1,28	1,26
A	750	660	770	780	790
C	734	653	672	778	785

2<sup>o</sup>) Tableau

k	1,40	1,66	1,31	1,28	1,26
A	180	250	150	140	120
B	0,833	0,752	0,861	0,877	0,884
C	167	248	139	123	116

A correspondant aux cartes            DIMENSION  
k correspondant aux cartes            AK  
B            "            "            "            QT  
C            "            "            "            IF et WRITE



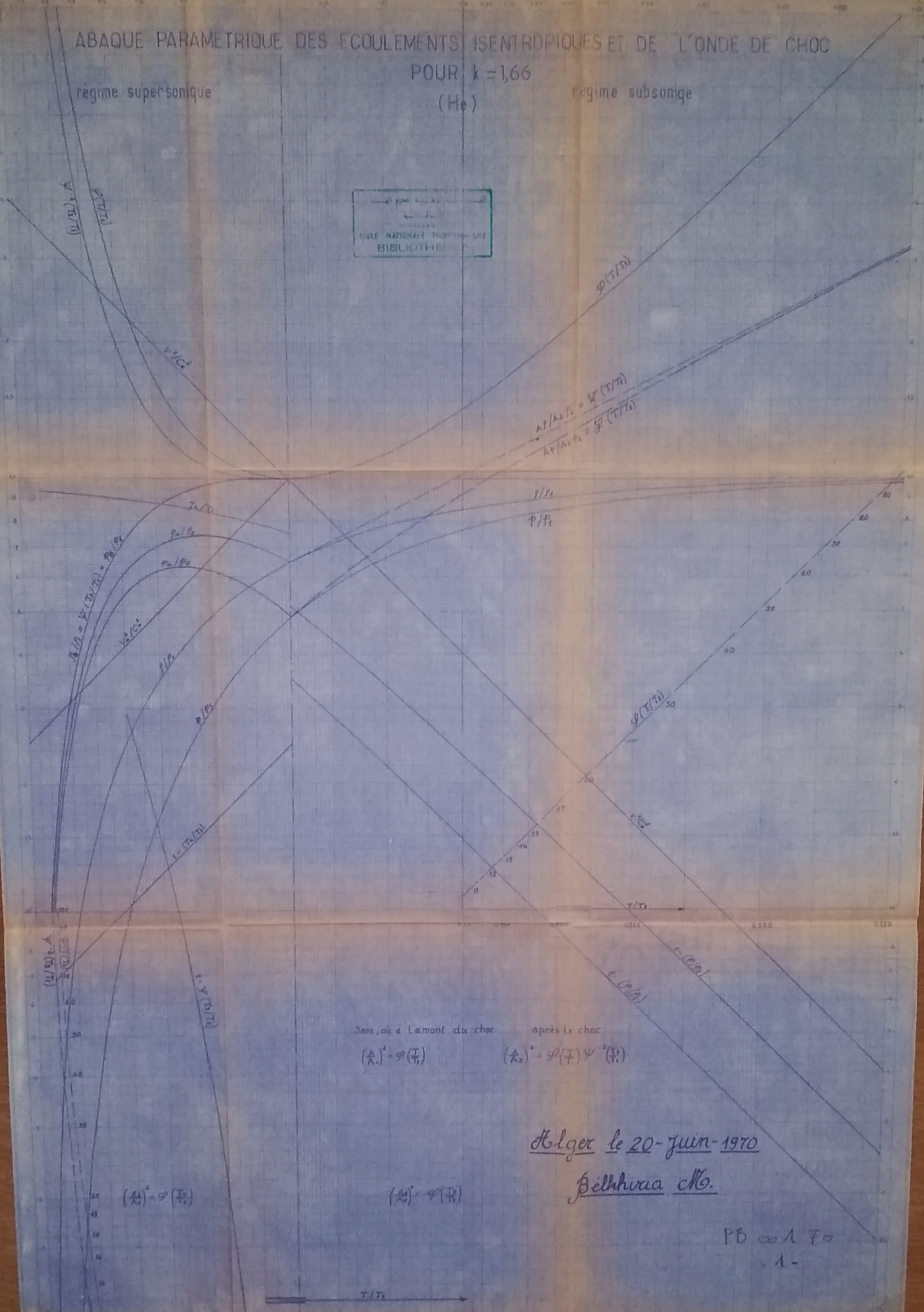
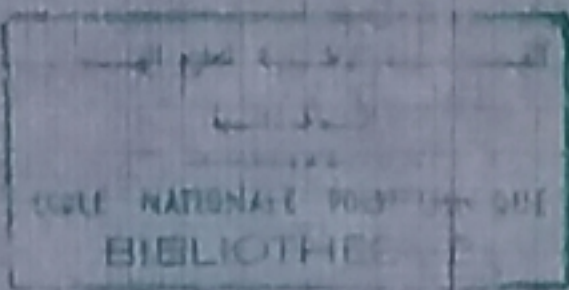
ABAQUE PARAMETRIQUE DES ECOULEMENTS ISENTROPIQUES ET DE L'ONDE DE CHOC

