



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
Ecole Nationale Polytechnique



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
(E.N.P)
Département D'Hydraulique

Projet de fin d'études

Pour l'obtention du titre d'ingénieur
d'Etat en hydraulique

MODELISATION 1D ET 2D DES
ECOULEMENTS EN RESEAUX
D'ASSAINISSEMENT

Présenté par :

KHOUALFIA Samir NECIB Abdelbasset

Soutenance le 24/06/2013 devant le jury compose de :

Présidente : Dr.BENMAMAR Saàdia

Promoteur : Mr.KUIDER Khaled

Examineurs : Mr.BENZIADA Salim

Mr .MEZALI Farouk

PROMOTION : JUIN 2013

DEDICACES

Je dédie ce travail :

- Ma chère mère, mon petit ange, la lumière de mes yeux, l'être que j'aime et que je chéris plus que tout au monde, celle qui a fait de moi ce que je suis.
- Mon père. « *la miséricorde de Dieu* »
- Mes frères.
- Mes sœurs.
- A toute ma famille.
- A tous mes amis que j'ai connus.
- A mon binôme Samir et sa famille.

Merci A Vous Tous

BASSET

Dédicaces

A mes chers parents,

A qui je dois ce que je suis,

*Qu'ils trouvent dans ce site, le fruit de leurs
sacrifices consentis pour mon éducation, et
l'expression de mon amour et de ma gratitude pour
la bienveillance avec laquelle ils m'ont toujours
entouré. Que Dieu leur préserve longue vie et
bonne santé.*

A mes sœurs,

A mes frères,

A toute ma famille,

A tous mes amis.

SAMIR.K

ملخص

الغرض من هذا العمل تقديم أسس رياضية للحل العددي لمعادلة سان فينانت ذات بعد و بعدين بواسطة طريقة الفروق المنتهية والحجوم المنتهية .

هذا الحل يسمح بإنشاء نهج محاكاة لشبكة الصرف الصحي يعتمد على نموذج رياضي.

نبدأ هذا العمل بالتذكير حول المناهج الرياضية المختلفة التي تنظم السيلان في شبكات الصرف الصحي , في القسم الثاني , نعمل لإنشاء نموذج رياضي لسيلان السطوح الحرة ذات الأعماق الصغيرة والتي تمثل عموماً بمعادلات تفاضلية , مع فرضيات تبسيطية , في القسم الثالث نناقش تجزئة معادلة سان فينانت في الزمان والمكان , وأخيراً نطبق النموذج على أنبوب مستطيل .

كلمات مفتاحية

محاكات , النمذجة , باري سان فينانت , السيلان , التجزئة

Résumé

L'objet de ce travail est de présenter les fondements mathématique de la résolution numérique des équation de barré saint venant a un et deux dimensions par méthode des différences finies et volume fini.

Cette résolution permet de réaliser une approche de simulation de réseaux d'assainissement basée sur la modélisation mathématique.

Dans ce travail, nous commençons par rappeler les différentes approches mathématiques qui régissent l'écoulement dans les réseaux d'égouts, dans une seconde partie, nous développons un modèle mathématique de l'écoulement dans la surface libre peu profonde est généralement représenté par des équations différentielles avec l'hypothèse simplificatrice dans une troisième partie, nous discutons de la discrétisation des équations BSV dans le temps et l'espace, enfin, une petite application du modèle sur un tube rectangulaire.

Mots clés

Simulation, Modélisation, Barré Saint Venant, Ecoulement, Discrétisation

Abstract

The purpose of this work is to present the mathematical foundations of the numerical solution of equation Barré Saint Venant a one and two dimensional by finite difference and finite volume. This resolution allows a simulation approach sewerage based on mathematical modeling.

In this work, we begin by recalling the different mathematical approaches that govern the flow in the sewer, in a second part, we develop a mathematical model of the flow in the shallow free surface is generally e Represented by differential equations with the simplifying assumption in the third part, we discuss the discretization of equations BSV in time and space, finally, a small application of the model on a rectangular tube.

Keywords

Simulation, Modeling, Barré Saint Venant, Flow, Discretization

Remerciements :

Merci à notre bon Dieu, notre guide, notre force, notre bonheur, et la raison de notre existante. C'est lui qui nous a fait comprendre le but de cette vie, et qui nous a donné le pouvoir d'aimer les gens et d'apprécier les choses. Merci d'être là dans les moments les plus difficiles.

Je tiens à remercier très chaleureusement à Mlle BANMAMAR Saâdia (Maitre de conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique) qui m'a accompagné tout au long de sa réalisation avec beaucoup d'intérêt et de disponibilité.

A terme de ce projet de fin d'étude je tiens à exprimer mes gratitude et remerciements à Mr KOUIDER Khaled de m'avoir encadré ainsi que pour sa rigueur, ses critiques et conseils rationalistes et encouragements pour effectuer ce travail. Je le remercie encore de m'avoir appris comment faire de la douleur de la recherche un sentiment de joie et de plaisir.

J'adresse mes vifs remerciements à membre de jury, pour avoir accepté de juger ce travail.

Table des matières

1	Modèles Mathématiques Régissant Les Écoulements En Réseaux D'égout	2
1.1	Introduction	2
1.2	Réseaux d'assainissement	2
1.2.1	Définition	2
1.2.2	Structure d'un réseau d'assainissement	3
1.3	Modélisation des écoulements à surface libre	4
1.3.1	Définition	4
1.3.2	Présentation et classification des différents modèles	4
1.4	Conclusion	10
2	Description des équations fondamentales des écoulements a surface libre (BSV)	11
2.1	Introduction	11
2.2	Equations base	12
2.2.1	Établissement du système d'équations base	12
2.3	Équations de Saint Venant (modèle bidimensionnel)	13
2.3.1	Hypothèses	13
2.3.2	Etablissement du système de Barré de Saint-Venant 2-D	14
2.3.3	Modèles simplifiés	16
2.3.4	Forme conservative	17
2.3.5	Formule de diffusion turbulente utilisée	18
2.4	Équations de Saint Venant (modèle unidimensionnel)	18
2.4.1	Hypothèses	18
2.4.2	Etablissement du système de Barré de Saint-Venant 1-D	18
2.4.3	Modèles simplifiés	23
2.5	Conclusions	24
3	Discrétisation des équation de BSV	25
3.1	Introduction	25
3.2	Principe de méthode des différences finies	26
3.3	Schémas par différences finies	28
3.3.1	Schéma numérique explicite	29
3.3.2	Schéma numérique implicite	29
3.3.3	Avantages et inconvénients des deux types de schémas	30
3.3.4	Consistance	30
3.3.5	La Stabilité	31
3.3.6	La Convergence	31
3.4	Résolution du système de BSV 1-D par un schéma explicite	32
3.4.1	Schéma explicite a deux (2) pas centré suivant x	33
3.4.2	Schéma explicite centré suivant x	34

3.5	Résolution du système de BSV 2-D par un schéma aux différences finies explicites	36
3.5.1	Discrétisation du système de BSV 2-D schéma explicite	37
3.5.2	Stabilité des schémas aux différences finies :	40
3.6	Principe de la méthode des volumes finis	41
3.6.1	Pour un problème a une dimension	41
3.6.2	Pour un problème a deux dimensions	42
3.7	Discrétisation des équations de BSV 1-D	44
3.8	Discrétisation des équations de BSV 2-D :	47
3.9	Conclusion	54
4	Résultats de simulation	55
4.1	Introduction	55
4.2	Méthodes de résolution	55
4.3	Données d'entrée du modèle	56
4.3.1	Présentation de la zone d'étude	56
4.4	Résultats de simulation	60
4.4.1	Méthode des différences finies-Schéma Explicite Centré Suivant x	61
4.4.2	Méthode des différences finies-schéma explicite à deux pas centré suivant x	63
4.4.3	Méthode des volumes finis-schéma différence centré	65
4.5	Calage théorique	66
4.6	Interprétation	67
4.7	Conclusion	67
4.8	Conclusion générale	68

Table des figures

1.1	Structure d'un réseau d'assainissement	3
1.2	Principe de fonctionnement d'un modèle conceptuel	8
1.3	Principe du modèle Muskingum	9
1.4	Signification physique du paramètre K du modèle Muskingum	10
2.1	Choix des coordonnées	13
2.2	Conventions du modèle bidimensionnel	15
2.3	Schéma de définition pour les équations de saint venant 1-D.	19
2.4	Forces exercées par le fluide sur la paroi et réaction de la paroi sur le fluide.	22
3.1	Schéma de type explicite	29
3.2	Schéma de type implicite	30
3.3	Schéma de résolution explicite a deux (2) pas centré suivant x	33
3.4	Schéma de résolution explicite centré suivant x	34
3.5	Schéma de résolution explicite 2-D	36
3.6	Maillage a une dimension de l'espace	42
3.7	Maillage a deux dimensions	43
4.1	Zone d'étude-collecteur Eucalyptus	56
4.2	Point de mesure-collecteur Eucalyptus	57
4.3	Section de mesure	57
4.4	Données d'entrée de la pluie du 03/11/08	58
4.5	Données d'entrée de la pluie du 03/11/08	58
4.6	Données d'entrée de la pluie du 03/11/08	59
4.7	Evénement pluvieux utilisé de la pluie du 03/11/2008	59
4.8	Evénement pluvieux utilisé de la pluie du 03/11/2008	60
4.9	Evénement pluvieux utilisé de la pluie du 03/11/2008	60
4.10	Simulation de la hauteur en aval	61
4.11	Simulation de la vitesse en aval	61
4.12	Simulation de la hauteur en fonction de la longueur	62
4.13	Simulation de la vitesse en fonction de la longueur	62
4.14	Simulation de la hauteur	63
4.15	Simulation de la vitesse	63
4.16	Simulation de la hauteur en fonction de la longueur	64
4.17	Simulation de la vitesse en fonction de la longueur	64
4.18	Simulation de la hauteur en aval	65
4.19	Simulation de la vitesse en aval	65

Liste des tableaux

3.1	Quelques formules d'approximation pour un espace 1-D	28
3.2	Coefficients de pondération des schémas aux différences finies	29
4.1	Rapport de volumes.	66
4.2	L'erreur sur le volume.	66

LISTE DES ABRÉVIATIONS

Symbole	Signification	Unité
BSV	Barrée de Saint Venant	(-)
C	La célérité de l'onde	(-)
C_f	Coefficient de frottement à la paroi	(-)
Ch	Coefficient de Chézy	($m^{1/2}/s$)
C_s	La célérité de Kleitz-Seddon	(m/s)
C_w	Coefficient de traînée du vent	(-)
D	Coefficient de diffusion de l'onde	(-)
EP	Eaux pluviales	(-)
EU	Eaux usées	(-)
f	Fonction quelconque	(-)
F	Nombre de Froude	(-)
F_c	Force de Coriolis	(-)
F_x ou F_y	Forces massiques exercées sur une particule d'eau selon x ou y	(N)
g	Accélération de la pesanteur	(m^2/s)
H	Profondeur totale	(m)
h	Hauteur d'eau par rapport au radier ou au fond	(m)
h_j^i	Hauteur d'eau au pas d'espace $j\Delta x$ et au pas de temps $i\Delta t$	(m)
$h_{j,k}^i$	Hauteur d'eau au pas d'espace ($j\Delta x, k\Delta y$) et au pas de temps $i\Delta t$	(m)
i	Indice de pas de temps pour les grandeurs hydrauliques	(-)
j	Indice de pas d'espace pour les grandeurs hydrauliques	(-)
K	Paramètre du modèle Muskingum	(s)
Kms	Coefficient de Manning-Strickler	($m^{1/3}/s$)
N	Nombre total de pas d'espace sur un tronçon	(-)
$Patm$	Pression atmosphérique	(Pa)
P^*	Pression absolue	(Pa)
q	Débit par unité de largeur	(m^2/s)
Q	Débit	(m^3/s)
Q_e	Débit d'entrée d'un tronçon	(m^3/s)
Q_s	Débit de sortie d'un tronçon	(m^3/s)
Rh	Rayon hydraulique	(m)
R_h	Rayon hydraulique	(m)
R_p	La réaction du fond sur le fluide a une composante horizontale	(-)
S	Section mouillée	(m)
(S_f, J)	Perte de charge	(m/m)

Symbole	Signification	Unité
(S_0, I)	Pentes du canal	(-)
S_{fx}	Perte de charge suivant x	(m/m)
S_{fy}	Perte de charge suivant y	(m/m)
t	Temps	(s)
T_0	Le décalage temporel	(s)
t_p	Temps de mesure des débits d'entrée et de sortie	(s)
u	Vitesse moyenne de l'écoulement	(m/s)
$u_{j,k}^i, v_{j,k}^i$	Vitesse d'écoulement au pas d'espace $(j\Delta x, k\Delta y)$ et au pas de temps $i\Delta t$	(m/s)
U_{max}	Vitesse maximum	(m/s)
u_j^i, v_j^i	Vitesse d'écoulement au pas d'espace $j\Delta x$ et au pas de temps $i\Delta t$	(m/s)
V	Vitesse du courant	(m)
V_s	Volume stocké	(m^3)
W	Composante verticale de la vitesse	(m/s)
W_x, W_y	Composantes du vecteur vitesse du vent	(m/s)
x, y, z	Les coordonnées cartésiennes	(m)
α	Coefficient de pondération dans les modèles type Muskingum	(-)
α_j	Coefficients d'implicitation dans les schémas aux différences finies	(-)
χ	Périmètre mouillé	(m)
$\Delta x, \Delta y$	Pas d'espace	(m)
Δt	Pas de temps	(s)
δ_{ij}	Symbole de Kronecke	(-)
η	Coefficient de rugosité de Manning	(-)
\bar{U}	La vitesse moyenne pondérée	(m/s)
γ	Coefficient de Bazin qui dépend du matériau	(-)
ν_t	Coefficient de viscosité turbulente, coefficient de diffusion	(-)
ρ	Masse spécifique de l'eau	($Kg.s/m^3$)
ρ_a	Masse spécifique de l'air	($Kg.s/m^3$)
τ_{ij}	Contraintes de Reynolds	(-)
φ	L'angle de l'inclination du fond du chenal par rapport à l'horizontale	(-)
ξ, δ et β	Coefficients numériques	(-)

Introduction générale

Depuis une quinzaine d'années, de nombreux efforts de recherche ont amélioré la compréhension du cycle de l'eau en milieu urbain. Ils ont abouti au développement de nombreux outils d'analyse ainsi qu'à la réalisation et à l'amélioration de dispositifs de mesure et de contrôle de la quantité et de la qualité des flux hydrauliques transitant dans les réseaux d'assainissement. Cela nécessite la disposition des modèles adéquats pour une bonne compréhension du comportement du réseau, notamment en temps de crue ce qui oriente les interventions et les investissements.

Aujourd'hui, un très grand nombre de problèmes de la physique mathématique peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles. La quasi totalité des écoulements non permanents sont modélisés donc, par des équations hyperboliques et le plus souvent non linéaires, une résolution analytique est inenvisageable, ainsi, la recherche de la solution exacte est presque impensable.

Dans ce contexte, le modèle de Barré Saint Venant est un système d'équation aux dérivées partielles de nature hyperbolique non linéaire, dont la solution analytique n'existe pas, de ce fait, la seule alternative reste l'utilisation des méthodes numériques.

L'objectif de ce mémoire est de réaliser une approche de simulation des écoulements en réseaux d'assainissement basée sur la modélisation, dans le but est de résoudre les équations de BSV uni et bidimensionnelle (1-D et 2-D), par deux méthodes numériques différentes, la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis.

Notre mémoire est subdivisé en quatre chapitres :

Nous commencerons d'abord dans le premier chapitre par un rappel sur les différents modèles mathématiques régissant les écoulements en réseaux d'égout, et leurs approches mobilisatrices.

Ensuite, nous présenterons dans le deuxième chapitre la description des équations fondamentales des écoulements à surface libre BSV (1-D et 2-D).

Dans le troisième chapitre, nous allons présenter la discrétisation des équation de Barré Saint Venant, dans le but de les résoudre en utilisant tout d'abord la méthode des Différence finies et ensuite la méthode des volumes finis.

Dans Le quatrième chapitre sont présentés, les résultats de simulation de l'écoulement d'un tronçon de collecteur.

En fin, une conclusion sur tout le travail est faite.

Chapitre 1

Modèles Mathématiques Régissant Les Écoulements En Réseaux D'égout

1.1 Introduction

L'évaluation des capacités de transit des réseaux d'assainissement est une démarche très importante qui permet au gestionnaire du réseau de disposer d'outils fiables pour simuler le comportement du réseau par temps de pluie cela nécessite également la disposition de modèles adéquats adoptés aux écoulements dans le réseau d'égout.

Nous allons présenter dans ce chapitre les différents modèles régissant les écoulement en réseau d'égout.

1.2 Réseaux d'assainissement

1.2.1 Définition

Les réseaux d'assainissement ont pour fonction principale d'acheminer des eaux de pluies et des eaux d'origine domestique vers une usine de traitement ou un milieu récepteur (fleuve, mer, rivière, etc.).

On distingue trois types de réseaux. Le premier est connu sous le nom de réseau unitaire, le deuxième sous le nom de réseau pseudo-séparatif et le troisième sous le nom de réseau séparatif. Selon les cas, ces réseaux acheminent séparément ou non les eaux de pluie et les

eaux sanitaires. L'idée de mettre en place des réseaux séparatifs vient du fait que ces derniers peuvent pallier les problèmes de capacité de traitement des stations d'épuration, en acheminant vers ces installations seulement les eaux usées, considérées plus contaminées que les eaux de pluie [El Aboudi, 2000].

1.2.2 Structure d'un réseau d'assainissement

Dans un réseau d'assainissement unitaire, les collecteurs (conduites d'égout) permettent de recueillir les eaux de pluie des surfaces de captage ainsi que les eaux d'origine domestique. Ensuite, les eaux de ces collecteurs sont dirigées vers les stations de traitement des eaux usées par l'intermédiaire des intercepteurs avant d'être évacuées dans les cours d'eau, comme illustré à la (figure 1.1). Ces intercepteurs sont connectés à des ouvrages de régulation à leurs jonctions avec les collecteurs.

Les ouvrages de régulation ont pour rôle l'acheminement de l'excédent des eaux des collecteurs vers le milieu naturel. On parle alors de déversement [El Aboudi, 2000].

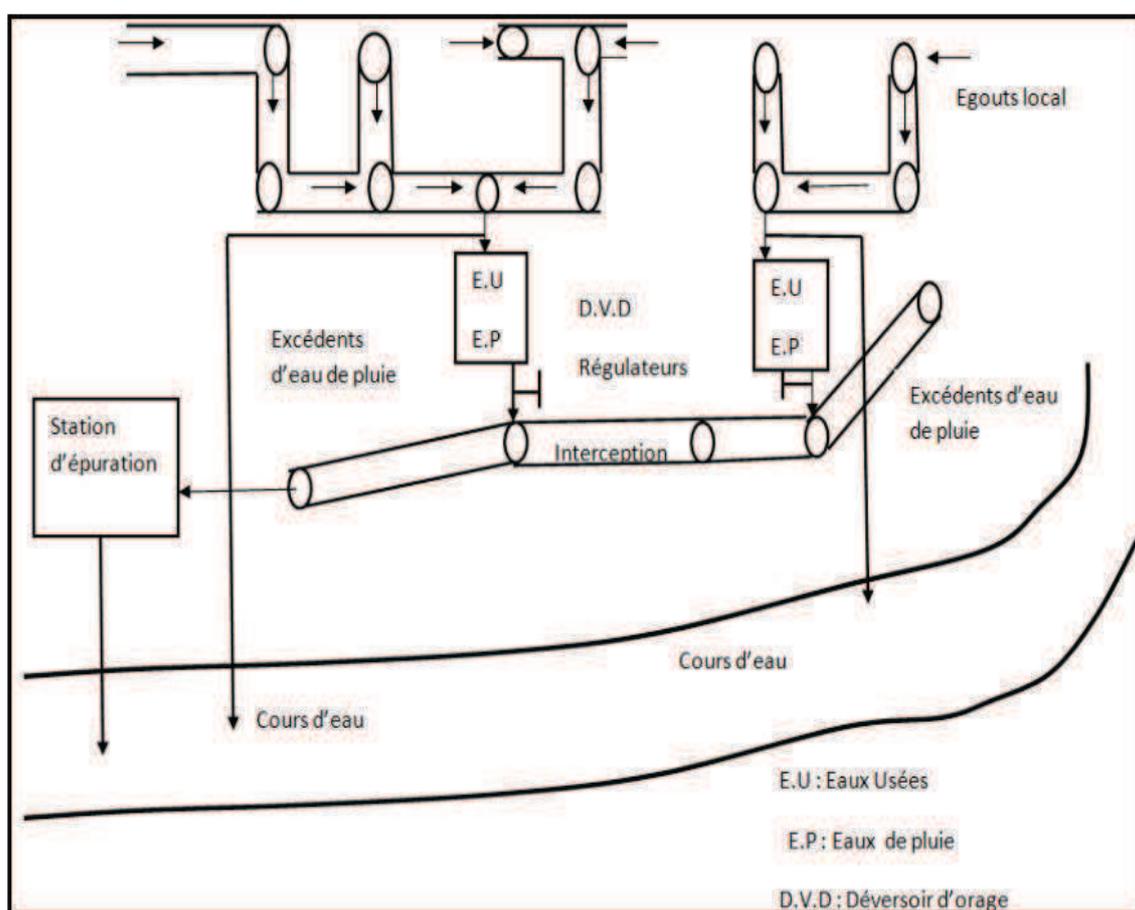


Figure 1.1 – Structure d'un réseau d'assainissement

1.3 Modélisation des écoulements à surface libre

1.3.1 Définition

La modélisation est une représentation mathématique simplifiée d'un phénomène physique dans le but de comprendre son fonctionnement.

En assainissement urbain, la modélisation est une schématisation avec une description des réseaux dans un logiciel dans le but de s'approcher au mieux de la réalité des phénomènes hydrologiques et hydrauliques qui se produisent en temps de pluie depuis le ruissellement jusqu'à l'évacuation des eaux. Cela permet bien évidemment au gestionnaire du réseau de mettre en place des plans d'action pour lutter contre les inondations et éviter les déversements.

1.3.2 Présentation et classification des différents modèles

Pour décrire la réalité complexe de l'hydraulique en réseau d'assainissement, un important effort de développement des modèles mathématiques a été réalisé depuis trente ans. Cet effort a été grandement favorisé par le développement des moyens informatiques.

Dans ce contexte, nous citerons ci-après les différentes approches modélisatrices et les différentes étapes à suivre. En effet, les modèles mathématiques, d'une façon très générale, sont constitués :

- d'un ensemble de variables, choisies pour représenter l'objet étudié
- d'un ensemble de relations mathématiques entre ces variables, choisies, pour représenter son fonctionnement.

Ces relations, qui doivent permettre de calculer les variables de sortie en fonction des variables d'entrée, font aussi intervenir d'autres paramètres. Cette imitation recouvre deux fonctions essentielles, complémentaires et indispensables.

- l'une de représentation simplifiée de la réalité, perçue d'un certain point de vue par le modélisateur, à travers un filtre conceptuel : un modèle est donc une interprétation et non simple reproduction,
- l'autre, d'instrument d'étude de cette réalité, conçu pour répondre à un certain objectif guidant l'ensemble des choix faits au cours de la modélisation : un modèle est donc aussi une représentation orientée et sélective.

D'où le caractère doublement relatif d'un modèle, qui dépend tout à la fois de la justesse des conceptions et hypothèses sur lesquelles il repose et de l'objectif poursuivi. Ainsi, il est nécessaire, bien que cela soit trop souvent oublié, d'expliciter clairement les objectifs poursuivis, les choix, hypothèses et approximations de l'outil, et enfin définir, si c'est possible, les limites de son domaine de validité et donc définir son champ d'application [Zug & Vazquez, 2006].

En général, on distingue trois grands types de modèles : les modèles déterministes ou mécanistes, les modèles statistiques et les modèles conceptuels.

1.3.2.1 Les modèles mécanistes

La famille des modèles mathématiques issus de la mécanique de fluide s'appelle les modèles mécanistes. L'approche de Saint-Venant est une approche que l'on peut qualifier de "particulaire" dans la mesure où les conditions globales d'écoulement sont calculées par intégration du

mouvement des parties élémentaires du fluide. Le mouvement de chaque tranche élémentaire de liquide est décrit en fonction des lois de conservation de la physique.

1.3.1.1.1 Les modèles mécanistes complets

Les modèles intégrant le système complet des équations de Saint-Venant sont généralement appelés "modèles complets". Les équations de Saint-Venant peuvent s'écrire sous la forme [Pochat, 1980] :

Équation de continuité

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = q \quad (1.1)$$

Équation dynamique

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial V}{\partial x} = g(I - J) + (\varepsilon - 1)q \frac{V}{S} \quad (1.2)$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

- (1) et (2) sont les termes d'inertie
- (3) est le terme de pression ou de pente de la surface libre
- (4) est le terme de gravité
- (5) est le terme contenant les pertes de charge par frottements.
- (6) est le terme d'inertie des apports latéraux

$\varepsilon = 0$ si le débit latéral q est entrant, $\varepsilon = 1$ s'il est sortant, S'il n'y a pas d'apports latéraux, $q = 0$

L'équation de continuité, traduit la conservation des volumes transités. tandis que l'équation dynamique, traduit la conservation de l'énergie ou ,en d'autre termes la conservation de la quantité de mouvement si les variables du système sont dérivables.

