

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
Département d'Hydraulique
Laboratoire LRS/EAU



Mémoire de Fin d'Etudes
D'ingénieur d'Etat en Hydraulique

Thème :

**SIMULATION NUMERIQUE DE LA
DISPERSION D'UN POLLUANT ACTIF DANS
UN CANAL PAR LE SCHEMA EXPLICITE DE
MAC CORMACK**

Proposé par :
Dr S. BENMAMAR

Etudié par :
Mr I. ABDOULAYE ARZAKE

Promotion : Juin 2007

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

à ma famille

et

à mes amis

Remerciements

Ma reconnaissance va tout d'abord à ma promotrice Dr Benmamar. S pour m'avoir encadré et surtout pour m'avoir suivi avec beaucoup de rigueur durant la réalisation de ce travail.

Je la remercie chaleureusement pour sa constante disponibilité et pour ses judicieux conseils.

Je remercie Mr Benziada. S pour les précieux conseils qu'il n'a cessé de me donner durant la réalisation de ce travail.

Je remercie également les membres du jury pour avoir accepté de juger et d'examiner ce travail.

Je n'oublierai pas de remercier toute ma promotion ainsi que tous les enseignants du département d'hydraulique.

Je termine par remercier ma famille pour son soutien indéfectible.

ملخص:

إن انتشار المواد الملوثة الصادرة عن حادث أو عن طريق العمد في الأنهار يترتب عنه تدهور في نوعية الموارد المائية. ولدراسة ظاهرة إنتشار الملوثات في المجاري المائية قمنا بتمثيل هذه الأخيرة عن طريق قناة (مسرب) مستطيلة الشكل. ولتمثيل إنتشار الملوثات في مسرب قمنا بإنجاز نموذج رياضي يصف المراحل الهيدروديناميكية ومراحل تنقل هذا الملوث.

إن حل المعادلات تم بالإستعانة بمخطط رقمي بنهايات مختلفة لـ Mac Cormack. لقد قمنا بمقارنة النتائج الرقمية بالتجريبية المقامة بمخبر LRS-eau, ومن ذلك قمنا بقبول نموذجنا. **الكلمات المفتاحية:** انتشار، نموذج رياضي، نموذج رقمي، التلوث، ملوث فعال

Résumé

La dispersion des substances provenant des pollutions accidentelles ou intentionnelles dans les rivières entraîne une dégradation continue de la ressource en eau. Des outils de prédictions du processus de transport doivent être mis en place. C'est dans cette optique que s'inscrit notre projet de fin d'étude dont le principal objectif est de réaliser une simulation numérique de la dispersion d'un polluant actif dans un canal rectangulaire.

Pour ce faire, un modèle mathématique décrivant le processus hydrodynamique et le transport du polluant a été élaboré. La résolution du système d'équation ainsi obtenu a été effectuée par l'utilisation du schéma numérique aux différences finies de Mac Cormack.

Une confrontation des résultats numériques obtenus aux résultats expérimentaux issus des expériences effectuées aux LRS – Eau nous a permis de valider notre modèle.

Mots clés : Dispersion - Mac Cormack - Modèle Mathématique – Modèle Numérique - Pollution – Polluant actif -

Abstract

Pollutant dispersion coming from accidental or intentional pollution in rivers involves a continuous degradation of the water resource. Prediction tools of the process of transport must be available. This memoir main goal is to carry out a numerical simulation of a non conservative pollutant dispersion in a rectangular channel.

A mathematical model describing the hydrodynamic process and the transport of the pollutant was elaborate. The Mac Cormack explicit scheme was adopted to solve the equations that represent our model.

A comparison between numerical results and experimental data resulting from the experiments carried out at the LRS – Eau enabled us to validate our model.

Key words: Dispersion - Mac Cormack - Mathematical model - Numerical model - Pollution – non conservative Pollutant-

Liste des figures

Numéro de figure	Titre	Page
Figure I-1.1:	Schéma de la zone d'étude	7
Figure I-1.2	Variation temporelle de la concentration pour $kr = 0$	8
Figure I-1.3	Variation temporelle de la concentration pour $kr = 0.5$	8
Figure I-2.1	Solutions analytiques exactes et approximatives	11
Figure I-3.1	Profils de Concentration dans le fleuve de Waikato à proximité de la source	13
Figure I-3.2	Profils de Concentration dans le fleuve de Waikato dans une zone éloignée de la source	14
Figure I-4.1	Illustration des mécanismes de la zone morte	15
Figure I-4-2	Courbe du modèle de la zone morte et du modèle d'advection -diffusion (pour $u = 0.50$ m/s ; $K = 0.10$ m ² /s ; $\varepsilon = 20\%$; $T = 100$ s ; $L = 10.000$ m ; $DaI = 240$)	17
Figure I-4-3	modèle d'advection – diffusion et celui de la zone mort représentant les données de la rivière de Mödling pour $DaI = 21.1$	18
Figure I-5.1	Variation des concentrations mesurées (représentées par les pointes) et des concentration simulées (représentées par les lignes) de SF6 dans le fleuve Hudson	21
Figure I-5.2	Variation des concentrations mesurées (représentées par les pointes) et des concentration simulées (représentées par les lignes) de SF6 en fonction du temps dans le fleuve Vent-Wind-Bighorn	21
Figure I-5.3	Variation des concentrations mesurées (représentées par les pointes) et des concentration simulées (représentées par les lignes) de rhodamine en fonction du temps dans le fleuve de Missouri	22

Numéro de figure	Titre	page
Figure I-5.4	Variation des concentrations mesurées (représentées par les pointes) et des concentration simulées (représentées par les lignes) de MITC en fonction du temps dans le fleuve de Sacramento	23
FigureIII.1	Maillage correspondant à une fonction dépendant de deux variables	44
FigureIII.2	Exemple d'un maillage explicite	45
FigureIII.3	exemple d'un schéma implicite	46
FigureIII-4	Maillage décalé	59
Figure IV-1	Profil de la vitesse longitudinale suivant la largeur à $x = 2m$ pour $Q = 0.4l/s$, $s_{ox} = 0.0001$	67
Figure IV-2	Figure IV-2: Variation de la vitesse longitudinale en fonction de la longueur	68
Figure IV-3	Variation de la concentration en fonction du temps pour les mesures expérimentales pour un débit de $0,4 l/s$ et une concentration initiale de $500mg/l$	69
Figure IV-4	Variation de la concentration en fonction du temps pour $Q = 0,4 l/s$, $k_r = 0,013$, $C_0 = 500mg/l$ pour différentes positions	70
Figure IV - 5	Variation de la concentration en fonction du temps pour les données issues des expériences à $x = 1m$ pour différents débits	71
Figure IV-6	Variation de la concentration en fonction du temps à $x = 1m$, $k_r = 0,013$, $C_0 = 500 mg/l$ pour différents débits	72
Figure IV- 7	Variation de la concentration en fonction du temps pour les données issues des expériences pour une source continue $C_0=500 mg/l$ à $x = 1m$	73
Figure IV- 8	Variation de la concentration en fonction du temps pour une source continue à $x = 1m$, $Q = 0,5 l/s$, $k_r = 0,013$, $C_0 = 500 mg/l$	74

Numéro de figure	Titre	page
Figure IV-9	Variation de la concentration en fonction du temps à $x = 1\text{m}$, $Q = 0,4\text{ l/s}$, $C_0 = 500\text{ mg/l}$, $s_{ox} = 0,0001$ pour différents k_r	75
Figure IV-10	Variation de la concentration en fonction du temps à $x = 1\text{m}$, $Q = 0,4\text{ l/s}$, $k_r = 0,004$ et $s_{ox} = 0,0001$ pour $C_0 = 50\text{ mg/l}$	76
Figure IV- 11	Variation de la concentration en fonction du temps à $x = 1\text{m}$, $Q = 0,4\text{ l/s}$, $k_r = 0,004$ et $s_{ox} = 0,0001$ pour $C_0 = 100\text{ mg /l}$	77
Figure IV - 12	Variation de la concentration en fonction du temps à $x = 1\text{m}$, $Q = 0,4\text{ l/s}$, $k_r = 0,004$ et $s_{ox} = 0,0001$ pour $C_0 = 500\text{ mg/l}$	78
Figure IV - 13	Variation de la concentration en fonction du temps à $x = 1\text{m}$, $Q = 0,004\text{ l/s}$, $C_0 = 500\text{ mg/l}$, $k_r = 0,004$ pour différentes valeur de la pente	79
Figure IV- 14	Variation de la concentration en fonction du temps à $x=1\text{ m}$, $Q = 0,4\text{ l/s}$, $C_0 = 500\text{ mg/l}$ et $k_r = 0,004$ pour différentes valeurs de alpha	80

Liste des Symboles

Symbole	Unités :	Significations :
A	m ²	Section transversale du canal
b	M	Largeur du canal
C	Mg/l	Concentration moyenne
c	Mg/l	Concentration initiale
C ₀	Mg/l	Fluctuation de concentration
C _f	-	Coefficient de frottement
C _h	m ^{1/2} /s	Constante numérique
C _n	-	Nombre de Courant
C _s	Mg/l	Concentration dans la zone morte
C _μ	-	Constante numérique
C _{ε1}	-	Constante numérique
C _{ε2}	-	Constante numérique
DaI	-	Indice de Damköler
D _{ij}	-	Tenseur de déformation
D _L	-	Coefficient de dispersion longitudinal
D _m	m ² /s	Coefficient de diffusivité moléculaire
D _t	m ² /s	Diffusivité turbulente.
D _{tx}	m ² /s	Diffusivité turbulente longitudinale
D _{tz}	m ² /s	Diffusivité turbulente transversale
E	-	. Paramètre
Fr	-	Nombre de Froude
F	N	Somme des formes des extérieures
F _x	N	Composante longitudinale de la force extérieure de volume.
F _y	N	Composante verticale de la force extérieure de volume.
F _z	N	Composante transversale de la force extérieure de volume.
g	m/s ²	Accélération gravitationnelle.
G _t	-	Coefficient d'obliquité
H	m	Hauteur
H ₀	m	Hauteur initiale
k	m ² /s ²	Energie cinétique turbulente.
k ₀	m ² /s ²	Energie cinétique turbulente initiale
K ₀	-	Coefficient tenant compte de la diminution de la concentration due à la végétation et à la zone morte.
k _r	s ⁻¹	Coefficient de réaction
L	m	Longueur du canal
M ₀	mg	Masse initiale du polluant
N	s/m ^{1/3}	Coefficient de Manning.
P	N/m ²	Pression instantanée.
p	N/m ²	Fluctuation de pression.
ppm	-	Partie par million
P ₀	N/m ²	Pression initiale
P _r	(m ³ /s)	Production de l'énergie cinétique turbulente.
Q	(m ³ /s)	Débit d'écoulement.
Q ₀	m ² /s ²	Débit d'entrée
Re	-	Nombre de Reynolds

Symbole	Unités	Significations
R_h	m	Rayon Hydraulique.
S_{ct}	-	Nombre de Schmidt turbulent.
S_{ox}	-	Pentes du canal dans la direction x.
S_{oy}	-	Pentes du canal dans la direction y.
T_e	s	Temps de séjour dans la zone morte
u_*	m/s	Vitesse de frottement à la paroi.
U	m/s	Composante longitudinale de la vitesse instantanée
\bar{U}	m/s	Composante longitudinale de la vitesse de l'écoulement moyen
u	m/s	Fluctuation de la vitesse dans la direction longitudinale.
U_0	m/s	Vitesse longitudinale initiale
V	m/s	Composante verticale de la vitesse instantanée.
\bar{V}	m/s	Composante verticale de la vitesse de l'écoulement moyen
v	m/s	Fluctuation de la vitesse dans la direction verticale.
V_{ol}	m^3	volume
V_m	m/s	Vitesse moyenne
W	m/s	Composante transversale de la vitesse instantanée.
\bar{W}	m/s	Composante transversale de la vitesse de l'écoulement moyen
w	m/s	Fluctuation de la vitesse dans la direction transversale.
W_0	m/s	Vitesse transversale initiale
x, z	-	Coordonnées cartésiennes
α	-	Coefficient arbitraire
ε	m^2/s^3	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.
ε_0	m^2/s^3	Taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente initiale.
ε_e	-	Rapport du volume de stockage/unité de longueur au volume de la rivière
ρ	Kg/m^3	Masse volumique du fluide.
μ	$N.s/m^2$	Viscosité dynamique du fluide.
ν_t	m^2/s	Viscosité turbulente.
ν	m^2/s	Viscosité cinématique du fluide.
δ_{ij}	-	Indice Kronecker.
κ		Constante de Von Karman.
τ	N/m^2	Contrainte de frottement à la paroi
σ_{ij}	-	Tenseur de contraint
σ_k	-	Constante numérique
σ_ε	-	Constante numérique
Δt	S	Pas de temps
Δx	m	Pas d'espace suivant la direction x
Δz	m	Pas d'espace suivant la direction z

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre I : Revue bibliographique	3
Introduction.....	3
1. Travaux de M.K. Yoo, S.W. Cho, et K.S. JUN.....	3
2. Travaux de R. L.Runkel (USGS 1997).....	8
3. Travaux de Y Ramsis Fares (1998).....	12
4. Travaux de Bernhard H. Schmid, M.ASCE	14
5. Travaux de Ferdi L. Hellweger	18
Conclusion.....	23
Chapitre II : Modèle mathématique	24
Introduction.....	24
I. Equations hydrodynamiques du mouvement.....	24
1. Les équations de Navier – Stokes.....	24
➤ Equation de continuité.....	24
➤ L'équation de la quantité de mouvement.....	25
2. Les équations du mouvement moyen.....	26
a. Le phénomène de la turbulence.....	26
➤ Définition de la turbulence.....	26
➤ Les approches de la turbulence.....	27
➤ Moyenne d'ensemble.....	27
b. Equation de continuité dans le mouvement moyen.....	28
c. Equation de la quantité de mouvement pour l'écoulement moyen.....	29
3. Les modèles de turbulence.....	30
a. Les modèles à viscosité turbulente	31

➤ Les modèles à zéro équation	31
➤ Les modèles à une équation de transport	31
➤ Les modèles à deux équations de transport.....	31
❖ Equation de l'énergie cinétique turbulente k	32
❖ L'équation du taux de dissipation d'énergie turbulente ϵ	33
b. Les modèles aux tensions de Reynolds.....	35
II. Le phénomène de transport.....	35
1. La diffusion.....	35
2. L'advection.....	36
3. Les équations de transport.....	36
Conclusion.....	40
Chapitre III : Modèle numérique	41
Introduction.....	41
I. Présentation de la méthode des différences finies.....	41
1. La méthode des éléments finis.....	42
2. La méthode des volumes finis	42
3. Méthodes des différences finies	42
4. Analyse de l'approximation.....	44
a. Erreur de troncature.....	44
b. Consistance d'un schéma aux différences finies	44
c. Stabilité d'un schéma aux différences finies.....	44
d. Convergence d'un schéma aux différences finies	45
5. Schémas explicites et schémas implicites.....	45
6. Choix du modèle numérique.....	46
II. Discrétisation des équations	47
1. Description du schéma de Mac Cormack	47
2. Application du schéma de Mac Cormack au modèle mathématique.....	48
a. Transformation des équations sous la forme générale du schéma	

de Mac Cormack	49
b. Discrétisation des équations.....	52
i. Etape de prédiction.....	53
ii. Etape de correction.....	56
3. Détermination du champ de pression.....	58
a. Description de la méthode de la viscosité artificielle.....	58
b. Discrétisation des équations.....	59
c. Application de la méthode de la viscosité artificielle.....	59
4. Conditions initiales aux limites.....	61
a. Les conditions initiales	61
b. Conditions aux limites.....	62
i. Conditions amont – aval.....	62
ii. Conditions aux parois	62
iii. Conditions de symétrie au niveau du plan médian.....	63
5. Résolution des équations.....	63
Conclusion.....	65
Chapitre IV : Résultats et Interprétations	66
Introduction.....	66
I. Validation de nos résultats.....	66
1. Description des expériences effectuées au laboratoire LRS – Eau.....	66
2. Description du champ de vitesse.....	67
3. Validation du modèle.....	68
3.1 Cas d'une source discontinue.....	68
o Comparaison des profils de concentration pour différentes positions.....	68
o Variation des profils de concentration pour différents débits.....	70
3.2 Cas d'une source continue.....	73
II. Analyse des autres paramètres intervenant dans la résolution numérique de notre problème.....	75
1. Effet du coefficient de réaction.....	75

2. Effet de la variation de la concentration initiale du polluant.....	76
3. Effet de la pente.....	78
4. influence du coefficient alpha.....	79
Conclusion.....	81
Conclusion générale	82

Introduction générale

L'eau joue un rôle primordial dans les activités socio – économiques d'une société. Cependant le développement industriel de ces dernières décennies a engendré des problèmes assez complexes ayant des répercussions sur la qualité de cette ressource. Le phénomène de la pollution qui devient de plus en plus préoccupant a entraîné la rareté d'une eau de bonne qualité. Les eaux des rivières sont souvent sujettes à des pollutions accidentelles et parfois à des rejets intentionnels par les industriels.

Quant à l'agriculture, elle contribue de façon directe ou indirecte à la dégradation de la qualité de la ressource en eau. En effet, les engrais agricoles sont transportés soit par les eaux d'infiltration entraînant alors la pollution des nappes phréatiques, soit par les eaux de ruissellement dans les cours d'eau. Dans ce dernier cas, le phénomène de l'eutrophisation est provoqué entravant le développement de toute vie aquatique.

Devant des problématiques d'une telle envergure, il y a urgence de mettre en place des outils d'aide à la décision très efficaces afin de préserver la qualité de la ressource en eau.

Plusieurs recherches ont été menées pour décrire et modéliser le transport de matières dans les écoulements à surface libres.

Les matières sont soumises à la convection provoquée par le champ de vitesse et à la diffusion turbulente et moléculaire. La mise en place des modèles capables de décrire finement le champ de vitesse ainsi que la diffusivité turbulente s'impose.

Le problème peut être traité de deux façons différentes : soit en développant des modèles physiques appropriés, soit en développant des modèles mathématiques pouvant prendre en compte tous les paramètres intervenant dans le processus de transport.

Les premiers sont très coûteux et leur extension à des problèmes similaires n'est pas toujours évidente. Par contre, l'utilisation des modèles mathématiques pour prédire le transport est beaucoup plus économique bien qu'elle exige des ordinateurs puissants lorsque que le problème est assez complexe. Leur mise en œuvre dépend de la précision recherchée et aussi de la complexité de la géométrie du canal.

Le principal objectif de ce mémoire est de réaliser la simulation numérique de dispersion d'un polluant actif dans un canal par la méthode explicite de Mac Cormack. Pour ce faire, une démarche a été conduite en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la description de quelques travaux déjà réalisés en matière de simulation numérique du transport de matières dans les écoulements à surface libre afin de ressortir certaines lacunes qui existent encore dans le domaine.

Le second chapitre traite de la modélisation mathématique des phénomènes jouant un rôle primordial dans la dispersion des matières. L'ensemble de ces équations nous conduit à un système ouvert dont sa fermeture se fait par utilisation du modèle $k - \epsilon$.

Le troisième chapitre expose le développement du modèle numérique afin de résoudre le système d'équation ainsi obtenu. A ce niveau, le schéma explicite de Mac Cormack est décrit. Ce schéma est utilisé pour la discrétisation de la totalité de nos équations.

La méthode de la viscosité artificielle est aussi décrite dans ce chapitre afin de déterminer le champ de pression.

Dans le dernier chapitre, les résultats ainsi obtenus à partir de notre modèle numérique sont présentés.

Une comparaison entre nos résultats numériques et les résultats issus des expériences effectuées au laboratoire LRS - Eau a été faite afin de valider notre modèle.

Dans ce chapitre, nous mettons également en évidence l'influence de certains paramètres intervenant dans le modèle numérique sur nos résultats.

Et enfin, nous terminons ce mémoire par une conclusion.

Chapitre I : Revue bibliographique

Introduction

Les problèmes de transport de matières dans les cours d'eaux qui semblent être d'actualité ont depuis longtemps constitué l'une des préoccupations majeures des chercheurs. A titre d'exemple, dès 1855, Adolphe Fick publiait un premier papier sur le processus de diffusion moléculaire.

Depuis cette période, plusieurs recherches ont été menées afin d'améliorer les modèles déjà mis en place ou bien d'en établir d'autres. Ces recherches ont permis d'approfondir les connaissances sur les phénomènes de dispersion ainsi leurs modélisations. Mais la plus part de ces modèles sont basées sur des hypothèses simplificatrices en ne tenant compte que des phénomène prépondérant. Ainsi les résultats obtenus sont parfois très loin de la réalité.

Dans ce chapitre, nous allons étudier un certains nombres de travaux effectués afin d'en ressortir les lacunes qui existent encore en terme de simulation numérique de transport de polluant dans les rivières.

6. Travaux de M.K. Yoo, S.W. Cho, et K.S. JUN

Le professeur K.S JUN et ses collaborateurs M. K. **Yoo** et **S.W. Cho** ont présenté une méthode numérique sur la dispersion d'un polluant non conservatif dans un ruisseau naturel (**Yoo, Cho, Jun, 2000**). Le modèle est basé sur la discrétisation par différences finies de l'équation de dispersion longitudinale de la substance non conservative en monodimensionnel en la subdivisant en trois équations qui sont :

- L'équation de l'advection pure ;
- L'équation du taux de diminution de la concentration due à certaines réactions ;
- L'équation de la diffusion pure.

A chaque pas de temps, les trois équations sont résolues respectivement par le schéma de Houx- Preissmann, par une solution analytique locale, et par le schéma de Crank-Nicholson et c'est en prenant le 1/3 du pas de temps pour chaque équation.

L'équation de la dispersion longitudinale du contaminant non conservative dans un canal est exprimée par :

$$\frac{\partial(AC)}{\partial t} + \frac{\partial(UAC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_L A \frac{\partial C}{\partial x} \right] - k_r AC \quad (I.1-1)$$

Dans laquelle $C(x, t)$: concentration de masse ; $A(x, t)$: section transversale du canal ; $U(x, t)$: vitesse moyenne d'écoulement suivant la direction x ; $D(x, t)$: coefficient longitudinal de dispersion ; K : coefficient lié à la diminution ou à l'augmentation du polluant ; x : coordonnées suivant la direction longitudinale et t : temps.

En utilisant l'équation de continuité, l'équation (I.1-1) a été réduite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - k_r C \quad (\text{I.1-2})$$

$$\text{avec, } u = U - \left[\frac{\partial D_L}{\partial x} + \frac{D_L}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \right] \quad (\text{I.1-3})$$

La subdivision dans le temps de l'équation (I.1-2) pour séparer les processus physiques mis en jeu c.-à-d., l'advection du mouvement moyen, le taux de diminution de la concentration due à certaines réactions, et la dispersion dans l'écoulement est donnée comme suite :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + 3u \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad n \Delta t \leq t \leq \left(n + \frac{1}{3}\right) \Delta t \quad (\text{I.1-4})$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -3k_r C, \quad \left(n + \frac{1}{3}\right) \Delta t \leq t \leq (n + 1) \Delta t \quad (\text{I.1-5})$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 3D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad \left(n + \frac{2}{3}\right) \Delta t \leq t \leq (n + 1) \Delta t \quad (\text{I.1-6})$$

L'Avantage de la méthode de séparation est que les schémas numériques les plus appropriés pour chaque équation peuvent être appliqués pour simuler exactement le processus physique correspondant. Ainsi, le schéma de Houx-Preissmann a été utilisé pour résoudre l'équation (I.1-4). Une solution analytique locale a été utilisée pour résoudre l'équation (I.1-5) ; cette solution analytique est donnée par :

$$C_i^{n+2/3} = C_i^{n+1/3} e^{-k_r t} \quad (\text{I.1-7})$$

Enfin, l'équation (I.1-6) est résolue par le schéma de Manivelle- Nicholson

Application du modèle

Le modèle est appliqué à l'étude de l'accident du déversement de phénol qui s'est produit sur le fleuve Nakdong en Corée du Sud le 14 mars 1991.

Un tronçon de longueur 340 kilomètres du fleuve Nakdong a été modélisé. La limite amont est le barrage d'Andong, et la limite aval est la barrière d'Estuarine de Nakdong où les décharges et le niveau de la surface de l'eau sont connues (**figure I.1-1**). Neuf

stations de mesure du niveau de l'eau sont installées sur le tronçon principal du fleuve. Les observations du niveau d'eau relevé au niveau de ces stations sont utilisées pour le calage du modèle d'écoulement. Parmi les treize affluents, les débits affluents de quatre sont connus. Le modèle d'écoulement se compose d'un total de 15 noeuds situés au niveau des frontières amont et aval, et au niveau de la jonctions des différents apports. Un total de 744 points de maillages situés à des intervalles inégaux a été utilisé. La distance moyenne entre les points de maillage est de 420 mètres.

