UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ELECTRICITE

THESE DE FIN D'ETUDES

LOGIQUE - TERNAIRE

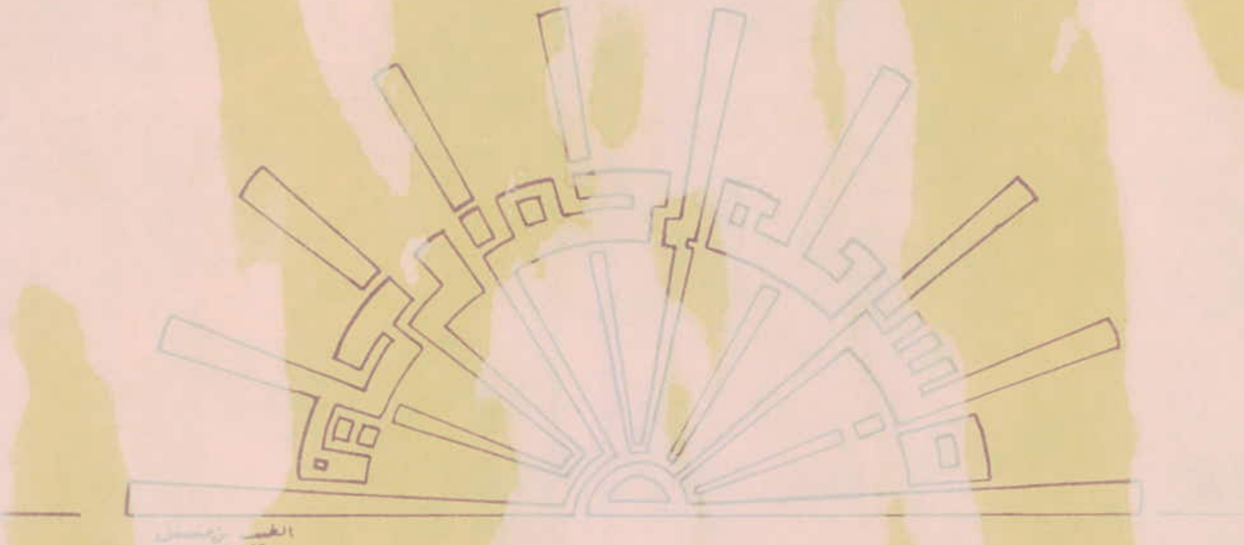
Proposé par :

Mme G. Mondon
Professeur à l'E. N. P.

Etudié par :

MM. Rabah BOUAZIZ
Amor LOUNADI

PROMOTION 1975



REMERCIEMENTS

Notre désir est de remercier les personnes qui à titres divers nous ont aidé à la réalisation de notre ouvrage .

Que Madame G. Mondon professeur à l'école nationale polytechnique trouve ici l'expression de notre gratitude car nous lui devons une participation très active dans notre étude

Que tous ceux qui nous ont aidé trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude .

S O M M A I R E

-oOo- INTRODUCTION -oOo-

Le but de ce projet est l'étude de la logique ternaire et de ses applications .

L'algèbre de Post (ou algèbre modulo $x^3 = x$) est une suite naturelle de l'algèbre de Boole (ou algèbre modulo $x^2 = x$) .

L'algèbre de Boole permet de résoudre les problèmes d'alternatives (décision par oui ou non) et d'étudier des chaînes de contacts électriques (contacts ouverts ou fermés) ; cependant elle n'est plus suffisante pour l'étude de phénomènes comportant trois états comme les circuits électriques eux mêmes . En effet , une lame d'un élement de transfert a trois position possible . Le deuxième état est un état de transition entre le premier et le troisième . Ainsi avec la logique ternaire, on étudie systématiquement les aléas .

Signalons aussi que le système trivalent est théoriquement avantageux ~~tageux~~ pour le traitement des grands nombres sur calculatrices ; (en effet dans un système à base N , on dispose de N symbôles pour écrire un nombre n dans ce système ; on cherche un nombre k tel que $N^{k-1} \leqslant n < N^{k}$ ~~N n N~~ , k est alors le nombre de symbôles nécessaires pour écrire n on a ainsi : $k-1 \leqslant \ln(n)/\ln(N) < k$ et pour un grand nombre (c'est à dire si $n \to \infty$) , k devient équivalent à : $\ln(n) / \ln(N)$

Or le temps nécessaire à la machine pour repérer un symbôle est proportionnel au nombre de symbôles entre lesquels elle doit choisir c'est à dire N .Pour écrire le nombre n , la machine met un temps proportionnel à N.k c'est à dire à Nln(n) / ln(N)

$$(1) \qquad \left[N\ln(n) \,/\, \ln(N) \right]' = \frac{\ln(n).\ln(N) - \ln(N).N \,/\, N}{\left[\ln(N)\right]^2}$$

$$\ln(n).\ln(N) - \ln(n).N \,/\, N = 0$$

$$\ln(N).\ln(n) = \ln(n)$$

$$\ln(N) = 1$$

d'où $\qquad N = e$

Le minimum de (1) est obtenu pour N = e . La base la plus voisine de e est 3 , d'où l'avantage de ce système trivalent .

I - LOGIQUE TRIVALENTE

1°) Logique des propositions trivalentes

Désignons par A , B , ...despropositions logiques susceptibles de prendre trois et trois seules valeurs -1 , 0 ou 1 selon que ces propositions sont fausses douteuses ou vraies.

Désignons par

A + B la classe des propositions qui sont

- Vraies si les propositions A ou les propositions B sont vraies
- Fausses si les propositions A et les propositions B sont fausses
- Douteuses dans les autres cas .

A.B la classe des propositions qui sont

- Vraies si les propositions A et les propositions B sont vraies
- Fausses si les propositions A ou les propositions B sont fausses
- Douteuses dans les autres cas .

Entre les classes -1 ,0 , 1 existent les opérations d'addition (+) et de multiplication (.), définiesx par les tableaux

A \ B	-1	0	1
-1	-1	0	1
0	0	0	1
1	1	1	1

A \ B	-1	0	1
-1	-1	-1	-1
0	-1	0	0
1	-1	0	1

Définissons l'opérateur de dualité :

Désignons par dA la classe des propositions qui sont :

- Vraies si les propositions A snt fausses

- Fausses si les propositions A sont vraies

- Douteuses si les propositions A sont douteuses

La table de dA est donc

A	-1	0	1
dA	1	0	-1

2°) Treillis de Post

Définition : un treillis de Post est un ensemble P qui contient trois éléments distincts privilégiés , appelés éléments de base , notés -1 , 0 , 1 , deux opérations $(+)$ et $(.)$ distributives l'une par rapport à l'autre et qui vérifient les axiomes suivants :

$$A_1 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

$$A_2 \qquad x.o = -1 \Longrightarrow x = -1$$

$$A_3 \qquad x + o = 1 \Longrightarrow x = 1$$

Pour tout élément de P , il existe trois éléments de P x^{-1} , x^{0} , x^{1} , tels que

$$B_1 \qquad x = (-1).x^{-1} + (o).x^{0} + (1).x^{1}$$

$$B_2 \qquad x^{-1}.x^{0} = x^{-1}.x^{1} = x^{0}.x^{1} = -1$$

$$B_3 \qquad x^{-1} + x^{0} + x^{1} = 1$$

Les éléments de base sont notés -1 , 0 , 1 , ils seront aussi parfois notés e^{-1}, e^{0} , e^{1} ,

Remarque : les éléments de base ne sont pas à confondre avec les valeurs arithmétiques -1 , $o,1$ qui apparaissent en indices des x et des e

Examen préliminaire des axiomes

L'axiome A_1 montre que P a un élément "plus petit" que tous les autres, -1, et un élément " plus grand" que tout les autres, 1 . En particulier on a $-1 \leqslant o \leqslant 1$. On écrira $-1 < o < 1$ pour traduire le fait que ces éléments sont distincts.

De l'axiome A_1 résultent les formules suivantes:

(1) $$x.1 = x$$

(2) $$x + (-1) = x$$

(3) $$(-1).x = -1$$

(4) $$x + 1 = 1$$

L'axiome B_1 montre que tout élément de P peut se mettre sous forme normale disjonctive, les éléments x^{-1}, x^{0}, x^{1} sont les composantes de x suivant les éléments de base e^{-1}, e^{0}, e^{1} (l'opération qui associe à x sa composante x^i avec $i = -1$, o ou 1 est appelée projection de x sur e^i.)

$$x = e^{-1}.x^{-1} + e^{0}.x^{0} + e^{1}.x^{1}$$
$$= (-1).x^{-1} + (o).x^{0} + (o).x^{1}$$

De cet axiome découlent les relations :

(5) $$x^i = 1 \quad \text{si} \quad x = i \qquad i \in I = (-1, 0, 1)$$

$$x^j = -1 \quad \text{si} \quad x \neq j \qquad j \in I = (-1, 0, 1)$$

exemple : si x= 1 ,

$$\text{ainsi} \quad x^{-1} = x^{0} = -1 \quad \text{et} \quad x^{1} = 1$$

$$\text{et} \quad x = (-1).x^{-1} + (o).x^{0} + (1).x^{1} = (-1).(-1) + (o).(-1) + (1).(1)$$
$$= (-1) + (-1) + (1) = 1$$

L'axiome B_2 exprime que les composantes de x sont deux à deux disjointes et l'axiome B_3 exprime que leur plus petit majorant est 1 .

Les formules (1) et (2) nous permettent d'écrire B_1 sous la forme équivalente :

B_1' $$x = o.x^{0} + x^{1}$$

En effet $x = (-1).x^{-1} + (o).x^{0} + (1).x^{1}$

d'après (1) on en déduit

$$1.x^{1} = x^{1}$$

et d'après (2)

$$(-1).x^{-1} = -1$$

Enfin d'après (3)

$$(-1) + 0.x^{0} + x^{1} = 0.x^{0} + x^{1}$$

Complémentation :

Le treillis de Post etant distibutif, le complément d'un élément x de P , s'il existe , est unique . Soit x' , ce complément , on a par définition

(6) $$x.x' = -1$$

(7) $$x + x' = 1$$

En particulier , les éléments -1 , 1 ,sont compléments l'un de l'autre .

Les axiomes (A_2) et (A_3) montrent que l'élément o n'a pas de complément .En effet on a :

$$x.o = -1 \qquad x = -1$$

$$x + o = 1 \qquad x = 1$$

ces deux relations montrent que o n'a pas de complément.

P n'est donc pas complémenté , ce n'est donc pas un treillis de Boole (rappelons que le treillis de Boole est un trellis complémenté) .

Les formulent de Morgan s'écrivent :

(8) $$(x + y)' = x'.y'$$

(9) $$(x.y)' = x' + y'$$

Sous ensemble de P ordonné en trellis de Boole .

Propriété 1 : l'ensemble B des éléments complémentés de P est un trellis de Boole ; le plus petit élément de B est -1 , le plus grand est donc 1 , o n'appartient pas à B .

B est bien un treillis , car si x appartient à B

et y appartient à B

on obtient :

$x + y$ appartient à B et

$x.y$ appartient à B

Table d'addition $x + y$

y \ x	−1	1
−1	−1	1
1	1	1

Table de multiplication $x.y$

y \ x	−1	1
−1	−1	−1
1	−1	1

Ces tables nous montrent que $x + y$, $x.y$ appartiennent à B

Puisque x' et y' existent dans B donc aussi $x'.y'$ et $x' + y'$

B est , évidemment distributif , et complémenté par définition.

B est un treillis de Boole .

Propriété 2 : les composantes des éléments de P appartiennent à B

En effet si x appartient à P ,montrons que x^i appartient à B (c'est à dire que$(x^i)'$ existe) . Montrons alors que

$$(x^i)' = \sum_j x^j \quad \text{avec } i \neq j \tag{10}$$

On a bien (par définition de la complémentation)

$$x^{i} + (x^{i})' = 1 = x^{-1} + x^{0} + x^{1}$$

$$= \sum x^{i} \qquad i \in I = \{-1, 0, 1\}$$

d'où $\qquad (x^{i})' = \sum_{j} x^{j}$ avec $i \neq j$

d'autre part la relation $x.x' = -1$ nous permet d'écrire

$$x^{i}.(x^{i})' = -1$$

d'après l'axiome B_2 $\qquad = x^{-1}.x^{0} + x^{-1}.x^{1} + x^{0}\ x^{1}$

soit finalement $\qquad (x^{i})' = \sum_{j} x^{j} \qquad i \neq j$

Propriété 3 : Tout élément x de B est une composante de P

plus précisément , montrons que : x appartient à B implique $x = x^1$

puisque x appartient à B , on a soit $x = 1$, soit $x = -1$

d'après (5) $\qquad 1^0 = (-1)^0 = -1$ ceci nous montre que

x appartient à B implique $x^0 = -1$

et d'après B_1'

$$x = x^{1} + 0.x^{0}$$

$$= x^{1} + 0.(-1)$$

$$= x^{1} + (-1) = x^{1}$$

Des propriétés 2 et 3 résultent que B est l'ensemble des composantes des éléments de P

(11) $\qquad B = \{x^{i}\}$ avec x appartenant à P

Composantes d'éléments particuliers :

Soit x un élément de B, x= 1 ou -1

d'aprés (5) : $x^{-1} = 1$ si $x = -1$

$x^{-1} = -1$ si $x = 1$

on a donc $x^{-1} = x'$

on aura encore $x^{0} = -1$ avec $x = 1$ ou -1

et $x^{1} = 1$ si $x = 1$

$x^{1} = -1$ si $x = -1$

soit $x^{1} = x$

d'où les composantes d'éléments particuliers

$$\text{x appartient à B} \Rightarrow \begin{cases} x^{-1} = x' \\ x^{0} = -1 \\ x^{1} = x \end{cases} \quad (12)$$

En particulier les composantes de x^{i} sont

$$(13) \quad \begin{cases} (x^{i})^{-1} = (x^{i})' = \sum_{j} x^{j} \text{ avec } j \neq i \\ (x^{i})^{0} = -1 \\ (x^{i})^{1} = x^{i} \end{cases}$$

Négation :

Par définition , la négation d'un élément x de P est le plus grand élément y de P tel que $x.y = -1$

En effet , $x.y = -1$ s'écrit

d'après B'_1 on a $\quad (o.x^0 + x^1).y = -1$

$$= o.x^0.y + x^1.y$$

d'après la table d'addition on a la solution unique

$$o.x^0.y = -1 \text{ et } x^1.y = -1$$

d'après A_2 $\quad o.x^0 = -1$ implique $x^0 = -1$

on a donc $\quad o.x^0.y = -1$ implique $x^0.y = -1$

et $\quad x^0.y + x^1.y = -1$

$$= (x^0 + x^1).y$$

d'après (10) $\quad x^0 + x^1 = (x^{-1})'$

on obtient alors $\quad (x^{-1})'.y = -1$ soit $y = x^{-1}$

(14) la négation de x est donc x^{-1}

Notation :nous emploierons les notations suivantes

x' , complément de x

$\overline{x}$, négation de x $\quad (\overline{x} = x^{-1})$

$\overline{x^i}$, négation de x^i

$x^{ij} = (x^i)^j$ sera la composante suivant e^j de la composante suivant e^i de x .

Remarque

puisque $\overline{x}$ est une composante de x , $\overline{x}$ appartient à B ; or dans B les notions de complément et de négation se confondent , on a

$$x' = \overline{x} \text{ implique } \overline{x} = x' = x^{-1}$$

$$\overline{\overline{x}} = (\overline{x'}) = \overline{x}^{-1} = (x^{-1})^{-1}$$

d'après (13) on obtient $\bar{\bar{x}} = x^{0} + x^{1}$

$$\bar{\bar{\bar{x}}} = \overline{x^{0} + x^{1}} = (x^{0} + x^{1})'$$ d'après la

relation de Morgan $\bar{\bar{\bar{x}}} = (x^{0})'.(x^{1})' = (x^{-1} + x^{1}).(x^{-1} + x^{0})$

$$= x^{-1}.x^{-1} + x^{-1}.x^{0} + x^{1}.x^{-1} + x^{1}.x^{0}$$

d'après (2) $= -1 + x^{-1} = x^{-1}$

donc $\bar{\bar{\bar{x}}} = \bar{x}$ et $\bar{\bar{\bar{x}}} \neq x$

et enfin d'après (5) $\bar{0} = \bar{1} = -1$

Composantes d'un élément de P :

Tout élément x de P peut se mettre sous la forme

(15) $x = o.a + b$ où a appartient à B et b appartient à B

il suffit de prendre d'après B_1', $a = x^{o}$ et $b = x^{1}$

Inversement, cherchons les composantes de l'élément x donné par (15)

on peut écrire $x = o.a + b$

$$= o.a + b(o + 1)$$

$$= o(a + b) + 1.b$$

or $a + b = x^{o} + x^{1} = x^{o}x^{o} + x^{o}x^{-1} + x^{1}$

$$= x^{o}(x^{o} + x^{-1}) + x^{1}$$

$$x^{o}(x^{1})' + x^{1}$$

soit finalement $a + b = a.b' + b$ cette relation est bien connue en logique binaire.