POUR  $k = 1,66$

(He)

regime supersonique

regime subsonique



avant, ou à l'amont du choc

après le choc

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \psi^{-2}\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Algex le 20-juin-1970

Belkhiria No.

PB ∞ 1 T0

- 1 -

T/T0



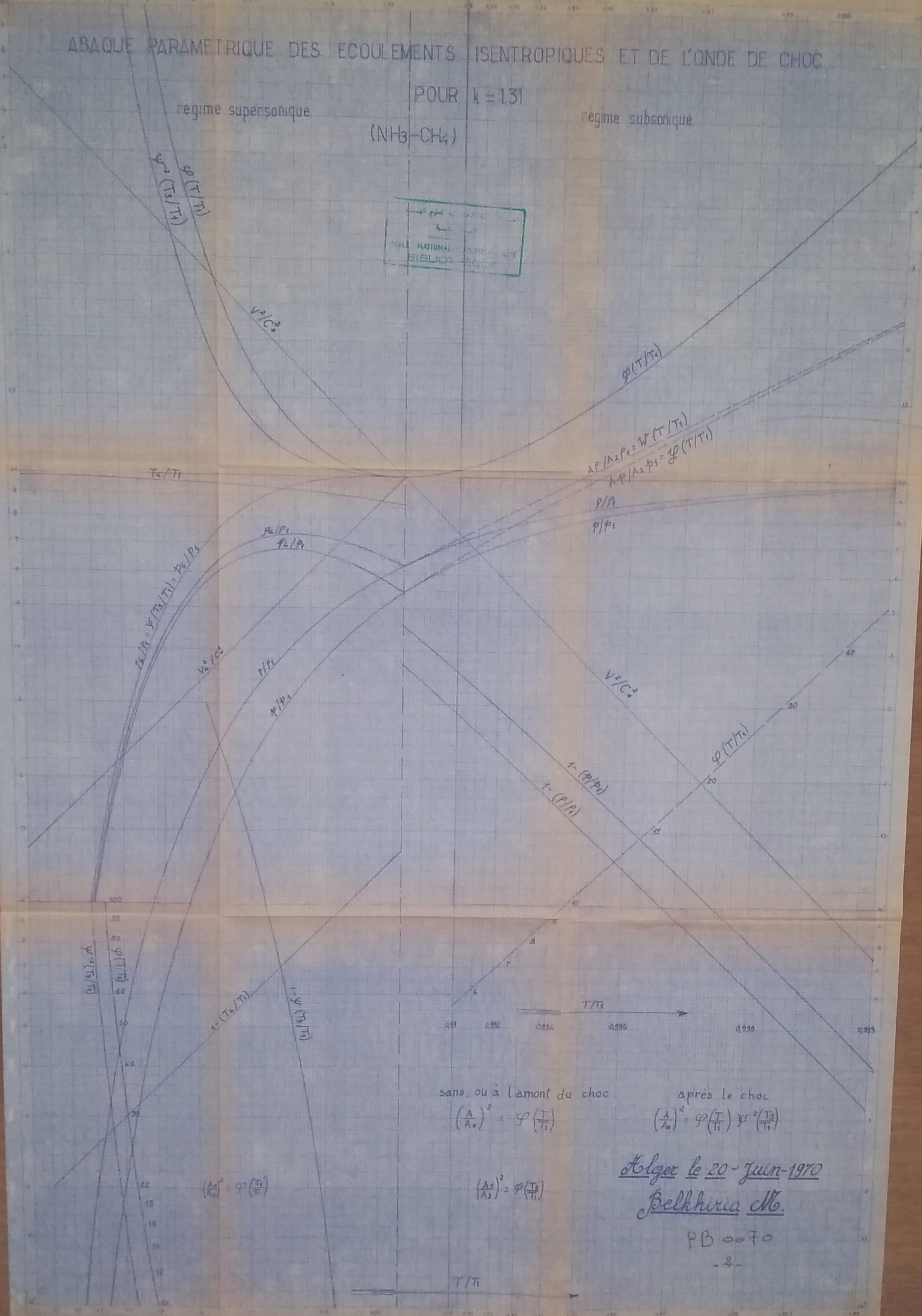
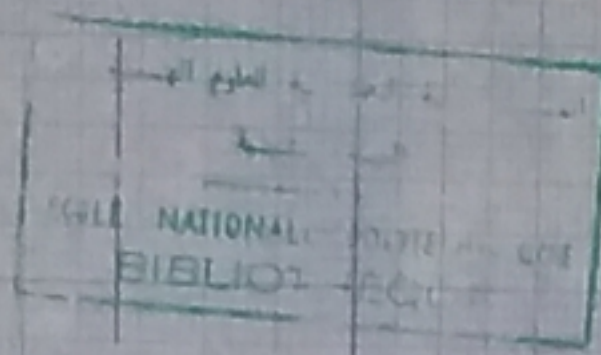
# ABAQUE PARAMETRIQUE DES ECOULEMENTS ISENTROPIQUES ET DE L'ONDE DE CHOC