Des mesures du niveau d'élévation de la surface de l'eau pendant l'accident ont été examinées. On a constaté que le niveau du tronçon principal et des différents affluents était sensiblement constant pendant cette période. Puisque les variations de débits du barrage en amont étaient également négligeables pendant l'accident, toutes les conditions d'un écoulement stable étaient alors réunies. Pour estimer les apports des affluents non mesurés, il a été supposé que leurs apports sont proportionnels à la surface de la ligne de partage des eaux. La relation linéaire, $Q_{\text{affluent}} = 0.13A_d$, entre l'apport de l'affluent (Q) et la section (A_d) a été estimée par une analyse de régression en utilisant les données de débits mesurés des affluents.

Application du modèle de dispersion : L'accident du déversement de phénol s'est produit au bout 10 P.M. le 14 mars 1991. Pendant les huit premières heures, trente tonnes de phénol ont été déchargées dans le fleuve Nakdong.

Le modèle de la dispersion longitudinale pour un polluant non - conservatif a deux paramètres : le coefficient de la dispersion longitudinale D_L , et le coefficient de réaction k_r .

Beaucoup d'études expérimentales sur des canaux ont été effectuées pour mesurer le coefficient de dispersion longitudinale. Plusieurs formules empiriques de D_L ont été suggérées.

Les auteurs de cette étude ont utilisé quatre formules pour déterminer le coefficient de dispersion longitudinale. Ces formules sont données dans les équations (I.1-8) à (I.1-11) proposées respectivement par McQuivey et Keefer (1974), Liu (1977), Iwasa et Aya (1991), et Seo et Cheong (1998).

o Formule de McQuivey et Keefer : $D_L = 0.058 \frac{HU}{s_{ox}}$ (I.1-8)

o Formule de Liu (1977) : $D_L = \beta \frac{U^2 b^2}{Hu_*}$ avec, $\beta = 0.18 \left(\frac{U}{u_*} \right)^{1.5}$ (I.1-9)

o Formule de Iwasa et Aya (1991) : $\frac{D_L}{Hu_*} = 2 \left(\frac{b}{H} \right)^{1.5}$ (I.1-10)

$$\circ \text{ Formule de Seo et Cheong (1998) : } \frac{D_L}{Hu_*} = 5.915 \left(\frac{b}{H} \right)^{0.620} \left(\frac{U}{u_*} \right)^{1.428} \quad (\text{I.1-11})$$

où, H : profondeur de l'eau, b : largeur du canal, s_{ox} : pente du canal, et u_* : vitesse de cisaillement.

D'une manière générale, le coefficient de dispersion est modélisé à partir de la géométrie du canal et des caractéristiques de l'écoulement.

La **figure I-1.2** représente les distributions temporelles de la concentration au niveau de la station de Susan, simulées avec le modèle de dispersion en utilisant les trois équations empiriques du coefficient de dispersion.

On voit que la distribution obtenue avec l'équation de McQuivey et de Keefer est bien conforme à celle de Seo et de Cheong. Le coefficient de réaction k_r est nul dans les calculs. En outre, il a été observé que le temps d'arrivée est court lorsqu'on utilise l'équation de Liu.

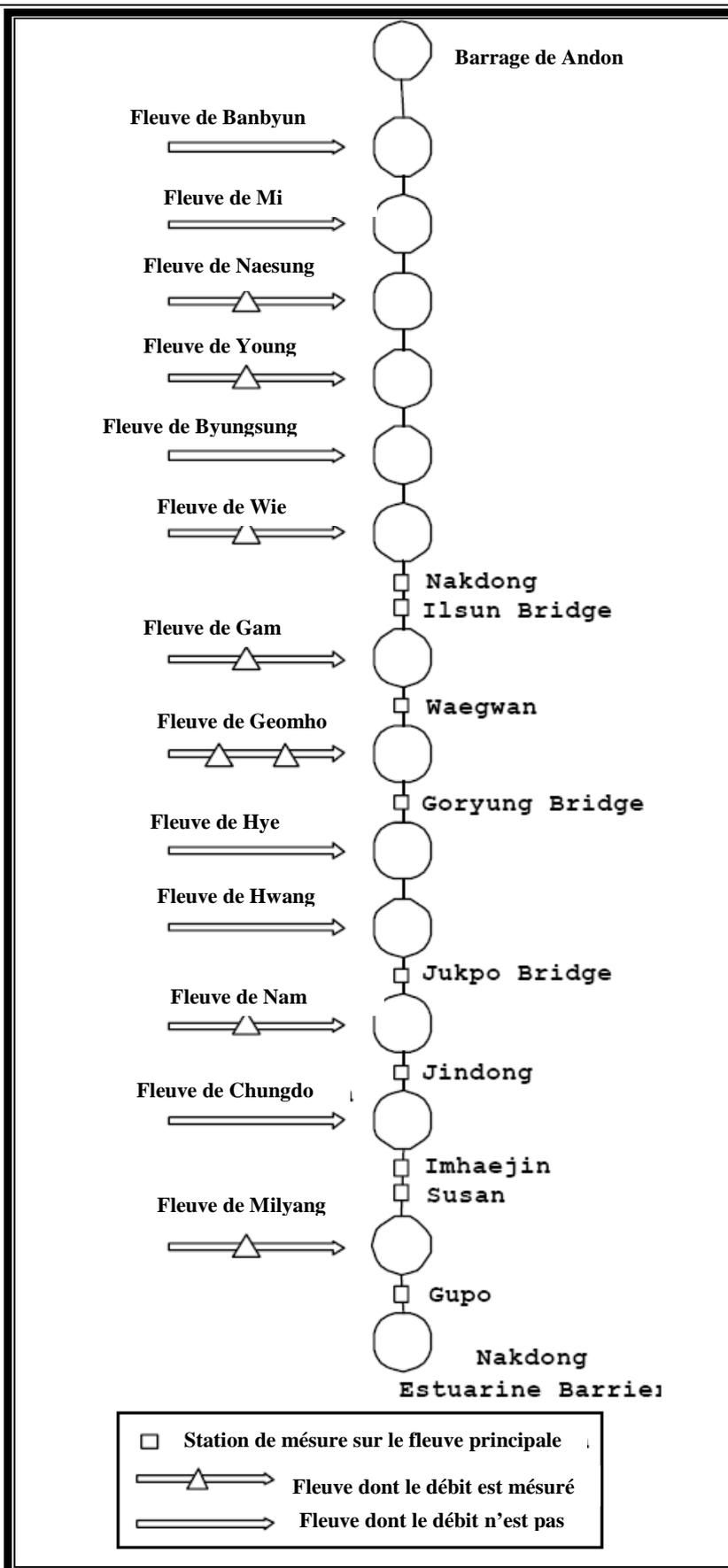


Figure I-1.1 : Schéma de la zone d'étude

La **figure I-1.3** donne les distributions de concentration simulée pour la même position mais avec un coefficient de réaction $k_r = 0.51$ tonne/jour.

Des observations ont été faites à huit positions différentes le long de la rivière. Cependant, aucune d'elles n'était continue. Comme le montrent la **figure I.1-2** et la **figure I.1-3**, si $k_r = 0.51$ /jour, la concentration est réduite pour d'environ 10 %. Bien que k_r n'affecte pas la forme de la distribution de concentration, les valeurs de la concentration dépendent de ce coefficient de manière significative.

Le coefficient k_r a été estimé en utilisant les données issues des observations.

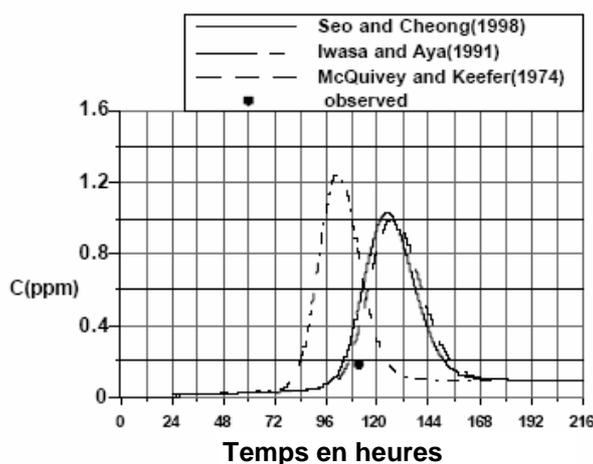


Figure I-1.2 : Variation temporelle de la concentration pour $k_r = 0$

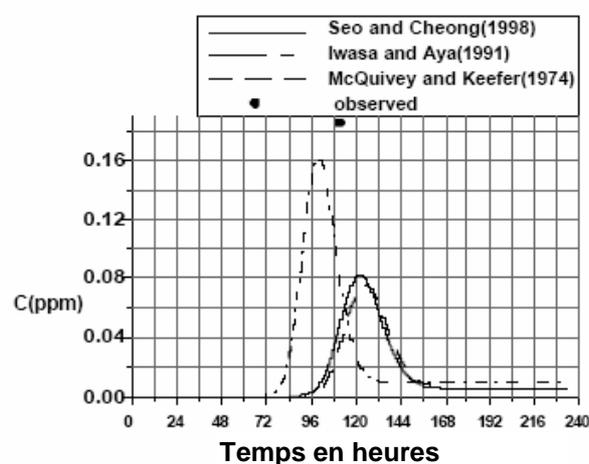


Figure I-1.3 : Variation temporelle de la concentration pour $k_r = 0.5$

7. Travaux de R. L. Runkel

Les travaux de Monsieur R. L. Runkel réalisés en 1997 à l'USGS portent sur le phénomène du transport d'un corps dissout non conservatif (**Runkel, 1997**).

Il a considéré un système dans lequel le transport physique est principalement unidimensionnel ; le processus de mélange suivant la direction verticale et horizontale a été négligé de sorte que les concentrations changent seulement dans la direction longitudinale. En outre, un champ régulier et uniforme d'écoulement est imposé et les effets de la dispersion sont constants dans l'espace. Enfin, tous les processus biogéochimiques sont décrits en termes de réactions chimiques où le taux de transformation est proportionnel à la concentration en corps dissous. En tenant compte de ces hypothèses, la conservation de la masse donne l'équation d'advection - dispersion à paramètres constants avec réaction.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -U \frac{\partial C}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - k_r C \quad (\text{I.2-1})$$

où, C : concentration [ml^{-3}] ; t : temps [T] ; U : vitesse d'écoulement [$L T^{-1}$] ; x : distance [L] ; D_L : coefficient de dispersion [$L^2 T^{-1}$] et k_r : coefficient de réaction.

Plusieurs solutions analytiques ont été proposées ; mais ces solutions concernent soit le cas d'une source instantanée, soit le cas d'une source continue mais à durée infinie. Le but principal des travaux de Runkel est de parvenir à proposer une solution analytique pour une source continue à durée limitée.

Source continue

Pour le cas d'une source continue infinie, les conditions aux limites et les conditions initiales sont données comme suite :

$$C(x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \geq 0 \quad (\text{I.2-2})$$

$$C(0, t) = C_0 \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (\text{I.2-3})$$

$$C(\infty, t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (\text{I.2-4})$$

où, C_0 est la concentration initiale [ml^{-3}].

Pour le cas de corps dissous conservateurs ($k_r = 0$).

La solution analytique est donnée par :

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x - Ut}{2\sqrt{D_L t}} \right) + \exp \left(\frac{Ux}{D_L} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{x + Ut}{2\sqrt{D_L t}} \right) \right] \quad (\text{I.2-5})$$

En utilisant la transformation de Laplace, la solution analytique pour un corps dissous non conservative ($k_r \neq 0$) est donnée comme suite :

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\exp \left\{ \frac{Ux}{2D} [(1 - \Gamma)] \right\} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - Ut\Gamma}{2\sqrt{D.t}} \right) + \exp \left\{ \frac{Ux}{2D} (1 + \Gamma) \right\} \operatorname{erfc} \left(\frac{x + Ut\Gamma}{2\sqrt{D.t}} \right) \right] \quad (\text{I.2-6})$$

$$\text{où, } \Gamma = \sqrt{1 + 2B_b} \quad (\text{I.2-7})$$

$$B_b = \frac{2k_r D_L}{U^2} \quad (\text{I.2-8})$$

En posant les hypothèses selon lesquelles les termes $(x + Ut)$ sont relativement petits par rapport aux autres termes l'équation (I.2-6) devient :

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\exp \left\{ \frac{Ux}{2D_L} [(1 - \Gamma)] \right\} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - Ut\Gamma}{2\sqrt{D_L t}} \right) \right] \quad (\text{I.2-9})$$

L'équation (I.2-9) peut être encore simplifiée en notant que pour B_b petit (de l'ordre de 0.0025), Γ peut être rapproché comme suite $\Gamma \approx 1 + H$ (O'Loughlin and Bowmer, 1975) :

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\exp\left(\frac{-k_r x}{U}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x - Ut\{1 + Bb\}}{2\sqrt{D_L t}}\right) \right]$$

(I.2-10)

Cette dernière expression a été introduite par O'Loughlin et Bowmer (1975) afin de déterminer le coefficient k_r à partir des données de terrain.

Source continue de durée τ :

Bien que les solutions ci-dessus soient utiles, un problème plus important est celui dans lequel une source continue est présente pendant une période finie; τ représente la durée de la source continue [T], l'état initial et les états aux limites sont donnés par :

$$C(x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \geq 0 \quad (\text{I.2-11})$$

$$C(0, t) = C_0 \quad \text{pour } \tau \geq t \geq 0 \quad (\text{I.2-12})$$

$$C(0, t) = 0 \quad \text{pour } t > \tau \quad (\text{I.2-13})$$

$$C(\infty, t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (\text{I.2-14})$$

Une solution analytique pour les conditions données ci-dessus a été développée par Rose (1977). Rose a correctement appliqué le principe de la superposition à (I.2-10), en déterminant une solution analytique approximative. Pour $t \leq \tau$, la solution est donnée par (I.2-10). Pour $t > \tau$, la solution est :

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \exp\left(\frac{-k_r x}{U}\right) \left[\operatorname{erfc}\left\{\frac{x - Ut(1 + B_b)}{2\sqrt{D_L t}}\right\} - \operatorname{erfc}\left\{\frac{x - U(t - \tau)(1 + B_b)}{2\sqrt{D_L (t - \tau)}}\right\} \right] \quad (\text{I.2-15})$$

A cause des hypothèses précédemment émises, l'équation (I.2-15) ne représente qu'une solution analytique approximative pour le problème actuel. Une solution analytique exacte peut être obtenue en appliquant le principe de la superposition à la solution analytique originale (I.2-6) pour une source continue de durée infinie. Ainsi la solution pour $t \leq \tau$ est donnée par (I.2-6).

Pour $t > \tau$, le principe de la superposition, nous donne :

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\exp\left\{\frac{Ux}{2D_L}(1 - \Gamma)\right\} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{x - Ut\Gamma}{2\sqrt{D_L t}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x - U(t - \tau)\Gamma}{2\sqrt{D_L (t - \tau)}}\right) \right\} + \exp\left\{\frac{Ux}{2D_L}(1 + \Gamma)\right\} \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{x + Ut\Gamma}{2\sqrt{D_L t}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x + U(t - \tau)\Gamma}{2\sqrt{D_L (t - \tau)}}\right) \right\} \right] \quad (\text{I.2-16})$$

L'équation (I.2-16) constitue une solution analytique approchée pour une source continue à durée finie d'un polluant actif.

Résultats – conclusions

Une source continue avec une durée de deux heures ($\tau = 2$ heures) est appliquée tels que la concentration à la limite amont est de 100 unités de concentration ($C_0 = 100$ unité de concentration). La vitesse d'écoulement et le coefficient de dispersion sont fixes (à 0.1 m/s et à 5.0 m²/s) et les paramètres D/U_x et B varient en fonction de la distance (x) et du taux d'affaiblissement k . Une analyse des erreurs commises en faisant la différence entre la solution exacte (I.2-16) et la solution approchée (I.2.15) a été effectuée.

Des résultats de l'application précédente présentés graphiquement dans les **figures I-2.1a et I-2.1b** montrent les résultats de la variation de la concentration en fonction du temps d'un corps dissous conservateur ($k_r = 0$) aux positions $x = 100$ m et $x = 2000$ m.

Les **figures I-2.1c et I-2.1d** donnent la variation de la concentration d'un corps dissous non conservatif ($k_r = 10^{-4}$) à $x = 100$ m et $x = 2000$ m.

Dans les deux cas, les erreurs sont dues aux hypothèses simplificatrices où certains termes ont été négligés par rapport à d'autres. D'une manière générale, les erreurs liées à l'utilisation de la solution analytique approximative diminuent avec l'augmentation de la distance pour un corps dissous conservateur (D/U_x diminue) et augmentent avec l'augmentation de k_r pour un corps dissous non conservatif.

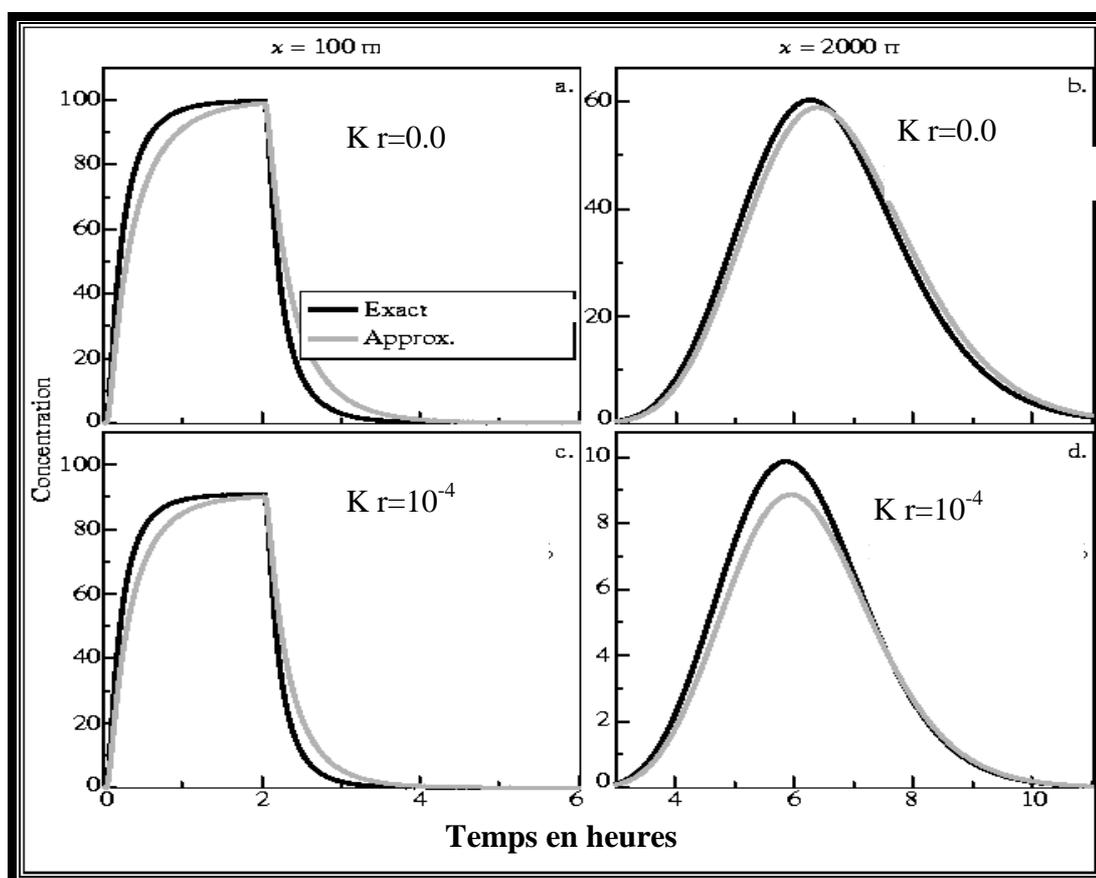


Figure I-2.1 : Solutions analytiques exactes et approximatives.

8. Travaux de Y Ramsis Fares

Les travaux de Y Ramsis Fares portent sur le transport des polluants dans les réservoirs et les fleuves (**Fares, 1998**).

Dans ce travail, il a d'abord étudié les propriétés de la dispersion dans un réservoir, afin de proposer un modèle de simulation de la dispersion dans un cours d'eau.

Pour le cas du réservoir, il a utilisé l'approche du bilan de matière en utilisant le modèle de la zone morte pour aboutir à une formulation générale lui permettant d'estimer les variations de concentrations d'un corps dissout en fonctions du temps. Cette approche est basée sur l'hypothèse selon laquelle, la dispersion longitudinale est dominée par les effets de la zone morte (nous ne présentons pas les résultats pour le cas du réservoir car notre but dans ce chapitre est d'étudier certains travaux effectués sur la dispersion des polluants dans les rivières ou les canaux).

Pour la modélisation du processus de dispersion, l'équation de transport a été établie comme suite :

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t} = -V_e \text{grad } C + \text{div}(D_t \text{grad } C) \quad (\text{I.3-1})$$

avec, $V_e = (u, v, w)$: vecteur de champ de vitesse où les composantes (u, v, w) représentent la vitesse dans la direction longitudinale x , dans la direction latérale y et dans la direction verticale z ; $D_t = (D_x, D_y, D_z)$ = coefficient de dispersion spatiale.

L'équation (I.3-7) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = -U \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} + S \quad (\text{I.3-2})$$

où, D_L : coefficient de dispersion longitudinale ; S : terme source qui peut entraîner une diminution ou une augmentation de la concentration.

Dans l'Equation (I.3-8), on suppose que $O(v, w) \ll O(u)$, par conséquent leurs contributions dans le phénomène d'advection ont été ignorées. En connaissant les condition initiales et les conditions aux limites, une solution analytique exacte pour $C(x, t)$ est donnée par :

$$C(x, t) = \frac{1}{K} \frac{\rho_s F U}{Q \sqrt{4 \rho_s D_L t}} \exp \left[-\frac{(x - U t)^2}{4 D_L t} \right] \left(1 - K_0 \frac{x}{U t} \right) \quad (\text{I.3-3})$$

où, ρ_s : densité du corps dissous ; K : facteur de dispersion; K_0 : coefficient expliquant la diminution du corps dissout dans le fleuve due à la végétation, les zones mortes, ou bien les matières en suspension.

L'équation (I.3-9), ne peut être appliquée que dans des sections où le mélange est entièrement développé. Notons que la réussite d'un modèle de dispersion est étroitement liée à une bonne modélisation du coefficient de dispersion. Plusieurs formules ont été développées pour déterminer le coefficient de dispersion.

Une expression pour D_L lié à l'écoulement d'un fleuve est donnée par :

$$D_L = \frac{BQ^2}{UR^3} \quad \text{avec, } B = 0.18 \left(\frac{u_*}{U} \right)^{3/2} \quad (\text{I.3-4})$$

où, R : rayon hydraulique et u_* , la vitesse de frottement.

En utilisant une équation modélisant le frottement, par exemple l'équation de Manning, la formule de D_L a été simplifiée comme suite :

$$D_L = (S_{ox}^{0.75} n) [U^{-1.5} R^{-2.92} Q^2] \quad (\text{I.3-5})$$

où, n : coefficient de rugosité de Manning et S_{ox} la pente de lit du fleuve.

L'équation (I.3-5) est en bon accord avec d'autres formules rapportées dans la littérature.

Enfin, la mise en application du modèle ainsi établi a été appliquée pour surveiller la qualité des eaux dans le fleuve de Waikato en Nouvelle Zélande. Un traceur a été utilisé et plusieurs mesures ont été effectuées. Les résultats sont résumés sur les courbes de la **figure I-3.3**.