On peut écrire

$$x = o.a + b = o.a + b(o + 1)$$

$$= o(a + b) + b.1$$

on vient de voir que $a + b = a.b' + b$, donc

$$x = o(a.b' + b) + 1.b$$

$$= oab' + b$$

en introduisant le monôme $-1.a'.b' = -1$, l'expression x devient

$$x = -1.a'.b' + o.a.b' + 1.b$$ cette expression est

la forme disjonctive de $x = (-1).x^{-1} + (o).x^{o} + (1).x^{1}$

par identification on trouve :

$$(16)\quad \begin{cases} x^{-1} = a'.b' \\ x^{0} = ab' \\ x^{1} = b \end{cases}$$

<u>Composantes d'une somme</u>

Soit x et y deux éléments de P de composantes x^{i} et y^{i} ; cherchons les composantes de la somms $x + y$, on a

$$x = ox^{0} + x^{1}$$
$$y = oy^{0} + y^{1}$$

ainsi la somme $x + y$ s'écrit :

$$x + y = o(x^{0} + y^{0}) + (x^{1} + y^{1})$$

or x^{i}, y^{i} appartiennent à B donc aussi $x^{i} + y^{i}$ (voir table d'addition) $x + y$ se présente bien sous la forme (15) , les formules (16) donnent alors

$$(x + y)^{-1} = (x^{0} + y^{0})'.(x^{1} + y^{1})'$$

d'après la relation de Morgan

$$(x + y)^{-1} = (x^{0})'.(y^{0})'.(x^{1})'.(y^{1})'$$

d'une part $$(x^{0})'.(x^{1})' = (x^{-1} + x^{1}).(x^{-1} + x^{0}) = x^{-1}$$

d'autre part on a $$(y^{0})'.(y^{1})' = (y^{-1} + y^{1}).(y^{-1} + y^{0}) = y^{-1}$$

on obtient alors $$(x + y)^{-1} = x^{-1}.y^{-1}$$

d'après (16) $$(x + y)^{0} = (x^{0} + y^{0}).x^{1'}.y^{1'}$$
$$= (x^{0} + y^{0}).(x^{-1} + x^{0}).(y^{-1} + y^{0})$$

en effectuant le produit des trois facteurs on obtient

$$(x+y)^0 = (x^0 + x^0 x^{-1} + y^0 x^0 + y^{-1} x^0).(y^0 + y^{-1})$$
$$= x^0 y^0 + x^0 y^{-1} + x^{-1} y^0$$

la composante de $(x+y)^1$ sera

$$(x+y)^1 = x^1 + y^1 \quad \text{d'après (16)}$$

ainsi

(17)

$$\begin{cases} (x+y)^{-1} = x^{-1} y^{-1} \\ (x+y)^0 = x^0 y^0 + x^0 y^{-1} + x^{-1} y^0 \\ (x+y)^1 = x^1 + y^1 \end{cases}$$

Composantes d'un produit

On a comme ci-dessus

$$(x.y) = (0x^0 + x^1).(0y^0 + y^1)$$
$$= 0(x^0 y^0 + x^0 y^1 + x^1 y^0) + x^1 y^1$$

le produit x.y se présente sous la forme (15) et les formules (16)

donnent $$(x.y)^{-1} = (x^0 y^0 + x^0 y^1 + x^1 y^0)'.(x^1 y^1)'$$

d'après Morgan $$= (x^0 y^0 + x^0 y^1 + x^1 y^0 + x^1 y^1)'$$

$$= \left[(x^0 + x^1).(y^0 + y^1)\right]'$$

d'après Morgan $$= (x^0 + x^1)' + (y^0 + y^1)'$$

$$= x^{-1} + y^{-1}$$

la composante $(x.y)^0$ s'écrit

$$(x.y)^0 = (x^0 y^0 + x^1 y^0 + x^0 y^1).(x^1.y^1)'$$

d'après (16) $$= (x^0 y^0 + x^1 y^0 + x^0 y^1).(x^{1\prime} + y^{1\prime})$$

$$= (x^0 y^0 + x^1 y^0 + x^0 y^1).(x^{-1} + x^0 + y^{-1} + y^0)$$

$$= x^0 y^0 + x^1 y^0 + x^0 y^1$$

d'après les formules (16) la troisième composante s'écrit

$$(x.y)^{1} = x^{1}.y^{1}$$

ainsi on obtient les trois composantes

(18)
$$\begin{cases} (x.y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1} \\ (x.y)^{0} = x^{0}y^{0} + x^{1}y^{0} + x^{0}y^{1} \\ (x.y)^{1} = x^{1}.y^{1} \end{cases}$$

Remarque : les formules $(x+y)^{-1} = x^{-1}.y^{-1}$ et $(x.y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$ sont les formules de Morgan dans P relatives à la négation dans un treillis de Post

Dualité

Considérons la transformation d(x) définie dans P et qui associe

à tout élément x appartenant à P , l'élément

(19) $$d(x) = ox^{o} + x^{-1}$$

d(x) est appelé dual de x.

Cherchons les transformées de e : dans les relations suivantes toute

simplification sera faite à partir de la relation (5)

$$d(1) = o.1^{o} + 1^{-1} = -1$$

$$d(o) = o.o^{o} + o^{-1} = o$$

$$d(-1) = o(-1)^{o} + (-1)^{-1} = 1$$

Composantes de d(x) :

$$\left(d(x)\right)^{1} = (o.x^{o} + x^{-1})^{1}$$

d'après les composantes d'une somme ,d'un produit on écrit

$$\left(d(x)\right)^{1} = (o.x^{o})^{1} + (x^{-1})^{1}$$

$$= o^{1}(x^{o})^{1} + x^{-1}$$

$$= -1 + x^{-1} = x^{-1}$$

(20) $$\left(d(x)\right)^{o} = (o.x^{o} + x^{-1})^{o} =$$

$$= (ox^{o})^{o}(x^{-1})^{o} + (ox^{o})^{-1}(x^{-1})^{o} + (ox^{o})^{o}(x^{-1})^{-1}$$

$$= -1 + \left[o^{o}.(x^{o})^{o} + o^{1}(x^{o})^{o} + o^{o}.(x^{o})^{1}\right]\left[x^{o} + x^{1}\right]$$

$$= x^{o}.(x^{o} + x^{1}) = x^{o}$$

$$\left(d(x)\right)^{-1} = (o.x^{o} + x^{-1})^{-1} = (o.x^{o})^{-1}(x^{-1})^{-1}$$

$$= \left[o^{-1} + (x^{o})^{-1}\right](x^{o} + x^{1})$$

$$= (x^{-1} + x^{1})(x^{o} + x^{1}) = x^{1}$$

Transformée de $d(x)$:

$$d(dx) = o.(dx)^{0} + (dx)^{-1}$$

d'après (20)
$$= o.x^{0} + x^{1} = x$$

(21)
$$d(dx) = x$$

On dit que x et dx sont duaux, d est la transformation de dualité

on pourra écrire $dx = -x$

Transformation d'une somme et d'un produit : on vérifie que

(22)
$$d(x + y) = dx.dy$$

(23)
$$d(x.y) = dx + dy$$

En effet le deuxième membre de (22) donne

$$dx.dy = (ox^{0} + x^{-1}).(oy^{0} + y^{-1})$$
$$= o(x^{0}y^{0} + x^{0}y^{-1} + x^{-1}y^{0}) + x^{-1}y^{-1}$$

et le premier membre
$$d(x + y) = o(x + y)^{0} + (x+y)^{-1}$$
$$= o(x^{0}y^{0} + x^{0}y^{-1} + x^{-1}y^{0}) + x^{-1}y^{-1}$$

d'où la relation (22)

la relation (22) appliquée à dx . dy donne

$$d(dx + dy) = ddx.ddy$$

d'après (21)
$$= x.y$$

$$dd(dx+dy) = d(x.y)$$

donc on obtient finalement

$$dx + dy = d(x.y)$$ la relation (23) est vérifiée

3) FONCTIONS DE POST

Définition : on appelle fonction de Post à une variable x , toute fonction construite à partir des quatres éléments o et x^{i} et des opérations (+) et (.) de P , combinées un nombre fini de fois .

Liste des fonctions de Post à une variable

- Fonctions de la forme o , x^{i}

$0 , x^{-1} , x^{0} , x^{1}$ ceci nous donne 4 éléments

- Fonctions de la forme $0 + x^{i}$

$0 + x^{-1} , 0 + x^{0} , 0 + x^{1}$ ceci nous donne 3 éléments

- Fonctions de la fotme $x^{i} + x^{j}$

$x^{-1} + x^{0} , x^{-1} + x^{1} ; x^{0} + x^{1}$ ceci nous donne 3 éléments

- Fonctions de la formeo.x^{i}

$- 0.x^{0} , 0.x^{-1} , 0.x^{1}$ ceci nous donne 3 éléments

- Fonctions de la forme $x^{i}.x^{j}$

$x^{i}.x^{j} = -1$ ceci nous donne 1 élément

- Fonctions de la forme $0 + x^{i} + x^{j}$

$0 + x^{-1} + x^{0} , 0 + x^{-1} + x^{1} , 0 + x^{0} + x^{1}$ ceci nus donne 3 éléments

- Fonctions de la forem $0.x^{i} + x^{j}$

$0.x^{-1} + x^{0} , 0.x^{-1} + x^{1} , 0.x^{0} + x^{-1}, 0.x^{0} + x^{1}, 0.x^{1} + x^{-1} , 0.x^{1} + x^{0}$

ceci nous donne 6 éléments

- Fonctions de la forme $0.x^{i} + 0.x^{j}$

$0.x^{-1} + 0.x^{0} , 0.x^{-1} + 0.x^{1} + 0.x^{0} + 0.x^{1}$, ceci nous donne 3 élments

- Fonctions de la forme $x^{i} + x^{j} + x^{k}$

$x^{-1} + x^{0} + x^{1} = 1$ ceci nous donne 1 élément

Cette liste contient 27 fonctions formant un ensemble que l'on désignera par F.

L'ensemble des 27 fonctions de Post à une variable x appartient par construction à P , il contient par ailleurs les éléments de base de P (-1 , 0 , 1) . Donc , pour cet ensemble F muni des opérations de P , les trois axiomes A_1, A_2, A_3 définissant un treillis de Post sont vérifiés .

Tablesdes composantes des éléments de F (i, j , k différents)

On représente les composantes des éléments de F par f^{-1}, f^{o} ,f^{1} donc une fonction f appartient à l'ensemble des 27 fonctions de Post s'écrit ; $f = (-1).f^{-1} + (0).f^{o} + (1).f^{1}$

Obtention des composantes de f :

d'après (5)

$$f = -1 \text{ implique } \quad \begin{cases} f^{-1} = (-1)^{-1} = 1 \\ f^{o} = (-1)^{o} = -1 \\ f^{1} = (-1)^{1} = -1 \end{cases}$$

$$f = x^{i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f^{-1} = (x^{i})^{-1} = x^{j} + x^{k} \\ f^{o} = (x^{i})^{o} = -1 \\ f^{1} = (x^{i})^{1} = x^{i} \end{cases}$$

$$f = 0 + x^{i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f^{-1} = (0 + x^{i})^{-1} = 0^{-1}(x^{i})^{-1} = -1 \\ f^{o} = (0 + x^{i})^{o} = 0^{o}(x^{i})^{o} + 0^{-}(x^{i})^{o} + 0^{o}(x^{i})^{-1} \\ \quad = (1).(-1) + (-1).(-1) + (1).(x^{j} + x^{k}) \\ \quad = x^{j} + x^{k} \\ f^{1} = (0 + x^{i})^{1} = 0^{1} + (x^{i})^{1} = -1 + x^{i} = x^{i} \end{cases}$$

$$f = 0 + x^i + x^j$$

$$f^{-1} = (0 + x^i + x^j)^{-1} = [(0 + x^i) + x^j]^{-1}$$
$$= (0 + x^i)^{-1} . (x^j)^{-1} = 0^{-1} (x^i)^{-1} (x^j)^{-1}$$
$$= -1$$

$$f^0 = (0 + x^i + x^j)^0 = [(0 + x^i) + x^j]^0$$
$$= (0 + x^i)^0 (x^j)^0 + (0 + x^i)^{-1} (x^j)^0 + (0 + x^i)^0 (x^j)^{-1}$$
$$= (-1) + (-1) + [0^0 (x^i)^0 + 0^{-1} (x^i)^0 + 0^0 (x^i)^{-1}] (x^i + x^k)$$
$$= (x^j + x^k)(x^i + x^k) = x^k$$

$$f^1 = (0 + x^i + x^j)^1 = [(0 + x^i) + x^j]^1$$
$$= (0 + x^i)^1 + (x^j)^1$$
$$= 0^1 + (x^i)^1 + (x^j)^1$$
$$= x^i + x^j$$

etc...

Table des composantes des éléments de F (i, j, k différents)

$f \in F$	-1	0	1	x^i	$0 + x^i$	$x^i + x^j$
f^{-1}	1	-1	-1	$x^j + x^k$	-1	x^k
f^0	-1	1	-1	-1	$x^j + x^k$	-1
f^1	-1	-1	1	x^i	x^i	$x^j + x^k$

$f \in F$	$0.x^i$	$0 + x^i + x^j$	$0.x^i + x^j$	$0.x^i + 0.x^j$
f^{-1}	$x^j + x^k$	-1	x^k	x^k
f^0	x^i	x^k	x^i	$x^i + x^j$
f^1	-1	$x^i + x^j$	x^j	-1

Identité fondamentale

On a pour toute fonction de Post à une variable, $f(x)$, l'identité fondamentale

$$(24) \qquad f(x) = f(-1).x^{-1} + f(0).x^{0} + f(1).x^{1}$$

Démonstration : l'identité (24) est vraie pour $f(x) = 0$, en effet, le deuxième membre de (24) s'écrit :

$$f(x) = 0.x^{0} + 0.x^{1} + 0.x^{1} = 0.(x^{-1} + x^{0} + x^{1})$$
$$= 0.1 = 0$$

l'identité (24) est vraie pour $f(x) = x^{i}$, en effet le deuxième membre s'écrit :

$$f(x) = x^{i}x^{-1} + x^{i}x^{0} + x^{i}x^{1} = x^{i}(x^{-1} + x^{0} + x^{1})$$
$$= x^{i}.1 = x^{i}$$

si d'autre part l'identité (24) étant vérifiée pour $f(x)$ et $g(x)$ de F, elle est vraie pour $f(x) + g(x)$, on a

$$f(x) + g(x) = f(-1).x^{-1} + f(0).x^{0} + f(1).x^{1} + g(-1).x^{-1} + g(0).x^{0} +$$
$$+ g(1).x^{1}$$
$$= \big(f(-1) + g(-1)\big)x^{-1} + \big(f(0) + g(0)\big)x^{0} + \big(f(1) + g(1)\big)x^{1}$$

et pour $f(x).g(x)$ on aura

$$f(x).g(x) = \left[f(-1)x^{-1} + f(0).x^{0} + f(1).x^{1}\right]\left[g(-1).x^{-1} + g(0).x^{0} + g(1).x^{1}\right]$$
$$= f(-1).g(-1).x^{-1} + f(0).g(0).x^{0} + f(1).g(1).x^{1} + (-1)$$

$$f(x)g(x) = f(-1)g(-1)x^{-1} + f(0)g(0)x^{0} + f(1)g(1)x^{1}$$

l'identité (24) est donc vraie pour toute fonction $f(x)$ appartenant à F

Coefficients de l'identité fondamentale

Nous appellerons coefficients de l'identité fondamentale (24) , les éléments $f(-1)$, $f(o)$, $f(1)$; ces éléments par définition appartiennent à F et peuvent être construits à partir des éléments de base -1 , o , 1 de P à l'aide des opérations (+) , (X) et projection.

Le triplet $f(-1)$, $f(o)$, $f(1)$ peut prendre 3^3 valeurs différentes correspondant aux 27 fonctions de F . Soit (e^i) , (e^j) , (e^k) une valeur particulière du triplet $f(-1)$, $f(o)$, $f(1)$; i ; j , k sont des indices arithmétiques choisis dans l'ensemble (-1, o , 1). Associons à ce triplet le nombre algébrique N tel que :

(25) $$N = i + 3j + 9k$$

On a $-13 \leqslant N \leqslant 13$, une fonction donnée est bien caractérisée par N , on pourra donc l'écrire $f_N(x)$.

II - ALGEBRE TRIVALENTE

1°) Fonctions trivalentes

Etude des fonctions trivalentes à ~~trois~~ variables trivalentes :

les variables sont susceptibles de prendre trois et trois seules valeurs (-1 , o , 1) et les fonctions de ces variables sont aussi susceptibles de prendre trois et trois seules valeurs -1 , o , 1 . Il existe 3^{3^n} fonctions à n variables. Ainsi on peut représenter les fonctions trivalentes par un treillis de Post .

les tables d'addition et de multiplication sont

+	-1	o	1
-1	-1	o	1
o	o	o	1
1	1	1	1

.	-1	o	1
-1	-1	-1	-1
o	-1	o	o
1	-1	o	1

Les opérations (+) , (.) ainsi définies sont commutatives, associatives et distributives l'une par rapport à l'autre .

