



Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil

Laboratoire de Génie Sismique et de Dynamique des Structures

THESE DE MAGISTER

Présentée Par :

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

M. ZERMOUT Sid Ahmed

Ingénieur d'Etat en Génie Civil
Diplômé de l'Ecole Nationale Polytechnique

En vue de l'obtention du Titre de **MAGISTER** en Génie Civil

Thème

INVESTIGATION DE LA REPONSE STOCHASTIQUE DES STRUCTURES SOUS EXCITATIONS SISMIQUES

Soutenue publiquement le 11 septembre 2004 devant le jury composé de :

M. M. K. BERRAH	Professeur, ENP	Président
M. B. TILIOUINE	Professeur, ENP	Directeur de thèse
M. S. BELKACEMI,	Maître de Conférences, ENP	Examineur
M. M. HAMMOUTENE,	Maître de Conférences, ENP	Examineur
M. B. ZEGHLACHE,	Chargé de cours, ENP	Examineur
M. M. BELAZOUGUI,	Directeur du CGS	Invité

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مَاتِيكَ لَنَا خِزَامِي الْعَبْدُ الْمَعْلُومُ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, le clément et le miséricordieux de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Je voudrais exprimer mes vifs remerciements à mon directeur de thèse M. le Professeur B. TILIOUINE pour les orientations et les conseils qu'il a su me prodiguer durant toute la période de recherche.

Je ne manquerais pas de remercier vivement M. le Professeur M. K. BERRAH d'avoir accepté de présider le jury. Que tous les membres du jury trouvent ici l'expression de mon profond respect pour avoir pris la peine d'examiner le manuscrit.

Merci aussi à tous les membres de l'équipe du Laboratoire de Génie Sismique et de Dynamique des Structures pour leurs soutien et leurs aides.

Je voudrais aussi remercier MM. Y. MEHANI, A. NOUR et S. SLIMANI pour leur aide et leurs encouragements.

Mes remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin m'ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

SOMMAIRE

Notations	iv
CHAPITRE 1 - INTRODUCTION GENERALE	1
1. Introduction	1
2. Synthèse bibliographique.....	4
2.1. Statistiques des pics ordonnées	4
2.2. Génération de DSP compatible avec un spectre de réponse.....	5
2.3. Règles de combinaison modalo–spectrales	6
3. Objectif et organisation de la thèse.....	8
CHAPITRE 2 - NOTIONS FONDAMENTALES SUR LA THEORIE DES VIBRATIONS ALEATOIRES	10
1. Introduction	10
2. Processus aléatoire.....	10
3. Caractérisation d'un processus aléatoire	11
3.1. Fonction de densité de probabilité.....	11
3.2. Moyenne et autocorrélation d'un processus aléatoire	12
4. Processus stationnaire et processus ergodique.....	14
4.1. Processus stationnaire.....	14
4.2. Processus ergodique	14
4.3. Processus Gaussien.....	15
5. Décomposition spectrale d'un processus aléatoire	16
5.1. Transformée de Fourier	16
5.2. Fonction de densité spectrale de puissance	16
6. Réponse d'un système à un degré de liberté à une excitation aléatoire stationnaire .	18
6.1. Relation entrée–sortie d'un oscillateur linéaire à un degré de liberté	18
6.2. Réponse stationnaire à une excitation aléatoire stationnaire.....	20
6.3. Réponse transitoire à une excitation aléatoire stationnaire.	21
7. Conclusions	22
CHAPITRE 3 - STATISTIQUES DES PICS ORDONNES.....	23
1. Introduction	23
2. Taux de franchissement d'un seuil α. Formule de Rice	23
3. Distribution des maxima	24

ملخص

تحريات حول الاستجابة العشوائية للهياكل الخاضعة للزلازل قد تمت. لهذا الغرض، قدمت دالة للكثافة الطيفية للطاقة متوافقة مع طيف إستجابة معطى، تسمح الأخذ بعين الاعتبار عدم سكونية الحركة القوية و الطبيعة الانتقالية للاستجابة. هذه الدالة استعملت فيما بعد لدراسة آثار الإرتيابات حول الخصائص الديناميكية على الاستجابة القصوى للهياكل المرتابة. بالإضافة إلى هذا طورت طريقة احتمالية لمطابقة الأشكال الاهتزازية تتأسس على نظرية إحصائيات القمم المرتبة، تسمح بإيجاد القمم العليا للاستجابة بدقة. علاوة على ذلك، أقيمت تحريات حسابية حول الفعالية النسبية لأهم طرق المطابقة الطيفية التي تأخذ بعين الاعتبار التفاعل بين الأشكال الاهتزازية للهياكل ذات الأشكال المتقاربة. في الأخير، قدمت عدة أمثلة من أجل إظهار دقة النماذج المدروسة و عدة خلاصات عملية استخرجت تحت ضوء النتائج المحصل عليها.

مفاتيح : إهتزازات عشوائية، إحصائيات القمم المرتبة، دالة الكثافة الطيفية للطاقة، الاستجابة العشوائية للهياكل، الهياكل ذات الخصائص الديناميكية المرتابة، طرق المطابقة الطيفية للأشكال، التفاعل بين الأشكال.

Résumé

Une investigation de la réponse stochastique des structures sous excitation sismique, est effectuée. A cet effet, une densité spectrale de puissance (DSP) compatible avec un spectre de réponse cible est développée, permettant ainsi de prendre en compte la non-stationnarité du mouvement fort et la nature transitoire de la réponse. La DSP compatible est ensuite utilisée pour étudier l'effet des incertitudes des paramètres dynamiques, sur la réponse sismique maximale des systèmes incertains. De plus, il est développé une formulation probabiliste de superposition modale basée sur les statistiques des pics ordonnés permettant, entre autres, une estimation précise des pics les plus significatifs de la réponse structurale. En outre, une investigation numérique sur la performance relative des principales méthodes de superposition modalo-spectrales prenant en compte l'effet de l'interaction modale sur la réponse des structures à modes rapprochés, est effectuée. Enfin, plusieurs exemples sont présentés en vue d'illustrer la précision des méthodes étudiées et des conclusions d'intérêt pratique sont formulées à la lumière des résultats obtenus.

Mots clés : Vibrations aléatoires, statistiques des pics ordonnés, densité spectrale de puissance, réponse sismique stochastique, structures à paramètres incertains, combinaisons modalo-spectrales, interaction modale.

Abstract

An investigation of the stochastic response of structures under seismic excitation is carried out. To this end, a power spectral density function (PSDF) compatible with a given response spectrum is developed which accounts for the nonstationarity of the ground motion and the transient nature of the structural response. The compatible PSDF is then used to study the effect of uncertainties in the dynamic parameters on the maximal seismic response of uncertain systems. Furthermore, a probabilistic spectrum superposition method based on statistics of ordered peaks is presented, allowing, hence, an accurate estimation of the most significant structural response peaks. Moreover, a numerical investigation on the relative performance of spectrum superposition methods considering the modal interaction effect for structures with closely spaced modes is performed. Finally, several examples are presented to illustrate the accuracy of the studied methods and conclusions of practical interest are provided in light of the results obtained.

Keywords: Random vibrations, statistics of ordered peaks, power spectral density function, seismic stochastic response, structures with uncertain parameters, modal spectral combination, modal interaction.

4. Statistiques des pics ordonnés	28
4.1. Probabilité de distribution du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné	28
4.2. Valeur la plus probable du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné	30
4.3. Valeur attendue du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné	32
5. Applications numériques	32
6. Conclusions	34
CHAPITRE 4 - GENERATION DE DSP COMPATIBLE AVEC UN SPECTRE DE REPONSE.....	36
1. Introduction	36
2. Représentations de l'action sismique par la densité spectrale de puissance	36
2.1. Bruit Blanc (White Noise).....	36
2.2. Densité spectrale de puissance de Kanai-Tajimi	37
2.3. Densité spectrale de puissance de Clough et Penzien.....	38
3. DSP déterminée à partir d'un spectre de Fourier (1ère méthode).....	39
4. DSP compatible avec un spectre de réponse (2^{ème} méthode).....	40
5. Applications numériques	43
6. DSP compatibles pour différentes conditions locales de site de magnitudes et de distances épacentrales	46
6.1. Effet des conditions locales de site.....	47
6.2. Effet de la magnitude.....	48
6.3. Effet de la distance épacentrale	49
7. DSP compatible avec les spectres réglementaires de l'US NRC et des RPA99	50
8. Conclusions	51
CHAPITRE 5 - SPECTRES DE REPONSE DES SYSTEMES A PARAMETRES INCERTAINS.....	53
1. Introduction	53
2. Formulation stochastique du spectre de réponse.....	54
3. Evaluation des effets des incertitudes sur la réponse	56
4. Applications numériques	58
5. Conclusions	64
CHAPITRE 6 - INVESTIGATION DE L'EFFET D'INTERACTION MODALE SUR LA REPONSE DYNAMIQUE DES STRUCTURES.....	66
1. Introduction.	66
2. Equations de mouvement et décomposition modale.....	67

3. Réponse d'un système à plusieurs degrés de liberté à une excitation aléatoire stationnaire.....	69
3.1. Matrice d'autocorrélation et Matrice de la DSP de la réponse.....	69
3.2. Combinaison modale et coefficient d'intercorrélation modale	70
4. Formulations approximatives du coefficient de corrélation ρ_{jk}.....	72
4.1. Formulation de Rosenblueth et Elorduy	72
4.2. Formulation de Wilson et <i>al</i>	72
4.3. Formulation de Der Kiureghian et Nakamura	73
5. Développement de la règle probabiliste de combinaison modale.....	73
6. Applications numériques	75
6.1. Calcul probabiliste des pics de la réponse d'un bâtiment multi-étages	75
6.2. Investigation de l'effet d'interaction modale sur la réponse dynamique des structures à modes rapprochés	84
7. Conclusions	88
CHAPITRE 7 - CONCLUSIONS GENERALES ET RECOMMANDATIONS FUTURES	90
1. Conclusions générales.....	90
2. Recommandations.....	92
Références bibliographiques.....	94
Annexe 1 Calcul de la dérivé de la fonction de transfert d'un oscillateur simple par rapport à la fréquence propre et à l'amortissement pour les réponses en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération.....	99
Annexe 2 Méthode approximative pour le calcul des moments de la DSP de la réponse	100
Annexe 3 Equations de mouvement d'un bâtiment asymétrique.	102

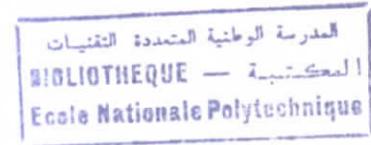
NOTATIONS

- $\ddot{a}(t)$ = Accélération du sol
 $a_{(n)}$ = Pic d'ordre n
 \bar{a} = Moyenne quadratique des maxima de $x(t)$
 a_{rms} = Amplitude moyenne quadratique de $x(t)$
 c = Amortissement
 $[C]$ = Matrice d'amortissement
 B, C, D = Coefficients
 $f_X(x,t)$ = Fonction de densité de probabilité d'un processus $X(t)$
 $F_X(x,t)$ = Fonction de probabilité cumulative d'un processus $X(t)$
 $F_{(n)}(\eta)$ = Fonction de distribution cumulative du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné de $x(t)$
 $f_{(n)}(\eta)$ = Fonction de densité de probabilité du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné de $x(t)$
 $FS(\omega)$ = Spectre de Fourier
 $G(\omega)$ = Fonction de densité spectrale de puissance unilatérale
 $GD(\omega)$ = Fonction de densité spectrale unilatérale de la réponse en déplacement
 $GR(\omega)$ = Fonction de densité spectrale unilatérale de la réponse
 h_i = Hauteur du $i^{\text{ème}}$ étage
 $h(t)$ = Fonction de la réponse temporelle d'un oscillateur
 $H(\omega)$ = Fonction de la réponse fréquentielle d'un oscillateur
 $H_i(\omega)$ = Fonction de la réponse fréquentielle du $i^{\text{ème}}$ mode
 $H^*(\omega)$ = Conjugué complexe de $H(\omega)$
 $H_i^*(\omega)$ = Conjugué complexe de $H_i(\omega)$
 $\tilde{H}(\omega)$ = Fonction de la réponse fréquentielle transitoire d'un oscillateur
 $\mathcal{H}(\omega, \omega_j, \xi_j)$ = Module au carré de la fonction de transfert d'un oscillateur
 $[H_U]$ = Matrice de transfert diagonale des déplacements modaux $u_i(t)$
 $[H_Y]$ = Matrice de transfert des déplacements généralisés $y_i(t)$
 $\{I\}$ = Vecteur unité
 k = Raideur
 $[K]$ = Matrice de rigidité
 m = Masse
 $[M]$ = Matrice masse
 m_X = Moyenne
 m_k = Moment d'ordre k
 N = Nombre total de pics
 p = Facteur de pic de la réponse
 PSV = Pseudo spectre de vitesse
 \overline{PSV} = Pseudo spectre de vitesse moyen
 $P(\eta)$ = Fonction de distribution cumulative des pics de $x(t)$
 $p(\eta)$ = Fonction de densité de probabilité des pics de $x(t)$
 $r = \omega_k / \omega_j$

- r_{Yb} r_{Vb} r_{Mi} = Réponse maximale en déplacement, effort tranchant et moment de renversement du $i^{\text{ème}}$ étage
 $R_{XX}(t_1, t_2)$ = fonction d'autocorrélation
 $R_{XY}(t_1, t_2)$ = fonction d'intercorrélation
 $S(\omega)$ = Fonction de densité spectrale de puissance
 $S_D(\omega)$ = Fonction de densité spectrale de la réponse en déplacement
 $S_R(\omega)$ = Fonction de densité spectrale de la réponse
 $SD(\omega, \xi)$ = Spectre de réponse en déplacement
 $SV(\omega, \xi)$ = Spectre de réponse en vitesse
 t = Le temps
 T = Durée totale d'un processus
 T_D = Durée totale d'un enregistrement accélérométriques
 T_s = Durée stationnaire d'un processus
 $U(t)$ = Déplacement modal d'un oscillateur.
 $U_i(t)$ = Déplacement modal du $i^{\text{ème}}$ étage
 ν = rapport du nombre de pics négatifs par rapport au nombre total de pics
 $[V]$ = Matrice des variances
 $x(t)$ = Fonction aléatoire
 $X(t)$ = Processus aléatoire
 $\dot{X}(t)$ = Processus dérivé
 $\ddot{X}(t)$ = Processus dérivé second
 $Y(t)$ = Déplacement relatif d'un oscillateur
 $y_i(t)$ = Déplacement relatif du $i^{\text{ème}}$ étage
 α_j = Facteur de participation modale du $j^{\text{ème}}$ mode
 $\delta(\cdot)$ = Fonction de dirac
 ε = Une mesure de la largeur de bande du spectre de réponse
 φ_n = Phases aléatoires uniformément distribuées entre 0 et 2π
 $[\Phi]$ = Matrice modale
 $\{\phi\}_j$ = Vecteur propre du $j^{\text{ème}}$ mode
 η = Pic normalisé
 η_{\max} = Pic normalisé maximale ou facteur de pic
 η_n = $n^{\text{ème}}$ Pic normalisé
 σ_x^2, σ_x = Variance et écart type du processus $X(t)$
 $\lambda_{k,ij}$ = Moment spectral d'ordre k de la réponse du $j^{\text{ème}}$ mode
 $\rho_{XX}(t_1, t_2)$ = Coefficient de corrélation
 $\rho_{XY}(t_1, t_2)$ = Coefficient de d'intercorrélation
 ρ_{jk} = Coefficient de corrélation modale entre les réponses du $j^{\text{ème}}$ et du $k^{\text{ème}}$ mode
 $\Gamma_{XX}(t_1, t_2)$ = Fonction d'autocovariance
 $\Gamma_{XY}(t_1, t_2)$ = Fonction d'intercovariance
 ω, ξ = Fréquence naturelle et pourcentage d'amortissement critique d'un oscillateur
 ω_j, ξ_j = Fréquence naturelle et pourcentage d'amortissement critique du $j^{\text{ème}}$ mode

Chapitre 1

Introduction générale



1. Introduction

Les tremblements de terre constituent un risque majeur, et peuvent conduire à la destruction d'une partie importante du patrimoine immobilier d'un pays, causant ainsi la mort de milliers de personnes et des conséquences économiques parfois catastrophiques. Ce risque peut encore être plus aggravé lorsqu'il s'agit d'installations stratégiques particulièrement sensibles aux séismes. C'est pourquoi, et dans le but d'estimer de manière plus fiable la réponse sismique des constructions, il est essentiel, voire nécessaire de procéder à des recherches approfondies en vue de mieux appréhender et de quantifier non-seulement l'effet du caractère stochastique du mouvement sismique mais aussi l'effet des incertitudes des paramètres dynamiques sur la réponse des structures. Il en découle naturellement que le mouvement sismique doit être considéré comme un processus stochastique et que la réponse structurale qui en résulte, soit estimée en utilisant la théorie des vibrations aléatoires.

En génie parasismique, la réponse dynamique d'une structure est traditionnellement évaluée en utilisant une approche modalo-spectrale avec une excitation sismique définie souvent sous forme de spectre de réponse pour un intervalle de confiance fixé a priori. Il est ainsi possible de prendre en considération, entre autres, les incertitudes inhérentes au caractère stochastique du mouvement sismique. Toutefois, il convient de noter que la fonction de Densité Spectrale de Puissance (DSP) constitue un mode de caractérisation du mouvement de sol pratiquement incontournable lors de l'analyse stochastique de la réponse sismique des structures. Diverses formulations couronnées avec plus ou moins de succès, ont été proposées par différents chercheurs dans le but d'obtenir une DSP compatible avec un spectre de réponse donné (Gupta et al 1994).

Toutefois, dans le but d'estimer de manière plus fiable la réponse sismique d'une construction, il est essentiel de quantifier non seulement l'effet du caractère stochastique du mouvement sismique, mais aussi l'effet des incertitudes des paramètres dynamiques sur la

réponse structurale (Todorovska, 1995). Ces incertitudes, causées essentiellement par la variation des propriétés des matériaux et les approximations dans l'estimation des paramètres des modèles mathématiques de structure, peuvent introduire une variation significative de la réponse structurale. Pour certaines structures, telles que les parkings de véhicules par exemple, la masse relative à chaque niveau est fonction du temps (jours, saisons) et il est pratiquement impossible de prédire sa valeur exacte lors d'un prochain séisme. En outre, si la structure considérée est fondée sur un sol meuble et que le phénomène d'interaction sol-structure ne peut être ignoré, les périodes propres de la structure dépendront des caractéristiques dynamiques du sol de fondation qui peuvent être différentes avant, pendant, et après le tremblement de terre.

En outre, la réponse dynamique maximale des structures à plusieurs degrés de liberté, sous excitation sismique, est généralement déterminée en utilisant les méthodes de superposition modalo-spectrales. Diverses méthodes permettant de prendre en compte l'effet d'interaction modale sont disponibles. Néanmoins, la plupart de ces méthodes fondées sur une combinaison appropriée des réponses modales et des hypothèses simplificatrices pour la détermination des coefficients de corrélation modale, peuvent conduire, dans certains cas, à d'importantes erreurs vis-à-vis de la réponse exacte.

Au vu de ce qui précède et en vue de mieux appréhender les problématiques supra-citées, il est nécessaire de considérer au moins trois niveaux d'aléas, inhérents respectivement à : (i) la nature stochastique du mouvement sismique, (ii) à la variabilité des paramètres dynamiques des systèmes incertains et (iii) à la variabilité des résultats induits par les performances relatives des méthodes modalo-spectrales d'évaluation de la réponse sismique maximale.

Dans le premier volet de recherche, deux méthodes de détermination d'une DSP d'un mouvement sismique en vue du calcul dynamique de la réponse stochastique des structures sont présentées. La théorie de vibrations aléatoires et les statistiques des pics ordonnés sont utilisées à cet effet. Dans la première méthode, la DSP est définie en termes de spectre de Fourier et de durée stationnaire du mouvement fort. Dans la deuxième méthode, la DSP est déterminée itérativement à partir d'un spectre de réponse cible. Cette deuxième approche permet de prendre en considération les effets de la non-stationnarité du mouvement sismique ainsi que celui de la nature transitoire de la réponse dynamique des structures.

Dans le deuxième volet de recherche, il est présenté les principaux résultats d'une investigation analytique et numérique de l'effet des incertitudes des valeurs d'amortissement critique et de fréquences naturelles sur la réponse sismique maximale des systèmes à caractéristiques aléatoires. A cet effet, l'excitation est définie sous forme d'une densité spectrale de puissance en accélération compatible avec un spectre de réponse cible donné (Tiliouine et *al*, 2003). En utilisant un développement en série de Taylor du 1er ordre du module au carré de la fonction de transfert autour des valeurs moyennes des paramètres incertains, les DSP de la réponse en déplacement, en pseudo-vitesse et en pseudo-accélération sont d'abord déterminées en vue d'obtenir les variances des moyennes quadratiques des amplitudes spectrales. La théorie des vibrations aléatoires est ensuite utilisée afin de déterminer les moyennes et écarts-types des amplitudes du spectre de réponse à paramètres incertains. L'applicabilité de la méthode est illustrée en utilisant plusieurs spectres de réponse cibles correspondant à des enregistrements accélérométriques américains à contenus fréquentiels différents et à des spectres réglementaires issus de l'U.S. Nuclear Regulatory Commission (1973) et des Règles Parasismiques Algériennes (1999) pour respectivement quatre types de sols : rocheux, ferme, meuble et très meuble.

Enfin, dans le troisième volet de recherche, des investigations numériques sont effectuées afin d'étudier la performance relative de quelques méthodes de superposition modalo-spectrales. A cet effet, les réponses en déplacement, effort tranchant et moment de renversement d'une structure asymétrique à plusieurs degrés de liberté caractérisée par des modes de vibration rapprochés, ont été calculés en utilisant les principales méthodes de superposition modalo-spectrales. Les résultats obtenus sont ensuite comparés à la solution exacte, calculée à partir d'enregistrements accélérométriques de séismes réels présentant des contenus fréquentiels différents. Quatre méthodes d'évaluation de la réponse sismique maximale sont successivement considérées. Trois de ces méthodes sont basées sur la méthode de combinaison quadratique complète CQC. La quatrième est une méthode probabiliste basée sur les statistiques des pics ordonnés et permet aussi bien de déterminer la réponse sismique maximale pour une probabilité de non-dépassement donnée que d'estimer les différents pics de réponse d'ordre supérieur les plus significatifs, ce qui peut s'avérer d'une grande utilité pour l'estimation de l'endommagement des structures sous l'effet des séismes.

2. Synthèse bibliographique

2.1. Statistiques des pics ordonnées

En extension des travaux de Rice (1944, 1945), la distribution statistique des maxima d'une fonction aléatoire, qui est représentée par la somme d'un nombre infini de fonctions sinusoïdales à phases aléatoires, a été étudiée par Cartwright et Longuet-Higgins (1956). Cartwright et Longuet-Higgins ont appliqué cette théorie sur le mouvement des vagues en mer et le balancement des bateaux. Une application de cette théorie en génie sismique a été présentée par Udwadia et Trifunac (1974). Ils ont examiné la relation physique qui existe entre le spectre de réponse et la transformé de Fourier du mouvement fort, à travers les statistiques des valeurs extrêmes de la réponse d'un oscillateur, en supposant que la réponse est stationnaire. Leurs résultats indiquent que le spectre de réponse basé sur un calcul statistique conduit à une bonne approximation de la réponse actuelle à un mouvement fort.

En utilisant la théorie développée par Cartwright et Longuet-Higgins [0], plusieurs chercheurs ont présentés différentes formulations de la distribution de probabilité des différents pics ordonnés d'un processus aléatoire $x(t)$, lorsque les pics sont arrangés dans un ordre décroissant de leurs amplitudes.

Amini et Trifunac (1981) étaient les premiers à définir la distribution de probabilité du pic d'ordre n comme la probabilité que n pics parmi un total de N pics dans $x(t)$ n'excèdent pas une amplitude normalisée η . Toutefois, ils ont considéré que la probabilité de dépassement d'une amplitude η par tous ces pics, était la même que celle du pic le plus important. Ainsi leurs résultats se sont avérés de plus en plus conservateurs avec l'augmentation de l'ordre du pic (amplitude décroissante).

Dans le but d'améliorer la formulation de Amini et Trifunac, Gupta et Trifunac (1988) ont développé la distribution de probabilité du $n^{\text{ème}}$ pic lorsque les pics sont arrangés dans un ordre décroissant de leurs amplitudes se basant sur l'hypothèse que les occurrences des pics dans le processus $x(t)$ sont des événements statistiquement indépendants.

Basu et al (1996, 1996a) ont modifié la distribution de probabilité des pics ordonnés afin de considérer la dépendance entre les occurrences des pics en utilisant la théorie de Markov. Mais des investigations détaillées par simulation ont montrés que la formulation de Gupta et Trifunac décrit le mieux la réalité (Gupta et Trifunac, 1998b).

2.2. Génération de DSP compatible avec un spectre de réponse.

Lorsque l'excitation sismique est représentée par un processus stochastique, il est possible d'interpréter le spectre de réponse qui lui est associé par les statistiques des valeurs extrêmes d'un oscillateur soumis au processus. Pour un modèle stationnaire de l'excitation sismique, il est possible alors d'obtenir une relation qui lie entre le spectre de réponse et la densité spectrale de puissance du processus.

Kaul (1978) fut le premier à examiner cette relation en proposant deux méthodes permettant d'obtenir une DSP du mouvement sismique à partir de son spectre de réponse. L'une de ses méthodes est approximative et donne une expression explicite de la DSP en fonction du spectre de réponse. L'autre méthode est exacte dans laquelle un schéma itérative pour la solution du problème a été établi. Il a été montré que pour de faibles valeurs de l'amortissement critique, la méthode approximative donne d'assez bons résultats par rapport à la méthode exacte.

En ce basant sur les travaux de Kaul, Unruh et Kana (1981) ont proposé une méthode itérative permettant l'estimation des paramètres correspondant à un spectre de réponse pour la description du mouvement fort. Dans cette procédure, le mouvement fort est représenté par un processus stochastique Gaussien stationnaire, permettant ainsi d'établir une formulation entre le spectre de réponse et les paramètres de la densité spectrale de puissance.

Plus tard, Christian (1989) a utilisé deux schémas itératifs afin de déterminer une DSP compatible avec des spectres de réponse de calcul. Les résultats obtenus ont montré que pour des fréquences inférieurs à 10 Hz, la convergence n'était pas assurée. Par contre une meilleure convergence a été obtenue pour les spectres de réponses calculés à partir d'un traitement statistiques du mouvement fort sur toute la gamme de fréquences en plus d'une convergence très rapide.

Gupta et Trifunac (1998a) ont apporté plusieurs améliorations aux méthodes itératives précédentes par l'utilisation d'un facteur de pic plus précis et en prenant en compte la nature transitoire de la réponse. Ainsi, la DSP compatible obtenue donne une meilleure description du contenu fréquentiel du mouvement fort pour le calcul stochastique de la réponse sismique des structures.

2.3. Règles de combinaison modalo-spectrales

Les méthodes modalo-spectrales sont largement appliquées pour le calculer la réponse maximale des structures à plusieurs degrés de libertés sous excitation sismique. Biot (1943) a proposé la première méthode de superposition modale comme la somme de maximum modaux absolus (SUM), qui est valide seulement si les maximums des réponses modales se produisent en même temps et qu'ils soient tous dans la même phase. Puisque en général ces deux conditions ne sont pas satisfaites, la méthode SUM surestime la réponse maximale.

En se basant sur une approche probabiliste, Goodman et *al* (1958) ont proposé la méthode de la racine carrée de la somme des carrés (SRSS) pour obtenir la valeur la plus probable de la réponse maximale. La méthode SRSS est fondée sur l'hypothèse que les divers modes sont statistiquement non-corrélés, ceci est valable lorsque les fréquences modales sont largement séparées. Pour des structures avec des modes rapprochés, la méthode SRSS peut surestimer ou sous-estimer la réponse exacte (Maison et *al*, 1983).

Plusieurs formulations sont maintenant disponibles qui considèrent l'effet de l'interaction modale d'une manière plus précise. Toutes ces formulations sont similaires, et diffèrent seulement dans la définition des coefficients d'intercorrélation modale. Rosenblueth et Elorduy (1969) ont donné une expression pour le coefficient de corrélation en rapprochant le mouvement fort par un bruit blanc à bande limitée et que les réponses modales résultantes sont de type périodique amorties.

En utilisant la théorie des vibrations aléatoires, Der-Kiureghian (1980,1981) et Wilson et *al* (1981) ont développé des expressions pour les coefficients de corrélation modaux pour le cas d'une excitation stationnaire à bande large. Les formulations fondées sur l'hypothèse de la stationnarité du mouvement fort sous estiment généralement les coefficients de corrélation. Rosenblueth et Elorduy (1969) ont approximativement considéré la nature transitoire de la réponse qui est due à la durée finie de l'excitation sismique, et par conséquent leur expression donne une meilleure évaluation du coefficient de corrélation.

Les diverses méthodes modalo-spectrales mentionnées dans le paragraphe précédent sont fondées sur l'hypothèse d'un mouvement du sol représenté par un bruit blanc ou un bruit blanc filtré, couvrant toutes les fréquences modales. Cependant, les études sur les enregistrements du mouvement fort ont indiqué que le mouvement du sol peut dans certains cas, être à bande étroite (Elghadamsi et *al*, 1988). Pour une excitation à bande étroite, les modes se trouvant en

linaux directement en termes des amplitudes du spectre de réponse.

En utilisant la méthode de superposition modale, Amini et Trifunac (1985) ont développé une formulation statistique pour définir les fonctions de distribution de probabilité pour les amplitudes de tous les pics significatives dans la réponse d'une structure à plusieurs degrés de libertés. Pour prendre en compte la non-stationnarité de la réponse, la valeur de la moyenne quadratique de la réponse a été modifiée en utilisant les amplitudes du spectre de réponse de l'excitation.

Gupta et Trifunac (1987,1988) ont appliqué les statistiques des pics ordonnés pour obtenir les fonctions de distribution des pics de la réponse, qui permettent de prédire de manière plus exacte les amplitudes des pics d'ordre supérieur, quand les pics sont arrangés dans un ordre décroissant de leurs amplitudes. Ils ont également utilisé cette approche pour estimer la réponse des systèmes à plusieurs degrés de libertés soumis à la composante de torsion du mouvement fort (Gupta et Trifunac, 1987a).

Plus tard, Gupta et Trifunac (1990) ont prit en compte l'effet de l'interaction sol-structure dans la formulation, puis ils ont considéré l'excitation simultanée des composantes de translation et de torsion du mouvement fort (Gupta et Trifunac, 1990a).

Pour améliorer les diverses approximations faites dans les études antérieures, Gupta et Trifunac (1998) ont proposé une méthode probabiliste de superposition modale qui prend en compte la non-stationnarité et la nature transitoire de la réponse. Dans cette méthode, l'excitation d'entrée est définie en termes de la densité spectrale de puissance compatible avec un spectre de réponse. Cette méthode a été ensuite généralisée par Gupta et Joshi (1998a) afin d'estimer la réponse des structures à modes rigides, ensuite Gupta et Trifunac (1999) l'ont adapté pour le calcul de la réponse des structures à amortissement non-classique.

processus aléatoires. La relation entrée–sortie qui donne la réponse stationnaire d'un système à un degré de liberté est étudiée, avec prise en compte de l'effet de la réponse transitoire dans la réponse globale de l'oscillateur.

Dans le chapitre 3, une présentation de la méthode des statistiques des pics ordonnés développée par Gupta et Trifunac (1988), est présentée. Cette méthode permet d'obtenir, la distribution des probabilités des différents pics d'un processus stationnaire lorsque les pics sont ordonnés de manière décroissante selon leurs amplitudes.

Dans le chapitre 4, des formulations analytiques pour la détermination de la densité spectrale de puissance de l'action sismiques sont présentées. Outre la forme analytique de la densité spectrale de puissance de Kanai–Tajimi (Kanai, 1957 ; Tajimi, 1960), deux autres méthodes numériques sont examinées. La première méthode consiste à calculer la densité spectrale de puissance directement à partir du spectre de Fourier et de la durée stationnaire du mouvement fort. La deuxième méthode plus efficace permet de déterminer la densité spectrale de puissance à partir d'un spectre de réponse donné de manière itérative. La validité des deux méthodes ainsi que leur capacité à préserver les caractéristiques du mouvement fort sont examinées à travers des applications sur des accélérogrammes de séismes réels ainsi que des spectres réglementaires de calcul.

Dans le chapitre 5, les principaux résultats d'une investigation analytique et numérique de l'effet des incertitudes des paramètres dynamiques sur la réponse maximale des systèmes sous excitation sismique aléatoire, sont présentés. Les variances des amplitudes moyennes quadratiques sont déterminées en utilisant d'une part, la densité spectrale de puissance compatible avec un spectre de réponse cible et d'autre part, un développement en série de Taylor de la DSP de la réponse au voisinage des valeurs moyennes des paramètres incertains.

basant sur la théorie des statistiques des plus ordonnées présentée au chapitre 6. La méthode probabiliste de superposition modale est développée, et les principaux résultats d'une investigation numérique sur la performance relative de quelques méthodes de superposition modalo-spectrales sont présentés. A cet effet, la réponse en déplacement, l'effort tranchant et le moment de renversement d'une structure asymétrique à plusieurs degrés de liberté caractérisée par des modes de vibration rapprochés, ont été calculés en utilisant plusieurs méthodes de superposition. Outre la méthode probabiliste de superposition modale, nous considérons successivement trois méthodes d'évaluation de la réponse sismique maximale basées sur la méthode de combinaison quadratique complète (CQC).

Enfin, le chapitre 7 est consacré aux principales conclusions de la thèse et aux recommandations pour les éventuelles recherches futures.