Les hypothèses fondamentales sous lesquelles les équations de Saint-Venant sont vérifiées sont les hypothèses des écoulements filaires dits graduellement variés. Ces hypothèses peuvent se résumer ainsi :

1. Le mouvement du fluide est considéré comme unidimensionnel et on suppose négligeables les effets d'une éventuelle différence de niveau dans une section mouillée ;
2. La surface du fluide est graduellement variable, ce qui est équivalent à dire que la distribution de pression sur une verticale est hydrostatique, et que l'accélération verticale est négligeable ;
3. La distribution des vitesses sur une section mouillée est supposée uniforme (écoulement par tranches) ;
4. Les pertes par frottement dans les écoulements non permanents ne sont pas différentes des pertes de charge dans les écoulements permanents. Elles peuvent être réduites au seul paramètre J ;
5. La pente moyenne du fond est suffisamment faible pour qu'on puisse prendre $\sin \alpha = \tan \alpha = \alpha$, où α est l'angle entre le fond et l'horizontal ;
6. La masse volumique du fluide est constante et le fluide est incompressible.

1.3.2.1.2 Les modèles mécanistes simplifiés

En raison de la complexité des équations complètes de Saint-Venant, leur résolution n'est possible que depuis l'existence de gros ordinateurs, c'est-à-dire, à peine un quart de siècle, des simplifications peuvent être apportées aux équations de BSV selon l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation dynamique.

La théorie de la propagation cinématique des ondes de crue peut être déduite du système de Saint-Venant dont quelques termes des équations ont été éliminés. Nous allons citer les modèles mathématiques que l'on peut construire à partir des équations de Saint-Venant pour décrire les phénomènes de crue. La référence aux équations de Saint-Venant pour l'étude des modèles mécanistes simplifiés présente plusieurs avantages :

- donner une base mathématique rigoureuse ;
- définir précisément les hypothèses sous-jacentes à chacune des approximations nécessaires à l'élaboration de ces modèles ;
- définir précisément les conditions aux limites des modèles.

De plus, cette approche permet de bien définir le contenu des équations de Saint-Venant qui tiennent compte à la fois des phénomènes dynamiques et cinématiques dans le calcul des écoulements. En d'autres termes, les équations de Saint-Venant permettent de simuler à la fois les phénomènes inertiels et les phénomènes liés au frottement [**Kovacs, 1988**].

Les ordres de grandeur relatifs des différents termes des équations de Saint-Venant dépendent des caractéristiques géométriques et des conditions aux limites.

L'équation de continuité ne contient que deux termes. En régime non-permanent, aucune des deux dérivées partielles du premier membre ne peut être nulle ou négligeable. Cette équation ne peut être simplifiée.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation dynamique) contient cinq termes et peut conduire à un assez grand nombre de simplifications. En effet, il est rare que les cinq termes de cette équation soient tous du même ordre de grandeur.

Ceci explique que les équations de Saint-Venant ont essentiellement conduit à deux (2) catégories des modèles mécanistes simplifiés :

- les modèles à inertie prépondérante et frottements négligeables appelés encore modèles dynamiques. Pour la construction de ces modèles, les termes de frottements et de pente du fond (termes (4) et (5) de l'équation dynamique) sont négligés ;
- les modèles à frottements prépondérants où les termes d'inertie (termes (1) et (2) de l'équation dynamique) sont négligés. Ils regroupent :
 - les modèles diffusants (termes d'inertie (1) et (2) négligés) ;
 - les modèles cinématiques (termes (1), (2) et (3) négligés) ;

A. Modèles de l'onde diffusante

Les équations de départ du modèle de crue diffusante sont les équations de Saint-Venant où les termes d'inertie $\partial V/\partial t$ et $V \cdot \partial V/\partial x$ ont été négligés.

Le système de base du modèle de crue diffusante est donc, lorsqu'il n'y a pas d'apports latéraux :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} = (I - J) \end{cases} \quad (1.3)$$

Ce système est valable sous les mêmes hypothèses que celui de Saint-Venant avec en plus l'hypothèse que les termes d'inertie sont négligeables devant les autres termes de l'équation dynamique.

B. Modèles de l'onde cinématique

Le système de départ des modèles cinématiques est, lorsqu'il n'y a pas d'apports latéraux :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \\ I = J \end{cases} \quad (1.4)$$

L'équation de continuité est prise sous sa forme générale. En revanche, on fait l'hypothèse que les termes d'inertie (1) et (2) et de pression (3) de l'équation dynamique du système de Saint-Venant sont négligeables vis-à-vis des forces de gravité et de frottement.

Il ne reste en fait plus de termes dynamiques. On néglige les forces qui ont causé le mouvement, d'où le nom "modèle cinématique". Le mouvement de l'onde est entièrement décrit par l'équation de continuité puisque l'équation dynamique se réduit à $I = J$ comme en régime permanent [Hug, 1975].

1.3.2.2 Les modèles conceptuels

Face à la lourdeur et à la complexité des modèles mécanistes dérivés de l'hydrodynamique, de nombreux auteurs ont développé des modèles plus simples généralement dérivés ou rattachés à la dynamique des systèmes et adaptés aux phénomènes concernant l'hydrologie urbaine. Dans ce type de modèles, il ne s'agit plus de décrire le détail des phénomènes physiques en jeu, mais la transformation d'un hydrogramme d'entrée par un système, en l'occurrence un tronçon de collecteur, en un hydrogramme de sortie [Bertrand & Krajewski, 2006].

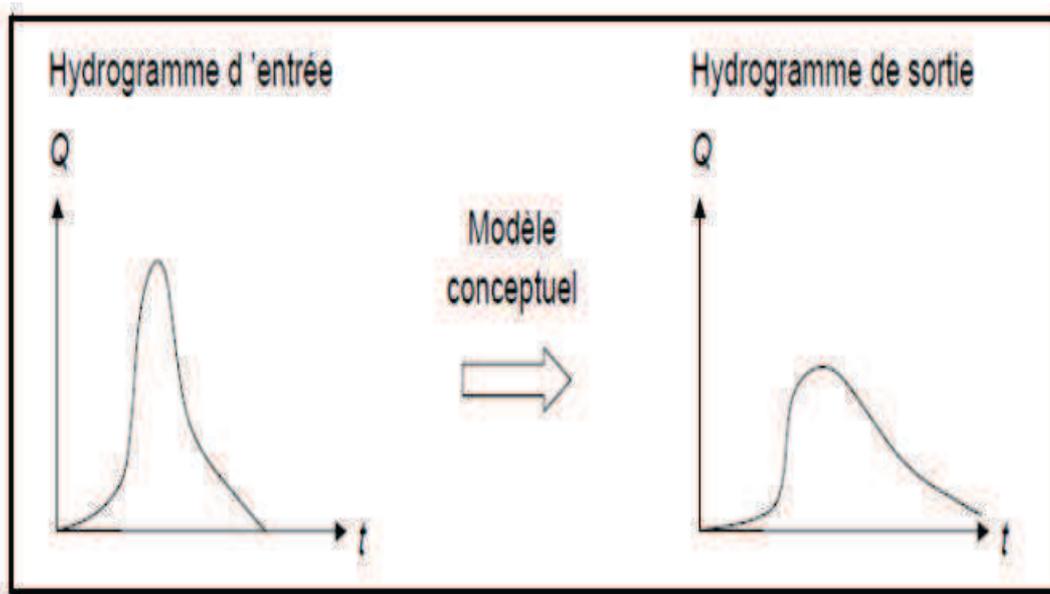


Figure 1.2 – Principe de fonctionnement d'un modèle conceptuel

Ces modèles sont les plus simple, ils donnent des résultats plus au moins satisfaisants, ils sont plus adaptés aux phénomènes hydrologique. Nous décrivons ici les modèles les plus courants.

A. Méthode Du Time-Offset

Cette méthode repose sur l'hypothèse suivante : l'hydrogramme se propage sans déformation à travers le bief ou le collecteur. Il s'agit donc d'un simple décalage temporel. Si cette approximation est relativement grossière, elle a l'avantage de permettre des simulations de réseaux d'assainissement extrêmement rapides et est utilisée dans certains logiciels de prédimensionnement de réseaux ou des techniques alternatives.

Un hydrogramme entrant à l'instant t au point d'abscisse x se retrouve à l'identique au point d'abscisse $x + \Delta x$ à l'instant $t + T_o$, avec T_o , le décalage temporel appelé en anglais time-offset. Cette méthode est la plus simple, cependant, elle conduit à surestimer les débits de pointe en sortie de réseau car l'effet de laminage est totalement ignoré.

Le paramètre T_o est le seul paramètre de ce modèle et il existe plusieurs techniques pour déterminer sa valeur :

- en procédant par ajustement expérimental ;
- en divisant le pas d'espace Δx par une vitesse d'écoulement moyenne qui peut être, par exemple :
 - * la vitesse correspondant au débit maximum ;
 - * la vitesse correspondant à la moyenne interquartile des débits ;
 - * la vitesse moyenne pondérée des différentes vitesses d'écoulement observées.

Les vitesses d'écoulement sont généralement calculées en faisant l'hypothèse que le régime est permanent et en appliquant la formule de Manning-Strickler. L'hydrogramme est discrétisé au pas de temps Δt . Sur chaque pas de temps $n\Delta t$, on calcule la vitesse d'écoulement U^n et le débit Q^n . La vitesse moyenne pondérée \bar{U} s'écrit [Bertrand & Krajewski, 2006] :

$$\bar{U} = \frac{\sum U^n Q^n}{\sum Q^n} \quad (1.5)$$

B. Modèle de Muskingum Initial

On retrouve ici des modèles présentés pour représenter la transformation pluie-débit et le ruissellement. Il s'agit de modèles issus du modèle de type réservoir créé initialement par Mc Carthy en 1934 pour simuler les débits de la rivière Muskingum dans l'Ohio.

On sait que le volume stocké dans un tronçon est sensiblement proportionnel au débit dans ce tronçon (Figure 1.3). Il s'agit précisément de l'hypothèse faite dans le modèle Muskingum dont la loi de stockage s'écrit, sous sa forme la plus générale [Bertrand & Krajewski, 2006] :

$$V_s = K(\alpha Q_e(t) + (1 - \alpha)Q_s(t)) \tag{1.6}$$

avec,

- V_s , le volume stocké (m^3);
- Q_e , le débit entrant (m^3/s);
- Q_s , le débit sortant (m^3/s);
- K , paramètre du modèle Muskingum (s);
- α paramètre de pondération (-);

Cette première équation est complétée par l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{dV_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t) \tag{1.7}$$

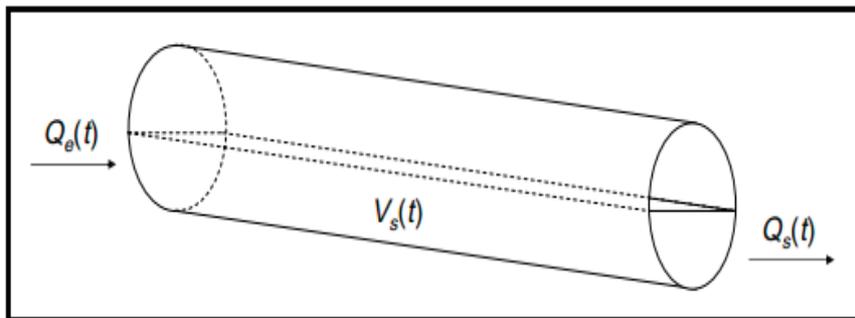


Figure 1.3 – Principe du modèle Muskingum

Le paramètre K (appelé lag-time) représente le décalage temporel entre les barycentres des hydrogrammes d'entrée et de sortie (Figure 1.4) : c'est aussi, théoriquement, le temps de transit d'une onde se propageant à la célérité C, sur une distance Δx :

$$K = \frac{\Delta x}{C} \tag{1.8}$$

De nombreux auteurs (par exemple Reynier 1978 ; Kovacs 1988 ; Semsar 1995) proposent de calculer une valeur approchée de la célérité C par une fonction de la vitesse U de l'eau en régime uniforme, ce qui correspond à une valeur proche du débit maximum Q_{max} . Semsar (1995) a montré que la relation suivante donnait de très bons résultats, avec la vitesse U calculée pour 80 % du débit maximum :

$$K = \frac{\Delta x}{0.8U_{0.8Q_{max}}} \tag{1.9}$$

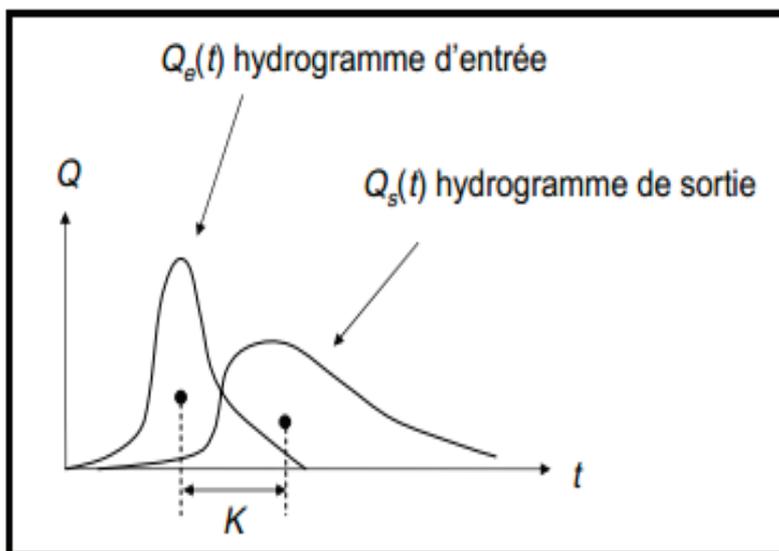


Figure 1.4 – Signification physique du paramètre K du modèle Muskingum

Le système composé des deux équations de stockage et de conservation se résout soit par intégration directe, soit par discrétisation. Cette deuxième technique est la plus rapide à mettre en œuvre. On dérive la loi de stockage par rapport au temps t , et on égalise avec les termes de droite de l'équation de conservation [Bertrand & Krajewski, 2006] :

$$\frac{dV_s(t)}{dt} = K\alpha \frac{dQ_e(t)}{dt} + K(1 - \alpha) \frac{dQ_s(t)}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t) \quad (1.10)$$

Utilisé avec prudence, le modèle de Muskingum donne généralement des résultats satisfaisants pour la simulation des réseaux d'assainissement lorsque les singularités hydrauliques et les influences aval sont minimales.

1.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté les modèles de simulation d'écoulement à surface libre et les différentes approches modélisatrices correspondantes.

En général, les modèles de simulation des écoulements en réseau d'assainissement sont basés sur les équations fondamentales de Barré Saint Venant.

L'établissement du système de BSV sous sa forme conservative 1D et 2D sera présenté dans le prochain chapitre.

Chapitre 2

Description des équations fondamentales des écoulements a surface libre (BSV)

2.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons établir les équations de Barré de Saint-Venant qui gouvernent les phénomènes d'écoulement a surface libre. En effet, ces équations (établies en 1871) sont les plus utilisées pour modéliser les écoulements non stationnaires graduellement variés. Ces équations sont non linéaires et de type hyperbolique. Elles constituent en fait une simplification des équations générales de la mécanique des fluides, c'est à dire les équations de Navier-Stokes, [Paquier, 1995]. Ces équations peuvent être 1D, 2D ou 3D. Ceci dépend de la complexité du phénomène que l'on veut décrire mais également de son échelle. Ainsi, dans le domaine de l'assainissement, compte tenu de la complexité géométrique et hydraulique des ouvrages tels que les bassins de stockage, déversoirs d'orages ou confluences, il serait nécessaire de tenir compte des phénomènes de turbulence par l'intermédiaire d'une modélisation 3D. Cette démarche est envisageable pour un ouvrage mais pas pour l'ensemble du réseau. Le temps de calcul, la capacité des ordinateurs mais surtout la difficulté de convergence des équations de Reynolds limite considérablement cette approche.

2.2 Equations base

Dans un problème d'écoulement à surface libre, le fluide s'écoule entre le fond du canal et la surface libre de l'eau. L'écoulement du fluide est régi par les équations de Navier - Stokes et de continuité.

2.2.1 Établissement du système d'équations base

En utilisant un système de coordonnées cartésiennes tel que défini à la figure 2-1, les équations générales¹ de conservation de la masse et du mouvement sont [lai, 1986] :

- **Équation De Continuité**

L'équation de continuité pour un fluide incompressible est donnée par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

- **Équation de quantité de mouvement**

L'équation dynamique s'exprime comme suit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\rho \partial x_i} + F_c + g \delta_{i3} \quad (2.2)$$

$$(u,v,w) = (u_j) ; i = 1,2,3 ; j = 1,2,3.$$

δ_{ij} : symbole de Kronecke

$$\begin{cases} i = j \Rightarrow \delta_{ij} = 1 \\ i \neq j \Rightarrow \delta_{ij} = 0 \end{cases}$$

F_c : force de Coriolis ;
 g : gravité ;
 ρ : masse spécifique de l'eau ;
 P : pression ;
 τ_{ij} : contraintes de Reynolds.

1. les équations sont obtenues en intégrant sur une période T les équations de base locales instantanées. les vitesses u, v, w et la pression P sont donc des valeurs moyennes sur cette période. les contraintes de Reynolds découlent de cette manipulation

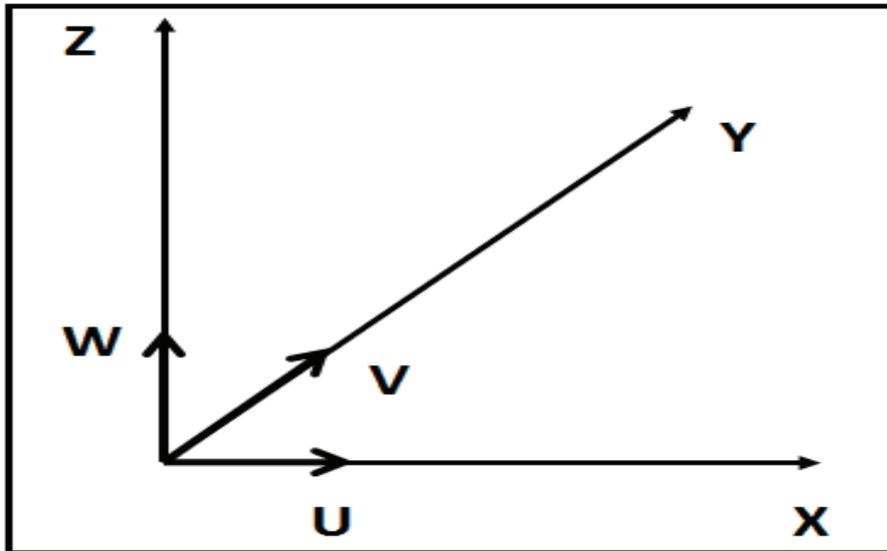


Figure 2.1 – Choix des coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{L'équation dynamique suivant x :} \\
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) + f_c \\
 \\
 \text{L'équation dynamique suivant y :} \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\rho \partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) + f_c \\
 \\
 \text{L'équation dynamique suivant z :} \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\rho \partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + f_c + g
 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

2.3 Équations de Saint Venant (modèle bidimensionnel)

2.3.1 Hypothèses

Les hypothèses adoptées par Saint Venant sont :

1. Profondeur faible devant l'échelle horizontale de variation de la surface libre et de la vitesse ;
2. La pression est hydrostatique sur la profondeur car l'accélération verticale est négligeable devant l'accélération de la pesanteur ;
3. La variation de la masse volumique de l'eau est négligeable ;
4. La composante verticale de la vitesse W ainsi que ces variations (spatiales et temporelles) sont faibles, ceci implique :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial t}$$

5. Les variations verticales des deux composantes horizontales U et V sont faibles ;
 6. les pertes de charges en régime transitoire sont supposées être calculables de la même manière que pour les écoulements permanents. On a ainsi une expression du type :
 ✓ Formule de Chézy :

$$u = C\sqrt{JR_h} \quad d'ou J = \frac{u^2}{C^2 R_h} \quad (2.4)$$

avec, C coefficient de Chézy ; et R_h rayon hydraulique .

- ✓ Formule de Manning-Strickler :

$$Q = K_s R_h^{2/3} S J^{1/2} \quad d'ou J = \frac{Q^2}{K_s^2 S^2 R_h^{4/3}} \quad (2.5)$$

avec, K_s coefficient de Manning-Strickler

Il existe plusieurs possibilités pour définir le coefficient de Chézy, à partir des caractéristiques du matériau constituant la paroi des collecteurs :

- ✓ formule du coefficient de frottement à la paroi C_f :

$$C^2 = \frac{2g}{C_f} \quad (2.6)$$

- ✓ formule de Bazin :

$$C_h = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_h}}} \quad (2.7)$$

avec γ coefficient de Bazin qui dépend du matériau.

- Formule de Manning-Strickler : $C = K_s R_h^{1/6}$.

7. Faible pente du fond du canal.

2.3.2 Etablissement du système de Barré de Saint-Venant 2-D

En considérant que la pression est hydrostatique et en intégrant les équations tridimensionnelles sur la verticale, un modèle bidimensionnel est obtenu. En utilisant les conventions illustrées à la figure 2-2, les équations sont [Soutalmani, 1983] :

Conservation de la masse

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0. \quad (2.8)$$

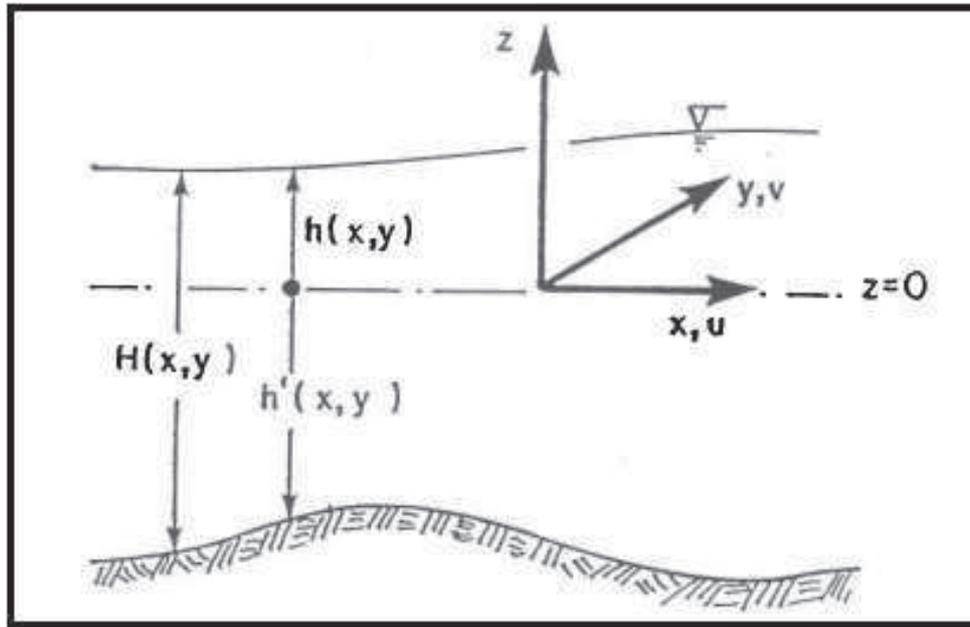


Figure 2.2 – Conventions du modèle bidimensionnel

Conservation de la quantité de mouvement

$$\begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = F_x \end{matrix} \quad (2.9)$$

$$\begin{matrix} (6) & (7) & (8) & (9) & (10) \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial huv}{\partial x} + \frac{\partial hv^2}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = F_y \end{matrix} \quad (2.10)$$

$$F_x = -\frac{(11) \quad (12)}{h^{4/3}} \frac{g\eta^2 |V| u}{\rho} + f_c v + \frac{(13)}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{(14)}{\rho H} C_w \rho_a |W| W_x \quad (2.11)$$

$$F_y = -\frac{(15) \quad (16)}{h^{4/3}} \frac{g\eta^2 |V| v}{\rho} + f_c u + \frac{(17)}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) + \frac{(18)}{\rho H} C_w \rho_a |W| W_y \quad (2.12)$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DES ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE (BSV)

C_w	coefficient de traînée du vent ;
F_x ou F_y	résultantes des forces massiques exercées sur une particule d'eau selon x ou y ;
f_c	coefficient de Coriolis ;
g	gravité ;
h	hauteur d'eau ;
H	profondeur totale ;
η	coefficient de rugosité de Manning ;
u, v	composantes de la vitesse intégrées verticalement ;
V	vitesse du courant ;
W_x, W_y	composantes du vecteur vitesse du vent ;
(x, y)	coordonnées cartésiennes ; lorsque les forces de Coriolis sont prises en compte, x est orienté à l'est et y au nord ;
ρ	masse spécifique de l'eau ;

Par analogie avec les contraintes d'un fluide visqueux, les contraintes de Reynolds sont définies comme suit :

$$\tau_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{i=1,2; j=1,2} \quad (2.13)$$

τ_{ij} : contrainte de Reynolds.

Les termes 1 et 6 représentent l'accélération locale (dans le temps) produite par un déséquilibre des forces au sein de l'écoulement. l'accélération convective est prise en compte par les termes 2,3,7 et 8. l'effet gravitationnel est donné par les termes 4 et 9. les forces massiques sont définies par les équations [6] et [7]. les forces massiques comprennent : le frottement du lit d'écoulement (termes 11 et 15), la force de Coriolis (termes 12 et 16), les compressions et cisaillements turbulents (contraintes de Reynolds, termes 13 et 17) et la contrainte du vent (termes 14 et 18).

2.3.3 Modèles simplifiés

Avant d'aborder les méthodes de résolution, nous allons étudier les simplifications possibles des équations du système de Barré de Saint-Venant.