Opérations portant sur une variable

Etant donné une variable trivalente x , il existe 27 fnctions trivalentes de x , données par la formule

(26) $$f(x) = a_1 . x^1 + a_0 . x^0 + a_{-1} . x^{-1}$$

où les a_i sont des indéterminées trivalentes, $a_i \in I = (-1 , o , 1)$

et les x^i sont les composantes de x, données par le tableau suivant

x	1	o	-1
x^1	1	-1	-1
x^o	-1	1	-1
x^{-1}	-1	-1	1

Ce tableau est obtenu par l'application de la relation

$$x^i = 1 \quad \text{si} \quad x = i$$

$$x^j = -1 \quad \text{si} \quad x = i \neq j$$

En utilisant les signes (+) , - et 2 de l'algébre ordinaire les composantes de x s'écrivent :

$$x^i = A.x^2 + B.x + C.$$

soit alors

$$x^1 = A_1(x^1)^2 + B_1(x^1) + C_1$$

$$x^o = A_2(x^o)^2 + B_2(x^o) + C_2$$

$$x^{-1} = A_3(x^{-1})^2 + B_3(x^{-1}) + C_3$$

Détermination des coefficients A_1 , B_1 ; C_1

x = o implique $(o)^1 = -1$, donc la première équation s'écrit

$$-1 = A_1.(o)^2 + B_1.(o) + C_1$$

$$= C_1$$

x = 1 implique $(1)^1 = 1$ donc la première équation s'écrit

$$1 = A_1.(1)^2 + B_1.(1) + C_1$$

$$= A_1 + B_1 + C_1$$

$x = -1$ implique $(-1)^1 = -1$ la première équation s'écrit alors

$$-1 = A_1.(-1)^2 + B_1.(-1) + C_1$$
$$= A_1 - B_1 + C_1$$

La résolution du système

$$\begin{cases} -1 = A_1 - B_1 + C_1 \\ 1 = A_1 + B_1 + C_1 \\ -1 = C_1 \end{cases}$$

nous donne :

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ B_1 = 1 \\ C_1 = -1 \end{cases}$$

On fera la même démonstration pour la détermination des coefficients de x^0 et x^{-1}, et finalement on obtient

(27)
$$\begin{cases} x^1 = x^2 + x - 1 \\ x^0 = -2.x^2 + 1 \\ x^{-1} = x^2 - x - 1 \end{cases}$$

Dressons le tableau des fonctions trivalentes d'une variable, en écrivant dans une première colonne le numéro de référence $-13 \leqslant N \leqslant 13$, dans la deuxième colonne les coefficients($a_{-1} = f(-1)$, $a_0 = f(o)$, $a_1 = f(1)$), dans la troisième la forme disjonctive simplifiée et dans la quatrième colonne la forme simplifiée par utilisation des négations : $\overline{x^1}$, $\overline{x^0}$, $\overline{x^{-1}}$

Voir tableau : 1

TABLE DES FONCTIONS TRIVALENTES D'UNE VARIABLE

N.	a_1	a_0	a_{-1}	$f(x) = a_1 x^1 + a_0 x^0 + a_{-1} x^{-1}$	Simplification
13	1	1	1	$x^1 + x^0 + x^{-1}$	1
12	1	1	0	$x^1 + x^0 + 0x^{-1}$	$0 + \bar{x}^{-1}$
11	1	1	-1	$x^1 + x^0$	$\bar{x}^{-1}$
10	1	0	1	$x^1 + 0x^0 + x^{-1}$	$0 + \bar{x}^0$
9	1	0	0	$x^1 + 0x^0 + 0x^{-1}$	$0 + x^1$
8	1	0	-1	$x^1 + 0x^0$	x
7	1	-1	1	$x^1 + x^{-1}$	$\bar{x}^0$
6	1	-1	0	$x^1 + 0x^{-1}$	
5	1	-1	-1	x^1	
4	0	1	1	$0x^1 + x^0 + x^{-1}$	$0 + \bar{x}^1$
3	0	1	0	$0x^1 + x^0 + 0x^{-1}$	$0 + x^0$
2	0	1	-1	$0x^1 + x^0$	
1	0	0	1	$0x^1 + 0x^0 + x^{-1}$	$0 + x^{-1}$
0	0	0	0	$0x^1 + 0x^0 + 0x^{-1}$	0
-1	0	0	-1	$0x^1 + 0x^0$	$0\bar{x}^{-1}$
-2	0	-1	1	$0x^1 + 0x^{-1}$	
-3	0	-1	0	$0x^1 + 0x^{-1}$	$0\bar{x}^0$
-4	0	-1	-1	$0x^1$	
-5	-1	1	1	$x^0 + x^{-1}$	$\bar{x}^1$
-6	-1	1	0	$x^0 + 0x^{-1}$	
-7	-1	1	-1	x^0	
-8	-1	0	1	$0x^0 + x^{-1}$	
-9	-1	0	0	$0x^0 + 0x^{-1}$	$0\bar{x}^1$
-10	-1	0	-1	$0x^0$	
-11	-1	-1	1	x^{-1}	
-12	-1	-1	0	$0x^{-1}$	
-13	-1	-1	-1	-1	

tableau : 1

2°) Forme numérique des fonctions trivalentes

Fonction d'une variable : Les 27 fonctions trivalentes d'une variable x sont représentées par les nombres k entiers compris entre -13 et +13

Nous écrivons

(28) $$f(x) = f(-1).x^{-1} + f(o).x^{0} + f(1).x^{1}$$

(29) $$k = f(-1) + 3f(o) + 9.f(1)$$

Nous désignerons par u_k le vecteur de composantes $f(-1)$, $f(o)$, $f(1)$

(30) $$u_k \begin{cases} u_k^{-1} = f(-1) \\ u_k^{0} = f(o) \\ u_k^{1} = f(1) \end{cases}$$

Exemple

k = 5

en effet $5 = (-1) + (-1).3 + (1).9$ cela revient à écrire k dans le systéme à base 3, on écrit donc

$$k = f(-1).3^{0} + f(o).3^{1} + f(1).3^{2}$$

$$5 = 9 - 3 - 1 = (-1).3^{0} + (-1).3^{1} + (1).3^{2}$$

d'où
$$f(-1) = -1 = u_5^{-1}$$
$$f(o) = -1 = u_5^{0}$$
$$f(1) = 1 = u_5^{1}$$

Chaque composante de u_k est désignée par u_k^i , $i \in I = (-1,o,1)$.

Ecrivons la matrice des u_k^i (le signe -, représente -1)

Voir tableau : 2

Matrice U des u^i_k (le signe – représente –1)

i \ k	–13	–12	–11	–10	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1
–1	–	0	1	–	0	1	–	0	1	–	0	1	–
0	–	–	–	0	0	0	1	1	1	–	–	–	0
1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0	0	0

i \ k	+13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
–1	1	0	–	1	0	–	1	0	–	1	0	–	1	0
0	1	1	1	0	0	0	–	–	–	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Tableau : 2

3°) Représentation des fonctions ternaires

Il y a trois moyens de représenter les fonctions ternaires

- Représentation par une table de vérité
- Représentation par un tableau (comparable au tableau de Karnaugh)
- Représentation géometrique .

Exemple 1 :

Soit une fonction à une variable f(x)

table de vérité

x	-1	o	1
f(x)	o	o	1

tableau de Karnaugh

x	-1	o	1
	o	o	1

représentation géométrique

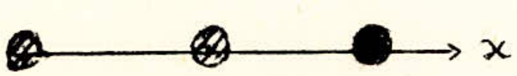
convention

-1

o

1

d'ou f(x)



Exemple 2 : Fonction à deux variables $g(x_1 , x_2)$

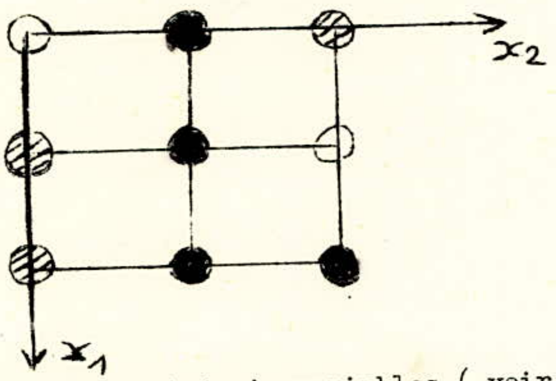
- table de vérité

x_1	−	−	−	o	o	o	+	+	+
x_2	−	o	+	−	o	+	−	o	+
$g(x_1,x_2)$	−	+	o	o	+	−	o	+	+

- tableau de Karnaugh

x_2 \ x_1	−	o	+
−	−	o	o
o	+	+	+
+	o	−	+

- Représentation géomètrique



Exemple 3 : fonction à trois variables (voir tableau 3)

x_3	x_2	x_1	H
−	−	−	0
−	−	0	−
−	−	+	+
−	0	−	+
−	0	0	+
−	0	+	−
−	+	−	0
−	+	0	+
−	+	+	−
0	−	−	−
0	−	0	−
0	−	+	+
0	0	−	0
0	0	0	−
0	0	+	+
0	+	−	−
0	+	0	0
0	+	+	+
+	−	−	+
+	−	0	0
+	−	+	−
+	0	−	−
+	0	0	−
+	0	+	0
+	+	−	0
+	+	0	+
+	+	+	0

x_3 \ x_2, x_1	− −	− 0	− +	0 −	0 0	0 +	+ −	+ 0	+ +
−	0	−	+	+	+	−	0	+	−
0	−	−	+	0	−	+	−	0	+
+	+	0	−	−	−	0	0	+	0

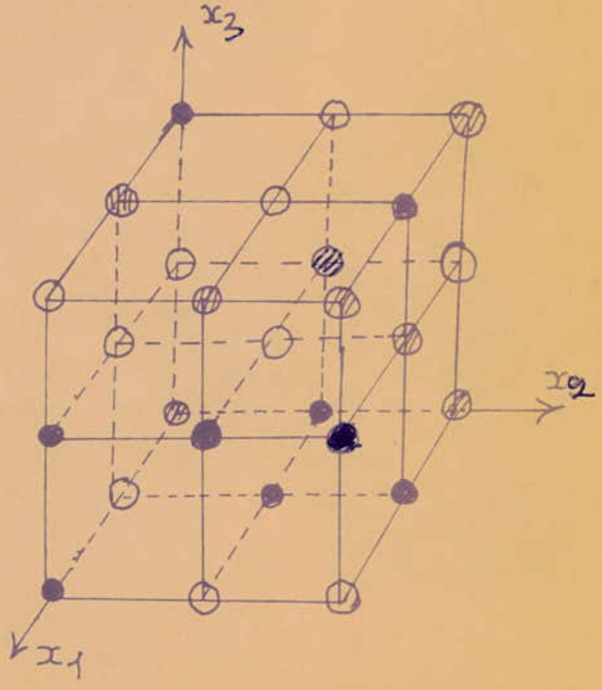


Fig: 3

Représentation géométrique des fonctions trivalentes à plus de trois variables

Cube de Post : considérons n axes de coordonnés ox_1 , ox_2 ,...,ox_n et les 3^n points de coordonnés (i_1 , i_2 ,..., i_n) avec $i \in J = (-1 ,0,1)$.

Une fohction de n variables trivalentes $F (x_1 ,x_2 ,...,x_n)$ est donnée si l'on connait la valeur de F : -1 , o ou 1 pour les 3^n valeurs de $(x_1 , x_2 ,..., x_n)$ c'est à dire la valeur de F au 3^n noeuds du cube de POst à n dimensions.

Chaque paralelle à un axe passant par un noeud du cube contient 3 noeuds du cube . Chaque noeud (x_1 , x_2 ,...,x_n) du cube peut être représenté par le nombre $$\sum_{j=1}^{n} 3^{j-1} x_j$$

Exemple : Le cube de Post à quatre dimensions comporte $3^4 = 81$ noeuds numérotés de -40 à +40 . Nous représentons le cube à l'aide de tois cubes à trois dimensions chaqun. Le premier cube représente le cube de Post à trois dimensions , il a pour centre l'origine o et ses 27 noeuds ont des coordonnés x_4 nulles, les autres cubes ont des noeuds de coordonnés x_1 , x_2 ,x_3 égales à celles des noeuds du premier cube et les coordonnés x_4 égales à 1 pour l'un et à -1 pour l'autre .

Voir figure : 4

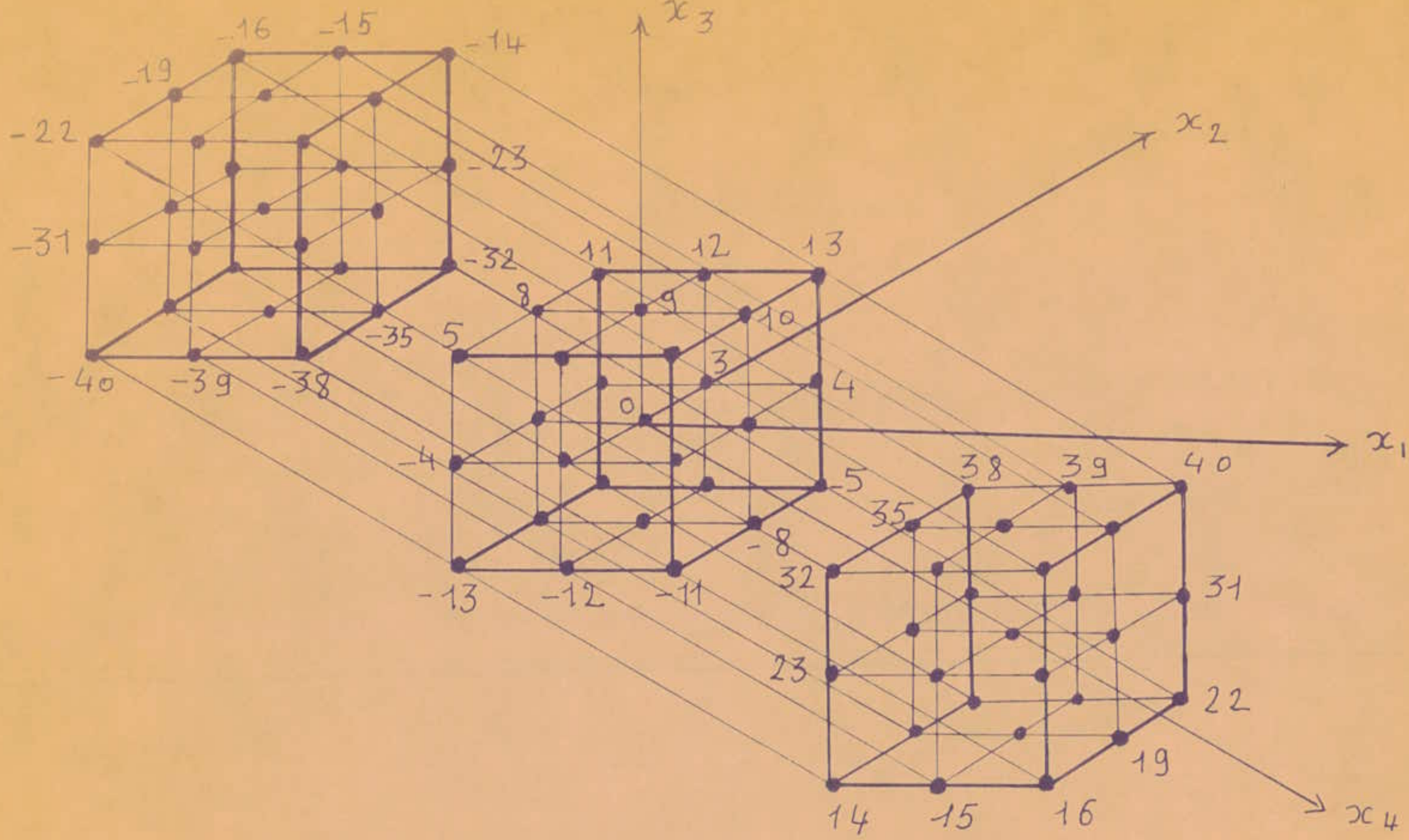


fig: 4 Cube de Post à 4 dimensions

Les noeuds sont décrits dans l'ordre suivant

- Pour les noeuds de o à 40 :

de gauche à droite

de l'avant vers l'arrière

et du bas en haut

- Pour les noeuds de 0 à -40 :

de droite à gauche

et de l'arrière vers l'avant

et de haut en bas .

Hyperparallélipipède : On appelle hyperparallelipipède, tout cube , parallelipipéde , carré , rectangle ou segment ayant pour sommets des noeuds du cube de Post .

Exemple :

- cube : (o , 1 , -2 , -3 , -9 , -8 , -11 , -12)
- parallelipipede : (2 ,3 ,4 ,1 ,o , -1 ,-7 , -6 ,-5, -8, -9 , -10)
- carré : (0 , 1 , 4 , 3)
- rectangle (8 , 9 , 10 , 13 , 12 , 11)
- segment : (3 , 4)

Les noeuds qui sont compris dans un hyperparallelipipede peuvent être groupés .

Simplification d'expression Postiènne

Soit la fonction de Post à n variables $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

écrivons : $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^{+}(x_1, x_2, \dots, x_n) + 0 f^{0}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Désignons par V l'ensemble des noeuds pour lesquels $f = 1$ et par D l'ensemble des noeuds pour lesquels $f = 0$.

Nous pouvons recouvrir les noeuds vrais (pour lesquels $f = 1$) par un ensemble d'hyperparallèlipipède dont tous les noeuds sont des noeuds vrais pour f . La somme Postienne des produits fondamentaux relatifs à ces hyperparallèlipipèdes est une forme simplofiée de f^{+}.