Chapitre 2

Notions fondamentales sur la théorie des vibrations aléatoires

1. Introduction

L'étude des propriétés statistiques nécessaires à la caractérisation d'un phénomène aléatoire relève de la théorie des vibrations aléatoires. Ces dernières années, la théorie des processus aléatoires c'est largement développée et constitue le fondement pour l'analyse stochastique des structures.

Historiquement, les premières tentatives d'application de la théorie des vibrations aléatoires dans l'analyse des structures datent du début des années 50, pour l'étude des vibrations induites par les jet-moteurs sur les panneaux du fuselage des avions à réaction. Le domaine d'application de la théorie des vibrations aléatoires c'est rapidement étendu aux différentes disciplines de la mécanique des structures, entre autre le génie civil, principalement pour l'étude de la réponse des structures aux sollicitations aléatoires et complexes tel que le vent, les vagues marines, et les mouvements sismiques.

Aujourd'hui, la théorie des vibrations aléatoires représente un des outils de base dans le génie parasismique. La réponse des structures linéaires à des processus gaussiens a été pleinement explorée, et des algorithmes de calcul sont maintenant incorporés dans des codes informatiques et qui sont actuellement à usage commun.

Les outils de la théorie des vibrations aléatoires exposés dans ce chapitre, donnent la possibilité d'étudier des systèmes dynamiques simples, et d'obtenir des informations sur les statistiques des paramètres de sortie, indispensable à l'évaluation de leur niveau de fiabilité.

2. Processus aléatoire

En dynamique, beaucoup de phénomènes physiques sont modélisés par des fonctions dépendant du temps, de l'espace,...etc. Si la quantité qui nous intéresse est le résultat d'un événement aléatoire, alors la fonction qui le décrit sera, elle aussi, aléatoire. Une fonction aléatoire est appelée un processus aléatoire (P.A) quand elle est fonction d'un seul paramètre t

(en particulier quand t indique le temps), et un champ aléatoire quand les variables sont plus d'une. Les champs aléatoires sont essentiellement des fonctions aléatoires multidimensionnelles c'est-à-dire dépendant de plus d'un paramètre, comme dans le cas des fonctions qui dépendent des coordonnées spatiales (x, y, z) .

Si $X(t)$, $t \in T$, indique un processus aléatoire, un échantillon particulier du processus est noté par la fonction $x(t)$. Chaque échantillon (c'est à dire chaque réalisation d'un phénomène aléatoire) est différent d'un autre car il dépend de circonstances uniques qui ne se répéteront pas à l'occasion d'autres mesures. Cependant, tous les échantillons ont un certain nombre de traits communs qui s'expriment à travers les mêmes propriétés statistiques.

3. Caractérisation d'un processus aléatoire

3.1. Fonction de densité de probabilité

D'une manière générale, pour caractériser les processus aléatoires de façon complète dans le sens probabiliste, on définit une valeur de la probabilité à chaque élément $x(t)$ de $X(t)$. Pour une valeur donnée du paramètre t , le processus se réduit à une variable aléatoire (V.A) $X(t)$, qui est complètement décrite par sa *fonction de densité de probabilité*, $f_X(x, t)$. Pour un nombre fini $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ des valeurs de $t \in T$, on a n V.A: $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$, ..., $X_n = X(t_n)$, qui sont complètement caractérisées par leur fonction de densité de probabilité conjointe.

Un processus stochastique est défini par conséquent par une infinité de fonctions de densité conjointes relatives à chaque nombre fini du paramètre t . La distribution associée à n points le long de l'axe t , est appelée *densité d'ordre n*

$$\begin{array}{ll} f_X(x, t) & \text{d'ordre 1} \\ f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) & \text{d'ordre 2} \\ \vdots & \\ f_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) & \text{d'ordre } n \end{array}$$

Toutes ces densités sont des fonctions non négatives et symétriques par rapport leurs arguments. Elles vérifient la condition de normalisation suivante :

$$\int \int \int \dots \int_{n \text{ fois}} f_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1 \quad (2.1)$$

3.2. Moyenne et autocorrélation d'un processus aléatoire

Une deuxième alternative de caractérisation d'un processus aléatoire consiste à définir les moments conjoints d'ordre 1, 2 ..., n comme suit :

$$\begin{aligned}
 E[X(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t) dx && \text{ordre 1} \\
 E[X(t_1)X(t_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 && \text{ordre 2} \\
 &\vdots && \vdots \\
 E[X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_n)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \cdots x_n f_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \cdots x_n, t_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n && \text{ordre } n
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Les deux premiers moments sont d'une importance pratique considérable. Ils sont désignés respectivement par *la moyenne* et *la fonction d'autocorrélation*. Ils contiennent les informations les plus importantes du processus aléatoire : la tendance et la dispersion.

La *moyenne* ou *valeur attendue* d'un processus est une fonction de t , et dépend de la distribution d'ordre 1 seulement:

$$m_X = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x, t) dx \tag{2.3}$$

La *fonction d'autocorrélation* d'un processus aléatoire est définie comme le moment conjoint (d'ordre deux) entre les valeurs du processus à deux instants t_1 et t_2 . Elle est donc fonction de t_1 et t_2 , et obtenu à partir de la fonction de densité de probabilité d'ordre deux comme suit :

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \tag{2.4}$$

Le moment central conjoint d'ordre deux est appelée *la fonction d'autocovariance*.

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{XX}(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - m_{X1})(X(t_2) - m_{X2})] \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t_1) - m_{X1}) (x(t_2) - m_{X2}) f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec : $m_{X1} = m_X(t_1)$ et $m_{X2} = m_X(t_2)$

L'autocorrélation et l'autocovariance sont reliées par l'expression :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{XX}(t_1, t_2) &= E[(X(t_1) - m_{X1})(X(t_2) - m_{X2})] \\
 &= R_{XX}(t_1, t_2) - m_{X1} m_{X2}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Un processus est dit ergodique dans la moyenne si :

$$E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X(t) \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (2.18)$$

Un processus est dit ergodique dans la corrélation si :

$$R_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X(t)X(t+\tau) \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t) dt \quad (2.19)$$

4.3. Processus Gaussien

Une V.A est dite gaussienne si elle a la fonction de densité de probabilité suivante

$$f_X(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x(t)-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (2.20)$$

On peut facilement vérifier que m_X est la moyenne et que σ_X est l'écart type de $X(t)$. Par conséquent la distribution gaussienne est complètement définie par ces deux paramètres. On appelle *distribution gaussienne unitaire*, la distribution qui correspond à $\sigma_X = 1$ et $m_X = 0$.

$$f_X(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x(t)^2}{2}} \quad (2.21)$$

Un vecteur $\{X\}$ est gaussien, si la densité commune de ses composants est donnée par l'expression

$$f_X(\{X\}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |[V]|^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\{X\} - \{m_X\})^T [V]^{-1} (\{X\} - \{m_X\}) \right] \quad (2.22)$$

où $\{m_X\}$ est le vecteur des moments et $[V]$ la matrice des covariances de $\{X\}$.

Sur la base des propriétés citées plus haut, un vecteur de n variables gaussiennes avec une matrice de corrélation $[V]$ peut être représenté par une combinaison linéaire de n V.A indépendantes.

Un processus aléatoire réel est dit Gaussien si les variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont conjointement gaussiennes, pour toutes les valeurs de t_1, t_2, \dots, t_n .

5. Décomposition spectrale d'un processus aléatoire

5.1. Transformée de Fourier

Soit une fonction réelle $h(t)$, sa transformée de Fourier est définie par :

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.23)$$

où $H(\omega)$ constitue l'amplitude spectrale de la fonction considérée. L'existence de $H(\omega)$ est garantie si $h(t)$ est absolument intégrable, c'est-à-dire si l'intégrale suivante a une valeur finie :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (2.24)$$

La transformée inverse est définie par :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.25)$$

La notion de transformée de Fourier sera utilisée afin de définir la décomposition spectrale d'un processus aléatoire stationnaire $X(t)$.

5.2. Fonction de densité spectrale de puissance

La fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire dépend d'une seule variable : le décalage du temps entre deux instants choisis. La transformée de Fourier de cette fonction est appelé la *densité spectrale de puissance* (DSP) du processus

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.26)$$

Par symétrie, la transformée de Fourier inverse de la DSP, donne la fonction d'autocorrélation

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.27)$$

Les deux relations ci-dessus sont appelées relations de *WIENER-KHINTCHINE*. La fonction d'autocorrélation étant une fonction symétrique définie positive, sa DSP est aussi réelle, symétrique et définie positive. La DSP $S_{XX}(\omega)$ donne une indication sur la décomposition spectrale d'un signal. Elle décrit la répartition fréquentielle de l'énergie moyenne du processus sur toute la gamme de fréquences considérée.

Un signal peut être caractérisé par une frange de fréquences large ou étroite. A ce titre, un processus ayant un contenu spectral large ou étalé est dit *processus à Bande large (Wide Band)*, tandis que celui dont le contenu spectral est réduit ou étroit est dit *processus à Bande étroite (Narrow Band)*.

Le fait que $S_{XX}(\omega)$ soit défini pour $\omega \in [-\infty, \infty]$ avec une symétrie par rapport à 0, a motivé l'introduction de la *densité spectrale unilatérale* $G_{XX}(\omega)$ définie uniquement pour les valeurs de $\omega \geq 0$ comme suit :

$$G_{XX}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{XX}(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau \quad (2.28)$$

$$R_{XX}(\tau) = \int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) \cos \omega \tau \, d\omega \quad (2.29)$$

L'intégral de la DSP sur l'axe réel donne la fonction d'autocorrélation pour $\tau = 0$, qui n'est autre que la variance du processus.

$$R_{XX}(0) = E[X^2] = \int_0^{\infty} G_{XX}(\omega) \, d\omega \quad (2.30)$$

La DSP croisée de deux processus aléatoire $X(t)$ et $Y(t)$ est définie par :

$$S_{XY}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} \, d\tau \quad (2.31)$$

Elle existe si $S_{XX}(\omega)$ et $S_{YY}(\omega)$ existent. $S_{XY}(\omega)$ est généralement complexe et satisfait la relation:

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega) \text{ puisque } R_{YX}(\tau) = -R_{XY}(\tau) \quad (2.32)$$

où : * indique le complexe conjugué.

Un processus stationnaire dont la DSP est une constante S_0 , est appelé *bruit blanc (B.B)*.

$$S_{XX}(\omega) = S_0 \quad (2.33)$$

D'après l'équation (2.30) sa fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$R_0(\tau) = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} \, d\omega = 2\pi S_0 \delta(\tau) \quad (2.34)$$

où $\delta(\)$ désigne la fonction de Dirac.

A partir de l'équation (2.34), on obtient $R_0(\tau) = 0$ pour $\tau \neq 0$. Donc pour un B.B, la corrélation entre deux instants différents est nulle, alors que la variance du processus est

infinie, comme on peut le voir en remplaçant $S(\omega)$ par une constante dans l'équation (2.29).

Un bruit blanc ne peut pas exister physiquement, mais il représente une idéalisation utile pour plusieurs phénomènes aléatoires caractérisés par une très courte mémoire. Sa simplicité permet aux solutions approximatives d'être obtenues pour divers problèmes. Pour les raisons ci-dessus, le B.B joue un rôle important dans l'analyse des vibrations aléatoires.

6. Réponse d'un système à un degré de liberté à une excitation aléatoire stationnaire

6.1. Relation entrée-sortie d'un oscillateur linéaire à un degré de liberté

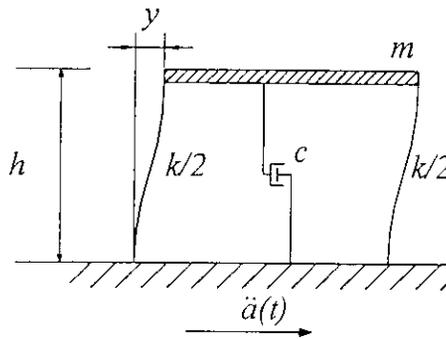


Fig. 2.1- Oscillateur à un degré de liberté

L'équation du mouvement d'un oscillateur simple de masse m , de facteur d'amortissement c et d'une raideur k , et soumis à une accélération d'appuis $\ddot{a}(t)$ (Fig. 2.1) s'écrit :

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = -\ddot{a}(t) \quad (2.35)$$

ω_n désigne la fréquence propre et ξ la fraction de l'amortissement critique définies par :

$$\omega_n = \frac{k}{m} \quad ; \quad 2\xi\omega_n = \frac{c}{m} \quad (2.36)$$

La solution de l'équation (2.35) pour des conditions initiales nulles s'écrit sous la forme d'un produit de convolution comme suit (Preumont, 1990):

$$y(t) = \int_0^t \ddot{a}(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) \cdot \ddot{a}(t-\tau) d\tau = h * \ddot{a} \quad (2.37)$$

Cette expression exprime la relation entrée sortie dans le domaine temporelle d'un système linéaire à un degré de liberté soumis à une excitation d'appuis $\ddot{a}(t)$ à support positif ($\ddot{a}(t) = 0$ pour $t < 0$) et $h(t-\tau)$ exprime la réponse impulsionnelle du système qui est donnée par :

La transformée de Fourier inverse de $S_{YY}(\omega)$ donne la fonction d'autocorrélation de la réponse comme suit :

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.50)$$

Pour $\tau = 0$, on obtient la variance du processus de la réponse :

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) d\omega \quad (2.51)$$

Comme mentionné plus haut, si le processus d'entrée est gaussien, la linéarité de l'équation (2.49) assure que le processus de la réponse est aussi gaussien. Dans ce cas, le processus est complètement caractérisé par $R_{YY}(\tau)$ ainsi que par sa transformée $S_{YY}(\omega)$.

6.3. Réponse transitoire à une excitation aléatoire stationnaire.

La réponse $Y(t)$ d'un système initialement au repos, à une excitation aléatoire $\ddot{A}(t)$, est donnée par l'équation (2.45). Les moments seront alors donnés par

$$E[Y(t_1) \dots Y(t_n)] = \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_n} E[\ddot{A}(\tau_1) \dots \ddot{A}(\tau_n)] \cdot h(t_1 - \tau_1) \dots h(t_n - \tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1 \int_0^{\quad} \quad (2.52)$$

Dans le cas où l'excitation est faiblement stationnaire, on a :

$$E[\ddot{A}(\tau_1)\ddot{A}(\tau_2)] = R_{\ddot{A}\ddot{A}}(\tau_1 - \tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) e^{i\omega(\tau_1 - \tau_2)} d\omega \quad (2.53)$$

$$R_{YY}(\tau_1 - \tau_2) = E[Y(\tau_1)Y(\tau_2)] = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_{\ddot{A}\ddot{A}}(\tau_1 - \tau_2) h(t - \tau_1) h(t - \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \quad (2.54)$$

En combinant cette équation avec l'équation (2.52) on obtient la fonction d'autocorrélation de la réponse :

$$R_{YY}(\tau_1 - \tau_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) e^{i\omega(\tau_1 - \tau_2)} h(t - \tau_1) h(t - \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 d\omega \quad (2.55)$$

puis en intégrant sur τ_1 et τ_2 , on obtient :

$$R_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{A}\ddot{A}}(\omega) \tilde{H}(\omega, t_1) \tilde{H}^*(\omega, t_2) e^{i\omega(t_1 - t_2)} d\omega \quad (2.56)$$

où

$$\tilde{H}(\omega, t) = \int_0^t h(\alpha) e^{-i\omega\alpha} d\alpha \quad (2.57)$$

La moyenne quadratique $E[Y^2(t)]$ peut être obtenue en posant $t_1 = t_2 = t$ dans l'équation (2.56). On obtient alors :

$$E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) |\tilde{H}(\omega, t)|^2 d\omega \quad (2.58)$$

Ainsi, la DSP de la réponse $y(t)$ peut s'écrire comme suit :

$$S_{yy}(\omega, t) = |\tilde{H}(\omega, t)|^2 S_{\ddot{x}\ddot{x}}(\omega) \quad (2.59)$$

$\tilde{H}(\omega, t)$ est appelée fonction de transfert transitoire. Elle existe toujours pour un système amorti. Pour un oscillateur linéaire elle est donnée par (Caughey et Stumpf, 1961) :

$$\tilde{H}(\omega, t) = H(\omega) \left[e^{-i\omega t} - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi\omega_n - i\omega}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) \right] \quad (2.60)$$

on aura alors :

$$\begin{aligned} |\tilde{H}(\omega, t)|^2 = |H(\omega)|^2 & \left\{ \left[e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi\omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) - \cos \omega t \right]^2 \right. \\ & \left. + \left[e^{-\xi\omega_n t} \frac{\omega}{\omega_d} \sin \omega_d t - \sin \omega t \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.61)$$

On observera que $\tilde{H}(\omega, t)$ tend vers $H(\omega)$ quand t est grand, cela est d'autant plus rapide que l'amortissement est important. Après convergence de $\tilde{H}(\omega, t)$ vers $H(\omega)$, l'équation (2.56) ne dépendra que de $t_1 - t_2$, ce qui indique que la réponse devient stationnaire.

7. Conclusions

A travers ce chapitre, nous avons vu que pour la classe des systèmes linéaires, la relation entrée-sortie s'exprime par des produits de convolution dans le domaine temporel et des multiplications dans le domaine fréquentiel. Il s'ensuit que la plupart des traitements s'effectuent plus simplement dans le domaine fréquentiel. La facilité avec laquelle la relation entrée-sortie s'exprime dans le domaine fréquentiel est d'ailleurs une caractéristique attrayante des systèmes linéaires. En effet, la réponse d'un système linéaire à une excitation Gaussienne est également Gaussienne. De tels processus sont entièrement caractérisés par leurs propriétés statistiques du deuxième ordre, en occurrence la moyenne et la fonction d'autocorrélation ou de densité spectrale de puissance.

Chapitre 3

Statistiques des pics ordonnés

1. Introduction

En utilisant la probabilité de distribution des maxima d'un processus stochastique stationnaire, plusieurs formulations ont été développées sur la distribution des probabilités des différents pics d'un processus stationnaire lorsque les pics sont ordonnés de manière décroissante selon leurs amplitudes. Amini et Trifunac (1981) ont développé une distribution de probabilité des pics en les considérant comme des événements statistiquement indépendants. Gupta et Trifunac (1988) ont amélioré la formulation de Amini et Trifunac afin d'obtenir des valeurs plus précises des pics les plus importants. Basu et *al* (1996, 1996a) ont modifié la distribution de probabilité des pics ordonnés pour prendre en compte la dépendance entre les pics en utilisant la théorie de Markov.

Nous présenterons dans ce qui suit, la formulation développée par Gupta et Trifunac (1988) qui donne de bonnes estimations de la valeur des pics ordonnés pour un processus stochastique stationnaire et que l'hypothèse d'indépendance des pics ordonnés reste valable aussi pour les processus à bande étroite (Gupta et Trifunac, 1998b).

2. Taux de franchissement d'un seuil a . Formule de Rice

Pour un processus Gaussien stationnaire $X(t)$ à moyenne nulle, le taux moyen de franchissement à pente positive d'un seuil a est donné par (Preumont, 1990) :

$$\alpha_a^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{X}}}{\sigma_X} e^{\left(\frac{a^2}{\sigma_X^2}\right)} \quad (3.1)$$

où $\sigma_X^2 = E[X^2(t)]$ et $\sigma_{\dot{X}}^2 = E[\dot{X}^2(t)]$ sont les variances de $X(t)$ et $\dot{X}(t)$ respectivement, lesquelles sont définies en fonction de la DSP unilatérale de $X(t)$ comme suit :

$$\sigma_X^2 = \int_0^\infty G_{XX}(\omega) d\omega \quad \text{et} \quad \sigma_{\dot{X}}^2 = \int_0^\infty \omega^2 G_{XX}(\omega) d\omega \quad (3.2)$$

En définissant le moment d'ordre n de la DSP $G_{XX}(\omega)$ par :

$$m_n = \int_0^\infty \omega^n G_{XX}(\omega) d\omega ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

l'équation (3.2) peut s'écrire

$$\alpha_a^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{\left(-\frac{a^2}{m_0}\right)} \quad (3.4)$$

le moment d'ordre zéro, m_0 , est égal à la moyenne quadratique du processus $x(t)$. Si on introduit l'amplitude normalisée η tel que

$$\eta = \frac{a}{\sqrt{m_0}} \quad (3.5)$$

alors le taux de franchissement à pente positive d'un seuil η dans le processus $x(t)$ normalisé par l'amplitude moyenne quadratique est donné par :

$$\alpha_\eta^+ = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} e^{\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)} \quad (3.6)$$

Etant donné que la distribution d'un processus Gaussien est symétrique, alors le nombre moyen de fois pour lequel le processus normalisé $x(t)$ va dépassé le seuil $-\eta$ (c'est-à-dire dans le sens opposé) est aussi le même.

3. Distribution des maxima

Pour obtenir la probabilité de distribution des maxima locaux d'un processus aléatoire $X(t)$, Cartwright et Longuet-Higgins (1956) ont représentés le processus comme étant la somme d'un nombre infini de fonctions sinusoïdales à phases aléatoires comme suit :

$$X(t) = \sum_n C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (3.7)$$

où ω_n sont les fréquences circulaires, φ_n des phases aléatoires uniformément distribuées entre 0 et 2π , et les amplitudes C_n sont de tel sorte que pour un petit intervalle $d\omega$, on a :

$$\sum_{\omega_n=\omega}^{\omega+d\omega} \frac{1}{2} C_n^2 = S(\omega) d\omega \quad (3.8)$$

où $S(\omega)$ représente le spectre d'énergie de $X(t)$.

En considérant que le processus $X(t)$ est deux fois dérivable, un maximum se produit quand $\dot{X}(t)=0$ et $\ddot{X}(t)<0$. La probabilité que ça se produise simultanément sur un intervalle $[x, x + dx]$ est donnée par :

$$dx \int_{-\infty}^0 \ddot{x} f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} \quad (3.9)$$

où $f(x, \dot{x}, \ddot{x})$ est la densité de probabilité conjointe du processus $X(t)$ et de ses dérivées $\dot{X}(t)$ et $\ddot{X}(t)$. A partir de l'équation (3.7) on a :

$$\dot{X}(t) = -\sum_n C_n \omega_n \sin(\omega_n t + \varphi_n) \quad (3.10)$$

$$\ddot{X}(t) = -\sum_n C_n \omega_n^2 \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (3.11)$$

En considérant $X(t)$ comme un processus gaussien stationnaire de moyenne nulle, la densité de probabilité conjointe de $X(t)$, $\dot{X}(t)$ et $\ddot{X}(t)$ s'exprime à partir de l'équation (2.22) comme suit:

$$f(\{X\}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |[V]|^{1/3}} \exp\left(-\frac{1}{2} \{X\}^T [V]^{-1} \{X\}\right) \quad (3.12)$$

avec $\{X\} = \{x \ \dot{x} \ \ddot{x}\}^T$ et $[V] = E[\{X\} \{X\}^T] = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 \end{pmatrix}$

$[V]$ représente la matrice des covariances dans laquelle m_0 , m_2 et m_4 désignent les moments spectraux d'ordre 0, 2 et 4, respectivement qui sont donnés par :

$$m_n = \int_0^{\infty} \omega^n S(\omega) d\omega \quad ; \quad n = 0, 2, 4 \quad (3.13)$$

Le taux moyen total des maxima est donné par :

$$\bar{N} = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^0 \ddot{x} f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} \quad (3.14)$$

en utilisant l'équation (3.12) dans l'équation (3.14) on obtient :

$$\bar{N} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_4}{m_2} \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

Si le Processus $X(t)$ a une durée totale T , alors le nombre total de maxima sera donné par :

$$N = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \quad (3.16)$$

La fréquence moyenne des maxima sur un intervalle $[x, x + dx]$ s'écrit :

$$F(x) dx = dx \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x} f(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} \quad (3.17)$$

La probabilité de distribution des maxima de $X(t)$ est obtenue en divisant l'équation (3.17) par l'équation (3.14) et en normalisant le résultat par $\sqrt{m_0}$. On obtient alors :

$$p(\eta) = \sqrt{m_0} \frac{F(x)}{N} \quad (3.18)$$

en utilisant l'équation (3.12), on auras :

$$p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\varepsilon \cdot e^{(-\eta^2/2\varepsilon^2)} + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \cdot \eta \cdot e^{(-\eta^2/2)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon} e^{(-x^2/2)} dx \right] \quad (3.19)$$

où η désigne l'amplitude normalisée par l'amplitude moyenne quadratique a_{rms} :

$$\eta = \frac{x(t)}{a_{rms}} \quad (3.20)$$

avec

$$a_{rms} = \sqrt{m_0} \quad (3.21)$$

et ε est un paramètre compris entre 0 et 1 défini comme suit :

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}} \quad (3.22)$$

Le paramètre ε est une mesure de la largeur de bande du spectre fréquentiel du processus $x(t)$ relative à sa fréquence prédominante. Pour $\varepsilon = 0$ la distribution (3.19) devient une distribution de Rayleigh :

$$p(\eta) = \eta e^{(-\eta^2/2)} \quad \eta \geq 0 \quad (3.23)$$

Pour $\varepsilon = 1$, la distribution devient une distribution Gaussienne.

$$p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\eta^2/2)} \quad (3.24)$$

La figure (3.1) montre la FDP des maxima pour différentes valeurs de ε .

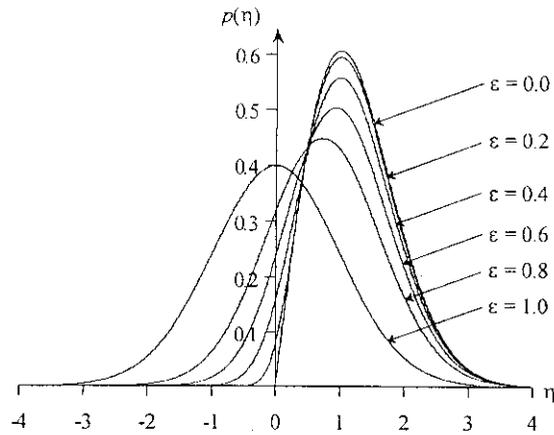


Fig. 3.1– Fonction de densité de probabilité des maxima pour différentes valeurs de ε .

La fonction de distribution cumulative pour que l'amplitude du pic normalisé dépasse une valeur η , peu être définie par :

$$P(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{\eta/\varepsilon}^{\infty} e^{-x^2/2} dx + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \cdot e^{-(\eta^2/2)} \cdot \int_{-\infty}^{\eta \frac{(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon}} e^{-x^2/2} dx \right] \quad (3.25)$$

La figure (3.2) montre la FDC pour que la valeur du maximum soit plus grande que η pour différentes valeurs de ε .

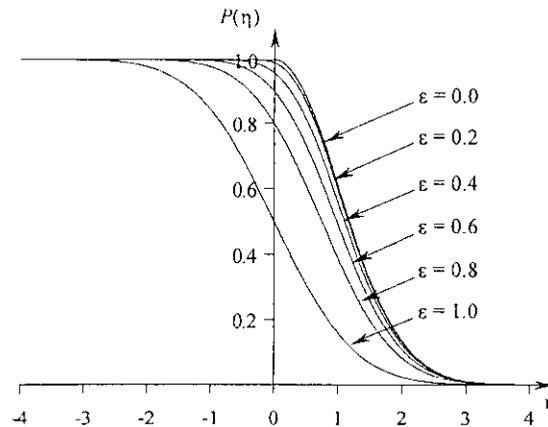


Fig. 3.2– Fonction de distribution cumulative pour que la valeur du maximum soit plus grande que η pour différentes valeurs de ε

Les intégrales (3.19) et (3.25) peuvent être évaluées en utilisant la fonction erreur définie comme suit (Press et al, 1986) :

$$\operatorname{erf}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt \quad \text{pour } x \geq 0 \quad \text{et } \operatorname{erf}(x) = -\operatorname{erf}(-x) \quad \text{pour } x < 0 \quad (3.26)$$

alors on peut écrire

$$p(\eta) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(\frac{\eta^2}{2\varepsilon^2}\right)} + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \cdot \eta \cdot e^{\left(\frac{-\eta^2}{2}\right)} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{\eta(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\sqrt{2\varepsilon}} \right] \right\} & \dots \eta \geq 0 \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(\frac{\eta^2}{2\varepsilon^2}\right)} + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \cdot \eta \cdot e^{\left(\frac{-\eta^2}{2}\right)} \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{-\eta(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\sqrt{2\varepsilon}} \right] \right\} & \dots \eta < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

$$P(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\eta}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) \right] + \frac{1}{2} (1-\varepsilon^2)^{1/2} \cdot e^{\left(\frac{-\eta^2}{2}\right)} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left[\frac{\eta(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\sqrt{2\varepsilon}} \right] \right\} & \dots \eta \geq 0 \\ \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{-\eta}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) \right] + \frac{1}{2} (1-\varepsilon^2)^{1/2} \cdot e^{\left(\frac{-\eta^2}{2}\right)} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{-\eta(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\sqrt{2\varepsilon}} \right] \right\} & \dots \eta < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

4. Statistiques des pics ordonnés

4.1. Probabilité de distribution du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné

Soit a_1, a_2, \dots, a_N les variables aléatoires représentant les N pics d'une fonction aléatoire $x(t)$ (Fig. 3.3).

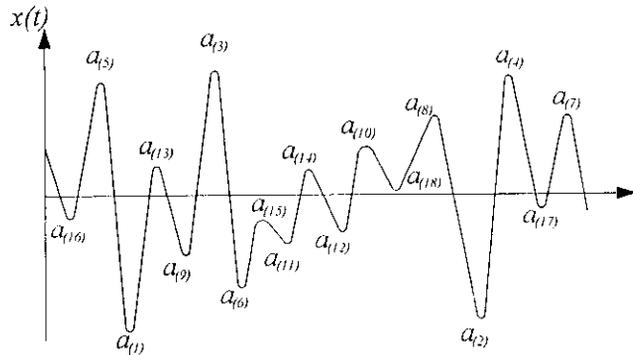


Fig. 3.3- Exemple d'une fonction aléatoire $x(t)$ avec $a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(N)}$ respectivement les pics du 1^{er} ordre, 2^{ème} ordre, 3^{ème} ordre, ... $N^{\text{ème}}$ ordre.

La fonction cumulative de distribution $P(\eta)$ de chaque variable est donnée par

$$P(\eta) = \operatorname{Prob}\{a_i > \eta\} = \int_{\eta}^{\infty} p(u) du \quad (3.29)$$

où $p(u)$ est la fonction de densité de probabilité des pics de $x(t)$. Les fonctions de probabilité des pics de $x(t)$ normalisées par rapport à l'amplitude moyenne quadratique, sont données par les équations (3.19) et (3.25).

En arrangeant les pics de manière décroissante selon leurs amplitudes, on obtient les variables suivantes $a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(N)}$, avec $a_{(1)} \geq a_{(2)} \geq a_{(3)}, \dots, \geq a_{(N)}$ (fig. 3.3).

La probabilité pour que le $n^{\text{ème}}$ pic ordonné ne dépasse pas la valeur η peut s'écrire comme suit:

$$F_{(n)}(\eta) = \text{Prob}\{a_{(n)} \leq \eta\} \tag{3.30}$$

Les pics étant ordonnés de manière décroissante, la probabilité précédente est égale à la probabilité pour qu'au moins $n-1$ pics soient plus petits que η . Par conséquent :

$$\begin{aligned} F_{(n)}(\eta) &= \text{Prob}\left\{\text{au moins } N-n+1 \text{ pics des } a_{(i)} \text{ sont plus petits ou égales à } \eta\right\} \\ &= \text{Prob}\left\{\text{au plus } n-1 \text{ pics des } a_{(i)} \text{ sont plus grands que } \eta\right\} \end{aligned} \tag{3.31}$$

on peut encore écrire

$$\begin{aligned} F_{(n)}(\eta) &= \text{Prob}\left\{\begin{array}{l} \text{Exactement } n-1 \text{ pics sont plus grands que } \eta \\ \text{Exactement } n-2 \text{ pics sont plus grands que } \eta \\ \vdots \\ \text{Exactement } 2 \text{ pics sont plus grands que } \eta \\ \text{Exactement } 1 \text{ pic est plus grand que } \eta \\ \text{Exactement } 0 \text{ pics sont plus grands que } \eta \end{array}\right\} \end{aligned} \tag{3.32}$$

En considérant que les pics sont statistiquement indépendants, la probabilité de l'équation (3.32) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} F_{(n)}(\eta) &= \text{Prob}\left\{\begin{array}{l} \text{Exactement } n-1 \text{ pics sont plus grands que } \eta \\ + \text{ Prob}\{\text{Exactement } n-2 \text{ pics sont plus grands que } \eta\} \\ + \text{ Prob}\{\text{Exactement } n-3 \text{ pics sont plus grands que } \eta\} \\ \vdots \\ + \text{ Prob}\{\text{Exactement } 2 \text{ pics sont plus grands que } \eta\} \\ + \text{ Prob}\{\text{Exactement } 1 \text{ pic est plus grand que } \eta\} \\ + \text{ Prob}\{\text{Exactement } 0 \text{ pics sont plus grands que } \eta\} \end{array}\right\} \end{aligned} \tag{3.33}$$

ou bien

$$F_{(n)}(\eta) = \sum_{i=0}^{n-1} \text{Prob}\left\{\text{exactement } i \text{ pics sont plus grands que } \eta\right\} \tag{3.34}$$

La probabilité qu'un pic soit plus grand que η est donnée par $P(\eta)$, qui reste constante pour des valeurs fixes de m_0 et de ε . En outre, il n'y a que deux possibilités : soit que le pic est plus grand qu'une valeur particulière de η , ou bien qu'il soit plus petit que cette valeur. Aussi, les pics sont considérés statistiquement indépendants. Donc on peut dire que le déroulement des pics suit la loi de Bernoulli et que la probabilité pour que i des N pics ne dépasseront pas la valeur η est donnée par la distribution binomiale comme suit (Newland, 1984) :

$$= \binom{N}{i} [P(\eta)]^i [1 - P(\eta)]^{N-i} \tag{3.35}$$

En utilisant l'équation (3.35) dans l'équation (3.34) on obtient :

$$F_{(n)}(\eta) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{N}{i} [P(\eta)]^i [1 - P(\eta)]^{N-i} \tag{3.36}$$

cette équation donne la probabilité cumulative pour que le $n^{\text{ème}}$ pic parmi les N pics, ne dépasse pas la valeur η . La figure (3.4) montre le tracé de la fonction de probabilité cumulative des cinq premiers pics d'un processus pour $\varepsilon = 0.5$ et $N = 10$.