POUR  $k = 1.31$

(NH<sub>3</sub>-CH<sub>4</sub>)

régime supersonique

régime subsonique



sans, ou à l'amont du choc

$$\left(\frac{A}{A^*}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T}{T_1}\right)$$

après le choc

$$\left(\frac{A}{A_2}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T}{T_1}\right) \psi^2\left(\frac{T_3}{T_1}\right)$$

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_3}{T_1}\right)$$

Alger le 20-Juin-1970

Belkhiria M.

PB 0070



# ABaque PARAMETRIQUE DES ECOULEMENTS ISENTROPIQUES ET DE L'ONDE DE CHOC

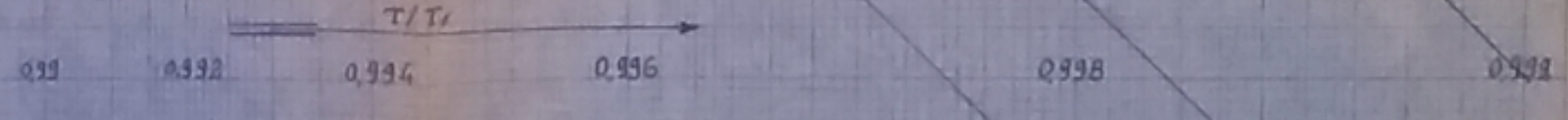
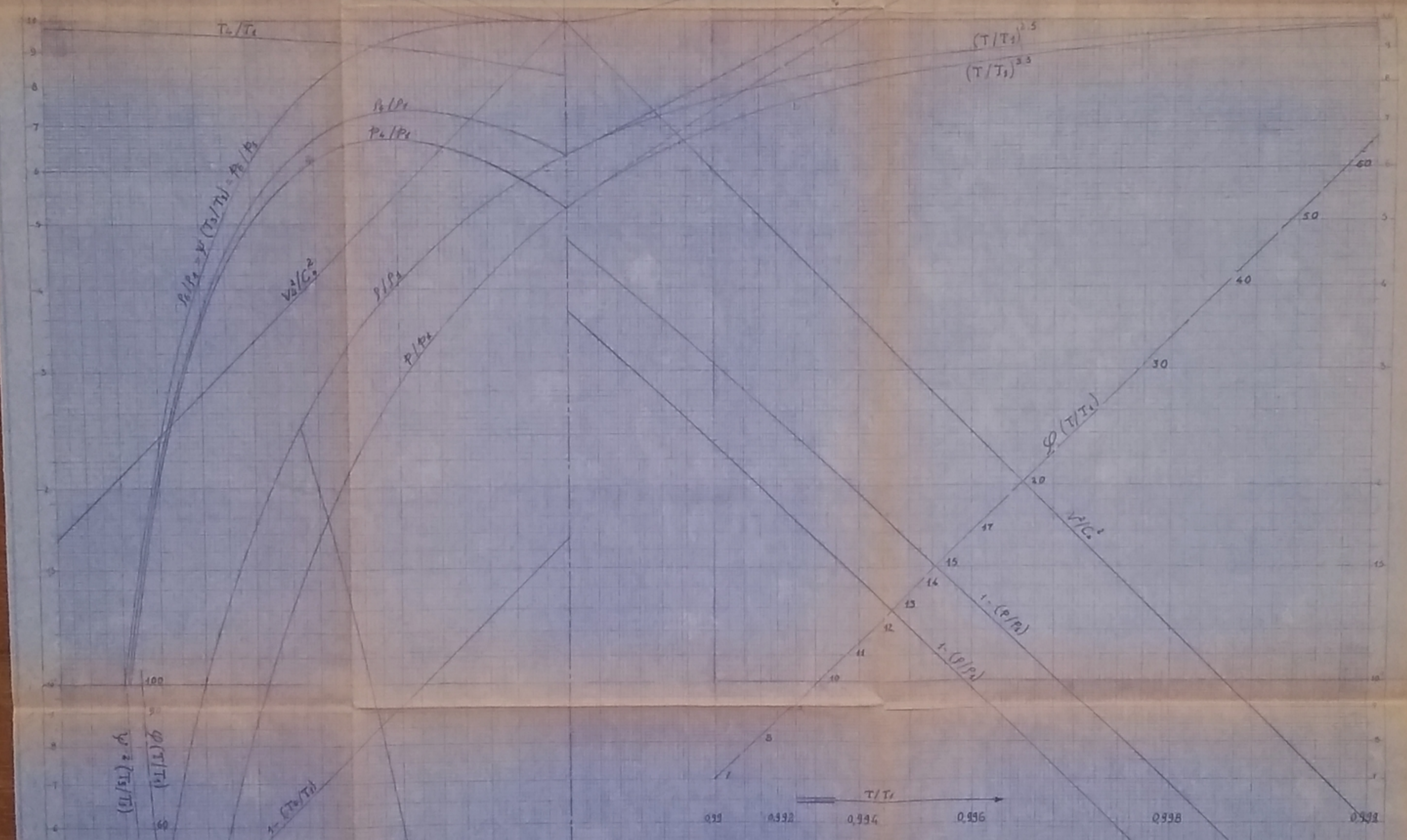
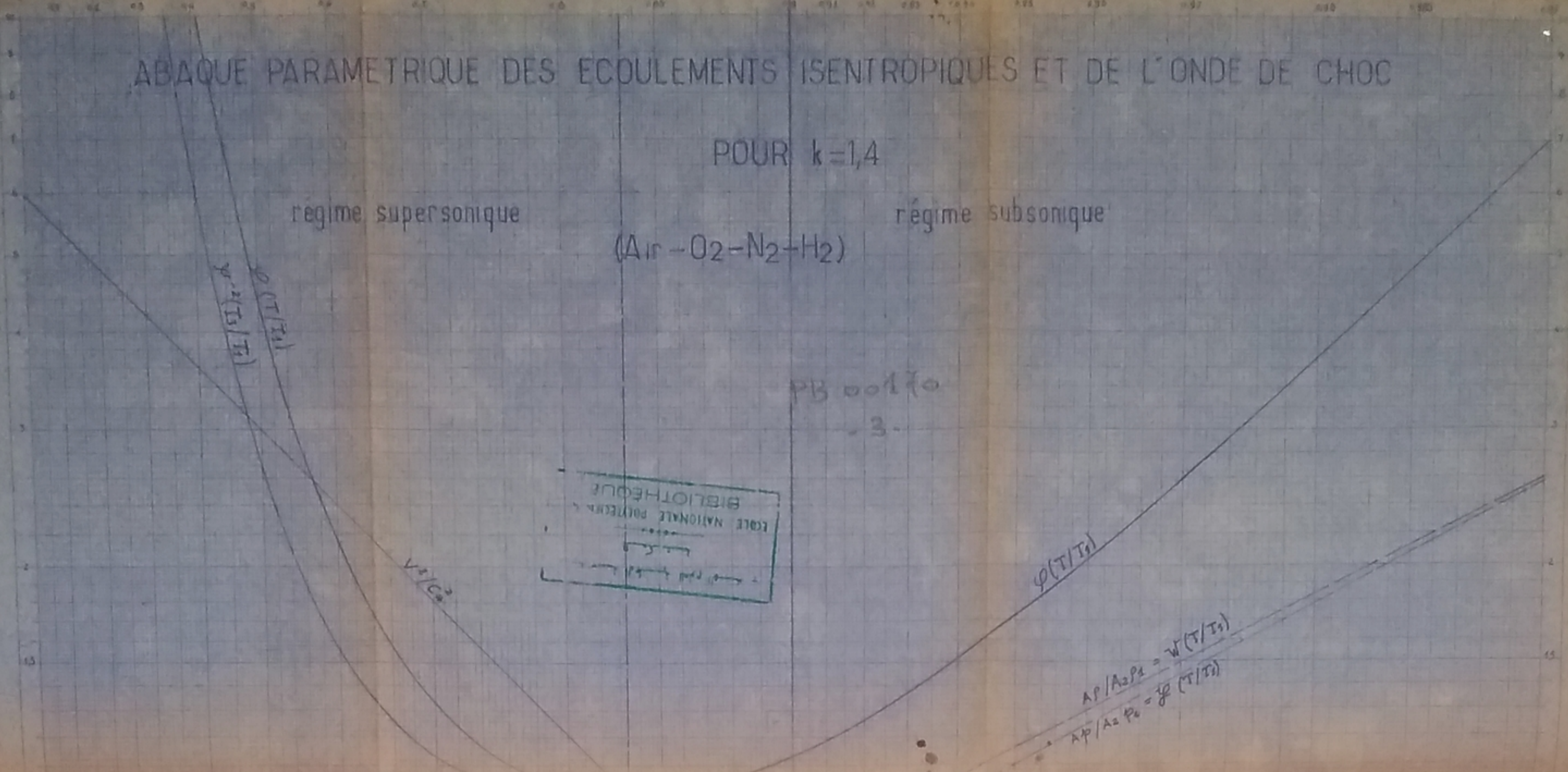
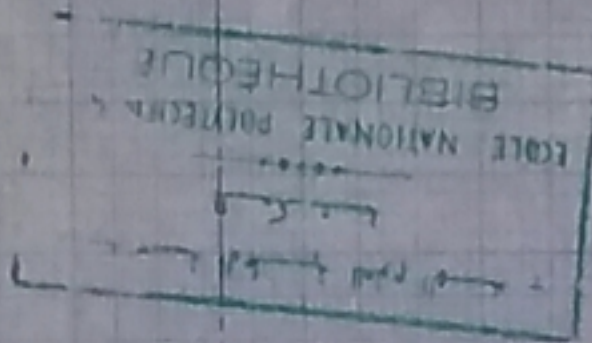
POUR  $k=1,4$