La même opération appliquée aux noeuds douteux donne une forme simplifiée de f^{0}

$$f = f^{+} + 0.f^{0}$$

Exemple : Soit à simplifiér l'expression Postienne à trois variables

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = {} & x_1^{0} x_2^{0} x_3^{0} + x_1^{0} x_2^{0} x_3^{1} + x_1^{0} x_2^{1} x_3^{1} + x_1^{0} x_2^{1} x_3^{0} \\ & + x_1^{1} x_2^{0} x_3^{1} + x_1^{1} x_2^{1} x_3^{1} + x_1^{1} x_2^{1} x_3^{0} + \\ & + x_1^{1} x_2^{0} x_3^{0} + x_1^{-1} x_2^{0} x_3^{0} + x_1^{-1} x_2^{1} x_3^{0} + \\ & + 0(x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} + x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{0} + \\ & + x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{1} + x_1^{0} x_2^{-1} x_3^{-1} + x_1^{0} x_2^{-1} x_3^{0}) \end{aligned}$$

Les noeuds vrais sont repérés par les nombres :

(0 , 1 , 4 , 3 , 10 , 13 , 12 , 9 , -9 , -6)

ainsi on a formé l'ensemble V

et les noeuds douteux par les nombres

(-13 , -12 , -11 , -4 , -3) ces nombres forment l'ensemble D

D'après le tableau 4, l'ensemble V est recouvert par les deux hyperparallelipipèdes H_1 et H_2 suivants

$$H_1 = (0 , 1 , 4 , 3 , 10 , 13 , 12 , 9),$$

$$H_2 = (-9 , -6)$$

et l'ensemble D est recouvert par les deux hyperparallèlipipèdes H_3 et H_4 suivants

$$H_3 = (-13 , -12 , -11)$$

$$H_4 = (-4 , -3)$$

Associons maintenant à chaque hyperparallèlipipède l'expression qui lui correspond :

Pour $H_1 = (0 , 1 , 4 , 3 , 10 ; 13 , 12 , 9)$, associons X_1

$$X_1 = (x_1^0 x_2^0 x_3^0 + x_1^0 x_2^0 x_3^1 + x_1^0 x_2^1 x_3^1 + x_1^0 x_2^1 x_3^0 + x_1^1 x_2^0 x_3^1 + x_1^1 x_2^1 x_3^1 + x_1^1 x_2^1 x_3^0 + x_1^1 x_2^0 x_3^0)$$

Associons maintenant les nombres deux à deux en tenant compte de la relation

$$x^i + x^j = \overline{x^k}, \quad i , j , k \in I = (-1 , 0 , 1)$$

X_1 s'écrit alors

$$X_1 = x_2^0 x_1^0 (x_3^0 + x_3^1) + x_2^1 x_1^0 (x_3^1 + x_3^0) + x_1^1 x_3^1 (x_2^0 + x_2^1) + x_1^0 x_3^1 (x_2^1 + x_2^0)$$

$$= \overline{x_3^{-1}} x_2^0 x_1^0 + \overline{x_3^{-1}} x_2^1 x_1^0 + x_1^1 \overline{x_2^{-1}} x_3^1 + x_1^0 \overline{x_2^{-1}} x_3$$

$$X_1 = x_1^{0}\,\overline{x_3^{-1}}\,(\,x_2^{0} + x_2^{1}\,) + x_1^{1}\,\overline{x_2^{-1}}(\,x_3^{1} + x_3^{0}\,)$$
$$= x_1^{0}\,\overline{x_2^{-1}}\,\overline{x_3^{-1}} + x_1^{1}\,\overline{x_2^{-1}}\,\overline{x_3^{-1}}$$
$$= \overline{x_3^{-1}}\,\overline{x_2^{-1}}(\,x_1^{0} + x_1^{1}\,)$$

Soit finalenment

$$X_1 = \overline{x_1^{-1}}\,\overline{x_2^{-1}}\,\overline{x_3^{-1}}$$

de même, on associe à H_2 : $X_2 = x_1^{-1}\,\overline{x_2^{-1}}\,x_3^{0}$

H_3 : $X_3 = x_1^{-1}\,x_2^{-1}$.

H_4 : $X_4 = x_1^{0}\,x_2^{-1}\,\overline{x_3^{1}}$

l'expression simplifiée de $f(\,x_1\,, x_2\,,\,x_3\,)$ est alors

$$f(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3) = X_1 + X_2 + 0(\,X_3 + X_4\,)$$
$$= \overline{x_1^{-1}}\,\overline{x_2^{-1}}\,\overline{x_3^{-1}} + x_1^{-1}\,\overline{x_2^{-1}}\,x_3^{0} + 0(\,x_1^{-1}\,x_2^{-1} + x_1^{0}\,x_2^{-1}\,\overline{x_3^{1}}\,)$$

5°) Equation de Post

On résoudra des équations à une inconnue de la forme

$f(x) = u$ avec $u \in I = (-1, 0, 1)$

Soit les trois équations :

$$f(x) = -1$$
$$f(x) = 0$$
$$f(x) = 1$$

où $f(x)$ est une expression de Post à une variable de Post x .Nous nous proposons d'exprimer les solutions x de chacune de ces équations en fonction de :

$$f(1) = f_1$$
$$f(o) = f_0$$
$$f(-1) = f_{-1}$$

pour cela définissons les coefficients indéterminés

$$a = 1 , 0 , \text{ ou } -1$$
$$a_1 = 0 \text{ ou } -1 \qquad a_0 = -1 \text{ ou } 1$$
$$a_{-1} = 0 \text{ ou } 1$$

Dressons le tableau des valeurs de triplet f_1 f_0 f_{-1} et des solutions des trois équationsprécédentes $f(x) = -1$, $f(x) = 0$ $f(x) = 1$ à l'aide des parmètres a et a_i et de paramétres b_i définis comme les a_i , on a par exemple

$a_{-1} = 0$ ou 1 , $b_{-1} = 0$ ou 1 mais **on n'a pas nécessairement**

$a_{-1} = b_{-1}$

Les points dans les colonnes des x correspondent aux équatoins impossibles : x solution de $f(x) = u$ n'existe pas .

voir tableau: 5

Explication du tableau :

1ª ligne

$f_1 = 1$, $f_0 = 1$, $f_{-1} = 1$ implique

$$f(x) = (1).x^{-1} + (1).x^0 + (1).x^1 = x^{-1} + x^0 + x^1$$

Solution de $f(x) = -1$ il n'y a pas de x qui vérifie la relation

$$x^{-1} + x^0 + x^1 = -1$$

Solution de $f(x) = 0$, il n'ya pas de x qui vérifie la relation

$$x^{-1} + x^0 + x^1 = 0$$

Solution de $f(x) = 1$, quel que soit x appartenant à l'intervalle $I = (-1 , 0 , 1)$est solution , donc $x = a$

2 ª ligne :

$f_1 = 1$, $f_0 = 1$, $f_{-1} = 0$ imlpique

$$f(x) = 0x^{-1} + 1x^0 + 1x^1 = 0x^{-1} + x^0 + x^1$$

Solution de $f(x) = -1$: il n'yapas de x qui vérifie une telle équation car : si $x = 1$;

$$x^{-1} = x^0 = -1 \text{ et } x^1 = 1 \text{ donc}$$

$$0.x^{-1} + x^{0} + x^{1} = 0.(-1) + (-1) + 1$$
$$= 1$$

donc $x = 1$ n'est pas solution

si $x = 0$ on a : $x^{-1} = x^{1} = -1$ et $x^{0} = 1$ donc $f(x)$ s'écrit

$$0.x^{-1} + x^{0} + x^{1} = 0(-1) + 1 + (-1)$$
$$= 1 \neq -1$$

donc $x = 0$ n'est pas solution

Si $x = -1$ on a : $x^{0} = x^{1}$ -1 et $x^{-1} = 1$ donc

$$0.x^{-1} + x^{0} + x^{1} = 0(1) + (-1) + (-1)$$
$$= 0 \neq -1$$

donc $x = -1$ n'est pas solution de $f(x) = -1$

Solution de $f(x) = 0$: les solutions ont $x = 1$

car si $x = -1$, on obtient

$$0.x^{-1} + x^{0} + x^{1} = 0$$

et si $x = 0$ ou 1 on aura

$$0.x^{-1} + x^{0} + x^{1} = 1 \neq 0$$

Solution de $f(x) = 1$: les splutions sont $x = 0$ et $x = 1$ donc

$x = a_{-1}$ car si $x = -1$ on a :

$$0.x^{-1} + x^{0} + x^{1} = 0 \neq 1$$

et si $x = 0$ ou 1 on aura

$$0.x^{-1} + x^{0} + x^{1} = 1$$

Résumons maintenant toutes les solutions:

équatoin $f(x) = -1$: de l'éxamen du tableau 5 résulte l'expression de x solution de $f(x) = -1$

$$
\begin{aligned}
x = {} & f_1^{-1} f_0^{1} f_{-1}^{1} + f_1^{-1} f_0^{1} f_{-1}^{0} + f_1^{-1} f_0^{0} f_{-1}^{1} + f_1^{-1} f_0^{0} f_{-1}^{0} + \\
& + 0.(f_1^{1} f_0^{-1} f_{-1}^{1} + f_1^{1} f_0^{-1} f_{-1}^{0} + f_1^{0} f_0^{-1} f_{-1}^{1} + f_1^{0} f_0^{-1} f_{-1}^{0}) + \\
& + a_1 f_1^{1} f_0^{-1} f_{-1}^{-1} + b_1 f_1^{0} f_0^{-1} f_{-1}^{-1} + a_0 f_1^{-1} f_0^{1} f_{-1}^{-1} + \\
& + b_0 f_1^{-1} f_0^{0} f_{-1}^{-1} + a_{-1} f_1^{-1} f_0^{-1} f_{-1}^{1} + b_{-1} f_1^{-1} f_0^{-1} f_{-1}^{0} + \\
& + a \; f_1^{-1} f_0^{-1} f_{-1}^{-1}
\end{aligned}
$$

et après simplification du type

$$a^{\dot{\imath}} + a^{\acute{\jmath}} = (a^{k})^{-1} = a^{\overline{k}}$$

et mise en facteur , on obtient

$$
\begin{aligned}
x = {} & \overline{f}_1 \overline{\overline{f}}_0 \overline{\overline{f}}_{-1} + 0(\overline{\overline{f}}_1 \overline{f}_0 \overline{\overline{f}}_{-1}) + (a_1 f_1^{1} + b_1 f_1^{0}) \overline{f}_0 \overline{f}_{-1} \\
& + \overline{f}_1 \overline{f}_{-1} (a_0 f_0^{1} + b_0 f_0^{0}) + \overline{f}_1 \overline{f}_0 (a_{-1} f_{-1}^{1} + b_{-1} f_{-1}^{0} + \\
& + a \overline{f}_{-1})
\end{aligned}
$$

la condition de possibilité est :

$$f(-1) . f(0) . f(1) = -1$$

TABLES DES SOLUTIONS DE $F(x) = u$.

coef. de l'équation			Solutions de l'équation		
f_1	f_0	f_{-1}	$f(x) = -1,$ $x.$	$f(x) = 0,$ $x.$	$f(x) = 1$ $x.$
1	1	1	.	.	a
1	1	0	.	-1	a_{-1}
1	1	-1	-1	.	b_{-1}
1	0	1	.	0	a_0
1	0	0	.	a_1	1
1	0	-1	-1	0	1
1	-1	1	0	.	b_0
1	-1	0	0	-1	1
1	-1	-1	a_1	.	1
0	1	1	.	1	a_1
0	1	0	.	a_0	0
0	1	-1	-1	1	0
0	0	1	.	a_{-1}	-1
0	0	0	.	a	.
0	0	-1	-1	b_{-1}	.
0	-1	1	0	1	-1
0	-1	0	0	b_0	.
0	-1	-1	b_{+1}	1	.
-1	1	1	1	.	b_1
-1	1	0	1	-1	0
-1	1	-1	a_0	.	0
-1	0	1	1	0	-1
-1	0	0	1	b_1	.
-1	0	-1	b_0	0	.
-1	-1	1	a_{-1}	.	-1
-1	-1	0	b_{-1}	-1	.
-1	-1	-1	a	.	.

tableau : 5

6°) Expession algébrique des expressions Postiennes

Nous cherchons à établir une correspondance entre l'algébre de Post et l'algébre modulo $x^3 = x$. Pour cela , nous établissons les formules de transformations de l'algébre de Post en algébre modulo $x^3 = x$; pour les opérations fondamentales ,somme , produit projection, puis nous donnerons la forme algébrique d'une expression de Post à une variable. Enfin , nous donnerons les formules de résolution algébrique d'une équation de Post .

- Somme et produit :

Cherchons à exprimer la somme et le produit Postien à l'aide de l'addition algébrique et de la multiplication algébrique(signe omis) , toutes ces opérations portent sur les valeurs Postiennes (-1 , 0 , 1) des arguments. L'identité $x^3 = x$ valable en algébre dans l'ensemble J =(-1 , 0 , 1), nous invite à chercher des formes du deuxieme degré par rapport à chacune des variables. Posons donc , en tenant compte de la symétrie en a et b :

$$a + b = A.a^2.b^2 + B(a^2 + b^2) + C. .b + D.(a + b) + E$$

les coefficients algébriques A ,B ;C, D , E , sont déterminés par identification :

$$1 + 1 = 1 = A + 2.B + C + 2.D + E$$

$$1 + 0 = 1 = B + D + E$$

$$1 + (-1) = 1 = A + 2.B - C + E$$

$$0 + 0 = 0 = E$$

$$0 + (-1) = 0 = B - D + E$$

$$(-1) + (-1) = -1 = A + 2.B + C - 2.D + E$$

Ce système admet la solution unique :

$$A = -(1/2) \; ; \; B = +(1/2) \; , \; C = -(1/2)$$

$$D = (1/2) \; , \; E=0$$

Posons de même :

$$a.b = A.a^2 + b^2 + B(a + b)^2 + C.a.b +$$

$$+ D(a + b) + E$$

d'où par identification :

$$1.1 = 1 = A + 2.B + C + 2.D + E$$

$$1.0 = 0 = B + D + E$$

$$1(-1) = -1 = A + 2.B - C + E$$

$$0.0 = 0 = E$$

$$0.(-1) = -1 = B - D + E$$

$$(-1).(-1) = -1 = A + 2.B + C -2.D + E$$

Ce système admet la solution unique :

$$A = (1/2) \; , \; B= -(1/2) \; , \; C= (1/2) \; , \; D = (1/2) \; , \; E = 0$$

On a ainsi obtenu les formules de trahsformation

(31) $$a + b = (1/2).\left[-a^2.b^2 + (a^2 + b^2) - a.b + (a + b)\right]$$

(32) $$a.b = (1/2).\left[a^2.b^2 - (a^2 + b^2) + a.b + (a + b)\right]$$

- Projection :

Calculons la forme algébrique des composantes x^1, x^0, x^{-1} d'un élément x .

Ecrivons $x^1 = A.x^2 + B.x + C$

les coefficients A , B , C sont obtenus par identification

$$1^1 = 1 = A + B + C$$

$$0^1 = -1 = C$$

$$-1^1 = -1 = A - B + C$$

d'où la solution unique

$$A = 1 \ , \ B = 1 \ , \ C = -1$$

et $$x^1 = x^2 + x - 1$$

Ecrivons : $$x^0 = A.x^2 + B.x + C$$

$$1^0 = -1 = A + B + C$$

$$0^0 = 1 = C$$

$$0^0 = -1 = A - B + C$$

d'où $$A = -2 \ , \ B = 0 \ , \ C = 1$$

et $$x^0 = -2.x^2 + 1$$

Ecrivons : $$x^{-1} = A.x^2 + B.x + C$$

détermination des coefficients A ,B , C

$$1^{-1} = -1 = A + B + C$$

$$0^{-1} = -1 = C$$

$$-1^{-1} = 1 = A - B + C$$

d'où $A = 1 \ , \ B = -1 \ , \ C = -1$

et $x^{-1} = x^{2} - x - 1$

Nous avons ainsi obtenu les formules algébriques

$$(33) \quad \begin{cases} x^{1} = x^{2} + x - 1 \\ x^{0} = -2.X^{2} + 1 \\ x^{-1} = x^{2} - x - 1 \end{cases}$$

remarque : il ne faut pas confondre l'exposant Postien de x dans les premiers membres avec l'exposant algébrique dans le deuxieme membre .

Expression de Post à une variable :

Considérons la forme générale d'une expression de Post à une variable

$$f(x) = f_{1}\, x^{1} + f_{0}\, x^{0} + f_{-1}\, x^{-1}$$

où l'on a posé

$$f(i) = f_{i} \text{ avec } i = (-1 \ ; \ 0 \ , \ 1)$$

L'emploi des formules (31) , (32) et (33) permet de trouver la forme algébrique de f(x) , il est cependant plus simple de procéder encore par identification , en écrivant à priori :

$$f(x) = A.x^2 + B.X + C$$

A, B , C sont des expressions en f_1 , f_0 et f_{-1} que nous allons déterminer

$$f(1) = f_1 = A + B + C$$

$$f(0) = f_0 = C$$

$$f(-1) = f_{-1} = A - B + C$$

ce système admet la solution unique :

$$A = (1/2).(f_1 - 2.f_0 + f_{-1})$$

$$B = (1/2).(f_1 - f_{-1}) \quad , \quad C = f_0$$

on a donc

$$f(x) = (1/2).x^2 (f_1 - 2.f_0 + f_{-1}) + + (1/2).x (f_1 - f_{-1}) + f_0 \tag{34}$$

Résolution d'une équation de Post à une inconnue :

L'équation de Post :

$f(x) = u$ avec u appartenant à $I = (-1, 0, 1)$ s'écrit

$$x^2 (f_1 - 2.f_0 + f_{-1}) + x.(f_1 - f_{-1}) + 2.(f_0 - u) = 0 \tag{35}$$

nous cherchons les solutions Postiennes de cette équatoin algébrique du second degré en x.

La condition pour qu'une telle solution existe est que l'une au moins des trois valeurs de $f(x)$, (f_1, f_0, f_{-1}) soit égale à u ; cette condition s'écrit algébriquement :

$$(f_1 - u).(f_0 - u).(f_{-1} - u) = 0$$

si cette condition est réalisée , les solutions de $f(x) = u$ sont les solutions algébriques de l'équation (35) qui appartiennent à $I = (-1 , 0 , 1)$

Dans le cas où

$$f_1 - 2.f_0 + f_{-1} = 0$$

l'équation se réduit à une expression du premier degré dont la solution est :

$$x = \frac{2.(f_0 - u)}{f_{-1} - f_1}$$

Cette expression de x peut se présenter sous la forme $0 / 0$, auquel cas x est un paramétre de Post indéterminé $x = t$ appartenant à $I = (-1 , 0 , 1)$, ou sous la forme $(a)/(0)$

$(a) \neq 0$ auquel cas , l'équation est impossible (on se trouve dans le cas où la condition de possibilité n'est pas réalisée)

$$f_1 = f_0 = f_{-1} \neq u$$

car le dénominateur de x est nul :

$$f_{-1} = f_1$$

et le numérateur est différent de zéro $f_0 \neq u$.