- ⊙ On néglige l'effet de force de Coriolis devant les autres paramètres (donc les termes (12) et (16) sont négligés).
- ⊙ Nous considérerons qu'il n'y a pas d'apport latéral.
- ⊙ On néglige l'effet du vent (les termes (14) et (18) sont négligés).
- ⊙ En 1973, J. Kuiperd et C. Bvreugdenhil ont proposé l'hypothèse suivante :

Dans un régime d'écoulements turbulent, pour une profondeur d'eau constante les contraintes effectives des équations (2.13), sont données par les relations suivantes [**Chassaing, 2000**] :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) = \nu_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) = \nu_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \end{cases} \quad (2.14)$$

Le système d'équations de Saint Venant 2-D devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0. \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{g\eta^2 |V| u}{h^{4/3}} + \nu_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial huv}{\partial x} + \frac{\partial hv^2}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{g\eta^2 |V| v}{h^{4/3}} + \nu_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \end{array} \right. \quad (2.15)$$

2.3.4 Forme conservative

Les équation de Barré Saint Venant (2.15) peuvent être réécrites sous la forme conservatrice suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla F = S \quad (2.16)$$

avec, :

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}; \text{ le vecteur d'écoulement ou le vecteur des valeurs inconnues.}$$

$$F = (E, G) \text{ avec } E = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 \\ huv \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 \end{bmatrix}; \text{ sont les vecteurs flux.}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) + \nu_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) + \nu_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \end{bmatrix}; \text{ est le vecteur source.}$$

Avec, $S_{0x} = -\frac{\partial h}{\partial x}$ et $S_{0y} = -\frac{\partial h}{\partial y}$ sont les pentes du canal dans les deux directions x et y respectivement, S_{fx} et S_{fy} sont les pentes énergétiques qui tiennent compte des frottement dans le canal. Elles sont données soit par la relation de Manning-Stricler :

$$S_{fx} = \frac{\eta^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} ; S_{fy} = \frac{\eta^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (2.17)$$

soit par la relation de Chézy :

$$S_{fx} = \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{hC^2} ; S_{fy} = \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{hC^2} \quad (2.18)$$

où, C est le coefficient de frottement de Chézy .

Les coefficients de frottement de Manning et de Chézy (η et C dans les équation (2.17) et (2.18)) sont considérés constants durant la totalité de l'événement quelle que soit les caractéristiques de l'écoulement et ne dépendent que des caractéristique du fond [**Ghostine, 2009**].

2.3.5 Formule de diffusion turbulente utilisée

Le terme de diffusion utilisé dans les équation (2-15) fait appel à un coefficient de diffusion (ou de viscosité turbulente) ν_t . Ce terme a pour vocation de rendre comptes principalement de la diffusion (ou viscosité turbulente) induite par la turbulence qui se développe au sien de l'écoulement et de manière secondaire de la diffusion provenant de l'intégration des équations de Navier Stokes sur la verticale[Ghostine, 2009].

2.4 Équations de Saint Venant (modèle unidimensionnel)

2.4.1 Hypothèses

Les équation de saint venant 1-D font appel aux hypothèses suivantes :

1. l'eau est incompressible, sa masse volumique ρ est donc constante ;
2. les accélérations verticales et transversales des particules fluides sont négligeables par rapport aux accélérations longitudinales. Ceci équivaut à faire l'hypothèse de faible courbure des filets fluides dans une section en travers, par conséquent la distribution de la pression au sein d'une section est hydrostatique ;
3. le régime d'écoulement est turbulent, les perte d'énergie par frottement sur les berges sont donc proportionnelles au carré de la vitesse ;
4. la pente du bief est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que la cordonnée longitudinale est la cordonnée horizontale coïncident.

2.4.2 Etablissement du système de Barré de Saint-Venant 1-D

On emploie les notions suivantes (figure 2.4)

$A(x)$: est la section en travers mouillée de l'écoulement ;

$b(x)$: représente la largeur du miroir (c'est-à-dire la largeur de chenal au niveau de la surface libre) ;

$h(x)$: est la profondeur du chenal (différence entre la cote de la surface libre et le point le plus bas du chenal) à l'abscisse x ;

$W(x,z)$:est la largeur du lit à l'abscisse x et l'altitude $z, z_b(x)$ est l'altitude du point le plus bas du chenal à l'abscisse x ;

$\zeta(x)$: est la cote de la surface liber à l'abscisse x ;

χ est le périmètre mouillé.

On notera que par définition de A et b , la relation suivante est valide :

$$dA = b dz \quad (2.19)$$

Les forces de pression sur les forces du volume de contrôle sont données par la surface des triangles de pression .

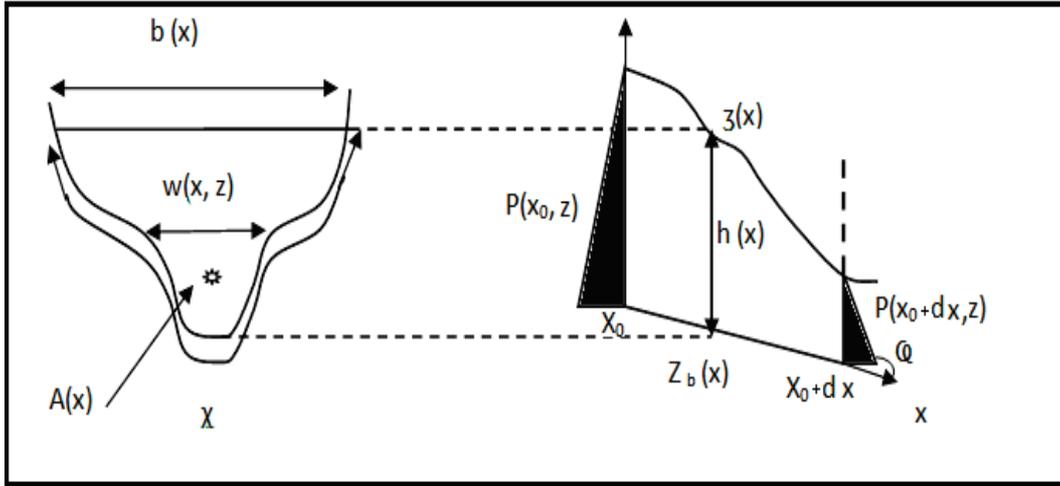


Figure 2.3 – Schéma de définition pour les équations de saint venant 1-D.

Équation de continuité

L'équation de continuité s'établit par une opération de bilan (figure 2.3) : on considère un élément de volume de section unitaire compris entre l'abscisses x_0 et $x_0 + \delta x$ et on effectue un bilan sur l'évolution, entre deux dates t_0 et $t_0 + \delta t$ de la quantité totale de U dans cet élément de volume, alors le bilan de masse s'écrit [Guinot, 2006] :

$$\delta U(x, t_0 + \Delta t) - \delta U(x, t_0) - \delta F(x_0, t) + \delta F(x_0 + \Delta x, t) = \delta S \quad (2.20)$$

Où, $\delta U(t)$ est la masse de fluide contenue dans le volume de contrôle à la date t et $\delta F(x)$ est la masse de fluide passée entre les dates t_0 et $t_0 + \Delta t$ par la section de contrôle située à l'abscisse x .

Entre les dates t_0 et $t_0 + \delta t$, le terme source est responsable de l'apparition de la quantité suivante dans le volume :

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_0 + \delta t} \int_{x_0}^{x_0 + \delta x} S(U, x, t) dx dt \quad (2.21)$$

les quantités δU et δF sont par définition, égales à :

$$\begin{cases} \delta U(t) = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (\rho A)(x, t) dx \\ \delta F(t) = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (\rho u A)(x, t) dx \end{cases} \quad (2.22)$$

où A est la section mouillée, u est la vitesse moyenne du fluide et ρ sa masse volumique.

En remplaçant les expressions (2.21) et (2.22) dans (2.20), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} [(\rho A)(x, t_0 + \Delta t) - (\rho A)(x, t_0)] - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} [(\rho u A)(x_0, t) - (\rho u A)(x_0 + \Delta x, t)] \\ = \int_{t_0}^{t_0 + \delta t} \int_{x_0}^{x_0 + \delta x} S(U, x, t) dx dt \end{aligned} \quad (2.23)$$

En faisant tendre δt et δx vers 0, on peut écrire :

$$\begin{cases} (\rho A)(x_0, t_0 + \Delta t) - (\rho A)(x_0, t_0) = \delta t \frac{\partial U}{\partial t} + O(\delta t^2) \\ (\rho u A)(x_0, t_0) - (\rho u A)(x_0 + \Delta x, t_0) = -\delta x \frac{\partial F}{\partial x} + O(\delta x^2) \end{cases} \quad (2.24)$$

où, les quantités $O(\delta t^2)$ et $O(\delta x^2)$ sont des polynômes de degré supérieur ou égal à 2 par rapport à δt et δx respectivement. Ces polynôme contiennent également les dérivées d'ordre 2 et supérieur par rapport à t et x . Lorsque δt et δx tendent vers 0, $O(\delta t^2)$ devient négligeable par rapport à $\delta t \frac{\partial U}{\partial t}$ car δx^2 décroît plus vite que δx , de la même façon, $O(\delta x^2)$ devient négligeable par rapport à $\delta x \frac{\partial F}{\partial x}$. Les égalités (2.24) deviennent donc :

$$\begin{cases} (\rho A)(x_0, t_0 + \Delta t) - (\rho A)(x_0, t_0) \simeq^{\delta t \rightarrow 0} \delta t \frac{\partial U}{\partial t} \\ (\rho u A)(x_0, t_0) - (\rho u A)(x_0 + \Delta x, t_0) \simeq^{\delta t \rightarrow 0} -\delta x \frac{\partial F}{\partial x} \end{cases} \quad (2.25)$$

De même, l'intégrale du terme source tend vers la quantité suivante :

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t} \int_{x_0}^{x_0+\delta x} S(x, t) dx dt \simeq_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ \delta x \rightarrow 0}} \delta t \delta x S \quad (2.26)$$

En substituant les équivalences (2.26) et (2.27) dans (2.24), il vient :

$$\delta t \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) \delta x + \delta t \frac{\partial}{\partial t} (\rho u A) \delta x = \delta t \delta x S \quad (2.27)$$

En utilisant l'hypothèse (1) de l'incompressibilité. On peut diviser (2.28) par la masse volumique ρ constante ; en notant que $Au=Q$, on obtient :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = S \quad (2.28)$$

Équation de quantité de mouvement

Le bilan de quantité de mouvement est donné par le théorème fondamental de la dynamique :

$$\delta U(t_0 + \Delta t) - \delta U(t_0) = \delta F(x_0) \delta F(x_0 + \Delta x) + \delta P(x_0) - \delta P(x_0 + \Delta x) + \delta F_p \quad (2.29)$$

où, $\delta U(t)$ est la quantité de mouvement de fluide contenu dans le volume de contrôle à la date t et $\delta F(x)$ est la quantité de mouvement attachée au volume de fluide qui traversé, entre les dates t_0 et $t_0 + \Delta t$, de la section de contrôle située à l'abscisse x . $\delta P(x)$ représente l'intégrale, entre les dates t_0 et $t_0 + \Delta t$, de la force de pression s'exerçant sur la face du volume de contrôle située à l'abscisse x et δF_p est l'intégrale entre t_0 et $t_0 + \Delta t$ de la résultante des forces de paroi (frottement et réaction de la paroi de la conduite aux forces de pression) [Guinot, 2006].

Les quantités δU et δF sont par définition, égales à :

$$\begin{cases} \delta U(t) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (\rho u A)(x, t) dx \\ \delta F(t) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (\rho u^2 A)(x, t) dx \end{cases} \quad (2.30)$$

La force de pression $P(x)$ est égale à l'intégrale de la pression $p(x)$ sur la section en travers $A(x)$. D'après l'hypothèse (2), la pression est hydrostatique, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à la distance du point considéré à la surface libre. La pression à l'altitude z est donc donnée par :

$$p(x, z) = (\zeta - z)\rho g \quad (2.31)$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DES ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE (BSV)

Cette pression s'exerce sur toute la largeur $w(x, z)$. La force de pression $p(x)$ est donc :

$$p(x) = \int_{z_b(x)}^{\zeta(x)} p(x, z)W(x, z)dz = \int_{z_b(x)}^{\zeta(x)} [\zeta(x) - z]\rho gW(x, z)dz \quad (2.32)$$

La force de paroi est la résultante de trois forces :

$$\delta F_p(t) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} (R_p + R_f + R_b)(x, t)dx \quad (2.33)$$

Où, R_b, R_F et R_p sont respectivement, les forces de paroi dues à la réaction du fond sur le fluide dans le plan vertical, au frottement et à la réaction de paroi aux force de pression dans le plan horizontal. On ramène habituellement R_f à la pente S_f de la ligne d'énergie par le biais de l'équation :

$$R_f = -\rho ghS_f \quad (2.34)$$

A noter que R_f s'exerce parallèlement au fond mais que l'hypothèse (4) permet d'assimiler R_f à sa projection sur l'axe des x . De même, du fait de la pente du fond R_f s'exerce sur une longueur légèrement supérieur à la dimension δx , mais l'hypothèse (4) permet d'assimiler cette longueur à δx .

Il existe plusieurs formules pour caractériser S_f . Toutes les formules usuelles de l'hydraulique à surface libre font appel à l'hypothèse (3), liée à l'hypothèse de régime turbulent, d'une pente de Frottement proportionnelle au carré de la vitesse. Les lois les plus souvent utilisées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} S_f &= \frac{u^2}{C^2 R_h} && \text{(Chézy)} \\ S_f &= \frac{u^2}{K_s^2 R_h^{4/3}} && \text{(Strickler)} \\ S_f &= \eta^2 \frac{u^2}{R_h^{4/3}} && \text{(Manning)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Où, C et K_s et η sont respectivement les coefficients de frottement de Chézy, Strickler et Manning et R_h est le rayon hydraulique, défini comme le quotient de la section en travers A et du périmètre mouillé χ :

$$R_h = \frac{A}{\chi} \quad (2.36)$$

Le coefficient de Chézy est traditionnellement préféré par les ingénieurs travaillant dans le domaine maritime, alors que le coefficient de Strickler est préféré par les ingénieurs Européens du domaine fluvial. Les américains de nord emploient de préférence le coefficient de Manning, un coefficient de Chézy ou de Strickler élevés, comme un coefficient de Manning faible, traduisent une faible résistance.

Ces coefficient sont reliés par la formule :

$$K_s = \frac{1}{\eta} = \frac{C}{R_h^{1/6}} \quad (2.37)$$

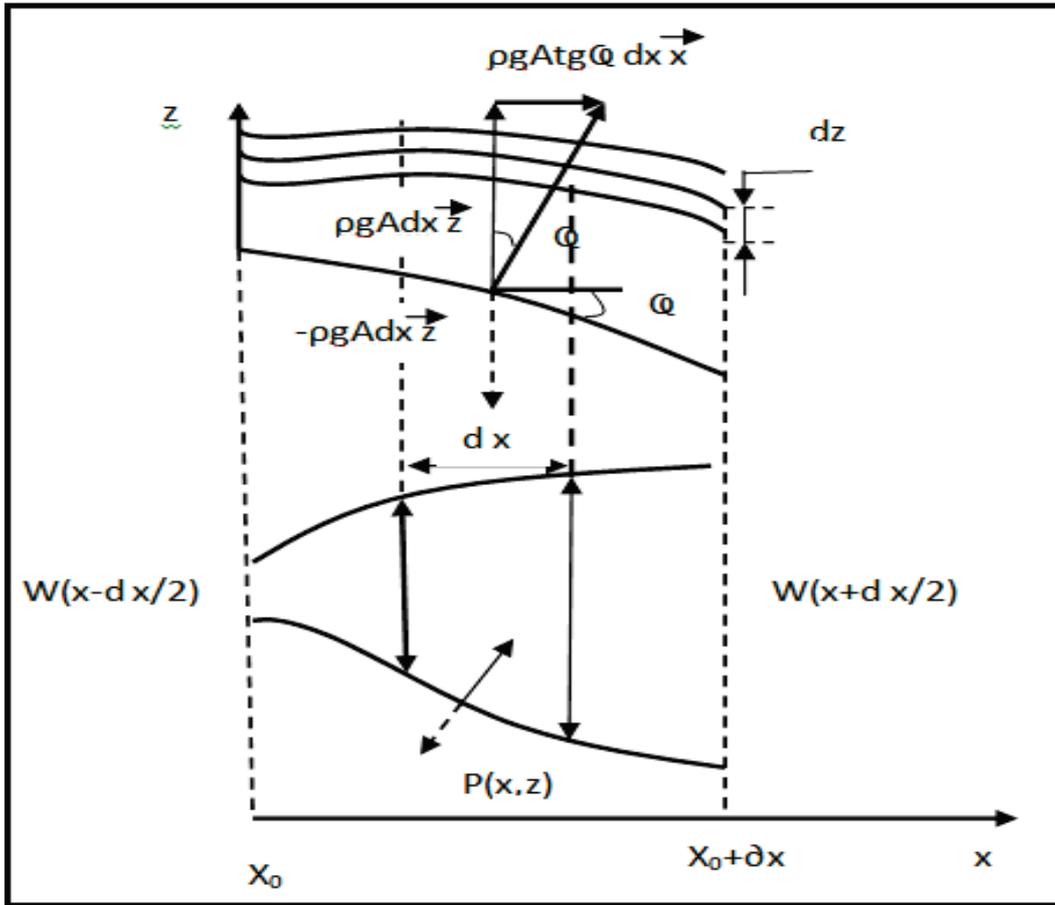


Figure 2.4 – Forces exercées par le fluide sur la paroi et réaction de la paroi sur le fluide.

$$\begin{aligned} dR_p &= [W(x + dx/2) - W(x - dx/2)]p(x, z)dz \\ &= \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{\zeta-z = Cste} (\zeta - z) \rho g dx dz \end{aligned} \quad (2.38)$$

Où la notion $(\partial W / \partial x)_{\zeta-z = Cste}$ indique que la dérivée de la largeur par rapport à x n'est pas pris à z constante, mais à distance constante par rapport à la surface libre.

La force R_P s'obtient en intégrant dR_P par rapport à z et z_b et ζ et par rapport à x entre x_0 et $x_0 + \Delta x$:

$$R_p = \rho g \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \int_{z_b(x)}^{\zeta(x)} (\zeta - z) \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{\zeta-z = Cste} dx dz \quad (2.39)$$

La dernière force restant à estimer est la composante R_P selon x de la réaction du fond du chenal sur le volume d'eau. on la calcule en effectuant un bilan des forces sur une tranche de fluide comprise entre $x - dx/2$ et $x + dx/2$. cette force s'exerce dans le plan vertical, dans la direction normale au fond (figure). Sa projection selon l'axe des z compense exactement le poids $\rho g A dx$ de la tranche de la fluide. Le fond étant incliné d'un angle φ par rapport à l'horizontale, la réaction du fond sur le fluide a une composante horizontale égale à :

$$R_b = \rho g A(x) \tan \varphi dx \quad (2.40)$$

CHAPITRE 2. DESCRIPTION DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DES ÉCOULEMENTS A SURFACE LIBRE (BSV)

La tangente de l'angle φ est la pente du fond du chenal. Elle est souvent notée S_0 et est reliée à la cote du fond par :

$$S_0 = \tan \varphi = -\frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.41)$$

En remplaçant les relations (2.30),(2.32),(2.34),(2.39-2.40) dans (2.29), en faisant tendre Δx et Δt vers 0 et en divisant par la masse volumique ρ constante (hypothèse 1), on obtient la formulation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(uA) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2A + P/\rho) = (S_0 - S_f)gA + I_p \quad (2.42)$$

Ou, l'intégrale I_p est donnée par :

$$I_p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial R_p}{\partial x} = g \int_{z_b(x)}^{\zeta(x)} (\zeta - z) \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{\zeta-z = Cste} dz \quad (2.43)$$

Le système de BSV s'écrit sous la forme conservative suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \\ U = Q \\ F = Q^2/A + P/\rho \\ S = (S_0 - S_f)gA + I_p \end{array} \right. \quad (2.44)$$

2.4.3 Modèles simplifiés

Plusieurs simplifications peuvent être apportées aux équations du système de Barré de Saint-Venant 1-D en fonction des objectifs fixés. Dans l'équation de continuité on néglige le terme source, c'est à dire $S = 0$ et l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.45)$$

Dans l'équation dynamique, on néglige la réaction de la paroi sur le fluide, c'est à dire $I_p = 0$. L'équation dynamique devient :

$$\begin{array}{cccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & \\ \frac{\partial}{\partial t}(uA) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2A) + \frac{\partial}{\partial x}(P/\rho) = (S_0 - S_f)gA & & & & & (2.46) \end{array}$$

- (1)Premier terme d'inertie (énergie due à l'accélération dans la direction Ox) ;
- (2)Deuxième terme d'inertie (accélération convective) ;
- (3)Terme de pression, lié à la pente de la surface libre ;
- (4)Terme de gravité
- (5)Terme de frottement, lié aux pertes de charge.

Selon les ordres de grandeur relatifs des différents termes, des simplifications de l'équation dynamique sont possibles. En effet, il est rare que tous les termes aient le même ordre de grandeur, en fonction des caractéristiques géométriques et des conditions aux limites conceptuel [Bertrand & Krajewski, 2006].

Différentes études théoriques et expérimentales portant sur la propagation d'une crue ont permis de montrer que le terme d'inertie (1) est lié au temps, donc à la vitesse de montée de la crue et que le terme d'accélération convective (2) est lié à la géométrie des conduites. Par exemple, pour les crues en rivières, on observe que (1) et (2) sont négligeables devant les autres termes de l'équation. Les termes (4) et (5) de pente et de frottement sont en général du même ordre de grandeur. Il est possible de procéder alors à des simplifications, selon les ordres de grandeur respectifs des différents termes [Kovacs, 1988].

• **Modèles A inertie prépondérante et frottements négligeables**

Les termes (4) et (5) sont négligés, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t}(uA) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2A) + \frac{\partial}{\partial x}(P/\rho) = 0 \quad (2.47)$$

Le modèle donné par l'équation ci-dessus est appelé modèle de l'onde dynamique. En pratique, il correspond à des ondes de haute fréquence (impulsions brèves et rapprochées) qui ne sont pas des situations fréquentes en hydrologie urbaine où ce modèle est très peu employé.

• **Modèles a frottements prépondérants et inertie négligeable**

Les termes (1) et (2) sont négligés. Dans ce cas, on obtient le modèle de l'onde diffusante :

$$\frac{\partial}{\partial x}(P/\rho) = (S_0 - S_f)gA \quad (2.48)$$

Si de plus le terme (3) est négligé, on obtient le modèle de l'onde cinématique dont l'écoulement est uniforme :

$$(S_0 - S_f)gA = 0 \iff S_0 = S_f \quad (2.49)$$

Ces deux modèles donnent des résultats moins satisfaisants pour la simulation du fonctionnement des réseaux d'assainissement.

Le modèle de l'onde dynamique, généré par les termes d'inertie, et le modèle de l'onde diffusante ne correspondent pas nécessairement à un déplacement de matière, comme dans le cas de la houle par exemple. On distingue ainsi le déplacement réel du fluide à la vitesse U et le déplacement de l'onde de débit à la célérité C .

2.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'établissement des équations de Barré Saint Venant. Ce système est un ensemble d'équations différentielles aux dérivées partielles hyperboliques non linéaire. Il ne possède pas de solution analytique. Alors pour le résoudre, il est nécessaire d'utiliser des approximations numérique. Les méthodes de résolution des équations de Barré Saint Venant 1-D et 2-D seront présentées dans le prochain chapitre.

Chapitre 3

Discrétisation des équation de BSV

3.1 Introduction

La recherche des méthodes numériques les plus adaptées à la simulation des problèmes d'écoulement de l'eau à surface libre est l'un des sujets les plus actifs en mathématiques appliquées, mécanique des fluides et hydraulique. En utilisant la simulation et l'analyse numérique de quelques modèles simplifiés appropriés, les scientifiques obtiennent de nombreuses informations significatives pour les phénomènes complexes associés aux écoulements à surface libre. En général les modèles numériques de simulations des écoulements à surface libre utilisent la technique de discrétisation par les différence finies, les éléments finis ou les volumes finis.

La méthode des différences finies classiques est une méthode bien connue dans le cadre de l'hydraulique urbaine. Cette méthode consiste à approximer les dérivées partielles d'une équations au moyen des développements de Taylor et ceci se déduit directement de la définition de la dérivée. Dans le cas de la résolution des équations de Barré de Saint Venant, on commence par quadriller le plan (x, y, t) afin d'obtenir des mailles de taille $(\Delta x, \Delta y, \Delta t)$ où, $(\Delta x, \Delta y)$ sont les pas d'espace selon x et y , respectivement et Δt est le pas de temps. Selon le type de développements limités utilisés, on obtient des expressions différentes des dérivées qui engendrent trois types de schémas (centré, progressif ou régressif).

La méthode des volumes finis est basée sur l'approximation de la solution par interpolation sur un ensemble discret de volumes de contrôle. Le point particulier de cette méthode réside dans l'intégration des équations différentielles sur chacun de ces volumes de contrôle. On impose également la continuité des gradients de la solution entre les volumes de contrôle par interpolation. Cette méthode fournit des schémas numériques itératifs qui permettent l'obtention d'une approximation de la solution.

Ce chapitre est consacré au développement d'un modèle numérique unidimensionnel et bidimensionnel en volumes finis et différences finies pour la résolution des équations de Barré Saint Venant.

3.2 Principe de méthode des différences finies

La méthode des différences finies est basée sur l'approximation de dérivées de fonctions, considérées suffisamment régulières, sur un ensemble discret de points au moyen de quotients de deux différences [Lapidus , 1999].