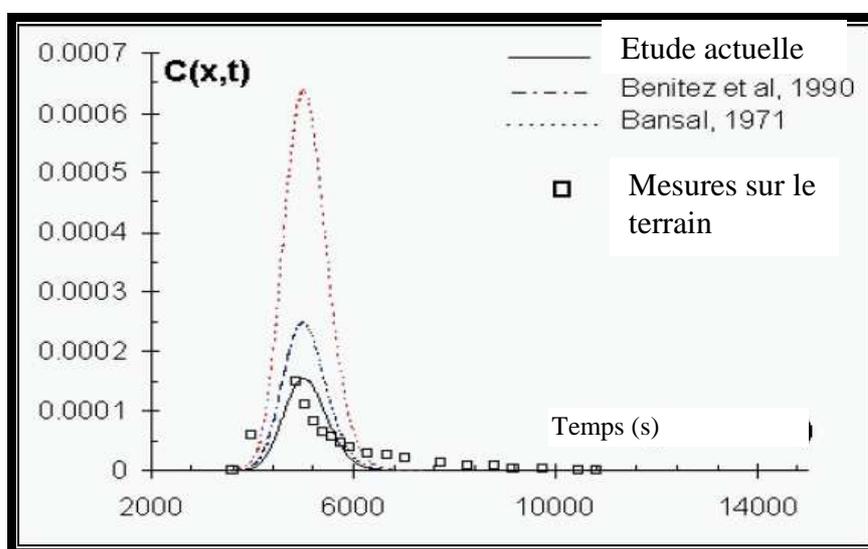


Figure I-3.1 : Profils de Concentration dans le fleuve de Waikato à proximité de la source

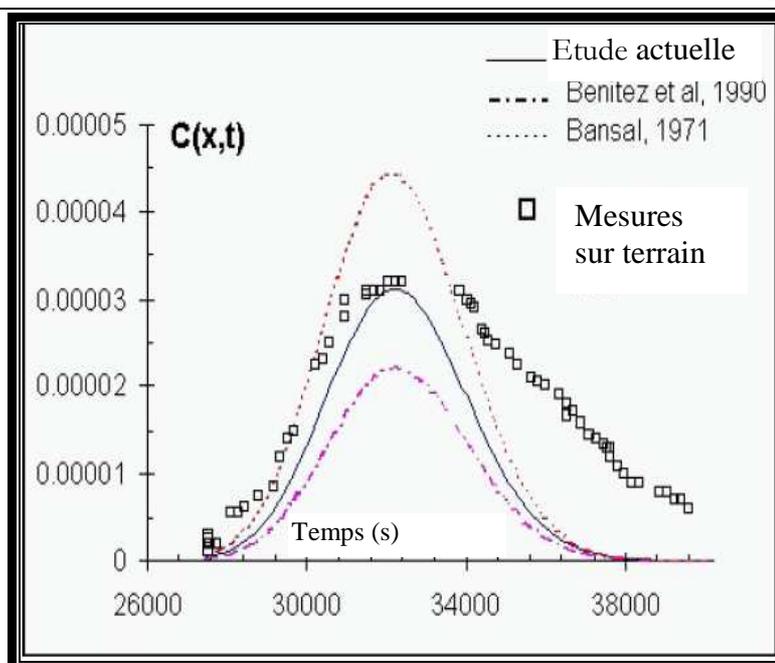


Figure I-3.1 : Profils de Concentration dans le fleuve de Waikato dans une zone éloignée de la source.

De l'analyse des résultats, une concordance raisonnablement bonne a été trouvée entre les profils calculés à partir du modèle proposé, et des mesures sur le terrain pour des situations de champs proches et de champs lointains.

4. Travaux de Bernhard H. Schmid, M.ASCE

Ces travaux réalisés au cours de l'année 2004 portent sur la modélisation du transport d'un polluant dans les rivières (**Bernhard, 2004**). Deux modèles sont utilisées : le modèle de la zone morte qui considère que dans une rivière les substances transportées sont retardées dans une zone appelée zone morte avant de poursuivre leur parcours et la méthode d'advection – diffusion.

Le but principal de ces travaux était de recueillir des données à partir des expériences des traceurs dans une rivière et à partir des caractéristiques géométriques de la rivière et de l'écoulement, de simuler les valeurs mesurées en utilisant le modèle de la zone morte et celui de l'advection – diffusion.

Ensuite une étude comparative des deux méthodes est effectuée afin d'en déterminer des critères d'applications des deux méthodes.

Les critères du terme de l'indice de Damköhler (DaI) et le coefficient d'obliquité, G_t , ont été examinés, et une application à un cas réel a été effectuée.

Principes fondamentaux et méthodologies

Le transport longitudinal de corps dissous dans les rivières avec des zones mortes peut être modélisé au moyen du modèle de la zone morte qui, pour un corps dissous conservateur dans un trajet est montré sur la figure I-4.1 ci-après.

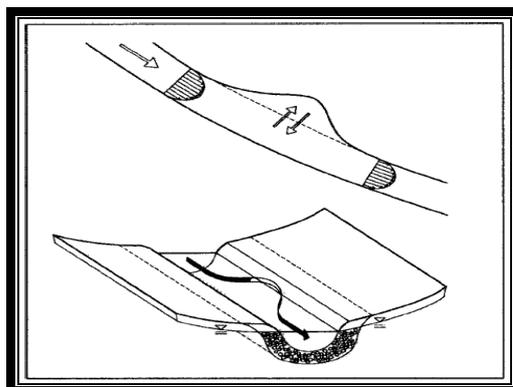


Figure I-4.1. Illustration des mécanismes de la zone morte

Les équations du transport de ce modèle sont données comme suite :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \epsilon_e T_e^{-1} \cdot (C_s - C) \quad (\text{I.4-1})$$

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} = T_e^{-1} \cdot (C - C_s) \quad (\text{I.4-2})$$

où, C est la concentration moyenne dans le tronçon principal de la rivière; C_s est la concentration moyenne dans la zone morte; U est la vitesse d'écoulement; D_L est le coefficient dispersion longitudinale; x est la coordonnée dans le sens de l'écoulement; t est le temps; ϵ_e est le rapport du volume de la zone de stockage par unité longueur au volume de la rivière par unité de longueur; T_e est le paramètre d'échange lié au temps de rétention de la zone morte.

Physiquement, la zone morte est montrée sur la **figure I-4-1**.

Au temps t_0 , la masse M_0 de traceur est injectée instantanément à x_0 , et la concentration du traceur dans la section principale de la rivière est nulle ainsi que celle dans les zones mortes avant l'injection.

Comme condition limites, nous avons :

$$\frac{\partial C}{\partial x} \rightarrow 0 \text{ pour } x \rightarrow +\infty \quad (\text{I.4-3})$$

A partir d'une approche stochastique, une solution semi analytique peut être obtenue, donnée comme suite :

$$C(x, t) = \frac{M_0}{Au} \left[f_F(t) e^{-k_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^n}{n!} \int_0^t f_F(\mu) \mu^n e^{-k_1 \mu} \gamma_n(t - \mu) d\mu \right] \quad (\text{I.4-4})$$

avec, μ : variable d'intégration;

$$k_1 = \varepsilon_e T_e^{-1}; \quad (I.4-5)$$

$$k_2 = T_e^{-1}; \quad (I.4-6)$$

$$f_F(t) = \frac{U}{\sqrt{4\pi D_L t}} \exp\left[-\frac{(x - ut)^2}{4D_L t}\right] \quad (I.4-7)$$

$$\gamma_n(t - \mu) = \frac{k_2^n (t - \mu)^{n-1} e^{-k_2(t-\mu)}}{(n-1)!} \quad (I.4-8)$$

Le modèle d'advection - dispersion est donnée par :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (I.4-9)$$

L'équation (I.7-8) en tenant compte des conditions initiales et des conditions aux limites a pour solution analytique :

$$f_F(t) = \frac{M_0}{A\sqrt{4\pi D_L t}} \exp\left[-\frac{(x - ut)^2}{4D_L t}\right] \quad (I.4-10)$$

La procédure adoptée dans cette étude comporte les étapes suivantes :

- Les valeurs des paramètres du transport sont choisies dans une large gamme : vitesse d'écoulement (m/s) : $u = 0.10, 0.50, \text{ et } 3.0$; coefficient de dispersion longitudinale (m^2/s) : $D_L = 0.10 \text{ et } 10.0$; coefficient de rapport du volume de la zone morte par unité de longueur au volume de la rivière par unité de longueur : $\varepsilon_e = 5, 10, 20, \text{ et } 200\%$; temps de séjour de la zone morte : $T_e = 100, 2.000, \text{ et } 20.000 \text{ s}$; et, enfin la longueur d'extension : $L = 100m, 1 \text{ kilomètre, et } 10 \text{ kilomètres}$.

Cette étude est axée vers les petites rivières ($D_L < 10m^2/s$), et les paramètres donnés ci-dessus peuvent être appliqués à beaucoup de situations rencontrées sur le terrain.

Les équations du modèle de la zone morte (I.4-1) et (I.4-2) sont résolus après évaluation de l'équation (I.4-1) ou (dans certains cas) par le transformé de la Laplace basée sur la technique mentionnée précédemment. La masse injectée est de 10 kilogrammes dans toutes les directions.

- les courbes obtenues à partir du modèle de la zone morte et du modèle de l'advection - diffusion sont tracées sur le même graphe afin d'en effectuer une étude comparative.

Il est normal d'admettre une certaine dépendance des mesures d'erreur sur l'indice de Damköhler DaI , définie par :

$$DaI = \frac{L(1 + \varepsilon_e)}{u \cdot T_e} = \frac{L/[u/(1 + \varepsilon_e)]}{T_e} \quad (I.4-11)$$

Un exemple de comparaison entre les courbes obtenues à partir du modèle de la zone morte et de l'advection - diffusion est montrée sur la **figure I-4-2**.

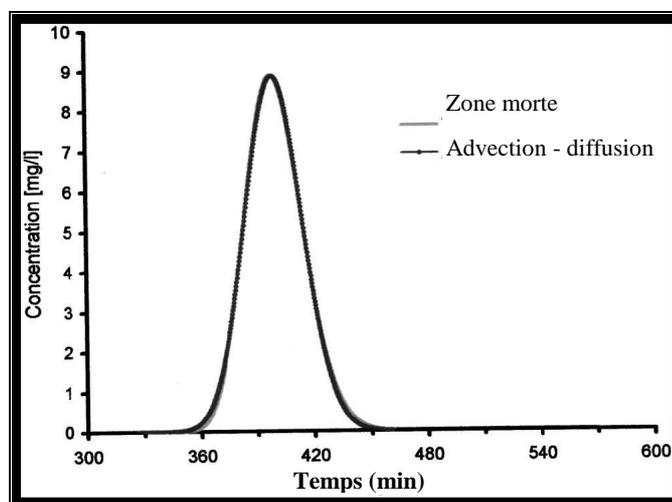


Figure I-4-2 : Courbe du modèle de la zone morte et du modèle d'advection -diffusion (pour $u = 0.50$ m/s ; $K = 0.10$ m²/s ; $\varepsilon = 20\%$; $T = 100$ s ; $L = 10.000$ m ; $DaI = 240$).

Application

Les résultats théoriques dérivés précédemment ont été appliqués à des cas réels. Ainsi une expérience de traceur de sel entreprise par des auteurs sur une distance de 500 m de la rivière de Mödling, qui est une petite rivière de la Basse Autriche, a été réalisée le 1 mars 2002. Le traceur utilisé était NaCl, avec une injection instantanée de 3.377 kilogrammes de Cl ; l'expérience a été effectuée près du site de Mödling-Aquädukt. Des concentrations en chlorure ont été mesurées au moyen des mesures de conductivité qui ont été converties au laboratoire pour estimer les concentrations correspondantes.

La méthode des moments a été utilisée (Seo et Cheong 2001) pour estimer les paramètres de transport, avec le résultat : $U = 0.295$ m/s, $D_L = 0.0$ m²/s, $\varepsilon_e = 34.4\%$, et $T = 107$ s ;

Par conséquent, l'indice de Damköhler a été calculé comme suite :

$$DaI = \frac{L/[u/(1 + \varepsilon_e)]}{T_e} = \frac{500/[0.295/1.344]}{107} = 21.1$$

Pour qu'il ait conformité entre le modèle de la zone morte et le modèle de l'advection - diffusion un second critère peut être utilisé donnée par : $G_t \leq 1.0$

A partir des données expérimentaux, on obtient $G_t = 0.91$.

La **figure I-4-3** montre une comparaison des résultats des différents modèle avec les valeurs suivantes : concentration maximale du modèle Advection - Diffusion est égale à 35.4 mg/l à $t = 36$ minutes après l'injection.

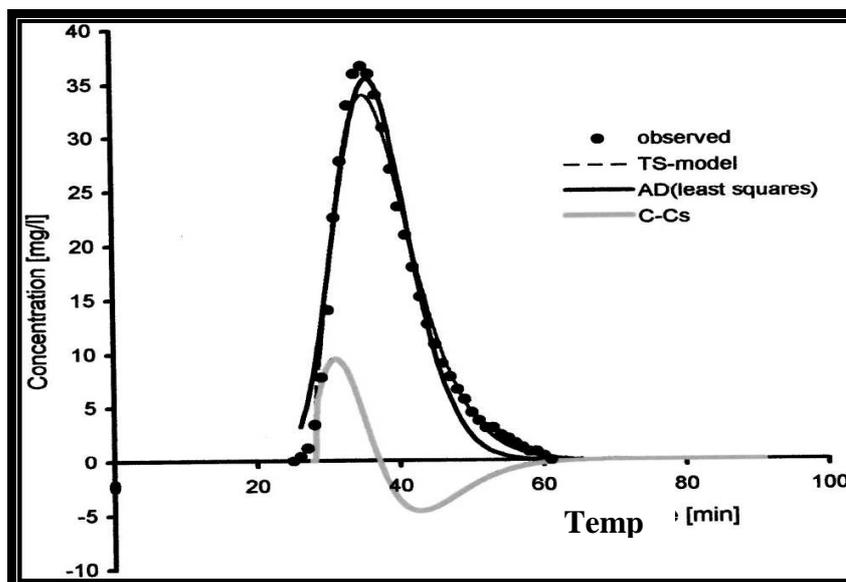


Figure I-4-3 : Modèle d'advection – diffusion et celui de la zone morte représentant les données de la rivière de Mödling pour $DaI = 21.1$.

Enfin, cette étude montre que pour les critères $DaI \leq 0.6$ et $DaI \geq 60$ et $G_t \leq 1.05$ et $G_t \geq 5.5$ on observe une bonne concordance entre le modèle de l'advection – diffusion et le modèle de la zone morte.

5. Travaux de Ferdi L. Hellweger

Les travaux de Ferdi portent sur les techniques de mesure et de modélisation de la dispersion des polluants dans les eaux à surfaces libres (**Ferdi, 2005**). Pour cela, des études expérimentales ont été réalisées sur plusieurs rivières. Dans ces expériences, des injections instantanées des traceurs ou des polluants ont été effectuées et l'étude de certains accidents sur des rivières a été aussi mentionnée dans ces travaux. Pour chaque cas, une étude comparative entre les résultats obtenus à partir des mesures et les résultats obtenus à partir des simulations a été effectuée.

Dans cette étude, le modèle de la zone morte a été utilisé.

Techniques de mesure de la dispersion à partir des traceurs.

Les traceurs sont employés pour mesurer la dispersion. Un grand nombre de traceurs est disponible et plusieurs facteurs devraient être considérés pour leur choix tels que :

- Détectabilité ;
- Niveau de concentration de fond ;
- Toxicité ;

- Esthétique ;
- Coût ;
- Propriétés et devenir du traceur.

Technique de modélisation

- o Modélisation de la dispersion unidimensionnelle

Le devenir et le transport d'une substance dissoute dans une eau à surface libre unidimensionnelle sont régis par l'équation d'advection – dispersion donnée comme

$$\text{suite : } \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + k_r C \quad (\text{I.5-1})$$

où, $C(x, t)$: concentration de masse ; $U(x, t)$: vitesse moyenne d'écoulement suivant la direction x ; $D_L(x, t)$: coefficient de dispersion longitudinale ; k_r : coefficient lié à la diminution ou à l'augmentation du polluant ; x : coordonnées suivant la direction longitudinale et t : temps.

Pour le cas idéalisé (c'est-à-dire le canal uniforme et l'écoulement constant) et une entrée instantanée du polluant, l'équation peut être résolue comme suite :

$$C(x, t) = \frac{M}{2A\sqrt{\pi D_L t}} e^{-\frac{(x-Ut)^2}{4D_L t} - k_r t} \quad (\text{I.5-2})$$

où, M [g] est la masse à l'entrée et A [m²] la section droite. L'équation est très intéressante, mais souvent les hypothèses faites sur la section et l'écoulement introduisent des erreurs inacceptables. Pour cette raison des solutions numériques à l'équation I.5-1 sont souvent utilisées. En utilisant un schéma aux différences finies, on obtient:

$$C_i^{t+\Delta t} = C_i^t + \left[\begin{array}{c} Q_{i-1,i} C_{i-1}^t - Q_{i,i+1} C_i^t - \frac{D_{L_{i-1,i}} A_{i-1,i}}{L_{i-1,i}} (C_i^t - C_{i-1}^t) - \\ \frac{D_{L_{i,i+1}} A_{i,i+1}}{L_{i,i+1}} (C_i^t - C_{i+1}^t) - k_r V_{oi} C_i^t \end{array} \right] \frac{\Delta t}{V_{oi}} \quad (\text{I.5-3})$$

où, i : le numéro du point de calcul ; Q [m³s⁻¹] : le débit, L_m [m] : la longueur de mélange et V_o [m³] : le volume.

Modélisation de la zone morte en mono – dimensionnelle

Le stockage passager des traceurs ou des polluants dans des zones appelées zone mortes où les processus sont 2D ou 3D, est fondamental dans le phénomène de transport.

Ainsi en tenant compte de l'influence de la zone morte, l'équation I.5-1 est modifiée pour aboutir à l'équation suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -U \frac{\partial C}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - k_r C + \frac{\varepsilon_e}{T_e} (C_s - C) \quad (I.5-4)$$

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} = T_e^{-1} (C - C_s) \quad (I.5-5)$$

où, C est la concentration moyenne dans le tronçon principal de la rivière; C_s est la concentration moyenne dans la zone morte ; U est la vitesse d'écoulement ; D_L est le coefficient dispersion longitudinale ; x est la coordonnée dans le sens de l'écoulement ; t est le temps; ε_e est le rapport du volume de la zone de stockage par unité longueur au volume de la rivière par unité de longueur ; T_e est le paramètre d'échange lié au temps de rétention de la de zone morte.

Comme pour l'équation de l'Advection – Diffusion, la discrétisation des équations du modèle de la zone morte sont données comme suite :

$$C_i^{t+\Delta t} = C_i^t + \left[\begin{array}{l} Q_{i-1,i} C_{i-1}^t - Q_{i,i+1} C_i^t - \frac{D_{L_{i-1,i}} A_{i-1,i}}{L_{i-1,i}} (C_i^t - C_{i-1}^t) \\ - \frac{D_{L_{i,i+1}} A_{i,i+1}}{L_{i,i+1}} (C_i^t - C_{i+1}^t) - k_r V_{oi} C_i^t + \frac{\varepsilon_i}{T_i} V_{oi} (C_{s,i}^t - C_i^t) \end{array} \right] \frac{\Delta t}{V_{oi}} \quad (I.5-6)$$

$$C_{s_i}^{t+\Delta t} = C_{s_i}^t + \left[-k_r V_{s_i} C_{s_i}^t + \frac{1}{T} V_{s_i} (C_i^t - C_{s_{i-1}}^t) \right] \frac{\Delta t}{V_{oS_i}} \quad (I.5-7)$$

Application

Fleuve de Hudson (New York)

Le 25 Juillet 2001 environ 4.3 moles de SF 6 ont été délibérément déversés de manière instantanée dans le fleuve de Hudson par Ho et al (2001) en utilisant le modèle ECOMSED développé par Blumberg et al. (2004).

Les courbes obtenues à partir des données mesurées et des données simulées sont présentées dans la figure I-5.1

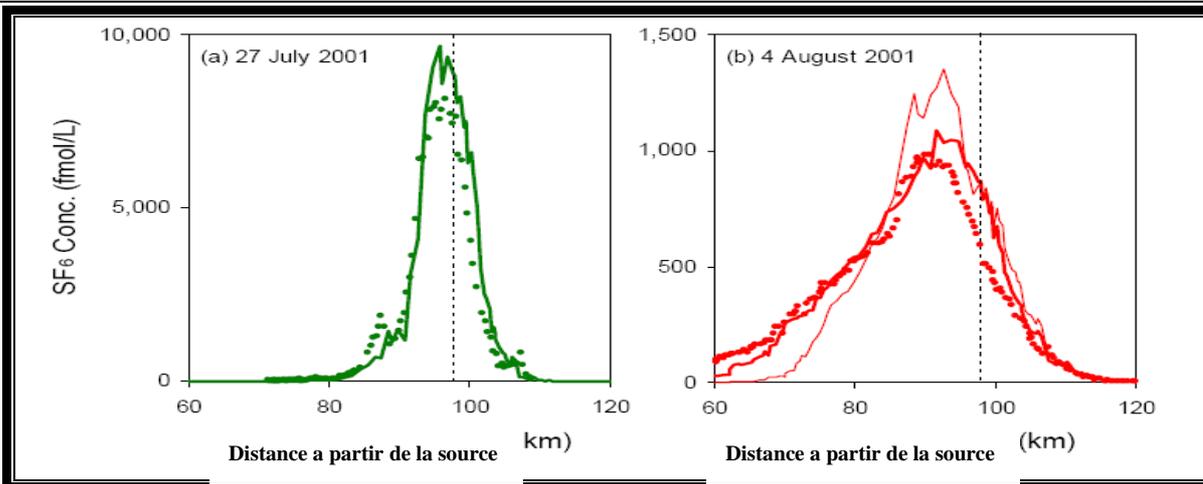


Figure I-5.1 : Variation des concentrations mesurées (représentées par les pointes) et des concentration simulées (représentées par les lignes) de SF6 dans le fleuve Hudson

Fleuve de Vent-Wind-Bighorn (Wyoming)

Le 21 Mars et le 29 juin 1971 environ 3.8 kilogrammes de rhodamine avaient été injecté dans le fleuve de Wind-Bighorn et plusieurs stations de mesures ont été installées en avale.

Les courbes obtenues à partir des données de mesures et des données simulées à différentes localités sont présentées sur la **figure I-5.2**

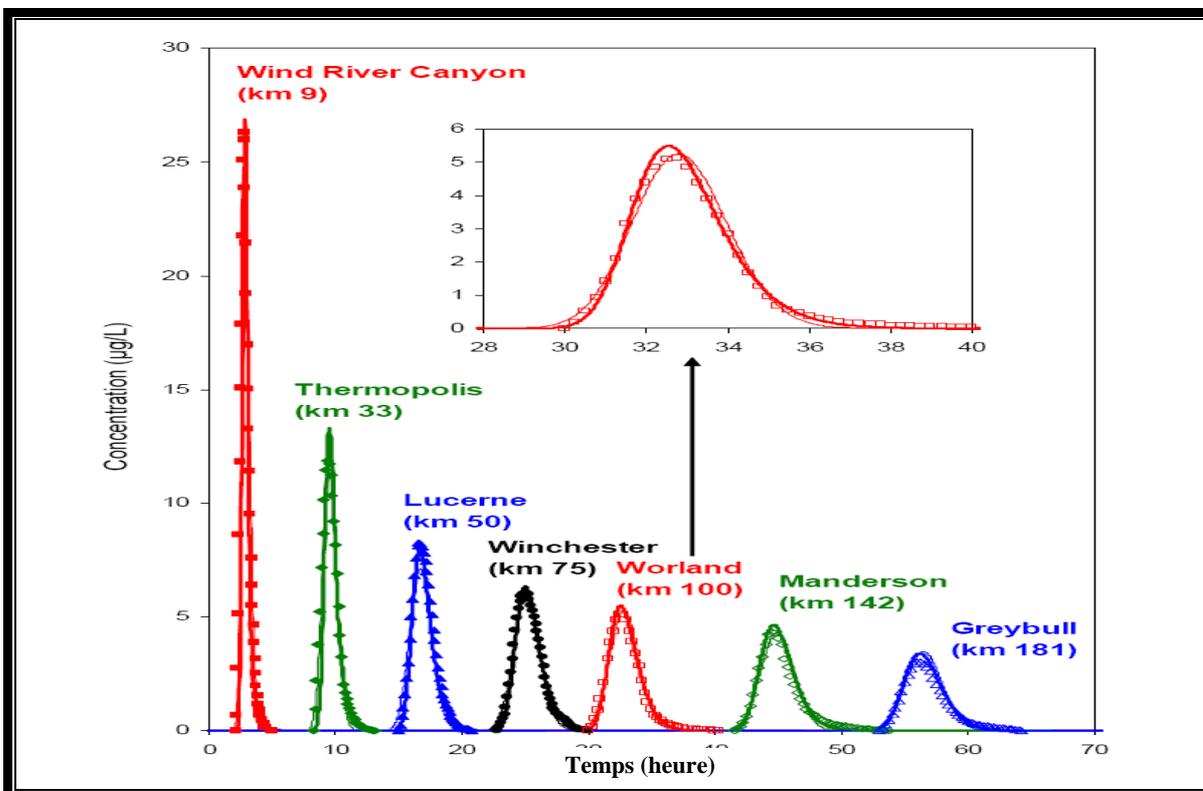


Figure I-5.2 : Variation des concentrations mesurées (représentées par les pointes) et des concentration simulées (représentées par les lignes) de SF6 en fonction du temps dans le fleuve Vent-Wind-Bighorn.