D'autre part des relations

$$f_1 - 2.f_0 + f_{-1} = 0$$

et $$f_{-1} = f_1$$

on tire :

$$f_{-1} = f_0 = f_1 \neq u$$

7°) Simplification des expressions de Post

Nous avons déja vu comment on pouvait à l'aide d'une représentation géométrique simplifier les expressions de Post.

Pour un grand nombre de variables , la méthode devient compliquée et on adoptera à l'algébre bivalente la méthode plus simple de Quine et Mac Cluskey utilisée en algébre de Boole.

Ainsi, on appellera produit fondamental , toute forme non identique à -1 du type

$$X = \prod_i x_i^1 \prod_j x_j^0 \prod_k x_k^{-1}$$

C'est à dire tout produit de Post de variables toutes différentes affirmées (x_i^1) , douteuses (x_j^0) , ou niées (x_k^{-1})

on écrira

$$X = \prod_i x_i^{p_i} \quad i = (1 , 2 ,..., n) \text{ et } p = (-1, 0 , 1)$$

Nous avons vu que

$$x_i^{p_i} = -1 \quad \text{si} \quad p_i \neq x_i$$

$$x_i^{p_i} = +1 \quad \text{si} \quad p_i = x_i$$

donc $\quad X = \pm 1$

On appelle forme normale canonique d'une expression de Post F , une expression du type

$$F = \sum X_i + 0 \sum X_j + (-1) \sum X_k$$

où les X_i, X_j, X_k, sont les produits fondamentaux ,appelés respectivement vrais , douteux , et faux de F .

On écrit

$$F^{+} = \sum x_i$$
$$F^{o} = \sum x_j$$
$$F^{-} = \sum x_k$$

La donnée de deux composantes d'une forme normale suffit à déterminer cette forme normale . Nous considérerons les composantes F^{+} et F^{o} , on a:

$$F = F^{+} + 0F^{o}$$

CONSENSUS

Trois produits fondamentaux X_1 , X_2 , X_3 admettent un consensus si et seulement s'il existe une et une seule lettre x dont les trois exposants Postiens i , j , k sont différents dans X_1 , X_2 , X_3 et si le produit Postien , des expressions

$$\frac{X_1}{x^i}, \frac{X_2}{x^j}, \frac{X_3}{x^k}$$

n'est pas identique à : -1 . Ce produit est le consensus de X_1 , X_2 , X_3 on le note (X_1 , X_2 , X_3)

$$(X_1, X_2, X_3) = \frac{X_1}{x^i} \cdot \frac{X_2}{x^j} \cdot \frac{X_3}{x^k}$$

Exemple : $(x_1^1 . x_2^0 ; x_1^1 \, x_2^1 \, x_3^0 ; x_1^1 \, x_2^{-1} x_3^0 \, x_4^{-1}) = x_1^1 \, x_3^0 \, x_4^{-1}$

car la variable x_2 a comme exposant -1 , 0 et 1 dans les trois expressions .

$$\frac{X_1}{x_2^0} \cdot \frac{X_2}{x_2^1} \cdot \frac{X_3}{x_2^{-1}} = x_1^1 \cdot x_1^1 x_3^0 \cdot x_1^1 x_3^0 x_4^{-1} = x_1^1 x_3^0 x_4^{-1}$$

On minimisera ainsi l'expression de Post en ne gardant que les implicants premiers qui sont des produits fondamentaux nécessaires .

Exemple :

$$\begin{aligned} F = {} & x^1 y^1 z^1 + x^1 y^1 z^0 + x^1 y^0 z^1 + x^0 y^1 z^1 + x^1 y^1 z^{-1} + \\ & + x^1 y^{-1} z^1 + x^{-1} y^1 z^1 + x^0 y^0 z^1 + x^0 y^{-1} z^1 + x^{-1} y^0 z^1 + \\ & + x^{-1} y^{-1} z^1 + x^0 y^0 z^0 + x^0 y^0 z^{-1} + 0.(x^1 y^0 z^1 + \\ & + x^1 y^0 z^0 + x^1 y^0 z^{-1} + x^1 y^1 z^{-1} + x^1 y^{-1} z^{-1} + \\ & + x^0 y^1 z^{-1} + x^0 y^0 z^{-1} + x^0 y^{-1} z^{-1} + x^{-1} y^1 z^{-1} + \\ & + x^{-1} y^0 z^{-1} + x^{-1} y^{-1} z^{-1}). \end{aligned}$$

Dressons les tableaux des listes relatives à F^+ et à F^0 et marquons d'un point (.) les produits fondamentaux qui ont été utilisés et d'une étoile (*) ceux qui ne l'ont pas été .

Voir tableau : 4 bis

Les formes minimisées de F^+ et F^0 sont donc :

$$F^+ = x^1 y^1 + x^0 y^0 + z^1$$

$$F^0 = x^1 y^0 + z^{-1}$$

L_0				L_1				L_2			
x	y	z		x	y	z		x	y	z	
1	1	1	•	1	1		✱			1	✱
1	1	0	•	1		1	•				
1	0	1	•		1	1	•				
0	1	1	•		0	1	•				
1	1	–	•	0		1	•				
1	–	1	•		–	1	•				
–	1	1	•	–	–	1	•				
0	0	1	•	0	0		✱				
0	–	1	•								
–	0	1	•								
–	–	1	•								
0	0	0	•								
0	0	–	•								

L_0				L_1				L_2			
x	y	z		x	y	z		x	y	z	
1	0	1	•	1	0		✱			–	✱
1	0	0	•	1		–	•				
1	0	–	•		0	–	•				
1	1	–	•		1	–	•				
1	–	–	•		–	–	•				
0	1	–	•	0		–	•				
0	0	–	•	–		–	•				
0	–	–	•								
–	1	–	•								
–	0	–	•								
–	–	–	•								

Tableaux des listes relatifs à F^+ et à F^-

tableau : 4 bis.

On peut encore simplifier l'expression de F en tenant compte de l'identité déja vue : $y = y^{1} + 0y^{0}$

en mettant en facteur x^{1}, on aura

$$F = x^{1}\,(y^{1} + 0.y^{0}) + x^{0}y^{0} + z^{1} + 0.z^{-1}$$
$$= x^{1}y + x^{0}y^{0} + z^{1} + 0.z^{-1}$$

8°) Simplification par la méthode du diagramme :

Introduction de nouvelles fonctions unitaires

$$x^{-0} = x^{-} + x^{+}$$
$$x^{-+} = x^{-} + x^{0}$$
$$x^{0+} = x^{0} + x^{+}$$

On à de même

$$x^{-} = x^{0-} \cdot x^{-+}$$
$$x^{0} = x^{-0}\,x^{0+}$$
$$x^{+} = x^{-+}\,x^{+0}$$

L'utilité de ces nouvelles fonctions réside dans la réalisa - tion pratique .

Si les variables sont des potentiels et si -1 représente le potentiel le plus bas , +1 , le potentiel le plus haut et 0 le potentiel intermédiaire , alors les fonctions unitaires x^{-} et x^{+} peuvent être réalisées avec des circuits à diodes et transistors puisque leurs valeurs sont monotoniques (+ et ensuite - -) pour x^{-} et (- - et ensuite +) pour x^{+}

Seule x^0 est difficile à réaliser puisque pour $x = -1$ et $x = +1$, on doit avoir $x^0 = -$ et pour $x = 0$, $x^0 = +$ les valeurs de x^0 ne sont pas monotoniques (voir figure 6)

Donc chaque fois que x^0 apparait , on peut la remplacer par le produit $x^{-0} . x^{0+}$ dont les facteurs x^{-0} et x^{0+} peuvent être réalisés avec des circuits semblables à ceux utilisés pour x^- et x^+

figure : 6

x	x^-	x^0	x^+	x^{-0}	x^{0+}	x^{-+}
$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
0	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

Simplification : comme en algébre de Boole où on utilisait les tables de Karnaugh pour simplifier les fonctions binaires, on utilise pour la simplification des fonctions ternaires des diagrammes semblables à ceux de Karnaugh ; un diagramme pour n variables aurait 3^n cases .

L'utilité d'un tel diagramme est donc limité par le grand nombre de combinaisons .

Dans le diagramme , chaque case doit contenir seulement les valeurs -1 ou (-) , 0 et +1 ou (+) . Nous appellerons une case contenant un zéro , une case-0 ; une case contenant +1 , une case +, et une case contenant -1 , une case - . Des cases adjacentes ont des coordonnées (ensemble des variables)qui diffèrentdans une sule variable . Nous définirons un ensemble comme un groupe de cases contenant seulement des cases de même nature .

Nous avons donc trois sortes d'ensembles :

les ensembles -

les ensembles 0

les ensembles +

exemple :

Un ensemble 0 contenant une case 0 de coordonnées (a_1 ,a_2,...,a_n) peut être représenté par la fonction

$$0.(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}) \text{ avec } a_i \text{ appartenant à } I$$

$I = (- , 0 , +)$

En décomposant le diagramme en ces ensembles spéciaux ,on peut simplifier la fonction . Le principe de la méthode du diagramme consiste donc à combiner les cases en des ensembles les plus grands possibles . Cette combinaison est faite en utilisant les théorèmes suivants :

Théorème 1 : les cases adjacentes appartenant au même ensemble peuvent être combinées .

exmple : les cases + (x_1^- , x_2^-) et (x_1^- , x_2^0) voir figure: 7 peuvent être combinées . Une table de valeurs prouve bien que l'ensemble + :

$$x_1^- x_2^- + x_1^- x_2^0 = x_1^- x_2^{-0}$$

car

$$x_1^- x_2^- + x_1^- x_2^0 = x_1^- (x_2^- + x_2^0)$$
$$= x_1^- x_2^{-0}$$

Théorème 2 : les cases + sont considérées comme des cases 0 pour la formation d'un ensemble 0 .

exemple : soient une case 0,(x_1^- , x_2^+) et une case +,(x_1^- , x_2^0) adjacentes (voir figure 7). On peut utiliser la case plus et la case 0 pour la formation d'un ensemble 0 réunissant les deux cases et rprésenté par la fonction 0.($x_1^- x_2^{0+}$) . La table des valeurs montre que

$$x_1^- x_2^0 + 0.(x_1^- x_2^{0+}) = x_1^- x_2^0 + 0.(x_1^- x_2^+)$$

Théorème 3 : une case peut appartenir à plus d'un ensemble

Ce théorème est une généralisation des théorèmes(1) et (2)

x_1	−	−	−	0	0	0	+	+	+
x_2	−	0	+	−	0	+	−	0	+
$f(x_1, x_2)$	+	+	0	+	−	0	+	0	0

$x_1 \backslash x_2$	−	0	+
−	+	+	0
0	+	−	0
+	+	0	0

$x_1 \backslash x_2$	−	0	+
−	+	+	0
0	+	−	0
+	+	0	0

figure : 7

Exemple de simplification :

Soit la fonction ternaire représentée par la table des valeurs de la figure 7 .

Son développement est :

$$f(x_1 , x_2) = f^{+} (x_1 , x_2) + 0 . f^{0} (x_1 , x_2)$$

avec $$f^{+}(x_1 , x_2) = x_1^{-} x_2^{-} + x_1^{-} x_2^{0} + x_1^{0} x_2^{-} + x_1^{+} x_2^{-}$$

et $$f^{0} (x_1 , x_2) = x_1^{-} x_2^{+} + x_1^{0} x_2^{+} + x_1^{+} x_2^{0} + x_1^{+} x_2^{+}$$

et en remplaçant x_1^{0} par $x_1^{-0} x_1^{0+}$ et x_2^{0} par $x_2^{-0} x_2^{0+}$, il vient

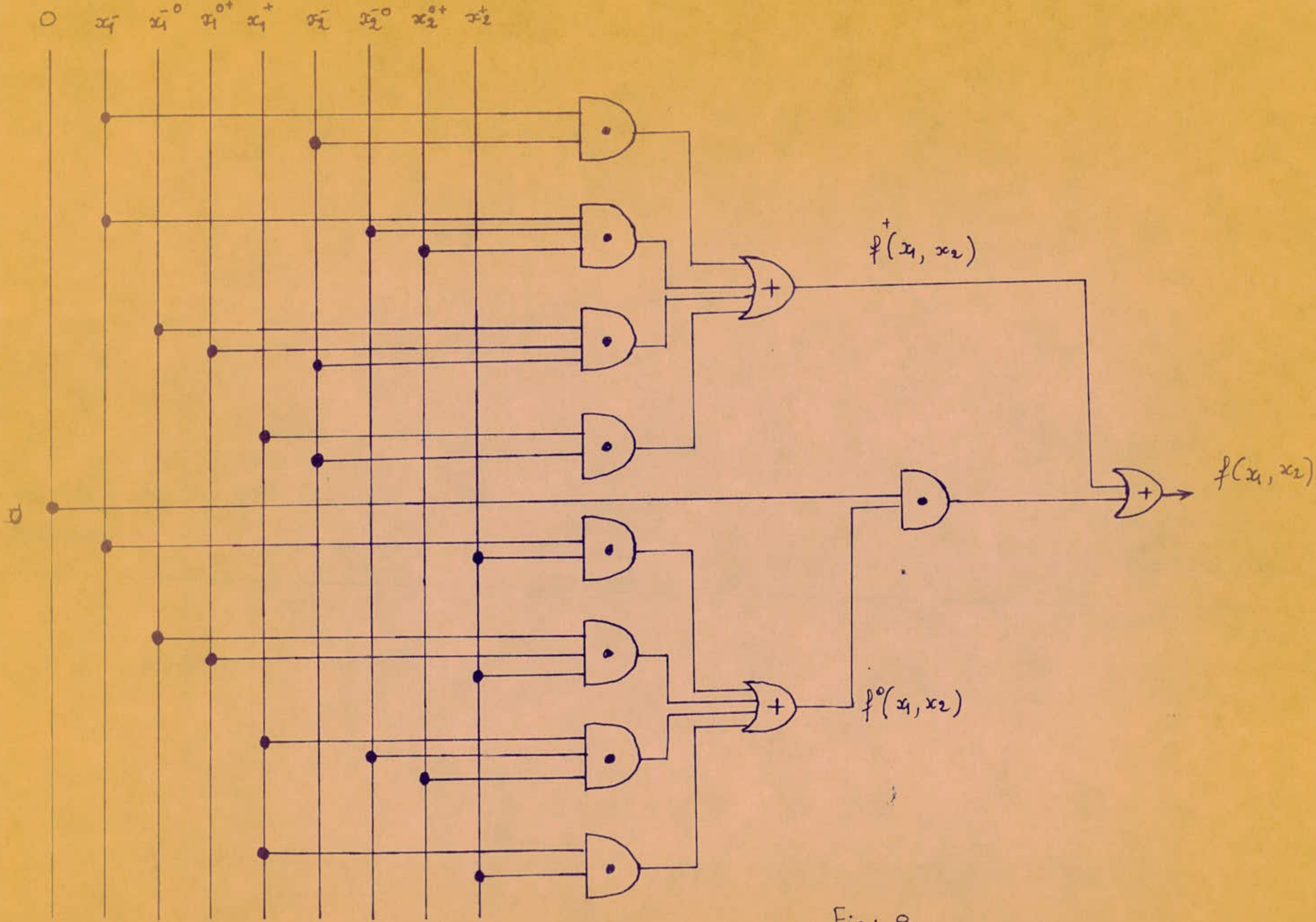


Fig: 8

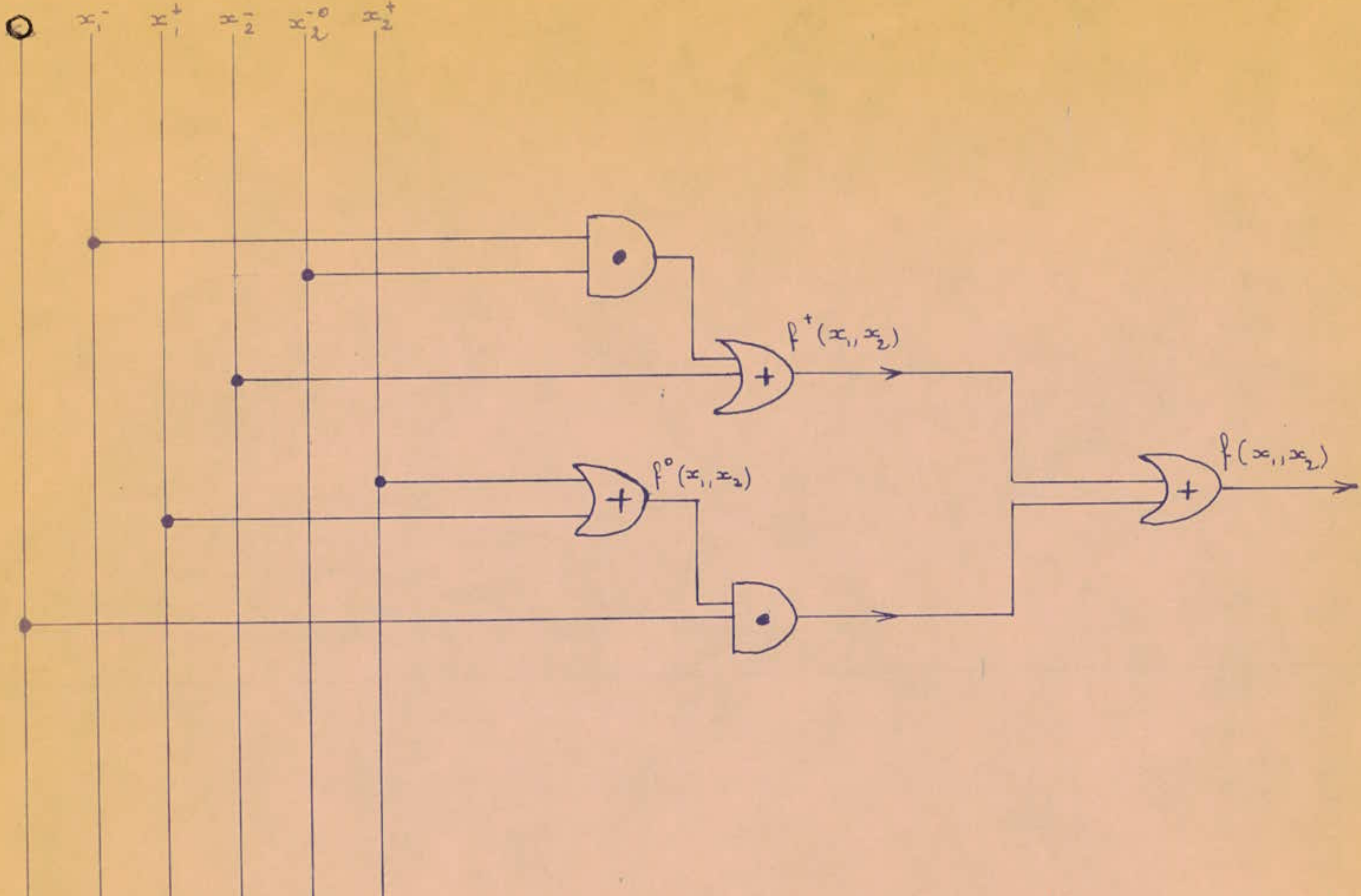


fig:9 : Schéma logique de la forme simplifiée de $f(x_1, x_2)$

$$f^{+}(x_1, x_2) = x_1^- x_2^- + x_1^- x_2^{-0} x_2^{0+} + x_1^{-0} x_1^{0+} x_2^- + x_1^+ x_2^-$$

et
$$f^{0}(x_1, x_2) = x_1^- x_2^+ + x_1^{-0} x_1^{0+} x_2^+ + x_1^+ x_2^{-0} x_2^{0+} + x_1^+ x_2^+$$