Les développements suivants sont donnés dans l'espace $(t - x)$ où les pas de discrétisation respectifs Δt et Δx sont constants ; La discrétisation du domaine $[t_0, t_0 + T][x_0, x_0 + X]$ aboutit à :

$$\{(t_i = t_0 + (i - 1)\Delta t, x_j = x_0 + (j - 1)\Delta x), i = 1...I, j = 1...J\}$$

Si f est suffisamment régulière au voisinage de (t,x) dans R^2 , alors un développement en série de Taylor de $f = (t + \Delta t, x + \Delta x)$ est :

$$f(t + \Delta t, x + \Delta x) = \sum_{l=0}^m \sum_{n=0}^{m-l} \frac{\Delta t^l \Delta x^n}{l!n!} \frac{\partial^{l+n} f}{\partial t^l \partial x^n}(t, x) \quad (3.1)$$

Le développement limité de la fonction f au voisinage de Δt s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} f(t \pm \Delta t, x) &= f(t, x) \pm \Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) \pm \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t, x) \\ &+ \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial t^4}(t, x) \pm \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

De même, le développement limité de la fonction f au voisinage de Δx s'écrit :

$$\begin{aligned} f(t, x \pm \Delta x) &= f(t, x) \pm \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \pm \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(t, x) \\ &+ \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(t, x) \pm \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

⊙ Perturbation de Δt en t et perturbation de Δx en x :

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t, x + \Delta x) &= f(t, x) + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) \\ &+ \Delta t \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t, x) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t, x) + \frac{\Delta t^2 \Delta x}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial x}(t, x) \\ &+ \frac{\Delta x^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2}(t, x) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(t, x) + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

⊙ Perturbation de Δt en t et perturbation de $-\Delta x$ en x :

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t, x - \Delta x) &= f(t, x) + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) - \Delta t \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t, x) \\ &+ \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t, x) - \frac{\Delta t^2 \Delta x}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial x}(t, x) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\Delta x^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2}(t, x) - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(t, x) + \dots \quad (3.5)$$

⊙ Perturbation de $-\Delta t$ en t et perturbation de Δx en x :

$$\begin{aligned} f(t - \Delta t, x + \Delta x) &= f(t, x) - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) - \Delta t \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t, x) \\ &+ \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t, x) + \frac{\Delta t^2 \Delta x}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial x}(t, x) \\ &- \frac{\Delta x^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2}(t, x) + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(t, x) + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

⊙ Perturbation de $-\Delta t$ en t et perturbation de $-\Delta x$ en x :

$$\begin{aligned} f(t - \Delta t, x - \Delta x) &= f(t, x) - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x) \\ &+ \Delta t \Delta x \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t, x) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) - \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t, x) - \frac{\Delta t^2 \Delta x}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial x}(t, x) \\ &- \frac{\Delta x^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2}(t, x) - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(t, x) + \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

La formule progressive, directement issue de l'équation [3.2] avec $+\Delta t$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{f(t + \Delta t, x) - f(t, x)}{\Delta t} + 0(\Delta t) \quad (3.8)$$

La formule régressive, directement issue de l'équation [3.2] avec $-\Delta t$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{f(t, x) - f(t - \Delta t, x)}{\Delta t} + 0(\Delta t) \quad (3.9)$$

La formule centrée, issue de la soustraction membre à membre de l'équation [3.2] avec $+\Delta t$ et avec $-\Delta t$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{f(t + \Delta t, x) - f(t - \Delta t, x)}{2\Delta t} + 0(\Delta t^2) \quad (3.10)$$

La formule d'approximation par différences finies centrée de la dérivée partielle seconde de f par rapport à x, issue de l'addition membre à membre de l'équation [3.2] avec $+\Delta t$ et avec $-\Delta t$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = \frac{f(t - \Delta t, x) - 2f(t, x) + f(t + \Delta t, x)}{\Delta t^2} + 0(\Delta t^2) \quad (3.11)$$

La formule d'approximation par différences fines centrée de la dérivée partielle iodure deux par rapport à t et à x, issue de l'addition membre à membre des équations [3.4] et [3.7] auxquelles on soustrait les équations [3.5] et [3.6] :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t, x) = \frac{f(t + \Delta t, x + \Delta x) - f(t + \Delta t, x - \Delta x)}{4\Delta t \Delta x} \quad (3.12)$$

$$+ \frac{f(t - \Delta t, x - \Delta x) - f(t - \Delta t, x + \Delta x)}{4\Delta t \Delta x} + 0 \left(\frac{\Delta t^3}{\Delta x}, \Delta t^2, \Delta t \Delta x, \frac{\Delta x^3}{\Delta t} \right) \quad (3.13)$$

D'autres développements du type $f(t \pm 2\Delta t, x \pm 2\Delta x)$, $f(t \pm 3\Delta t, x \pm 3\Delta x)$, $f(t \pm 2\Delta t, y \pm \Delta x)$, etc. Permettent d'obtenir d'autres formules par différences finies. Le tableau suivant regroupe les formules d'approximation par différences finies les plus utilisées en considérant $\Delta t = \Delta x$ jusqu'à la dérivée d'ordre quatre croisée de f [Vanhille & Lavie, 2006].

Table 3.1 – Quelques formules d'approximation pour un espace 1-D

dérivier partiel	Formule d'approximation par différences finies	Ordre de l'erreur
$\frac{\partial f}{\partial t}(t_i, x_j)$	$\frac{f_{j+1}^i - f_j^i}{\Delta t}$	$0(\Delta t)$
	$\frac{f_j^i - f_{j-1}^i}{\Delta t}$	$0(\Delta t)$
	$\frac{f_{j+1}^i - f_{j-1}^i}{2\Delta t}$	$0(\Delta t^2)$
	$\frac{-f_{j+2}^i + 4f_{j+1}^i - 3f_j^i}{2\Delta t}$	$0(\Delta t^2)$
	$\frac{f_{j+1}^i + 1 - f_{j-1}^{i+1} + f_{j+1}^{i-1} - f_{j-1}^{i-1}}{4\Delta t}$	$0(\Delta t^2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_i, x_j)$	$\frac{f_{j+1}^i - 2f_j^i + f_{j-1}^i}{\Delta t^2}$	$0(\Delta t^2)$
	$\frac{-f_{j+2}^i + 16f_{j+1}^i - 30f_j^i + 16f_{j-1}^i - f_{j-2}^i}{12\Delta t^2}$	$0(\Delta t^4)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t_i, x_j)$	$\frac{f_{j+1}^{i+1} - f_{j+1}^{i-1} - f_{j-1}^{i+1} + f_{j-1}^{i-1}}{4\Delta t^2}$	$0(\Delta t^2)$
$\frac{\partial^4 f}{\partial t \partial x^2}(t_i, x_j)$	$\frac{f_{j+1}^{i+1} + f_{j-1}^{i+1} + f_{j+1}^{i-1} + f_{j-1}^{i-1} - 2f_{j+1}^i - 2f_{j-1}^i - 2f_j^{i+1} - 2f_j^{i-1} - 4f_j^i}{\Delta t^4}$	$0(\Delta t^2)$

3.3 Schémas par différences finies

Dans le cas le plus général, on peut donc écrire une dérivée partielle par rapport à x et par rapport au temps t sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \alpha_3 \frac{\alpha_1(f_{j+1}^{i+1} - f_j^{i+1}) + (1 - \alpha_1)(f_j^{i+1} - f_{j-1}^{i+1})}{\Delta x} \\ \quad + (1 - \alpha_3) \frac{\alpha_2(f_{j+1}^i - f_j^i) + (1 - \alpha_2)(f_j^i - f_{j-1}^i)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\alpha_4(f_j^{i+1} - f_j^i) + (1 - \alpha_4)(f_{j+1}^{i+1} - f_{j+1}^i)}{\Delta x} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Dans le tableau suivant, on obtient les différents schémas possibles. Selon les cas de pondérations effectuées, ainsi les schémas numériques correspondants aux différentes approximations sont récapitulés ci après [Bertrand & Krajewski, 2006] :

Table 3.2 – Coefficients de pondération des schémas aux différences finies

Pondération		Schéma
$\alpha_3 = 0$		Explicite
$\alpha_3 = 0,5$		Implicite centré dans le temps
$\alpha_3 = 1$		Totalement implicite
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 1$	Progressif
$\alpha_1 = 0,5$	$\alpha_2 = 0,5$	Centré
$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = 1$	Regressif
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 0$	Mixte décentré

L'équation dynamique de BSV est de type hyperbolique. Ce type de système contient des dérivées partielles par rapport au temps ($\frac{\partial f}{\partial t}$), par rapport à l'espace ($\frac{\partial f}{\partial x}$) et un terme source. Selon la manière dont la dérivée spatiale et le terme source sont estimés, on parle de schéma explicite ou implicite

3.3.1 Schéma numérique explicite

Seule la dérivée de f par rapport au temps s'exprime en fonction des valeurs de f au pas de temps $i+1$.

La différentielle par rapport à x s'exprime en fonction des valeurs de f au pas de temps précédent de calcul (pas i). On calcule f_j^{i+1} connaissant les valeurs de f calculées au temps $i\Delta t$ pour, en général, les pas d'espaces $j-1, j$ et $j+1$ (schéma à trois points). Un schéma explicite est caractérisé par le fait que l'on puisse exprimer explicitement une valeur inconnue en fonction de valeurs connues [Abdallah, 2005].

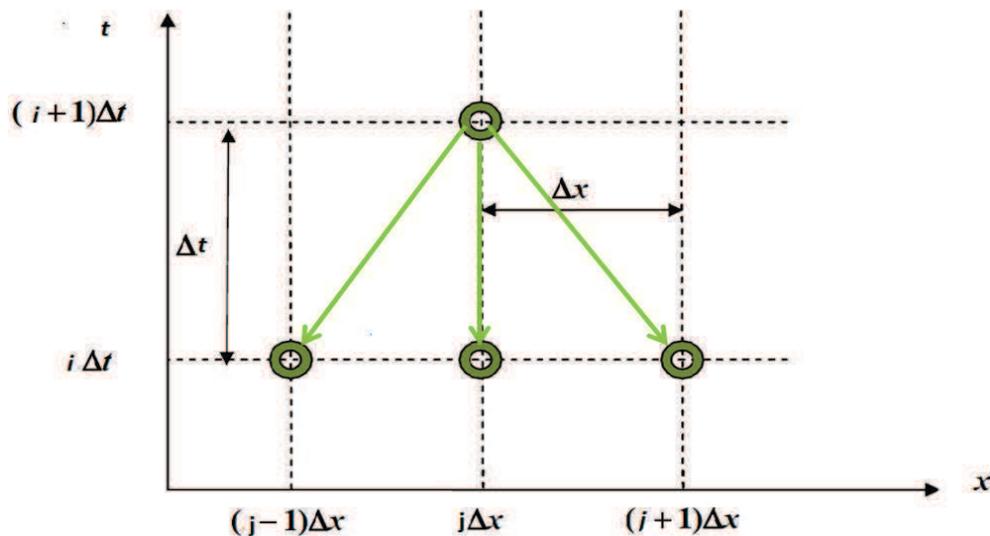


Figure 3.1 – Schéma de type explicite

3.3.2 Schéma numérique implicite

Les schémas sont implicites si la différentielle de f par rapport à x se calcule en fonction d'au moins deux valeurs de position d'espace de f au temps $i + 1$. En fait, le caractère implicite

d'un schéma numérique est lié au fait que l'on ne puisse pas exprimer explicitement chaque valeur inconnue en fonction uniquement de valeurs connues. Chacune des équations à résoudre contient au moins deux valeurs inconnues de f au pas de temps de calcul $(i + 1)\Delta t$. [Abdallah, 2005].

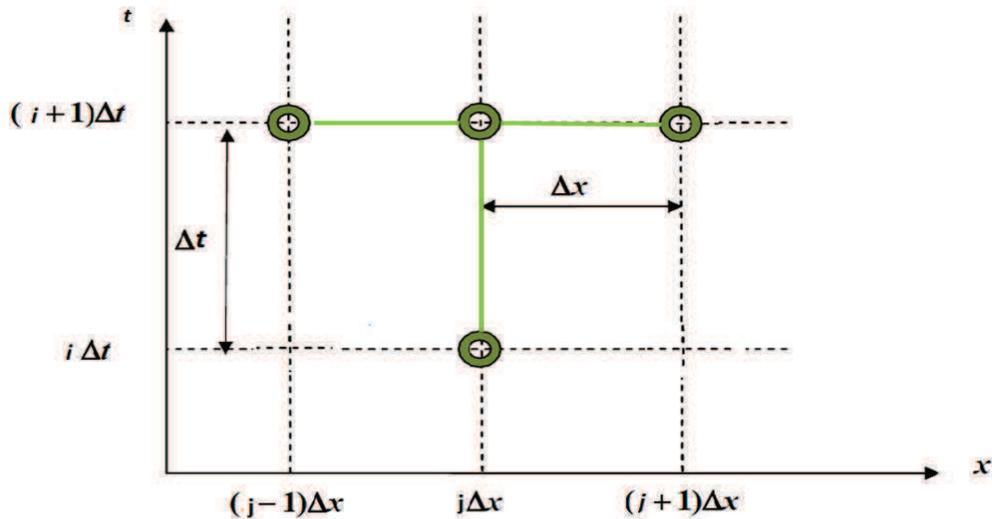


Figure 3.2 – Schéma de type implicite

3.3.3 Avantages et inconvénients des deux types de schémas

1.3.3.1 Schéma explicite : Les schémas explicites présentent l'avantage d'être faciles à programmer. Ils sont en revanche assortis d'une contrainte de stabilité qui limite la gamme des pas de temps et d'espace. Le pas de temps de calcul doit être inférieur à une valeur seuil Δt_{max} au-delà de laquelle la solution devient instable. L'utilisation d'une discrétisation explicite est ainsi souvent conduit à utiliser de petits pas de temps de calcul, donc à effectuer de nombreux calculs, pour effectuer une simulation sur un intervalle de temps donné. La quantité-clé pour la stabilité d'une solution numérique. Les méthodes explicites donnent en général des solutions stables pour des nombres de courant inférieurs à 1 en valeur absolue. [Vincent, 2006]

1.3.3.2 Schéma implicite : Les schémas implicites, sont en général inconditionnellement stables. Ceci les fait parfois préférés des développeurs d'outils de calcul industriels, car de grandes périodes peuvent être simulées en un nombre réduits de pas de temps très grands, ce qui accroît la rapidité du calcul. Il faut cependant garder à l'esprit que la rapidité des simulations n'est pas un gage de qualité de la solution numérique. [Vincent, 2006]

Pour les schémas explicites, on peut calculer les valeurs de proche en proche en progressant par balayage sur tous les pas d'espace et de temps (Progression horizontale). Pour s'assurer de la convergence du résultat vers la solution exacte, il faut vérifier la stabilité et de la consistance du schéma numérique.

3.3.4 Consistance

La notion de consistance s'applique à la version discrétisée d'une équation différentielle. On la définit de la manière suivante :

Une équation discrétisée est consistante à une équation différentielle si la différence entre les deux tend vers zéro lorsque les pas d'espace et de temps tendent vers zéro. La différence entre l'équation discrétisée et l'équation originale est appelée l'erreur de troncature [Vincent, 2006].

L'erreur de troncature : L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction f . L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'au pas précédent la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques.

3.3.5 La Stabilité

La stabilité est une propriété de la solution d'une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles). La solution peut être une solution analytique ou une solution numérique (résultant d'une discrétisation).

Une solution définie sur un domaine de l'espace et/ou du temps est dite stable si elle est bornée sur cet espace ; autrement dit, il existe une borne inférieure et une borne supérieure finies aux valeurs que peut prendre cette solution [Vincent, 2006].

3.3.6 La Convergence

La convergence est une propriété de la solution numérique. On dit que la solution numérique d'une EDP est convergente si elle tend vers la solution analytique de cette équation quand Δt et Δx tendent vers zéro. La convergence est la véritable propriété recherchée par les utilisateurs des outils de modélisation. En effet, le principal souci du modélisateur est d'être certain de pouvoir résoudre les équations de façon aussi précise qu'il le désire. Pour cela, il veut être certain que raffiner la discrétisation (en diminuant à la fois les pas de temps et d'espace) conduit à une solution numérique de meilleure qualité, c'est-à-dire à une solution numérique qui se rapproche de la solution analytique de l'équation à résoudre [Vincent, 2006].

Théorème de Lax :

Les preuves de convergence sont en général assez difficiles à établir ; elles demandent un appareillage mathématique qui relève de l'analyse fonctionnelle et qui va bien au-delà des outils habituellement disponibles à l'ingénieur. On doit cependant à Lax un théorème fort utile, valable pour des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. Ce théorème s'énonce comme suit :

La consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes à la convergence. Autrement dit, si une équation est discrétisée de façon consistante, et si l'on respecte la condition de stabilité de la solution numérique, alors celle-ci est convergente vers la solution analytique de l'équation à résoudre.

3.4 Résolution du système de BSV 1-D par un schéma explicite

En considérant une vitesse d'écoulement moyenne pour une section rectangulaire, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial hl}{\partial t} + \frac{\partial lhu}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

Et

$$\frac{\partial lhu}{\partial x} = u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.16)$$

De même, d'après l'équation dynamique, on a :

$$\frac{\partial uA}{\partial t} + \frac{\partial u^2A}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = (S_0 - S_f)glh \quad (3.17)$$

Pour une section rectangulaire ($A = lh$) la force de pression P est :

$$dP = dpdA \Rightarrow P = \int dp l dh$$

donc

$$P = \int \rho gh l dh \Rightarrow P = \frac{1}{2} \rho gh^2 l$$

d'où

$$P = \frac{1}{2} \rho gh^2 l \quad (3.18)$$

L'équation dynamique devient alors :

$$\frac{\partial ulh}{\partial t} + \frac{\partial u^2lh}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \rho gh^2 l = (S_0 - S_f)glh \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial u^2h}{\partial x} + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x} (h^2) = (S_0 - S_f)gh \quad (3.20)$$

$$u \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u^2}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = (S_0 - S_f)gh \quad (3.21)$$

$$(u \frac{\partial h}{\partial t} + u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + hu \frac{\partial u}{\partial x}) + h \frac{\partial u}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = (S_0 - S_f)gh \quad (3.22)$$

En multipliant l'équation [3.9] par u on obtient :

$$(u \frac{\partial h}{\partial t} + u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + hu \frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \quad (3.23)$$

Par conséquent, l'équation dynamique se réduit à :

$$0 + h \frac{\partial u}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = (S_0 - S_f)gh \quad (3.24)$$

d'où

$$h \frac{\partial u}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = (S_0 - S_f)gh \quad (3.25)$$

Et finalement, la simplification de l'équation dynamique donne :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = (S_0 - S_f)g \quad (3.26)$$

3.4.1 Schéma explicite a deux (2) pas centré suivant x

On parle de schéma explicite lorsque le calcul de f_{i+1} à partir de f_i s'effectue à l'aide d'une formule explicite.

Pour un schéma explicite à 2 pas, il est nécessaire de connaître 2 pas de temps successifs pour démarrer les calculs, or seul un pas de temps est connu avec la condition initiale. Il faut donc faire une hypothèse sur le premier pas de temps t_1 .

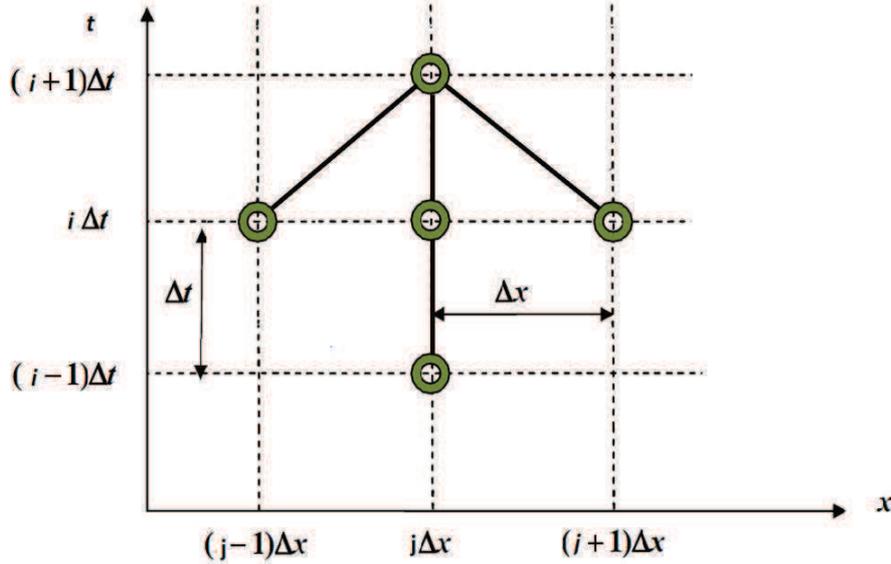


Figure 3.3 – Schéma de résolution explicite a deux (2) pas centré suivant x

Le principe de la méthode consiste, connaissant la solution à un pas de temps t_i à calculer la solution au pas de temps t_{i+1} , puis connaissant cette solution à t_{i+1} et ainsi de suite jusqu'au moment où on décide d'arrêter les calculs.

On procède donc pas de temps par pas de temps, la première itération se faisant à partir de la condition initiale (à t_0).

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La dérivée par rapport au temps est discrétisée selon le schéma} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{i+1} - u_j^{i-1}}{2\Delta t} \text{ et } \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_j^{i+1} - h_j^{i-1}}{2\Delta t} \\ \\ \text{La dérivée en espace} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^i - u_{j-1}^i}{2\Delta x} \text{ et } \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{j+1}^i - h_{j-1}^i}{2\Delta x} \end{array} \right.$$

On substitue ces opérations dans l'équation de continuité, on obtient :

$$\frac{h_j^{i+1} - h_j^{i-1}}{2\Delta t} + u_j^i \frac{h_{j+1}^i - h_{j-1}^i}{2\Delta x} + h_j^i \frac{u_{j+1}^i - u_{j-1}^i}{2\Delta x} = 0 \quad (3.27)$$

On multiplie l'équation par $(2\Delta t)$ on trouve :

$$h_j^{i+1} - h_j^{i-1} + u_j^i \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{j+1}^i - h_{j-1}^i) + h_j^i \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^i - u_{j-1}^i) = 0 \quad (3.28)$$

$$h_j^{i+1} = h_j^{i-1} + u_j^i \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{j-1}^i - h_{j+1}^i) + h_j^i \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j-1}^i - u_{j+1}^i) \quad (3.29)$$

On substitue ces même opérateurs dans l'équation dynamique, on obtient :

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^{i-1}}{2\Delta t} + u_j^i \frac{u_{j+1}^i - u_{j-1}^i}{2\Delta x} + g \frac{h_{j+1}^i - h_{j-1}^i}{2\Delta x} = (S_0 - (S_f)_j^i)g \quad (3.30)$$

On multiplie l'équation par $(2\Delta t)$ on trouve :

$$(u_j^{i+1} - u_j^{i-1}) + u_j^i (u_{j+1}^i - u_{j-1}^i) \frac{\Delta t}{\Delta x} + g(h_{j+1}^i - h_{j-1}^i) \frac{\Delta t}{\Delta x} = 2\Delta t(S_0 - (S_f)_j^i)g \quad (3.31)$$

D'où

$$u_j^{i+1} = u_j^{i-1} + u_j^i (u_{j-1}^i - u_{j+1}^i) \frac{\Delta t}{\Delta x} + g(h_{j-1}^i - h_{j+1}^i) \frac{\Delta t}{\Delta x} + 2\Delta t(S_0 - (S_f)_j^i)g \quad (3.32)$$

Et finalement, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} h_j^{i+1} = h_j^{i-1} + u_j^i \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{j-1}^i - h_{j+1}^i) + h_j^i \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j-1}^i - u_{j+1}^i) \\ u_j^{i+1} = u_j^{i-1} + u_j^i (u_{j-1}^i - u_{j+1}^i) \frac{\Delta t}{\Delta x} + g(h_{j-1}^i - h_{j+1}^i) \frac{\Delta t}{\Delta x} + 2\Delta t(S_0 - (S_f)_j^i)g \end{cases}$$

3.4.2 Schéma explicite centré suivant x

On pose :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\Delta t} & \text{et} & \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_j^{i+1} - h_j^i}{\Delta t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^i - u_{j-1}^i}{2\Delta x} & \text{et} & \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{j+1}^i - h_{j-1}^i}{2\Delta x} \end{cases}$$

On substitue ces opérateurs dans l'équation de continuité, on obtient :

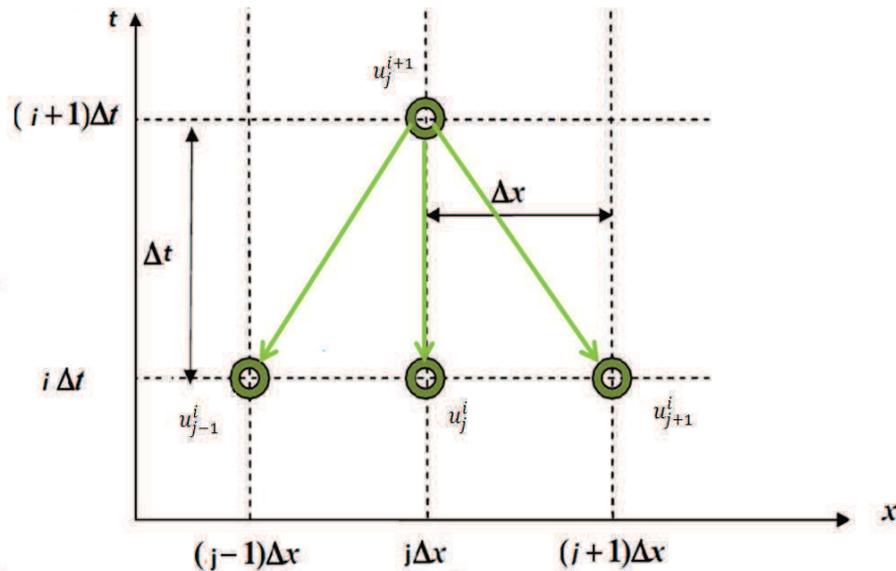


Figure 3.4 – Schéma de résolution explicite centré suivant x

$$\frac{h_j^{i+1} - h_j^i}{\Delta t} + u_j^i \frac{h_{j+1}^i - h_{j-1}^i}{2\Delta x} + h_j^i \frac{u_{j+1}^i - u_{j-1}^i}{2\Delta x} = 0 \quad (3.33)$$

On multiplie l'équation par $(2\Delta t)$ on trouve :

$$2h_j^{i+1} - 2h_j^i + u_j^i \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{j+1}^i - h_{j-1}^i) + h_j^i \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^i - u_{j-1}^i) = 0 \quad (3.34)$$

D'où,

$$h_j^{i+1} = h_j^i + u_j^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{j-1}^i - h_{j+1}^i) + h_j^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j-1}^i - u_{j+1}^i) \quad (3.35)$$

On substitue ces même opérateurs dans l'équation dynamique, on obtient :

$$\frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\Delta t} + u_j^i \frac{u_{j+1}^i - u_{j-1}^i}{2\Delta x} + g \frac{h_{j+1}^i - h_{j-1}^i}{2\Delta x} = (S_0 - (S_f)_j^i)g \quad (3.36)$$

On multiplie l'équation par (Δt) on trouve :

$$(u_j^{i+1} - u_j^i) + u_j^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^i - u_{j-1}^i) + g \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{j+1}^i - h_{j-1}^i) = \Delta t (S_0 - (S_f)_j^i)g \quad (3.37)$$

D'où :

$$u_j^{i+1} = u_j^i + u_j^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j-1}^i - u_{j+1}^i) + g \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{j-1}^i - h_{j+1}^i) + \Delta t (S_0 - (S_f)_j^i)g \quad (3.38)$$

Finalement, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} h_j^{i+1} = h_j^i + u_j^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{j-1}^i - h_{j+1}^i) + h_j^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j-1}^i - u_{j+1}^i) \\ u_j^{i+1} = u_j^i + u_j^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j-1}^i - u_{j+1}^i) + g \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{j-1}^i - h_{j+1}^i) + \Delta t (S_0 - (S_f)_j^i)g \end{cases}$$

Pour résoudre complètement le système, il faut fixer des conditions aux limites amont et aval, $\forall i$, et les conditions initiales $\forall j$ [**Bertrand - Krajewski, 2006**].