Les traits fins représentent le profil obtenu à partir du modèle d'advection – diffusion et les traits large représentent le profil obtenu à partir du modèle de la zone morte. On voit bien qu'il y a une bonne concordance entre les deux modèles.

Fleuve de Missouri (USA)

Le 13 Novembre 1967, 54 kilogrammes de rhodamine ont été injectés dans le fleuve du Missouri et la concentration a été mesurée à plusieurs endroits tels que Decatur, Blair, Ak-sar-ben, et Plattsmouth.

Les résultats des mesures et de la simulation sont présentés sur la **figure I-5.3**.

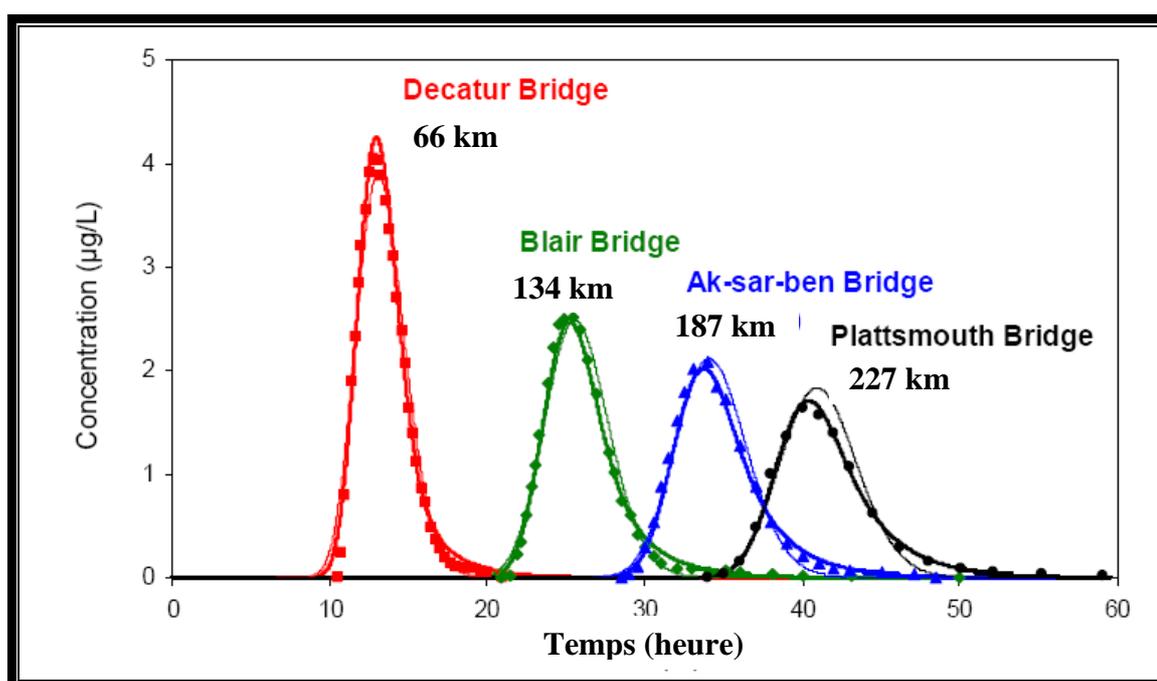


Figure I-5.3 : Variation des concentrations mesurées (représentées par les points) et des concentration simulées (représentées par les lignes) de rhodamine en fonction du temps dans le fleuve de Missouri.

Les traits fins représentent le profil obtenu à partir du modèle d'advection – diffusion et les traits large représentent le profil obtenu à partir du modèle de la zone morte. On voit bien qu'il y a une bonne concordance entre les deux modèles.

Fleuve de Sacramento (La Californie)

Le 14 juillet 1994, un train avait déraillé et avait déversé 19 à 27 tonnes de pesticide. Ce pesticide par des phénomènes de photolyse et d'hydrolyse, se transforme en plusieurs produits par lesquels le méthyle iso thiocyanate (MITC) dont son transport est étudié.

Les résultats des mesures et de la simulation sont présentés sur la **figure I-5.4**.

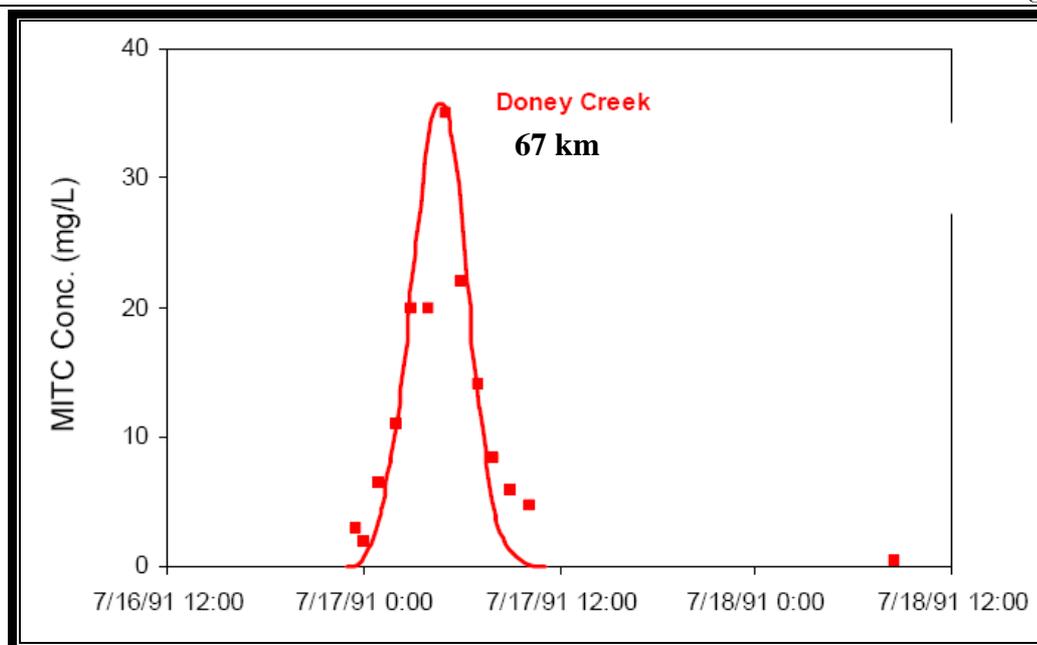


Figure I-5.5 : Variation des concentrations mesurées (représentées par les pointes) et des concentration simulées (représentées par les lignes) de MITC en fonction du temps dans le fleuve de Sacramento.

Les différentes courbes présentées montrent une certaine concordance entre les résultats obtenus à partir des mesures et les résultats de la simulation. Cependant certaines présentent des déviations considérables entre les mesures et la simulation. Cela peut être dû à plusieurs facteurs tels que la zone morte, le changement du régime de l'écoulement, le mélange non complet dans certaines zones...

Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons présenté quelques travaux réalisés dans le domaine de la modélisation et la simulation de la dispersion de matière dissoute dans les cours d'eau. Certains auteurs ont mené des travaux expérimentaux en vue de valider leurs modèles numériques. La plus part ont réduit le problème en uni – dimensionnel afin de rendre la résolution plus souple. Cependant, la quasi – totalité des méthodes de résolution utilisées consiste à proposer des solutions analytiques.

Dans les prochains chapitres, nous aborderons le problème autrement. Nous intégrons d'autres paramètres en vue d'obtenir des résultats de plus grande précision. Ainsi, nous résolvons le problème numériquement car l'augmentation des paramètres conduit à des équations complexes qui n'admettent pas des solutions analytiques.

Enfin, nous modéliseront et simulerons le phénomène de la dispersion d'un polluant actif en 2D afin de se rapprocher aussi que faire se peut de la réalité.

Chapitre II : Modèle mathématique

Introduction

Les équations de Navier Stokes gouvernent la plus part des écoulements des fluides Newtoniens. Mais depuis leurs établissements ces équations ne sont pas encore totalement maîtrisées car leurs résolutions demeure un problème sans issu.

Le phénomène de la turbulence en est la principale difficulté dans la résolution de ces équations. Ce phénomène est présent dans la plus part des écoulement rencontré dans la nature. C'est le cas de la dispersion d'un polluant dans un canal à surface libre où la turbulence joue un rôle prépondérant.

Dans ce chapitre nous allons développer le modèle mathématique décrivant les différents phénomènes intervenant dans notre problème.

Nous développerons d'abord les équations de Navier Stokes qui constituent le modèle de base pour tous les écoulements des fluides Newtonien.

Ensuite l'approche statistique sera utilisée, pour développer les équations des Reynolds qui constituent notre modèle hydrodynamique.

Ces équations forment un système ouvert, le modèle de fermeture $k - \varepsilon$ sera développé afin d'obtenir des équations supplémentaires ;

Enfin, nous décrivons le phénomène de transport des polluants dans les cours d'eau en développant les équations décrivant la dispersion d'un polluant actif.

III. Equations hydrodynamiques du mouvement

1. Les équations de Navier - Stokes

Les écoulements des fluides sont finement décrits par les équations de Navier - Stokes donc il est primordial de les développer.

➤ **Equation de continuité**

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \, d\Omega = 0$$

où, Ω est le domaine d'étude et ρ la masse volumique.

Soit \vec{U} le vecteur vitesse de composantes (U, V, W).

Le théorème de Leibnitz décompose ce terme en variations observées à l'intérieur du domaine et en flux aux frontières (**Jean Michel, 2003**):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

En utilisant le théorème de Gauss qui transforme une intégrale surfacique en intégrale volumique, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\rho \vec{U}) d\Omega$$

D'où l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

Notre fluide étant incompressible (l'eau), donc la masse volumique est constante ; ainsi l'équation de la continuité devient :

$$\text{div}(\vec{U}) = 0$$

Le développement de cette équation suivant un système de coordonnées (x, y, z) nous donne :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2-1)$$

➤ L'équation de la quantité de mouvement

L'équation fondamentale de la dynamique nous donne :

$$F = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \vec{U} d\Omega$$

Les théorèmes de Leibnitz et de Gauss nous donnent (**Jean Michel, 2003**) :

$$F = \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho \vec{U})}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla(\rho \vec{U} \otimes \vec{U}) d\Omega$$

La force F est la somme des forces extérieures de volume et de surface qui s'appliquent au fluide.

Les forces de surface sont déterminées à partir du tenseur de contrainte σ .

Notons par f la somme de toutes les forces de volume. Ainsi, on obtient :

$$F = \int_{\Omega} f d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma \cdot \vec{n} d\Gamma$$

Le théorème de Gauss nous permet de transformer une intégrale surfacique en une intégrale de volume, ceci nous conduit à : $F = \int_{\Omega} \rho f d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\sigma) d\Omega$

Pour finir, nous obtenons :

$$\frac{\partial(\rho\vec{U})}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{U} \otimes \vec{U}) = \rho\vec{f} + \text{div}(\vec{\sigma})$$

Notre fluide étant un fluide Newtonien, σ est donné par : $\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$

où, δ_{ij} est le tenseur identité, μ le coefficient de viscosité dynamique, D_{ij} le tenseur des taux de déformation et P la pression exprimée en pascal.

En tenant compte du fait que le fluide est incompressible et en utilisant l'équation de continuité, on aboutit à la forme suivant : $\rho\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + \vec{U}\nabla\vec{U}\right) = \text{div}(\vec{\sigma}) + \rho\vec{f}$

En utilisant une écriture tensorielle et en utilisant l'expression du tenseur de déformation

$$D_{ij} \text{ donné par : } D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_i}{x_j} + \frac{U_j}{x_i}\right)$$

On aboutit à l'équation finale de la quantité de mouvement donnée par ;

$$\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{x_j}\right) = \rho f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \quad (2-2)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes ces équations deviennent :

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z}\right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right] \quad (2-3)$$

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \rho f_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right] \quad (2-4)$$

$$\rho\left(\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z}\right) = \rho f_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right] \quad (2-5)$$

2. Les équations du mouvement moyen

a. Le phénomène de la turbulence

La turbulence est un phénomène présent de manière très facilement visible dans la nature ; de ce fait, c'est sous ce régime que se présentent la plupart des écoulements naturels des fluides usuels que sont l'air et l'eau.

➤ Définition de la turbulence

L'agitation turbulente se manifeste par la présence au sein même de l'écoulement de nombreux mouvements secondaires d'aspect chaotique, c'est-à-dire sans organisation apparente, et parfaitement observable à l'échelle macroscopique au sens supra moléculaire.

Les caractéristiques principales de la turbulence sont :

- Incertitudes (de mesures, de calculs...) ;
- Grande variété des échelles spatiales (taille de tourbillon) dans l'écoulement ;
- Caractères aléatoire, chaotique, désordonné, fluctuant ;
- Imprévisibilité, non déterminisme ;
- Augmentation du mélange : forte diffusion des quantités transportées ;
- Très large gamme de longueurs d'ondes : tourbillons présents de tailles très variées ;
- Le bruit : les écoulements turbulents sont bruyants du fait des sources acoustiques créées par des fluctuations de pression dans le fluide.

Vu cette multitude de forme que peut prendre le phénomène, il est difficile de définir exactement ce que l'on entend par turbulence. Néanmoins, plusieurs définitions ont été proposées parmi lesquelles celle donnée par P. CHASSAING qui définit l'écoulement turbulent comme étant un mode naturel de mouvement de fluide visqueux où des mécanismes internes d'échanges énergétiques assurent, au sein même de l'écoulement, la création et le maintien de toute une hiérarchie de mouvements chaotiques répartis continûment sur une large gamme d'échelle macroscopique (**Chassaing, 2000**).

➤ Les approches de la turbulence

Il existe trois principales méthodes de modélisation d'un écoulement turbulent: la simulation numérique directe, dans laquelle on cherche à représenter la totalité des phénomènes physiques, la simulation des grandes échelles, dans laquelle on représente seulement les plus gros tourbillons en fonction du temps, et la simulation moyennée ou approche statistique dans laquelle on représente seulement l'écoulement moyen.

Dans notre étude, nous allons opter pour l'approche statistique de la turbulence ; ceci nous amènera à utiliser la décomposition de Reynolds pour établir les équations du mouvement moyen.

➤ Moyenne d'ensemble

Soit une grandeur hydrodynamique T (vitesse, pression,...) à mesurer (**Cadot, 2006**).

On effectue N expériences indépendant portant sur le même écoulement. A chaque expérience, on enregistre la valeur de T à la même position et au même temps ; on obtient ainsi $T(x,t)$.

La moyenne d'ensemble est donnée par :

$$T(s,t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i(x,t) \quad (2-6)$$

Cette moyenne vérifie les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{\alpha f} = \alpha \bar{f} \\ \overline{\bar{f}} = \bar{f} \\ \overline{fg} = \bar{f}\bar{g} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2-7)$$

A partir de l'opérateur « moyenne statistique », on définit la décomposition de Reynolds de la quantité $T(x, t)$ donnée par :

$$T = \bar{T} + t \quad (2-8)$$

t est la valeur fluctuante ; par définition, la moyenne de cette valeur est nulle : $\bar{t} = 0$

Dans le cadre de notre étude, la décomposition des variables qui nous intéressent se fait comme suite :

$$U = \bar{U} + u \quad (2-9)$$

$$V = \bar{V} + v \quad (2-10)$$

$$W = \bar{W} + w \quad (2-11)$$

$$P = \bar{P} + p \quad (2-12)$$

$$C = \bar{C} + c \quad (2-13)$$

d. Equation de continuité dans le mouvement moyen

En partant de l'équation de continuité (2-1), on a :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{\partial (\bar{U} + u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (2-14)$$

En moyennant l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}$$

Comme $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$, il en résulte :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2-15)$$

Cette dernière équation (2-15) est l'équation de continuité de l'écoulement moyen.

En coordonnées cartésiennes, cette équation devient :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \quad (2-16)$$

c. Equation de la quantité de mouvement pour l'écoulement moyen

Partons de l'équation (2-2) ; en décomposant la vitesse instantanée en vitesse moyenne et vitesse fluctuante, on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial (\bar{U}_i + u_i)}{\partial t} \right) + \rho (\bar{U}_j + u_j) \frac{\partial (\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial (\bar{P} + p)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 (\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j^2} \quad (2-17)$$

En moyennant l'équation (2-17), on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial (\overline{\bar{U}_i + u_i})}{\partial t} \right) + \rho (\overline{\bar{U}_j + u_j}) \frac{\partial (\overline{\bar{U}_i + u_i})}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial (\overline{\bar{P} + p})}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 (\overline{\bar{U}_i + u_i})}{\partial x_j^2}$$

En appliquant les propriétés de l'opérateur « moyenne statistique », l'équation précédente devient:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right) + \rho \left(\bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i - \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} \right)$$

En tenant compte du fait que la moyenne de la vitesse fluctuante et la pression fluctuante sont nulles, on aboutit à l'équation suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} \quad (2-18)$$

Cette équation peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \rho \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} \quad (2-19)$$

Enfin en divisant par ρ on aboutit à l'équation suivante qui est celle de la quantité du mouvement pour l'écoulement moyen :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} \quad (2-20)$$

où, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ Correspond à la viscosité cinématique de l'eau.

En coordonnées cartésiennes, on obtient :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\partial \bar{u}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right] \quad (2-21)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\partial \bar{v}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}w}{\partial z} \right] \quad (2-22)$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\partial \bar{w}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}w}{\partial z} \right] \quad (2-23)$$

En émettant l'hypothèse d'un écoulement bidimensionnel, nos équations deviennent :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \quad (2-24)$$

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\partial \bar{u}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right] \quad (2-25)$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\partial \bar{w}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}w}{\partial z} \right] \quad (2-26)$$

Nous constatons qu'il y a apparition des nouveaux termes dans les équations de la quantité de mouvement de l'écoulement moyen ; ainsi, les termes uu , uw , wu , et ww donnent naissance aux tensions de Reynolds ; Elles proviennent de la non linéarité des équations de Navier -Stokes et traduisent l'interaction entre mouvement moyen et mouvement fluctuant.

Ces termes ont alors introduit des inconnus supplémentaires nous conduisant à un système d'équation ouvert. Nous avons donc plus d'inconnus que d'équation, ce qui nous amène à choisir dans le prochain point, un modèle de turbulence afin d'obtenir des équations supplémentaires pour la fermeture de notre système.

4. Les modèles de turbulence

Pour pouvoir résoudre les équations de Reynolds, il faut fermer le problème, c'est-à-dire exprimer les tensions de Reynolds en fonction des grandeurs physiques moyennes à l'aide d'un modèle de turbulence.

On distingue généralement deux grandes classes de modèle de turbulence :

- Les modèles à viscosité turbulente basée sur l'hypothèse de BOUSSINESQ qui consiste à modéliser directement les tensions de Reynolds à partir d'une viscosité turbulente.
- Le modèle aux tensions de Reynolds dans lesquels, nos inconnus c'est-à-dire les tensions de Reynolds sont directement calculées en se portant sur les moments d'ordres supérieurs.

a. Les modèles à viscosité turbulente (P. Chassaing 2000)

En se basant sur une similitude avec la loi de comportement d'un fluide visqueux reliant le tenseur de contrainte aux champs de vitesse, Boussinesq (1877) a introduit la notion de la viscosité turbulente. Cette notion consiste à mettre en relation le tenseur de Reynolds R_{ij} au champ moyen de vitesse par l'équation suivante :

$$-\overline{u_i u_j} = R_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{3}{2} k \delta_{ij} \quad (2-27)$$

avec, ν_t : la viscosité turbulente, k : l'énergie cinétique turbulente et δ_{ij} est le tenseur de Kronecker.

Contrairement à la viscosité moléculaire qui est une propriété du fluide, la viscosité turbulente est une propriété de l'écoulement.

Les modèles à viscosité turbulente sont classés en sous groupes suivant le nombre d'équations supplémentaires intervenant dans la modélisation.

Ainsi on distingue :

➤ Les modèles à zéro équation

Ce sont des modèles très simples qui supposent que la viscosité turbulente est constante, ou directement fonction des paramètres connus ou facilement calculables.

➤ Les modèles à une équation de transport

Dans ces modèles, on considère une seule équation de transport (généralement on considère l'équation de transport k où les différents termes sont modélisés pour déterminer la viscosité turbulente

➤ Les modèles à deux équations de transport

Il existe plusieurs modèles à deux équations de transport. Comme leur nom l'indique, ces modèles font intervenir deux équations de transport.

Le plus utilisé jusqu'à là est le modèle $k - \varepsilon$ que nous allons d'ailleurs retenir dans le cadre de notre étude. Les deux équations sont celle de l'énergie cinétique turbulente k et celle de la dissipation d'énergie turbulente ε .

La viscosité turbulente est déterminée par la relation suivante :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2-28)$$

C_μ est une constante adimensionnelle à déterminer.

★ Equation de l'énergie cinétique turbulente_k

L'équation exacte d'évolution de l'énergie cinétique turbulente est obtenue à partir de l'équation de transport des tensions de Reynolds, d'où la nécessité de rappeler cette dernière.

En effet le transport de tension de Reynolds est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = & - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \right) \\ & + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (2-29)$$

En posant $k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$ et en contractant les indice dans l'équation (2-23), on obtient

l'équation de l'énergie cinétique turbulente donnée par :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \underbrace{-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}}_1 - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_i u_i u_j}}{\partial x_j}}_2 - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u_j p}}{\partial x_j}}_3 + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j}}_4 - \underbrace{\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}}_5 \quad (2-30)$$

Le premier terme est la production turbulente ; il caractérise les échanges d'énergie par interaction avec le mouvement moyen. En utilisant l'hypothèse de Boussinesq, on obtient sa modélisation.

$$-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} = \left[\nu_t \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \quad (2-31)$$

Le second terme correspond à la diffusion turbulente par les fluctuations de vitesse ; sa modélisation est obtenue en posant $k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$.

Le troisième terme est la moyenne de la puissance des forces de pression dans le mouvement d'agitation.

En constatant que les effets du troisième terme sont similaires à ceux du second terme, leur modélisation globale est obtenue comme suite :

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_j} + \frac{1}{\rho} \overline{u_j p} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (2-32)$$

σ_k est une constante numérique.

Le quatrième terme est la diffusion moléculaire ; ce terme est souvent négligeable devant la diffusion turbulente.

Enfin le quatrième terme correspond à la dissipation turbulente que nous allons noter ε .

En tenant compte des hypothèses précédentes, l'équation de k devient :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j} - \varepsilon \quad (2-33)$$

★ **L'équation du taux de dissipation d'énergie turbulente ε**

Le transport de la dissipation est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} \right)}_1 + 2\nu \underbrace{\left(\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)}_2 - \\ & -2\nu \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right)}_3 - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left(\bar{u}_j \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)^2 \right)}_4 - 2 \frac{\nu}{\rho} \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_k} \right)}_5 + \\ & + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2}}_6 - 2\nu^2 \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)}_7 \end{aligned} \quad (2-34)$$

En appliquant l'hypothèse de grand nombre de Reynolds dans l'équation de la dissipation, on peut faire les simplifications suivantes : le premier, deuxième, cinquième, sixième et septième termes peuvent être négligés.

Le quatrième terme est modélisé en utilisant l'hypothèse de diffusion en gradient comme suite :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \bar{u}_j \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (2-35)$$

La modélisation utilisée pour le troisième terme est celle proposée par E. B. Lander, G. J. Reece et W. Rodi, qui donne :

$$-2\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right) - 2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2 = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_r - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2-36)$$

Dans cette équation, les termes $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ sont des constantes numériques.

Enfin en tenant compte de toutes les hypothèses posées et en négligeant la diffusion moléculaire (d'après l'hypothèse de grand nombre Reynolds posée dans l'équation de

l'énergie cinétique turbulent) les équations finales du modèle $k - \varepsilon$ sont données comme suite :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \varepsilon \quad (2-37)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{P_r \varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2-38)$$

avec, P_r la production d'énergie cinétique turbulente donnée par :

$$P_r = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2-39)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes et en 2-D, L'équation de l'énergie cinétique turbulente est donnée comme suite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial k}{\partial z} = \nu_t \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right) \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right) \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right] + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) - \varepsilon \end{aligned} \quad (2-40)$$

L'équation (2-40) peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \\ + \nu_t \left[2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon \end{aligned} \quad (2-41)$$

En procédant de la même façon que précédemment, l'équation de l'énergie cinétique turbulente est donnée comme suite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = C_{\varepsilon 1} \nu_t \frac{\varepsilon}{k} \left[4 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (2-42)$$

Enfin il nous reste que la détermination des constantes C_μ , $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, σ_k et σ_ε pour la fermeture de notre système. Elles sont déterminées à partir des résultats expérimentaux. Les valeurs numériques recommandées par B.E. Lander en 1975 sont:

$$C_\mu = 0,09 \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92 \quad \sigma_\varepsilon = 1,00 \quad \sigma_k = 1,30$$

b. Les modèles aux tensions de Reynolds

Les modèles à viscosité turbulente supposent que la turbulence est isotrope. Ceci constitue une limite pour ces modèles car la plus part des écoulement turbulents sont anisotropes.