Nous voyons que nous avons besoin de huit éléments de . fonction unitaire pour réaliser x_1^-, x_1^{-0}, x_1^{0+}, x_1^+, x_2^-, x_2^{-0}, x_2^{0+}, x_2^+, neuf (et) et trois (ou) . Le nombre total est de vingt éléments (voir figure 8)

Il est intéressant de montrer comment les théorèmes précédents sont appliqués pour aller de la forme canonique à une forme réduite .

En analysant la figure 7 , on a

- ensemble + : x_2^- , $x_1^- x_2^{-0}$
- ensemble 0 : x_2^+ , x_1^+

la forme réduite est

$$f(x_1, x_2) = (x_2^- + x_1^- x_2^{-0}) + 0.(x_2^+ + x_1^+)$$

le circuit logique de la forme réduite montré ci-après ; utilise seulement cinq éléments des fonctions unitaires; deux (et) et trois (ou) . Le nombre total d'éléments à étè réduit de vingt à dix (voir figure 9) .

9°) Fonctions ternaires à seuil

Une fonction trivalente $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction à seuil s'il existe n + 2 constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n, t_1$ et t_{-1} entières, positives, nulles ou négatives telles que en posant $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ (somme arithmètique), on ait

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si et seulement si } \lambda \geqslant t_1 \\ -1 & \text{si et seulement si } \lambda \leqslant t_{-1} \\ 0 & \text{si et seulement si } t_1 < \lambda < t_{-1} \end{cases}$$

t_1 et t_{-1} sont les valeurs des seuils : $t_{-1} < t_1$

a_i est la multiplicité de x_i

on écrit :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n ; t_1, t_{-1}]$$

en général, $t_{-1} = -t_1$

Exemple : la fonction $F(x, y)$ dont le tableau de valeurs est le suivant

y \ x	−	0	+
−	−	−	0
0	−	0	+
+	0	+	+

a pour représentation $F(x, y) = [x + y ; +, -]$

En effet les multiplicités de x et y sont 1 les deux seuils sont +1 ou (+) et -1 ou (-)

$x = -1 \; ; \; y = -1 \qquad x + y = -2 < -1$ donc $F(x\ ,\ y) = -1$

$x = -1 \; ; \; y = 0 \qquad x + y = -1 = -1$ donc $F(x\ ,\ y) = -1$

$x = -1 \; ; \; y = 1 \qquad x + y = 0\ , -1 < 0 < 1$ donc $F(x\ ,\ y) = 0$

$x = 0 \; ; \; y = -1 \qquad x + y = -1 = -1$ donc $F(x\ ,\ y) = -1$

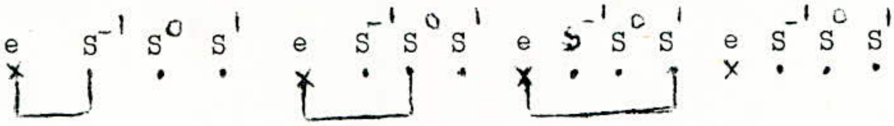
$x = 0 \; ; \; y = 0 \qquad x + y = 0\ ,\ -1 < 0 < 1$ donc $F(x\ ,\ y) = 0$

$x = 0 \; ; \; y = 1 \qquad x + y = 1$. donc $F(x\ ,\ y) = 1$

10°) Notions sur les circuits logiques ternaires

Représentation d'une variable trivalente:

une variable trivalente étant représentée par un interrupteur dont la fonction de structure est 1 ou 0 selon que l'interrupteur est au travail ou au repos ; pour représenter une variable trivalente il faut considérer un système électrique à trois états. L'élément représentatif d'une variable trivalente sera une prise à une "entrée" e et trois " sorties " S^{-1}, .. S^{0} ,S^{1} dont une seule peut être reliée à e, la " valeur logique " de la prise est (selon le plot s^{i} relié à e), respectivement : -1 , 0 , 1 ; si aucune liaison n'est représentée la prise a la valeur logique x non présisée; les trois premières connections seront dites du type -1 , 0 , 1



X = -1 X = 0 X = 1 X

Les sorties d'une même prise ne sont pas liées entre elles, et ne peuvent être mises simultanément en connection avec le plot d'entrée.

Liaison entre deux prises

S'il existe une liaison entre l'un des quatres plots (e , S^{-1}, S^{0}, S^{1}) d'une prise et l'un des quatres plots d'une auter prise , une impultion électrique peut passer entre ces deux plots s'ils appartiennent à un circuit comprenant les deux entrées des prises, circuit susceptible d'être fermé par des connexions du type -1 , 0 , 1 .

Représentation d'une opération portant sur une variable :

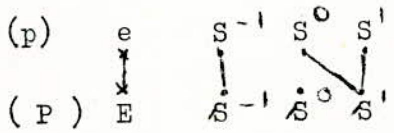
Pour représenter une des 27 fonctions à une variable ,nous utiliserons deux prises , une prise $p(e , s^i)$ représentant la variable trivalente x et une prise $P(E, S^j)$ représentant la fonction trivalente $f(x)$. Les entrées e et E sont liées entre elles et la sortie s^i de p est liée à la sortie S^j de P si et seulement si $j = f(i)$, (i et j appartiennent à $\{-1 , 0 , 1 \}$)

Autrement dit le passage d'une impultion entre e et s^i provoque le passage d'une impultion entre E Et S^j (dans le circuit $e s^i S^j E e$) si et seulement si $j = f(i)$.

Exemple : Considérons l'équation qui associe à la variable x l'expression $f(x) = -1$ si $x = -1$ et à 1 dans les autres cas

$$f(x) = x^0 + x^1$$

x	f(x)	circuits
-1	-1	$eS^{-1}S^{-1}E\ e$
0	1	$eS^{0}\ S^{1}\ E\ e$
1	1	$eS^{1}\ S^{1}\ E\ e$



APPLICATIONS

1°) Arithmétique ternaire

En ternaire comme dans toutes les bases impaires , il existe deux systèmes de numération distincts :

- Un système dit normal , dans lequel tous les digits sont positifs
- Un système dit symétrique , dans lequel certains digits sont positifs et d'autres négatifs .

Voici par exemple les deux décompositions de 17 :

$$17_{10} = 9 + 2.3 + 2.1 = 1.3^{2} + 2.3^{1} + 2.3^{0} = 122_{3}$$

$$17_{10} = 27 - 9 - 1 = (+1).3^{3} + (-1).3^{2} + (0).3^{1} + (-1).3^{0}$$

$$= +1 , -1 , 0 , -1$$

$$= +-0-$$

donc $17_{10} = 122$ (décomposition en ternaire normal)

$17_{10} = + - 0 -$ (décomposition en ternaire symétrique)

ceci est général et tout nombre s'écrit :

$$N = \sum_{i=0}^{n} t_i 3^{i} = \sum_{j=0}^{m} s_j 3^{j} \quad \text{où } t_i \text{ appartient à } (- , 0 , +)$$

et s_j appartient à $(- , 0 , +)$

il en résulte immédiatement que dans le système symétrique les nombres positifs s'écrivent de la même manière que les nombres négatifs

$$-N = \sum_{j=0}^{n} (-s_j).3^{j} \quad \text{et } s_j = (- , 0 , +)$$

ainsi $-17 = -(+-0-) = -+0+$

le signe d'un nombre étant celui de son premier digit non nul la soustraction s'effectue donc exactement comme l'addition sur les nombres eux mêmes et non sur des compléments (cas du binaire et du décimal)

La multiplication de deux digits a et b est aussi très simple ; elle s'effectue sans retenue puisque($|a \cdot b| \leqslant 1$) et se réduit à l'application de la régle des signes de l'algébre ordinaire .

Exemple : multiplions 17 par -4

$17_{10} = + - 0 +$

$-4_{10} = -3 -1 = - -$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & + & - & 0 & - \\
 & & & - & - \\
\hline
 & - & + & 0 & + \\
- & + & 0 & + & \\
\hline
- & 0 & + & + & +
\end{array}
$$

donc $17 \cdot (-4) = - 0 + + + = -81 + 9 + 3 + 1 = -68$

Cette simplicité incite à itiliser plus particulièrement le système ternaire symétrique pour constituer des éléments de calculs .

Tables d'addition et de multiplication en ternaire symétrique

$b_n \backslash a_n$	−	0	+
−	+	−	0
0	−	0	+
+	0	+	−

s_n

$b_n \backslash a_n$	−	0	+
−	−	0	0
0	0	0	0
+	0	0	+

r_n

Addition ternaire symétrique

$b_n \backslash a_n$	−	0	+
−	+	0	−
0	0	0	0
+	−	0	+

$a_n \, b_n$

Multiplication

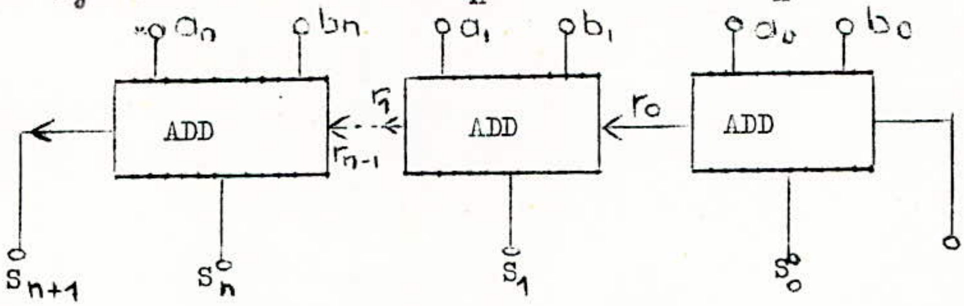
Principales opérations utilisées dans les blocs de calcul.

-Addition : soient deux nombres décomposés en ternaire symétrique

$$M = a_n \, , \, a_n \, , \, \ldots \, , \, a_0$$

$$N = b_n \, , \, b_{n-1} , \, \ldots , \, b_0$$

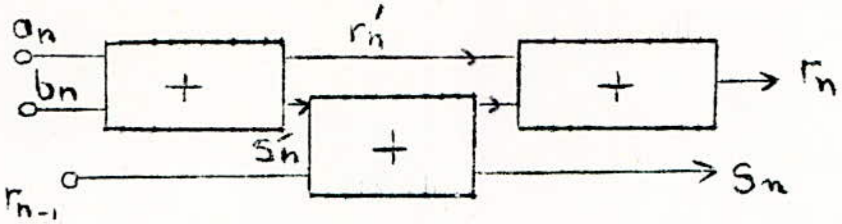
L'addition M + N se décompose en une suite d'additions en rang n de trois digits a_n , b_n , et r_{n-1} (r étant la retenue générée au rang n-1 donnant une somme S_n et une retenue r_n)



Addition parallèle

$$a_n + b_n + r_{n-1} \longrightarrow r_n \, , S_n$$

On peut décomposer cette addition suivant le schéma suivant :



La forme des tables d'addition autorise une élaboration rapide de la retenue grâce à des éléments à seuil (voir tableau 10)

$$r_n = [a_n + b_n + r_{n-1} \; ; +2 \, , -2] .$$

La somme s'en déduit immédiatement :

$$a_n + b_n + r_n = 3.r_n + S_n$$

(Somme arithmétique : r_n est multiplié par 3 car le digit le représentant se situe à la deuxième position)

donc $$S_n = a_n + b_n + r_{n-1} - 3.r_n \, .$$

On peut représenter cette somme arithmètique par un élément à seuil : $S_n = \left[a_n + b_n + r_{n-1} - 3.r_n \; ; + \, , - \right]$

– ADDITION –

a_n	b_n	r_{n-1}	somme arithmétique	retenue r_n
−	−	−	$\boxed{-3}$	$\boxed{-}$
−	−	0	$\boxed{-2}$	$\boxed{-}$
−	−	+	−1	0
−	0	−	$\boxed{-2}$	$\boxed{-}$
−	0	0	−1	0
−	0	+	0	0
−	+	−	−1	0
−	+	0	0	0
−	+	+	+1	0
0	−	−	$\boxed{-2}$	$\boxed{-}$
0	−	0	−1	0
0	−	+	0	0
0	0	−	−1	0
0	0	0	0	0
0	0	+	+1	0
0	+	−	0	0
0	+	0	+1	0
0	+	+	$\boxed{+2}$	$\boxed{+}$
+	−	−	−1	0
+	−	0	0	0
+	−	+	+1	0
+	0	−	0	0
+	0	0	+1	0
+	0	+	$\boxed{+2}$	$\boxed{+}$
+	+	−	+1	0
+	+	0	$\boxed{+2}$	$\boxed{+}$
+	+	+	$\boxed{+3}$	$\boxed{+}$

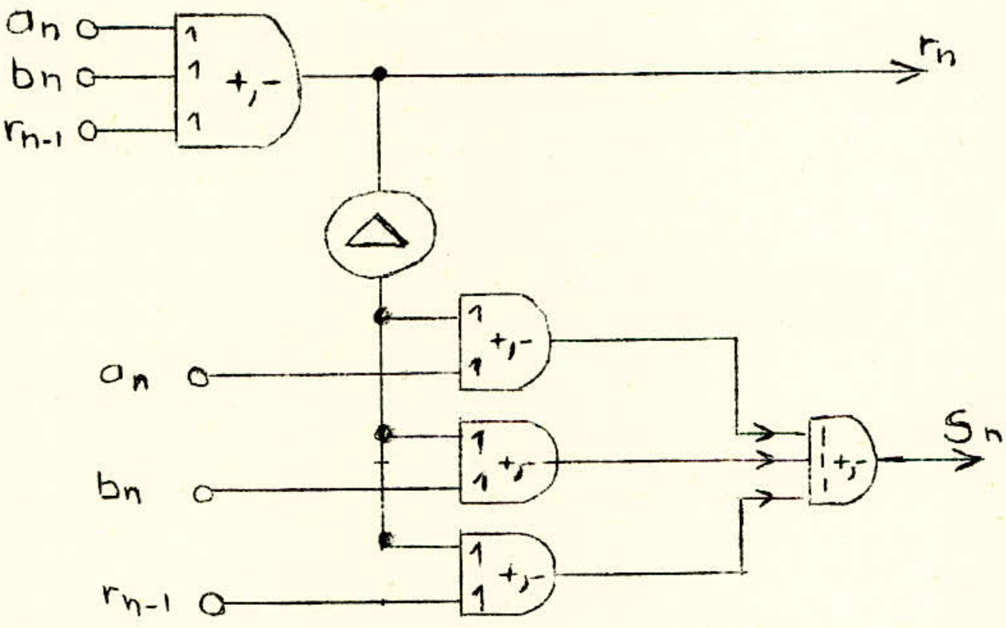
tableau : 10

La technologie actuelle ne permet pas de construire une porte à seuil à six (6) entranoeS ; une nuovelle décomposition s'impose .

$$S_n = a_n + b_n + r_{n-1} - 3.r_n = (a_n - r_n) + (b_n - r_n) + + (r_{n-1} - r_n)$$

donc $S_n = \left[a_n - r_n \ ; +,-\right] + \left[b_n - r_n \ ;+,-\right] + + \left[r_{n-1} - r_n \ ; +,-\right]$

$$S_n = \left[\left[a_n - r_n \ ; +,-\right] + \left[b_n - r_n \ ; +,-\right] + \left[r_{n-1} - r_n \ . +,-\right] ; +,- \right]$$



Additionneur à Seuil .