En effet, pour tous les schémas numériques de nature explicite se pose le problème de choix du pas du temps à utiliser pour la résolution, de ce choix dépend la stabilité du schéma numérique considéré. C'est pourquoi, ce type de schéma doit vérifier la condition de Courant-Friedrich-Levy exprimée sous la forme :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|U \pm C|} \quad (3.39)$$

Avec

$$C = \sqrt{2g \frac{A(h)}{A'(h)}} = \sqrt{2gh} \quad \text{pour une section rectangulaire} \quad (3.40)$$

Dans le cas d'une section rectangulaire, on fixe Δx , alors Δt est imposé.

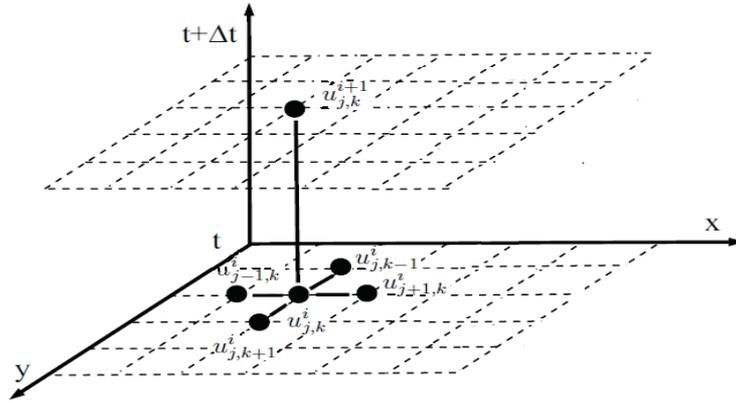


Figure 3.5 – Schéma de résolution explicite 2-D

3.5 Résolution du système de BSV 2-D par un schéma aux différences finies explicites

Pour simplifier les écritures, nous noterons i l'indice relatif au pas de temps et j l'indice relatif au pas d'espace. Dans ces conditions, on peut écrire : $f(i\Delta t, j\Delta x) = f_j^i$. L'équation de continuité 2-D s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \quad (3.41)$$

On peut écrire l'équation sous la forme :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (3.42)$$

De même, l'équation dynamique 2-D s'écrit :

$$\overbrace{\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y}}^{\alpha} = gh(S_0 - S_{fx}) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.43)$$

$$\overbrace{\frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial hv^2}{\partial y} + \frac{\partial huv}{\partial x}}^{\beta} = gh(S_0 - S_{fy}) + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.44)$$

On note que :

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} = \alpha \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial hv^2}{\partial y} + \frac{\partial huv}{\partial x} = \beta \quad (3.46)$$

$$\alpha = u \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial t} + h \frac{\partial u^2}{\partial x} + u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + hu \frac{\partial v}{\partial y} + vh \frac{\partial u}{\partial y} + uv \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.47)$$

$$\alpha = u \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial t} + 2hu \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + hu \frac{\partial v}{\partial y} + vh \frac{\partial u}{\partial y} + uv \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.48)$$

$$\alpha = \left(u \frac{\partial h}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + hu \frac{\partial v}{\partial y} + uv \frac{\partial h}{\partial y} \right) + h \frac{\partial u}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + vh \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.49)$$

On fait apparaître les termes de l'équation de continuité multipliés par la vitesse u :

$$u \frac{\partial h}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + hu \frac{\partial v}{\partial y} + vu \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (3.50)$$

donc, on obtient :

$$\alpha = h \frac{\partial u}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + vh \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.51)$$

$$\Rightarrow h \frac{\partial u}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + vh \frac{\partial u}{\partial y} = gh(S_0 - S_{fx}) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.52)$$

On procède de la même manière pour simplifier la deuxième équation :

$$\beta = \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial hv^2}{\partial y} + \frac{\partial huv}{\partial x} \quad (3.53)$$

$$\beta = h \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial t} + hv \frac{\partial u}{\partial x} + hu \frac{\partial v}{\partial x} + uv \frac{\partial h}{\partial x} + 2hv \frac{\partial v}{\partial y} + v^2 \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.54)$$

$$\beta = \left(v \frac{\partial h}{\partial t} + hv \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial h}{\partial x} + hv \frac{\partial v}{\partial y} + v^2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) + h \frac{\partial v}{\partial t} + hu \frac{\partial v}{\partial x} + hv \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.55)$$

$$v \frac{\partial h}{\partial t} + hv \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial h}{\partial x} + hv \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.56)$$

D'ou :

$$\beta = h \frac{\partial v}{\partial t} + hu \frac{\partial v}{\partial x} + hv \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.57)$$

On obtient finalement :

$$h \frac{\partial v}{\partial t} + hu \frac{\partial v}{\partial x} + hv \frac{\partial v}{\partial y} = gh(S_0 - S_{fy}) + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.58)$$

3.5.1 Discrétisation du système de BSV 2-D schéma explicite

On va reprendre l'équation de BSV, mais à 2 dimensions d'espace

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ h \frac{\partial u}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + vh \frac{\partial u}{\partial y} = gh(S_0 - S_{fx}) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ h \frac{\partial v}{\partial t} + hu \frac{\partial v}{\partial x} + hv \frac{\partial v}{\partial y} = gh(S_0 - S_{fy}) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{La dérivée par rapport au temps est toujours discrétisée selon le schéma} \\
 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{j,k}^{i+1} - u_{j,k}^i}{\Delta t} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v_{j,k}^{i+1} - v_{j,k}^i}{\Delta t} \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_{j,k}^{i+1} - h_{j,k}^i}{\Delta t} \\
 \\
 \text{La dérivée en x s'écrit} \\
 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1,k}^i - u_{j-1,k}^i}{2\Delta x} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_{j+1,k}^i - v_{j-1,k}^i}{2\Delta x} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{j+1,k}^i - h_{j-1,k}^i}{2\Delta x} \\
 \\
 \text{La dérivée en y s'écrit} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{j,k+1}^i - u_{j,k-1}^i}{2\Delta y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_{j,k+1}^i - v_{j,k-1}^i}{2\Delta y} \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{h_{j,k+1}^i - h_{j,k-1}^i}{2\Delta y} \\
 \\
 \text{la dérivée seconde par rapport à x aux 2 instants s'écrit} \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1,k}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j-1,k}^i}{\Delta x^2} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_{j+1,k}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j-1,k}^i}{\Delta x^2} \\
 \\
 \text{la dérivée seconde par rapport à y aux 2 instants s'écrit} \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{j,k+1}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j,k-1}^i}{\Delta y^2} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{v_{j,k+1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k-1}^i}{\Delta y^2}
 \end{array} \right.$$

On substitue ces opérateurs dans l'équation de continuité 2-D :

$$\begin{aligned}
 & \frac{h_{j,k}^{i+1} - h_{j,k}^i}{\Delta t} + h_{j,k}^i \left(\frac{u_{j+1,k}^i - u_{j-1,k}^i}{2\Delta x} \right) + u_{j,k}^i \left(\frac{h_{j+1,k}^i - h_{j-1,k}^i}{2\Delta x} \right) \\
 & + h_{j,k}^i \left(\frac{v_{j,k+1}^i - v_{j,k-1}^i}{2\Delta y} \right) + v_{j,k}^i \left(\frac{h_{j,k+1}^i - h_{j,k-1}^i}{2\Delta y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

On multiplie l'équation par (Δt) , on trouve :

$$\begin{aligned}
 & (h_{j,k}^{i+1} - h_{j,k}^i) + h_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1,k}^i - u_{j-1,k}^i) + u_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{j+1,k}^i - h_{j-1,k}^i) \\
 & + h_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta y} (v_{j,k+1}^i - v_{j,k-1}^i) + v_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta y} (h_{j,k+1}^i - h_{j,k-1}^i) = 0
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

D'ou :

$$\begin{aligned}
 h_{j,k}^{i+1} = & h_{j,k}^i + h_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j-1,k}^i - u_{j+1,k}^i) + u_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{j-1,k}^i - h_{j+1,k}^i) \\
 & + h_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta y} (v_{j,k-1}^i - v_{j,k+1}^i) + v_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta y} (h_{j,k-1}^i - h_{j,k+1}^i)
 \end{aligned} \quad (3.61)$$

On substitue ces opérateurs dans l'équation dynamique 2-D :
 Suivant x, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
 h_{j,k}^i \left(\frac{u_{j,k}^{i+1} - u_{j,k}^i}{\Delta t} \right) + h_{j,k}^i u_{j,k}^i \left(\frac{u_{j+1,k}^i - u_{j-1,k}^i}{2\Delta x} \right) + v_{j,k}^i h_{j,k}^i \left(\frac{u_{j,k+1}^i - u_{j,k-1}^i}{2\Delta y} \right) = \\
 gh_{j,k}^i (S_0 - (S_{fx})_{j,k}^i) + \nu \left(\frac{u_{j+1,k}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j-1,k}^i}{\Delta x^2} + \frac{u_{j,k+1}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j,k-1}^i}{\Delta y^2} \right)
 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Avec

$$(S_{fx})_{j,k}^i = \eta^2 u_{j,k}^i \frac{\sqrt{(u_{j,k}^i)^2 + (v_{j,k}^i)^2}}{(h_{j,k}^i)^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{l + h_{j,k}^i}{lh_{j,k}^i} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.63)$$

On multiplie l'équation par $(\Delta t/h_{j,k}^i)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
 (u_{j,k}^{i+1} - u_{j,k}^i) + u_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1,k}^i - u_{j-1,k}^i) + v_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta y} (u_{j,k+1}^i - u_{j,k-1}^i) = \Delta t g (S_0 - (S_{fx})_{j,k}^i) \\
 + \frac{\nu}{h_{j,k}^i} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1,k}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j-1,k}^i) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (u_{j,k+1}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j,k-1}^i) \right)
 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Par conséquence, la discrétisation de l'équation dynamique suivant x s'écrit :

$$\begin{aligned}
 u_{j,k}^{i+1} = & u_{j,k}^i + u_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j-1,k}^i - u_{j+1,k}^i) + v_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta y} (u_{j,k-1}^i - u_{j,k+1}^i) + \Delta t g (S_0 - (S_{fx})_{j,k}^i) \\
 & + \frac{\nu}{h_{j,k}^i} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1,k}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j-1,k}^i) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (u_{j,k+1}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j,k-1}^i) \right)
 \end{aligned} \quad (3.65)$$

De même, l'équation dynamique suivant y s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 h_{j,k}^i \left(\frac{v_{j,k}^{i+1} - v_{j,k}^i}{\Delta t} \right) + h_{j,k}^i u_{j,k}^i \left(\frac{v_{j+1,k}^i - v_{j-1,k}^i}{2\Delta x} \right) + h_{j,k}^i v_{j,k}^i \left(\frac{v_{j,k+1}^i - v_{j,k-1}^i}{2\Delta y} \right) = \\
 gh_{j,k}^i (0 - (S_{fy})_{j,k}^i) + \nu \left(\frac{v_{j+1,k}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j-1,k}^i}{\Delta x^2} + \frac{v_{j,k+1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k-1}^i}{\Delta y^2} \right)
 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Avec

$$(S_{fy})_{j,k}^i = \eta^2 v_{j,k}^i \frac{\sqrt{(u_{j,k}^i)^2 + (v_{j,k}^i)^2}}{(h_{j,k}^i)^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{l + h_{j,k}^i}{lh_{j,k}^i} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.67)$$

On multiplie les termes de l'équation par $(\Delta t/h_{j,k}^i)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
 (v_{j,k}^{i+1} - v_{j,k}^i) + u_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (v_{j+1,k}^i - v_{j-1,k}^i) + v_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta y} (v_{j,k+1}^i - v_{j,k-1}^i) &= \Delta t g(S_{fy})_{j,k}^i \\
 + \frac{\nu}{h_{j,k}^i} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} (v_{j+1,k}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j-1,k}^i) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (v_{j,k+1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k-1}^i) \right) & \quad (3.68)
 \end{aligned}$$

Par conséquence, la discrétisation de l'équation dynamique suivant y s'écrit :

$$\begin{aligned}
 v_{j,k}^{i+1} = v_{j,k}^i + u_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (v_{j-1,k}^i - v_{j+1,k}^i) + v_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta y} (v_{j,k-1}^i - v_{j,k+1}^i) + \Delta t g(S_{fy})_{j,k}^i \\
 + \frac{\nu}{h_{j,k}^i} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} (v_{j+1,k}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j-1,k}^i) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (v_{j,k+1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k-1}^i) \right) \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

Finalement, la discrétisation par schéma explicite de l'équation de BSV 2-D est donnée par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 h_{j,k}^{i+1} = h_{j,k}^i + h_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j-1,k}^i - u_{j+1,k}^i) + u_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{j-1,k}^i - h_{j+1,k}^i) \\
 \quad + h_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta y} (v_{j,k-1}^i - v_{j,k+1}^i) + v_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta y} (h_{j,k-1}^i - h_{j,k+1}^i) \\
 \\
 u_{j,k}^{i+1} = u_{j,k}^i + u_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j-1,k}^i - u_{j+1,k}^i) + v_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta y} (u_{j,k-1}^i - u_{j,k+1}^i) + \Delta t g(S_0 - (S_{fx})_{j,k}^i) \\
 \quad + \frac{\nu}{h_{j,k}^i} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1,k}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j-1,k}^i) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (u_{j,k+1}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j,k-1}^i) \right] \\
 \\
 v_{j,k}^{i+1} = v_{j,k}^i + u_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta x} (v_{j-1,k}^i - v_{j+1,k}^i) + v_{j,k}^i \frac{\Delta t}{2\Delta y} (v_{j,k-1}^i - v_{j,k+1}^i) + \Delta t g(S_{fy})_{j,k}^i \\
 \quad + \frac{\nu}{h_{j,k}^i} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x^2} (v_{j+1,k}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j-1,k}^i) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (v_{j,k+1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k-1}^i) \right]
 \end{array} \right.$$

3.5.2 Stabilité des schémas aux différences finies :

Les schémas aux différences finies explicites exigent toujours une condition de stabilité. Pour cela, on utilisera la condition de stabilité de *courant-Friedrichs-lewy* (c.f.l). Cette dernière est exprimée dans le cas des écoulement bidimensionnels (Fennema et Chaudhry,1986 ; Nujic,1995 ; Rahman et Chaudhry,1997) en coordonnées cartésiennes x et y, par :

$$C = \frac{(V + \sqrt{gh})\Delta t}{\Delta x \Delta y} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (3.70)$$

Ou, V et C sont dans l'ordre la vitesse résultant au point du maillage et le nombre de courant. La plupart des schémas aux différences finies implicites ne nécessitent pas de condition de stabilité, certains auteurs (Skeels et Samuels,1989 ; Ikni,2002 ; Ikni et al, 2004)proposent d'utiliser

quand même la condition de *courant – Friedrichs – lewy*, car pour eux, c'est une manière effective de choisir un pas de temps approprié. Le calcul du pas de temps Δt pour chaque point du maillage se fait, dans le cas des équations en coordonnées cartésiennes x et y , par les relation suivantes :

$$\Delta t = \min(\Delta t_1, \Delta t_2) \quad (3.71)$$

Avec

$$\Delta t_1 = C \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta x}{|u| + c} \right) \quad (3.72)$$

Et

$$\Delta t_1 = C \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta y}{|v| + c} \right) \quad (3.73)$$

Dans la relation qui ont précédées, u , v et c représentent dans l'ordre, la vitesse longitudinale, la vitesse transversale et la célérité de l'onde ($c = \sqrt{gh}$)[BERREKSI, 2012].

3.6 Principe de la méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis a été parmi les premières à atteindre un stade de développement avancé pour les calculs d'écoulements stationnaires et instationnaires. Elle ont permis une prise en compte complète des effets de non linéarité et de compressibilité ainsi que les effets de viscosité à l'aide des équations de Navier-Stokes, et de turbulence. Les méthodes aux volumes finis ont supplanté les méthodes classiques basées sur les différences finies dans le traitement des problèmes complexes notamment tridimensionnels. La technique comprend deux étapes importantes :[GUERAOU, 2010].

- le maillage : il consiste à diviser le domaine en plusieurs intervalles réguliers appelés volumes de contrôle.
- La discrétisation : lors de cette étape les équations sont intégrées dans les volumes de contrôle.

3.6.1 Pour un problème a une dimension

Les équations de BSV 1-D peuvent être réécrites sous la forme conservatrice suivante :

$$\frac{\partial U1}{\partial t} + \nabla F1 = S1 \quad (3.74)$$

Avec, :

$$U1 = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}; \quad F1 = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 \end{bmatrix} \quad S1 = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) + I_p \end{bmatrix}.$$

Maillage : Dans le cas d'une étude à une dimension de l'espace, le maillage est constitué d'une droite subdivisée en un nombre fini de segments réguliers. Ceux-ci constituent les volumes de contrôle dans le cas unidimensionnel.

Dans cette première étape, on divise le domaine de calcul en un nombre fini et discret de volumes de contrôle. Le centre de chaque volume est placé exactement au milieu du segment correspondant.

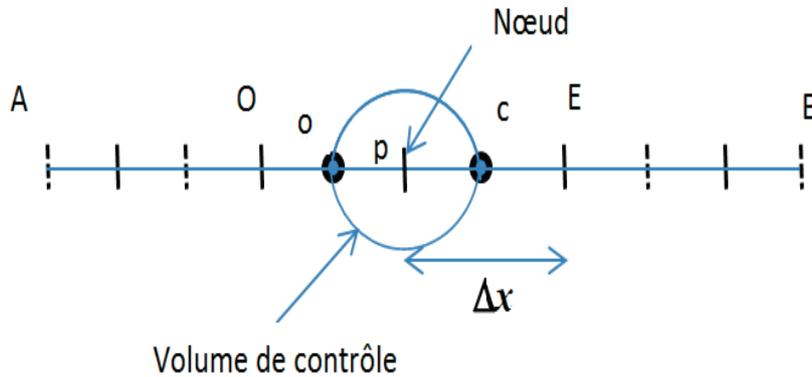


Figure 3.6 – Maillage a une dimension de l'espace

Discrétisation : L'intégration de l'équation BSV 1-D sur le volume de contrôle de centre P donne :

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{VC} \frac{\partial U1}{\partial t} dt dx + \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{VC} \nabla F1 dt dx = \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{VC} S1 dt dx \quad (3.75)$$

Les volumes de contrôle étant choisis réguliers, on peut supposer que le nœud P occupe une position d'indice j, le nœud O, la position d'indice j-1, le nœud E, la position d'indice j+1, le nœud o, la position d'indice j-1/2, le nœud e, la position d'indice j+1/2 .

Le système d'équations résultant est un système d'équations algébriques linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues [GUERAOU, 2010].

3.6.2 Pour un problème a deux dimensions

L'équation de BSV en deux dimensions dépend des variables de l'espace x et y. Il convient de rappeler que dans ce cas, deux dimensions de l'espace, le volume de contrôle est constitué du produit $\Delta x \cdot \Delta y$.

Les équations de BSV 2-D, peuvent être réécrites sous la forme conservatrice suivante :

$$\frac{\partial U2}{\partial t} + \nabla F2 = S2 \quad (3.76)$$

avec, :

$$U2 = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}; \text{ le vecteur d'écoulement ou le vecteur des valeurs inconnues.}$$

$$F2 = (E, G) \text{ avec } E = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 \\ huv \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 \end{bmatrix}$$

$$S2 = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) + \nu_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) + \nu_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \end{bmatrix}$$

Maillage : A deux dimensions, le domaine est subdivisé en un nombre fini de volumes de contrôle qui sont alors constitués d'éléments de surface réguliers. Le maillage a la forme suivante :

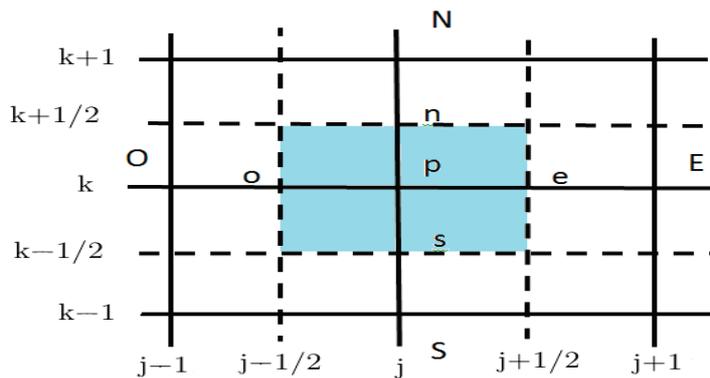


Figure 3.7 – Maillage a deux dimensions

Où : P est le nœud principal, j l'indice de discrétisation suivant l'axe des x, k l'indice de discrétisation suivant l'axe des y, Le temps sera indexé par l'indice i.

En général, les lettres E, O, N et S représentent respectivement l'Est, l'Ouest, le Nord et le Sud. Le carré coloré en bleu clair représente un élément de volume de contrôle. Les segments [PE] et [PN] valent respectivement Δx et Δy . Par la suite, nous allons adopter les maillages suivants [GUERAOU, 2010] :

- Suivant l'axe des x :
 $x(i) = (j - 1)\Delta x$
Où : Δx est le pas de discrétisation suivant cette direction.
- Suivant l'axe des y :
 $y(j) = (k - 1)\Delta y$
Où : Δy est le pas de discrétisation suivant cette direction.

Discrétisation : L'intégration de l'équation BSV 2-D sur le volume de contrôle de centre P donne :

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int \int_{VC} \frac{\partial U2}{\partial t} dt dV + \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int \int_{VC} \nabla F2 dt dV = \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int \int_{VC} S1 dt dV \quad (3.77)$$

Les volumes de contrôle étant choisis réguliers, on peut supposer que le nœud P occupe une position d'indice (j,k), le nœud O, la position d'indice (j-1,k), le nœud E, la position d'indice (j+1,k), le nœud S, la position d'indice (j,k-1), le nœud N, la position d'indice (j,k+1), le nœud o, la position d'indice (j-1/2,k), le nœud e, la position d'indice (j+1/2,k), le nœud s, la position d'indice (j,k-1/2), le nœud n, la position d'indice (j,k+1/2) [GUERAOU, 2010].

Le système d'équations résultant est donc construite pour tous les volumes de contrôle du domaine d'intégration qui ne sont pas influencés par les conditions aux limites.

3.7 Discrétisation des équations de BSV 1-D

On cherche donc à approcher les solutions de système de Saint Venant

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = (S_0 - S_f)gh \end{cases} \quad (3.78)$$

Présentons tout d'abord la notion du maillage. Soit une suite réelle strictement croissante $(x_{j+1/2})$ avec $j \in \mathbb{Z}$ représentant les interfaces entre les mailles M_j .

On définit les pas d'espace $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ qui correspondent aux mesures des mailles, on définit ensuite le pas de temps Δt et $t^i = i\Delta t$.