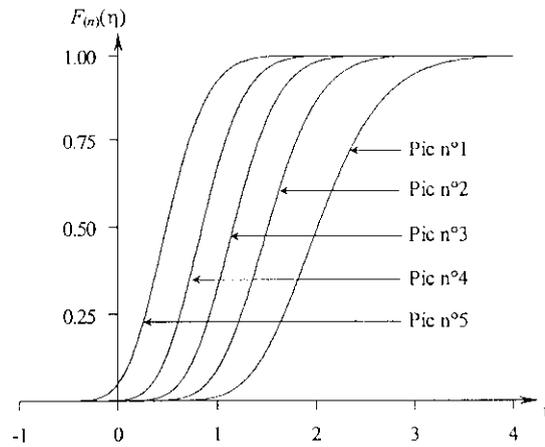


Fig. 3.4- La fonction de distribution cumulative $F_{(n)}(\eta)$ des cinq premiers pics ordonnés pour $\varepsilon = 0.5$ et $N = 10$.

4.2. Valeur la plus probable du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné

A partir de l'équation (3.36), la densité de probabilité du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné est donnée par

$$f_{(n)}(\eta) = -\frac{dF_{(n)}(\eta)}{d\eta} = -\sum_{i=n}^N \binom{N}{i} \left\{ i [P(\eta)]^{i-1} [1 - P(\eta)]^{N-i} - (N - i) [P(\eta)]^i [1 - P(\eta)]^{N-i-1} \right\} \frac{dP(\eta)}{d\eta} \tag{3.37}$$

Puisqu'on a $\frac{dP(\eta)}{d\eta} = -p(\eta)$, l'équation (3.37) peut s'écrire comme suit :

$$f_{(n)}(\eta) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{N}{i} \left\{ i [P(\eta)]^{i-1} [1-P(\eta)]^{N-i} - (N-i) [P(\eta)]^i [1-P(\eta)]^{N-i-1} \right\} P(\eta) \quad (3.38)$$

En utilisant les égalités suivantes

$$\binom{N}{i} (N-i) = \binom{N}{i+1} (i+1) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n-1$$

on trouve que :

$$f_{(n)}(\eta) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \binom{N}{i} \cdot i \cdot [P(\eta)]^{i-1} [1-P(\eta)]^{N-i} - \binom{N}{i} \cdot (N-i) \cdot [P(\eta)]^i [1-P(\eta)]^{N-i-1} \right\} P(\eta) \quad (3.39)$$

En développant la somme de cette équation on obtient :

$$\begin{aligned} f_{(n)}(\eta) &= \left\{ 0 - \binom{N}{1} (0+1) [P(\eta)]^0 [1-P(\eta)]^{N-0-1} \right\} P(\eta) \\ &+ \left\{ \binom{N}{1} (1) [P(\eta)]^0 [1-P(\eta)]^{N-1} - \binom{N}{2} (2) [P(\eta)]^1 [1-P(\eta)]^{N-2} \right\} P(\eta) \\ &+ \left\{ \binom{N}{2} (2) [P(\eta)]^1 [1-P(\eta)]^{N-2} - \binom{N}{3} (3) [P(\eta)]^2 [1-P(\eta)]^{N-3} \right\} P(\eta) \\ &+ \dots + \left\{ \binom{N}{n-1} (n-1) [P(\eta)]^{n-2} [1-P(\eta)]^{N-n+1} - \binom{N}{n} (n) [P(\eta)]^{n-1} [1-P(\eta)]^{N-n} \right\} P(\eta) \quad (3.40) \end{aligned}$$

Donc, la fonction de densité de probabilité du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné devient :

$$f_{(n)}(\eta) = n \binom{N}{n} [P(\eta)]^{n-1} [1-P(\eta)]^{N-n} P(\eta) \quad (3.41)$$

La valeur la plus probable du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné est la valeur de η pour laquelle $f_{(n)}(\eta)$ est maximale.

La figure (3.5) montre le tracé de densité de probabilité des 5 premiers pics ordonné d'un processus ayant les paramètres statistiques suivant $\varepsilon = 0.5$ et $N = 10$.

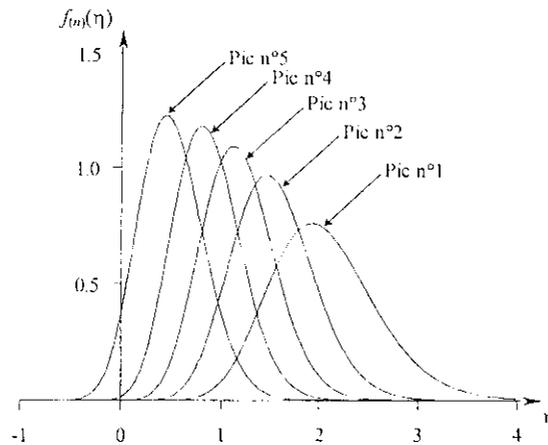


Fig. 3.5- La fonction de densité de probabilité $f_m(\eta)$ pour les cinq premiers pics ordonnés, $\varepsilon = 0.5$ et $N = 10$.

Pour déterminer la valeur la plus probable de manière précise, on évalue la fonction $f_m(\eta)$ pour différentes valeurs de η à des intervalles très rapprochés égales à 0.05. En comparant les amplitudes de $f_m(\eta)$ pour trois points consécutifs, on peut localiser trois points autour du point maximum. Une parabole passant par les trois points localisés, nous permet de localiser la valeur de η pour laquelle la première dérivée de la parabole est nulle. Cette valeur de η représente la valeur la plus probable du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné.

4.3. Valeur attendue du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné

En utilisant la fonction de densité de probabilité $f_m(\eta)$ donnée par l'équation (3.41), la valeur attendue (moyenne) du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné est donnée par :

$$E[a_{(n)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \eta f_m(\eta) d\eta \quad (3.42)$$

Le calcul de cette équation peut être mené de manière exacte par intégration numérique de l'équation (3.42). Gupta et Trifunac (1998) ont développé une expression approximative qui donne de manière efficace la valeur attendue du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné.

5. Applications numériques

L'applicabilité des procédures décrites dans les paragraphes précédents est examinée à travers des exemples numériques. Quatre enregistrements accélérométriques correspondant aux composantes S90W du séisme d'El-Centro du 18 mai 1940 (Fig.3.6a), N05W du séisme de Parkfield du 27 juin 1966, enregistrée à Cholame Shandon (Fig.3.6b), N90W de la réplique d'El Attaf du séisme d'El Asnam du 10 octobre 1980 (Fig.3.6c), N90E du séisme de Cherchell du 29 octobre 1989, (Fig.3.6d), ont été choisi à cet effet.

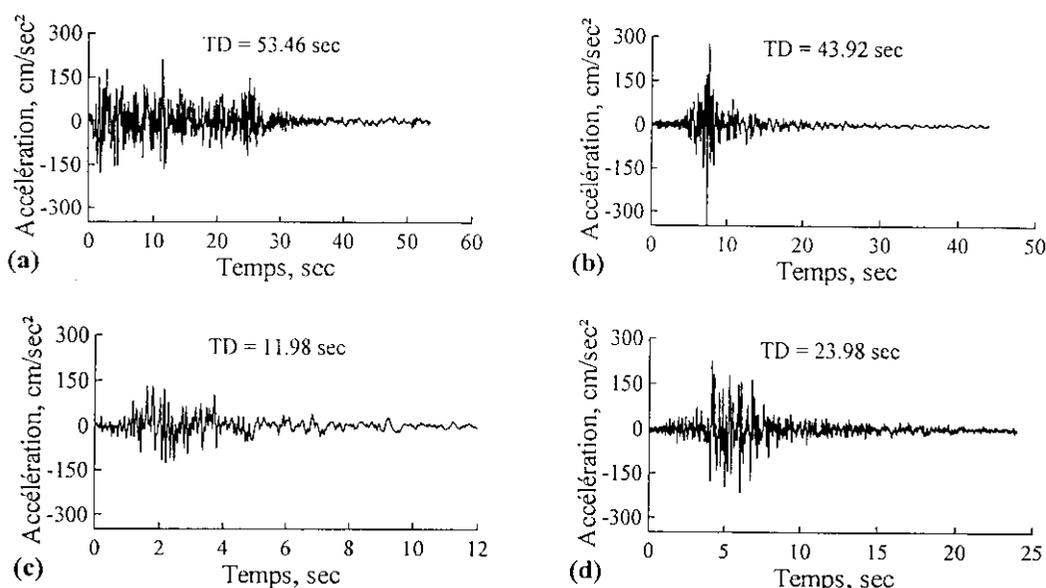


Fig. 3.6- Enregistrements accélérométriques. a) séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, b) séisme de Parkfield du 27 juin 1966, c) séisme d'El Asnam du 10 octobre 1980, d) séisme de Cherchell du 29 octobre 1989.

Ces accélérogrammes ont été utilisés pour le calcul des rapports théoriques, $E[a_{(1)}]/E[a_{(n)}]$, entre le premier pic espéré et les pics espérés d'ordre n . Ces rapports sont ensuite comparés aux rapports des pics réels correspondants, $a_{(1)}/a_{(n)}$.

On procède au calcul amplitudes attendues, $E[\eta_{(1)}], E[\eta_{(2)}], E[\eta_{(3)}], \dots$ des différents pics ordonnés normalisés, à partir de l'équation (3.42). Pour ce faire, on utilise les résultats de Cartwright et Longuet-Higgins (1956) permettant de déterminer le paramètre ε en fonction du rapport ν , qui représente le rapport entre le nombre de pics négatifs et le nombre total de pics de l'accélérogramme, selon la relation suivante :

$$\varepsilon = \sqrt{1 - (1 - 2\nu)^2} \quad (3.43)$$

Les pics réels $a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)}, \dots$ ainsi que le nombre total de pics N , sont déterminés directement à partir de l'enregistrement accélérométrique.

Les résultats des figures (3.7a) à (3.7d) montrent qu'en général, plusieurs pics d'ordre inférieur qui correspondent au mouvement fort de l'accélérogramme, montrent une bonne concordance avec les pics théoriques espérés. Mais dans certains cas (Fig.3.7b) le rapport $a_{(1)}/a_{(n)}$ remonte très rapidement au dessus du rapport théorique $E[a_{(1)}]/E[a_{(n)}]$. De tel accélérogrammes sont caractérisés par un ou deux pics isolés d'une amplitude très importante qui diminuent brusquement vers les autres pics.

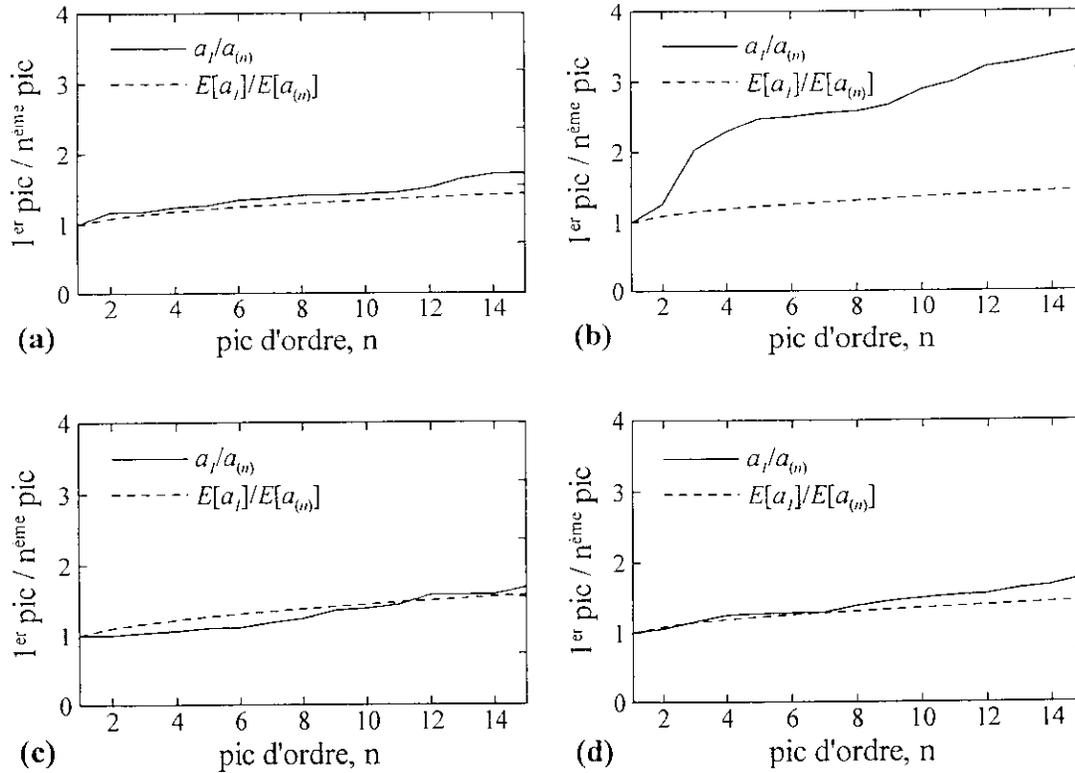


Fig. 3.7— Comparaison du rapport $E[a_{(1)}] / E[a_{(n)}]$ avec le rapport $a_{(1)} / a_{(n)}$ pour les enregistrements accélérométriques de : a) séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, b) séisme de Parkfield du 27 juin 1966, c) séisme d'El Asnam du 10 octobre 1980, d) séisme de Cherchell du 29 octobre 1989.

6. Conclusions

La plupart des études déjà effectuées sur la réponse stochastique des structures ont considéré les statistiques du pic le plus important seulement. La théorie des statistiques des pics ordonnées présentée dans ce chapitre nous permet non seulement d'estimer l'amplitude du pic le plus important mais aussi les autres pics les plus significatifs de la réponse. La détermination de ces pics dépend de trois paramètres : (i) a_{rms} , la moyenne quadratique des amplitudes de la réponse, (ii) ϵ , une mesure de la largeur de bande du spectre de réponse, et (iii) N , le nombre total des pics de la réponse.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus avec les hypothèses de la stationnarité et de l'indépendance mutuelle des amplitudes des maxima d'une fonction aléatoire. Il a été observé que les amplitudes des pics obtenus par la formulation de Gupta et Trifunac sont proches des amplitudes des pics réels, surtout pour les pics d'ordre inférieur (les pics les plus importants).

Les valeurs attendues, et les valeurs les plus probables peuvent être utilisées afin de tracer l'amplitude relative spectrale de la réponse maximale ainsi que pour la deuxième, troisième,

Chapitre 4

Génération de DSP compatible avec un spectre de réponse

1. Introduction

Dans ce chapitre, plusieurs méthodes de détermination d'une DSP d'un mouvement sismique en vue du calcul dynamique de la réponse stochastique des structures, sont exposées. La théorie de vibrations aléatoires et les statistiques des pics ordonnés présentés dans les chapitres précédents sont exploitées à cet effet.

Outre la représentation analytique de l'action sismique par un bruit blanc ou par un bruit blanc filtré, il est examiné deux méthodes pour lesquelles la DSP est définie de manière à être compatible avec un spectre de réponse donné. Dans la première méthode, la DSP est définie en terme du spectre de Fourier et de la durée stationnaire du mouvement fort. Tandis que dans la deuxième méthode, la DSP est déterminée itérativement à partir d'un spectre de réponse cible. Les résultats obtenus montrent que les spectres de réponse théoriques et les spectres de réponse cibles, sont en excellent accord pour une gamme de fréquences très étendue englobant aussi bien le domaine des basses que celui des hautes fréquences. Cette deuxième approche permet de prendre en considération les effets de la non-stationnarité du mouvement sismique ainsi que celui de la nature transitoire de la réponse dynamique des structures.

2. Représentations de l'action sismique par la densité spectrale de puissance

2.1. Bruit Blanc (White Noise)

Les premiers modèles stochastiques du mouvement fort, supposaient que l'énergie du séisme était uniformément distribuée sur toutes les fréquences considérées (Bycroft, 1960). L'accélération est ainsi représentée par un bruit blanc à bande limitée dont la DSP est égale à une constante jusqu'à une fréquence ω_{\max} , et nulle pour les fréquences supérieures (Fig. 4.1) :

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0 & \text{pour } \omega \in [0, \omega_{\max}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

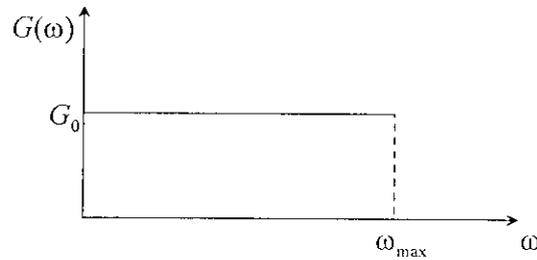


Fig 4.1- Représentation de l'action sismique par un bruit blanc

2.2. Densité spectrale de puissance de Kanai-Tajimi

Une analyse approfondie du mouvement sismique, a montré que l'énergie du séisme n'est pas distribuée uniformément sur toutes les fréquences considérées, mais qu'elle est concentrée dans un intervalle limité de fréquences. C'est pourquoi, en se basant sur les travaux de Kanai (1957) sur le contenu fréquentielle des enregistrements sismiques, Tajimi (1960) a proposé une expression analytique de la DSP de l'accélération sismique.

$$G(\omega) = G_0 \frac{1 - 4\xi_g^2 (\omega/\omega_g)^2}{\left[1 - (\omega/\omega_g)^2\right]^2 + 4\xi_g^2 (\omega/\omega_g)^2} \quad (4.1)$$

où ξ_g et ω_g représentent, respectivement, l'amortissement et la fréquence prédominante du sol et G_0 l'intensité du mouvement fort.

La DSP de Kanai-Tajimi a été largement utilisée pour représenter une excitation sismique stationnaire, et plusieurs études ont été menées pour obtenir les paramètres ξ_g , ω_g et G_0 (Lai, 1982 ; Elghadamsi et al, 1988)

Les figures (4.2a) et (4.2b) montrent respectivement les DSP normalisées de Kanai-Tajimi pour les composantes horizontales et verticales, d'accélérogrammes enregistrés pour trois types de sites : alluvions, alluvions/rocher et rocher. Les paramètres ξ_g , ω_g et G_0 , obtenues par Elghadamsi et al (1988), sont donnés au tableau (4.1).

Tableau 4.1 – Paramètres de Kanai-Tajimi pour des composantes horizontales et verticales d'accélérogrammes enregistrés sur un site d'alluvions, alluvions/rocher et rocher.

	Catégorie de site	G_0	ω_g	ξ_g
Horizontales	Alluvions	0.102	18.35	0.34
	Alluvions / Rocher	0.078	22.87	0.30
	Rocher	0.070	27.02	0.30
Verticales	Alluvions	0.080	26.20	0.46
	Alluvions / Rocher	0.072	29.09	0.46
	Rocher	0.053	38.83	0.46

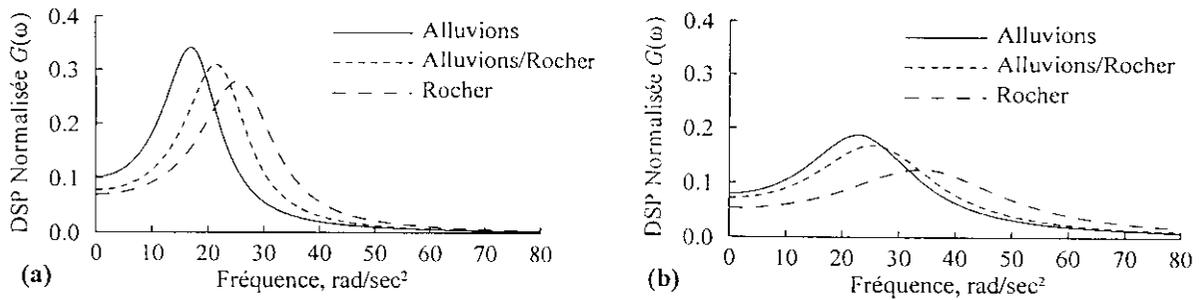


Fig. 4.2- DSP normalisées de Kanai-Tajimi, pour différentes conditions de site. a) composantes horizontales. b) composantes verticales.

2.3. Densité spectrale de puissance de Clough est Penzien

La DSP définie par l'équation (4.1), ne s'annule pas pour une fréquence égale à zéro, cela conduit à des valeurs infinies de la moyenne quadratique de la vitesse et du déplacement du sol. Pour éliminer ce problème, Clough et Penzien (1975) ont introduit un filtre passe-haut (high-pass) de second ordre pour modifier l'équation (4.1) comme suit :

$$G(\omega) = G_0 \frac{1 - 4\xi_g^2 (\omega/\omega_g)^2}{\left[1 - (\omega/\omega_g)^2\right]^2 + 4\xi_g^2 (\omega/\omega_g)^2} \cdot \frac{(\omega/\omega_k)^4}{\left[1 - (\omega/\omega_k)^2\right]^2 + 4\xi_k^2 (\omega/\omega_k)^2} \quad (4.2)$$

Der-Kiureghian et Neuenhofer (1992) ont proposé des valeurs pour les paramètres du filtre ω_k et ξ_k : 1.5 et 0.6 pour les sites rocheux, 0.5 et 0.6 pour les sites alluvionnaires et 1.0 et 0.6 pour les sites intermédiaires.

Les figures (4.3a) et (4.3b) montrent respectivement les DSP normalisées de Clough et Penzien pour les composantes horizontales et verticales d'accélérogrammes enregistrés pour trois types de sites. Etant donné que le deuxième rapport tend rapidement vers 1 lorsque ω augmente, on constate qu'il n'influence la forme de la DSP que pour la région des très basses fréquences.

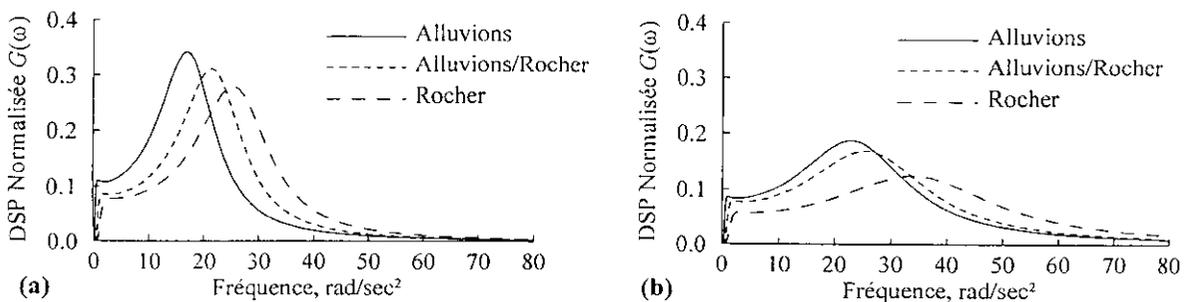


Fig. 4.3- DSP normalisées de Clough et Penzien, pour différentes conditions de site. a) composantes horizontales. b) composantes verticales.

3. DSP déterminée à partir d'un spectre de Fourier (1ère méthode)

La DSP d'un processus stochastique stationnaire de durée T_S peut être définie à partir du spectre de Fourier $FS(\omega)$, comme suit (Bendat et Piersol, 1986) :

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi T_S} |FS(\omega)|^2 \quad (4.3)$$

Les accélérogrammes étant toutefois des fonctions non-stationnaires, l'utilisation de cette formule requiert la définition d'une durée stationnaire T_S qui assure une conservation totale de l'énergie de l'accélérogramme (Trifunac et Brady, 1975) afin que les principaux pics attendus puissent correspondre aux pics réels les plus importants.

Soient $a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)}, \dots$ les amplitudes réelles des différents pics d'un accélérogramme $\ddot{a}(t)$ de durée totale T . On définit et l'amplitude normalisée du $i^{\text{ème}}$ pic ordonné comme suit :

$$\eta_{(i)} = a_{(i)} / a_{rms} \quad (4.4)$$

Pour calculer les valeurs, $E[\eta_{(1)}], E[\eta_{(2)}], E[\eta_{(3)}], \dots$ des amplitudes attendues des différents pics ordonnés normalisés selon l'équation (3.42), on commence par déterminer le paramètre ε à partir de l'équation (3.43), et on calcul N , le nombre total de pics de l'accélérogramme $\ddot{a}(t)$.

Par ailleurs, l'énergie totale de l'accélérogramme $\ddot{a}(t)$ est donnée par (Arias, 1970) :

$$I(T) = \int_0^T [\ddot{a}(t)]^2 dt \quad (4.5)$$

La valeur de a_{rms} pour un processus stationnaire de durée T_S de même énergie que l'accélérogramme $\ddot{a}(t)$, est exprimée par :

$$a_{rms}^2 = \frac{1}{T_S} \int_0^T a^2(t) dt = \frac{1}{T_S} I(T) \quad (4.6)$$

La valeur T_S de la durée stationnaire est alors égale à :

$$T_S = \frac{1}{a_{rms}^2} I(T) \quad (4.7)$$

en utilisant l'équation (4.4), on a pour chaque pic du $i^{\text{ème}}$ ordre la relation suivante :

$$T_{S(i)} = \left(\frac{\eta_{(i)}}{a_{(i)}} \right)^2 I(T) \quad (4.8)$$

En remplaçant l'amplitude normalisée $\eta_{(i)}$ par la valeur attendue $E[\eta_{(i)}]$ du $i^{\text{ème}}$ pic ordonné correspondant, la valeur inconnue de la durée stationnaire du pic d'ordre i pourra être déterminée à partir de l'expression suivante :

$$T_{S(i)} = \left(\frac{E[\eta_{(i)}]}{a_{(i)}} \right)^2 I(T) \quad (4.9)$$

En calculant la durée stationnaire pour un grand nombre de pics d'accélération, la valeur finale de la durée stationnaire du mouvement fort sera prise égale à la moyenne des durées correspondant aux pics les plus élevés caractérisés par des durées plus ou moins stables (Gupta, 1994, 1994a).

4. DSP compatible avec un spectre de réponse (2^{ème} méthode)

Le spectre de réponse d'un mouvement fort correspond à la réponse maximale d'un ensemble d'oscillateurs de fréquences propres et d'amortissements différents (Nigam et Jennings, 1968) et intègre implicitement les effets de la non-stationnarité du mouvement et du caractère transitoire de la réponse. Le calcul de la DSP compatible avec ce spectre inclura automatiquement l'effet de la non-stationnarité du séisme ainsi que la nature transitoire de la réponse pour les longues périodes.

Soit $G(\omega)$ la DSP compatible avec un spectre de réponse donné. La DSP de la réponse en déplacement $GD(\omega)$ d'un oscillateur de pulsation ω_n et d'un pourcentage d'amortissement critique ξ peut s'écrire à partir de l'équation (2.59) comme suit :

$$GD(\omega) = \left| \tilde{H}(\omega, T_D) \right|^2 G(\omega) \quad (4.10)$$

où $\tilde{H}_n(\omega, T_D)$ est la fonction de transfert transitoire de l'oscillateur, donnée par l'équation (2.60) et évaluée à un temps T_D égale à la durée totale du mouvement fort.

Pour obtenir une première approximation des moments m_0 , m_2 et m_4 de la DSP de la réponse en déplacement, on remplace $\tilde{H}_n(\omega, T_D)$ par la fonction de transfert $H_n(\omega)$ et la valeur de $|H_n(\omega)|^2$ par un rectangle de hauteur $1/4\xi^2\omega_n^4$ et de largeur $\pi\xi\omega_n$, centré sur la valeur ω_n . On procède aussi à une approximation de $G(\omega)$ sur une bande à fréquence étroite à partir de $(\omega_n - \frac{1}{2}\xi\omega_n)$ jusqu'à $(\omega_n + \frac{1}{2}\xi\omega_n)$ par une valeur constante $G_0(\omega_n)$.

Avec ces approximations les moments m_0 , m_2 et m_4 de $GD(\omega)$ sont obtenus par:

$$m_0 = \frac{\pi G_0(\omega_n)}{4\xi\omega_n^3} \quad (4.11)$$

$$m_2 = \frac{G_0(\omega_n)}{4\xi^2\omega_n^4} \left(\pi\xi + \frac{1}{12}\pi^3\xi^3 \right) \omega_n^3 \quad (4.12)$$

$$m_4 = \frac{G_0(\omega_n)}{4\xi^2\omega_n^4} \left(\pi\xi + \frac{1}{2}\pi^3\xi^3 + \frac{1}{80}\pi^5\xi^5 \right) \omega_n^5 \quad (4.13)$$

On en déduit aisément l'expression des paramètres a_{rms} , N et ε à partir des équations (3.21), (3.16) et (3.22) comme suit :

$$a_{rms} = \sqrt{\frac{\pi G_0(\omega_n)}{4\pi\xi\omega_n^3}} \quad (4.14)$$

$$N = \frac{T\omega_n}{\pi} \left(\frac{\pi\xi + \frac{1}{2}\pi^3\xi^3 + \frac{1}{80}\pi^5\xi^5}{\pi\xi + \frac{1}{12}\pi^3\xi^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{1 + \frac{1}{6}\pi^2\xi^2 + \frac{1}{144}\pi^4\xi^4}{1 + \frac{1}{2}\pi^2\xi^2 + \frac{1}{80}\pi^4\xi^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.16)$$

On s'aperçoit à partir de ces équations que les paramètres N et ε sont fonction de l'amortissement, de la fréquence naturelle de l'oscillateur, et de la durée totale du mouvement fort. On peut donc calculer l'amplitude normalisée maximale $\bar{\eta}_{\max}$, du plus grand pic de la réponse à partir de l'équation (3.42) pour $n = 1$.

La valeur attendue de la réponse maximale peut être interprétée comme celle d'un oscillateur de pulsation ω_n et d'un pourcentage d'amortissement critique ξ . Elle représente donc par définition l'amplitude attendue du spectre de réponse $\overline{SD}(\omega_n, \xi)$. La valeur moyenne théorique $\overline{PSV}(\omega_n, \xi)$ des amplitudes du pseudo-spectre de vitesse, sera alors donnée par :

$$\overline{PSV}(\omega_n, \xi) = \omega_n \overline{SD}(\omega_n, \xi) = \omega_n \bar{\eta}_{\max} \cdot a_{rms} = \bar{\eta}_{\max} \sqrt{\frac{\pi G_0(\omega_n)}{4\xi\omega_n}} \quad (4.17)$$

En égalisant cette valeur avec la valeur correspondante $PSV(\omega_n, \xi)$ du spectre de réponse cible, on peut déduire la première approximation de la DSP :

$$G_0(\omega_n) = \frac{4\pi\xi\omega_n}{\pi} \left[\frac{PSV(\omega_n, \xi)}{\bar{\eta}_{\max}} \right]^2 \quad (4.18)$$

Cette première approximation est ensuite utilisée de manière itérative en vue d'obtenir une nouvelle valeur plus précise des amplitudes spectrales attendues $\overline{PSV}(\omega_n, \xi)$. On en déduit l'expression de la DSP pour la $j^{\text{ème}}$ itération (Unruh et Kana, 1981) :

$$G_j(\omega) = G_{j-1}(\omega) \left[\frac{PSV(\omega_n, \xi)}{PSV_{j-1}(\omega_n, \xi)} \right]^2 \quad (4.19)$$

Cette procédure itérative est ensuite répétée jusqu'à convergence des valeurs des amplitudes du spectre théorique vers celles du spectre de réponse cible. Un organigramme du schéma itératif de la méthode est donné dans la figure (4.4).

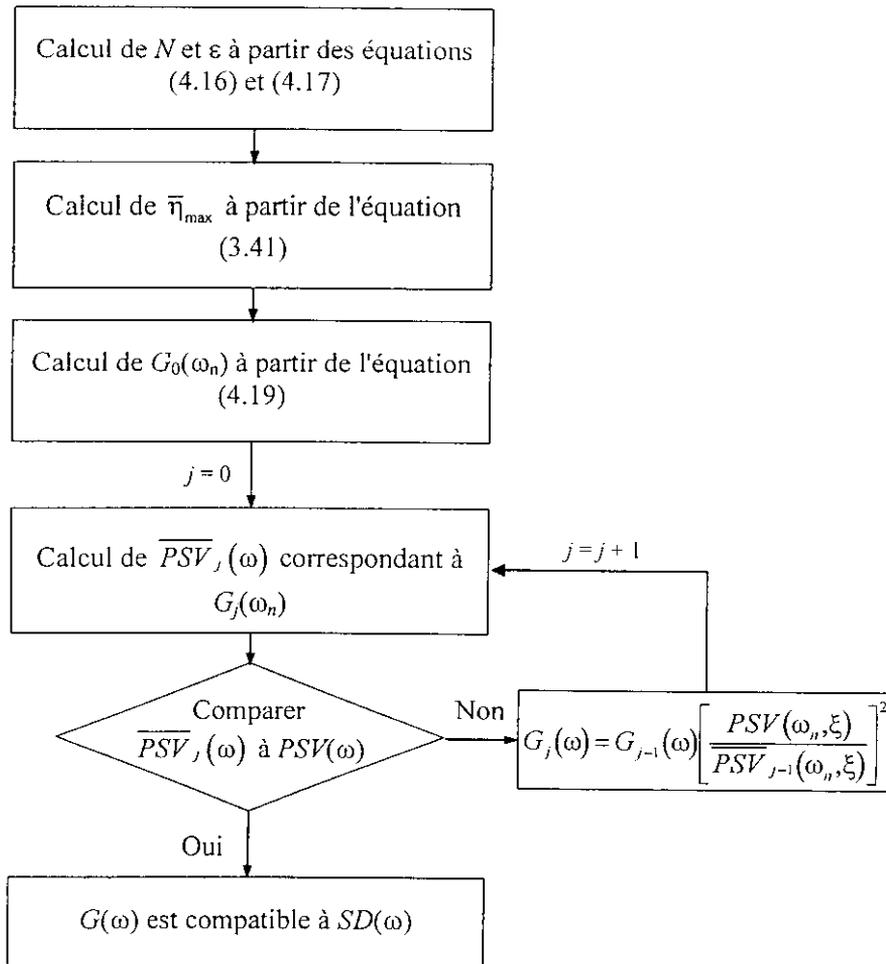


Fig. 4.4- Organigramme du schéma itératif de la deuxième méthode.