Multiplication :

La multiplication se réduit à la régle des signes sans retenue c'est à dire :

a.b = a si b = +

a.b = -a si b= -

a.b = 0 si b = 0

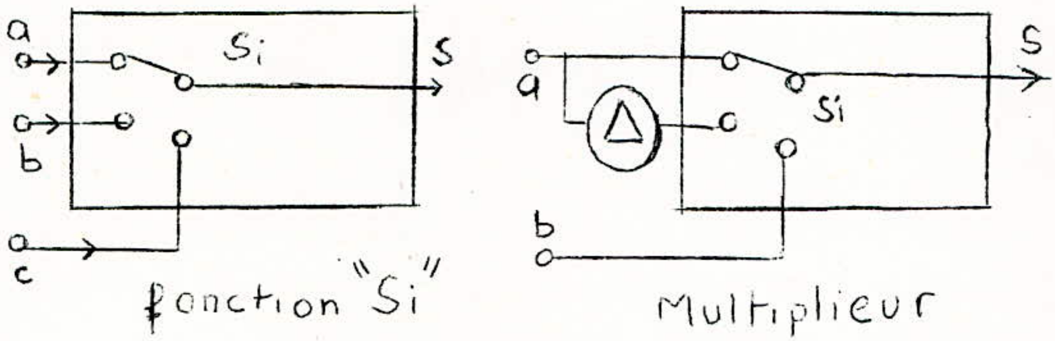
Cela fait aparaître une fonction ternaire particulière , la fonction " Si " qui n'est qu'un simple commutateur

Si(a , b , c) = a si C = +

= b si C = -

= 0 si C = 0

à l'aide d'un " Si " et d'un dual , on fait un multiplieur



l'association de tels multiplieurs en série-parallèle, en série , en parallèle , constituent des multiplieurs .

Comparaison :le résultat d'une comparaison >, < ou = est une variable essentiellement ternaire.

On compose deux (2) digits a et b en examinant le signe de leur différence ; pour ce faire , il n'est pas nécessaire d'effectuer explicitement la soustraction ; il suffit de considérer la quantité :

$$C = \left[a - b \; ; + , - \right]$$

la comparaison de deux (2) nombres repose sur l'algorithme suivant

si a_n et b_n sont les dogits de rang le plus haut de A et B

$$\text{si} \quad a_n > b_n \quad \text{alors } A > B$$

$$\text{si} \quad a_n < b_n \quad \text{alors } A < B$$

si non examiner le rang n-1 (dans le cas $a_n = b_n$) etc...

il faut donc :

- générer en parallèle les C_n résultats des comparaisons des a_n et b_n .
- propager le premier $C_n \neq 0$ en sortie .

L'algorithme se matérialise de façon combinatoire grâce à l'élément à seuil (qui effectue une"décision")

$$\left[2.C_n + C_{n-1} \; ; + , - \right] = C_n \quad \text{si} \quad C_n \neq 0$$
$$= C_{n-1} \quad \text{si } C_n = 0$$

car , par définition , nous avons :

$$\left[2.C_n + C_{n-1} \; ; +,- \right] = +1 \quad \text{si } 2.C_n + C_{n-1} \geqslant +1$$
$$= -1 \quad \text{si } 2.C_n + C_{n-1} \leqslant -1$$
$$= 0 \quad \text{si } -1 < 2.C_n + C_{n-1} < 1$$

Ainsi , si $C_n = +1$ ($A > B$) , il faut que tous les éléments à seuil suivants , propagent le +1

Trois cas sont à considérer :

* $C_{n-1} = 1$ on aura : $2.C_n + C_{n-1} = 2.(1) + 1 = 3 > 1$

la sortie est à +1

* $C_{n-1} = 0$ on aura : $2.C_n + C_{n-1} = 2.(1) + (0) = 2 > 1$

la sortie restera à 1

* $C_{n-1} = -1$ on aura : $2.C_n + C_{n-1} = 2.(1) + (-1) = 1$

la sortie est toujours à 1

donc si $C_n = 1$, quelque soit C_{n-1} (-1 ,0 ou 1) , la sortie est à 1 , c'est à dire égale à C_n

Supposons maintenant que $C_n = -1$ ($A < B$) , par un calcul analogue on aura , pour

$C_{n-1} = -1$, $C_{n-1} = 0$ et $C_{n-1} = 1$, la sortie toujours égale à -1 c'est à dire égale à C_n .

Enfin si $C_n = 0$

Pour $C_{n-1} = -1$, la sortie sera égale à -1

Pour $C_{n-1} = 0$, la sortie sera égale à 0

Pour $C_{n-1} = 1$, la sortie sera égale à 1

Donc si $C_n = 0$, la sortie sera égale à C_{n-1} .

2°) Circuits intégrés ternaires

Il existe sur le marché, actuellement , des circuits intégrés T.T.L en logique à trois états . Il s'agit toujours d'éléments binaires , fondamentalement, mais dotés en plus , d'un niveau de sortie indéterminé . L'état " off" correspondant à une impédance de sortie très élevée , ce qui permet la connection des sorties en OU cablé(qu'exclut la T.T L normale).

Principe:

On sait que l'étage de sortie d'un élément T.T.L est constitué par un montage dit en Totem pôle,et comprenant deux transistors (voir figure 11a)

cette configuration et celle de la porte NAND (non et) en logique positive.

$$A / B = \overline{A \cdot B}$$

B \ A	0	1
0	1	1
1	1	0

- Si les deux entrées du transistor multiemetteur sont 0 , 1 1 , 0 ou 0 , 0 ,il est saturé .

T_2 est donc bloqué, T_3 saturé, T_4 bloqué et nous aurons ensortie un niveau haut (1) en logique positive .

Si les deux entrées du transistor multiémetteur sont 1,1, il est saturé , T_2 sera bloqué , T_3 saturé et T_4 bloqué .

Nous aurons en sortie un niveau bas (0) (logique positive) c'est ce montage très pratique lorsque la charge exige un fort courant, qui interdit tote connexion des sorties en OU cablé.

Dans le montage en OU cablé , en effet , les sorties de plusieurs circuits intégrés sont réunies entre elles. Or, avec la T.T.L et si tous les circuits intégrés ne sont pas simultanément dans le même état, on aboutit à un court circuit de l'alimentation. C'est ce que montre le schéma de la figure $_{1\,TC}$ pour deux circuits uniquement.

Si les niveaux de sorties sont bas , donc si T_B et T_D sont conducteurs ou si les niveaux de sorties sont hauts avec T_A et T_C conducteurs tout est normal.

Mais si l'on a T_A et T_D conducteurs (ou T_B et T_C) , on court circuite le $+ V_{cc}$ à la masse et rien ne va plus.

Pour palier à cet inconvénient , " National semiconducteur " a pourvu ces circuits intégrés d'un système de bloquage des transistors du totem pôle: ce rôle est confié au transistor Q DE

La figure 11b, chargé de délivrer le courant de commande de T_3 et le bloquer à volonté .

On recoutr de plus en plus au montage en OU câblé , sous fotme de ligne omnibus . Non seulement , ce montage réduit les besoins en composants (en circuits intégrés) mais encore , il s'avère souvent indispensable , en particulier dans l'architecture des ordinateurs et leurs périphériques .

la figure 12 illustre ce point enmontrant l'organisation typique des terminaux d'un calculateur.

Analyse du schéma de la figure 11b

lorsque T_3 et T_4 sont bloqués , la sortie apparait à haute impédance et ne présente qu'un courant de fuite de l'ordre de 40 μA . Puisqu'un tel élément T.T.L fournit 5,2 mA à 2,4 V minimum à l'état 1 (et accepte 16mA à 0,2 V à l'état 0) , on comprend que'une seule porte T.T.L puisse être commandée par 128 éléments tri-état dont les sortiés sont reliées en OU câblé via une ligne omnibus .. ~~sortie~~.

Dans de cas , en effet , on aura par exemple, 127 portes bloquées qui consomment

$$127 \cdot 40\mu A = 5{,}08 \text{ mA}$$

une porte , la 128^e étant bloquée , elle fournit ; 5,2 mA

il reste donc

$$5{,}2 \text{ mA} - 5{,}08 \text{ mA} = 120 \mu A$$

T1bis

PORTES T.T.L.

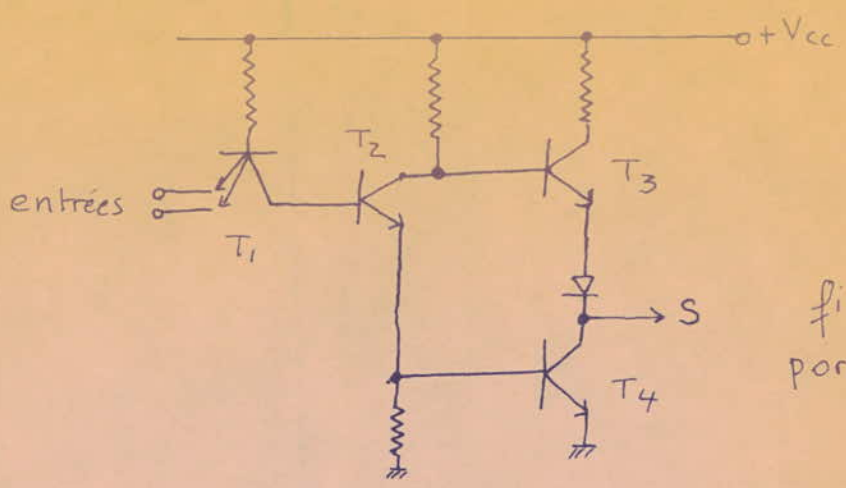


fig : 11 a
porte T.T.L classique
(NAND)

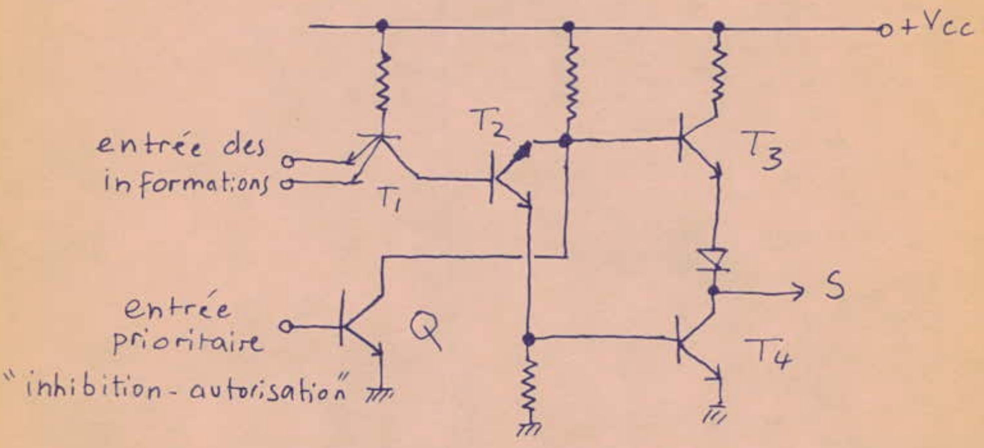


fig : 11 b
porte 3 états

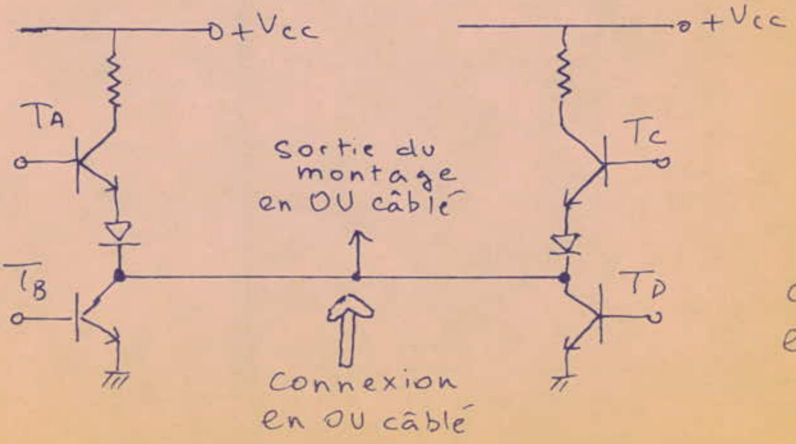


fig : 11 C
connexion
en OU câblé

or le courant de commande à l'entrée d'une porte T.T.L, à l'état haut est de 40 µA au maximum . Donc on disposera encore d'assez de courant pour commander trois portes !

D'après le schéma de la figure 11b, on voit que T_3 est commandée par un darlington , indispensable pour le niveau de courant élevé fournit par la sortie lorsque celle ci passe au niveayu haut.

Avantages de la logique tri-état :

En fait , la possibilité du montage en OU câblé n'est qu'une des conséquences de la logique tri-état , la plus évidente peut être , mais certainement pas toujourscelle qui se révèlera essentielle . A l'actif du nouveau schéma , il faut en effet porter la capacité de piloter des lignes longues. D'autres part , l'impédance de sortie à l'état haut est réduite , ce qui contribue à améliorer l'immunité au bruit d'un facteur de 10 .

La logique tri-état conserve cependant toutes lez caractéristiques propres à la T.T.L .

Soit maintenant le schéma de la figure :13
l'un des cicuits A , B , ou C étant bloqué , tous les autres doivent être dans le troisième état " indéterminé " à haute impédance de sortie . Le seul problème consiste donc à sélectionner le circuit à débloquer. A l'état stable , on ne risque

pas de court circuiter la V_{cc} à la masse ; mais lors des transitions , il faut impérativement éviter tout risque de court circuit .Pour ce faire , le temps de retour à l'état indéterminé "off " est toujours plus rapide que le temps de passage de cet état indéterminé "off" à l'état "on" (état logique 1 ou 0) Lorsque cela s'avère nécessaire , on peut même prévoir, un détecteur de coincidence ; une porte qui détecte deux zéros pour fournir un 1 en sortie et débloquer le circuit intégré tri-état correspondant . Ce montage (figure 12) est intéressant lors du multipléxage.

Les systèmes organisés autour des lignes omnibus utilisaient auparavant des circuits D.T.L ou T.T.L à collecteur ouvert , leur fréquence de fonctionnement était de l'ordre de 3 MHz au lieu de 20 MHz pour la T.T.L standard . Les circuits tri-états gardent les mêmes propriétès que les circuits T.T.L standard et leur sortie haute impédance permet de les connecter sur une ligne omnibus .

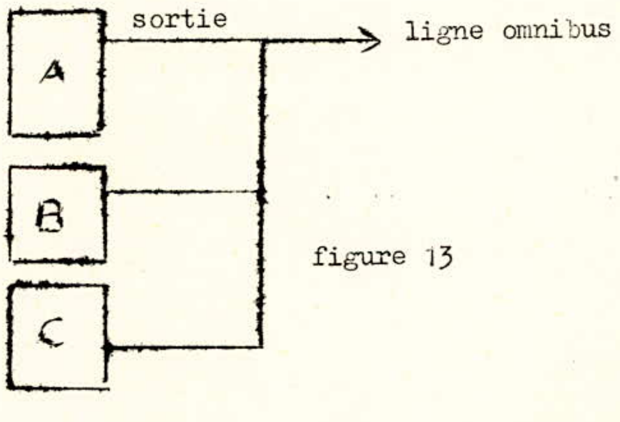


figure 13

ORGANISATION TYPIQUE DES PERIPHERIQUES D'ORDINATEURS et PRINCIPE de SELECTION d'un C.I.