Un modèle d'ordre supérieur est le modèle aux tensions de Reynolds. Ce modèle propose de résoudre directement les équations de tension de Reynolds (au nombre de 6), et l'équation de la dissipation. Seul un tel modèle est capable de prendre en compte l'anisotropie de la turbulence en renonçant à l'hypothèse de Boussinesq qui fait intervenir la viscosité turbulente (**Pierre-Louis, Jean-Paul, Pascal, Dominique, 1998**).

Toute fois les corrélations triples des équations sont difficiles à modéliser et les conditions aux limites difficiles à justifier. C'est pourquoi, à notre connaissance, il n'existe pas d'applications industrielles à ce modèle en hydrodynamique à surface libre.

Conclusion

Nous venons d'établir les équations constituant le modèle hydrodynamique ainsi que les équations de fermeture. Dans le prochain point nous établirons les équations de transports d'un polluant actif dans un écoulement turbulent.

IV. Le phénomène de transport

Dans les points précédents, nous avons décrit de manière précise l'aspect hydrodynamique de notre problème, il nous reste à présent à modéliser le phénomène de transport du polluant.

Notre étude concerne un polluant actif, donc le terme source doit intervenir dans les équations de transport.

Lorsque qu'un corps soluble est introduit dans un fluide aux repos, il se produit un phénomène de diffusion moléculaire due aux mouvements des molécules.

Maintenant, si le fluide est en mouvement, en plus du phénomène de diffusion, le corps est également convecté. Si le régime de l'écoulement est turbulent, l'effet combinatoire de la diffusion et de la fluctuation turbulente des vitesses donne naissance à la diffusion turbulente. La diffusion turbulente combinée au phénomène d'advection donne naissance à la dispersion.

Dans ce point, nous allons étudier différents phénomènes intervenant dans la dispersion d'un polluant actif.

1. La diffusion

La diffusion est une vibration intermoléculaire caractéristique de chaque produit soluble. Elle permet le mouvement des molécules d'un milieu où le potentiel chimique est élevé vers un milieu où le potentiel chimique est inférieur.

La diffusion moléculaire est gouvernée par loi de Fick qui énonce que le flux de diffusion est proportionnel au gradient de concentration (**Jabbour, 2006**).

Ainsi la diffusion d'une substance dans un fluide est donnée par :

$$\vec{q}_m = -D_m \text{grad} c \quad (2-43)$$

\vec{q}_m correspond au vecteur densité de flux ;

c est la concentration définie par la masse de la substance par le volume du fluide ;

D_m Est la diffusivité molaire (massique) de la substance dans le mélange exprimée en (L^2/T). Elle dépend de la composition chimique et de la concentration moléculaire de la substance.

La loi de Fick exprime qu'une substance a tendance à s'uniformiser dans un mélange, c'est – à dire qu'il se forme un flux des zones de forte concentration vers les zones de faible concentration (**Graf, Altinakar, 1996**).

2. L'advection

L'advection est un phénomène au cours duquel il y a translation des matières solubles ou suspendues d'un point à un autre dans le sens vertical, transversal ou longitudinal de l'écoulement.

Lorsqu'un corps soluble est introduit dans le fluide, il sera soumis à l'action de la diffusion et de l'advection.

3. Les équations de transport

Soit un domaine Ω délimité par une surface S à travers lequel un corps est transporté à une vitesse \vec{U} de composantes U, V, W suivant les trois directions (**Graf, Altinakar, 1996**).

L'équation de bilan de matière sous forme intégrale est donnée par :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(C\vec{U}) d\Omega = - \int_{\Omega} \text{div} \vec{q}_m d\Omega + \int_{\Omega} q_e d\Omega \quad (2-44)$$

Cette équation équivaut à :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(C\vec{U}) = -\text{div} \vec{q}_m + q_e \quad (2-45)$$

C est la concentration, \vec{U} est le vecteur vitesse, \vec{q}_m est le vecteur densité de flux et q_e , le taux de production locale.

Lorsque l'écoulement est turbulent, l'approche statistique peut être appliquée ; la concentration et la vitesse peuvent être décomposées en grandeurs moyennes et fluctuantes comme suite :

$$C = \bar{C} + c$$

$$U = \bar{U} + u$$

q_m est déterminé par la loi de Fick (l'équation 2-43).

q_e est le terme source. Il correspond au taux de production locale de la substance.

L'équation du bilan devient :

$$\frac{\partial(\bar{C} + c)}{\partial t} + \text{div}[(\bar{C} + c)(\bar{U} + \bar{u})] = \text{div}[D_m \text{grad}(\bar{C} + c)] + q_e \quad (2-44)$$

En appliquant l'opérateur moyenne d'ensemble, l'équation (2-44) devient:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \text{div}(\bar{C}\bar{U} + \bar{c}\bar{u}) = \text{div}(D_m \text{grad} \bar{C}) + q_e \quad (2-45)$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \text{div}(\bar{C}\bar{U}) = \text{div}[(D_m \text{grad} \bar{C}) - \bar{c}\bar{u}] + q_e \quad (2-46)$$

L'expression $(\bar{c}\bar{u})$ est une covariance appelée flux turbulent de Reynolds ; il peut aussi être associé à une diffusion turbulente, par analogie avec le terme de la diffusion moléculaire.

$$\text{On pose : } -(\bar{c}\bar{u}) = D_t \text{grad} \bar{C} \quad (2-47)$$

D_t est la diffusivité turbulente. Contrairement à la diffusivité molaire qui dépend des caractéristiques du fluide, la diffusivité turbulente est fonction des caractéristiques de l'écoulement. Cette diffusivité peut être un scalaire ou un tenseur diagonal.

En remplaçant l'égalité de l'équation (2-47) dans l'équation (2-46) on obtient :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \text{div}(\bar{C}\bar{U}) = \text{div}[(D_m + D_t) \text{grad} \bar{C}] + q_e \quad (2-48)$$

Cette équation est l'équation de convection – diffusion de matière en régime turbulent. Elle sert de base pour l'analyse de tous les problèmes de transport de matière soluble dans les cours d'eaux.

En posant les hypothèses suivantes :

- Fluide incompressible, donc $\rho = \text{cte}$ et $\text{div}(\bar{U}) = 0$
- La diffusivité turbulente est constante ;
- La diffusivité turbulente est un tenseur diagonal de composante D_{tx} , D_{ty} et D_{tz}
- Comme dans le cas général, nous supposons que : $D_t \gg D_m$

L'équation (2-48) devient dans un système de coordonnées cartésiennes comme suite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = D_m \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{ty} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) + q_e \end{aligned} \quad (2-49)$$

Dans cette équation, on admet que :

$$- \varepsilon_{tx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = (\overline{cu}) \quad (2-50)$$

$$- \varepsilon_{ty} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = (\overline{vc}) \quad (2-51)$$

$$- \varepsilon_{tz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = (\overline{wc}) \quad (2-52)$$

Notre problème concerne un polluant actif, donc le terme de source q_e doit être pris en compte. Ce terme peut inclure une réaction chimique ou biologique ou bien un changement de phase. Dans certains problèmes, ce terme représente un transfert à travers les limites.

Dans le cas d'une substance réactive, ce terme est modélisé comme suite :

$$q_e = k_r \bar{C} \quad (2-53)$$

Ce terme exprime le taux avec lequel une substance active augmente ou diminue par réaction.

k_r représente le coefficient de réaction de la substance dans le mélange.

Notre problème consiste à simuler la dispersion d'un polluant actif dont le terme source entraînerait une diminution de la concentration, l'équation du transport en dimension 2-D est alors donnée comme suite (Graf, Altinakar, 1996) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = D_m \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) \\ - k_r \bar{C} \end{aligned} \quad (2-54)$$

Détermination des coefficients de diffusivité turbulente longitudinale et transversale

Il n'existe pas de relation théorique pour la détermination des coefficients de diffusivité longitudinale et transversale. Leur détermination se fait expérimentalement ou empiriquement.

Dans la suite de notre étude, nous retenons les formules suivantes pour le calcul de D_{tx} et D_{ty} (Graf, Altinakar, 1996):

$$D_{tx} = 0.23Hu_* \quad (2-55)$$

$$D_{tz} = 0.15Hu_* \quad (2-56)$$

Dans ce chapitre, nous avons développé les équations des bases de notre modèle mathématique. L'utilisation de modèle $k-\varepsilon$ nous a conduit à la fermeture de nos équations.

Comme que dans la résolution de notre problème, les directions x et z sont plus importantes, nous avons jugé inutile de travailler en 3-D. Ainsi nous avons obtenu un système composé de 6 équations à 6 inconnues.

Les inconnues de notre problème sont : U , W , P , k , ε et C .

Les six équations sont données comme suite :

Equation de continuité

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \quad (2-57)$$

Equation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\partial \bar{u}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} \right] \quad (2-58)$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right] - \left[\frac{\partial \bar{w}u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}w}{\partial z} \right] \quad (2-59)$$

Dans ces équations, les tensions de Reynolds sont données en fonction de la viscosité turbulente comme suite :

$$\bar{u}u = -2\nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) + \frac{3}{2}k \quad (2-60)$$

$$\bar{u}w = \bar{w}u = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right) \quad (2-61)$$

$$\bar{w}w = -2\nu_t \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) + \frac{3}{2}k \quad (2-62)$$

En remplaçant les tenseurs de Reynolds par leurs expressions, les formules (2-58) et (2-59) deviennent :

$$\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + (\nu + 2\nu_t) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} + \nu_t \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z \partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \quad (2-63)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + (\nu + 2\nu_t) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \nu_t \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} \quad (2-64)$$

Nous rappelons que la viscosité turbulente est reliée aux autres inconnues du problème par la relation suivante :

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Les équations du modèle $k - \varepsilon$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + v_t \left[2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon \quad (2-65)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = C_{\varepsilon 1} v_t \frac{\varepsilon}{k} \left[4 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (2-66)$$

Equation de transport

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = \varepsilon_m \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_{tx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_{tz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) - k_r \bar{C} \quad (2-67)$$

Conclusion

Notre modèle mathématique est à présent complet ; toutes les équations intervenant dans la résolution du problème sont établies ; le système obtenu est fermé, car nous avons autant d'équation que d'inconnues.

Les équations composant notre système sont les suivantes : (2-57), (2-63), (2-64), (2-65), (2-66) et la (2-67).

La résolution de ces équations se fait numériquement afin d'obtenir des solutions approchées. Pour ce faire, le développement d'un modèle numérique s'impose. Ceci fera l'objet du prochain chapitre, où une méthode numérique appropriée sera développée.

Chapitre III : Modèle numérique du transport d'un polluant actif dans les écoulements à surface libre

Introduction

L'utilisation des modèles mathématiques pour la simulation des divers phénomènes hydrauliques est devenue un outil fondamental dans la résolution des problèmes auxquels l'ingénieur se heurte. Le phénomène de transport de polluants dans les cours d'eau constitue l'un des principaux facteurs influençant la qualité de l'eau, donc la résolution des équations gouvernantes s'avère primordiale. Cependant, la complexité de ces équations exige une résolution numérique afin d'obtenir des solutions approchées.

Dans ce chapitre, nous commençons par une description générale de la méthode des différences finies que nous nous sommes proposés d'utiliser pour résoudre numériquement notre problème. Ensuite, nous y présentons le schéma explicite de Mac Cormack que nous avons retenu comme schéma aux différences finies pour la résolution des équations composant notre modèle mathématique. Puisque la pression ne dispose pas d'équation de transport, une description de la méthode de la viscosité artificielle sera faite ; cette méthode sera utilisée pour la correction de la pression au cours des calculs.

La dernière partie est consacrée à la discrétisation des équations à partir du schéma de Mac Cormack.

I. Présentation de la méthode des différences finies

La plus part des phénomènes rencontrés en mécanique des fluides sont décrits par des équations aux dérivées partielles. Plusieurs méthodes numériques sont utilisées pour la résolution de ces équations dont les plus utilisées sont la méthode des éléments fins, la méthode des volumes finis et la méthode des différences finies. Ces méthodes utilisent des schémas numériques qui consisteront en la combinaison d'un choix d'équations de départ et d'un choix de méthode de résolution.

Les méthodes numériques transforment un problème continu en un problème discret : l'intervalle d'étude en temps $[0; t_{\max}]$ est découpé en intervalles plus réduits en considérant $0 = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_{N-1} < t_N = t_{\max}$.

Une fonction inconnue $f(x; t)$ sera représentée par l'ensemble de ses valeurs aux différents points et aux différents instants de la discrétisation $(f(x_{ij}; t_n))$. Le but des méthodes numériques est de déterminer ces valeurs.

7. La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode de calcul numérique adaptée à la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP), pour les problèmes de mécanique, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire. Elle se développe en ce moment dans les applications de la mécanique des fluides : étude de la marée, des transports des sédiments, des interactions fluide -structure, études des phénomènes de pollution thermique ou chimique. La M.E.F permet de résoudre les problèmes de la mécanique des milieux continus en discrétisant le milieu à étudier en éléments. La réalisation du modèle éléments finis est obtenue par l'assemblage d'éléments, cette opération est appelée discrétisation au maillage du modèle mécanique à étudier. La qualité des résultats est très fortement conditionnée par le maillage adopté.

8. La méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est à l'origine utilisée pour la résolution des problèmes en mécanique des fluides. Elle a été introduite en 1970 par McDonald, Mac Cormack et Pauly. Cependant l'application de cette méthode ne se limite pas au seul domaine de la mécanique des fluides. En effet, une des principales propriétés de la méthode aux volumes finis est que les principes d'équilibre qui constituent la base principale de la modélisation mathématique des problèmes rencontrés en mécanique des milieux continus, sont vérifiées pour les équations discrétisées (**Michael, 2006**).

9. Méthodes des différences finies

La méthode de différences finies est basée sur l'approximation d'une fonction par son développement de Taylor autour d'un point ; elle permet de remplacer les équations aux dérivées partielles par des équations discrétisées. Les approximations plus précises d'ordre supérieur sont obtenues, soit en augmentant le nombre des points dans l'expression de dérivée, soit en utilisant les formules implicites.

En d'autres termes, le domaine de variation continu est remplacé par un ensemble fini de points ou nœuds, délimité par des frontières et formant ainsi un réseau appelé aussi maillage ou grille.

Le développement en série de Taylor pour une fonction continûment dérivable est donné par les équations suivantes :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + h) = f(x_i) + h \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \dots + h^n \frac{\partial^n f(x_i)}{\partial x^n} + O(h^{n+1}) \quad (3-1)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - h) = f(x_i) - h \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \dots + (-1)^n h^n \frac{\partial^n f(x_i)}{\partial x^n} + O(h^{n+1}) \quad (3-2)$$

où, h est le pas de discrétisation.

La combinaison de ces deux équations permet d'établir plusieurs formules qui approximent les dérivées. Si on s'intéresse à la dérivée première, on obtient facilement les trois relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad (3-3)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \quad (3-4)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \quad (3-5)$$

On peut noter qu'a priori, on a trois formes d'approximation de la dérivée première.

Les deux premières formules (3-3) et (3-4) dites décentrées sont obtenues respectivement à partir des développements de Taylor avant et en arrière. La troisième dite centrée est obtenue par soustraction de l'équation (3-2) à l'équation (3-1) (après que les deux séries soient tronquées).

La dérivée secondaire est approximée par l'expression suivante :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (3-6)$$

La méthode des différences finies peut facilement être étendue à une fonction à deux ou plusieurs variables. Notre modèle mathématique étant composé des équations qui varient dans le temps et dans l'espace (suivant les directions x et z), donc les dérivées partielles peuvent être approximées de la manière suivante :

➤ **Dérivée primaire**

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{i,j}^n = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (3-7)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j}^n = \frac{f_{i+1,j}^n - f_{i,j}^n}{\Delta x} \quad (3-8)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{i,j}^n = \frac{f_{i,j+1}^n - f_{i,j}^n}{\Delta z} \quad (3-9)$$

➤ **Dérivée secondaire**

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{i,j}^n = \frac{f_{i,j}^{n+1} - 2f_{i,j}^n + f_{i,j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \quad (3-10)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j}^n = \frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3-11)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{i,j}^n = \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \quad (3-12)$$

Δt est le pas de discrétisation suivant le temps, Δx correspond au pas de discrétisation suivant la direction x et Δz le pas de discrétisation suivant la direction z .

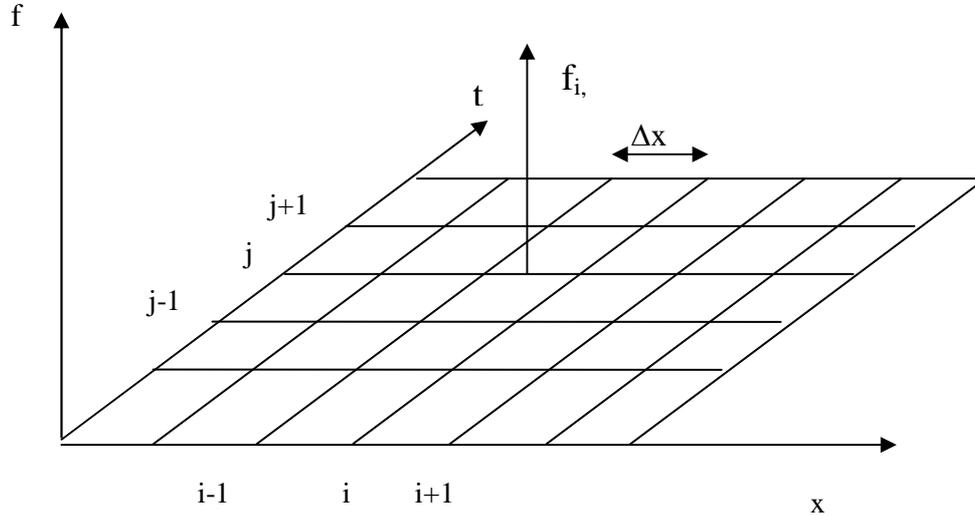


Figure III.1 : Maillage correspondant à une fonction dépendant de deux variables

10. Analyse de l'approximation

a. Erreur de troncature

L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction f . L'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant que la valeur exacte correspond à la valeur calculée au temps précédent.

b. Consistance d'un schéma aux différences finies

Une représentation aux différences finies sera dite consistante, si l'on peut montrer que l'erreur de troncature tend vers zéro lorsque les pas du maillage tendent vers zéro (**Euvrard, D, 1993**). En d'autres termes, la consistance exprime que les équations discrétisées doivent tendre vers les équations aux dérivées partielles originales dont elles sont dérivées lorsque les pas du maillage tendent vers zéro.

c. Stabilité d'un schéma aux différences finies

Une définition a été proposée par Lax et Richtmeyer (1956) est donnée comme suite :

Le schéma est stable si la solution exacte du problème aux différences finies au temps fixé, $T = k\Delta t$ est une fonction uniformément bornée des données initiales lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, avec $\Delta x \rightarrow 0$ avec lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ (Euvrard, 1993) .

d. Convergence d'un schéma aux différences finies (Euvrard, 1993)

Le schéma numérique est convergent si la solution du problème discrétisé tend, en un certain sens, vers la solution du problème aux dérivées partielles, lorsque Δx et Δy tendent simultanément vers zéro.

11. Schémas explicites et schémas implicites

Il existe plusieurs schémas aux différences finies classés en deux familles : les schémas explicites et les schémas implicites.

Un schéma est dit " explicite", si chaque valeur approchée de la solution au temps $t+\Delta t$ et au point x est écrite à partir des valeurs de la solution précédente au temps t . Cette valeur est donc explicitement fonction des valeurs connues, déjà calculées, et s'obtient directement pour chaque x .

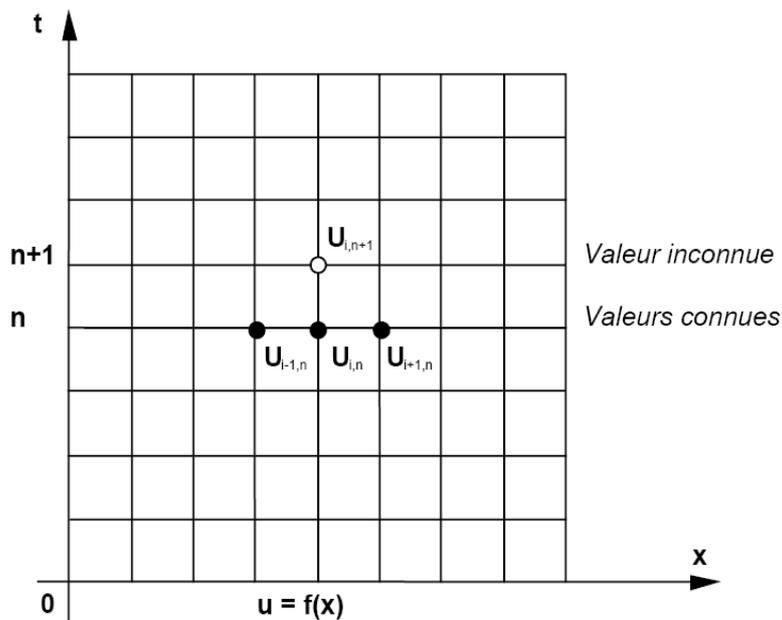


Figure III.2 : Exemple d'un maillage explicite

Par contre un schéma est dit "implicite", si la valeur approchée, en un point au temps $t+\Delta t$ est écrite en fonction de la solution précédente au temps t , et des valeurs voisines au temps $t+\Delta t$. Il s'agit donc d'une liaison implicite, entre toutes les valeurs au temps $t+\Delta t$, qui se résout globalement.

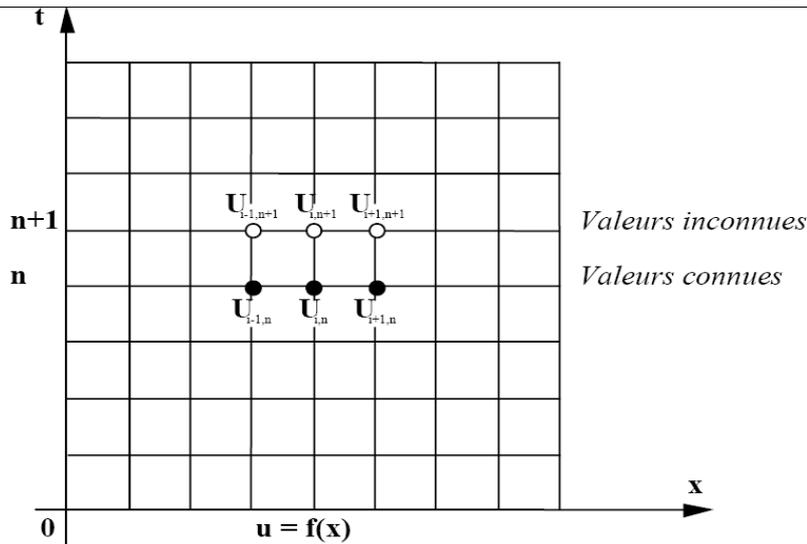


Figure III.3 : Exemple d'un schéma implicite

Mais le choix du type de schéma à employer dépend essentiellement de la nature du problème physique à traiter, et de l'aptitude du schéma à prendre en compte les caractéristiques du problème en question. Les principaux avantages et inconvénients des deux types de schémas aux différences sont :

- **Stabilité :** Dans la méthode explicite, une condition de stabilité sur le pas de temps devra être satisfaite, ce qui n'est pas le cas pour la méthode implicite.
- **Simplicité (souplesse) de programmation :** La méthode explicite est relativement plus facile à programmer que la méthode implicite. Par conséquent, quand le temps nécessaire pour le développement d'un programme est limité, la méthode explicite doit être utilisée.
- **Economie :** Puisque la valeur du pas de temps Δt pour un schéma implicite n'est pas restreinte par un critère de stabilité, une grande valeur de Δt est permise, ce qui donnera un temps de calcul relativement inférieur comparé au schéma explicite dans lequel Δt est limité par une condition de stabilité.