5. Applications numériques

L'applicabilité des deux méthodes présentées dans les paragraphes précédents est examinée sur la base des résultats obtenus à partir des enregistrements accélérométriques de quatre événements sismiques. Les composantes S90W du séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, (Fig.3.6a), N05W du séisme de Parkfield du 27 juin 1966 (Fig.3.6b), N90W de la réplique d'El Attaf du séisme d'El Asnam du 10 octobre 1980 (Fig.3.6c), N90E du séisme de Charchell du 29 octobre 1989 (Fig.3.6d), sont utilisées à cet effet.

Dans le tableau (4.1) sont indiqués les valeurs des durées stationnaires $T_{S(i)}$ des 15 premiers pics de chacun des accélérogrammes considérés. La valeur de la durée stationnaire finale T_S de chaque accélérogramme est calculée à partir de la moyenne des durées soulignées associées aux premiers pics ordonnés (plus grandes amplitudes) présentant des durées stationnaires relativement stables. A partir de cette durée stationnaire, la DSP de l'accélérogramme considéré pourra être déterminée directement à partir de l'équation (4.3).

Tableau 4.1- Durées stationnaires du mouvement fort correspondant aux 15 premiers pics ordonnés.

Pic n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	T_S
Séisme d'El-Centro 1940 ; Durée totale $T_D = 53.46$ sec																
$T_{S(i)}$	22.1	<u>25.9</u>	<u>23.6</u>	<u>24.3</u>	<u>24.0</u>	<u>25.7</u>	<u>25.6</u>	<u>26.2</u>	<u>25.4</u>	<u>25.2</u>	<u>25.3</u>	<u>26.8</u>	30.7	32.7	32.3	25.27
Séisme de Parkfield 1966 ; Durée totale $T_D = 43.92$ sec																
$T_{S(i)}$	3.4	9.6	<u>11.4</u>	<u>10.7</u>	<u>11.9</u>	<u>11.4</u>	<u>12.4</u>	<u>11.9</u>	<u>11.5</u>	<u>11.7</u>	15.6	15.4	16.1	15.8	15.6	11.61
Séisme d'El Asnam 1980 ; Durée totale $T_D = 11.98$ sec																
$T_{S(i)}$	6.3	<u>5.2</u>	<u>4.9</u>	<u>4.8</u>	<u>4.8</u>	<u>4.5</u>	<u>4.9</u>	<u>5.1</u>	5.8	5.8	6.0	7.0	6.7	6.6	7.2	4.59
Séisme de Charchell 1989 ; Durée totale $T_D = 23.98$ sec																
$T_{S(i)}$	7.1	6.7	<u>7.4</u>	<u>7.9</u>	<u>7.7</u>	<u>7.5</u>	<u>7.3</u>	<u>8.0</u>	8.5	8.7	8.7	8.9	8.9	9.5	9.8	7.17

Les DSP théoriques obtenues en utilisant la première méthode ainsi que les spectres de réponse calculés (trait discontinu) et les spectres de réponse cibles (trait continu), pour un amortissement de 5%, sont présentés dans les figures (4.5a) à (4.5d) pour les quatre enregistrements accélérométriques considérés. On remarque que les spectres calculés sont en bonne concordance avec les spectres réels correspondants pour les courtes périodes seulement. Pour les périodes longues, on observe que les positions des pics des spectres de réponse cibles sont pratiquement inchangées mais que les amplitudes spectrales sont surestimées.

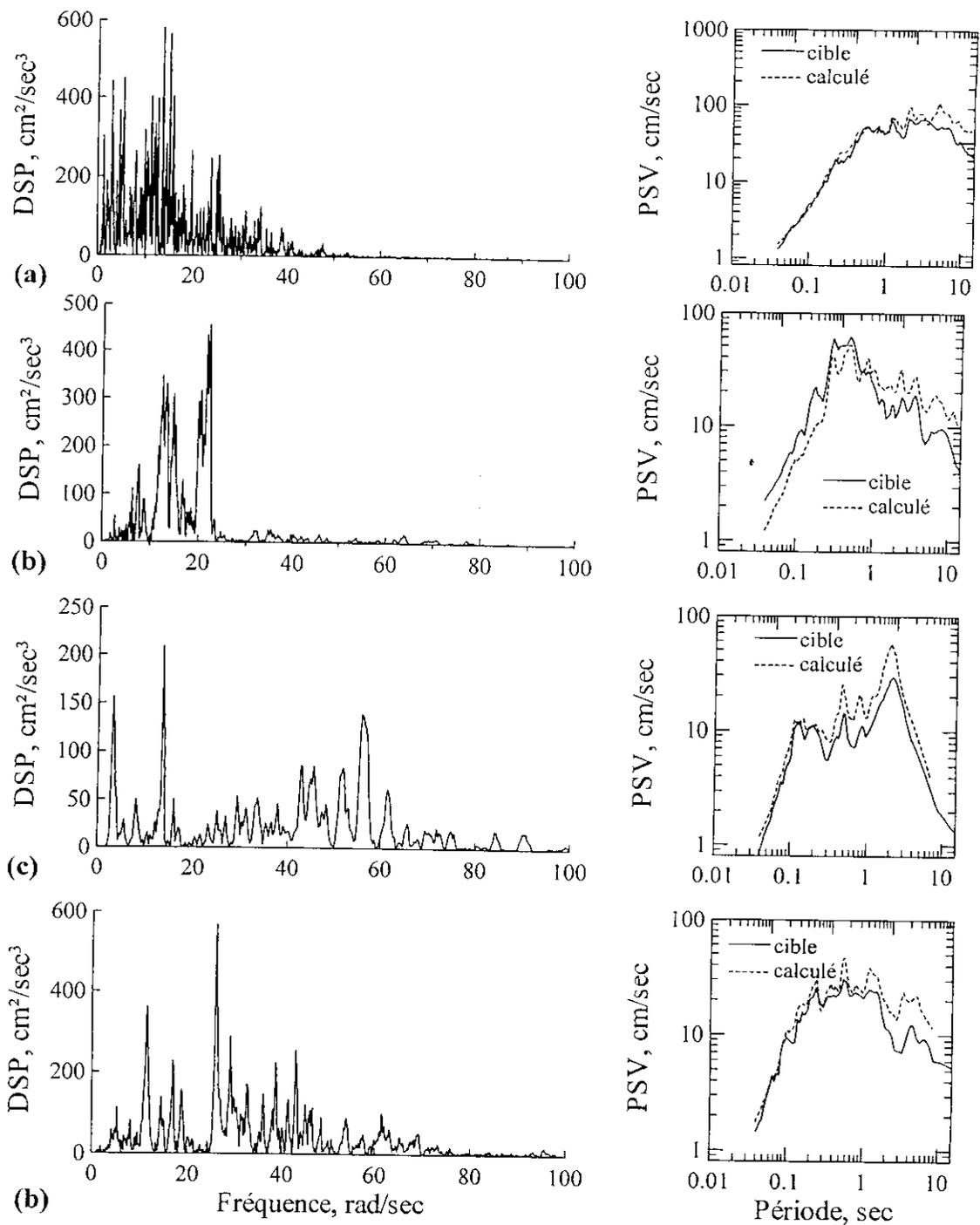


Fig.4.5- DSP théoriques obtenues par la première méthode et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles, $\xi=5\%$. a) séisme d'El-Centro 1940, b) séisme de Parkfield 1966, c) séisme d'El Asnam 1980, d) séisme de Cherchell 1989.

Ceci peut aisément s'expliquer par le fait que la partie stationnaire du mouvement fort de l'accélérogramme est, en général, dominée par les ondes de hautes fréquences, induisant ainsi un résultat plus précis pour ces fréquences. Par un filtrage approprié des hautes fréquences et en calculant à partir du nouveau accélérogramme obtenu, une nouvelle durée stationnaire, il est évidemment possible d'obtenir une meilleure compatibilité pour les longues périodes, ce qui ne sera malheureusement plus le cas pour les courtes périodes.

Par ailleurs, les résultats obtenus en utilisant la deuxième méthode (Fig.4.6a à 4.6d), montrent que les spectres de réponse théoriques, ainsi calculés, et les spectres de réponse cibles sont en excellent accord pour une gamme de fréquences très étendue englobant aussi bien le domaine des basses que celui des hautes fréquences. Cette deuxième approche permet de prendre en considération les effets de la non-stationnarité du mouvement sismique ainsi que celui de la nature transitoire de la réponse dynamique des structures.

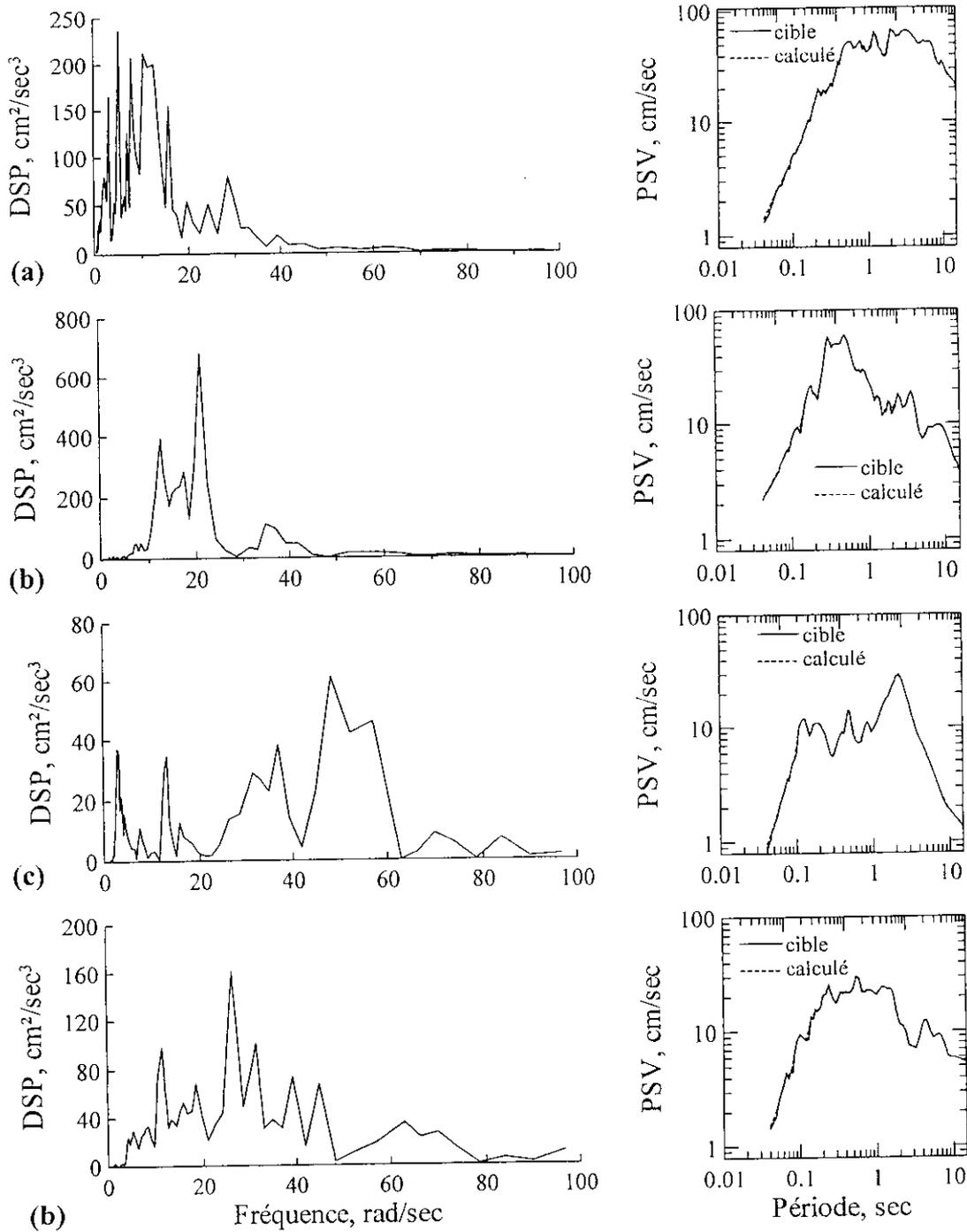


Fig.4.6- DSP théoriques obtenues par la seconde méthode et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles, $\xi=5\%$, a) séisme d'El-Centro 1940, b) séisme de Parkfield 1966, c) séisme d'El Asnam 1980, d) séisme de Cherchell 1989.

Sur le plan opérationnel, l'application du schéma itérative de la deuxième méthode sur les quatre enregistrements précédents a montré que la convergence de l'algorithme utilisé est très rapide et qu'une excellente concordance entre les amplitudes des spectres théoriques et cibles peut être obtenue après seulement deux à trois itérations (Fig 4.7).

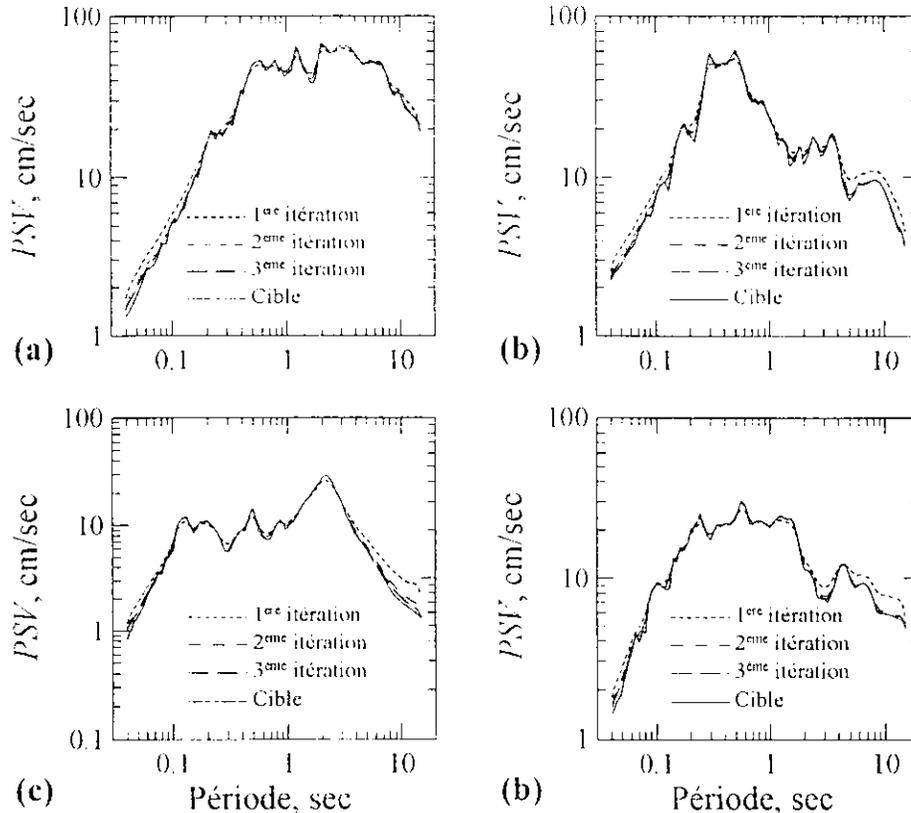


Fig. 4.7— Pseudo-spectres de vitesse obtenues par les 3 premières itérations, a) séisme d'El-Centro 1940, b) séisme de Parkfield 1966, c) séisme d'El Asnam 1980, d) séisme de Cherchell 1989.

6. DSP compatibles pour différentes conditions locales de site de magnitudes et de distances épicentrales

L'utilisation de spectres de réponses pour l'obtention de DSP compatible ne doit pas fournir juste une bonne approximation de la réponse mais doit aussi refléter toutes les caractéristiques du mouvement fort. Ainsi, les effets des conditions locales de site, de magnitude, et de distance épicentrale, doivent apparaître sur les DSP obtenues au même titre que les spectres de réponses respectifs. Pour montrer cela on a procédé au calcul des DSP compatibles avec des spectres de réponse prenant en compte différents types de sols, différentes magnitudes et différentes distances épicentrales.

6.1. Effet des conditions locales de site

Pour étudier l'effet des conditions locales du site sur la DSP on a utilisé les spectres de réponse obtenus par Seed et *al* (1976) pour quatre types de sols : rocheux, fermes, meubles et très meubles (Fig. 4.8).

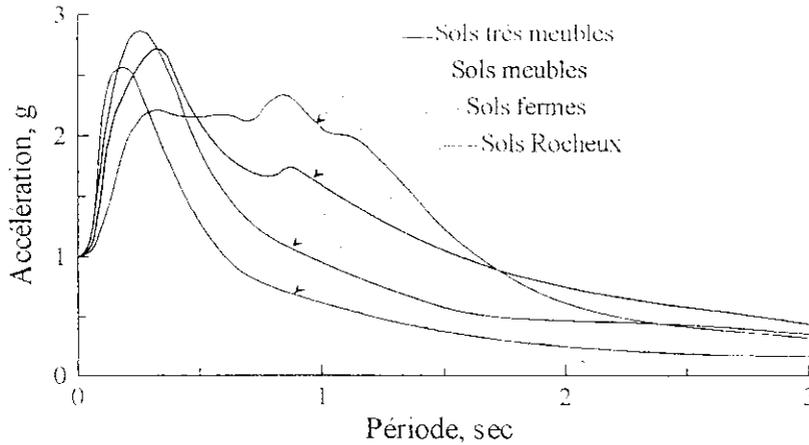


Fig. 4.8– Spectres moyens d'accélération pour différentes conditions de site selon Seed et *al* (1976).

La figure (4.9) montre les DSP compatibles obtenues par la deuxième méthode et les pseudo-spectres de vitesse pour les quatre types de sols pour un amortissement de 5%. Il est clair que les spectres obtenus à partir de la DSP compatible se confondent parfaitement avec les spectres de réponse cibles. Ainsi, les caractéristiques induites par les conditions locales de site restent dûment préservés par la DSP compatible.

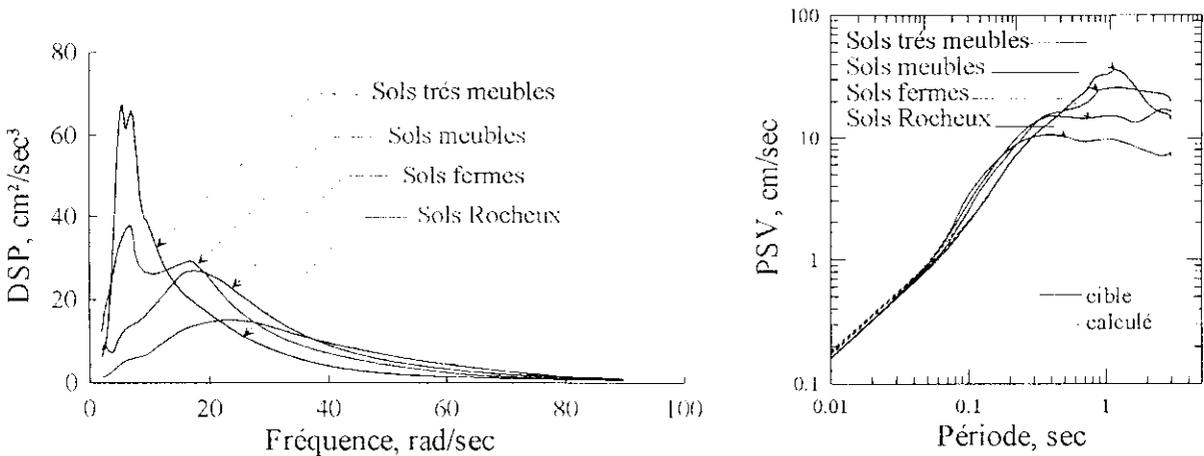


Fig. 4.9– DSP compatible et comparaison des spectres de réponse calculés avec les spectres de réponse cibles pour différentes conditions de site, $\xi=5\%$.

Les DSP présentées dans la figure (4.9) pour les quatre types de sols montrent que la DSP d'un sol meuble tend vers une DSP d'un processus à bande étroite, l'énergie y est concentrée au alentour d'une fréquence prédominante. Par contre la DSP d'un sol ferme tend vers celle d'un

processus à bande large avec une DSP qui s'étend sur un intervalle de fréquence plus large. La fréquence prédominante augmente avec la raideur du sol, plus le sol est ferme et plus la valeur de la fréquence prédominante augmente.

On remarque aussi, que l'énergie au alentour de la fréquence prédominante augmente lorsque le sol est plus mou et que la distribution de l'énergie dans les basse fréquences est plus importante pour les sols meubles qu'elle ne l'est pour les sols fermes. La tendance s'inverse pour les hautes fréquences où l'énergie est plus importante pour les sols fermes qu'elle ne l'est pour les sols meubles. On peut dire ainsi les sols mous ont tendance à filtrer les hautes fréquences.

6.2. Effet de la magnitude

Pour étudier l'effet de la magnitude sur la DSP, on utilise les spectres de réponse obtenus par Şafak (1988) à partir de modèles sismologiques de source pour une probabilité de non dépassement de 50 %. On considère successivement trois magnitudes : 5, 6 et 7 à une distance épacentrale de 10 Km. Il est a constater à partir de la figure (4.10) que les spectres de réponse théoriques obtenus à partir de DSP compatible sont identiques aux spectres de réponse cibles pour les trois magnitudes considérées, sur toute la plage des périodes excepté pour les très faibles périodes où le spectre théorique passe légèrement au dessus du spectre cible. Ainsi, la méthode itérative utilisée est capable de reprendre l'effet de la magnitude sur la DSP compatible au spectre de réponse cible.

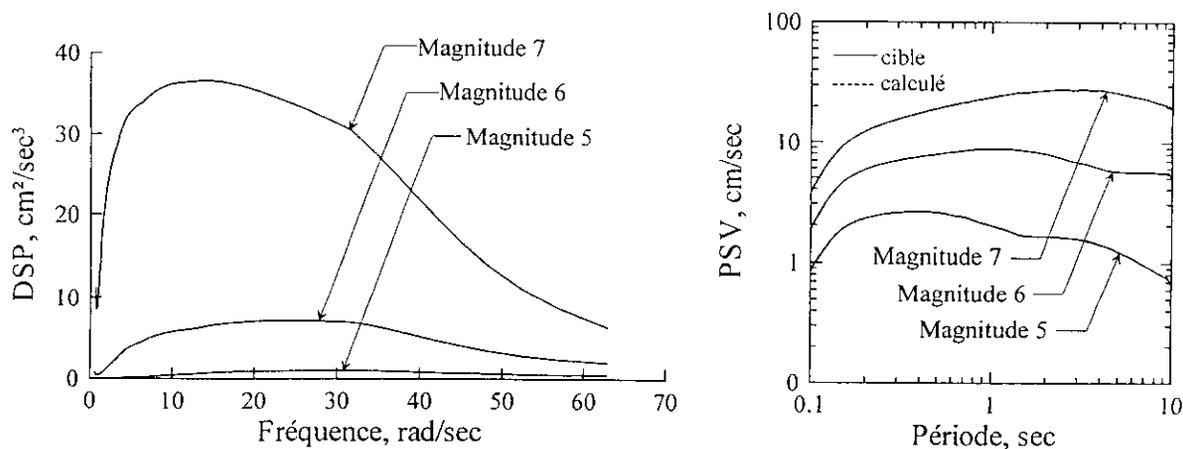


Fig. 4.10- DSP compatible et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles pour différentes magnitudes.

Il est clair que la magnitude est un paramètre d'une influence considérable sur la distribution de l'énergie du séisme. Plus la magnitude est grande et plus l'énergie transmise est

importante. Ceci est d'autant plus accentué pour les basses fréquences qu'il ne l'est pour les hautes fréquences. En effet on remarque l'effet de la magnitude diminue considérablement pour les hautes fréquences.

6.3. Effet de la distance épacentrale

La figure (4.11) montre les spectres de réponses obtenus par Şafak (1988) pour une probabilité de non dépassement de 50% en considérant trois distances épacentrales : 10, 20 et 50 km pour une magnitude 7. On remarque que les spectres de réponses calculées sont identiques aux spectres de réponse cibles pour toutes les périodes considérées, indépendamment de la distance épacentrale.

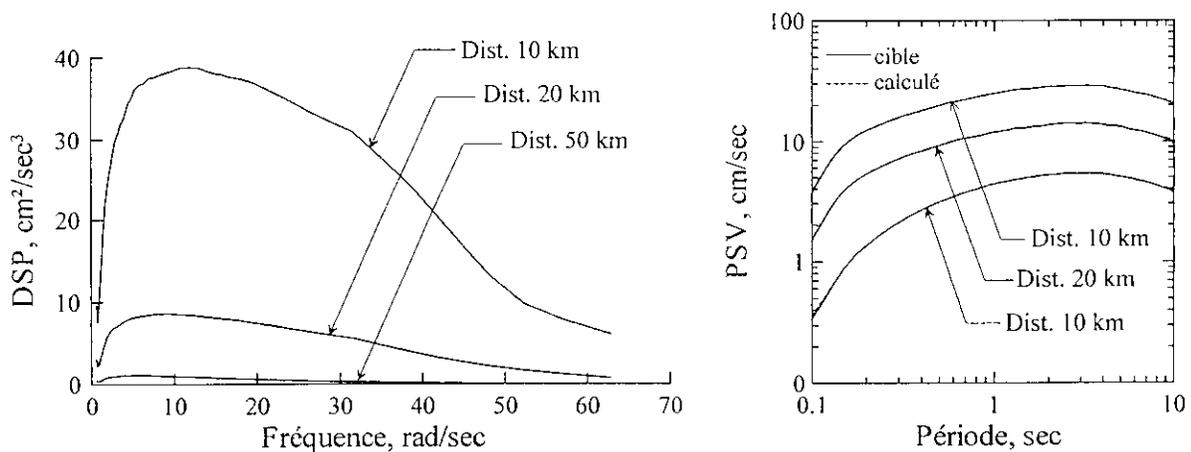


Fig. 4.11— DSP compatible et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles pour différentes distances épacentrales.

La variation de l'énergie pour toutes les fréquences est inversement proportionnelle à la distance épacentrale. Plus la distance est importante est plus l'énergie transmise diminue. Comme pour la magnitude, l'effet de la distance épacentrale est plus important pour les basses fréquences qu'il ne l'est pour les hautes fréquences.

Contrairement à la magnitude, on remarque que la variation de l'énergie du séisme est inversement proportionnelle à la distance épacentrale. Plus la distance est importante est plus l'énergie transmise diminue. Comme pour la magnitude, l'effet de la distance épacentrale est plus important pour les basses fréquences qu'il ne l'est pour les hautes fréquences.

En conclusion on peut dire que l'effet est d'autant plus accentué lorsque le séisme est de forte magnitude en champ proche, et moins significatif lorsque le séisme est de faible magnitude en champ lointain.

7. DSP compatible avec les spectres réglementaires de l'US NRC et des RPA99

La validité de cette méthode a été par ailleurs examinée en considérant les spectres réglementaires en accélération de la U. S. Nuclear Regulatory Commission (1973), préconisés pour le calcul des centrales nucléaires, pour trois valeurs de l'amortissement critique : 0.5%, 2.0% et 5.0% (Fig.4.12a), ainsi que les spectres des Règles Parasismiques Algériennes RPA99 (1999) pour quatre types de sols : sol rocheux, sol ferme, sol meuble et sol très meuble (Fig.4.12b).

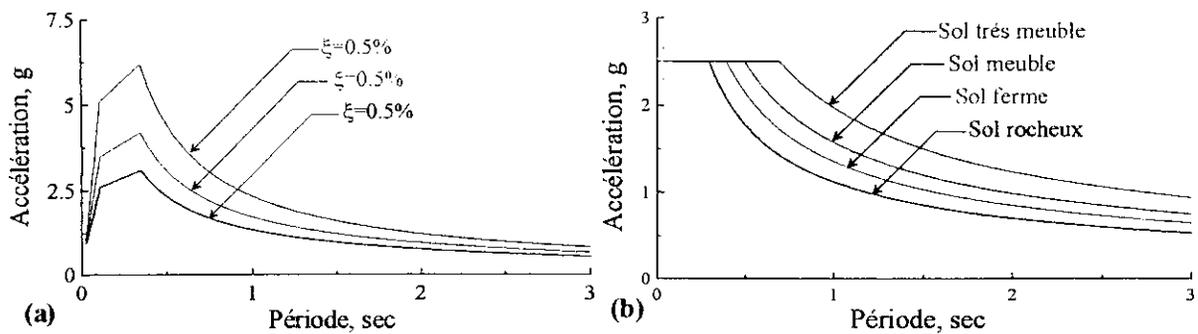


Fig.4.12- Spectres en accélération de a)- l'U.S NRC pour un amortissement de 0.5%, 2% et 5%, b)- RPA99 pour quatre types de sols : rocheux, fermes, meubles et très meubles.

On constate clairement à partir des figures (4.13) et (4.14) que les spectres de réponse calculés restent confondus aux spectres de réponse cibles, indépendamment des valeurs de l'amortissement ou du type de sol considéré. On remarque également dans la figure (4.13) qu'un problème de convergence peut subsister en hautes fréquences (>20 Hz) pour des valeurs d'amortissement voisines de 5%.

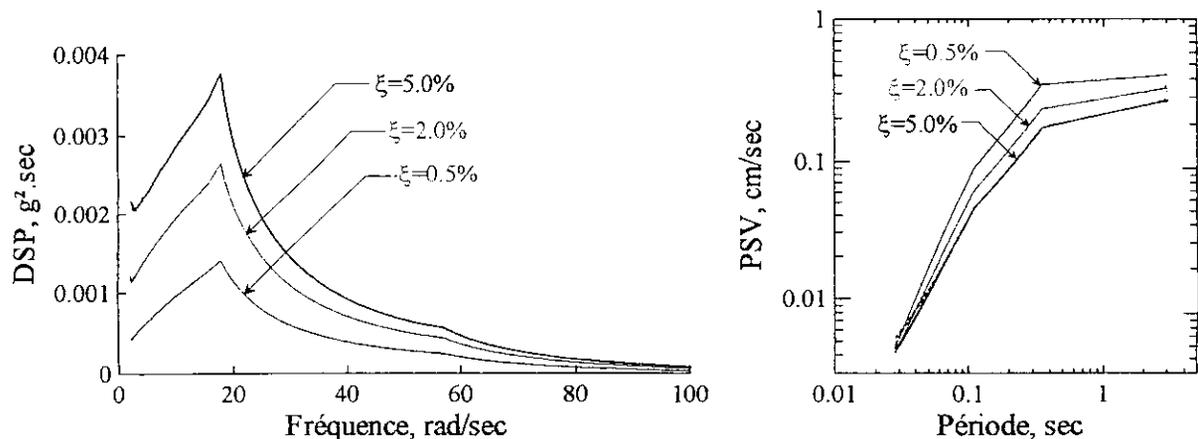


Fig.4.13-DSP compatibles aux spectres de réponse de la U.S. Nuclear Regulatory Commission et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles pour $\xi=0.5\%$, 2% et 5%.

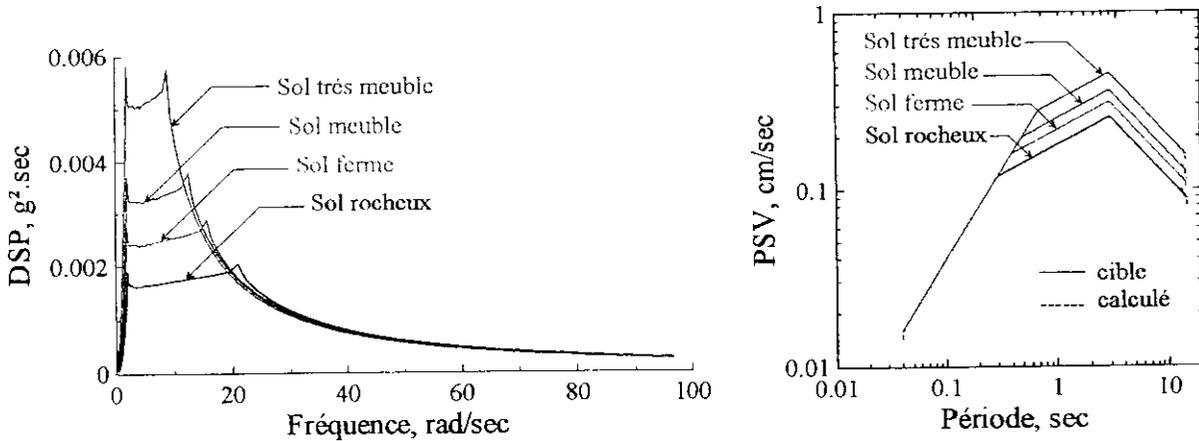


Fig.4.14- DSP compatibles aux spectres de réponse des RPA99 et comparaison des spectres de réponse calculés aux spectres de réponse cibles, pour quatre types de sols : rocheux, ferme, meuble et très meuble.

8. Conclusions

Le calcul de la DSP à partir du spectre de Fourier et de la durée modifiée du mouvement fort en le considérant comme faiblement stationnaire, reste limitée pour les hautes fréquences où l'abondance de ces dernières conduit à une bonne estimation de la réponse. Pour les basses fréquences, la non-stationnarité du mouvement fort fait que la réponse est surestimée.