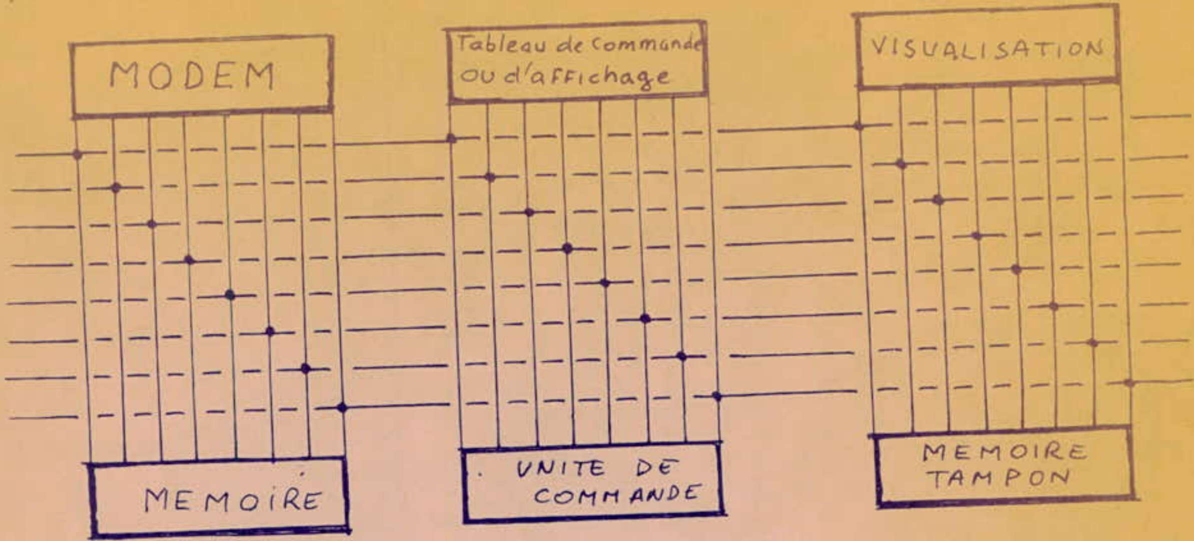


fig:11 organisation typique des peripheriques d'ordinateurs

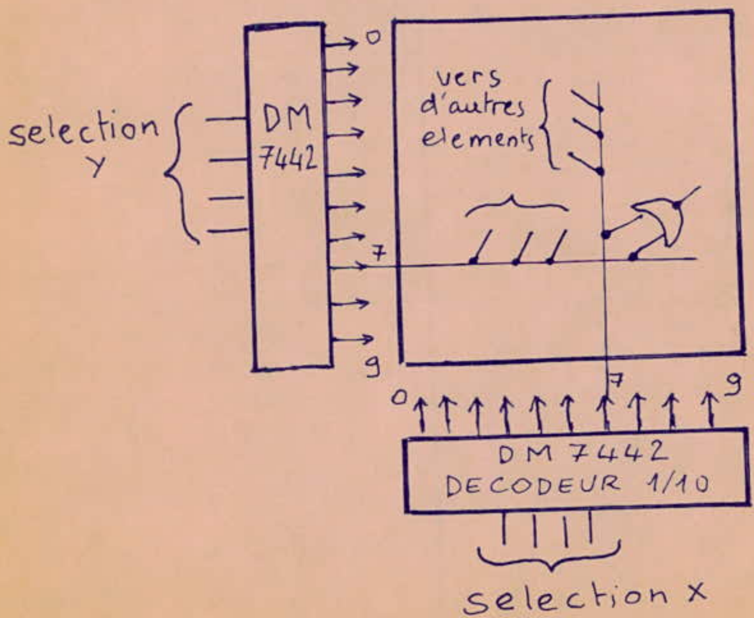
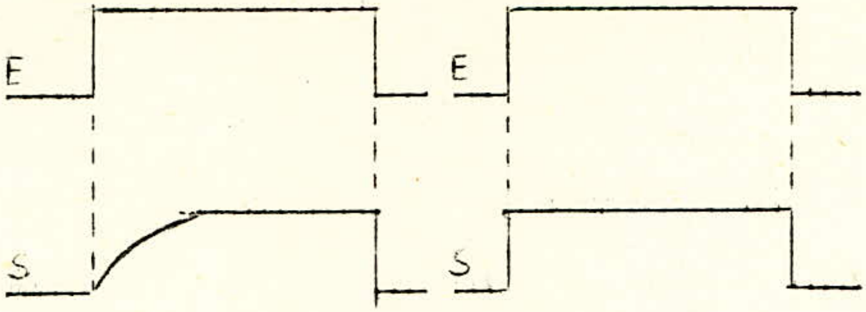
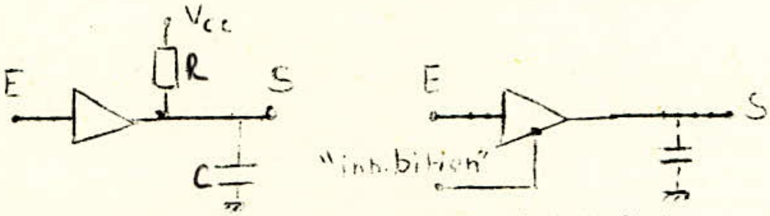


fig:12
Principe de selection d'un circuit integré

Retard dans les lignes omnibus .





Circuit à collecteur ouvert

circuit tri-état

La limitation de fréquence , sur les lignes omnibus utilisant des circuits à collecteur ouvert , est dûe au temps de charge de la capacité C à travers la résistance R . Cette constante de temps ajoute généralement plus de 100 ns au temps de transfert des informations . Dans les systèmes utilisant des circuits tri-états , la constante de temps à la charge est considérablement réduite puisque le circuit de sortie est un"totem pôle " qui peut fournir un courant important à la charge. Lorsque le circuit est à haute impédance , le courant de fuite du circuit de sortie est très faible, ce qui permet de connecter un grand nombre de portes sur la même ligne omnibus .

IV- REALISATION PRATIQUE

Nous nous proposons de réaliser à titre d'exemple , deux circuits ternaires fondamentaux

- la porte à seuil
- l'élément dual .

En effet ces éléments sont essentiels dans la construction d'ensemble complets tels que :

- additionneurs-soustracteurs
- comparateurs
- multiplicateurs etc ...

Deux technologies à transistors sont actuellement à l'étude

- la LCCC (logique complèmentaire à charge commune)
- la LTCR (logique ternaire à commutation rapide)

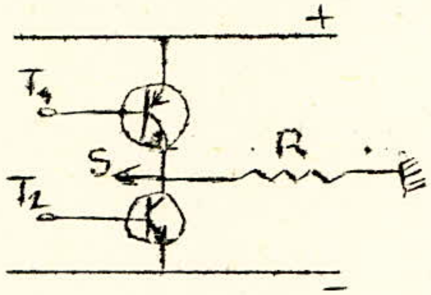
Un type unique de technologie ne peut répondre à toutes les qualités , souvent incompatibles , des circuits logiques:

- rapidité
- immunité au bruit.
- coût dans une optique intégrée
- adaptation (entrances , sortances)
- tention d'alimentation,consommation, compatibilité des circuits entre eux et avec les ensembles binaires existants etc...

Logique LCCC :

Elle doit son nom à l'étage de sortie commun à tous les circuits de cette technologie .Les trois niveaux logiques sont obtenus par les combinaisons des états de deux transistors

Niveau
- 0 : T_1 et T_2 bloqués
- − : T_1 bloqué , T_2 conducteur en limite de saturation
- + : T_1 conducteur en limite de saturation, T_2 bloqué

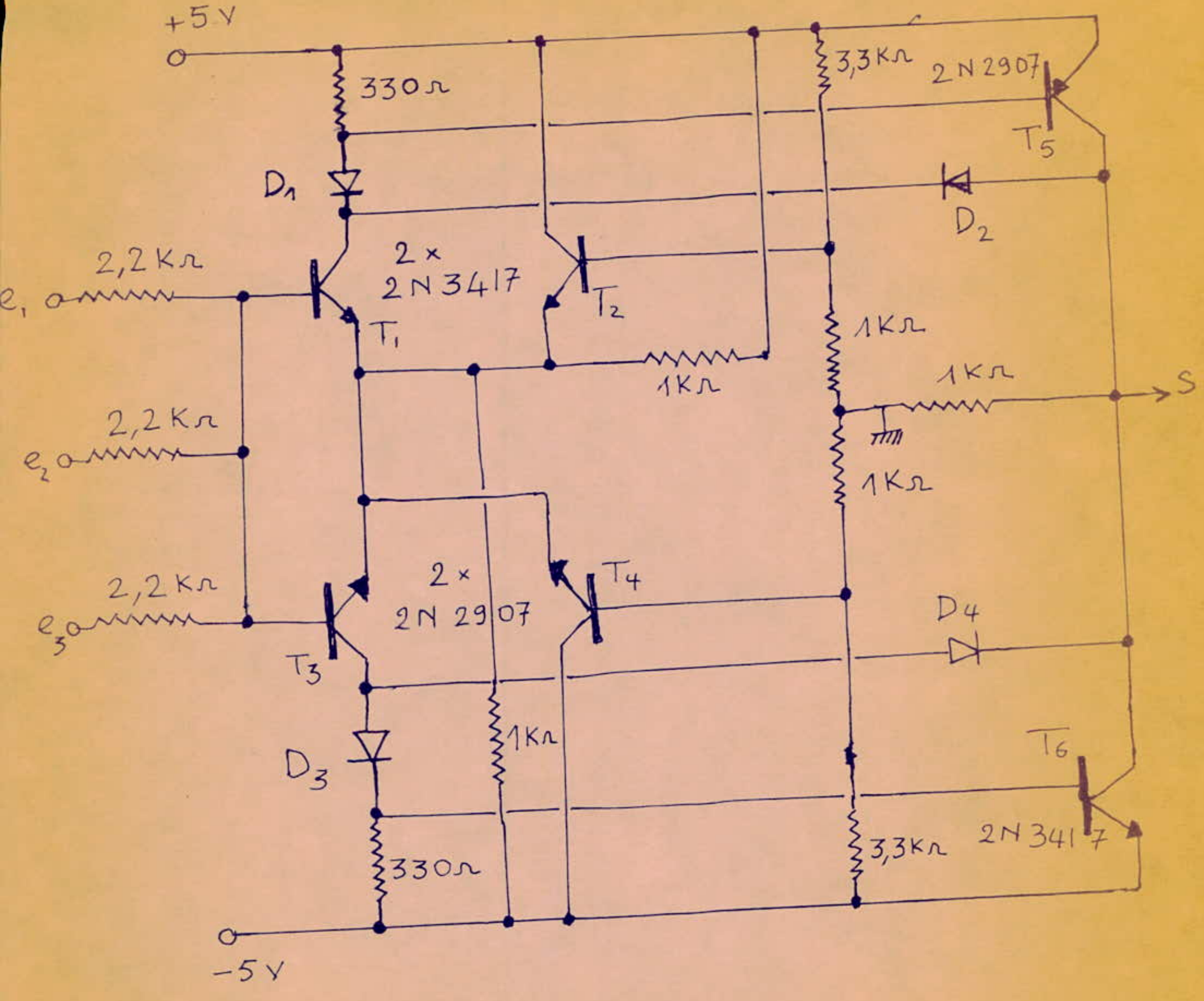


Caractéristiques générales :

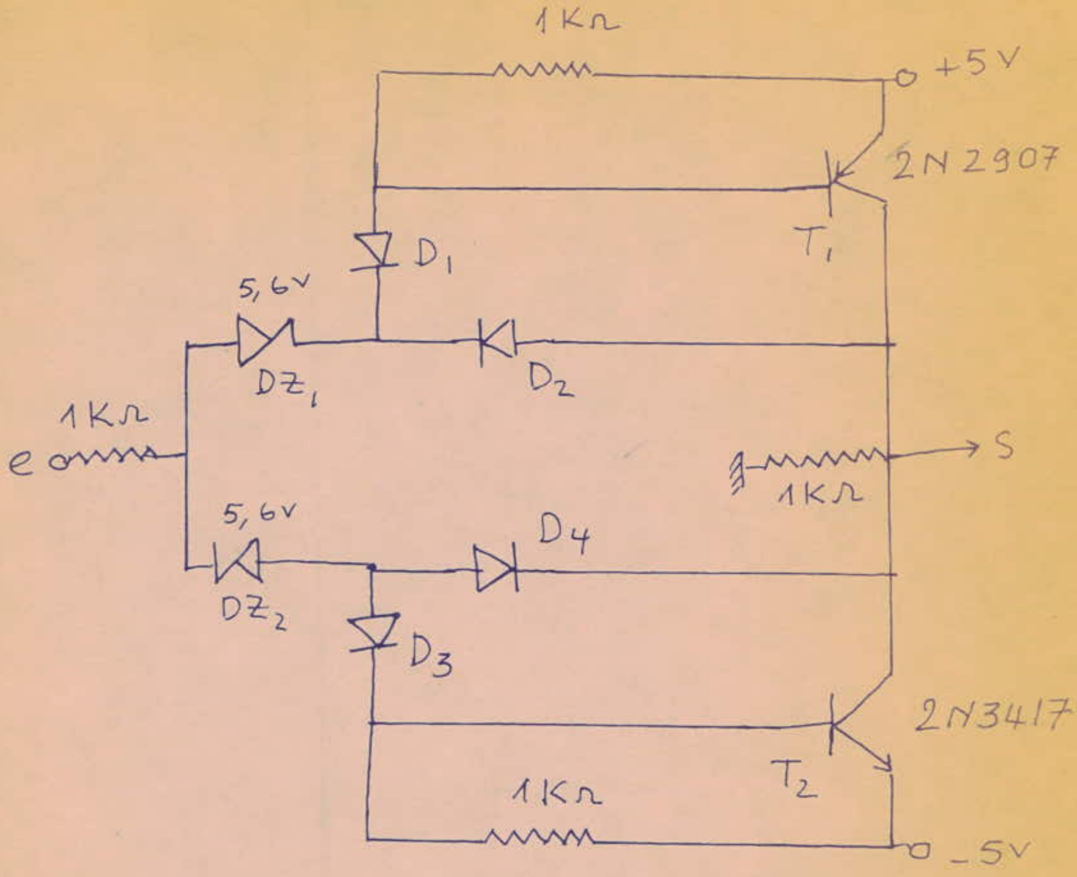
- fonctionnement en bloqué : les transistors sont conducteurs (utilisation d'un dispositif d'antisaturation : " clamping" à diodes sur l'étage de sortie).
- Caractéristiques de commutation moyennes: temps de passage entre deux états quelconques inférieur à 100n.s
- Tension d'alimentation: $\pm$ V avec V $\geqslant$ 3,5 v (V optimale = 5 v) avec la condition restrictive $|+V| = |-V|$ à 10 % près
- Dynamique des niveaux logiques :

pratiquement 2 . V ,en fait 2(V − Vsat)

- Utilisation possible dans une gamme de températures avec fonctionnement correct des transistors : jusqu'à 125 ° C



PORTE A SEUIL


1KΩ
+5V
2N2907
T1
D1
5,6V
DZ1
D2
1KΩ
e
S
1KΩ
5,6V
D4
DZ2
D3
2N3417
T2
1KΩ
-5V

DUAL

1 °) Portes à seuil

La somme des tensions d'entrée est effectuée par un pont à résistances, cette technologie limite l'entrance à trois (valeur suffisante dans le cas des additionneurs) ; les deux seuils sont créés par deux amplificateurs différentiels symétriques.

R_6 et R_7 constituent un diviseur de tension

$$R_6 = R_7 = 1\ K\Omega$$

donc au point de concourt des émetteurs de T_1 , T_2 , T_3 , T_4 on aura 0 v.

-la somme des tensions d'entrée étant effectuée par un pont de résistances, si cette somme est égale ou supérieure à + 5 v (état logique +1), le transistor T_1 (NPN) sera conducteur et le transistor T_3 (PNP) sera bloqué.

T_5 sera conducteur et T_6 bloqué (voir dual). La sortie apparaîtra donc à + 5 v (état logique +1)

-De même, si nous appliquons à l'entrée une tension inférieure ou égale à -5v (état logique -1), le transistor T_1 sera bloqué et le transistor T_3 sera conducteur.

T_5 sera bloqué et T_6 conducteur; la sortie sera alors à - 5 v état logique - 1)

- Si enfin , la somme des trois tensions d'entrée est égale à 0 v , les deux transistors T_1 et T_3 seront bloqués et également T_5 et T_6 la sortie sera à 0 v (état logique 0) .

2°) Eléments dual :

Les seuils sont créés à l'aide des chutes de tension dans deux diodes zéner , une seule d'entre elles conduisant dans les états + et - , les deux diodes étant bloquées dans l'état 0 (Vz =5,6 v pour V = 5 v) .

La commutation de ce circuit est rapide étant donné que les diodes zéner se comportent dynamiquement comme des capacités .

tension de seuil de la jonction BE de $T_1 \simeq$ 0,3 v

tension de seuil de la jonction BE de $T_2' \simeq$ 0,3 v

tension ~~zéner~~ seuil de la diode $D_1 \simeq$ 0,3 v

tension de ~~seuil~~ zener de la diode D_{z1} zener = 5,6 v

- Si on applique + 5 v à l'entrée (état logique + 1) , la diode zéner Dz_1 est passante , Dz_2 est bloquée.Le transistor T_1 est bloqué car c'est un PNP et la tension V_{BE} est positive .

La diode zéner Dz_2 est bloquée , le transistor T_2 est saturé car c'est un NPN , à la sortie on aura donc - 5 v (état logique (-1) .

Le montage étant symètrique, si on applique - 5 v à l'entrée la sortie apparaîtra à + 5 v (état logique + 1)

-Si on relie l'entrée à la masse (état logique0), les deux diodes zéner seront bloquées et les deux transistors le seront également , donc la sortie sera à la masse (état logique 0) .

IV- CONCLUSION

La logique ternaire est pratiquement accessible à tous , car elle n'est que la systèmatisation et la mise en forme du bon sens ou logique naturelle . En augmentant le nombre des valeurs que peuvent prendre les propositions , on obtient des logiques plurivalentes qui utilisent d'autres valeurs que le vrai et le faut.

Ainsi nous avons jusqu'à présent entendu le vrai et le faut comme une alternative , si on les envisage d'un point de vue épistémologique, la trivalence est considérée comme une abréviation de la combinaison de deux alternatives , l'incertain et le certain ,et , dans ce dernier cas, le certain comme vrai et le certian comme faut .

L'étude théorique a mis en évidence la plus grande souplesse de l'analyse directe dans l'élaboration des éléments d'un bloc de calcul sans utiliser uniquement un formalisme analogue à celui de l'algébre de Boole .

Les principales difficultées rencontrées lors de la construction d'un bloc de calcul strictement ternaire sont d'ordre technologique.

Les progrès technologiques réalisés dans le domaine des composants électroniques et des semi-conducteurs permettent la matérialisation d'opératuers logiques ternaires fiables .

La liste des circuits TTL à trois états s'accroit en permanence.

On peut penser que ce nouveau principe, qui aboutit en fait non seulement à étendre les possibilités de la TTL classique , mais encore à créer des modes nouveaux de travail, pourraient se révéler très riches en applications.

Les deux circuits présentés sont une première approche de cette question et ont pour but essentiel de montrer que des nouvelles techniques de microélectronique permettent d'obtenir des performances égales à celles descircuits binaires existants , tout en conservant lesavantages théoriques du ternaire .

BIBLIOGRAPHIE

Monographie et treillis de Boole

M. CARVALLO

LOgique à trois valeurs - logique à seuil

M. CARVALLO

REVUES :

- Computers
- Automatisme
- Microélectronique industrielle