régime supersonique

régime subsonique

(Air - O<sub>2</sub> - N<sub>2</sub> - H<sub>2</sub>)

PB 00170  
-3-



sans, ou à l'amont du choc

après le choc

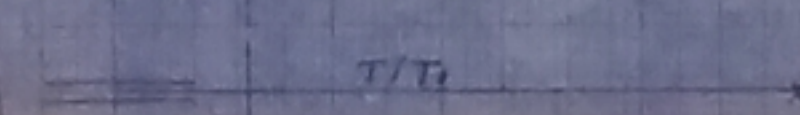
$$\left(\frac{A^*}{A_0}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

$$\left(\frac{A^*}{A_0}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T}{T_0}\right) \psi^2\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

Holger le 20 Juin 1970  
Belkhiria No.

$$\left(\frac{A^*}{A_0}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

$$\left(\frac{A^*}{A_0}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T}{T_0}\right)$$



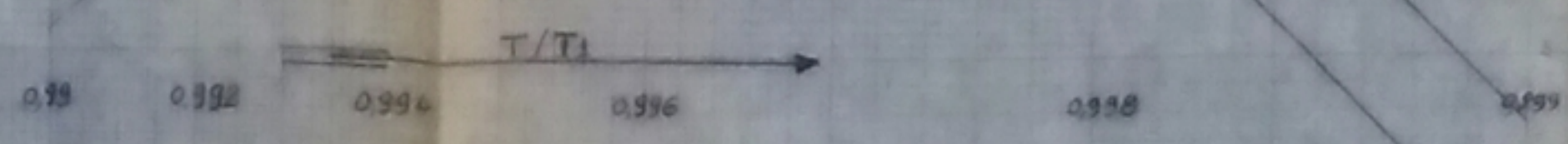
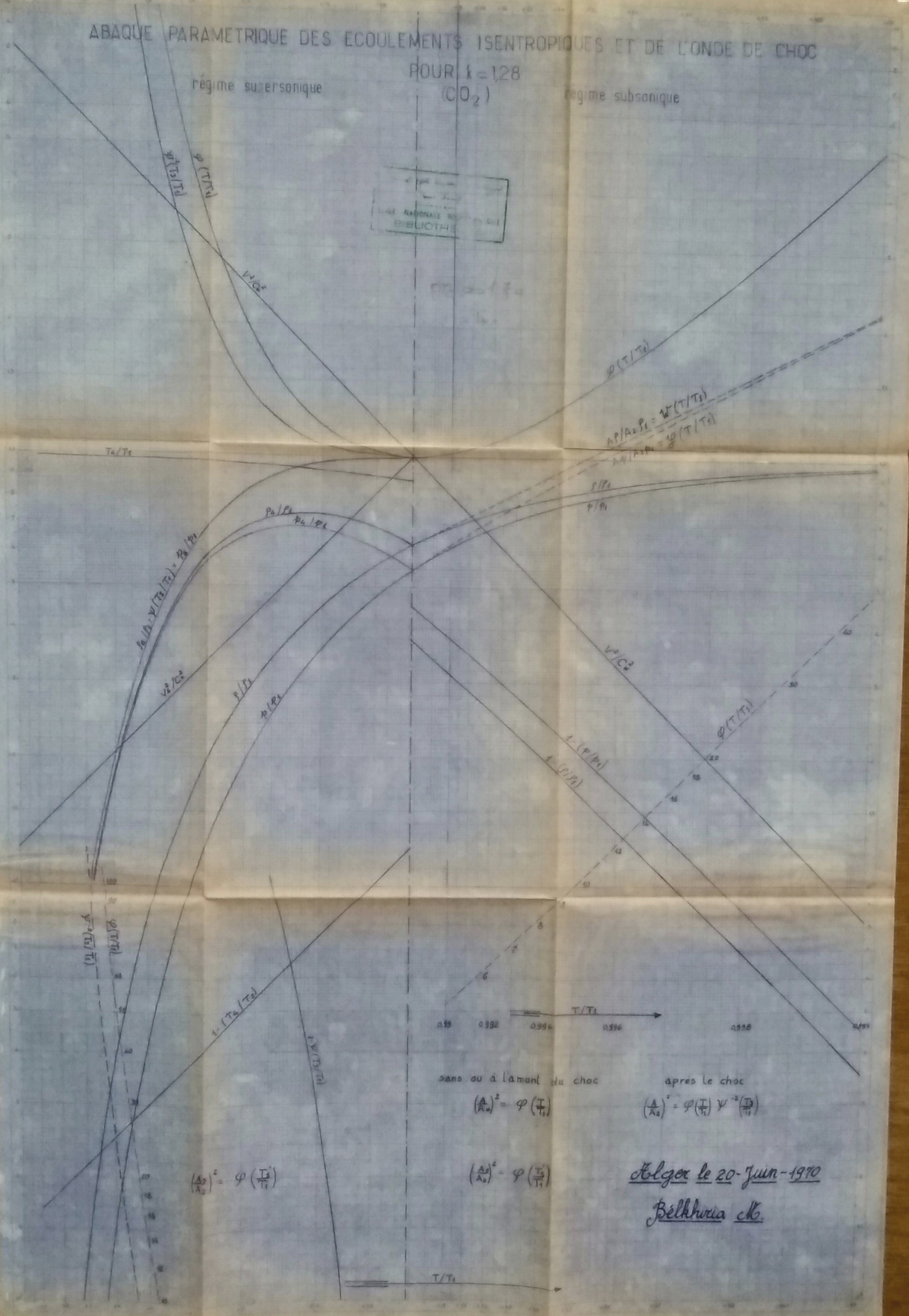
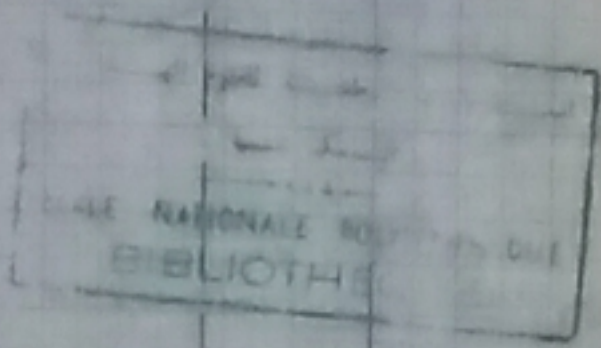