En revanche, l'utilisation d'une DSP compatible avec un spectre de réponse cible présentée dans ce Chapitre, permet non seulement d'obtenir des résultats précis pour une gamme de fréquences plus large, mais aussi une meilleure estimation des pics de la réponse les plus significatifs correspondant à la phase forte du mouvement sismique. En outre, cette approche permet de fournir un mode de représentation réaliste des caractéristiques du séisme, et de prendre également en considération les effets de non-stationnarité du mouvement fort et du caractère transitoire de la réponse sismique des structures.

L'étude des DSP compatibles obtenus pour différents types de sols a montré que la DSP d'un sol meuble tend vers une DSP d'un processus à bande étroite, par contre la DSP d'un sol ferme tend vers celle d'un processus à bande large et que la fréquence prédominante d'un sol augmente avec sa raideur. On remarque aussi que la distribution de l'énergie dans les basses fréquences est plus importante pour les sols meubles qu'elle ne l'est pour les sols fermes. La tendance s'inverse pour les hautes fréquences où l'énergie est plus importante pour les sols fermes qu'elle ne l'est pour les sols meubles.

Il a été mis en évidence qu'un changement de la magnitude et de la distance épacentrale, peut avoir une influence significative sur la distribution spectrale de l'énergie sismique surtout

Chapitre 5

Spectres de réponse des systèmes à paramètres incertains

1. Introduction

En génie parasismique, la réponse dynamique d'une structure est traditionnellement évaluée en utilisant une approche modalo-spectrale avec une excitation sismique définie souvent sous forme de spectre de réponse. Il est ainsi possible de prendre en considération, entre autres, les incertitudes inhérentes au caractère stochastique du mouvement sismique.

Toutefois, dans le but d'estimer de manière plus fiable la réponse sismique d'une construction, il est essentiel de quantifier non seulement l'effet du caractère stochastique du mouvement sismique, mais aussi l'effet des incertitudes des paramètres dynamiques sur la réponse structurale. Ces incertitudes, causées essentiellement par la variation des propriétés des matériaux et les approximations dans l'estimation des paramètres des modèles mathématiques de structure, peuvent introduire une variation significative de la réponse structurale. Pour certaines structures, telles que les parkings de véhicules par exemple, la masse relative à chaque niveau est fonction du temps (jours, saisons) et il est pratiquement impossible de prédire sa valeur exacte lors d'un prochain séisme. En outre, si la structure considérée est fondée sur un sol meuble et que le phénomène d'interaction sol-structure ne peut être ignoré, les périodes propres de la structure dépendront des caractéristiques dynamiques du sol de fondation qui peuvent être différentes avant, pendant, et après le tremblement de terre.

Nous présentons dans ce qui suit, les principaux résultats d'une investigation analytique et numérique de l'effet des incertitudes des valeurs d'amortissement critique et de fréquences naturelles sur la réponse sismique maximale des systèmes à caractéristiques aléatoires. A cet effet, l'excitation est définie sous forme d'une densité spectrale de puissance (DSP) en accélération compatible avec un spectre de réponse cible donné. La théorie des vibrations aléatoires est utilisée afin de déterminer les moyennes et écarts-types des amplitudes du spectre de réponse à paramètres incertains.

2. Formulation stochastique du spectre de réponse

Une attention particulière a longtemps été consacrée au développement de spectres de réponse pour le calcul et l'analyse de la réponse dynamique des structures en zones sismiques (Trifunac, 1978,1995 ; Lee, 1989 ; Mohraz, 1976). La détermination de ces spectres de réponse à paramètres déterministes est fondée sur un traitement statistique des réponses d'un oscillateur à un ensemble d'accélérogrammes de caractéristiques fréquentielles et temporelles différentes. Il en résulte que le spectre de réponse est lié étroitement au processus stochastique définissant les mouvements sismiques du sol. Dans ce qui suit, nous rappelons brièvement cette relation et montrons que l'amplitude spectrale stochastique en déplacement est le produit de l'amplitude moyenne quadratique de la réponse a_{rms} au processus de mouvement sismique du sol, par le facteur dit de pic η_{max} .

Considérons à cet effet, la DSP unilatérale $GD(\omega)$, de la réponse en déplacement d'un oscillateur simple caractérisé par une fréquence propre ω_j et un pourcentage d'amortissement critique ξ_j soumis à une excitation de DSP $G(\omega)$. A partir de l'équation (2.49) on obtient :

$$GD(\omega) = G(\omega) \cdot \mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j) \quad (5.1)$$

où $\mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j)$ est le module au carré de la fonction de transfert en déplacement donné par :

$$\mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j) = |H(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \omega_j^2 \omega^2} \quad (5.2)$$

Pour un oscillateur à propriétés déterministes, la DSP de l'équation (5.1) peut être utilisée pour le calcul de l'amplitude du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné de la réponse $r(t)$

$$a_{(n)} = \eta_{(n)} \cdot a_{rms} \quad (5.3)$$

où $\eta_{(n)}$ est l'amplitude moyenne attendue du $n^{\text{ème}}$ pic ordonné normalisé, lorsque les pics de la réponse sont arrangés dans un ordre décroissant. Le paramètre a_{rms} représente l'amplitude moyenne quadratique de la réponse définie par l'équation (3.21).

Pour $n = 1$ (pic le plus important), on peut ainsi en utilisant l'équation (5.3) obtenir l'amplitude maximale de la réponse de l'oscillateur, qui par définition représente l'amplitude du spectre de réponse $SD(\omega_j, \xi_j)$ en fonction du facteur de pic η_{max} , telle que :

$$SD(\omega_j, \xi_j) = \eta_{max} \cdot a_{rms} \quad (5.4)$$

Ceci étant, en raison des incertitudes sur les propriétés de l'oscillateur ω_j et ξ_j , les paramètres η_{\max} et a_{rms} deviennent aléatoires et ne peuvent plus être considérés comme déterministes. Il est donc nécessaire d'étudier leurs variations en fonction de ω_j et ξ_j . Les figures (5.1a), (5.1b), (5.1c) et (5.2) montrent la variation des paramètres a_{rms} et η_{\max} en fonction de la fréquence propre ω_j , calculés pour diverses valeurs de l'amortissement $\xi_j = 1\%$, 5% et 10% pour divers spectres de réponse cibles.

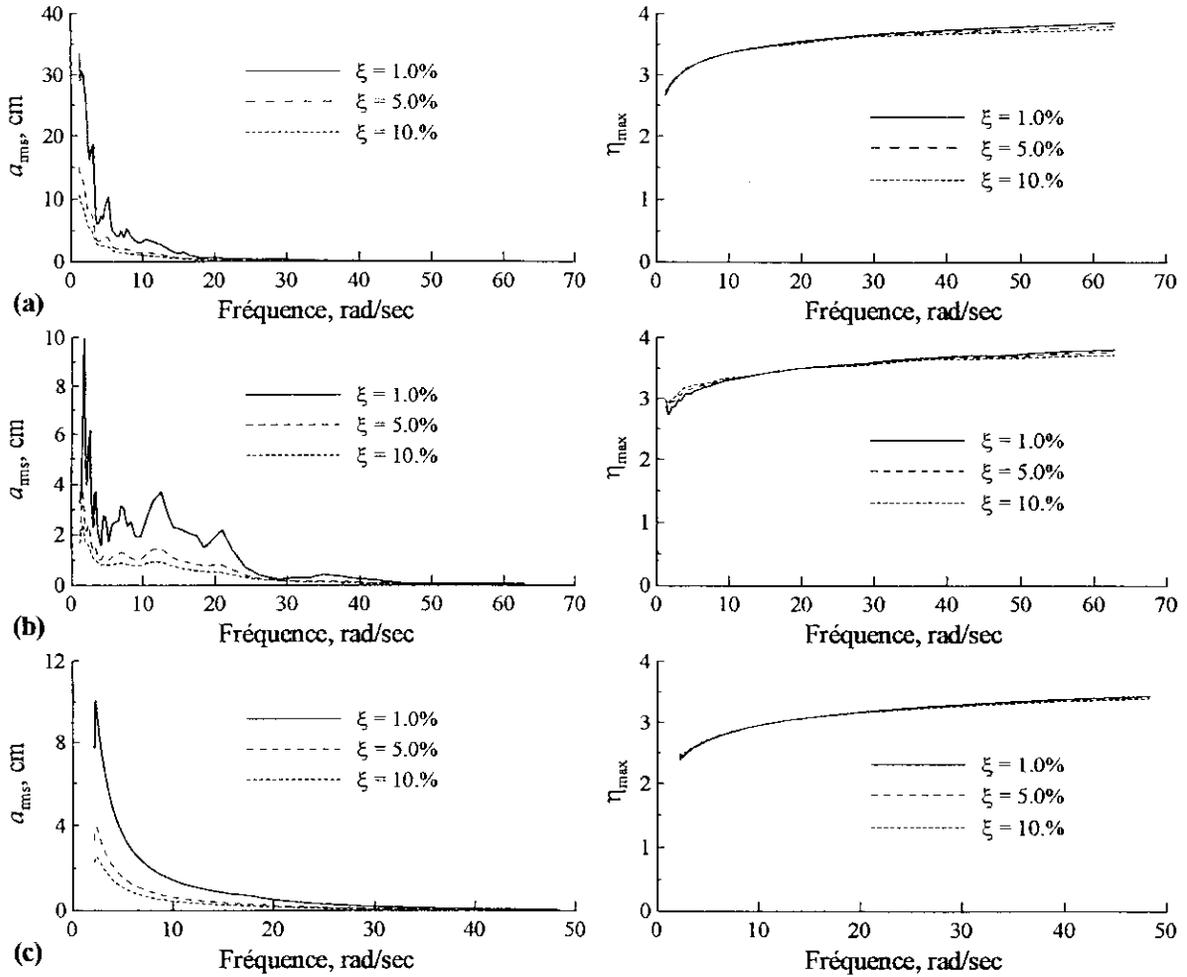


Fig. 5.1- Variation des paramètres a_{rms} et η_{\max} en fonction de la fréquence propre ω_j , calculés pour un amortissement $\xi_j = 1\%$, 5% et 10%, a) séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, b) séisme de Parkfield du 27 juin 1966, c) spectres recommandés par l'U.S.N.R.C.

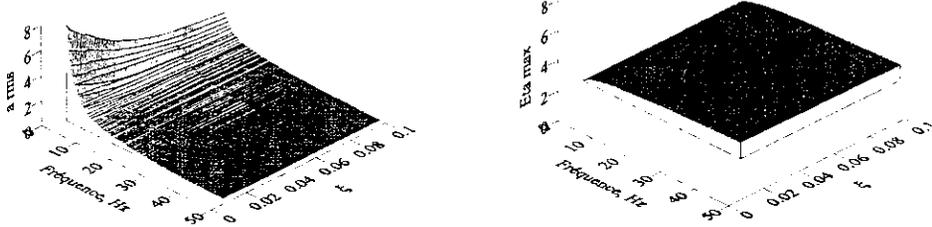


Fig. 5.2- Représentation tridimensionnelle de la variation des paramètres a_{rms} et η_{\max} en fonction de la fréquence propre ω_j , et de l'amortissement critique ξ_j . Le spectre considéré correspond aux recommandations l'U.S.N.R.C.

On remarque que les amplitudes moyennes quadratiques, a_{rms} , correspondant aux spectres de séismes réels, sont caractérisées par d'importantes fluctuations (Figs. 5.1a et 5.1b) par rapport à celle des spectres réglementaires préalablement lissés (Figs. 5.1c et 5.2).

On constate aussi, que facteur de pic η_{max} est pratiquement insensible aux variations des paramètres ω_j et ξ_j indépendamment des spectres de réponses considérés. En revanche, l'amplitude moyenne quadratique varie sensiblement même pour de faibles variations de ω_j et ξ_j surtout en basses fréquences. Ainsi, on peut déduire à partir de l'équation (5.4) que l'incertitude sur la réponse spectrale $SD(\omega_j, \xi_j)$ n'est essentiellement contrôlée que par l'amplitude moyenne quadratique, a_{rms} (Tiliouine et Zermout, 2003). Cette observation permet d'étendre aisément la formulation théorique précédente au calcul des amplitudes spectrales compte tenu des incertitudes sur les caractéristiques dynamiques aléatoires.

3. Evaluation des effets des incertitudes sur la réponse

Pour considérer les effets des incertitudes liées aux caractéristiques de l'oscillateur sur la réponse spectrale, on suppose que ω_j et ξ_j sont caractérisés par de petites incertitudes aléatoires $\Delta\omega_j$ et $\Delta\xi_j$ par rapport à leurs valeurs moyennes $\bar{\omega}_j$ et $\bar{\xi}_j$, ce qui se traduit par les relations suivantes :

$$\omega_j = \bar{\omega}_j + \Delta\omega_j \text{ et } \xi_j = \bar{\xi}_j + \Delta\xi_j \quad (5.5)$$

La variance de l'amplitude moyenne quadratique due aux incertitudes sur les propriétés dynamiques peut être évaluée de manière approximative comme suit :

En développant le carré de l'amplitude de la fonction de transfert en une série de Taylor au voisinage des valeurs moyennes $\bar{\omega}_j$ et $\bar{\xi}_j$, et en ne retenant que les termes du premier ordre pour le cas de petites incertitudes $\Delta\omega_j$ et $\Delta\xi_j$, la DSP de la réponse de l'équation (5.1) s'écrit :

$$GD(\omega) \cong G(\omega) \cdot \mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j) + G(\omega) \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_j} \right]_{\bar{\omega}_j, \bar{\xi}_j} \Delta\omega_j + G(\omega) \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_j} \right]_{\bar{\omega}_j, \bar{\xi}_j} \Delta\xi_j \quad (5.6)$$

A partir de cette équation, le moment d'ordre zéro de la DSP de la réponse d'un oscillateur à caractéristiques incertaines peut être défini comme suit (Gupta et Joshi, 1998) :

$$m_0 = \int_0^\infty GD(\omega) d\omega = \bar{m}_0 + I(\bar{\omega}_j) \Delta\omega_j + J(\bar{\xi}_j) \Delta\xi_j \quad (5.7)$$

avec

$$\bar{m}_0 = \int_0^\infty G(\omega) \cdot \mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j) d\omega \quad (5.8)$$

$$I(\bar{\omega}_j) = \int_0^\infty G(\omega) \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_j} \right]_{\bar{\omega}_j, \bar{\xi}_j} d\omega \quad \text{et} \quad J(\bar{\xi}_j) = \int_0^\infty G(\omega) \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_j} \right]_{\bar{\omega}_j, \bar{\xi}_j} d\omega \quad (5.9)$$

En outre, en considérant que $\Delta\omega_j$ et $\Delta\xi_j$ sont caractérisées par des valeurs moyennes attendues nulles, la valeur moyenne attendue de m_0 sera égale à \bar{m}_0 . Aussi, en admettant que ω_j et ξ_j sont statistiquement non-corrélés, la variance m_0 peut être définie par :

$$Var[m_0] = E[(m_0 - \bar{m}_0)^2] = I^2(\bar{\omega}_j) \cdot E[(\Delta\omega_j)^2] + J^2(\bar{\xi}_j) \cdot E[(\Delta\xi_j)^2] \quad (5.10)$$

Utilisant cette équation, la variance de l'amplitude moyenne quadratique s'écrit :

$$\sigma_{arms}^2 = Var[a_{rms}] \cong \left[\frac{\partial a_{rms}}{\partial m_0} \right]_{\bar{m}_0}^2 \cdot Var[m_0] = \frac{1}{4\bar{m}_0} \cdot Var[m_0] \quad (5.11)$$

Par ailleurs la valeur fixe de la moyenne quadratique de la réponse peut être obtenue à partir du moment \bar{m}_0 en utilisant l'équation (3.21) comme suit :

$$\bar{a}_{rms} = \sqrt{\bar{m}_0} \quad (5.12)$$

Il en résulte qu'en remplaçant a_{rms} dans l'équation (5.4) par $(a_{rms} \pm \sigma_{arms})$, on obtient les amplitudes des réponses spectrales en compte tenu des incertitudes sur les caractéristiques de l'oscillateur comme suit :

$$SD(\bar{\omega}_j, \bar{\xi}_j) = \eta_{\max} \cdot (a_{rms} \pm \sigma_{arms}) \quad (5.13)$$

Il convient enfin de noter, que les spectres de réponse en pseudo-vitesse et en pseudo-accélération à paramètres incertains ne peuvent être obtenus de manière classique en multipliant $SD(\bar{\omega}_j, \bar{\xi}_j)$ par $\bar{\omega}_j$ et $\bar{\omega}_j^2$ respectivement. Pour obtenir les spectres $PSV(\bar{\omega}_j, \bar{\xi}_j)$ et $PSA(\bar{\omega}_j, \bar{\xi}_j)$ on doit utiliser la formulation précédente en remplaçant $\mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j)$ par $\omega_j^2 \mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j)$ et $\omega_j^4 \mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j)$ respectivement (Tiliouine et Zermout, 2003). Les dérivées de $\mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j)$ par rapport aux paramètres incertains nécessaires au calcul des spectres de réponse en déplacement, en pseudo-vitesse et en pseudo-accélération respectivement compte tenu des incertitudes structurales, sont présentées en annexe (1).

4. Applications numériques

L'application de la formulation théorique décrite précédemment pour estimer la variance de la moyenne quadratique des amplitudes de la réponse spectrale, est maintenant illustrée à travers un exemple numérique. Plusieurs spectres de réponses en accélération représentant des caractéristiques du mouvement de sol largement différentes ont été retenus à cet effet. Deux de ces spectres correspondent aux enregistrements accélérométriques des séismes d'El-Centro du 8 mai 1940 (Fig. 5.3a) et de Parkfield du 27 juin 1966 (Fig. 5.3b). Les autres spectres de réponse correspondent à des spectres réglementaires lissés préalablement, à savoir le spectre de l'U.S. National Regulatory Commission, recommandé pour le calcul des centrales nucléaires (Fig. 5.3c) et les spectres du RPA99 (pour différents types de sols) recommandés pour le calcul des ouvrages en zone sismique en Algérie (Fig. 5.4). Une valeur fixe du pourcentage d'amortissement critique $\xi = 5\%$ a été considérée pour l'ensemble des spectres.

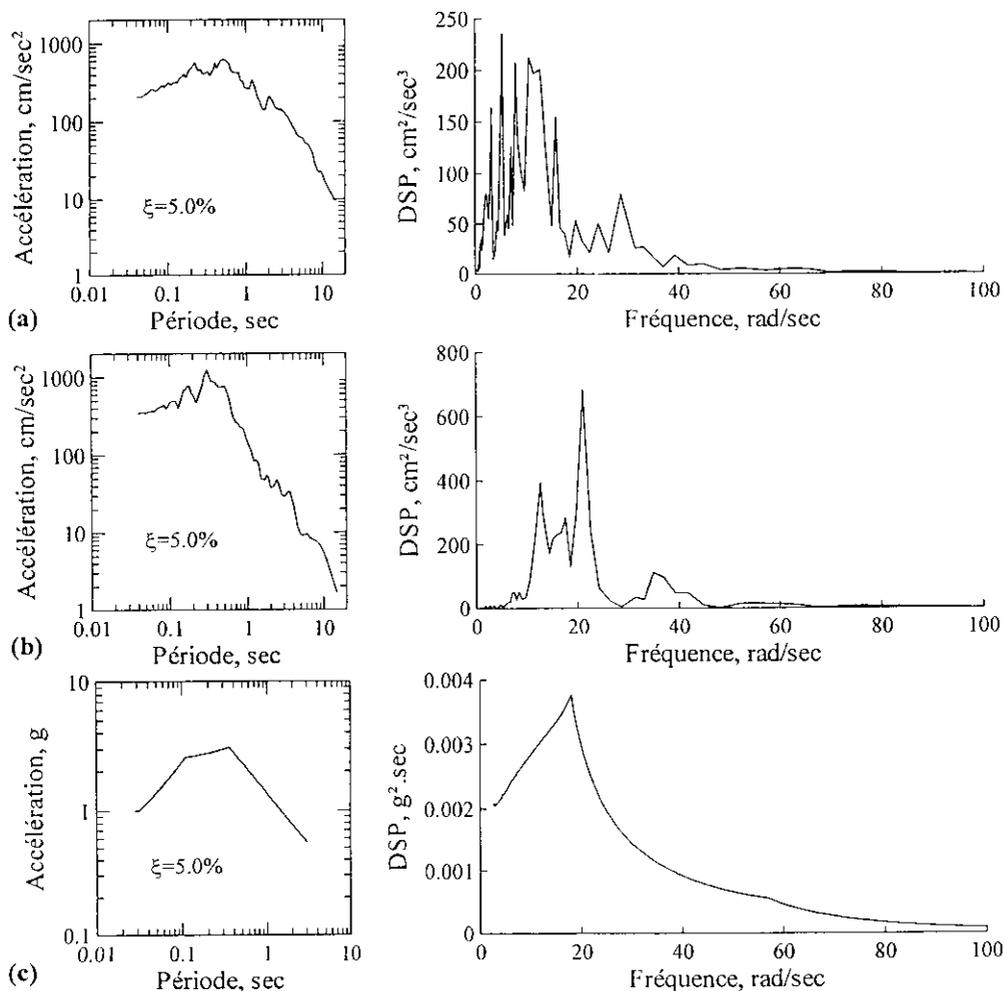


Fig. 5.3— Spectre de réponse en accélération et DSP compatible, a)- séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, b)- séisme de Parkfield du 27 juin 1966, c)- Recommandations de l'U.S. NRC.

Fig. 5.4— Spectre de réponse en accélération et DSP compatible des RPA99.

Les DSP équivalentes compatibles avec ces spectres ont été calculées de telle sorte que les valeurs des amplitudes des spectres théoriques attendus, obtenus en utilisant ces DSP, coïncident aux amplitudes respectives des spectres cibles considérés.

En utilisant la formulation théorique présentée précédemment et les DSP équivalentes, l'écart type σ_{arms} a été calculé pour les spectres de réponse en déplacement *SD*, pseudo-vitesse *PSV* et pseudo-accélération *PSA*, pour diverses combinaisons des incertitudes $\Delta\omega_j$ et $\Delta\xi_j$. Pour le calcul des résultats relatifs à ces exemples, les incertitudes $\Delta\omega_j$ et $\Delta\xi_j$ sont définies en tant que fractions fixes des valeurs moyennes $\bar{\omega}_j$ et $\bar{\xi}_j$ comme suit :

$$\Delta\omega_j = C_\omega \bar{\omega}_j \quad \text{et} \quad \Delta\xi_j = C_\xi \bar{\xi}_j \quad (5.14)$$

Il en résulte évidemment que :

$$E\left[(\Delta\omega_j)^2\right] = C_\omega^2 \bar{\omega}_j^2 \quad \text{et} \quad E\left[(\Delta\xi_j)^2\right] = C_\xi^2 \bar{\xi}_j^2 \quad (5.15)$$

Les figures (5.5a), (5.5b) et (5.5c) montrent, à titre illustratif, le pourcentage de l'écart type σ_{arms} par rapport à l'amplitude moyenne quadratique \bar{a}_{rms} , obtenu pour les réponses en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accélération d'un oscillateur à paramètres dynamiques incertains. On constate que l'incertitude sur l'amortissement critique ne cause aucune différence entre les écarts types des trois types de réponses, mais l'écart type due à une incertitude sur la fréquence propre varie sensiblement pour les spectres *SD*, *PSV* et *PSA*. On remarque aussi que l'écart type est caractérisé par d'importantes fluctuations pour les spectres d'accélérogrammes réels, alors que pour les spectres lissés, il varie de manière assez uniforme. Il convient de noter qu'en raison de l'hypothèse d'indépendance stochastique entre les paramètres : fréquence propre et amortissement, la variance totale de l'amplitude moyenne quadratique a_{rms} due aux incertitudes $\Delta\omega_j$ et $\Delta\xi_j$, est donnée simplement par la somme des variances induites par l'incertitude sur chaque paramètre.

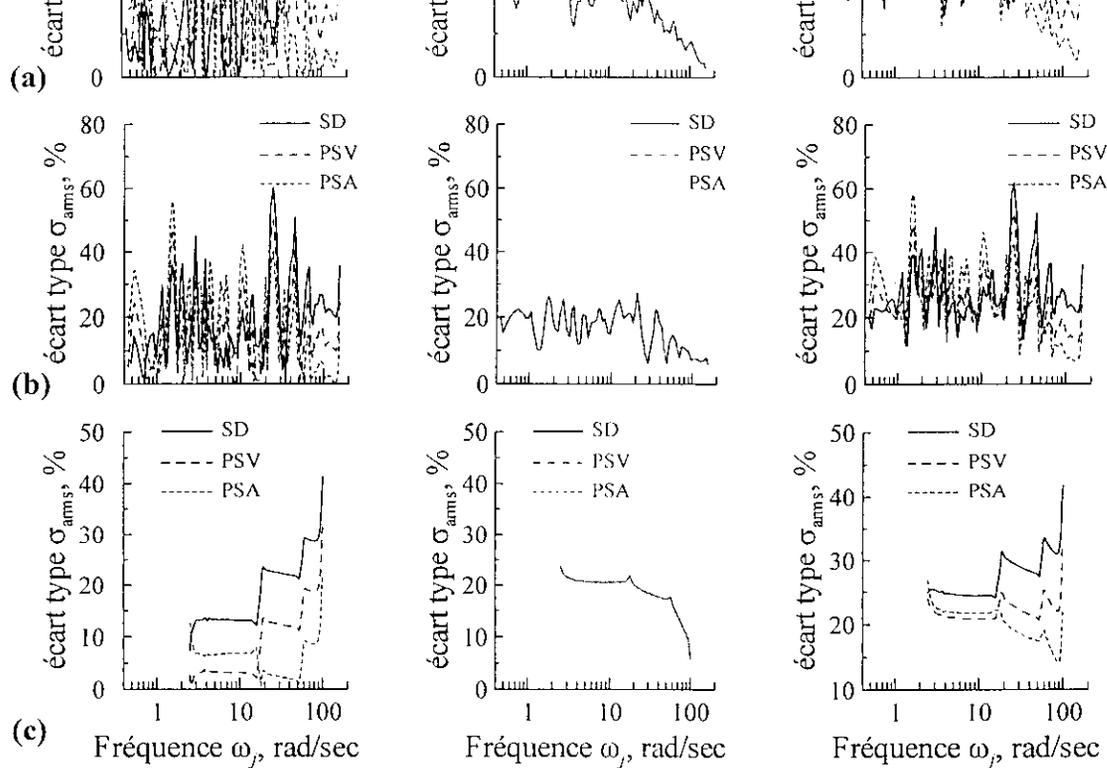


Fig. 5.5— Pourcentage de l'écart type de l'amplitude moyenne quadratique en déplacement, pseudo-vitesse et Pseudo-accelération pour différentes combinaisons des l'incertitudes sur la fréquence naturelle et l'amortissement critique, a)- séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, b)- séisme de Parkfield du 27 juin 1966, c)- Recommandations de l'U.S. NRC

Dans les figures (5.6) (5.7) et (5.8) on retrouve quelques exemples de calcul des spectres *SD* et pseudo-spectres *PSV* et *PSA* obtenus en utilisant les valeurs moyennes \pm un écart type des amplitudes moyennes quadratiques correspondantes en vue de prendre en considération les incertitudes sur les propriétés dynamiques.

On peut observer, à partir des résultats des figures (5.6) à (5.8), notamment pour les spectres en pseudo-vitesse, que même de petites incertitudes dans les propriétés structurales peuvent avoir une influence considérable sur les amplitudes spectrales. En général, pour une incertitude sur l'amortissement, l'influence décroît avec une augmentation de la fréquence. A contrario, pour une incertitude sur la fréquence propre, l'influence décroît avec une diminution de la fréquence dans le cas du spectre lissé de l'U.S.NRC (Fig. 5.8) quoiqu'un tel effet ne soit pas clairement apparent dans le cas de spectres d'accélérogrammes réels (Figs. 5.6 et 5.7).

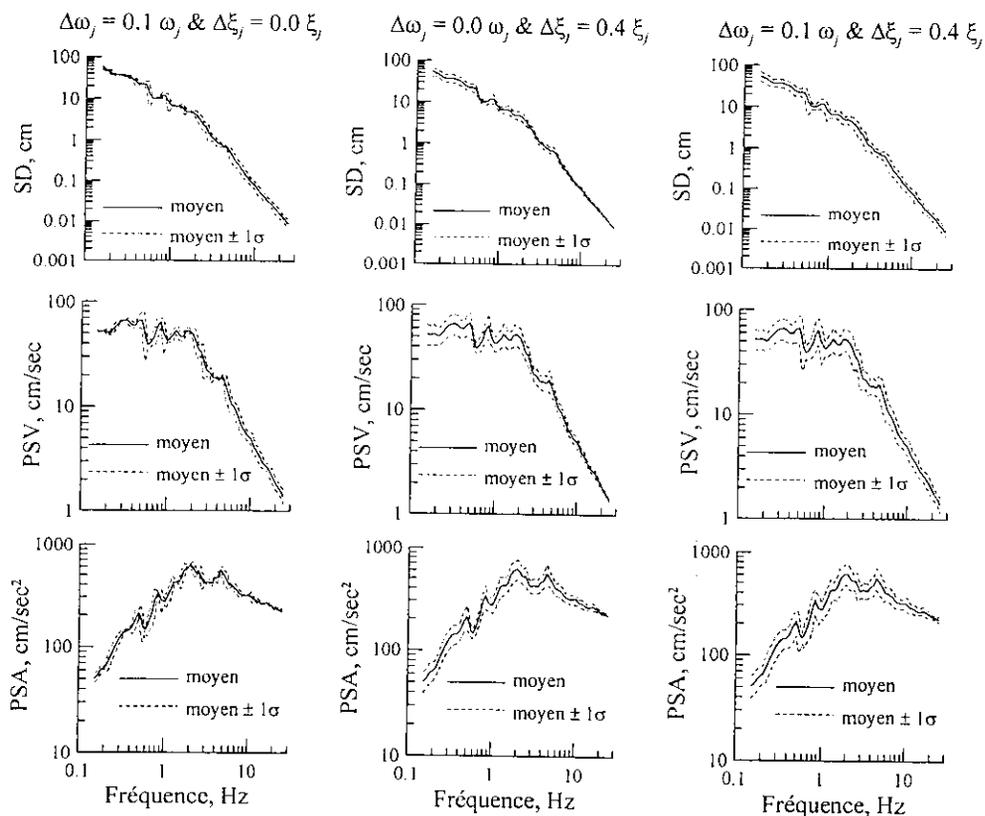


Fig. 5.6– Spectre moyen ± 1 écart type en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accelération, en considérant différentes combinaisons des incertitudes sur la fréquence propre et le pourcentage d'amortissement de l'oscillateur. Le spectre correspond au séisme de El-Centro du 18 mai 1940.

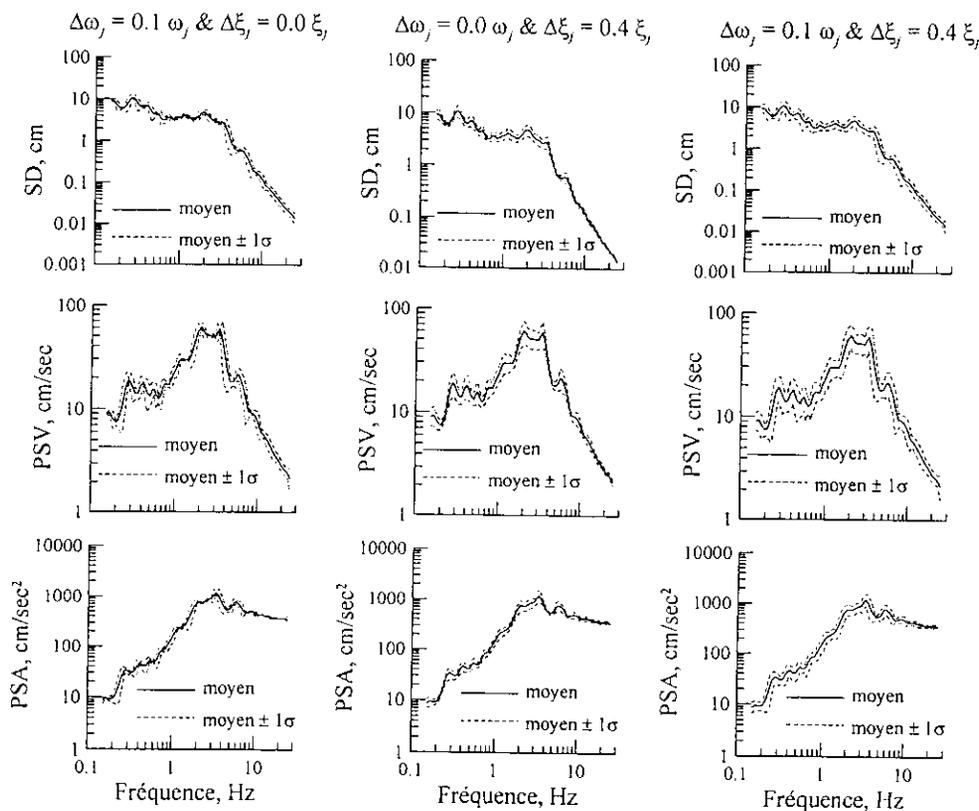


Fig. 5.7– Idem figure (5.6). Le spectre correspond au séisme de Parkfield du 27 juin 1966.