Avec :

$$U1 = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}; \quad F1 = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 \end{bmatrix} \quad S1 = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) + I_p \end{bmatrix}.$$

On suppose que :

- * U1,F1 et S1 sont constants sur Ω
- * U1,F1 et S1 sont constants pour tout t sur les faces $x_{j+1/2}$ et $x_{j-1/2}$;
- * U1,F1 et S1 sont constants pour tout x sur les faces t^{i+1} et t^i ;

On doit intégrer les équations sur un volume de contrôle $\Omega = \{(t^{i+1}, t^i) \times M_j\}$

Considérant une bande espace-temps (x, t) , $x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

On intègre l'équation de continuité sur le volume de contrôle Ω

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} dx dt = 0 \quad (3.79)$$

La premiere phase d'intégration s'ecrit :

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} h|_{t^i}^{t^{i+1}} dx + \int_{t^i}^{t^{i+1}} hu|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} dt = 0$$

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} [h(t^{i+1}, x) - h(t^i, x)] dx + \int_{t^i}^{t^{i+1}} [hu(t, x_{j+1/2}) - hu(t, x_{j-1/2})] dt = 0 \quad (3.80)$$

Avec les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_j^{i+1} - h_j^i = \frac{1}{x_{j+1/2} - x_{j-1/2}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} [h(t^{i+1}, x) - h(t^i, x)] dx \\ h_{j+1/2}^i u_{j+1/2}^i = \frac{1}{t^{i+1} - t^i} \int_{t^i}^{t^{i+1}} [h(t, x_{j+1/2})u(t, x_{j+1/2})] dt \\ h_{j-1/2}^i u_{j-1/2}^i = \frac{1}{t^{i+1} - t^i} \int_{t^i}^{t^{i+1}} [h(t, x_{j-1/2})u(t, x_{j-1/2})] dt \end{array} \right. \quad (3.81)$$

On définit un pas de temps $\Delta t = t^{i+1} - t^i$ et un pas d'espace $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ alors :

$$[h_j^{i+1} - h_j^i] \Delta x + [h_{j+1/2}^i u_{j+1/2}^i - h_{j-1/2}^i u_{j-1/2}^i] \Delta t = 0 \quad (3.82)$$

Finalemnt,

$$h_j^{i+1} = h_j^i + \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{j-1/2}^i u_{j-1/2}^i - h_{j+1/2}^i u_{j+1/2}^i) \quad (3.83)$$

De même l'équation dynamique on peut écrire :

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = (S_0 - S_f)gh \quad (3.84)$$

On intégré l'équation sur Ω :

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left[\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} \right] dx dt = \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (S_0 - S_f)gh dx dt \quad (3.85)$$

On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi = \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left[\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial u^2 h}{\partial x} + gh \frac{\partial h}{\partial x} \right] dx dt \\ \Phi = \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} (S_0 - S_f)gh dx dt \end{array} \right. \quad (3.86)$$

On intègre le premier membre de l'équation dynamique Ψ sur Ω

$$\Psi = \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial hu}{\partial t} dx dt + \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{\partial u^2 h}{\partial x} dx dt + \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} gh \frac{\partial h}{\partial x} dx dt \quad (3.87)$$

l'équation devient alors

$$\Psi = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} hu|_{t^i}^{t^{i+1}} dx + \int_{t^i}^{t^{i+1}} u^2 h|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} dt + g \int_{t^i}^{t^{i+1}} \frac{1}{2} h^2|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} dt \quad (3.88)$$

donc, l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} \Psi = & \left[h(t^{i+1}, x_j)u(t^i, x_j) - h(t^i, x_j)u(t^i, x_j) \right] (x_{j+1/2} - x_{j-1/2}) \\ & + \left[u^2(t^i, x_{j+1/2})h(t^i, x_{j+1/2}) - u^2(t^i, x_{j-1/2})h(t^i, x_{j-1/2}) \right] (t^{i+1} - t^i) \\ & + \frac{g}{2} \left[h^2(t^i, x_{j+1/2}) - h^2(t^i, x_{j-1/2}) \right] (t^{i+1} - t^i) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Centrée en

$$x_j = \frac{x_{j-1/2} + x_{j+1/2}}{2}$$

Chaque cellule a donc une taille de :

$$\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2} > 0$$

De même, on se donne un pas de temps Δt et la suite d'instants discrets :

$$t^i = i\Delta t, i \geq 0;$$

On définit : $\Delta t = t^{i+1} - t^i$ alors, l'équation dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \left[h_j^{i+1}u_j^{i+1} - h_j^i u_j^i \right] \Delta x + \left[(u_{j+1/2}^i)^2 h_{j+1/2}^i - (u_{j-1/2}^i)^2 h_{j-1/2}^i \right] \Delta t \\ + \frac{g}{2} \left[(h_{j+1/2}^i)^2 - (h_{j-1/2}^i)^2 \right] \Delta t = \left(S_0 - (S_f)_j^i \right) g h_j^i \Delta t \Delta x \end{aligned} \quad (3.90)$$

d'où

$$\begin{aligned} h_j^{i+1}u_j^{i+1} = h_j^i u_j^i + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(u_{j-1/2}^i)^2 h_{j-1/2}^i - (u_{j+1/2}^i)^2 h_{j+1/2}^i \right] \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{g}{2} \left[(h_{j-1/2}^i)^2 - (h_{j+1/2}^i)^2 \right] + \left(S_0 - (S_f)_j^i \right) g h_j^i \Delta t \end{aligned} \quad (3.91)$$

En divisant cette équation par (h_j^{i+1}) , on trouve :

$$\begin{aligned} u_j^{i+1} = \frac{h_j^i}{h_j^{i+1}} u_j^i + \frac{\Delta t}{\Delta x h_j^{i+1}} \left[(u_{j-1/2}^i)^2 h_{j-1/2}^i - (u_{j+1/2}^i)^2 h_{j+1/2}^i \right] + \\ \frac{1}{h_j^{i+1}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{g}{2} \left[(h_{j-1/2}^i)^2 - (h_{j+1/2}^i)^2 \right] + \frac{g h_j^i}{h_j^{i+1}} \Delta t \left(S_0 - (S_f)_j^i \right) \end{aligned} \quad (3.92)$$

On à u_j^{i+1} (ou h_j^{i+1}) qui est l'approximation de $u(t^{i+1}, x_j)$, $h(t^{i+1}, x_j)$. La solution obtenue donc constante sur chaque cellule(par morceaux) et discontinue aux frontières de ces dernières.

Finalement, la discrétisation de l'équation de BSV 1-D est défini par le système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} h_j^{i+1} &= h_j^i + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(h_{j-1/2}^i u_{j-1/2}^i - h_{j+1/2}^i u_{j+1/2}^i \right) \\ u_j^{i+1} &= \frac{h_j^i}{h_j^{i+1}} u_j^i + \frac{\Delta t}{\Delta x h_j^{i+1}} \left[(u_{j-1/2}^i)^2 h_{j-1/2}^i - (u_{j+1/2}^i)^2 h_{j+1/2}^i \right] + \\ & \frac{1}{h_j^{i+1}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{g}{2} \left[(h_{j-1/2}^i)^2 - (h_{j+1/2}^i)^2 \right] + \frac{g h_j^i}{h_j^{i+1}} \Delta t \left(S_0 - (S_f)_j^i \right) \end{aligned} \right. \quad (3.93)$$

3.8 Discrétisation des équations de BSV 2-D :

Le système de saint venant 2D s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} = gh(S_0 - S_{fx}) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial huv}{\partial x} + \frac{\partial hv^2}{\partial y} = gh(S_0 - S_{fy}) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (3.94)$$

La résolution du système du Barre Saint Venant 2D se fera par analogie avec le système en une dimension. En effet, tout comme précédemment nous allons utiliser un schéma des volumes finis, ce qui implique la décomposition de domaine en cellules Ω de la forme :

$$\Omega = \left\{ (t^{i+1}, t^i) \times (x_{j+1/2}, x_{j-1/2}) \times (y_{k+1/2}, y_{k-1/2}) \right\}$$

Centrée au point (x_j, y_k) ou :

$$x_j = \frac{x_{j-1/2} + x_{j+1/2}}{2} \text{ et } y_k = \frac{y_{k-1/2} + y_{k+1/2}}{2}$$

Chaque cellule a donc une aire égale à $\Delta x \Delta y$ ou :

$$\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2} \geq 0 \text{ et } \Delta y = y_{k+1/2} - y_{k-1/2} \geq 0;$$

De meme on se donne un pas de temps $\Delta t = t^{i+1} - t^i$.

Les équations de BSV 2-D peuvent être réécrites sous la forme conservatrice suivante :

$$\frac{\partial U2}{\partial t} + \nabla F2 = S2 \quad (3.95)$$

avec, :

$$U2 = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}; \text{ le vecteur d'écoulement ou le vecteur des valeurs inconnues.}$$

$$F2 = (E, G) \text{ avec } E = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 \\ huv \end{bmatrix} \text{ et } G = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 \end{bmatrix}$$

$$S2 = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) + \nu_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) + \nu_t \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \end{bmatrix}$$

On suppose que :

- * U2, F2 et S2 sont constants sur Ω
- * U2, F2 et S2 sont constants pour tout t sur les faces $x_{j+1/2}$ et $x_{j-1/2}$;
- * U2, F2 et S2 sont constants pour tout x sur les faces t^{i+1} et t^i ;

On a l'équation de continuité :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \quad (3.96)$$

On doit intégrer cette équation sur le volume de contrôle Ω

$$\begin{aligned} \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial h}{\partial t} dx dy dt + \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hu}{\partial x} dx dy dt \\ + \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hv}{\partial y} dx dy dt = 0 \end{aligned} \quad (3.97)$$

◆ Intégration du premier terme de l'équation de continuité sur le volume de contrôle :

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial h}{\partial t} dx dy dt = \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} h|_{t^i}^{t^{i+1}} dx dy \quad (3.98)$$

Sachant que $\Delta y = y_{k+1/2} - y_{k-1/2}$ et $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ l'équation [3.43] devient :

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial h}{\partial t} dx dy dt = [h(t^{i+1}, x_j, y_k) - h(t^i, x_j, y_k)] \Delta x \Delta y \quad (3.99)$$

◆ Intégration du deuxième terme de l'équation de continuité, sur le volume de contrôle Ω , on trouve :

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hu}{\partial x} dx dy dt = \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} hu|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} dy dt \quad (3.100)$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hu}{\partial x} dx dy dt = \\ [h(t^i, x_{j+1/2}, y_k)u(t^i, x_{j+1/2}, y_k) - h(t^i, x_{j-1/2}, y_k)u(t^i, x_{j-1/2}, y_k)] \Delta t \Delta y \end{aligned} \quad (3.101)$$

◆ Intégration du troisième terme de l'équation de continuité sur le volume de contrôle Ω , on trouve :

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hv}{\partial y} dx dy dt = \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} hv|_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} dx dt \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hv}{\partial y} dx dy dt = \\ [h(t^i, x_j, y_{k+1/2})v(t^i, x_j, y_{k+1/2}) - h(t^i, x_j, y_{k-1/2})v(t^i, x_j, y_{k-1/2})] \Delta t \Delta x \end{aligned} \quad (3.103)$$

Pour simplifier les écritures, on suppose que :

$$h(t^i, x_j, y_k) = h_{j,k}^i$$

$$u(t^i, x_j, y_k) = u_{j,k}^i$$

$$v(t^i, x_j, y_k) = v_{j,k}^i$$

donc, l'équation de continuité peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} (h_{j,k}^{i+1} - h_{j,k}^i) \Delta x \Delta y + (h_{j+1/2,k}^i u_{j+1/2,k}^i - h_{j-1/2,k}^i u_{j-1/2,k}^i) \Delta t \Delta y \\ + (h_{j,k+1/2}^i v_{j,k+1/2}^i - h_{j,k-1/2}^i v_{j,k-1/2}^i) \Delta t \Delta x = 0 \end{aligned} \quad (3.104)$$

En divisant l'équation par $(\Delta x \Delta y)$, on trouve :

$$\begin{aligned} & \left(h_{j,k}^{i+1} - h_{j,k}^i \right) + \left(h_{j+1/2,k}^i u_{j+1/2,k}^i - h_{j-1/2,k}^i u_{j-1/2,k}^i \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ & + \left(h_{j,k+1/2}^i v_{j,k+1/2}^i - h_{j,k-1/2}^i v_{j,k-1/2}^i \right) \frac{\Delta t}{\Delta y} = 0 \end{aligned} \quad (3.105)$$

d'où

$$\begin{aligned} h_{j,k}^{i+1} = h_{j,k}^i + \frac{\Delta t}{\Delta x} & \left(h_{j-1/2,k}^i u_{j-1/2,k}^i - h_{j+1/2,k}^i u_{j+1/2,k}^i \right) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(h_{j,k-1/2}^i v_{j,k-1/2}^i - h_{j,k+1/2}^i v_{j,k+1/2}^i \right) \end{aligned} \quad (3.106)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant la direction x s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} & = gh(S_0 - S_{fx}) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.107)$$

(1) (2) (3) (4) (5)

On intègre l'équation [3.107] sur le volume de contrôle Ω :

$$\begin{aligned} & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \left(\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2}{\partial x} + \frac{\partial huv}{\partial y} \right) dx dy dt = \\ & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \left(gh(S_0 - S_{fx}) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right) dx dy dt \quad (3.108) \\ & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hu}{\partial t} dx dy dt + \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hu^2}{\partial x} dx dy dt \\ & + \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial huv}{\partial y} dx dy dt = \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} gh(S_0 - S_{fx}) dx dy dt \\ & + \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy dt \end{aligned} \quad (3.109)$$

◆ **Intégration du premier terme de l'équation [3.107] :**

$$\begin{aligned} & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hu}{\partial t} dx dy dt = \\ & \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \left[h(t^{i+1}, x_j, y_k) u(t^{i+1}, x_j, y_k) - h(t^i, x_j, y_k) u(t^i, x_j, y_k) \right] dx dy \end{aligned} \quad (3.110)$$

Sachant que $\Delta y = y_{k+1/2} - y_{k-1/2}$ et $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ cette équation devient :

$$\begin{aligned} & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hu}{\partial t} dx dy dt = \\ & \left[h(t^{i+1}, x_j, y_k) u(t^{i+1}, x_j, y_k) - h(t^i, x_j, y_k) u(t^i, x_j, y_k) \right] \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (3.111)$$

Et la forme simplifiée de ce terme s'écrit :

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hu}{\partial t} dx dy dt = \left[h_{j,k}^{i+1} u_{j,k}^{i+1} - h_{j,k}^i u_{j,k}^i \right] \Delta x \Delta y \quad (3.112)$$

◆ Intégration du deuxième terme de l'équation[3.107] :

$$\begin{aligned} & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hu^2}{\partial x} dx dy dt = \\ & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} h(t^i, x_{j+1/2}, y_k) u^2(t^i, x_{j+1/2}, y_k) dy dt - \\ & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} h(t^{i+1}, x_{j+1/2}, y_k) u^2(t^{i+1}, x_{j+1/2}, y_k) dy dt \end{aligned} \quad (3.113)$$

Sachant que $\Delta y = y_{k+1/2} - y_{k-1/2}$ et $\Delta t = t^{i+1} - t^i$ l'équation devient :

$$\begin{aligned} & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hu^2}{\partial x} dx dy dt = \\ & \left[h(t^i, x_{j+1/2}, y_k) u^2(t^i, x_{j+1/2}, y_k) - h(t^{i+1}, x_{j+1/2}, y_k) u^2(t^{i+1}, x_{j+1/2}, y_k) \right] \Delta y \Delta t \end{aligned} \quad (3.114)$$

d'où la forme simplifiée du deuxième terme de l'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial hu^2}{\partial x} dx dy dt = \\ & \left[h_{j+1/2,k}^i (u_{j+1/2,k}^i)^2 - h_{j-1/2,k}^i (u_{j-1/2,k}^i)^2 \right] \Delta y \Delta t \end{aligned} \quad (3.115)$$

◆ Intégration du troisième terme de l'équation [3.107] :

$$\begin{aligned} & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial huv}{\partial y} dx dy dt = \\ & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} h(t^i, x_j, y_{k+1/2}) u(t^i, x_j, y_{k+1/2}) v(t^i, x_j, y_{k+1/2}) dx dt \\ & - \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} h(t^i, x_j, y_{k-1/2}) u(t^i, x_j, y_{k-1/2}) v(t^i, x_j, y_{k-1/2}) dx dt \end{aligned} \quad (3.116)$$

On peut écrire le troisième terme de l'équation [3.107] sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial huv}{\partial y} dx dy dt = \\ & (h_{j,k+1/2}^i u_{j,k+1/2}^i v_{j,k+1/2}^i - h_{j,k-1/2}^i u_{j,k-1/2}^i v_{j,k-1/2}^i) \Delta x \Delta t \end{aligned} \quad (3.117)$$

◆ Intégration du quatrième terme de l'équation [3.107] :

$$\begin{aligned} & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} gh(S_0 - S_{fx}) dx dy dt = \\ & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} gh(S_0 - S_{fx}) dx dy dt \end{aligned} \quad (3.118)$$

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} gh(S_0 - S_{fx}) dx dy dt = gh_{j,k}^i (S_0 - (S_{fx})_{j,k}^i) \Delta x \Delta y \Delta t \quad (3.119)$$

Avec

$$(S_{fx})_{j,k}^i = \eta^2 u_{j,k}^i \frac{\sqrt{(u_{j,k}^i)^2 + (v_{j,k}^i)^2}}{(h_{j,k}^i)^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{l + h_{j,k}^i}{lh_{j,k}^i} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.120)$$

◆ Intégration du cinquième terme de l'équation [3.107] :

$$\begin{aligned} \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy dt = \\ \nu \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy dt \end{aligned} \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy dt = \\ \nu \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dt + \nu \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy dt \end{aligned} \quad (3.122)$$

On note que

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dt = \chi$$

et

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy dt = \psi$$

◆ Intégrant les deux termes (χ, ψ) de l'équation :

a) Pour le premier terme χ :

$$\chi = \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_{j+1/2}} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_{j-1/2}} \right) dy dt \quad (3.123)$$

donc

$$\chi = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_{j+1/2}} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_{j-1/2}} \right) \Delta y \Delta t \quad (3.124)$$

Les approximations des dérivées sur les faces sont définies par des différences centrées :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_{j+1/2}} = \frac{u_{j+1,k}^i - u_{j,k}^i}{\Delta x} \quad (3.125)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_{j-1/2}} = \frac{u_{j,k}^i - u_{j-1,k}^i}{\Delta x} \quad (3.126)$$

donc

$$\chi = \left(\frac{u_{j+1,k}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j-1,k}^i}{\Delta x} \right) \Delta y \Delta t \quad (3.127)$$

D'où

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dt = \left(\frac{u_{j+1,k}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j-1,k}^i}{\Delta x} \right) \Delta y \Delta t \quad (3.128)$$

b) Pour le deuxième terme ψ :

$$\psi = \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy dt \quad (3.129)$$

donc

$$\psi = \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y_{k+1/2}} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y_{k-1/2}} \right) dx dt \quad (3.130)$$

$$\psi = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y_{k+1/2}} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y_{k-1/2}} \right) \Delta x \Delta t \quad (3.131)$$

Les approximations des dérivées sur les faces sont définies par différences centrées :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y_{k+1/2}} = \frac{u_{j,k+1}^i - u_{j,k}^i}{\Delta y} \quad (3.132)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y_{k-1/2}} = \frac{u_{j,k}^i - u_{j,k-1}^i}{\Delta y} \quad (3.133)$$

donc

$$\psi = \left(\frac{u_{j,k+1}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j,k-1}^i}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta t \quad (3.134)$$

D'où

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy dt = \left(\frac{u_{j+1,k}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j-1,k}^i}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta t \quad (3.135)$$

En substituant les équations [3.128] et [3.135] dans l'équation [3.122], on aboutit à :

$$\begin{aligned} & \int_{t^i}^{t^{i+1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{k-1/2}}^{y_{k+1/2}} \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy dt = \\ & \nu \Delta x \Delta y \Delta t \left(\frac{u_{j,k+1}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j,k-1}^i}{\Delta y^2} + \frac{u_{j+1,k}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j-1,k}^i}{\Delta x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.136)$$

Finalement, en substituant les équations [3.112],[3.115],[3.117],[3.120] et [3.136] dans l'équation [3.107], on trouve :

$$\begin{aligned} & \left[h_{j,k}^{i+1} u_{j,k}^{i+1} - h_{j,k}^i u_{j,k}^i \right] \Delta x \Delta y + \left[h_{j+1/2,k}^i (u_{j+1/2,k}^i)^2 - h_{j-1/2,k}^i (u_{j-1/2,k}^i)^2 \right] \Delta y \Delta t \\ & + (h_{j,k+1/2}^i u_{j,k+1/2}^i v_{j,k+1/2}^i - h_{j,k-1/2}^i u_{j,k-1/2}^i v_{j,k-1/2}^i) \Delta x \Delta t = \\ & \nu \Delta x \Delta y \Delta t \left(\frac{u_{j,k+1}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j,k-1}^i}{\Delta y^2} + \frac{u_{j+1,k}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j-1,k}^i}{\Delta x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$+gh_{j,k}^i \left(S_0 - (S_{fx})_{j,k}^i \right) \Delta x \Delta y \Delta t$$

En divisant cette équation par $(\Delta x \Delta y h_{j,k}^{i+1})$, on trouve :

$$\begin{aligned} u_{j,k}^{i+1} = & \frac{h_{j,k}^i}{h_{j,k}^{i+1}} u_{j,k}^i + \frac{1}{h_{j,k}^{i+1}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[h_{j-1/2,k}^i (u_{j-1/2,k}^i)^2 - h_{j+1/2,k}^i (u_{j+1/2,k}^i)^2 \right] \\ & + \frac{1}{h_{j,k}^{i+1}} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(h_{j,k-1/2}^i u_{j,k-1/2}^i v_{j,k-1/2}^i - h_{j,k+1/2}^i u_{j,k+1/2}^i v_{j,k+1/2}^i \right) \\ & + \frac{\nu}{h_{j,k}^{i+1}} \Delta t \left(\frac{u_{j,k+1}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j,k-1}^i}{\Delta y^2} + \frac{u_{j+1,k}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j-1,k}^i}{\Delta x^2} \right) \\ & + \frac{1}{h_{j,k}^{i+1}} gh_{j,k}^i \left(S_0 - (S_{fx})_{j,k}^i \right) \Delta t \end{aligned} \quad (3.138)$$

L'équation de quantité de mouvement suivant la direction y s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial huv}{\partial x} + \frac{\partial hv^2}{\partial y} = gh(S_0 - S_{fy}) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.139)$$

On procède par même méthodologie que pour l'équation de quantité de mouvement suivant la direction x, on aura a la fin :

$$\begin{aligned} v_{j,k}^{i+1} = & \frac{h_{j,k}^i}{h_{j,k}^{i+1}} v_{j,k}^i + \frac{1}{h_{j,k}^{i+1}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[h_{j-1/2,k}^i u_{j-1/2,k}^i v_{j-1/2,k}^i - h_{j+1/2,k}^i u_{j+1/2,k}^i v_{j+1/2,k}^i \right] \\ & + \frac{1}{h_{j,k}^{i+1}} \left[gh_{j,k}^i \left(S_0 - (S_{fy})_{j,k}^i \right) + \nu \left(\frac{v_{j,k+1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k-1}^i}{\Delta y^2} + \frac{v_{j+1,k}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j-1,k}^i}{\Delta x^2} \right) \right] \Delta t \\ & + \frac{1}{h_{j,k}^{i+1}} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[h_{j,k+1/2}^i (v_{j,k+1/2}^i)^2 - h_{j,k-1/2}^i (v_{j,k-1/2}^i)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.140)$$

Avec

$$(S_{fy})_{j,k}^i = \eta^2 v_{j,k}^i \frac{\sqrt{(u_{j,k}^i)^2 + (v_{j,k}^i)^2}}{(h_{j,k}^i)^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{l + h_{j,k}^i}{lh_{j,k}^i} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.141)$$

Finalemnt, la discrétisation des équations de BSV 2-D par la méthode des volumes finis est définie par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{j,k}^{i+1} = h_{j,k}^i + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(h_{j-1/2,k}^i u_{j-1/2,k}^i - h_{j+1/2,k}^i u_{j+1/2,k}^i \right) \\ \quad + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(h_{j,k-1/2}^i v_{j,k-1/2}^i - h_{j,k+1/2}^i v_{j,k+1/2}^i \right) \\ \\ u_{j,k}^{i+1} = \frac{h_{j,k}^i}{h_{j,k}^{i+1}} u_{j,k}^i + \frac{1}{h_{j,k}^{i+1}} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[h_{j,k-1/2}^i u_{j,k-1/2}^i v_{j,k-1/2}^i - h_{j,k+1/2}^i u_{j,k+1/2}^i v_{j,k+1/2}^i \right] + \\ \frac{1}{h_{j,k}^{i+1}} \left[gh_{j,k}^i \left(S_0 - (S_{fx})_{j,k}^i \right) + \nu \left(\frac{u_{j,k+1}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j,k-1}^i}{\Delta y^2} + \frac{u_{j+1,k}^i - 2u_{j,k}^i + u_{j-1,k}^i}{\Delta x^2} \right) \right] \Delta t \\ \quad + \frac{1}{h_{j,k}^{i+1}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[h_{j-1/2,k}^i (u_{j-1/2,k}^i)^2 - h_{j+1/2,k}^i (u_{j+1/2,k}^i)^2 \right] \\ \\ v_{j,k}^{i+1} = \frac{h_{j,k}^i}{h_{j,k}^{i+1}} v_{j,k}^i + \frac{1}{h_{j,k}^{i+1}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[h_{j-1/2,k}^i u_{j-1/2,k}^i v_{j-1/2,k}^i - h_{j+1/2,k}^i u_{j+1/2,k}^i v_{j+1/2,k}^i \right] + \\ \frac{1}{h_{j,k}^{i+1}} \left[gh_{j,k}^i \left(S_0 - (S_{fy})_{j,k}^i \right) + \nu \left(\frac{v_{j,k+1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k-1}^i}{\Delta y^2} + \frac{v_{j+1,k}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j-1,k}^i}{\Delta x^2} \right) \right] \Delta t \\ \quad + \frac{1}{h_{j,k}^{i+1}} \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[h_{j,k+1/2}^i (v_{j+1/2,k}^i)^2 - h_{j,k-1/2}^i (v_{j-1/2,k}^i)^2 \right] \end{array} \right.$$

3.9 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les étapes de discrétisation du système de BSV 1-D et 2-D par le biais de la méthode des différence finies qui consiste à remplacer les opérateurs différentiels par les opérateurs algébrique afin d'établir les expressions des paramètres de l'écoulement (h,u,v). La simplicité de cette méthode facilite sa mise en application, toute fois, elle génère un temps de calcul assez long notamment pour le système bidimensionnel, de plus, elle présente souvent des problèmes de convergence, en particulier pour les schémas explicites.

La méthode des volumes finis est une méthode de discrétisation pour les lois de conservation, elle est bien adaptée à la simulation numérique, l'avantage de cette méthode par rapport a la méthode des différences finies est qu'elle s'adapte facilement à des géométries complexes.

Chapitre 4

Résultats de simulation

4.1 Introduction

Après avoir réalisé la discrétisation du système de BSV en utilisant d'abord, la méthode des différences finies et par la suite, la méthode des volumes finis, il est nécessaire de concrétiser cette démarche en un code de calcul qui a pour objectif, la simulation des écoulements a surface libre.

Dans ce contexte, nous avons pu élaborer sous MATLAB, un outil de modélisation des écoulements en réseau d'assainissement qui vise à déterminer les paramètres de l'écoulement (h, v) en temps de crues. Dans ce chapitre, nous allons essayer de mettre en application le modèle élaboré en faisant simuler en temps de pluie le comportement d'un tronçon du collecteur Eucalyptus.