12. Choix du modèle numérique

Rappelons que notre modèle mathématique décrivant le problème à résoudre est composé des équations de natures hyperboliques. Donc, la recherche d'un schéma approprié à ce type d'équations s'impose. Plusieurs schémas ont été développés dans ce sens parmi lesquels nous distinguons :

- Le schéma de Lambda.
- Le schéma de Gabutti
- Le schéma de Mac Cormack

Le schéma de Mac Cormack a été largement utilisé et a donné des résultats satisfaisants ; c'est un schéma de précision d'ordre 2 dans l'espace et le temps. En plus ce schéma présente une certaine souplesse dans sa mise en œuvre c'est pourquoi nous le retenons pour la résolution numérique de notre problème.

II. Discretisation des équations

Avant de passer à la discrétisation proprement dite, nous allons d'abord décrire le schéma choisi, c'est-à-dire celui qui convient le plus dans la résolution numérique de notre problème.

On doit dans ce cas être certains que les erreurs, même très petites, ne s'amplifient pas, et enfin, on doit vérifier que la solution calculée représente correctement la solution du problème.

1. Description du schéma de Mac Cormack (Garcia, Rene, 1986)

Le schéma de Mac Cormack est un schéma explicite qui a été initialement appliqué pour résoudre des problèmes en aérodynamique. Ce schéma a été ensuite utilisé avec succès dans la modélisation hydrodynamique des écoulements à surface libre par Garcia et Kahawita (1986) par Chaudry (1993), par Graba (2003).

C'est un schéma aux différences finies explicite de types prédiction – correction et de précision d'ordre 2 dans le temps et dans l'espace.

L'étape dite de prédiction permet de calculer une solution approchée qui sera corrigée dans l'étape dite de correction.

Notons que dans l'étape de correction on utilise une discrétisation décentrée dans le sens opposé à celle utilisée dans l'étape de prédiction. En effet si on utilise une discrétisation décentré vers la droite dans l'étape de prédiction, celle utilisée dans l'étape de correction sera décentrée vers la gauche et vice versa.

Considérons les équations de base sous formes conservative, régissant le phénomène étudié en coordonnées cartésiennes par le système:

$$U_t + E_{e_x} + F_{f_z} + S = 0 \quad (3-12)$$

Tel que :

$$\begin{aligned} E_{e_x} &= \frac{\partial E_e}{\partial x} \\ F_{f_z} &= \frac{\partial F_f}{\partial z} \end{aligned} \quad (3-13)$$

Le schéma de Mac Cormack appliqué au système ci-dessus se compose de deux étapes:

➤ Etape de prédiction

$$\tilde{U} = U_{i,j}^k + \tau_x (E_{e_{i,j}}^k - E_{e_{i-1,j}}^k) + \tau_z (F_{f_{i,j}}^k - F_{f_{i,j-1}}^k) - \Delta t S_{i,j}^k \begin{cases} 2 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq m-1 \end{cases} \quad (3-14)$$

➤ Etape de correction

$$\hat{U} = \tilde{U}_{i,j} + \tau_x (\tilde{E}_{e_{i+1,j}} - \tilde{E}_{e_{i,j}}) + \tau_z (\tilde{F}_{f_{i,j+1}} - \tilde{F}_{f_{i,j-1}}) - \Delta t \tilde{S}_{i,j} \begin{cases} 2 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq m-1 \end{cases} \quad (3-15)$$

$$\text{où, } \tau_x = \frac{\Delta t}{\Delta x} ; \quad \tau_z = \frac{\Delta t}{\Delta z}$$

La solution au temps (k+1) est tel que :

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (U_{i,j}^k + \hat{U}_{i,j}) \quad (3-16)$$

Stabilité du schéma de Mac Cormack

Le schéma de Mac Cormack comme d'ailleurs tout schéma explicite aux différences finies doit être stable afin d'obtenir des résultats satisfaisants. Pour cela, la condition de stabilité de « Courant –Friedrichs -Lewy » (C.F.L) sera posée afin de garantir la stabilité.

Cette condition est donnée par :

$$C_n = \frac{(V_m + \sqrt{gh})\Delta t}{b(x)(\Delta x)(\Delta z)} [(\Delta x)^2 + b(x)(\Delta z)^2]^{1/2} \leq 1 \quad (3-17)$$

où, V_m est la vitesse résultante au point du maillage : $V_m = \sqrt{(U^2 + W^2)}$

$b(x)=b$: est la largeur du canal.

C_n : est le nombre de courant.

L'analyse de stabilité de Von Neumann (**Frédéric, Henri, 2003**) pour les schémas précédents donne pour le schéma de Mac Cormack la condition de stabilité suivante :

$$C_n \leq 1 \quad (3-18)$$

La condition (C.F.L) doit être satisfaite en tout point du maillage, il est donc évident de prendre l'incrément de temps Δt .

$$\Delta t = \frac{C_n b(x)(\Delta x)(\Delta z)}{\max(V_m + \sqrt{gh})[(\Delta x)^2 + b(x)(\Delta z)^2]^{1/2}} \quad (3-19)$$

A chaque instant t, la condition (C.F.L) fixe le pas de temps Δt , sachant que les pas d'espace Δx , Δy sont supposés constants.

5. Application du schéma de Mac Cormack au modèle mathématique

Rappelons que notre modèle mathématique est composé des équations suivantes :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \quad (3-20)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + (v + 2v_t) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + (v + v_t) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} + v_t \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z \partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \quad (3-21)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + (v + 2v_t) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} + (v + v_t) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + v_t \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} \quad (3-22)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + v_t \left[2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon \quad (3-23)$$

23)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = C_{\varepsilon 1} v_t \frac{\varepsilon}{k} \left[4 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (3-24)$$

24)

$$\text{où, } v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3-25)$$

25)

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = D_m \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) - k_r \bar{C} \quad (3-26)$$

c. Transformation des équations sous la forme générale du schéma de Mac Cormack

➤ *Transformation de l'équation (3-21)***Remarquons que :**

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{U} \bar{U}}{\partial x} - \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \Rightarrow \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{U} \bar{U}}{\partial x} \quad (3-27)$$

27)

$$\text{Et } \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{U} \bar{W}}{\partial z} - \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \quad (3-28)$$

En ajoutant à chaque membre de l'équation (3-28) le terme $\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}$, on obtient :

$$\bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{U} \bar{W}}{\partial z} + \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \bar{U} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z}$$

Cette équation est équivalente à :

$$\overline{\overline{W}} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{U\overline{W}}}{\partial z} + \overline{U} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} - \overline{U} \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \right) \quad (3-29)$$

D'après l'équation de continuité du mouvement moyen, $\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = 0$ et en tenant compte de l'équation (3-27), on obtient finalement :

$$\overline{\overline{W}} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{U\overline{W}}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{U\overline{U}}}{\partial x} \quad (3-30)$$

En posant l'hypothèse de grand nombre de Reynolds, nous pouvons négliger ν devant ν_t et en remplaçant la viscosité turbulente par son expression, l'équation (3-21) devient :

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \overline{U\overline{U}}}{\partial x} - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial \overline{W\overline{U}}}{\partial z} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial z^2} \right] - \left[f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x} + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \right] = 0 \quad (3-31)$$

Transformation de l'équation (3-22)

Par un raisonnement analogue développé précédemment, l'équation (3-22) peut être réduite sous la forme générale du schéma de Mac Cormack de la manière suivante :

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \overline{W\overline{U}}}{\partial x} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial \overline{W\overline{W}}}{\partial z} - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial z^2} \right] - \left[f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial z} + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} \right] = 0 \quad (3-32)$$

➤ Transformation de l'équation (3-23)

En remarquant que :

$$\overline{U} \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial k \overline{U}}{\partial x} - k \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \quad (3-33)$$

$$\overline{W} \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial k \overline{W}}{\partial z} - k \frac{\partial \overline{W}}{\partial z}$$

(3-34)

et en remplaçant les expressions (3-33) et (3-34) dans l'équation (3-23), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial k \overline{W}}{\partial z} - k \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \\ &+ \nu_t \left[2 \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon \end{aligned} \quad (3-35)$$

D'après l'équation de continuité, $\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0$ et en remplaçant la viscosité turbulente

par son expression l'équation (3-35) se réduit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial k \bar{W}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_\mu k^2}{\sigma_k \varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C_\mu k^2}{\sigma_k \varepsilon} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \\ + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left[2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon \end{aligned} \quad (3-36)$$

➤ Transformation de l'équation (3-24)

Par un raisonnement analogue à celui utilisé pour transformer l'équation (3-23), l'équation (3-24) peut être écrite comme suite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon \bar{W}}{\partial z} = C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left[4 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_\mu k^2}{\sigma_\varepsilon \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C_\mu k^2}{\sigma_\varepsilon \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (3-37)$$

➤ Transformation de l'équation (3-26)

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \bar{W} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = D_m \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) - k_r \bar{C}$$

Notons que les termes $\bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}$ et $\bar{W} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z}$ peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{C} \bar{U}}{\partial x} - \bar{C} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \quad (3-38)$$

$$\text{Et } \bar{W} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{C} \bar{W}}{\partial z} - \bar{C} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \quad (3-39)$$

En remplaçant les équations (3-37) et (3-38) dans l'équation (3-26), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{C} \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{C} \bar{W}}{\partial z} + \bar{C} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) = D_m \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) - k_r \bar{C} \end{aligned} \quad (3-40)$$

Comme d'après l'équation de continuité, on a : $\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0$, l'équation (3-40) peut être

réduite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{C} \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{C} \bar{W}}{\partial z} = D_m \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) - k_r \bar{C} \quad (3-41)$$

Bilan des équations à discrétiser

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \bar{U}\bar{U}}{\partial x} - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial \bar{W}\bar{U}}{\partial z} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right] - \left[f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \bar{U}\bar{W}}{\partial x} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial \bar{W}\bar{W}}{\partial z} - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right] - \left[f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z \partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} \right] = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial k \bar{W}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_\mu k^2}{\sigma_k \varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C_\mu k^2}{\sigma_k \varepsilon} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left[2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon \bar{W}}{\partial z} = C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left[4 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_\mu k^2}{\sigma_\varepsilon \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C_\mu k^2}{\sigma_\varepsilon \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{C}\bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{C}\bar{W}}{\partial z} = D_m \left(\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial \bar{C}}{\partial z} \right) - k_r \bar{C}$$

d. Discrétisation des équations

Pour ne pas alourdir la discrétisation, effectuons les changements de variables suivants :

$$U = \bar{U} ; W = \bar{W} ; P = \bar{P} ; C = \bar{C} ; A = \bar{U}\bar{U} ; B = \bar{W}\bar{W} ; E = \bar{U}\bar{W} ; F = k\bar{U} ; G = k\bar{W} ; S = \varepsilon\bar{U} ; M = \varepsilon\bar{W} ; N = \bar{C}\bar{U} ; O = \bar{C}\bar{W} ; X = \frac{k^2}{\varepsilon} ; R = \frac{\varepsilon^2}{k} ; \tau_x = \frac{\Delta t}{\Delta x} ; \tau_z = \frac{\Delta t}{\Delta z}$$

Les équations deviennent :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left[\frac{\partial A}{\partial x} - 2C_\mu X \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial E}{\partial z} - C_\mu X \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] - \left[f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + C_\mu X \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \right] = 0 \quad (3-41)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left[\frac{\partial E}{\partial x} - C_\mu X \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial B}{\partial z} - 2C_\mu X \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] - \left[f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + C_\mu X \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} \right] = 0 \quad (3-42)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_\mu X}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C_\mu X}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + C_\mu X \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon \quad (3-43)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial z} = C_{\varepsilon 1} C_\mu k \left[4 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_\mu X}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C_\mu X}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - C_{\varepsilon 2} R \quad (3-44)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial O}{\partial z} = D_m \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) - k_r C \quad (3-45)$$

A présent, toutes nos équations sont sous la forme générale du schéma de Mac Cormack, nous allons passer à leur discrétisation.

iii. Etape de prédiction

➤ Equation (3-41)

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{U}_{i,j} - U_{i,j}^n}{\Delta t} + \left[\frac{A_{i+1,j}^n - A_{i,j}^n}{\Delta x} - 2C_\mu X_{i,j}^n \left(\frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) \right] + \\ & \left[\frac{E_{i,j+1}^n - E_{i,j}^n}{\Delta z} - C_\mu X_{i,j}^n \left(\frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) \right] - \\ & \left[f_x - \frac{1}{\rho} \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta x} + C_\mu X_{i,j}^n \left(\frac{W_{i+1,j+1}^n - W_{i+1,j-1}^n - W_{i-1,j+1}^n + W_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta z} \right) - \frac{2}{3} \frac{k_{i+1,j}^n - k_{i,j}^n}{\Delta x} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3-46)$$

A partir de cette expression, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{i,j} &= U_{i,j}^n - \tau_x (A_{i+1,j}^n - A_{i,j}^n) + 2C_\mu X_{i,j}^n \frac{\tau_x^2}{\Delta t} (U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n) - \tau_z (E_{i,j+1}^n - E_{i,j}^n) + \\ & C_\mu X_{i,j}^n \frac{\tau_z^2}{\Delta t} (U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n) + f_x - \frac{\tau_x}{\rho} (P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n) + \\ & C_\mu X_{i,j}^n \frac{\tau_x \tau_z}{4\Delta t} (W_{i+1,j+1}^n - W_{i+1,j-1}^n - W_{i-1,j+1}^n + W_{i-1,j-1}^n) - \frac{2}{3} \tau_x (k_{i+1,j}^n - k_{i,j}^n) \end{aligned} \quad (3-47)$$

➤ Equation (3-42)

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \left[\frac{\partial E}{\partial x} - C_\mu X \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial B}{\partial z} - 2C_\mu X \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right] - \left[f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + C_\mu X \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} \right] = 0$$

La discrétisation de cette équation se fait comme suite :

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{W}_{i,j} - W_{i,j}^n}{\Delta t} + \left[\frac{E_{i+1,j}^n - E_{i,j}^n}{\Delta x} - C_\mu X_{i,j}^n \left(\frac{W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) \right] + \\ & \left[\frac{B_{i,j+1}^n - B_{i,j}^n}{\Delta z} - 2C_\mu X_{i,j}^n \left(\frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) \right] - \\ & \left[f_z - \frac{1}{\rho} \frac{P_{i+1,j+1}^n - P_{i,j}^n}{\Delta z} + C_\mu X_{i,j}^n \left(\frac{U_{i+1,j+1}^n - U_{i+1,j-1}^n - U_{i-1,j+1}^n + U_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta z} \right) - \frac{2}{3} \frac{k_{i,j+1}^n - k_{i,j}^n}{\Delta z} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3-48)$$

Pour $\tilde{W}_{i,j}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_{i,j} = & W_{i,j}^n - \tau_x (E_{i+1,j}^n - E_{i,j}^n) + C_\mu X_{i,j}^n \frac{\tau_x^2}{\Delta t} (W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n) - \tau_z (B_{i,j+1}^n - B_{i,j}^n) + \\
& 2C_\mu X_{i,j}^n \frac{\tau_z^2}{\Delta t} (W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n) + f_z - \frac{\tau_z}{\rho} (P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n) + \\
& C_\mu X_{i,j}^n \frac{\tau_x \tau_z}{4\Delta t} (U_{i+1,j+1}^n - U_{i+1,j-1}^n - U_{i-1,j+1}^n + U_{i-1,j-1}^n) - \frac{2}{3} \tau_z (k_{i,j+1}^n - k_{i,j}^n)
\end{aligned} \tag{3-49}$$

➤ **Equation (3-43)**

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_\mu X}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C_\mu X}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + C_\mu X \left[2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon$$

Cette équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} = & \frac{C_\mu X}{\sigma_k} \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{C_\mu X}{\sigma_k} \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} + \frac{C_\mu}{\sigma_k} \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial k}{\partial z} + \\
& C_\mu X \left[2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] - \varepsilon
\end{aligned} \tag{3-50}$$

La discrétisation est donnée comme suite :

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{k}_{i,j} - k_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n}{\Delta z} = & \frac{C_\mu X_{i,j}^n}{\sigma_k} \left(\frac{k_{i+1,j}^n - 2k_{i,j}^n + k_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + \\
\frac{C_\mu}{\sigma_k} \left(\frac{X_{i+1,j}^n - X_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{k_{i+1,j}^n - k_{i,j}^n}{\Delta x} \right) + & \frac{C_\mu X_{i,j}^n}{\sigma_k} \left(\frac{k_{i,j+1}^n - 2k_{i,j}^n + k_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) + \\
\frac{C_\mu}{\sigma_k} \left(\frac{X_{i,j+1}^n - X_{i,j}^n}{\Delta z} \right) \left(\frac{k_{i,j+1}^n - k_{i,j}^n}{\Delta z} \right) + & \\
C_\mu X_{i,j}^n \left[2 \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n}{\Delta z} + \frac{W_{i+1,j}^n - W_{i,j}^n}{\Delta x} \right)^2 + 2 \left(\frac{W_{i,j+1}^n - W_{i,j}^n}{\Delta z} \right)^2 \right] - & \varepsilon_{i,j}^n
\end{aligned} \tag{3-51}$$

En tirant $\tilde{k}_{i,j}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{i,j} = & k_{i,j}^n - \tau_x (F_{i+1,j}^n - F_{i,j}^n) - \tau_z (G_{i,j+1}^n - G_{i,j}^n) + \frac{C_\mu X_{i,j}^n}{\sigma_k} \frac{\tau_x^2}{\Delta t} (k_{i+1,j}^n - 2k_{i,j}^n + k_{i-1,j}^n) + \\
& + \frac{C_\mu}{\sigma_k} \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (X_{i+1,j}^n - X_{i,j}^n) (k_{i+1,j}^n - k_{i,j}^n) + \frac{C_\mu X_{i,j}^n}{\sigma_k} \frac{\tau_z^2}{\Delta t} (k_{i,j+1}^n - 2k_{i,j}^n + k_{i,j-1}^n) + \\
& + \frac{C_\mu}{\sigma_k} \left(\frac{\tau_z^2}{\Delta t} \right) (X_{i,j+1}^n - X_{i,j}^n) (k_{i,j+1}^n - k_{i,j}^n) + \\
& + C_\mu X_{i,j}^n \left[2\tau_x (U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n)^2 + (\tau_z (U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n) + \tau_x (W_{i+1,j}^n - W_{i,j}^n))^2 + 2\tau_z (W_{i,j+1}^n - W_{i,j}^n)^2 \right] \\
& - \varepsilon_{i,j}^n
\end{aligned} \tag{3-52}$$

➤ **Equation (3-44)**

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial z} = C_{\varepsilon 1} C_{\mu} k \left[4 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{C_{\mu} X}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{C_{\mu} X}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - C_{\varepsilon 2} R$$

On peut également écrire l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial z} = C_{\varepsilon 1} C_{\mu} k \left[4 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ + \frac{C_{\mu} X}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{C_{\mu}}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{C_{\mu} X}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} + \frac{C_{\mu}}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - C_{\varepsilon 2} R \end{aligned} \quad (3-53)$$

La discrétisation de cette équation est donnée comme suite :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\varepsilon}_{i,j} - \varepsilon_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{S_{i+1,j}^n - S_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{M_{i,j+1}^n - M_{i,j}^n}{\Delta z} = \frac{C_{\mu} X_{i,j}^n}{\sigma_{\varepsilon}} \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j}^n - 2\varepsilon_{i,j}^n + \varepsilon_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + \\ \frac{C_{\mu}}{\sigma_{\varepsilon}} \left(\frac{X_{i+1,j}^n - X_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j}^n - \varepsilon_{i,j}^n}{\Delta x} \right) + \frac{C_{\mu} X_{i,j}^n}{\sigma_{\varepsilon}} \left(\frac{\varepsilon_{i,j+1}^n - 2\varepsilon_{i,j}^n + \varepsilon_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) + \\ \frac{C_{\mu}}{\sigma_{\varepsilon}} \left(\frac{X_{i,j+1}^n - X_{i,j}^n}{\Delta z} \right) \left(\frac{\varepsilon_{i,j+1}^n - \varepsilon_{i,j}^n}{\Delta z} \right) + \\ C_{\varepsilon 1} C_{\mu} k_{i,j}^n \left[4 \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n}{\Delta x} \right)^2 + 2 \left(\frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n}{\Delta z} + \frac{W_{i+1,j}^n - W_{i,j}^n}{\Delta x} \right)^2 + 4 \left(\frac{W_{i,j+1}^n - W_{i,j}^n}{\Delta z} \right)^2 \right] - C_{\varepsilon 2} R_{i,j}^n \end{aligned} \quad (3-54)$$

En tirant $\tilde{\varepsilon}_{i,j}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{i,j} = \varepsilon_{i,j}^n - \tau_x (S_{i+1,j}^n - S_{i,j}^n) - \tau_z (M_{i+1,j}^n - M_{i,j}^n) + \frac{C_{\mu} X_{i,j}^n}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\tau_x^2}{\Delta t} (\varepsilon_{i+1,j}^n - 2\varepsilon_{i,j}^n + \varepsilon_{i-1,j}^n) + \\ \frac{C_{\mu}}{\sigma_{\varepsilon}} \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (X_{i+1,j}^n - X_{i,j}^n) (\varepsilon_{i+1,j}^n - \varepsilon_{i,j}^n) + \frac{C_{\mu} X_{i,j}^n}{\sigma_{\varepsilon}} \frac{\tau_z^2}{\Delta t} (\varepsilon_{i,j+1}^n - 2\varepsilon_{i,j}^n + \varepsilon_{i,j-1}^n) + \frac{C_{\mu}}{\sigma_{\varepsilon}} \left(\frac{\tau_z^2}{\Delta t} \right) (X_{i,j+1}^n - X_{i,j}^n) (\varepsilon_{i,j+1}^n - \varepsilon_{i,j}^n) + \\ C_{\varepsilon 1} C_{\mu} k_{i,j}^n \left[4\tau_x (U_{i+1,j}^n - U_{i,j}^n)^2 + 2(\tau_z (U_{i,j+1}^n - U_{i,j}^n) + \tau_x (W_{i+1,j}^n - W_{i,j}^n))^2 + 4\tau_z (W_{i,j+1}^n - W_{i,j}^n)^2 \right] - C_{\varepsilon 2} R_{i,j}^n \end{aligned} \quad (3-55)$$

➤ **Equation (3-45)**

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial O}{\partial z} = D_m \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{tx} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{tz} \frac{\partial C}{\partial z} \right) - k_r C$$

En admettant les coefficients de diffusion turbulente constants, l'équation de transport du polluant devient :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial O}{\partial z} = D_m \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) + D_{tx} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_{tz} \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - k_r C \quad (3-56)$$

La discrétisation de cette équation est donnée comme suite :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{C}_{i,j} - C_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{N_{i+1,j}^n - N_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{O_{i,j+1}^n - O_{i,j}^n}{\Delta z} = D_m \left(\frac{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) + \\ D_{tx} \left(\frac{C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + D_{tz} \left(\frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) - k_r C_{i,j} \end{aligned} \quad (3-57)$$

En tirant $\tilde{C}_{i,j}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{i,j} = C_{i,j}^n - \tau_x (N_{i+1,j}^n - N_{i,j}^n) - \tau_z (O_{i,j+1}^n - O_{i,j}^n) + D_m \left[\frac{\tau_x^2}{\Delta t} (C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n) + \frac{\tau_z^2}{\Delta t} (C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n) \right] + \\ D_{tx} \frac{\tau_x^2}{\Delta t} (C_{i+1,j}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i-1,j}^n) + D_{tz} \frac{\tau_z^2}{\Delta t} (C_{i,j+1}^n - 2C_{i,j}^n + C_{i,j-1}^n) - k_r \Delta t C_{i,j}^n \end{aligned} \quad (3-58)$$

1. Etape de correction

➤ Equation (3-41)

$$\begin{aligned} \frac{\hat{U}_{i,j} - \tilde{U}_{i,j}^n}{\Delta t} + \left[\frac{\tilde{A}_{i,j}^n - \tilde{A}_{i-1,j}^n}{\Delta x} - 2C_{\mu} \tilde{X}_{i,j}^n \left(\frac{\tilde{U}_{i+1,j}^n - 2\tilde{U}_{i,j}^n + \tilde{U}_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) \right] + \\ \left[\frac{\tilde{E}_{i,j}^n - \tilde{E}_{i,j-1}^n}{\Delta z} - C_{\mu} \tilde{X}_{i,j}^n \left(\frac{\tilde{U}_{i,j+1}^n - 2\tilde{U}_{i,j}^n + \tilde{U}_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) \right] - \\ \left[f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\tilde{P}_{i,j}^n - \tilde{P}_{i-1,j}^n}{\Delta x} + C_{\mu} \tilde{X}_{i,j}^n \left(\frac{\tilde{W}_{i+1,j+1}^n - \tilde{W}_{i+1,j-1}^n - \tilde{W}_{i-1,j+1}^n + \tilde{W}_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\tilde{k}_{i,j}^n - \tilde{k}_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3-59)$$