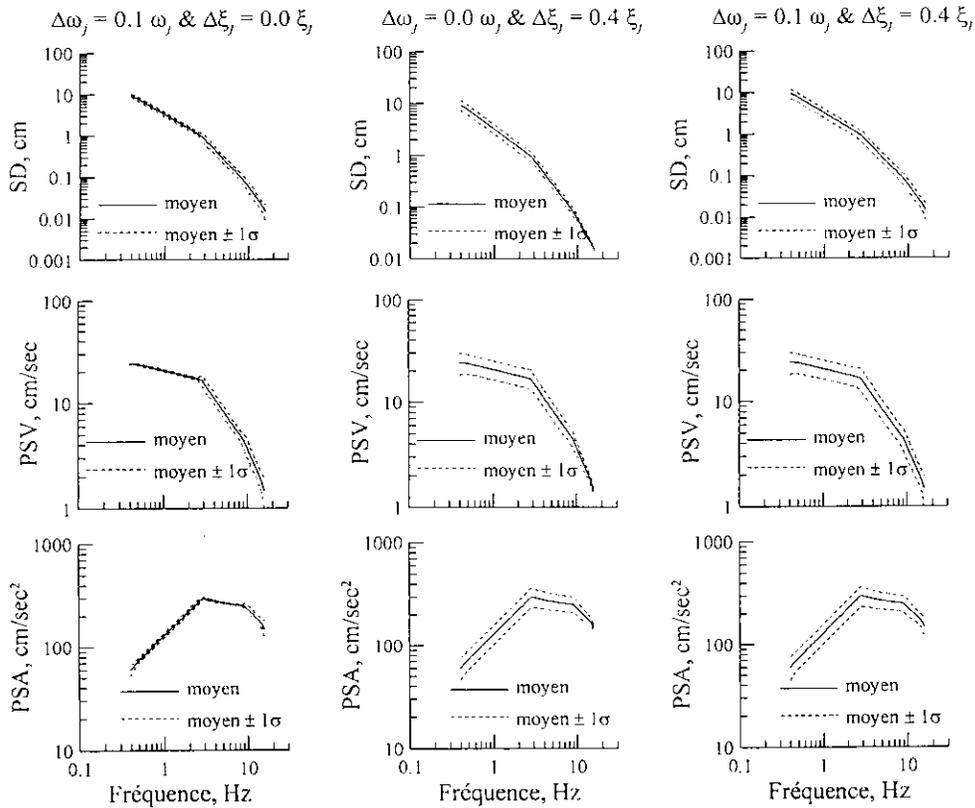


Fig. 5.8– Idem figure (5.6). Le spectre correspond aux recommandations de l'U.S.NRC.

De manière similaire, les amplitudes spectrales \pm un écart type de l'amplitude moyenne quadratique ont été calculées pour le spectre en accélération des Règles Parasismiques Algériennes RPA99 (1999) en considérant quatre types de sols : a) rocheux, b) ferme, c) meuble et d) très meuble. Les résultats numériques obtenus pour différentes combinaisons des incertitudes sur les paramètres incertains (fréquence propre, pourcentage d'amortissement critique) sont présentés dans la figure (5.9).

On remarque de façon générale que l'influence des incertitudes décroît avec une augmentation de la raideur du sol. On observe également que les incertitudes sur l'amortissement induisent des variations plus importantes sur la réponse spectrale que celles induites par les incertitudes sur la fréquence propre. Pour la gamme des courtes périodes allant de 0.04 sec jusqu'aux diverses périodes de coupure, on constate une variation sensible de la réponse spectrale induite par l'effet des incertitudes sur l'amortissement et une réduction des variations spectrales causées par l'incertitude sur la fréquence propre.

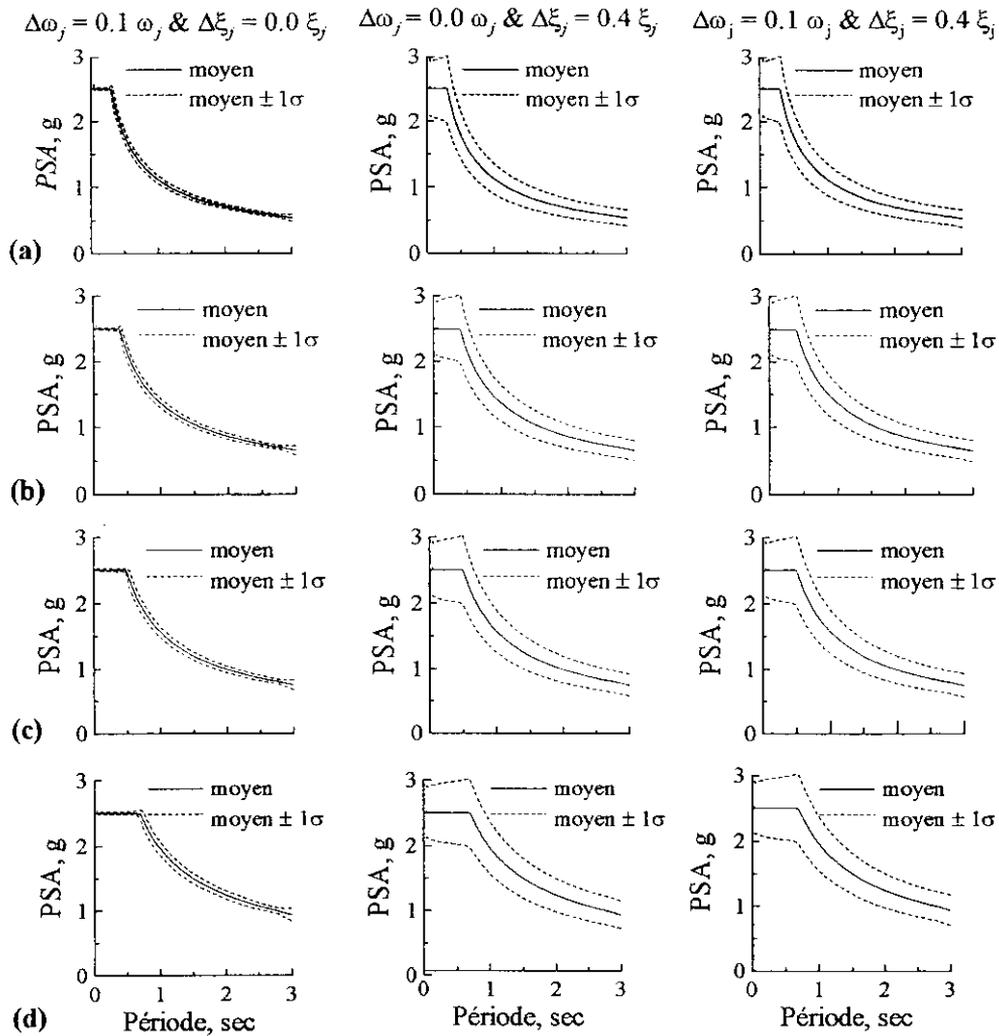


Fig. 5.9– Spectre moyen ± 1 écart type en accélération, considérant différentes combinaisons des incertitudes sur la fréquence propre et le pourcentage d'amortissement de l'oscillateur pour les spectres du RPA99 considérant les quatre types de sols : a) rocheux, b) ferme, c) meuble et d) très meuble.

Ces dernières observations sont corroborées par les variations du pourcentage de l'écart type σ_{ams} par rapport à la moyenne quadratique moyenne \bar{a}_{rms} présentées dans la figure (5.10) pour les quatre types de sols.

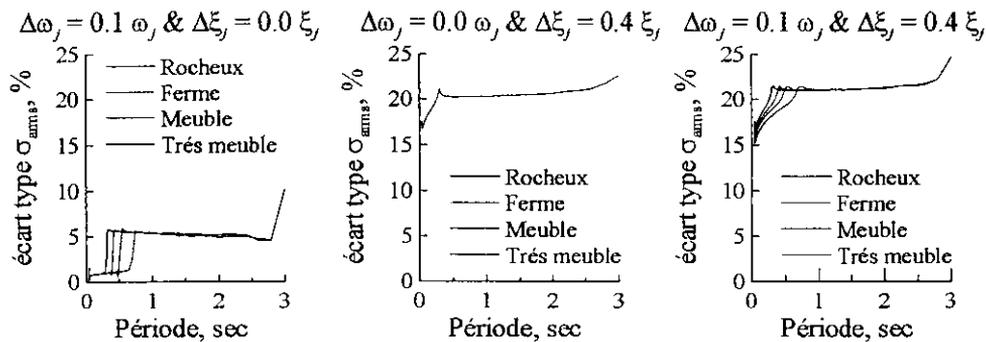


Fig. 5.10– Pourcentage de l'écart type de l'amplitude moyenne quadratique en accélération pour différentes combinaisons des incertitudes sur la fréquence naturelle et l'amortissement critique.

5. Conclusions

Les principaux résultats d'une investigation analytique et numérique des variations des amplitudes de la réponse spectrale des systèmes à paramètres incertains sont présentés. Plus précisément, les effets des incertitudes inhérentes aux caractéristiques structurales (masse, raideur, et amortissement critique) sur la réponse structurale maximale sous excitation sismique aléatoire sont examinés.

La théorie des processus aléatoires est utilisée à cet effet. Les effets de la nature stochastique du mouvement sismique de sol sont pris en considération en utilisant une fonction de densité spectrale de puissance compatible avec un spectre de réponse cible permettant pour un niveau de probabilité désiré, de prédire les amplitudes des pics de réponse les plus significatifs correspondant à la phase du mouvement fort de l'excitation sismique.

Cette formulation est ensuite présentée en détail en vue de prendre en considération les effets des incertitudes systématiques induites en général par l'ingénieur dans les valeurs adoptées pour les paramètres dynamiques (i.e. fréquence propre de vibration et amortissement critique).

Une approximation de premier ordre autour des valeurs moyennes des paramètres incertains est utilisée en vue d'obtenir la variance des amplitudes spectrales moyennes quadratiques en déplacement des systèmes à caractéristiques dynamiques aléatoires. Les équations nécessaires pour l'extension de la formulation théorique en vue du calcul des moyennes et écarts types des spectres de réponse à paramètres incertains en pseudo vitesse et pseudo accélération sont également développées.

Les principaux résultats numériques obtenus pour diverses combinaisons des incertitudes sur les valeurs des caractéristiques dynamiques et pour des excitations sismiques différentes, permettent de tirer les conclusions suivantes :

- Le facteur de pic (qui représente la valeur statistique de l'amplitude du plus grand pic de réponse normalisée par l'amplitude moyenne quadratique de la réponse pour un oscillateur donné) est pratiquement insensible aux variations des caractéristiques dynamiques. Cette observation est valide indépendamment des excitations sismiques considérées.
- L'amplitude moyenne quadratique varie sensiblement avec la fréquence de l'oscillateur, notamment dans le domaine des basses fréquences. Cette variation est

- d'autant plus sensible que la valeur de l'amortissement est plus faible et que le contenu fréquentiel de l'excitation est à bande large. Il en résulte que les variations de l'amplitude du spectre de réponse probabiliste sont essentiellement gouvernées par celles de l'amplitude du RMS.
- Les pseudo-spectres en vitesse et en accélération à paramètres incertains ne peuvent être calculés en utilisant les relations usuelles entre les spectres et pseudo-spectres de réponse à paramètres déterministes. Il est recommandé à cet effet d'utiliser les procédures décrites dans le présent chapitre.
 - De façon générale, les résultats numériques obtenus montrent que même de petites incertitudes dans les caractéristiques dynamiques peuvent avoir une incidence significative sur les amplitudes spectrales. En général, pour une incertitude sur l'amortissement, l'influence décroît avec une augmentation de la fréquence. En revanche, pour une incertitude sur la fréquence propre, l'influence décroît légèrement avec une diminution de la fréquence.
 - De manière générale, l'influence des incertitudes décroît avec une augmentation de la raideur du sol.
 - L'approche stochastique décrite dans le présent chapitre fournit une méthode simple et pratique pour l'évaluation de la variabilité des amplitudes de la réponse spectrale induite par de petites incertitudes sur les paramètres dynamiques.

Chapitre 6

Investigation de l'effet d'interaction modale sur la réponse dynamique des structures

1. Introduction.

La réponse dynamique maximale des structures à plusieurs degrés de liberté, sous excitation sismique, est généralement déterminée en utilisant les méthodes de superposition modalo-spectrales. Diverses méthodes permettant de prendre en compte l'effet d'interaction modale sont disponibles. Néanmoins, la plupart de ces méthodes fondées sur une combinaison appropriée des réponses modales et des hypothèses simplificatrices pour la détermination des coefficients de corrélation modale, peuvent conduire, dans certains cas, à d'importantes erreurs vis-à-vis de la réponse exacte.

Dans ce chapitre, des investigations numériques sont effectuées afin d'étudier la performance relative de quelques méthodes de superposition modalo-spectrales. A cet effet, la réponse en déplacement, effort tranchant et moment de renversement d'une structure asymétrique à plusieurs degrés de liberté caractérisée par des modes de vibration rapprochés, ont été calculés en utilisant plusieurs méthodes de superposition. Les résultats obtenus sont ensuite comparés à la solution exacte, calculée à partir d'enregistrements accélérométriques de séismes réels présentant des contenus fréquentiels différents.

Nous considérons successivement quatre méthodes d'évaluation de la réponse sismique maximale. Trois de ces méthodes sont basées sur la méthode de combinaison quadratique complète CQC. La quatrième est une méthode probabiliste basée sur les statistiques des pics ordonnés permet de déterminer la réponse sismique maximale pour une probabilité de non-dépassement donnée, et d'estimer également les différents pics de réponse d'ordre supérieur les plus significatifs, ce qui peut s'avérer d'une grande utilité pour l'interprétation de la progression de l'endommagement des structures sous l'effet des séismes.

2. Equations de mouvement et décomposition modale

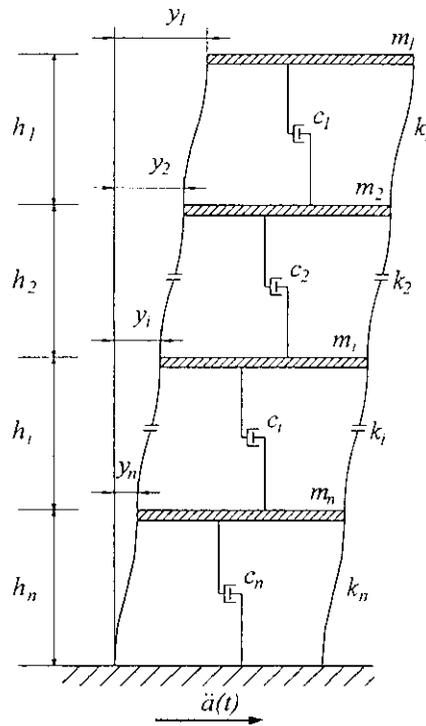


Fig. 6.1- Système à n degrés de libertés soumis à une excitation sismique uni directionnelle.

Pour un système linéaire caractérisé par un nombre fini n de degrés de liberté (Fig. 6.1), soumis à une excitation d'appuis $\ddot{a}(t)$ suivant une seule direction Y , l'ensemble des équations de l'équilibre dynamique s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[M]\{\ddot{Y}\} + [C]\{\dot{Y}\} + [K]\{Y\} = -[M]\{I\}\ddot{a}(t) \quad (6.1)$$

où $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont des matrices $(n \times n)$, définies positives, désignant respectivement les matrices de masses, d'amortissements et de raideurs. $\{Y\}$ est le vecteur des déplacements généralisés relatifs, et $\{I\}$ est le vecteur unité. Ainsi, le terme $-[M]\{I\}\ddot{a}(t)$ représente le vecteur force appliquée au système associé au mouvement horizontal du sol.

En supposant que l'amortissement est de type classique, l'équation (6.1) peut être découplée en utilisant la transformation orthogonale suivante :

$$\{Y\} = [\Phi]\{U\} \quad (6.2)$$

où $[\Phi]$ représente la matrice modale de la structure non-amortie et $\{U\}$ le vecteur des déplacements modaux généralisés.

on auras alors :

$$[M][\Phi]\{\dot{U}\} + [C][\Phi]\{\dot{U}\} + [K][\Phi]\{U\} = -[M]\{I\}\ddot{a}(t) \quad (6.3)$$

En multipliant tous les termes de l'équation (6.3) par $[\Phi]^T$, on obtient un ensemble de n équations indépendantes de la forme suivante :

$$\ddot{u}_j(t) + 2\xi_j\omega_j\dot{u}_j(t) + \omega_j^2u_j(t) = -\alpha_j\ddot{a}(t) \quad (6.4)$$

où ω_j est la valeur propre ou fréquence naturelle, ξ_j l'amortissement critique modale et α_j le facteur de participation modale donné par :

$$\alpha_j = \frac{\{\phi\}_j^T [M] \{I\}}{\{\phi\}_j^T [M] \{\phi\}_j} \quad (6.5)$$

L'équation (6.4) est analogue à l'équation d'équilibre gouvernant un oscillateur à un degré de liberté. Sa résolution peut se faire soit par intégration numérique de l'intégrale de Duhamel, ce qui nécessite la connaissance exacte de l'évolution temporelle du chargement $\ddot{a}(t)$, ou bien par la méthode modalo-spectrale, ce qui implique la connaissance du spectre de réponse de l'excitation, mais qui fournit uniquement la réponse modale maximale $r_{y_i} = \max[y_i(t)]$.

En utilisant l'équation (6.2), la réponse en déplacement $y_i(t)$ du $i^{\text{ème}}$ niveau de la structure peut être obtenue par :

$$r_{y_i}(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_{ij} u_j(t) \quad (6.6)$$

Les réponses en effort tranchant et moment de renversement à la base du $i^{\text{ème}}$ niveau peuvent être obtenues respectivement par :

$$r_{V_i}(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \omega_j^2 \sum_{k=1}^i m_k \phi_{kj} u_j(t) \quad (6.7)$$

$$r_{M_i}(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \omega_j^2 \sum_{k=1}^i h_k \left(\sum_l^k m_l \phi_{lj} \right) u_j(t) \quad (6.8)$$

m_i et h_i représentent respectivement la masse et la hauteur du $i^{\text{ème}}$ étage.

Cette équation donne une importante corrélation seulement entre les modes de valeurs rapprochés. Par contre, lorsque l'excitation est à bande étroite ou lorsque les modes de hautes fréquences ont une forte contribution dans la réponse, cette approximation ne donne pas de résultats très précis.

4.3. Formulation de Der Kiureghian et Nakamura

Pour prendre en compte le cas d'une excitation à bande étroite, Der–kiureghian et Nakamura (1993) ont proposé d'évaluer les coefficients de corrélation ρ_{jk} en calculant l'intégrale de l'équation (6.21) à partir d'une forme approximative de la DSP $G(\omega)$ définie en fonction du spectre de réponse en déplacement $SD(\omega, \xi)$ comme suit :

$$G(\omega) = \frac{4\xi\omega^3}{\pi\eta_{\max}^2} SD^2(\omega, \xi) \quad (6.28)$$

Dans cette expression, η_{\max} et le facteur de pic, définie en fonction de la fréquence ω , du pourcentage d'amortissement critique ξ , de l'oscillateur et de la durée stationnaire, T_S , du mouvement fort (Der–Kiureghian, (1980). Cependant, la méthode de Der–Kiureghian et de Nakamura ne prend pas en compte l'effet de réponse transitoire et le fait que les modes de basses fréquences peuvent ne pas atteindre un état stationnaire de la réponse.

5. Développement de la règle probabiliste de combinaison modale

En remplaçant la DSP de l'excitation $S_{\ddot{a}\ddot{a}}(\omega)$ par la DSP compatible unilatérale $G(\omega)$ dans l'équation (6.17), on obtient la DSP unilatérale de la réponse en déplacement du $i^{\text{ème}}$ étage comme suit :

$$GD_i(\omega) = G(\omega) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{ij} \phi_{ik} \alpha_j \alpha_k H_j(\omega) H_k^*(\omega) \quad (6.29)$$

Pour les termes complexes $H_j(\omega) H_k^*(\omega)$ à l'intérieur de la double somme, il n'y a que les parties réelles qui contribuent à $GD_i(\omega)$ puisque la partie imaginaire disparaît, car les termes d'indices (k,j) et (j,k) s'annulent entre eux à cause de l'asymétrie. La partie réelle restante peut être développée en fractions (Singh et Maldonado, 1991) comme suit :

$$\text{Re}[H_j(\omega) H_k^*(\omega)] = \frac{1}{2} \left\{ \left(B_{jk} + \frac{\omega^2}{\omega_j^2} C_{jk} \right) |H_j(\omega)|^2 + \left(B_{kj} + \frac{\omega^2}{\omega_k^2} C_{kj} \right) |H_k(\omega)|^2 \right\} \quad (6.30)$$

où les coefficient B_{jk} , C_{jk} sont définie par :

$$B_{jk} = \frac{[8(\xi_j^2 - \xi_k^2 r^2) - 4(1-r^2)] \cdot [4\xi_j r(\xi_k - \xi_j r) - (1-r^2)] - 2(1-r^2)(1-r^4)}{D_{jk}} \quad (6.31)a$$

$$C_{jk} = \frac{2(1-r^2) \{4r(\xi_j - \xi_k r)(\xi_k - \xi_j r) - (1-r^2)^2\}}{D_{jk}} \quad (6.32)b$$

et

$$D_{jk} = 8r^2 \left[2(\xi_k^2 - \xi_j^2 r)(\xi_j^2 - \xi_k^2 r^2) - (\xi_j^2 + \xi_k^2)(1-r^2)^2 \right] - (1-r^2)^4 \quad (6.32)c$$

avec $r = \omega_j / \omega_k$

Les coefficients B_{kj} et C_{kj} sont obtenus simplement en prenant $r = \omega_j / \omega_k$ et en inter-changeant ξ_j et ξ_k . A cause de la symétrie existant entre les termes d'indice (k,j) et d'indice (j,k) dans l'équation (6.30), l'équation (6.29) se simplifie en :

$$GD_i(\omega) = G(\omega) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ij} A_{ik} \alpha_j \alpha_k \left(B_{jk} + \frac{\omega^2}{\omega_j^2} C_{jk} \right) |H_j(\omega)|^2 \quad (6.32)$$

Pour prendre en compte de la partie transitoire de la réponse du $i^{\text{ème}}$ étage lorsque la durée totale T_D de l'excitation n'est pas assez longue, on remplace la DSP $G(\omega)$ de l'excitation par la DSP $\tilde{G}(\omega)$ définie par :

$$\tilde{G}_j = G(\omega) \cdot |\mathcal{F}_j(\omega, T_D)|^2 \quad (6.33)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j(\omega, T_D) &= \frac{\tilde{H}_j(\omega, T_D)}{H_j(\omega)} \\ &= e^{-i\omega t} - e^{-\xi_j \omega_j t} \left(\cos\left(\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t\right) + \frac{\xi_j \omega_j + i\omega}{\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2}} \sin\left(\omega_j \sqrt{1-\xi_j^2} t\right) \right) \end{aligned} \quad (6.34)$$

En remplaçant l'équation (6.33) dans l'équation (6.32), on obtient l'expression de la DSP de la réponse en déplacement du $i^{\text{ème}}$ étage de la structure :

$$GD_i(\omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ij} A_{ik} \alpha_j \alpha_k \left(B_{jk} + \frac{\omega^2}{\omega_j^2} C_{jk} \right) \tilde{G}_j(\omega) |H_j(\omega)|^2 \quad (6.35)$$

On pourra alors calculer à partir de cette DSP, les pics ordonnés de la réponse du $i^{\text{ème}}$ étage moyennant les statistiques des pics ordonnés. Pour cela, on a besoin d'évaluer les paramètres statistiques N_i , $a_{i,rms}$, est ε_i à partir des équation (3.16), (3.21) et (3.22). Les moments d'ordre 0, 2 et 4 de $GD_i(\omega)$ sont données par :

$$m_{k,i} = \int_0^{\infty} \omega^k GD_i(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_y A_{ik} \alpha_j \alpha_k \left(B_{jk} \lambda_{k,j} + \frac{1}{\omega_j^2} C_{jk} \lambda_{k+2,j} \right) \quad (6.36)$$

avec

$$\lambda_{k,j} = \int_0^{\infty} \omega^k \tilde{G}_j(\omega) |H_j(\omega)|^2 d\omega \quad (6.37)$$

Pour obtenir les moments $m_{0,i}$, $m_{2,i}$ et $m_{4,i}$, les paramètres λ_{kj} sont évalués pour $k = 0, 2, 4$ et 6. Pour le calcul des intégrales de l'équation (6.36), Gupta et Trifunac (1998) ont proposé une technique efficace d'évaluation qui consiste à représenter $\tilde{G}_j(\omega)$ par un segment de droite entre deux fréquences consécutives. Cette technique est exposée en annexe (2).

6. Applications numériques

6.1. Calcul probabiliste des pics de la réponse d'un bâtiment multi-étages

L'application de la formulation théorique décrite précédemment est maintenant illustrée à travers un exemple numérique. Un bâtiment à cinq niveaux est pris comme exemple. Le bâtiment est considéré avoir des planchers rigides avec une masse et une rigidité uniforme pour chaque niveau. Une élévation du bâtiment ainsi que les caractéristiques de chaque de chaque niveau sont présentées dans la figure (6.2). De plus, on suppose que la structure est excitée par le mouvement au sol seulement le long de la direction horizontale, de sorte qu'il n'y a qu'un seul degré de liberté de translation le long de cette direction pour chaque niveau. Les fréquences propres de vibration libre non-amortie du bâtiment obtenues sont : 12.15, 31.65, 48.82, 63.76 et 72.1 rad/sec. Tous les modes sont considérés avoir un pourcentage d'amortissement critique constant de 5%.

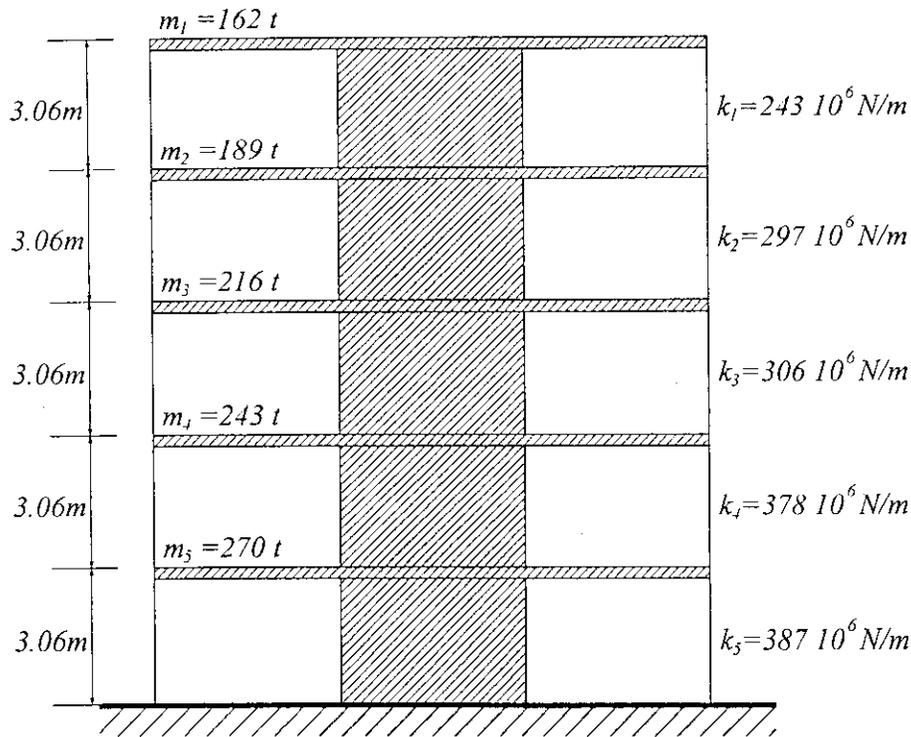


Fig. 6.2- Vue en élévation d'un bâtiment à cinq niveaux.

Quatre enregistrements accélérométriques de séismes réels, dont les contenus fréquentiels sont largement différents, ont été retenus pour le calcul des réponses de la structure précédente. Leurs DSP compatibles utilisés pour le calcul des résultats théoriques ont été obtenus à partir des spectres de réponse en utilisant la deuxième méthode décrite dans Chapitre 3. Ils correspondent aux composantes S90W du séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, (Fig.6.3a), N05W du séisme de Parkfield du 27 juin 1966 (Fig.6.3b), N90W de la réplique d'El Attaf du séisme d'El Asnam du 10 octobre 1980 (Fig.6.3c), N90E du séisme de Cherchell du 29 octobre 1989, (Fig.6.3d).

Les accélérogrammes ont été utilisés pour le calcul des réponses exactes dans le domaine temporel à partir des équations (6.6), (6.7) et (6.8). Les spectres de réponse en déplacement relatif aux accélérogrammes ont été utilisés dans l'équation (6.24) en utilisant les différentes formulations décrites par les équations (6.26), (6.27) et (6.28). Les DSP compatibles ont été calculées de telle sorte que les valeurs des amplitudes des spectres théoriques attendus, obtenus en utilisant ces DSP, coïncident aux amplitudes respectives des spectres cibles pour un amortissement critique $\xi = 5\%$. Ces DSP ont été utilisés pour le calcul des valeurs de la réponse attendu, la plus probable et pour une probabilité de non dépassement de 0.5 et 95 %, en utilisant la méthode probabiliste présentée précédemment.

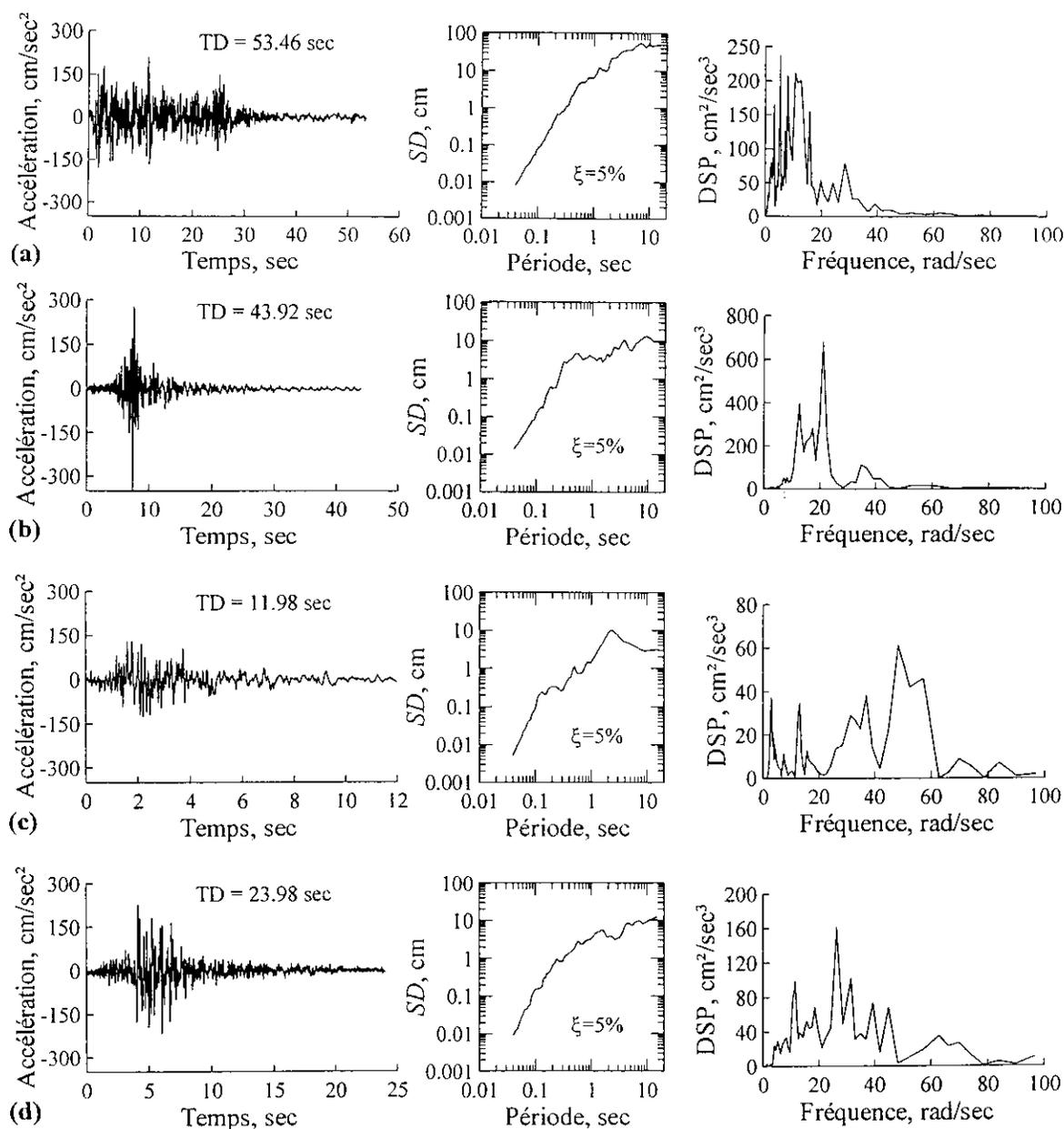


Fig. 6.3— Enregistrements accélérométriques, spectres de réponse en déplacement et DSP compatibles, a) séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, b) séisme de Parkfield du 27 juin 1966, c) séisme d'El Asnam du 10 octobre 1980, d) séisme de Cherchell du 29 octobre 1989.

Les figures (6.4a) à (6.4d) montrent les résultats de la réponse maximale (premier ordre) en déplacement, effort tranchant et moment de renversement à chaque étage du bâtiment pour les quatre enregistrements accélérométriques étudiés.

La réponse attendue, la réponse la plus probable et les réponses pour des probabilités de non dépassement 5 et 95 % obtenues selon la formulation théorique présentée précédemment, ont été comparés à la réponse exacte calculée dans le domaine temporel. Pour ce faire, toutes les valeurs de la réponse en déplacement, effort tranchant et moment de renversement ont été normalisés par rapport à leurs valeurs maximales respectives.