4.2 Méthodes de résolution

Généralement, le choix de la méthode de résolution dépend de plusieurs paramètres, en particulier, la simplicité, le type de discrétisation (1D,2D), et la rapidité de résolution. C'est pourquoi, notre modèle est basée sur la méthode des DF et la méthode des VF.

La première est généralement utilisée pour les modèles 1D, tandis que la deuxième est plus adaptée aux modèle 2D.

La méthode des différences finies présente l'avantage de la simplicité de mise en œuvre. Cependant, elle génère un temps de calcul assez long, en plus de la difficulté de convergence. Ces deux méthodes peuvent être employées sous plusieurs formes selon le type de discrétisation spatiale ou temporelle choisi (schémas numériques).

Dans notre cas, les schémas utilisés pour la méthode des DF sont :

1. schéma explicite centré suivant x ;

2. schéma explicite a 2 pas

Pour la méthode des volumes finis, nous avons utilisé le schéma différence centre.

4.3 Données d'entrée du modèle

Les données d'entrée du modèle sont de type hauteur - vitesse, ils correspondent aux mesures effectuées au niveau du collecteur d'assainissement Eucalyptus 1. Ces mesures ont été réalisées par SEAAL dans le cadre du projet d'actualisation du schéma directeur d'assainissement de la Wilaia d'Alger. En effet, a fin de vérifier la capacité de notre modèle à reproduire les paramètres de l'écoulement, nous allons choisir un évènement pluvieux significatif, durant lequel nous pouvons réaliser une simulation de l'écoulement en aval du point de mesure en question. L'évènement pluvieux utilisé est celui du 03/11/2008, nous l'avons choisi de telle sorte qu'il soit à la fois significatif et ne génère pas un temps de calcul assez long.

4.3.1 Présentation de la zone d'étude

Le collecteur principal desservant la zone urbaine de la commune des Eucalyptus se dirige vers le Nord en empruntant la RN8. Il franchit ensuite la Rocade Sud puis traverse une zone agricole de la commune de Oued Smar (à l'Ouest immédiat de la décharge) avant de se rejeter dans l'oued Smar.



Figure 4.1 – Zone d'étude-collecteur Eucalyptus

Le point de mesure était situé dans le collecteur Eucalyptus au nord ouest de la décharge après la ligne de chemin de fer.

La campagne de mesures s'est déroulée du 27 octobre 2008 au 23 novembre 2008.

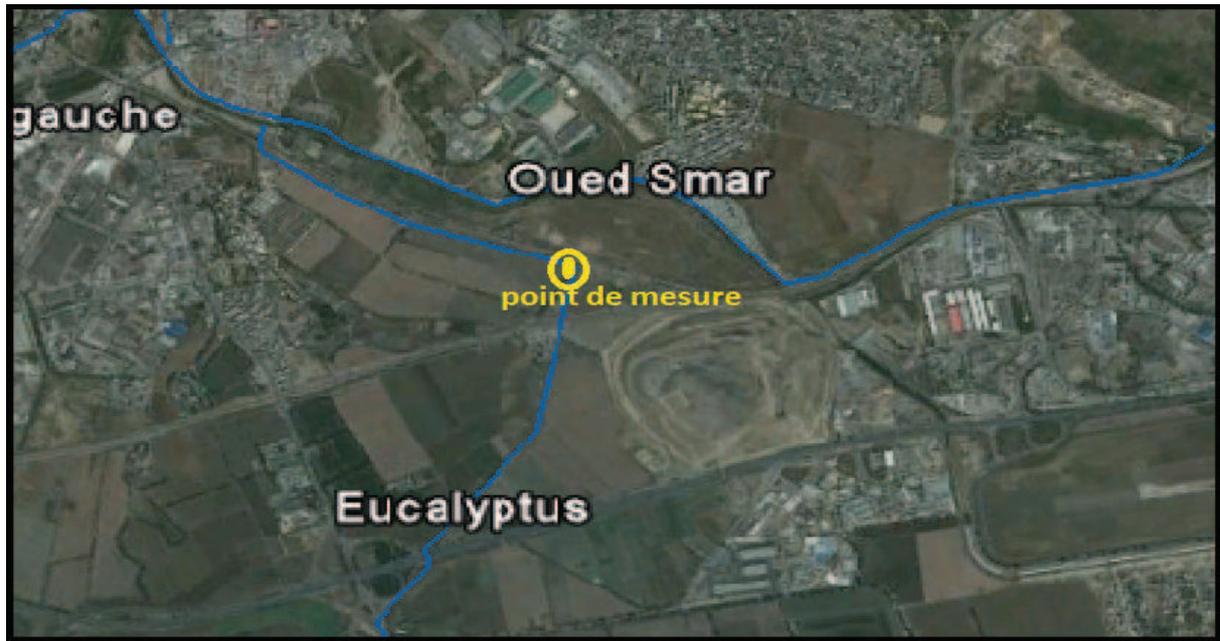


Figure 4.2 – Point de mesure-collecteur Eucalyptus



Figure 4.3 – Section de mesure

La figures (4.4), (4.5) et (4.6) présentent les variations temporelles des paramètres de l'écoulement (Q , h et v), mesurés pendant la journée du 03/11/2008.

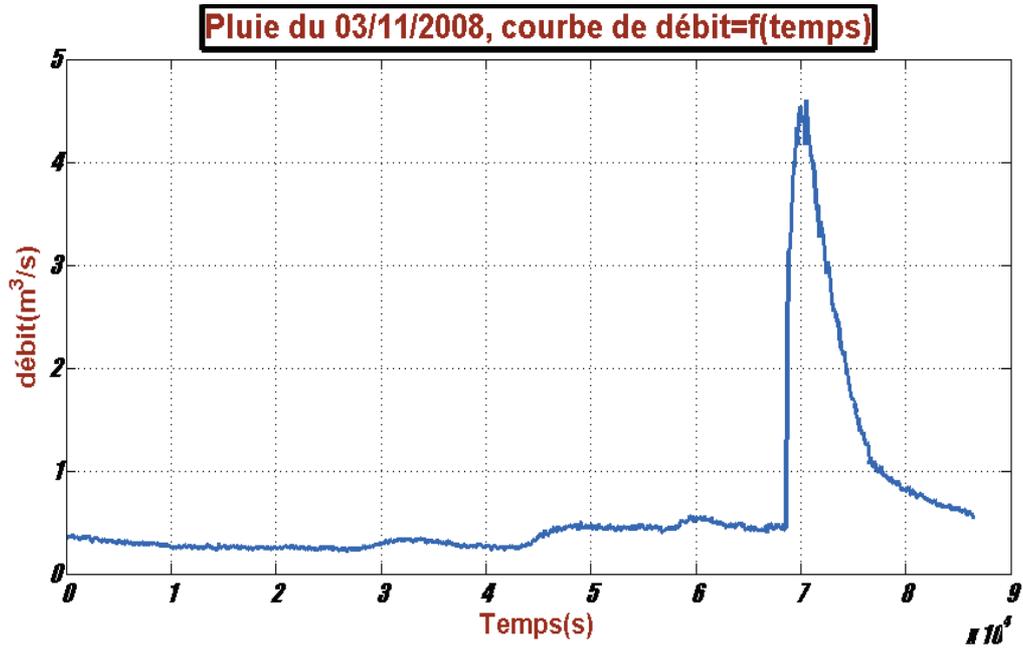


Figure 4.4 – Données d'entrée de la pluie du 03/11/08

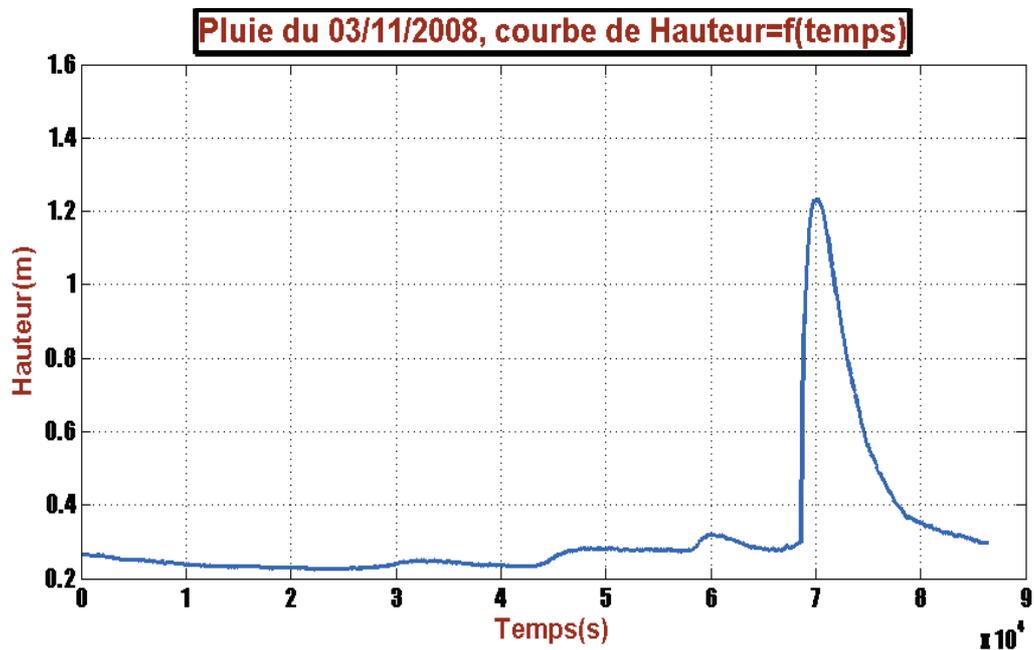


Figure 4.5 – Données d'entrée de la pluie du 03/11/08

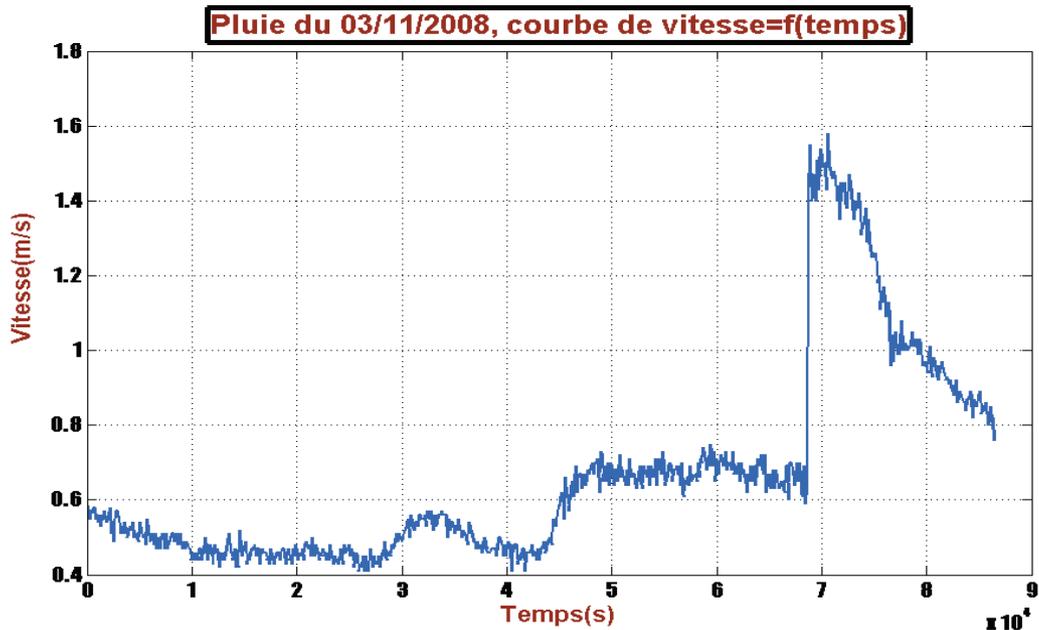


Figure 4.6 – Données d'entrée de la pluie du 03/11/08

Pour éviter un temps de calcul assez long, nous avons pris pendant le même événement pluvieux, un intervalle de temps plus au moins étroit durant lequel, l'écoulement à travers le collecteur Eucalyptus fera l'objet d'une simulation dans le but de déterminer les paramètres hydrauliques (Hauteur-Vitesse) aux points et moments souhaités. L'événement pluvieux choisi s'étale de 19h00 à 21h18, soit une durée de 02 heures et 18 minutes.

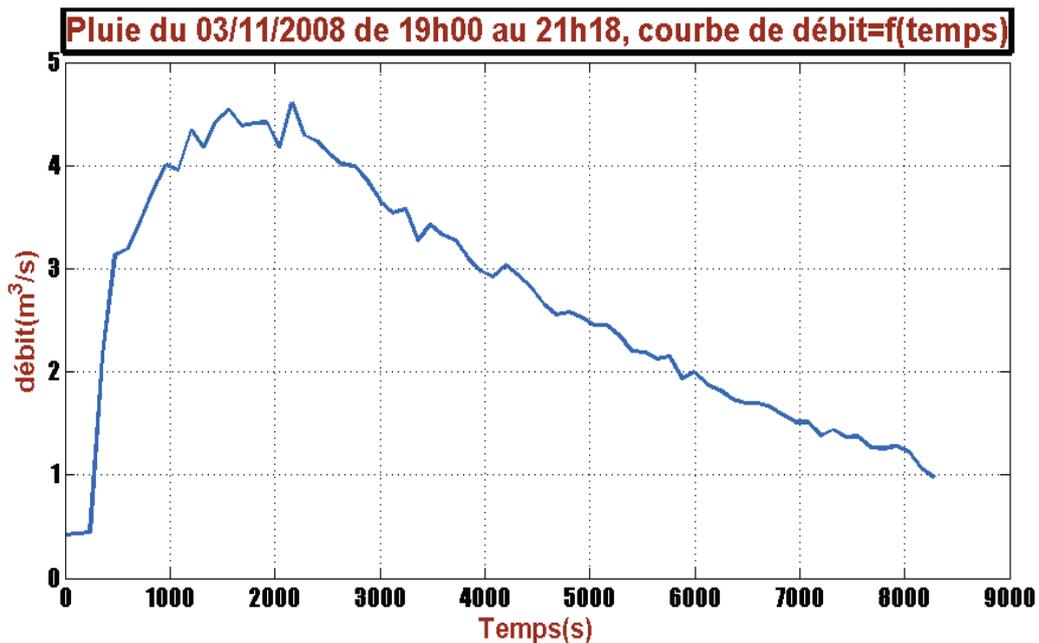


Figure 4.7 – Événement pluvieux utilisé de la pluie du 03/11/2008

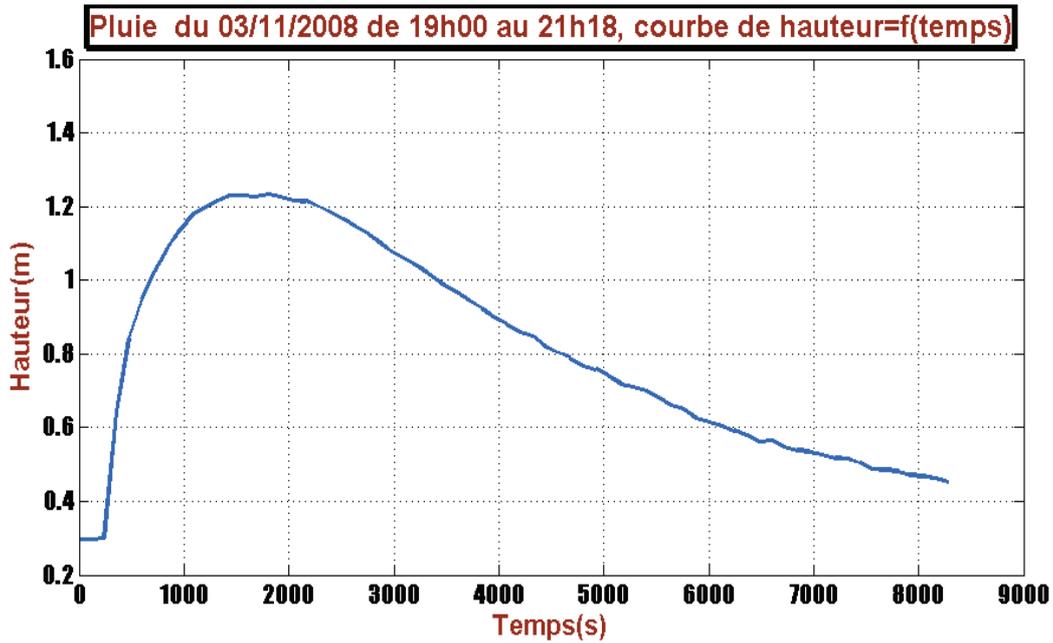


Figure 4.8 – Événement pluvieux utilisé de la pluie du 03/11/2008

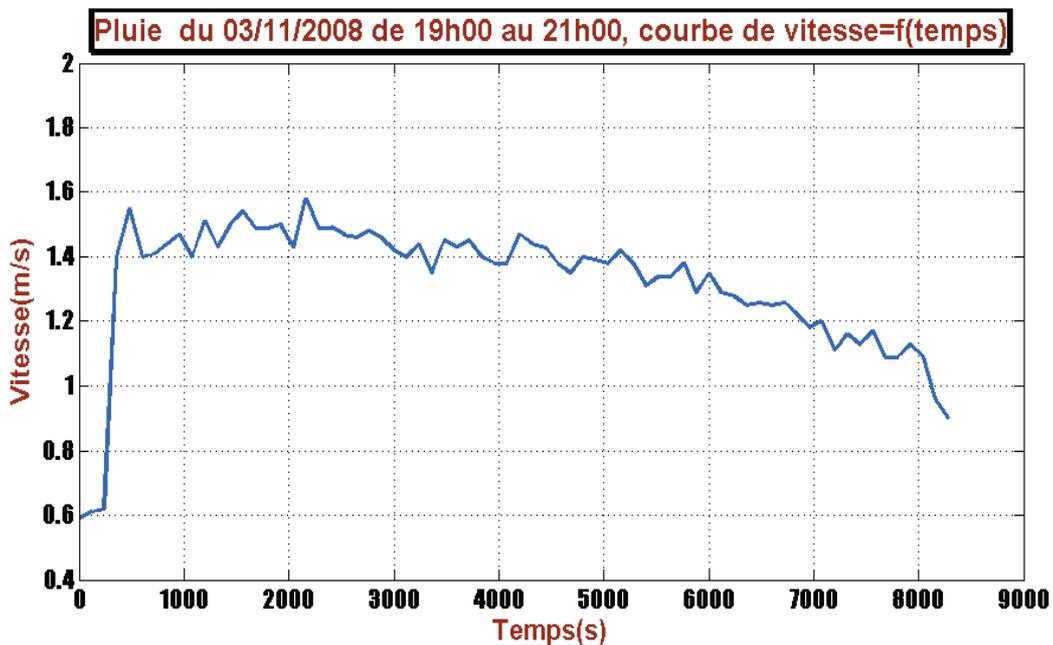


Figure 4.9 – Événement pluvieux utilisé de la pluie du 03/11/2008

4.4 Résultats de simulation

Nous voulons mettre en application notre modèle en faisant simuler le comportement d'un tronçon du collecteur Eucalyptus durant l'événement pluvieux choisi et ce, en utilisant la méthode des DF et la méthodes des VF, les résultats obtenus sont présentés ci-après.

4.4.1 Méthode des différences finies-Schéma Explicite Centré Suivant x

En utilisant un schéma par différences finies type explicite centré suivant l'axe des abscisses, nous présentons dans les figures [4.10],[4.11],[4.12]et[4.13] les courbes des paramètres calculés.

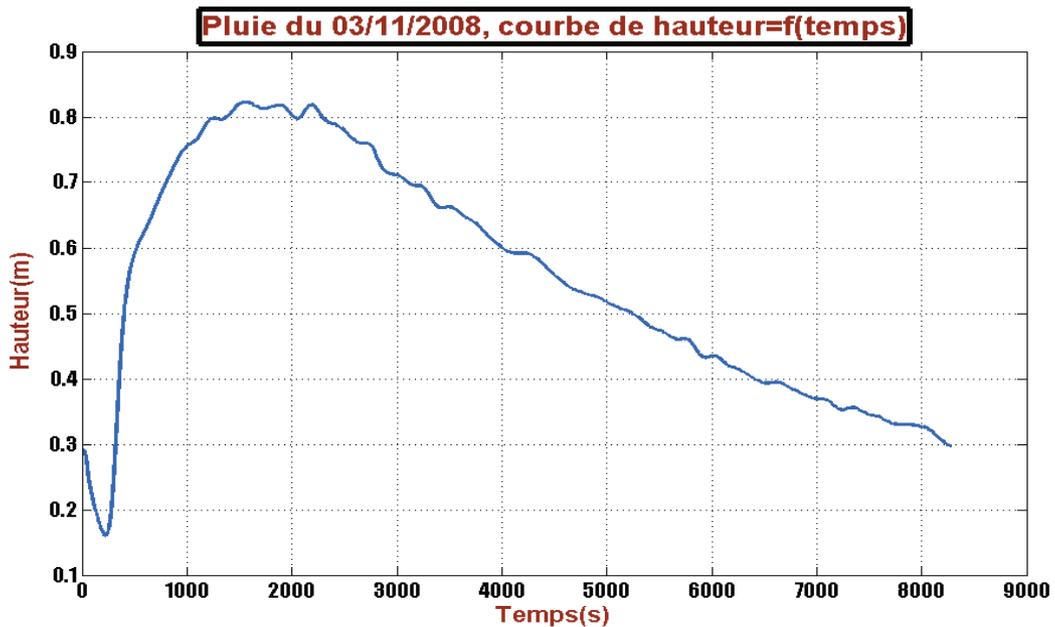


Figure 4.10 – Simulation de la hauteur en aval

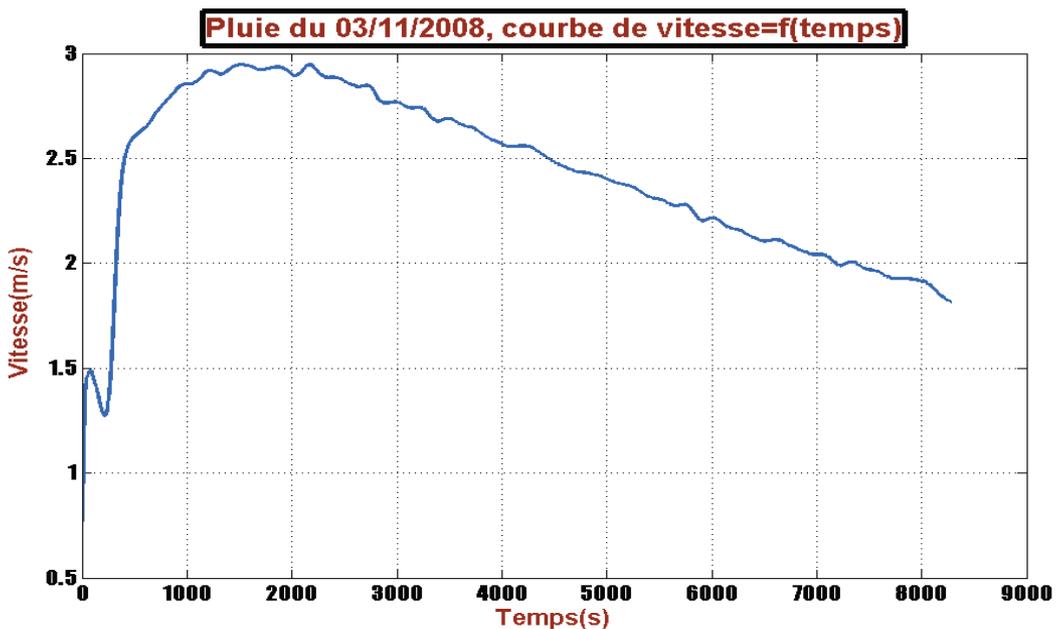


Figure 4.11 – Simulation de la vitesse en aval

On constate une certaine adéquation entre l'allure des courbes de vitesse et hauteur calculés a l'aval, par rapport a celle des paramètres(h et v)mesurés en amont. La hauteur et la vitesse maximales ont atteint respectivement 0.82 m et 2.9 m/s soit une augmentation de la vitesse de 1.3 m/s et une diminution de la hauteur de 0.4 m .

Il est également important de simuler le comportement du réseau au moment du pic en déterminant le taux de sollicitation du collecteur (courbe de $h = f(x)$) ainsi que la distribution spatiale de la vitesse (courbe de $v = f(x)$).