En tirant \hat{U} , on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{U}_{i,j} = \tilde{U}_{i,j}^n - \tau_x (\tilde{A}_{i,j}^n - \tilde{A}_{i-1,j}^n) + 2C_{\mu} \tilde{X}_{i,j}^n \frac{\tau_x^2}{\Delta t} (\tilde{U}_{i+1,j}^n - 2\tilde{U}_{i,j}^n + \tilde{U}_{i-1,j}^n) - \tau_z (\tilde{E}_{i,j}^n - \tilde{E}_{i,j-1}^n) + \\ C_{\mu} \tilde{X}_{i,j}^n \frac{\tau_z^2}{\Delta t} (\tilde{U}_{i,j+1}^n - 2\tilde{U}_{i,j}^n + \tilde{U}_{i,j-1}^n) + f_x - \frac{\tau_x}{\rho} (\tilde{P}_{i,j}^n - \tilde{P}_{i-1,j}^n) + \\ C_{\mu} \tilde{X}_{i,j}^n \frac{\tau_x \tau_z}{4\Delta t} (\tilde{W}_{i+1,j+1}^n - \tilde{W}_{i+1,j-1}^n - \tilde{W}_{i-1,j+1}^n + \tilde{W}_{i-1,j-1}^n) - \frac{2}{3} \tau_x (\tilde{k}_{i,j}^n - \tilde{k}_{i-1,j}^n) \end{aligned} \quad (3-60)$$

➤ Equation (3-42)

$$\begin{aligned}
& \frac{\hat{W}_{i,j} - \tilde{W}_{i,j}^n}{\Delta t} + \left[\frac{\tilde{E}_{i,j}^n - \tilde{E}_{i-1,j}^n}{\Delta x} - C_\mu X_{i,j}^n \left(\frac{\tilde{W}_{i+1,j}^n - 2\tilde{W}_{i,j}^n + \tilde{W}_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) \right] + \\
& \left[\frac{\tilde{B}_{i,j}^n - \tilde{B}_{i,j-1}^n}{\Delta z} - 2C_\mu X_{i,j}^n \left(\frac{\tilde{W}_{i,j+1}^n - 2\tilde{W}_{i,j}^n + \tilde{W}_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) \right] - \\
& \left[f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\tilde{P}_{i,j}^n - \tilde{P}_{i,j-1}^n}{\Delta z} + C_\mu X_{i,j}^n \left(\frac{\tilde{U}_{i+1,j+1}^n - \tilde{U}_{i+1,j-1}^n - \tilde{U}_{i-1,j+1}^n + \tilde{U}_{i-1,j-1}^n}{4\Delta x \Delta z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\tilde{k}_{i,j}^n - \tilde{k}_{i,j-1}^n}{\Delta z} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3-61}$$

En tirant \hat{W}_{ij} , on obtient :

$$\begin{aligned}
\hat{W}_{i,j} = & \tilde{W}_{i,j}^n - \tau_x (\tilde{E}_{i,j}^n - \tilde{E}_{i-1,j}^n) + C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n \frac{\tau_x^2}{\Delta t} (\tilde{W}_{i+1,j}^n - 2\tilde{W}_{i,j}^n + \tilde{W}_{i-1,j}^n) - \tau_z (\tilde{B}_{i,j}^n - \tilde{B}_{i,j-1}^n) + \\
& 2C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n \frac{\tau_z^2}{\Delta t} (\tilde{W}_{i,j+1}^n - 2\tilde{W}_{i,j}^n + \tilde{W}_{i,j-1}^n) + f_z - \frac{\tau_z}{\rho} (\tilde{P}_{i,j}^n - \tilde{P}_{i,j-1}^n) + \\
& C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n \frac{\tau_x \tau_z}{4\Delta t} (\tilde{U}_{i+1,j+1}^n - \tilde{U}_{i+1,j-1}^n - \tilde{U}_{i-1,j+1}^n + \tilde{U}_{i-1,j-1}^n) - \frac{2}{3} \tau_z (\tilde{k}_{i,j}^n - \tilde{k}_{i,j-1}^n)
\end{aligned} \tag{3-62}$$

➤ *Equation (3-43)*

$$\begin{aligned}
& \frac{\hat{k}_{i,j} - \tilde{k}_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{F}_{i,j}^n - \tilde{F}_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \frac{\tilde{G}_{i,j}^n - \tilde{G}_{i,j-1}^n}{\Delta z} = \frac{C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n}{\sigma_k} \left(\frac{\tilde{k}_{i+1,j}^n - 2\tilde{k}_{i,j}^n + \tilde{k}_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + \\
& \frac{C_\mu}{\sigma_k} \left(\frac{\tilde{X}_{i,j}^n - \tilde{X}_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\tilde{k}_{i,j}^n - \tilde{k}_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right) + \frac{C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n}{\sigma_k} \left(\frac{\tilde{k}_{i,j+1}^n - 2\tilde{k}_{i,j}^n + \tilde{k}_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) + \\
& \frac{C_\mu}{\sigma_k} \left(\frac{\tilde{X}_{i,j}^n - \tilde{X}_{i,j-1}^n}{\Delta z} \right) \left(\frac{\tilde{k}_{i,j}^n - \tilde{k}_{i,j-1}^n}{\Delta z} \right) + \\
& C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n \left[2 \left(\frac{\tilde{U}_{i,j}^n - \tilde{U}_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{U}_{i,j}^n - \tilde{U}_{i,j-1}^n}{\Delta z} + \frac{\tilde{W}_{i,j}^n - \tilde{W}_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\tilde{W}_{i,j}^n - \tilde{W}_{i,j-1}^n}{\Delta z} \right)^2 \right] - \tilde{\epsilon}_{i,j}^n
\end{aligned} \tag{3-63}$$

En tirant $\hat{k}_{i,j}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\hat{k}_{i,j} = & \tilde{k}_{i,j}^n - \tau_x (\tilde{F}_{i,j}^n - \tilde{F}_{i-1,j}^n) - \tau_z (\tilde{G}_{i,j}^n - \tilde{G}_{i,j-1}^n) + \frac{C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n \tau_x^2}{\sigma_k \Delta t} (\tilde{k}_{i+1,j}^n - 2\tilde{k}_{i,j}^n + \tilde{k}_{i-1,j}^n) \\
& \frac{C_\mu}{\sigma_k} \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (\tilde{X}_{i,j}^n - \tilde{X}_{i-1,j}^n) (\tilde{k}_{i,j}^n - \tilde{k}_{i-1,j}^n) + \frac{C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n \tau_z^2}{\sigma_k \Delta t} (\tilde{k}_{i,j+1}^n - 2\tilde{k}_{i,j}^n + \tilde{k}_{i,j-1}^n) + \frac{C_\mu}{\sigma_k} \left(\frac{\tau_z^2}{\Delta t} \right) (\tilde{X}_{i,j}^n - \tilde{X}_{i,j-1}^n) (\tilde{k}_{i,j}^n - \tilde{k}_{i,j-1}^n) \\
& C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n \left[2\tau_x (\tilde{U}_{i,j}^n - \tilde{U}_{i-1,j}^n)^2 + (\tau_x (\tilde{U}_{i,j}^n - \tilde{U}_{i,j-1}^n) + \tau_x (\tilde{W}_{i,j}^n - \tilde{W}_{i-1,j}^n))^2 + 2\tau_z (\tilde{W}_{i,j}^n - \tilde{W}_{i,j-1}^n)^2 \right] - \tilde{\epsilon}_{i,j}^n
\end{aligned} \tag{3-64}$$

➤ *Equation (3-44)*

$$\begin{aligned}
& \frac{\hat{\epsilon}_{i,j} - \tilde{\epsilon}_{i,k}^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{S}_{i,j}^n - \tilde{S}_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \frac{\tilde{M}_{i,j}^n - \tilde{M}_{i,j-1}^n}{\Delta z} = \frac{C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n}{\sigma_\epsilon} \left(\frac{\tilde{\epsilon}_{i+1,j}^n - 2\tilde{\epsilon}_{i,j}^n + \tilde{\epsilon}_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + \\
& \frac{C_\mu}{\sigma_\epsilon} \left(\frac{\tilde{X}_{i,j}^n - \tilde{X}_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\tilde{\epsilon}_{i,j}^n - \tilde{\epsilon}_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right) + \frac{C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n}{\sigma_\epsilon} \left(\frac{\tilde{\epsilon}_{i,j+1}^n - 2\tilde{\epsilon}_{i,j}^n + \tilde{\epsilon}_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) + \\
& \frac{C_\mu}{\sigma_\epsilon} \left(\frac{\tilde{X}_{i,j}^n - \tilde{X}_{i,j-1}^n}{\Delta z} \right) \left(\frac{\tilde{\epsilon}_{i,j}^n - \tilde{\epsilon}_{i,j-1}^n}{\Delta z} \right) + \\
& C_{\epsilon 1} C_\mu \tilde{k}_{i,j}^n \left[4 \left(\frac{\tilde{U}_{i,j}^n - \tilde{U}_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\tilde{U}_{i,j}^n - \tilde{U}_{i,j-1}^n}{\Delta z} + \frac{\tilde{W}_{i,j}^n - \tilde{W}_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\tilde{W}_{i,j}^n - \tilde{W}_{i,j-1}^n}{\Delta z} \right)^2 \right] - C_{\epsilon 2} \tilde{R}_{i,j}^n
\end{aligned} \tag{3-65}$$

En tirant $\hat{\epsilon}_{i,j}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\hat{\epsilon}_{i,j} &= \tilde{\epsilon}_{i,j}^n + -\tau_x (\tilde{S}_{i,j}^n - \tilde{S}_{i-1,j}^n) - \tau_z (\tilde{M}_{i,j}^n - \tilde{M}_{i,j-1}^n) + \frac{C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n}{\sigma_\epsilon} \frac{\tau_x^2}{\Delta t} (\tilde{\epsilon}_{i+1,j}^n - 2\tilde{\epsilon}_{i,j}^n + \tilde{\epsilon}_{i-1,j}^n) \\
& \frac{C_\mu}{\sigma_\epsilon} \left(\frac{\tau_x^2}{\Delta t} \right) (\tilde{X}_{i,j}^n - \tilde{X}_{i-1,j}^n) (\tilde{\epsilon}_{i,j}^n - \tilde{\epsilon}_{i-1,j}^n) + \frac{C_\mu \tilde{X}_{i,j}^n}{\sigma_\epsilon} \frac{\tau_z^2}{\Delta t} (\tilde{\epsilon}_{i,j+1}^n - 2\tilde{\epsilon}_{i,j}^n + \tilde{\epsilon}_{i,j-1}^n) + \frac{C_\mu}{\sigma_\epsilon} \left(\frac{\tau_z^2}{\Delta t} \right) (\tilde{X}_{i,j}^n - \tilde{X}_{i,j-1}^n) (\tilde{\epsilon}_{i,j}^n - \tilde{\epsilon}_{i,j-1}^n) \\
& C_{\epsilon 1} C_\mu \tilde{k}_{i,j}^n \left[4\tau_x (\tilde{U}_{i,j}^n - \tilde{U}_{i-1,j}^n)^2 + 2(\tau_z (\tilde{U}_{i,j}^n - \tilde{U}_{i,j-1}^n) + \tau_x (\tilde{W}_{i,j}^n - \tilde{W}_{i-1,j}^n))^2 + 4\tau_z (\tilde{W}_{i,j}^n - \tilde{W}_{i,j-1}^n)^2 \right] - C_{\epsilon 2} \tilde{R}_{i,j}^n
\end{aligned} \tag{3-66}$$

➤ Equation (3-45)

La discrétisation de cette équation est donnée comme suite :

$$\begin{aligned}
& \frac{\hat{C}_{i,j} - \tilde{C}_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\tilde{N}_{i,j}^n - \tilde{N}_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \frac{\tilde{O}_{i,j}^n - \tilde{O}_{i,j-1}^n}{\Delta z} = D_m \left(\frac{\tilde{C}_{i+1,j}^n - 2\tilde{C}_{i,j}^n + \tilde{C}_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\tilde{C}_{i,j+1}^n - 2\tilde{C}_{i,j}^n + \tilde{C}_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) + \\
& D_{tx} \left(\frac{\tilde{C}_{i+1,j}^n - 2\tilde{C}_{i,j}^n + \tilde{C}_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + D_{tz} \left(\frac{\tilde{C}_{i,j+1}^n - 2\tilde{C}_{i,j}^n + \tilde{C}_{i,j-1}^n}{(\Delta z)^2} \right) - k_r * \tilde{C}_{i,j}
\end{aligned} \tag{3-67}$$

En tirant $\hat{C}_{i,j}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{i,j} &= \tilde{C}_{i,j}^n + -\tau_x (\tilde{N}_{i,j}^n - \tilde{N}_{i-1,j}^n) - \tau_z (\tilde{O}_{i,j}^n - \tilde{O}_{i,j-1}^n) + D_m \left[\frac{\tau_x^2}{\Delta t} (\tilde{C}_{i+1,j}^n - 2\tilde{C}_{i,j}^n + \tilde{C}_{i-1,j}^n) + \frac{\tau_z^2}{\Delta t} (\tilde{C}_{i,j+1}^n - 2\tilde{C}_{i,j}^n + \tilde{C}_{i,j-1}^n) \right] + \\
& D_{tx} \frac{\tau_x^2}{\Delta t} (\tilde{C}_{i+1,j}^n - 2\tilde{C}_{i,j}^n + \tilde{C}_{i-1,j}^n) + D_{tz} \frac{\tau_z^2}{\Delta t} (\tilde{C}_{i,j+1}^n - 2\tilde{C}_{i,j}^n + \tilde{C}_{i,j-1}^n) - k_r \Delta t \tilde{C}_{i,j}^n
\end{aligned} \tag{3-68}$$

3. Détermination du champ de pression

La principale difficulté dans la résolution des équations de Reynolds réside dans l'absence d'une équation de transport de la pression ; en effet la pression n'est présente que dans les équations de conservation de la quantité de mouvement, et ceci sous forme de gradient.

Une autre difficulté est qu'on doit s'assurer qu'à chaque pas temps l'équation de continuité est vérifiée pour avoir des résultats de bonne qualité.

Dans ce paragraphe, nous appliquerons à nos équations de continuité et de quantité de mouvement une méthode qui nous permettra de déterminer le champ de pression en chaque point de calcul. Il s'agit de la méthode de la « viscosité artificielle ».

a. Description de la méthode de la viscosité artificielle

La méthode de la viscosité artificielle est basée sur une modification de l'équation de continuité en y ajoutant un terme fictif de dérivée temporelle de la pression (**Schiestel, 1993**).

Ainsi, l'équation de continuité devient comme suite :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \alpha^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0 \quad (3-69)$$

Le coefficient α est choisi de façon arbitraire afin d'assurer la convergence du système. Il est à noter que cette équation n'aura de sens physique que quand le régime permanent est atteint.

Nous allons donc utiliser cette méthode afin de déterminer le champ de pression de l'écoulement et permettre la détermination de autres inconnus de notre problème.

b. Discrétisation des équations

Pour appliquer cette méthode, une discrétisation appropriée s'avère nécessaire afin obtenir des résultats satisfaisants. Pour ce faire, nous utiliserons un maillage décalé ; ainsi, nos équations seront discrétisées comme suite :

- L'équation de la vitesse longitudinale sera discrétisée aux points $(i+1/2, j)$.
- L'équation de la vitesse transversale sera discrétisée aux points $(i, j+1/2)$.
- Le gradient de pression sera discrétisée comme suite :

Suivant la direction x :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n}{\Delta x} \quad (3-70)$$

Suivant la direction y :
$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n}{\Delta x} \quad (3-67)$$

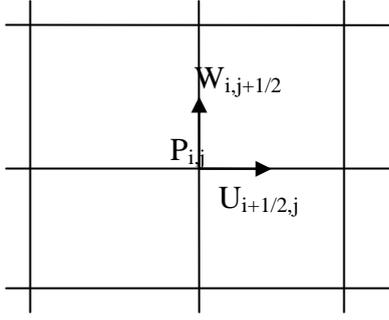


Figure III-4. : Maillage décalé

c. Application de la méthode de la viscosité artificielle

Les équations décrivant la conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont données comme suite :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \alpha^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0 \quad (3-71)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left[\frac{\partial A}{\partial x} - 2C_\mu X \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial E}{\partial z} - C_\mu X \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] - \left[f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + C_\mu X \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \right] = 0 \quad (3-72)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left[\frac{\partial E}{\partial x} - C_\mu X \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial B}{\partial z} - 2C_\mu X \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right] - \left[f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + C_\mu X \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} \right] = 0 \quad (3-73)$$

En utilisant un maillage décalé, la discrétisation de ces équations est donnée comme suite :

➤ L'équation de continuité

$$\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} + \alpha^2 \left(\frac{U_{i+1/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n}{2\Delta x} + \frac{W_{i,j+1/2}^n - W_{i,j-1/2}^n}{2\Delta z} \right) \quad (3-74)$$

Ceci nous donne :

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n - \alpha^2 \Delta t \left(\frac{U_{i+1/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n}{2\Delta x} + \frac{W_{i,j+1/2}^n - W_{i,j-1/2}^n}{2\Delta z} \right) \quad (3-75)$$

La discrétisation de l'équation de continuité faisant intervenir un maillage décalé, donc les composantes de la vitesse doivent être calculées aux points $(i+1/2,j)$, $(i-1/2,j)$, $(i,j+1/2)$, $(i,j-1/2)$.

Rappelons que les équations de la conservation de la quantité de l'énergie cinétique ont été discrétisées par la méthode explicite de Mac Cormack qui n'utilise pas un maillage décalé.

Par conséquent, les vitesses issues du maillage décalé seront déterminées par interpolation à partir de celle déterminées par la méthode de Mac Cormack.

Nous obtenons alors les expressions suivantes :

$$U_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{i+1,j}) \quad (3-76)$$

$$U_{i-1/2,j} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{i-1,j}) \quad (3-77)$$

$$W_{i,j+1/2} = \frac{1}{2}(W_{i,j} + W_{i,j+1}) \quad (3-78)$$

$$W_{i,j-1/2} = \frac{1}{2}(W_{i,j} + W_{i,j-1}) \quad (3-79)$$

Les solutions au temps (n+1) sont données comme suite :

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n - \alpha^2 \Delta t \left(\frac{U_{i+1/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n}{2\Delta x} + \frac{W_{i,j+1/2}^n - W_{i,j-1/2}^n}{2\Delta z} \right) \quad (3-80)$$

$$U_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{i,j}^n + \hat{U}_{i,j}) \quad (3-81)$$

$$W_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2}(W_{i,j}^n + \hat{W}_{i,j}) \quad (3-82)$$

$$k_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2}(k_{i,j}^n + \hat{k}_{i,j}) \quad (3-83)$$

$$\varepsilon_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{i,j}^n + \hat{\varepsilon}_{i,j}) \quad (3-84)$$

$$C_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2}(C_{i,j}^n + \hat{C}_{i,j}) \quad (3-85)$$

4. Conditions initiales aux limites

A présent, nous allons d'introduire un certain nombre de conditions supplémentaires, afin que la résolution numériques de nos équation soit effective : il s'agit des conditions initiales et les conditions aux limites.

Les conditions supplémentaires intervenant dans notre problème sont :

- Les conditions initiales ;
- Les conditions aux limites ;
- Les conditions aux parois ;

a. Les conditions initiales

Nous devons définir des conditions qui représentent l'état de base du modèle à l'instant où commence la simulation c'est-à-dire à $t=0$. Ainsi les valeurs de toutes les inconnues doivent être connues afin de pouvoir démarrer les calculs.

Le choix des valeurs des quatre variables $P_0, \overline{U}_0, \overline{V}_0$ et \overline{C}_0 , sera fait à partir de la limite amont.

Pour ce faire, nous définissons un débit initial Q_0 ; à partir de ce débit, nous définissons la hauteur initiale H_0 et par suite, nous calculons U_0 comme suite :

$$U_0 = \frac{Q_0}{b * H_0} \quad (3-86)$$

où, b est la largeur du canal.

$$\text{Nous admettons une vitesse transversale initiale nulle : } W_0 = 0 \quad (3-87)$$

Nous considérons la pression hydrostatique au cours de la résolution du problème, par conséquent, P_0 est calculée à partir de H_0 .

Pour l'énergie cinétique turbulente et son taux de dissipation, nous utilisons les formules empiriques données comme suite (**Nathalie, B. , 1992**) :

$$k_0 = 0.002 * U_0^2 \quad (3-88)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{k_0^{3/2}}{0.3 * \frac{2Hb}{H+b}} \quad (3-89)$$

En ce qui concerne le phénomène de transport nous considérons une concentration initiale nulle sur tout le domaine.

b. Conditions aux limites

iv. Conditions amont – aval

La détermination des conditions aux limites constitue un problème très délicat et fondamental dans la résolution numérique des écoulements à surface libre. Pour la résolution de notre problème, nous choisissons de fixer les valeurs de U , W et P à l'amont. Nous considérons que ces conditions ne changent pas durant le calcul.

iii. Conditions aux parois (Rastogi, Rodi, 1978)

Dans un écoulement turbulent, on constate qu'à proximité des parois solides l'existence d'une zone dite sous – couche visqueuse où les contraintes visqueuses sont plus importantes que les contraintes turbulentes provoquant une baisse sensible du nombre de Reynolds. Pour cette raison, on ne doit pas spécifier des conditions directement liées à la paroi dans la mesure où l'utilisation de ces conditions implique le maillage de la sous couche visqueuse. Or, le modèle de turbulence que nous avons utilisé pour la fermeture du problème était basé sur l'hypothèse de grand nombre de Reynolds, par conséquent n'est plus valable dans la sous – couche visqueuse caractérisée par de faible nombre de Reynolds.

Pour pallier à ce problème, nous choisissons les premiers points de maillage en dehors de la sous couche visqueuse. Les lois de parois caractérisant cette région et donnant la vitesse U , l'énergie \bar{k} et la dissipation $\bar{\varepsilon}$ pour un canal rugueux sont :

$$\frac{U_{\text{par}}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln (E y^+) \quad (3-90)$$

$$\bar{k} = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad (3-91)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{u_*^3}{\kappa y} \quad (3-92)$$

avec, κ : Constante de Von Karman : $\kappa = 0.419$; U_{par} est la vitesse parallèle aux parois. La vitesse perpendiculaire aux parois est considérée nulle.

$$y^+ = y \frac{u_*}{\nu} \quad (3-93)$$

y^+ : distance adimensionnelle à la paroi ; y : distance à la paroi ; E : Paramètre de rugosité de parois ($E = 9.793$ pour des parois hydrauliquement lisses), ν : viscosité cinématique du fluide ; u_* : la vitesse de frottement donnée par : $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, où τ_0 : contraintes de frottement à

$$\text{la paroi exprimée par : } \tau_0 = \rho u_*^2 = \rho C_f V_m^2 \quad (3-94)$$

avec, V : vitesse moyenne de l'écoulement donnée par : $V_m = \sqrt{U^2 + W^2}$

C_f : coefficient de frottement empirique dont l'intensité dépend de la rugosité du fond.

$$\text{Pour des canaux rugueux la loi de Manning donne : } C_f = \frac{n^2 g}{H^{1/3}} \quad (3-95)$$

n : est le coefficient de Manning, H la hauteur de l'écoulement et g l'accélération de la pesanteur

Notons que ces formules empiriques ne sont valable que dans la zone turbulente c'est-à-dire pour ($30 < y^+ < 100$).