# ABaque PARAMETRIQUE DES ECOULEMENTS ISENTROPIQUES ET DE L'ONDE DE CHOC

POUR  $k=1,28$   
( $CO_2$ )

régime supersonique

régime subsonique



sans ou à l'amont du choc

après le choc

$$\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 = \phi\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$$

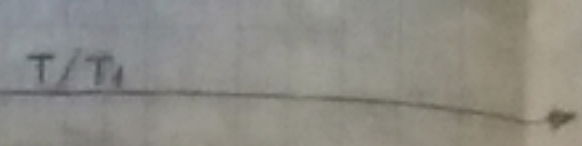
$$\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 = \phi\left(\frac{T_0}{T_1}\right) \psi^{-2}\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$$

$$\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 = \phi\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$$

$$\left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 = \phi\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$$

Alger le 20-Juin-1970

Bélkhouria ch.





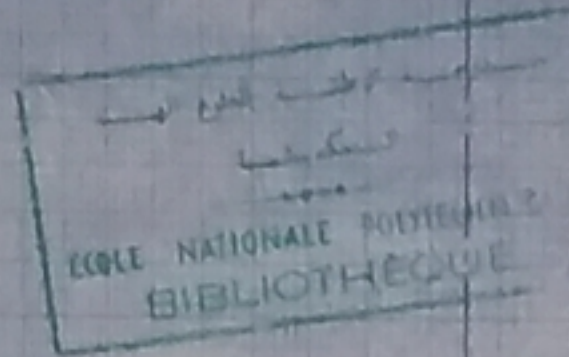
# ABAQUE PARAMETRIQUE DES ECOULEMENTS ISENTROPIQUES ET DE L'ONDE DE CHOC

POUR  $k=1,26$

(SO<sub>2</sub>)

régime supersonique

régime subsonique



13-11-60  
5



Sans ou à l'amont du choc

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

après le choc

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \psi^{-2}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Belges, le 20 juin 1970  
Belkhoura *etc*

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = \varphi\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