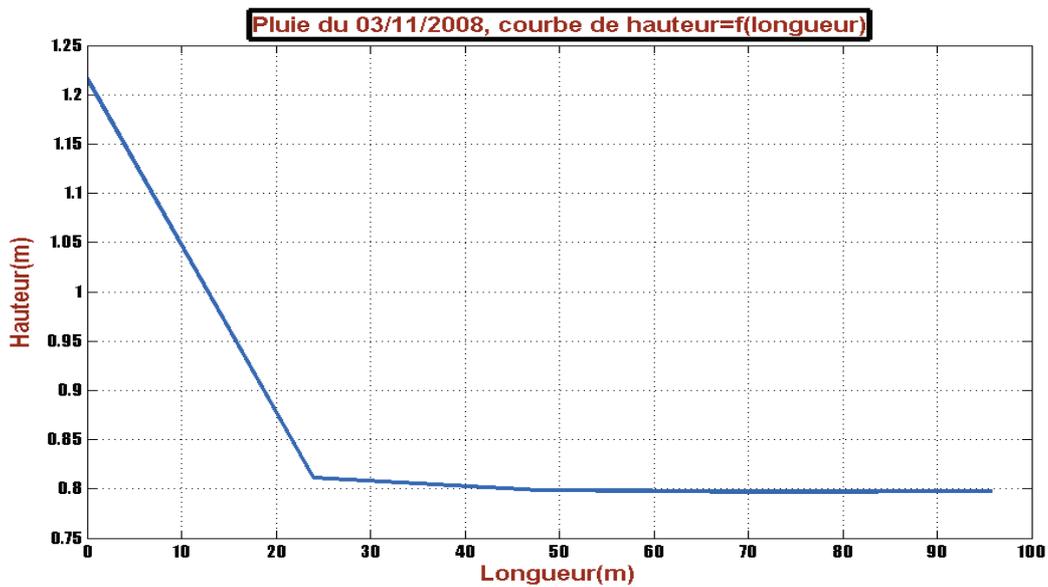


Figure 4.12 – Simulation de la hauteur en fonction de la longueur

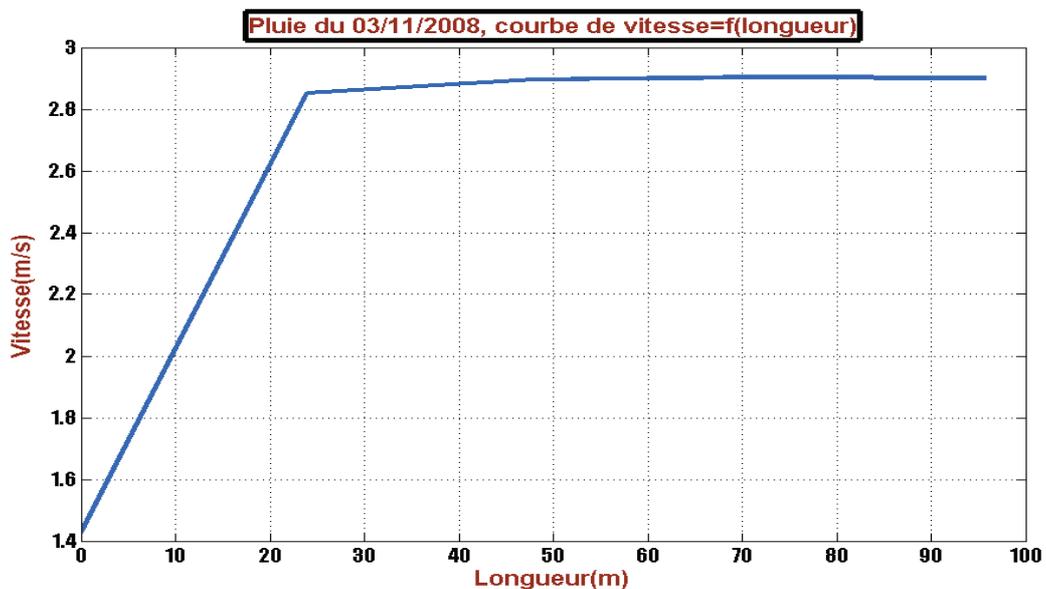


Figure 4.13 – Simulation de la vitesse en fonction de la longueur

Le long du tronçon modélisé, on observe une atténuation de la hauteur d'eau avec une hausse de la vitesse d'écoulement.

4.4.2 Méthode des différences finies-schéma explicite à deux pas centré suivant x

Après avoir utilisé un schéma explicite centré à un pas et afin d'améliorer la précision de calcul, nous avons décidé d'utiliser un schéma numérique à deux pas, dans le but d'améliorer la performance de notre modèle.

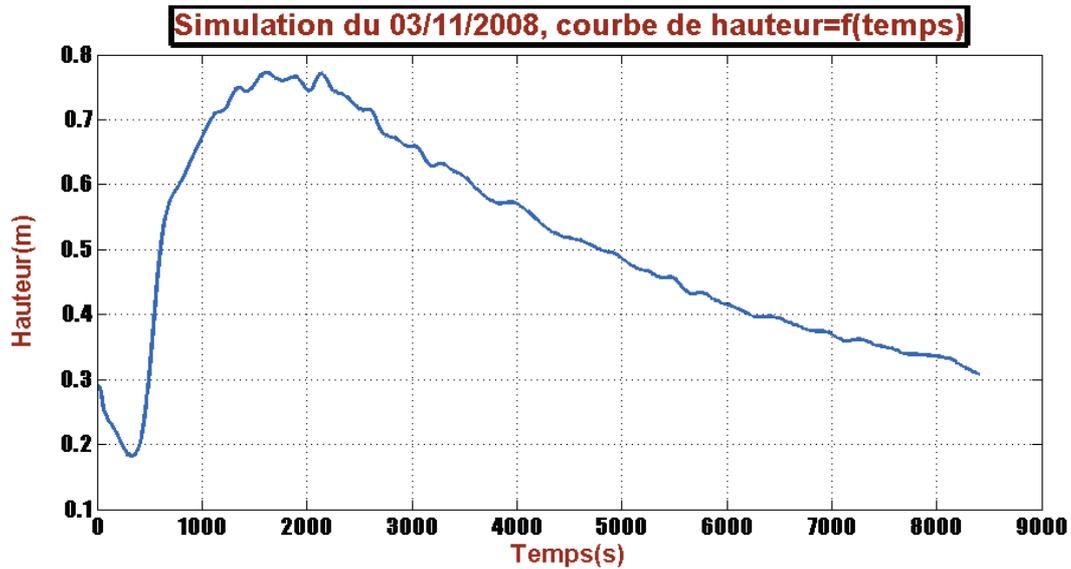


Figure 4.14 – Simulation de la hauteur

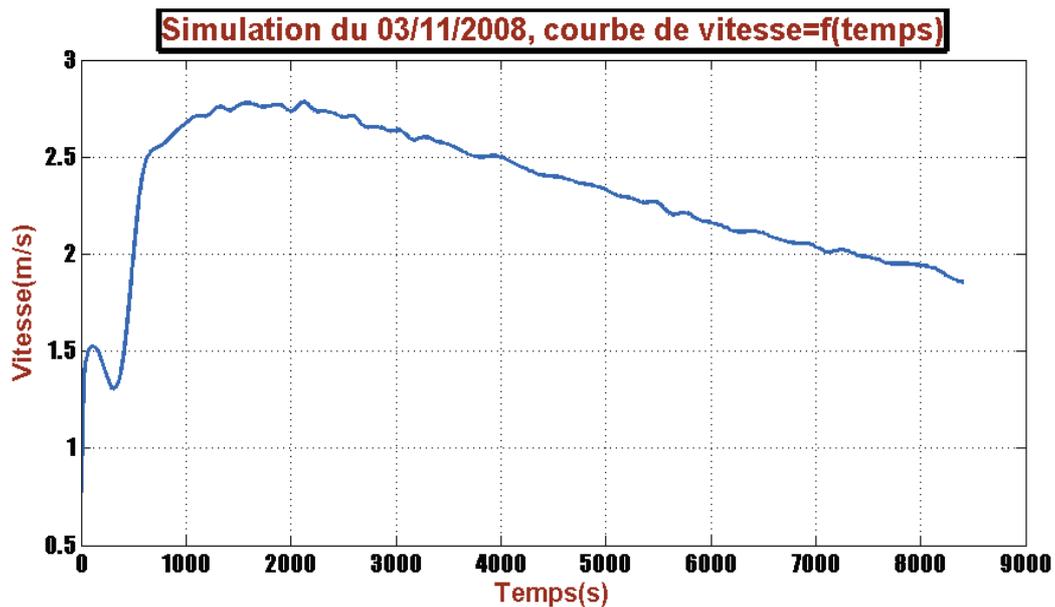


Figure 4.15 – Simulation de la vitesse

Les résultats obtenus sont analogues à ceux du schéma explicite centré, tout en enregistrant une augmentation du temps de calcul. La hauteur et la vitesse maximales ont atteint respectivement 0.78 m , 2.75 m/s soit une augmentation de la vitesse de 1.16 m/s et une diminution de la hauteur de 0.47 m par rapport aux données d'entrée.

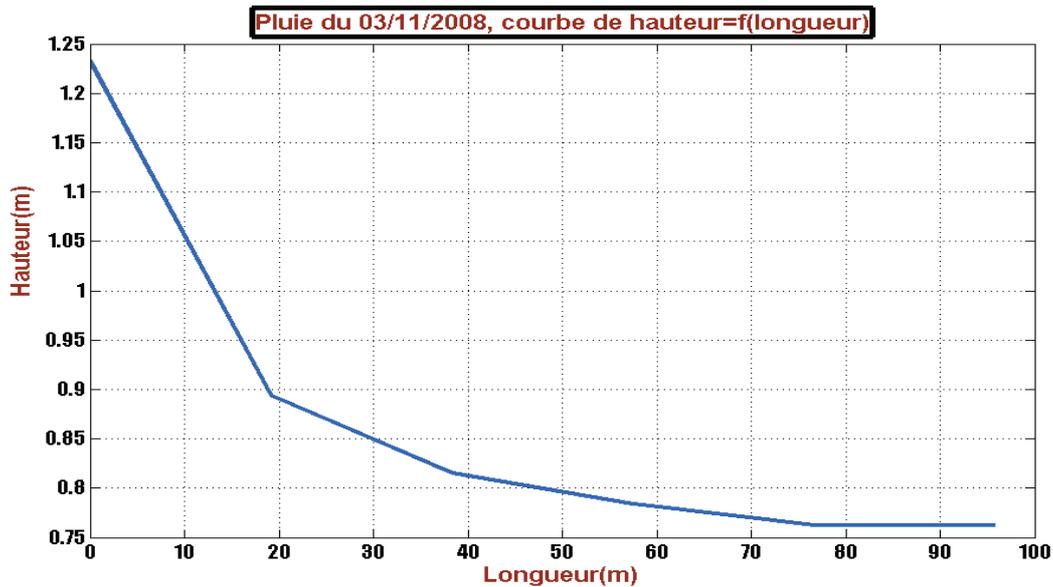


Figure 4.16 – Simulation de la hauteur en fonction de la longueur

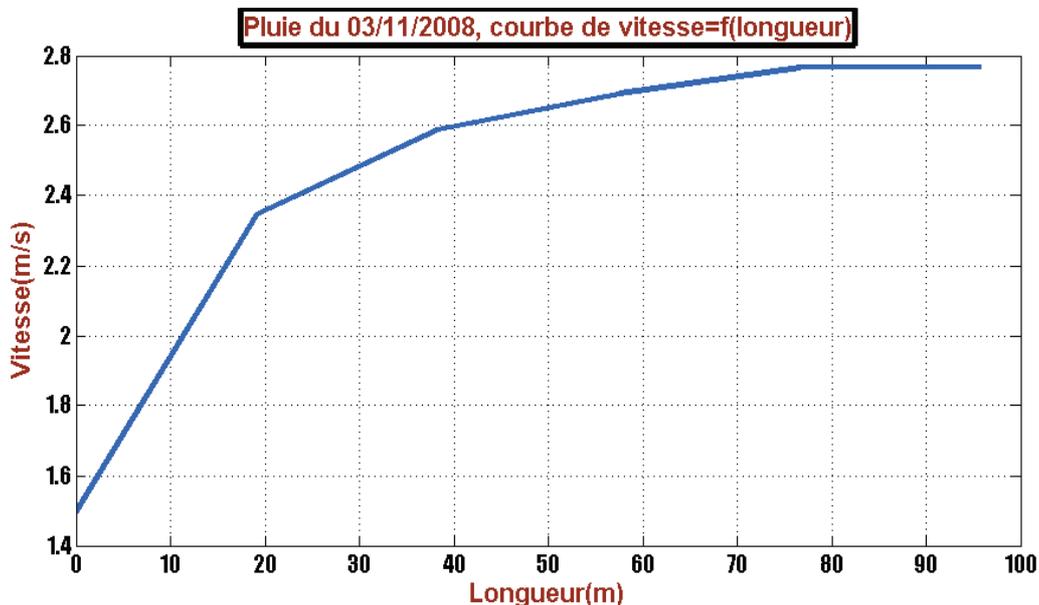


Figure 4.17 – Simulation de la vitesse en fonction de la longueur

De même, on observe le long du tronçon modélisé, une atténuation de la hauteur tout en enregistrant une augmentation de la vitesse de l'amont vers l'aval.

4.4.3 Méthode des volumes finis-schéma différence centré

Nous voulons simuler le comportement de ce même tronçon du collecteur en utilisant une autre méthode, il s'agit de méthode des volumes finis qui est théoriquement plus rigoureuse par rapport a la méthode des différences finies. Les résultats obtenus sont présentés ci-après

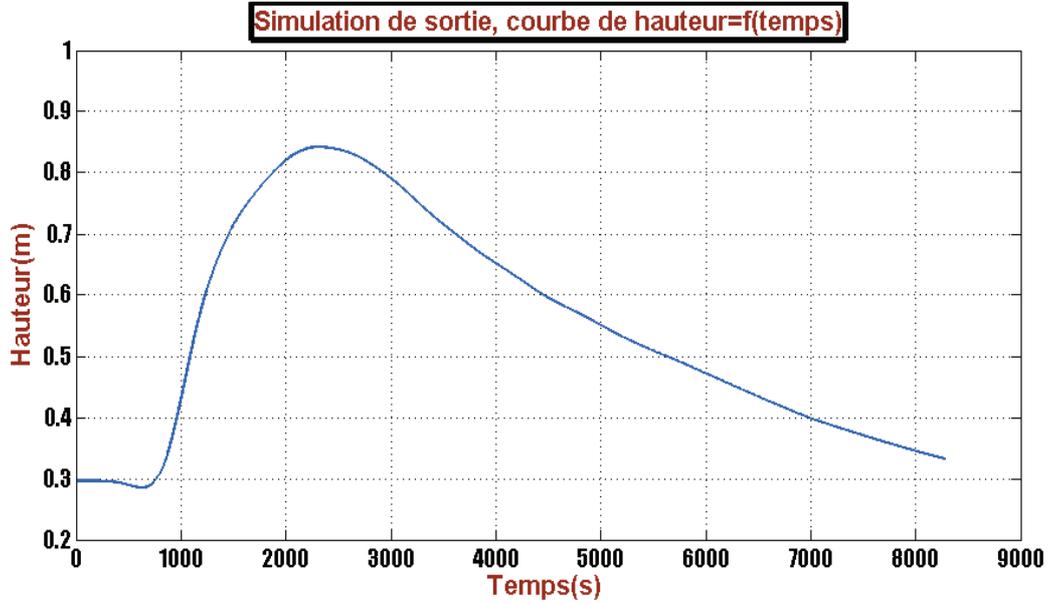


Figure 4.18 – Simulation de la hauteur en aval

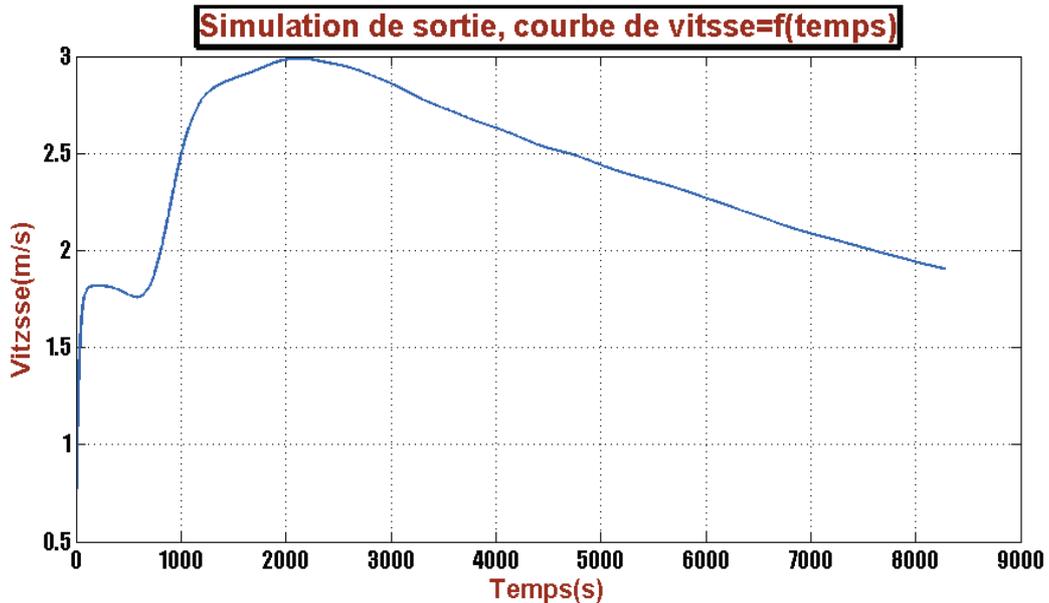


Figure 4.19 – Simulation de la vitesse en aval

Le modèle a reproduit l'allure des courbes de vitesse et de hauteur à l'aval du collecteur. La hauteur et la vitesse maximales ont atteint respectivement 0.85 m, 3 m/s soit une augmentation

de la vitesse de 1.41 m/s et une diminution de la hauteur de 0.4 m par rapport aux données d'entrée.

4.5 Calage théorique

En raison de l'absence des mesures en aval, nous allons procéder à un calage théorique qui consiste à vérifier la capacité du modèle à reproduire les mêmes volumes d'eau en aval par rapport aux données d'entrée. Il s'agit bien évidemment de vérifier le principe de la conservation de la masse.

Le calage théorique ne peut dans aucun cas remplacer le calage expérimental. Toutefois, il nous permet d'ajuster le modèle, en d'autres termes, vérifier l'adéquation du modèle à la réalité, par rapport à une base purement théorique.

Dans le tableau (4.1), sont données les volumes d'eau transitant le tronçon du collecteur modélisé, en amont et en aval durant l'évènement pluvieux utilisé.

Table 4.1 – Rapport de volumes.

	Volume entrant (m^3)	Volume sortant (m^3)	rapport du volume (V_s/V_e)
Méthode des différences finies schéma explicite centré	27222	29860	1.0969
Méthode des différences finies schéma explicite à deux pas	27222	28011	1.0289
Méthode des volumes finis schéma différence centré	27222	28530	1.0483

Ces volumes ont été calculés en amont et en aval du tronçon modélisé pendant l'évènement pluvieux utilisé pour un régime d'écoulement transitoire, avec soustraction du volume stocké par estimation du temps de transit.

Le tableau (4.2) présente l'erreur sur le volume d'eau, exprimée en pourcentage pour chaque schéma numérique utilisé.

$$E_v(\%) = \frac{|V_{tot-sortant} - V_{tot-entrant}|}{V_{tot-entrant}} \cdot 100 \quad (4.1)$$

Table 4.2 – L'erreur sur le volume.

	Erreur (%)
Méthode des différences finies schéma explicite centré	9.69
Méthode des différences finies schéma explicite à deux pas	2.89
Méthode des volumes finis schéma différence centré	4.83

4.6 Interprétation

Globalement, l'allure des paramètres de l'écoulement en aval du tronçon modélisé s'est reproduit quelque soit la méthode utilisée et le schéma numérique correspondant et ce, par rapport à l'allure de ces mêmes paramètres mesurés en amont du collecteur, cela se traduit par la consistance numérique du modèle élaboré.

Les résultats de simulation ont montré une atténuation de la hauteur d'eau à l'aval du tronçon modélisé ce qui est expliqué par la pente favorable du collecteur engendrant par conséquent, une augmentation de la vitesse d'écoulement à l'aval.

De plus, le tronçon modélisé a été faiblement sollicité dont aucune mise en charge n'a été constatée.

D'autre part, la consistance physique du modèle n'a pas été vérifiée d'une manière objective, a cause de l'absence des mesures en aval permettant le calage et la validation du modèle. Néanmoins, un calage théorique a été effectué en faisant comparer les volumes sortants aux volumes entrants pour vérifier la lois de conservation du volume .

Ce calage a montré des résultats satisfaisant dont, l'erreur variaie entre 3 et 9 %, selon le schéma numérique utilisé.

Si on fait une comparaison entre les schémas numériques utilisés, on peut constater que le schéma par DF à deux pas est le plus consistant. Cependant, il génère un temps de calcul assez long cela est du à l'ordre de l'approximation numérique du schéma (ordre 2 suivant x).

4.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les résultats de simulation issus de notre modèle. Le modèle élaboré résout les équations complètes de BSV en utilisant différentes approximations numériques basées sur une procédure de calcul itérative.

Nous avons constaté à travers les résultats obtenues une certaine similitude entre l'allure des grandeurs mesurées en amont et celles calculée en aval sans ignorer le phénomène de laminage de la crue. Le calage a été effectué d'une manière théorique et qui a montré des résultats plus au moins satisfaisants.

4.8 Conclusion générale

Nous avons pu réaliser dans le cadre de ce projet, une approche modélisatrice basée sur la résolution des équations complètes de BSV. Le but donc, est de déterminer les paramètres hydrauliques d'un écoulement à surface libre à n'importe quel point de l'espace (x,t) , on parlera alors d'une simulation de l'écoulement.

A cet effet, nous avons mis au point un code de calcul, développé sous environnement Matlab, ce code permet la détermination des profils des hauteur-vitesse, il est composé principalement de trois parties permettant la saisie de données, la résolution des équation considérées et l'affichage des résultats.

Pour résoudre le système de BSV, nous avons utilisé la méthode des différences finies et la méthode des volumes finis. La premier méthode semble être limitée par le nombre de courant qui exige l'utilisation des pas de temps très courts pour éviter la dégradation de la qualité de la solution numérique et assurer également la stabilité. Parmi les deux schémas utilisés, le schéma centré à deux pas suivant x se montre le plus avantageux étant donnée l'ordre de son approximation. Toutefois, il génère un temps de calcul assez long.

Le schéma numérique utilisé pour la méthode des volumes finis a donné des résultats moins satisfaisants, cela est du a l'ordre de grandeur des pas d'espace choisi, ce choix a été fait pour remédier a la lenteur du temps de calcul.

Le calage du modèle élaboré a été effectuée d'une manière théorique a cause du manque de données pour un calage expérimental. A cet effet, il serait nécessaire d'associer a la modélisation hydraulique une modélisation hydrologique, étant donnée la disponibilité des mesures de la pluviomètre et ce afin de pouvoir valider le modèle d'une manière objective.

Il serait également raisonnable de prendre en considération le caractère 2D au niveau des jonctions pour affiner davantage la résolution des équations de BSV.

Bibliographie

- [1] BERREKSI,A-(2012) : *Modélisation et simulation numérique des écoulement non permanents dans les canaux à ciel ouvert* . Thèse de doctorat , Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, 147 pages.
- [2] BROD P. et MOGIS D. - 1980 : *Essais de validation expérimentale de modèles d'écoulement en canalisation*. Projet de fin d'études - INSA de Lyon, Département Génie Civil et Urbanisme - 1980.
- [3] CHOC AT B. - 1978 : *Un modèle de simulation des écoulements dans les réseaux d'assainissement pluvial*. Thèse de doctorat - INSA de Lyon - 300 pages - 1978.
- [4] GUERAOUI,K-2010 : *Cours Analyse numérique-méthode des volumes finis* . Université Mohammed V-AGDAL,- 42 pages.
- [5] HAY AMI - 1951 : *On the propagation of flood waves*.
Kyoto : Japan, Kyoto University - Disaster Prevention Research Institute - Bull 1 - 16 p. - 1951.
- [6] HUG M. - 1975 : *ENPC - Cours de mécanique des fluides appliqués*.
Eyrolles - Ch. I I , Ch. VIII, CH. XV - 1975.
- [7] KOUSSIS A. - 1978 : *Theoretical estimation of flood routing parameters*. Journal of the Hydraulics Division - ASCE - Vol 104, n HY1 - Proc. paper 1356 - pp. 109-115 janvier 1978.
- [8] LIGHTHILL F.R.S., WHITHAM G.B. - 1955 : *On kinematic waves, 1, Flood movement in long rivers*. Proceedings, Royal Society of London - Series A, Vol. 229 - pp. 281-316 – 1955.
- [9] MILLER W.Â., CUNGE I.A. - 1975 : *Simplified equations of unsteady flow*.
Unsteady flow in open channels (3 volumes) Mohammad and Yevjevich - Water Resources Publications - Fort Collins, Colorado - chap. 5 - PP.
- [10] Nabil El Aboudi-2000 : *Modélisation Des Écoulements En Charge* . Projet de fin d'études : Institut National de la Recherche scientifique,- 138 pages-N RS-Eau-2000.
- [11] POCHAT R. - 1980 : *Mécanique des fluides - Hydraulique à surface libre*. Hanoi, Ecole d'été - ENGREF - 283 pages 1980.

- [12] PRICE R.K. - 1979 : *A comparison of four numerical methods for flood routing.*
JHD - ASCE - Vol. 100 - n. HY7 - PP. 879-899 - July 1979
- [13] VAZQUEZ,J-(2006) : *Hydraulique générale.* Formation CES/MASTERE Eau potable et assainissement , Ecole Nationale de Génie de l'Eau et de l'Environnement de STRASBOURG (ENGEES), 64 pages.
- [14] WEINMANN P. E., LAURENSEN E. M. - 1981 : *Approximate flood routing methods a review.*
- [15] Abdallah, M., (2005). *Les méthodes de discrétisation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires appliquées aux équations de Barré de Saint-Venant pour la modélisation de l'hydraulique en réseau d'assainissement.* Thèse de Doctorat en Sciences de l'Ingénieur, l'université Louis Pasteur – Strasbourg I, 173 pages.
- [16] Kovacs, Y., (1988). *Modèles de simulation d'écoulement transitoire en réseau d'assainissement.* Thèse de doctorat ENPC, Paris, 155 pages.
- [17] Zug, M., & Vazquez, J., (2006). *Modélisation des réseaux d'assainissement Concepts Approches et Etapes* , Polycop de cours Ecole Nationale de Génie de l'Eau et de l'Environnement de STRASBOURG (ENGEES), 75 pages.
- [18] Bertrand, J & Krajewski, L., (2006). *Modélisation des écoulements en réseau d'assainissement.* Cours d'Hydrologie Urbaine, Ecole Nationale de Génie de l'Eau et de l'Environnement de STRASBOURG (ENGEES), 44 pages.
- [19] SOUT' AIMANI, A. (1983). *Nouveaux aspects de l'application de la méthode des éléments finis en hydrodynamique.* Thèse de M.sc.A., genre civil, Université I-aval.
- [20] LAI, C. (1980. *Numerical modeling of unsteady open-channel flow.* In : *Advances in Hydroscience V*, 1.4,p . 161-333