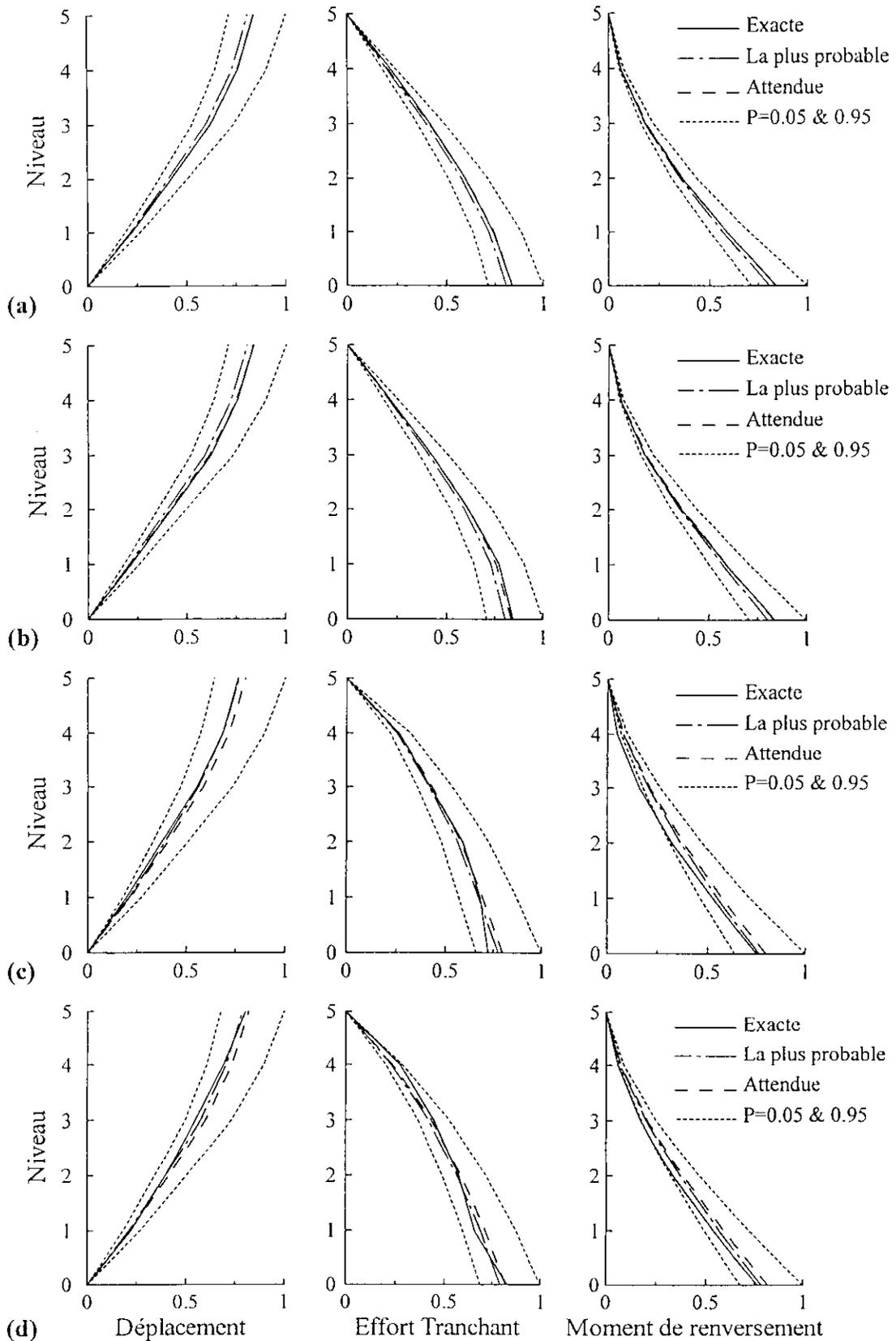


Fig. 6.4- Réponses maximales en déplacement, effort tranchant et moment de renversement de chaque niveau du bâtiment, a) séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, b) séisme de Parkfield du 27 juin 1966, c) séisme d'El-Asnam du 10 octobre 1980, d) séisme de Cherchell du 29 octobre 1989

Il a été constaté à partir des figures (6.4a) à (6.4d), que la réponse attendue et la réponse la plus probable à chaque niveau de la structure sont très proches de la réponse exacte qui se trouve à l'intérieur de l'intervalle de confiance limité par les réponses de probabilité 5% et 95% pour tous les types de réponse (déplacement, effort tranchant et moment de renversement). Cette tendance se confirme pour tous les enregistrements accélérométriques considérés.

Les figures. (6.5a) à (6.5d) présentent la comparaison de la réponse exacte dans le domaine temporel avec les réponses attendues, les plus probables et les réponses pour une probabilité de 5% et 95%, pour les 20 premiers pics ordonnés des réponses en déplacement, effort tranchant et moment de renversement, à chaque niveau du bâtiment. Pour tous les enregistrements accélérométriques considérés (Figs. 6.5a à 6.5d), les résultats montrent la bonne concordance des réponses attendues et des réponses les plus probables avec les solutions exactes pour plusieurs pics ordonnées. Néanmoins, le nombre de pics dont les amplitudes sont très proches de la solution exacte varie d'un enregistrement à un autre selon les caractéristiques non-stationnaires de l'accélération du sol. Par exemple, pour le cas du tremblement de terre d'El-Centro (Fig. 6.5a) et d'El Asnam (Fig. 6.5c), dont la partie représentant le mouvement fort est assez longue, la concordance entre les résultats théoriques et les résultats exacts est très bonne, pour environ les dix premiers pics, tandis que pour les cas du tremblement de terre de Parkfield (Fig. 6.5b), les résultats théoriques sont en bon accord pour environ les cinq premiers pics seulement. Néanmoins, pour ce cas également, les résultats théoriques montrent des tendances très proches des résultats exacts même pour les pics d'ordres supérieurs et les différences numériques entre les deux résultats sont petites.

Ainsi la méthode probabiliste de superposition modale fournit une base de calcul des amplitudes de tous les pics de la réponse au mouvement fort à tous les niveaux d'un bâtiment à plusieurs étages sans passer par une analyse non-stationnaire compliquée (Zembaty, 1988) ou une étude détaillée dans le domaine temporel (Clough et Penzien, 1975).

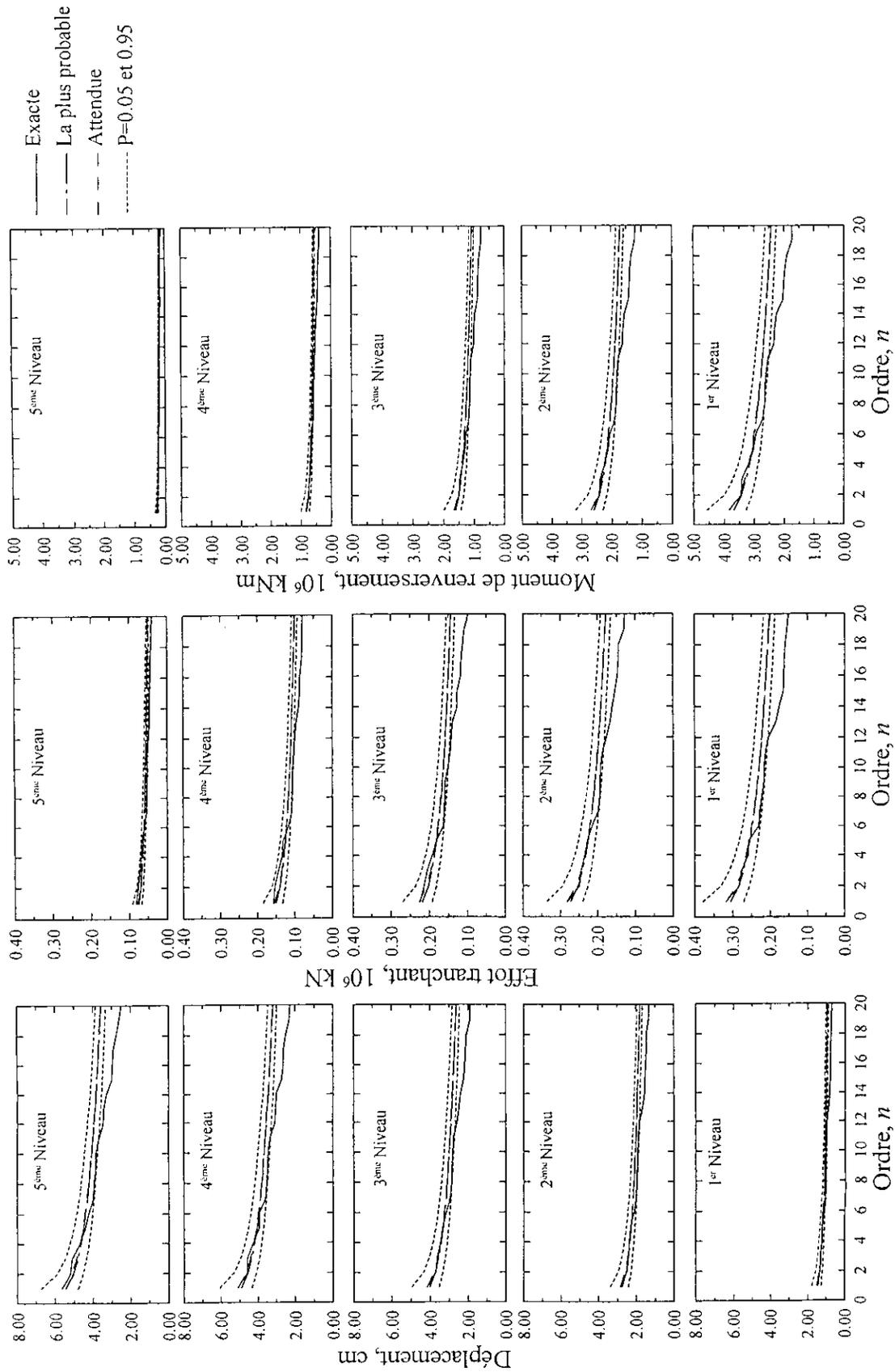


Fig. 6.5a— Comparaison des valeurs exactes et théoriques des 20 premiers pics de la réponse des cinq niveaux de la structure soumise au séisme d'El-Centro de 1940.

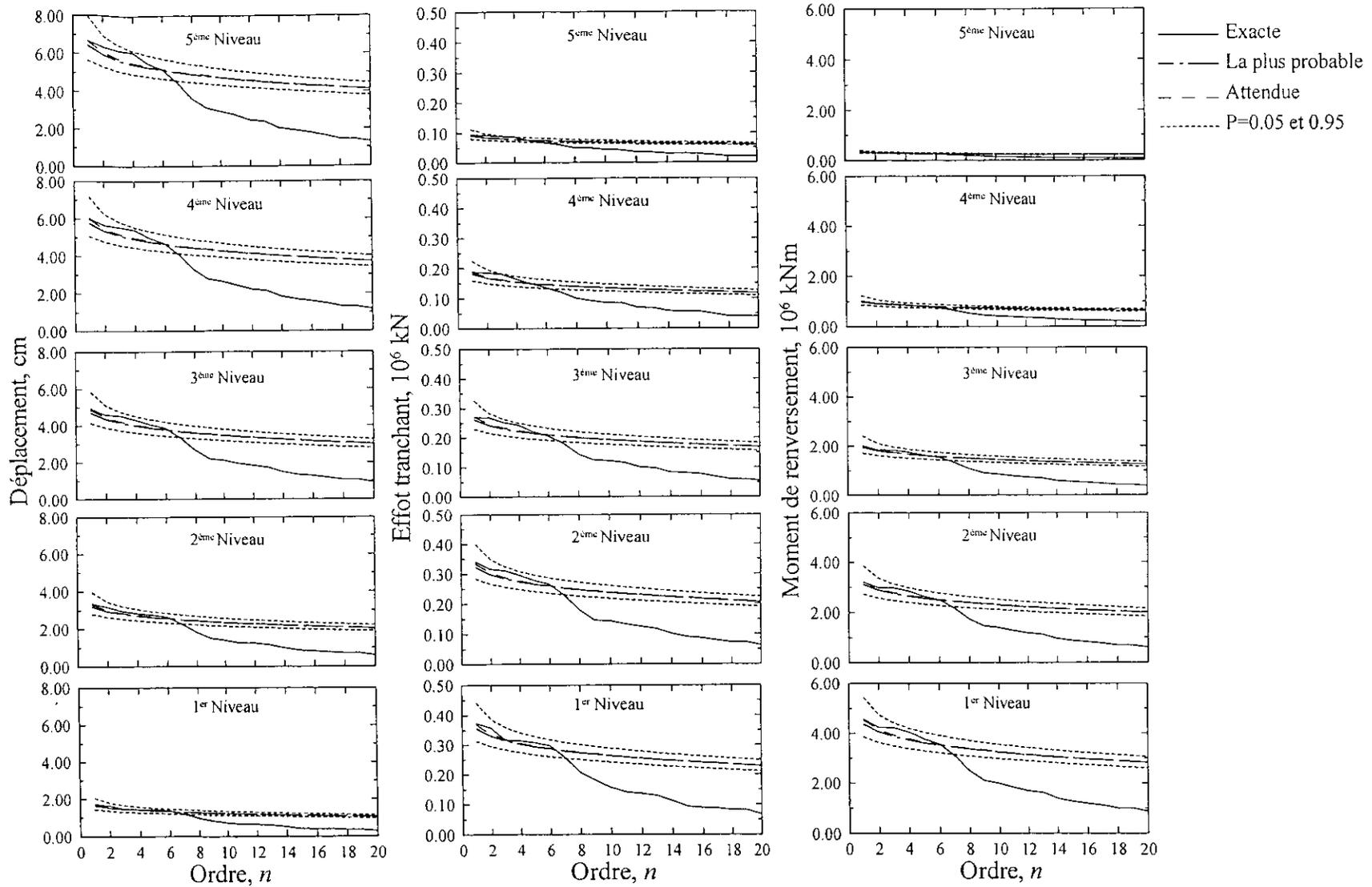


Fig. 6.5b— Comparaison des valeurs exactes et théoriques des 20 premiers pics de la réponse des cinq niveaux de la structure soumise au séisme de Parkfield de 1966

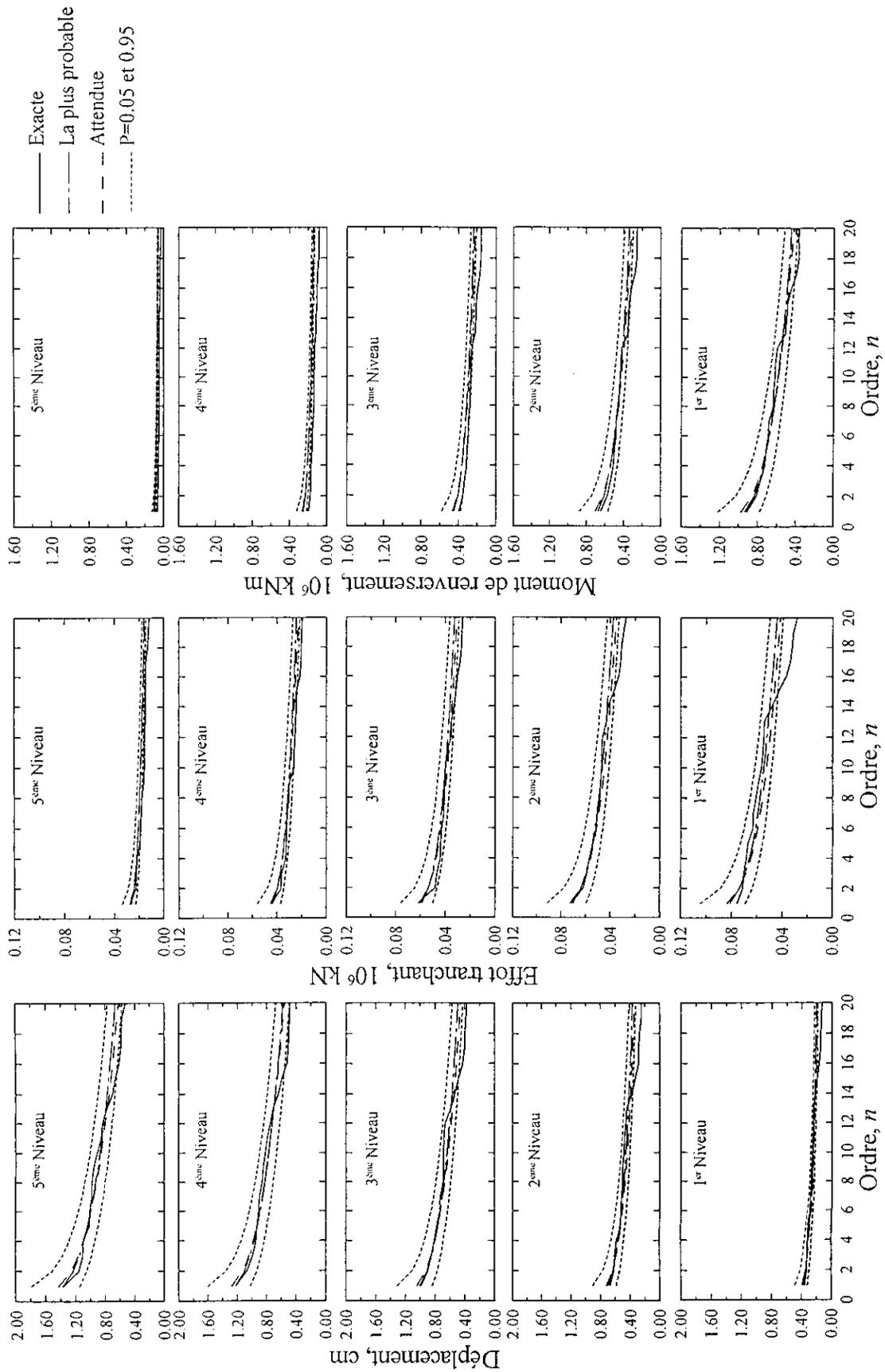


Fig. 6.5c- Comparaison des valeurs exactes et théoriques des 20 premiers pics de la réponse des cinq niveaux de la structure soumise au séisme d'El Asnam de 1980.

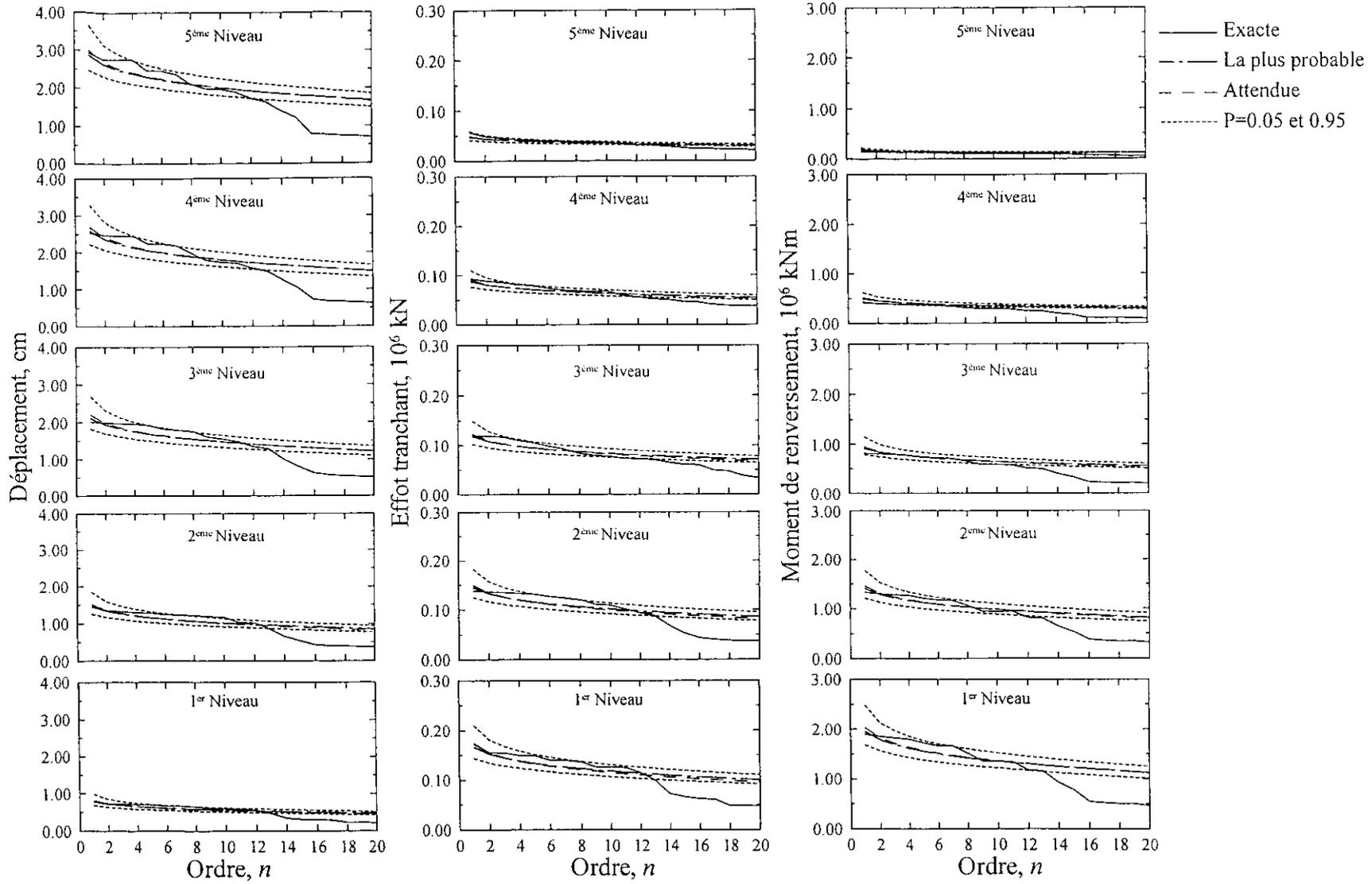


Fig 6.5d- Comparaison des valeurs exactes et théoriques des 20 premiers pics des la réponse des cinq niveaux de la structure soumise au séisme de Cherchell de 1989.

6.2. Investigation de l'effet d'interaction modale sur la réponse dynamique des structures à modes rapprochés

Afin de mener une investigation sur la performance des différentes méthodes modalo-spectrales décrites précédemment, le pourcentage d'erreur par rapport à la solution exacte dans le domaine temporelle, a été évalué pour les réponses en déplacement, effort tranchant et moment de renversement, en utilisant les différentes méthodes, à chaque niveau d'un bâtiment asymétrique. Pour cette application, on considère que chaque niveau du bâtiment de la figure (6.2) a un centre de rigidité décalé de 1.5 m par rapport au centre de masse dans le sens Y seulement (Fig. 6.6).

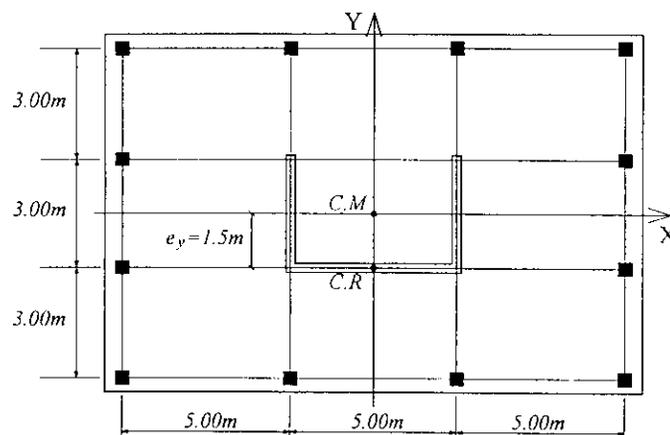


Fig.6.6- Vue en plan de l'étage d'un bâtiment asymétrique à cinq niveaux.

La structure est considérée soumise à une accélération du sol suivant la direction X seulement. C'est pourquoi, à cause de l'asymétrie par rapport à l'axe X causée par le décalage entre le centre de rigidité et le centre de masse, le centre de masse de chaque étage subit une rotation autour du centre de rigidité en plus d'une translation dans la direction X, la réponse du bâtiment sera définie par 10 degrés de libertés (Kan et Chopra, 1977). Pour un bâtiment asymétrique les degrés de libertés de translation et de torsion sont, en général, couplés, ceci conduit à des fréquences propres de valeurs rapprochées. Les équations de mouvement de la réponse couplée des composantes de translation et de torsion d'un bâtiment soumis à une excitation dans la direction X sont développées en annexe (3). Les fréquences propres de vibration libre non-amorties du bâtiment sont les suivantes : [12.15, 12.46], [31.65, 32.47], [48.82, 50.08], [63.76, 65.41], et [72.1, 73.96] rad/sec. Tous les modes sont considérés avoir un amortissement constant de 5%. On remarque que les fréquences propres de sont rapprochées deux par deux, c'est pourquoi une importante contribution des termes prenant en compte l'interaction modale, est à prévoir (Zermout et Tiliouine 2003).

Les enregistrements accélérométriques de séismes réels, dont les contenus fréquentiels sont largement différents, sont ceux des composantes S90W du séisme de l'Imperial Valley du 18 mai 1940, enregistrée à El-Centro (Fig.6.3a), N05W du séisme de Parkfield du 27 juin 1966, enregistrée à Cholame Shandon (Fig.6.3b).

Les figures (6.7a) et (6.7b) montrent le tracé des erreurs induites par chaque formulation, par rapport à la solution exacte pour les deux enregistrements accélérométriques.

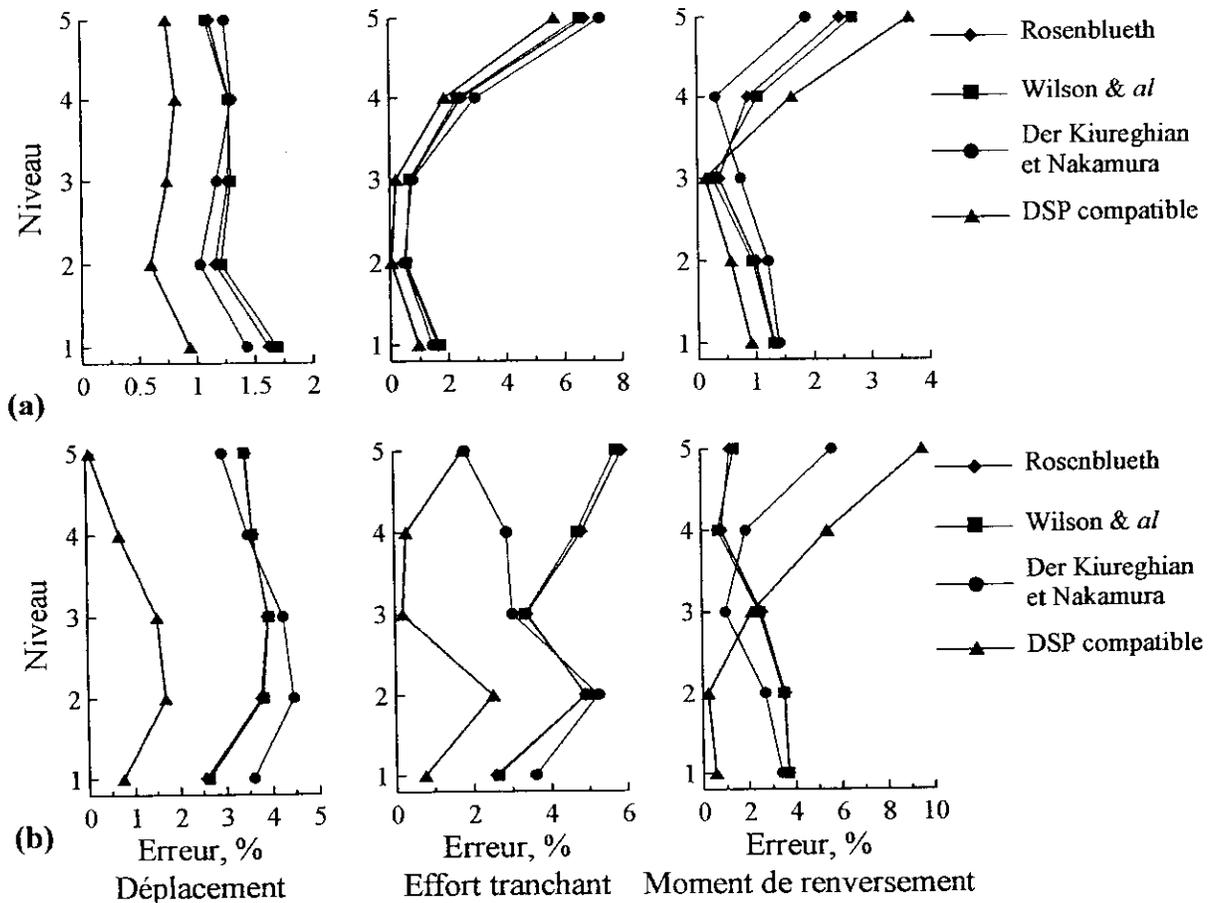


Fig. 6.7- Pourcentage d'erreur par rapport à la solution exacte, évalué pour les réponses en déplacement, effort tranchant et moment de renversement, obtenues à partir des différentes formulations, à chaque niveau du bâtiment. a) séisme d'El-Centro du 18 mai 1940, b) séisme de Parkfield du 27 juin 1966.

On constate, qu'en générale la méthode probabiliste donne de meilleurs résultats que les méthodes modalo-spectrales classiques pour les deux enregistrements considérés. Les résultats montrent que chaque formulation présente des degrés d'erreurs nettement différents par rapport à la solution exacte. Cela est dû au faite que les différentes hypothèses simplificatrices adoptées par chaque méthode, produisent des effets différents selon l'enregistrement accélérométrique considéré.

Il est à noter que le pourcentage d'erreur obtenu pour l'enregistrement de Parkfield (Fig.6.7b) est plus important que celui obtenue pour l'enregistrement accélérométrique d'El-Centro (Fig. 6.7a). Ceci s'explique par le fait que la plupart des méthodes modalo-spectrales, considère l'excitation sismique comme étant un processus à bande large ce qui est le cas pour le séisme d'El-Centro. Par contre les erreurs sont plus importantes lorsque l'excitation considérée est à bande étroite. En effet, Pour un processus à bande étroite, les modes qui se trouvent en dehors de la gamme de fréquences du processus d'entrée, sont caractérisées par une très forte corrélation entre eux ainsi qu'avec les autres modes de vibration. La méthode probabiliste est dépourvue de ces hypothèses, puisqu'elle utilise une DSP compatible avec un spectre de réponse, qui est à même de reproduire de manière plus précise le contenu fréquentiel de l'excitation.

Les méthodes classiques de combinaison modale utilisent diverses approximations pour l'estimation des coefficients de corrélation. Pour étudier la performance relative de chaque méthode, à évaluer les coefficients de corrélation, il a été procédé au calcul de ces coefficients pour chaque méthode à partir des équations (6.26) et (6.27) pour les méthode de Rosenblueth et Elorduy et celle de Wilson et *al*, et en utilisant les équations (6.19) et (6.21) lorsqu'il s'agit de la DSP approximative de Der Kiureghian et Nakamura, et de la DSP compatible.

Les figures (6.8a) et (6.8b) montrent la variation des coefficients de corrélation pour trois valeurs de fréquences propres $\omega_j = 12, 32, 50$ rad/sec et avec ω_k variant de 1 à 100rad/sec. Chaque valeur de ω_j à été choisit pour correspondre aux six premiers modes de vibration de la structure précédente lorsque les fréquences sont présent deux à deux.

On constate que la méthode de Rosenblueth et Elorduy, et celle de Wilson et *al*, présentent des résultats très rapprochés. Toutes deux sont basées sur une approximation de l'action sismique par un bruit blanc. Néanmoins, la méthode de Rosenblueth et Elorduy prend en compte la nature transitoire des réponses modales. Idem pour la méthode de Der-Kiureghian et Nakamura et celle basée sur la DSP compatible, toute deux présentent des résultats similaires. Mais, la méthode basée sur la DSP compatible, reste plus précise que celle basée sur la DSP approximative.

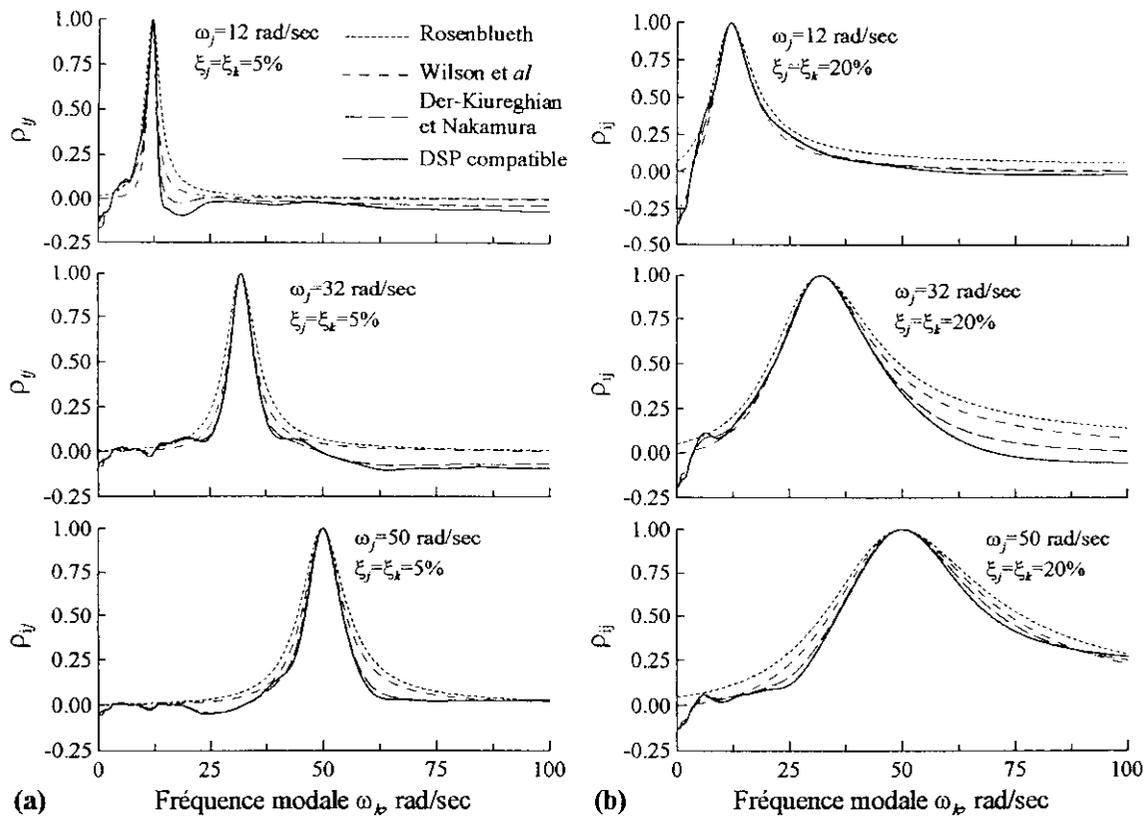


Fig. 6.8— Comparaison entre les coefficients de corrélations ρ_k obtenus à partir de quatre méthodes pour des fréquences modales $\omega_j=12, 32$ et 50 rad/sec et un amortissement modal : a) $\xi_j=\xi_k=5\%$, b) $\xi_j=\xi_k=20\%$, pour le séisme d'El-Centro du 18 mai 1940.

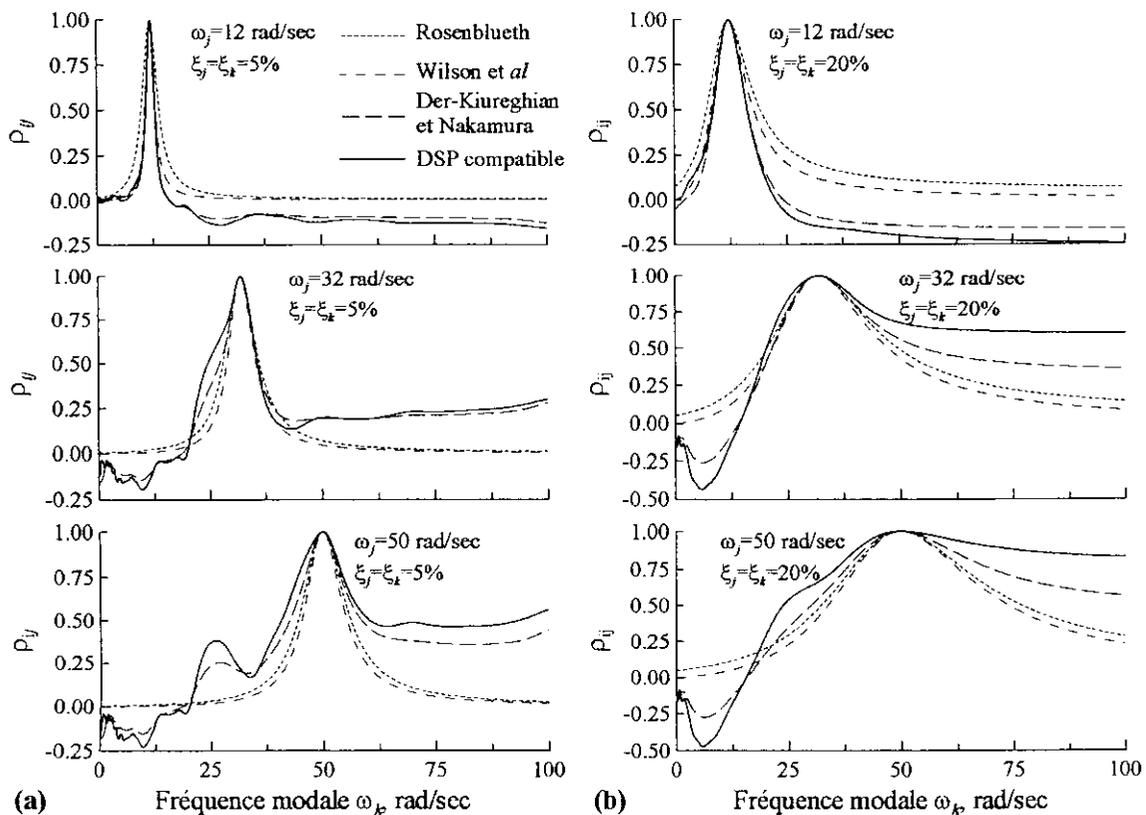


Fig. 6.9— Idem figure (6.8), pour le séisme de Parkfield du 27 juin 1966.

On remarque aussi, que pour une excitation à bande large correspondant à l'enregistrement d'El-Centro (Fig. 6.8a), les coefficients de corrélation présentent tous une bonne similitude quelque soit la méthode utilisée. Par contre, pour une excitation à bande étroite correspondant à l'enregistrement du séisme de Parkfield (Fig. 6.8b), les coefficients de corrélations, calculés à partir de la DSP approximative ainsi que ceux calculés à partir de la DSP compatible, diffèrent sensiblement des coefficients calculés à partir des méthodes basées sur une approximation par un bruit blanc. Ces dernières sont donc peu précises lorsque l'excitation est à bande étroite et conduisent à des erreurs inacceptables.

On constate que l'interaction modale est importante pour les modes très proches de la fréquence de vibration ω_j , mais aussi qu'elle est importante pour l'intervalle de fréquence ou l'énergie de l'excitation est importante. Par contre l'interaction modale est petite pour les fréquences éloignées de la fréquence prédominante de la DSP. On remarquera aussi que l'interaction des modes de basse fréquence avec ceux de haute fréquence en dehors de l'intervalle de la fréquence prédominante, est importante dans les sens négatif à cause du déphasage existant entre les deux modes cela apparaît clairement pour les fréquences 32 et 50 rad/sec

En comparant les courbes obtenues pour un amortissement de 5% et ceux pour un amortissement de 20%, il apparaît clairement que l'amortissement agit sur le paramètre ρ_{jk} . Plus l'amortissement augmente et plus l'effet de l'interaction augmente sur une large bande de fréquences. Ainsi, la capacité filtrante du système diminue et les courbes deviennent plus lisses. Avec la diminution de l'amortissement les pics deviennent plus prononcés suivant la forme de la DSP et l'interaction entre les modes augmente.

7. Conclusions

Les méthodes modalo-spectrales proposées par différents investigateurs pour le calcul de la réponse des structures à plusieurs degrés de libertés caractérisés par des modes de vibration rapprochés, prennent en compte l'effet de l'interaction modal à travers des coefficients de corrélation, définis sous différentes hypothèses simplificatrices et différentes approximations de l'excitation sismique. La méthode probabiliste qui utilise une DSP compatible avec un spectre de réponse cible, représente une approche plus précise libre de toutes ces hypothèses.

En calculant les réponses en déplacement, l'effort tranchant et le moment de renversement à chaque étage d'un bâtiment asymétrique à cinq niveaux, excité par deux enregistrements

accélérométriques réels représentant des caractéristiques du mouvement de sol largement différentes, il a été constaté que la méthode probabiliste donne des résultats proches de la solution exacte comparativement aux autres méthodes approximatives. Il est donc plus approprié d'utiliser la méthode probabiliste pour le calcul des structures présentant une interaction importante entre ces modes de vibration.

En outre, la méthode probabiliste permet de déterminer la réponse sismique maximale pour une probabilité de non-dépassement donnée, et d'estimer également les différents pics de réponse d'ordre supérieur les plus significatifs, et pas seulement le pic maximal contrairement aux autres méthodes de superposition. La connaissance des pics les plus importants de la réponse peut s'avérer d'une grande utilité pour l'interprétation de la progression de l'endommagement des structures sous l'effet des séismes (Basu et Gupta, 1995,1995a).

pour une magnitude, une distance épacentrale et des conditions géologiques et locales de site données.

- Une approximation de premier ordre autour des valeurs moyennes des paramètres incertains permet d'obtenir aisément la variance des amplitudes spectrales moyennes quadratiques en déplacement des systèmes à caractéristiques dynamiques aléatoires. Les équations nécessaires pour l'extension de la formulation théorique en vue du calcul des moyennes et écarts types des spectres de réponse à paramètres incertains en pseudo vitesse et pseudo accélération sont également développées. L'approche stochastique utilisée fournit également une méthode simple et pratique pour l'évaluation de la variabilité des amplitudes de la réponse spectrale induite par de petites incertitudes sur les paramètres dynamiques. Les principaux résultats numériques obtenus pour diverses combinaisons des incertitudes sur les valeurs des caractéristiques dynamiques et pour des excitations sismiques à contenus fréquentiels différents, permettent de tirer les conclusions suivantes :

- i. Le facteur de pic (qui représente la valeur statistique de l'amplitude du plus grand pic de réponse normalisée par l'amplitude moyenne quadratique de la réponse pour un oscillateur donné) est pratiquement insensible aux variations des caractéristiques dynamiques. Cette observation est valide indépendamment des excitations sismiques considérées.
- ii. L'amplitude moyenne quadratique varie sensiblement avec la fréquence de l'oscillateur, notamment dans le domaine des basses fréquences. Cette variation est d'autant plus sensible que la valeur de l'amortissement est plus faible et que le contenu fréquentiel de l'excitation est à bande large. Il en résulte que les variations de l'amplitude du spectre de réponse probabiliste sont essentiellement gouvernées par celles de l'amplitude du RMS.
- iii. De façon générale, les résultats numériques obtenus montrent que même de petites incertitudes dans les caractéristiques dynamiques peuvent avoir une incidence significative sur les amplitudes spectrales. En général, pour une incertitude sur l'amortissement, l'influence décroît avec une augmentation de la fréquence. En revanche, pour une incertitude sur la fréquence propre, l'influence décroît légèrement avec une diminution de la fréquence. On constate aussi que de manière générale, l'influence des incertitudes décroît avec une augmentation de la raideur du sol.

- Les méthodes modalo–spectrales proposées par différents auteurs pour le calcul de la réponse des structures à plusieurs degrés de liberté caractérisées par des modes de vibration rapprochés, différent essentiellement dans la prise en compte de l'effet de l'interaction modale à travers des coefficients de corrélation, définis sous différentes hypothèses simplificatrices et différentes approximations de l'excitation sismique. La méthode probabiliste qui utilise une DSP compatible avec un spectre de réponse cible, représente une approche plus précise et affranchie de toutes ces hypothèses. En calculant les réponses en déplacement, l'effort tranchant et le moment de renversement à chaque étage d'un bâtiment asymétrique à cinq niveaux, excité par deux enregistrements accélérométriques réels représentant des caractéristiques du mouvement de sol largement différentes, on constate que la méthode probabiliste donne des résultats proches de la solution exacte comparativement aux autres méthodes approximatives. Il est donc plus approprié d'utiliser la méthode probabiliste pour le calcul des structures présentant une interaction importante entre ces modes de vibration.
- En outre, la méthode probabiliste permet de déterminer la réponse sismique maximale pour une probabilité de non-dépassement donnée, et d'estimer également les différents pics de réponse d'ordre supérieur les plus significatifs (et non pas seulement le pic maximal déterminé par les méthodes classiques de superposition modale). La connaissance des pics les plus importants de la réponse peut s'avérer d'une grande utilité pour l'interprétation de la progression de l'endommagement des structures sous l'effet des séismes.

2. Recommandations

En ce qui concerne les recommandations et perspectives pour travaux de recherche futures, il serait utile de développer les thèmes de recherche suivants :

- Définition d'une densité spectrale de puissance compatible avec un spectre de réponse en utilisant une approche basée sur le principe du maximum de vraisemblance de la valeur attendue du maximum de la réponse.
- Etude de l'influence de la variabilité spatiale de l'input sismique sur la réponse sismique probabiliste des structures en introduisant l'effet de passage d'onde et l'effet de l'incohérence du mouvement sismique.
- Une investigation plus approfondie de l'influence des incertitudes des propriétés

dynamiques sur la réponse sismique des structures par des simulations de type Monte-Carlo. Ceci permettra entre autres d'estimer le domaine de validité de la méthode étudiée par rapport aux pourcentages d'incertitudes sur les paramètres dynamiques.

- Extension des investigations sur les systèmes à paramètres incertains pour les structures à plusieurs degrés de liberté.
- Développement d'une méthode probabiliste pour l'estimation de l'endommagement des structures ductiles soumises à plusieurs incursions au delà de la limite élastique, en utilisant les statistiques des pics ordonnés de la réponse structurale.
- Intégration des aspects fiabilistes dans la conception des structures vis-à-vis des tremblements de terre.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Amini, A. and M.D. Trifunac (1981). *Distribution of peaks in linear earthquake response*. J. Eng. Mech. Div., ASCE, 107(EM1), 207–227.
- Amini, A. and M.D. Trifunac (1985). *Statistical extension of response spectrum superposition*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., 4, 54–63.
- Arias, A. (1970). *A measure of earthquake intensity, Seismic Design of Nuclear Power Plants*. R.J. Hansen, Editor, the Massachusetts Institute of Technology Press.
- Basu, B. and V.K. Gupta (1995). *A probabilistic assessment of seismic damage in ductile structures*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., 24(10), 1333–1342.
- Basu, B. and V.K. Gupta (1995a). *A note on ductility for probabilistic seismic design of structures*. Europ. Earthquake Eng., 34–43.
- Basu, B., V.K. Gupta and D. Kundu (1996). *Ordered peak statistics through digital simulation*. Earthq. Eng. Struct. Dyn., 25, 1061–1074.
- Basu, B., V.K. Gupta and D. Kundu (1996a). *A Markovian approach to ordered peak statistics*. Earthq. Eng. Struct. Dyn., 25, 1335–1351.
- Bendat, J.S. and A.G. Piersol (1986). *Random Data Analysis and Measurement Procedures*. John Wiley & Sons, mc., New York.
- Biot, M.A. (1943). *Analytical and experimental methods in engineering seismology*. Trans. ASCE, Paper No. 2183, 356.
- Bycroft, G.N. (1960). *White noise representation of earthquakes*. Proc. ASCE, EM2, 1–14.
- Cartwright, D.E. and M. S. Longuet-Higgins (1956). *The statistical distribution of maxima for a random function*, Proc. Royal Soc. of London, Ser. A327, 212–232.
- Caughey, T.K. and H.J. Stumpf (1961). *Transient response of a dynamic system under random excitation*, J. Applied Mech., ASME, 28, 563–566.
- Règles Parasismiques Algériennes RPA99, (1999). Centre National de Recherches Appliquées en Génie Parasismique, D.T.R.-B.C.-2.48, Alger.

- Christian, J.T. (1989). *Generating seismic design power spectral density functions*, Earthquake Spectra, **5(2)**, 351–368.
- Clough, R.W. and J. Penzien (1975). *Dynamics of structures*, Mc Graw–Hill, New York, NY.
- Der-Kiureghian, A. (1980). *Structural response to stationary excitation*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, **106**, 1195–1213.
- Der-Kiureghian, A. (1981). *A response spectrum method for random vibration analysis of MDOF systems*, Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **9**, 419–435.
- Der-Kiureghian, A. and Y. Nakamura (1993). *CQC modal combination rule for high-frequency modes*, Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **22**, 943–956.
- Der-Kiureghian, A. and A. Neuenhofer (1992). *Response spectrum method for multiple-support seismic excitations*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **21**, 713–740.
- Elghadamsi, F.E., B. Mohraz, C.T. Lee and P. Moayad (1988). *Time dependent power spectral density of earthquake ground motion*. Soil Dynam. & Earthq. Eng., **7(1)**, 15–21.
- Goodman, L.E., E. Rosenblueth and N.M. Newmark (1958). *Aseismic design of firmly founded elastic structures*. Trans. ASCE, **120**, 782–802.
- Gupta, I.D. (1994). *A probabilistic approach for estimating the response of multi-degree-of-freedom structures*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., **13(2)**, 79–87.
- Gupta, I.D. (1994a). *Defining effective peak acceleration via order statistics of acceleration peaks*. Europ. Earthquake Eng., **11**, 3–11.
- Gupta, I.D., R.G. Joshi and V.K. Pandit (1994). *A note on design power spectral density function of strong earthquake ground motion*. Proc. 10th Symp. On Earthquake Eng., Nov. 16–18, Roorkee, 843–852.
- Gupta, I.D. and R.G. Joshi (1998). *Response spectra with uncertain oscillator properties*. Europ. Earthquake Eng., **3**, 30–37.
- Gupta, I.D. and R.G. Joshi (1998a). *An improved spectrum superposition method for structures with rigid modes*. Nuclear Eng. And Design, **185**, 293–307.
- Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1987). *Order statistics of peaks in earthquake response of multi-degree-of-freedom systems*. Earthquake Eng. & Eng. Vib., **7(4)**, 15–50.

- Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1987a). *A note on contribution of torsional excitation to earthquake response of simple symmetric buildings*. Earthquake Engng. & Engng. Vib., **7(3)**, 27–46.
- Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1988). *Order statistics of peaks in earthquake response*. J. Engng. Mech. Div., ASCE, **114(10)**, 1605–1627.
- Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1990). *Probabilistic spectrum superposition for response analysis including the effects of soil-structure interaction*. Prob. Eng. Mech., **5(1)**, 9–18.
- Gupta, V.K. and M.D. Trifunac (1990a). *Response of multistoried buildings to ground translation and torsion during earthquakes*. Europ. Earthquake Eng., **IV-n.1**, 34–42.
- Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1998). *An improved probabilistic spectrum superposition*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., **17**, 1–11.
- Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1998a). *Defining equivalent stationary PSDF to account for nonstationarity of earthquake ground motion*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., **17**, 89–99.
- Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1998b). *A note on the statistics of ordered peaks in stationary stochastic processes*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., **17**, 317–328.
- Gupta, I.D. and M.D. Trifunac (1999). *Statistics of ordered peaks in the response of non-classically damped structures*. Prob. Eng. Mech., **14**, 329–337.
- Kan, C.L. and A.K. Chopra (1977). *Elastic earthquake analysis of torsionally coupled multi-Storey buildings*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **5**, 395–412.
- Kanai, K. (1957). *Semi-empirical formula for the seismic characteristics of ground*. Bull. Earthquake Res. Inst., Univ. of Tokyo, Japan, **35**, 308–325.
- Kaul, M.K. (1978). *Stochastic characterization of earthquakes through their response spectrum*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **6**, 497–509.
- Lai, S.P. (1982). *Statistical characteristics of strong ground motions using power spectral density function*. Bull. Seism. Soc. Amer., **72**, 259–274.
- Lee, V.W. (1989). *Empirical scaling of pseudo relative velocity spectra of recorded strong earthquake motion in terms of magnitude, and both local soil and geologic site classifications*. Earthquake Eng. & Eng. Vib., **9(3)**, 9–29.

- Maison, B.F., Neuss, C.F. and Kasai, K.(1983). *The comparative performance of seismic response spectrum combination rules in building analysis*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **11**, 623–647.
- Mohraz, B. (1976). *A study of earthquake response spectra for different geological conditions*. Bull. Seism. Soc. Amer., **66**(3), 915–935.
- Newland, D.E. (1984). *An introduction to random vibrations and spectral analysis*. Longman Inc., New York.
- Nigam, N.C. and P.C. Jennings (1968). *Digital calculations of response spectra from strong-motion earthquake records*. Earthquake Engineering Research Laboratory.
- Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T., (1986). *Numerical Recipes : The Art of scientific computing*. Cambridge University Press.
- Preumont, A. (1990). *Vibrations aléatoires et analyse spectrale*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne.
- Rice, S.O. (1944). *Mathematical analysis of random noise*. Bell System Tech. J., **22**, 282–332.
- Rice, S.O. (1945). *Mathematical analysis of random noise*. Bell System Tech. J., **24**, 46–156.
- Rosenblueth, E. and J. Elorduy (1969). *Response of linear systems to certain transient disturbances*. Proc. 4th World Conf. Earthquake Eng., Chile, **A-1**, 185–196.
- Şafak, E. (1988). *Analytical approach to calculation of response spectra from seismological models of ground motion*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **16**, 121–134.
- Seed, H.B., C. Ugas and J. Lysmer (1976). *Site-dependent spectra for earthquake resistant design*. Bull. Seism. Soc. Amer., **66**, 221–234.
- Singh, M.P. and G.O. Maldonado (1991). *An improved response spectrum method for calculating seismic design response. Part 1: Classically damped structures*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **20**, 621-635.
- Tajimi, H. (1960). *A statistical method for determining the maximum response of a building structure during an earthquake*. Proc. 2nd World Conf. Earthquake Eng., Tokyo and Kyoto, Japan, **A-2**, 781–797.

- Tiliouine, B., S. Zermout, A. Mebarki et C. Soize (2003). *Génération de spectre de puissance pour l'analyse stochastique de la réponse sismique des structures*. Proc. VI^e Colloque National AFPS, Génie parasismique : Aspects dynamiques et vibratoires en Génie Civil, Palaiseau, France, **1**, 107–114.
- Tiliouine, B. et S. Zermout (2003). *Sur les spectres de réponse des systèmes à paramètres incertains*. Proc. Colloque international, Risque vulnérabilité et fiabilité dans la construction : Vers une réduction des désastres, Alger, **1**, 253–267.
- Todorovska, M.I. (1995). *A note on the distribution of amplitudes of peaks in structural response including uncertainties of the exciting ground motion and the structural model*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., **14**, 211–217.
- Trifunac, M.D. and A.G. Brady (1975). *A study on the duration of strong earthquake ground motion*. Bull. Seism. Soc. Amer., **65(3)**, 581–626.
- Trifunac, M.D. (1978). *Response spectra for earthquake ground motion*. J. Engng. Mech. Div., ASCE, (**EM5**), 1081-1097.
- Trifunac, M.D. (1995). *Pseudo relative velocity spectra of earthquake ground motion at long periods*. Soil Dynam. & Earthquake Eng., **14(5)**, 331–346.
- Udwadia, F.E. and M.D. Trifunac (1974). *Characterization of response spectra through the statistics of oscillator response*. Bull. Seism. Soc. Amer., **64**, 205–219.
- Unruh, J.F. and D.D. Kana (1981). *An iterative procedure for the generation of consistent power/response spectrum*. Nuclear Eng. & Design, **66**, 427–435.
- U.S. Nuclear Regulatory Commission (1973). *Design response spectra for seismic design of nuclear power plants*. Regulatory guide 1.60, Washington D.C.
- Wilson, E.L., A. Der-Kiureghian and E. Bayo (1981). *A replacement for the SRSS method in seismic analysis*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **9**, 187–192.
- Zermout, S. et B. Tiliouine (2003). *Investigation de l'effet d'interaction modale sur la réponse dynamique des structures*. Proc. Colloque international, Risque vulnérabilité et fiabilité dans la construction : Vers une réduction des désastres, Alger, **1**, 268–278.
- Zembaty, Z. (1988). *A note on non-stationary stochastic response and strong-motion duration*. Earthquake Eng. & Struct. Dynam., **16(8)**, 1189-1200.

ANNEXE 1

Calcul de la dérivé de la fonction de transfert d'un oscillateur simple par rapport à la fréquence propre et à l'amortissement pour les réponses en déplacement, pseudo-vitesse et pseudo-accelération

Pour la réponse en déplacement le carré du module de la fonction de transfert d'un oscillateur de fréquence propre ω_j et d'amortissement ξ_j s'écrit :

$$\mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j) = \frac{1}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \omega_j^2 \omega^2} \quad (\text{A1.1})$$

Il en résulte les dérivées suivantes par rapport à la fréquence propre et à l'amortissement

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_j} \right]_{\frac{\omega_j}{\xi_j}} = \frac{-4\bar{\omega}_j [(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2) + 2\bar{\xi}_j^2 \omega^2]}{[(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\bar{\xi}_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2]^2} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_j} \right]_{\frac{\omega_j}{\xi_j}} = \frac{-8\bar{\xi}_j \bar{\omega}_j^2 \omega^2}{[(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\bar{\xi}_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2]^2} \quad (\text{A1.2})$$

De même, pour la réponse en pseudo-vitesse, on aura :

$$\mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j) = \frac{\omega_j^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \omega_j^2 \omega^2} \quad (\text{A1.3})$$

et les dérivées correspondantes

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_j} \right]_{\frac{\omega_j}{\xi_j}} = \frac{2\bar{\omega}_j (\bar{\omega}_j^4 + \omega^4)}{[(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\bar{\xi}_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2]^2} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_j} \right]_{\frac{\omega_j}{\xi_j}} = \frac{-8\bar{\xi}_j \bar{\omega}_j^4 \omega^2}{[(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\bar{\xi}_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2]^2} \quad (\text{A1.4})$$

Pour la réponse en pseudo-accelération on aura :

$$\mathcal{H}(\omega; \omega_j, \xi_j) = \frac{\omega_j^4}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \omega_j^2 \omega^2} \quad (\text{A1.5})$$

d'où

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega_j} \right]_{\frac{\omega_j}{\xi_j}} = \frac{4\bar{\omega}_j^3 \omega^2 (-\bar{\omega}_j^2 + \omega^2 + \bar{\xi}_j^2 \bar{\omega}_j^2)}{[(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\bar{\xi}_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2]^2} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_j} \right]_{\frac{\omega_j}{\xi_j}} = \frac{-8\bar{\xi}_j \bar{\omega}_j^6 \omega^2}{[(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + 4\bar{\xi}_j^2 \bar{\omega}_j^2 \omega^2]^2} \quad (\text{A1.6})$$

ANNEXE 2

Méthode approximative pour le calcul des moments de la DSP de la réponse

Soit $G(\omega)$ la DSP d'entrée, définie sur un ensemble de fréquences très rapprochées $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, et soit G_1, G_2, \dots, G_n les amplitudes correspondantes de $G(\omega)$ pour chaque valeur de ω . Par approximation de $G(\omega)$ entre deux fréquences consécutives ω_i et ω_{i+1} , par un segment de ligne droite, on a

$$G(\omega) = \alpha_i \omega + \beta_i \quad \omega_i \leq \omega \leq \omega_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, (n-1) \quad (\text{A2.1})$$

avec

$$\alpha_i = \frac{G_{i+1} - G_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} \quad \text{et} \quad \beta_i = \frac{G_i \omega_{i+1} - G_{i+1} \omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} \quad (\text{A2.2})$$

en utilisant ces équations, le calcul des intégrales $\lambda_{k,j}$ dans l'équation (6.37) nécessaire au calcul des moments de la DSP de la réponse peut s'écrire

$$\lambda_{k,j} = \sum_1^{n-1} \{ \alpha_i I_i(k+1, j) + \beta_i I_i(k, j) \} ; \quad k = 0, 2, 4 \text{ et } 6 \quad (\text{A2.3})$$

avec

$$I_i(k, j) = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \omega^k |H_j(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{A2.4})$$

$$|H_j(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_j^2 \omega_j^2 \omega^2}$$

pour le calcul des $\lambda_{k,j}$ dans l'équation (A2.3), on doit calculer les intégrales $I_i(k, j)$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, 7$. En développant $\omega^k |H_j(\omega)|^2$ en fractions partielles, ces intégrales seront égales à

$$I_i(0, j) = \frac{1}{2\omega_j^2} (A1 + A2) + \frac{1}{4a\omega_j^2} (A3 - A4) \quad (\text{A2.5})$$

$$I_i(1, j) = \frac{1}{4a} (A2 - A1) \quad (\text{A2.6})$$

$$I_i(2, j) = \frac{1}{4a} (A4 - A3) \quad (\text{A2.7})$$

$$\frac{(\dots)}{4a}(A3-A4)$$

$$I_i(7, j) = \frac{1}{4}(\omega_{i+1}^4 - \omega_i^4) - (2\omega_j^2 - 2a^2)(\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2) + \frac{(\omega_j^6 - 12a^2\omega_j^4 + 16a^4\omega_j^2)}{4a}(A1 - A2) + \frac{(3\omega_j^4 - 16a^2\omega_j^2 + 16a^4)}{2}(A3 + A4) \quad (A2.12)$$

où

$$A1 = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{d\omega}{\omega^2 + 2a\omega + \omega_j^2} = \frac{1}{b} \tan^{-1} \left(\frac{b(\omega_{i+1} - \omega_i)}{b^2 + (\omega_i + a)(\omega_{i+1} + a)} \right) \quad (A2.13)$$

$$A2 = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{d\omega}{\omega^2 - 2a\omega + \omega_j^2} = \frac{1}{b} \tan^{-1} \left(\frac{b(\omega_{i+1} - \omega_i)}{b^2 + (\omega_i - a)(\omega_{i+1} - a)} \right) \quad (A2.14)$$

$$A3 = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{\omega d\omega}{\omega^2 + 2a\omega + \omega_j^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\omega_{i+1} + a)^2 + b^2}{(\omega_i + a)^2 + b^2} \right) - A1 \cdot a \quad (A2.15)$$

$$A4 = \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{\omega d\omega}{\omega^2 - 2a\omega + \omega_j^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\omega_{i+1} - a)^2 + b^2}{(\omega_i - a)^2 + b^2} \right) + A2 \cdot a \quad (A2.16)$$

avec

$$a = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad ; \quad b = \omega_j \xi_j \quad (A2.17)$$

correspond à sont centre de raideur, ce qui induit un mouvement de torsion de l'étage autour de sont centre de raideur.

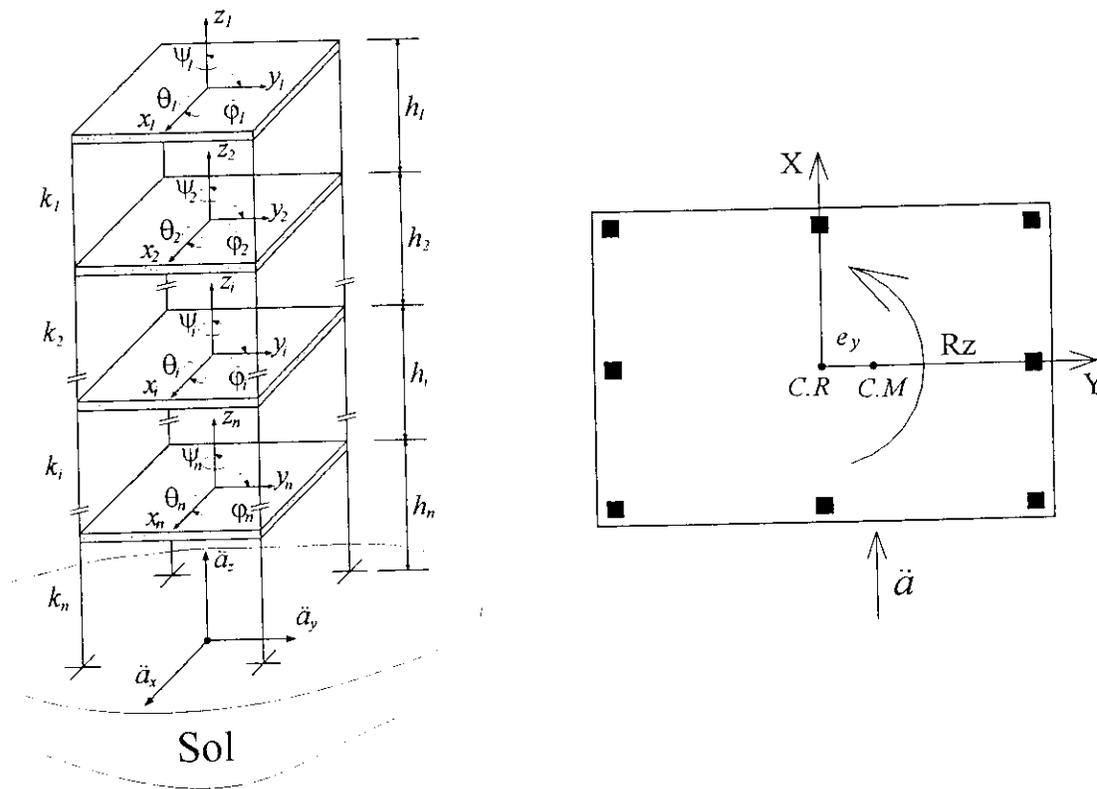


Fig. A3.1— Modèle tridimensionnel d'une structure à plusieurs et vue en plan du plancher d'un bâtiment asymétrique.

En considérant le cas où le centre de masse est décalé par rapport au centre de raideur selon une seule direction (Fig. A3.1), l'équation de mouvement de la réponse couplée des composantes de translation et de torsion du bâtiment soumis à une excitation par accélérogramme $\ddot{a}(t)$ dans la direction X peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$\begin{bmatrix} [M] & \\ & [J] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}\} \\ \{\ddot{\psi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{xx}] & [C_{xt}] \\ [C_{xt}]^T & [C_{tt}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{\dot{\psi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xt}] \\ [K_{xt}]^T & [K_{tt}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] & \\ & [J] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{Z}_x^{(0)} \{I\} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A3.1})$$

Dans cette équation les vecteurs $\{x\}$ et $\{\psi\}$ sont respectivement les vecteurs de déplacement et de torsion relatives de chaque étage du bâtiment. $[M]$ et $[J]$ sont les matrices diagonales de masse et du moment d'inertie massique, respectivement. $[K_{xx}]$ et $[K_{tt}]$ sont les matrices de raideurs pour la réponse en translation pure et en torsion pure, respectivement ; alors que $[K_{xt}]$ est la matrice de rigidité relative au couplage entre les réponses translationnelles et torsionnelles. Elle est définie en fonction de l'excentricité statique e_{yi} , et de la raideur translationnelle, k_{xi} , du $i^{\text{ème}}$ étage par rapport au centre de masse comme suit :

$$[K_{xt}] = \begin{bmatrix} -e_{y1}k_{x1} & -e_{y1}k_{x1} & 0 & & & \\ -e_{y1}k_{x1} & -(e_{y1}k_{x1} + e_{y2}k_{x2}) & e_{y2}k_{x2} & & & \\ 0 & e_{y2}k_{x2} & -(e_{y2}k_{x2} + e_{y3}k_{x3}) & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & e_{y,n-1}k_{x,n-1} & & \\ & & & e_{y,n-1}k_{x,n-1} & -(e_{y,n-1}k_{x,n-1} + e_{yn}k_{xn}) & \end{bmatrix} \quad (\text{A3.2})$$

$[C_{xx}]$ et $[C_{tt}]$ sont les matrices d'amortissement non-classique pour la réponse en translation pure et en torsion pure, respectivement, et $[C_{xt}]$ est la matrice d'amortissement relative au couplage entre les réponses translationnelles et torsionnelles. En supposant que l'amortissement est de type classique, l'équation (A3.1) peut être décomposé en équations modales de la forme de l'équation (6.4).