La vitesse normale et le flux de concentration sont nuls dans la zone des parois.

iv. Conditions de symétrie au niveau du plan médian

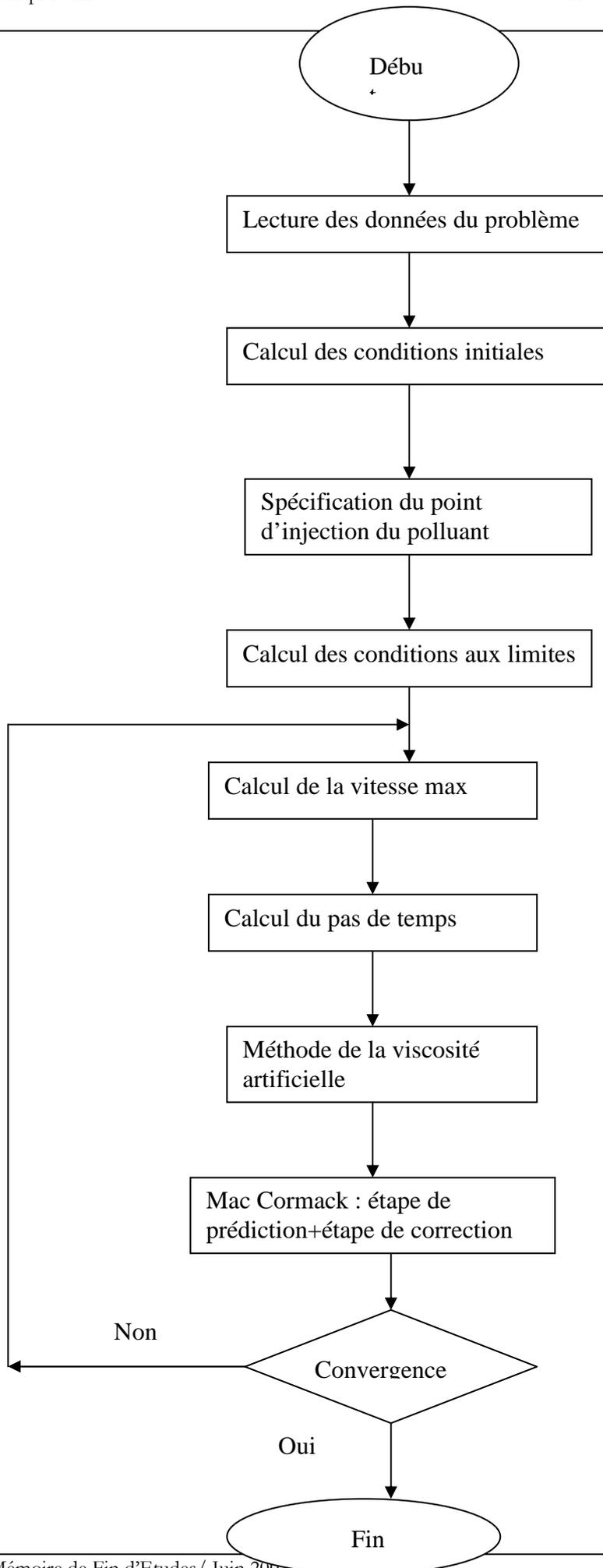
Notre canal étant symétrie par rapport à son plan médian, nous imposons alors des conditions de symétrie afin de réduire de moitié la taille du domaine de calculs.

5. Résolution des équations

La pression étant déterminée à partir de la méthode de la viscosité artificielle, les conditions initiales et les conditions aux limites étant définies, toutes les conditions sont alors réunies pour démarrer la résolution numérique du problème par différences finies.

Le processus de calcul se déroule comme suit : nous commencerons d'abord par la lecture de toutes les variables constantes intervenant dans les équations. Nous définissons ensuite la zone d'injection du polluant après le calcul des conditions initiales et des conditions aux limites. Notre méthode numérique étant explicite, nous y introduisons une procédure calculant le pas de temps pour assurer la stabilité du schéma. Le calcul de la pression se fait à partir de la procédure de la viscosité artificielle. Enfin, en utilisant les conditions de symétrie et de réflexions (au niveau des parois), nous calculons toutes les inconnues au pas de temps actuel à partir des valeurs du pas de temps précédent par la méthode de Mac Cormack.

Les différentes étapes du calcul sont résumées dans l'organigramme ci-dessus.



Conclusion

Nous venons d'établir notre modèle numérique, en discrétisant nos équations par la méthode de Mac Cormack ; la prochaine étape consistera à résoudre ces équations en élaborant un programme dont les phases prépondérantes sont résumées dans l'algorithme précédent.

Enfin les résultats obtenus et leur interprétation feront l'objet du prochain chapitre.

Chapitre IV : Résultats et Interprétations

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons discrétisé nos équations en utilisant le schéma explicite de Mac Cormack.

Après définition des conditions initiales et des conditions aux limites, nous avons élaboré un programme qui nous a permis de calculer les différentes inconnues du problème à savoir \bar{U} , \bar{W} , \bar{C} , \bar{k} et $\bar{\varepsilon}$.

Dans ce présent chapitre, nous y présenterons les résultats ainsi obtenu que nous analyserons et interpréterons. N'ayons pas des résultats expérimentaux dans la bibliographie, nous validerons nos résultats à partir des résultats expérimentaux obtenus sur un canal rectangulaire par les chercheurs du laboratoire LRS - Eau.

Une analyse paramétrique plus approfondie sera effectuée afin de mettre en exergue les différents paramètres qui jouent un rôle prépondérant dans les processus de transport d'un polluant actif. A ce niveau, plusieurs scénarios seront réalisés afin de vérifier la sensibilité de notre programme aux variations de débits, de la distance à partir du point d'injection, aux variations du coefficient de réaction et de la concentration initiale ainsi qu'aux variations de pente.

Nous terminerons par une analyse du paramètre arbitraire alpha afin de déterminer son influence sur la qualité de nos résultats.

III. Validation de nos résultats

1. Description des expériences effectuées au laboratoire LRS - Eau

Bouzidi et Nacer (2007) ont mené des expériences sur la dispersion du phénol au sein du laboratoire d'Hydraulique de l'Ecole Nationale polytechnique. Ils ont travaillé sur un canal rectangulaire dont les différentes caractéristiques sont données comme suite :

- Longueur : $L=10\text{m}$
- Largeur : $B = 0.39\text{m}$
- Hauteur : $H = 0.39\text{m}$

Les parois du canal sont en plexiglass ; l'ensemble du canal du canal est porté sur un support horizontal de 1.2m de hauteur.

3. Description du champ de vitesse

Dans les phénomènes de transport, le champ de vitesse joue un rôle clé car la vitesse intervient aussi dans le transport convectif que dans le transport par diffusion turbulente.

Sur la figure VI-1, nous avons présenté le profil de la vitesse longitudinale le long de la largeur ;

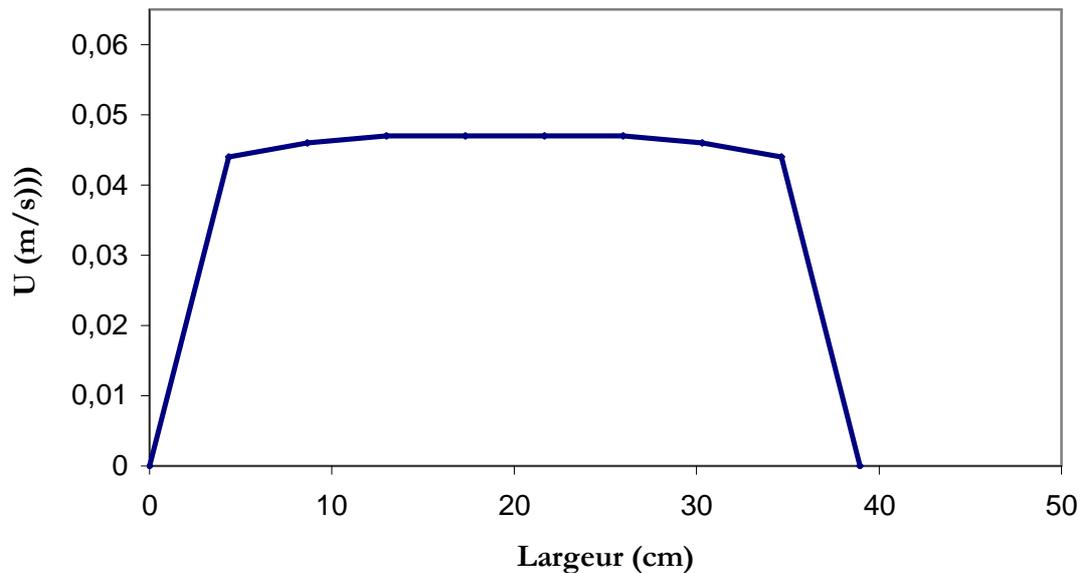


Figure IV-1 : Profil de la vitesse suivant la largeur à $x = 2\text{m}$ pour $Q = 0,4\text{l/s}$, $sox = 0,0001$

Le débit d'entrée étant égale au débit de sortie, la hauteur d'écoulement étant constante le long du canal : l'écoulement est permanent.

Avec un débit d'entrée de 0.4 l/s , nous obtenons un nombre de Reynolds de $Re = 1920.75$ qui est caractéristique d'un régime laminaire.

La **figure IV-2** représente la variation de la vitesse suivant la longueur prise au niveau de l'axe du canal.

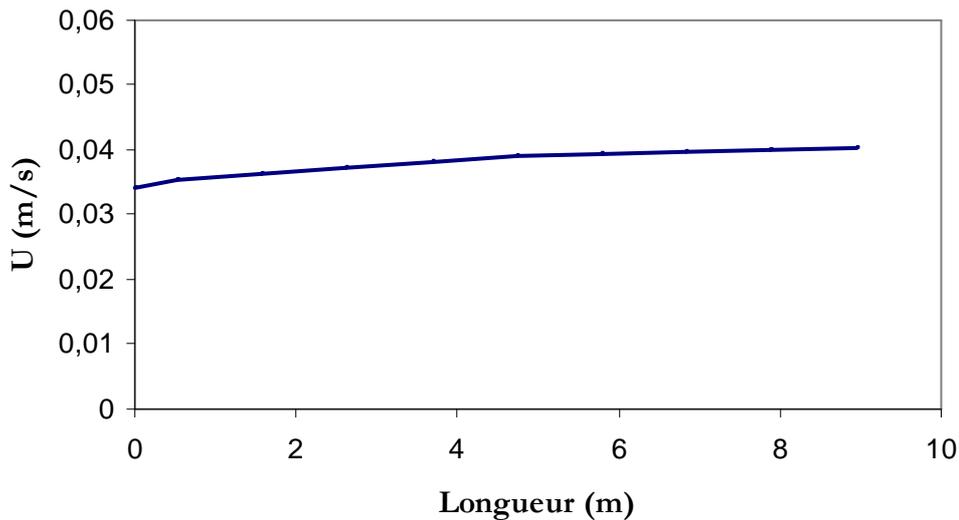


Figure IV-2 : Variation de la vitesse longitudinale en fonction de la longueur

4. Validation du modèle

3.1 Cas d'une source discontinue

Dans leurs expériences, Bouzidi et Nacer se sont donnés comme objectif de mesurer la concentration du phénol au cours du temps et en des positions différentes à l'amont de la zone d'injection. Pour ce faire, ils injectent une concentration initiale de 500mg/l de phénol; lorsque l'écoulement dans le canal se stabilise, ils effectuent plusieurs mesures pendant des intervalles de temps réguliers.

Dans ce qui suit, nous confronterons les données expérimentales aux données obtenues numériquement afin de déterminer comment notre modèle prédit le comportement du système réel qu'il représente.

○ Comparaison des profils de concentration pour différentes positions

Sur la **figure IV-3** est présentée les courbes de variation de la concentration en fonction du temps obtenue par voie expérimentale pour un débit de 0.4 l/s à des positions différentes et pour une source discontinue de $C_0=500\text{mg/l}$.

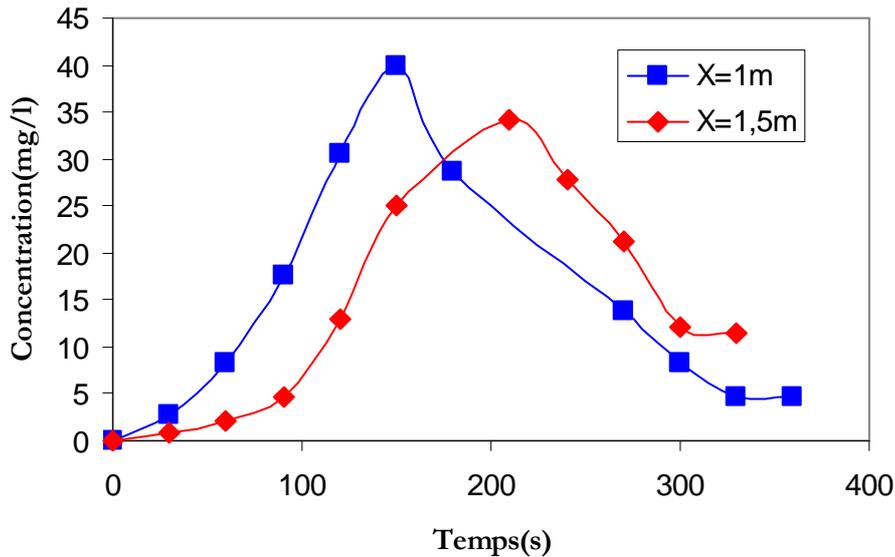


Figure IV-3 : Variation de la concentration en fonction du temps pour les mesures expérimentales pour un débit de 0,4 l/s et une concentration initiale de 500mg/l

Sur le **figure IV-4**, nous avons présenté les profils de concentration en fonction du temps avec les données obtenus à partir de notre modèle numérique pour différentes positions; les conditions d'écoulement étant les mêmes que pour le cas précédent. La concentration initiale est aussi de 500mg/l ; nous avons admis un coefficient de réaction de 0.013.

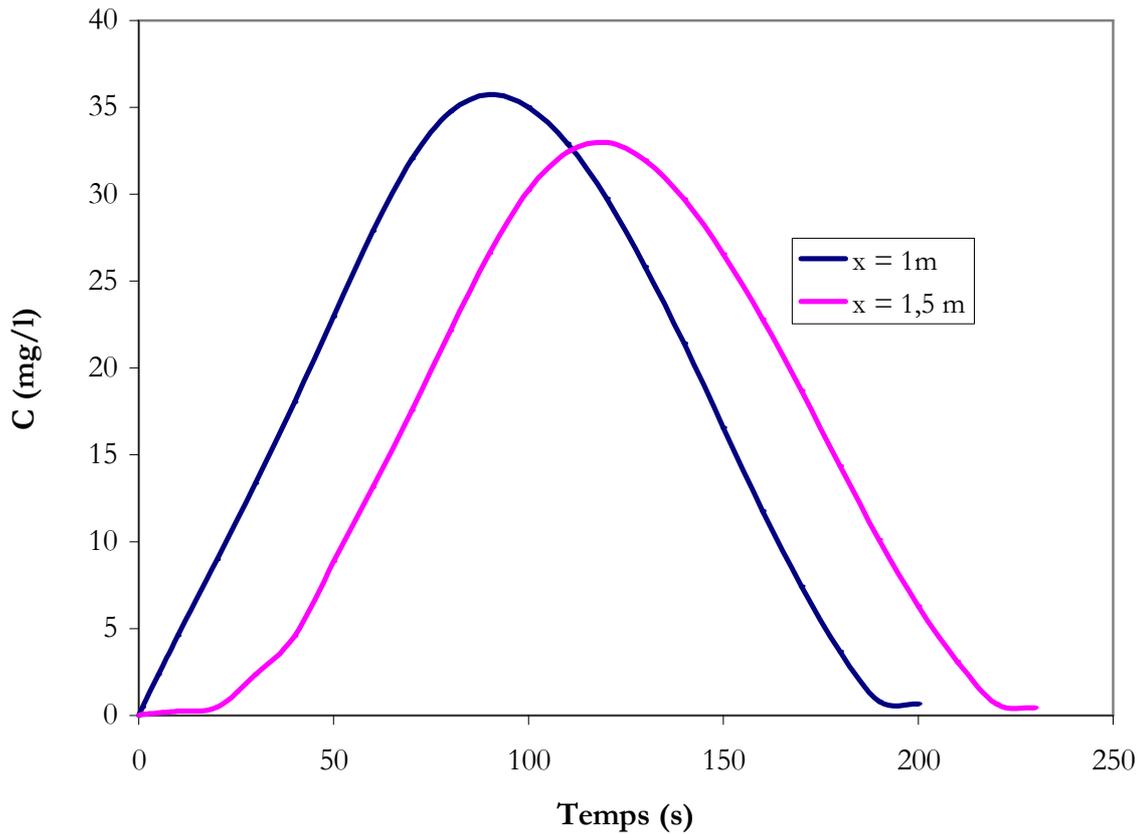


Figure IV-4 : Variation de la concentration en fonction du temps pour $Q = 0,41/\text{s}$, $k_r = 0,013$, $C_0 = 500\text{mg/l}$ pour différentes positions

Dans les deux cas, la concentration monte progressivement pour atteindre son pic.

Par contre, la descente dans le cas des données expérimentales est plus lente que celle dans le cas des données obtenues numériquement. Ceci est probablement dû à un coefficient de réaction relativement élevé que nous avons adopté dans la résolution numérique du problème.

En plus nous remarquons, un pic pointu pour les données expérimentales, alors que celui obtenu à partir de notre modèle numérique est plutôt arrondi, ce qui est caractéristique du phénomène de diffusion. Cela peut s'expliquer par le faible débit d'écoulement, donc la faible vitesse d'où l'importance du transport diffusif par rapport au transport par convection.

○ Variation des profils de concentration pour différents débits

La **figure IV-5** montre la variation de la concentration en fonction du temps pour les données expérimentales ; une source de pollution discontinue de concentration $C_0 = 500\text{mg/l}$ à été injectée dans le canal pour $Q = 0.5\text{ l/s}$ et $Q = 0.4\text{ l/s}$. Les mesures ont été effectuées à une distance $x = 1\text{ m}$ de la zone d'injection.

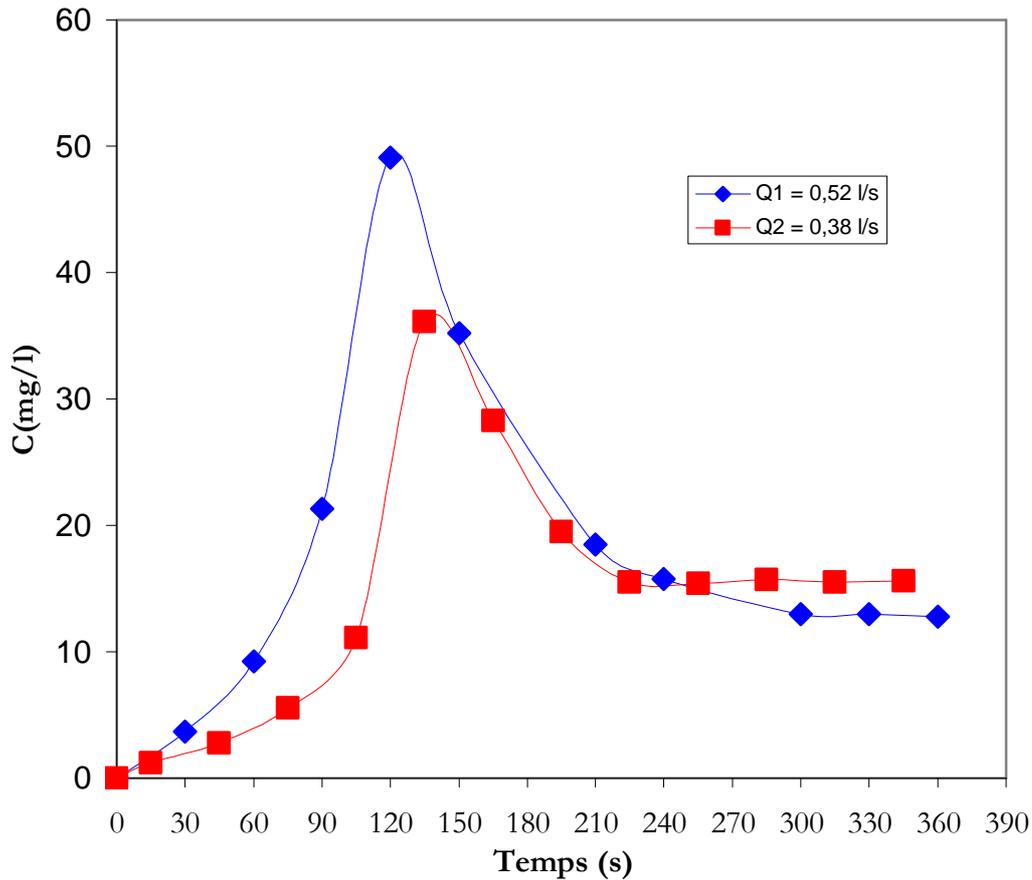


Figure IV - 5 : Variation de la concentration en fonction du temps pour les données issues des expériences à $x = 1$ m pour différents débits

La figure IV-6 illustre l'évolution de la concentration en fonction du temps pour les données obtenues à partir du modèle numérique pour $Q = 0.4$ l/s et $Q = 0.5$ l/s à une distance de 1 m à partir du point d'injection. Nous avons considéré une source discontinue de concentration $C_0 = 500$ mg/l et un coefficient de réaction de 0.013.

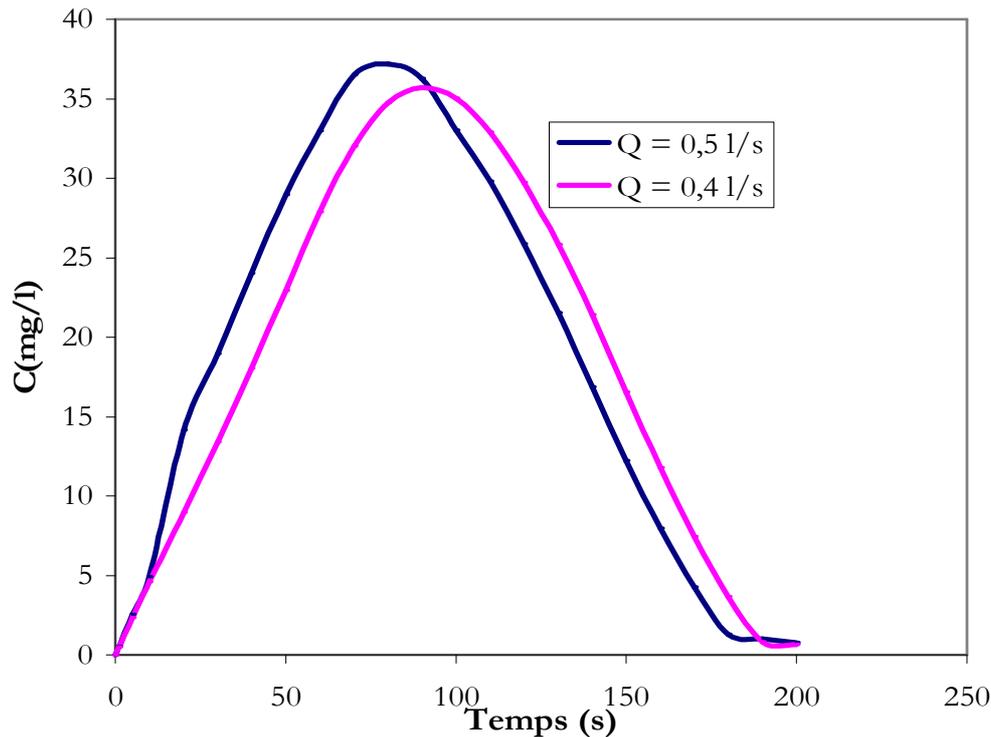


Figure IV-6 : Variation de la concentration en fonction du temps à $x = 1\text{m}$, $k_r = 0,013$, $C_0 = 500\text{ mg/l}$ pour différents débits

Dans les deux cas les profils de concentration ont à peu près la même allure. On observe d'abord une montée pour atteindre un pic avant de redescendre.

Les profils expérimentaux font ressortir une montée plus rapide et une descente très lente alors que les profils obtenus à partir des données numériques montrent une montée et une descente progressives.

Nous remarquons un pic pointu pour les données expérimentales alors que les profils numériques ont un pic arrondi.

Il est à noter que les concentration maximale obtenue à partir des données expérimentales pour un même débits sont supérieures à celles obtenues à partir des données expérimentales. Cela peut s'expliquer par un coefficient de réaction relativement élevé.

Dans les deux cas (expérimental et numérique), nous remarquons une augmentation de la concentration en fonction de l'augmentation du débit. C'est tout à fait logique car plus le débit augment, plus la vitesse augment, ce qui entraîne aussi une augmentation des phénomènes d'advection et diffusion qui jouent un rôle prépondérant dans le processus du transport.

5. 2 Cas d'une source continue

La **figure IV-7**, montre l'évolution de la concentration en fonction du temps obtenue à partir des données expérimentales pour une source de pollution continue de concentration $C_0 = 500 \text{ mg/l}$ au point $x = 1\text{m}$ avec un débit d'écoulement de 0.4 l/s .

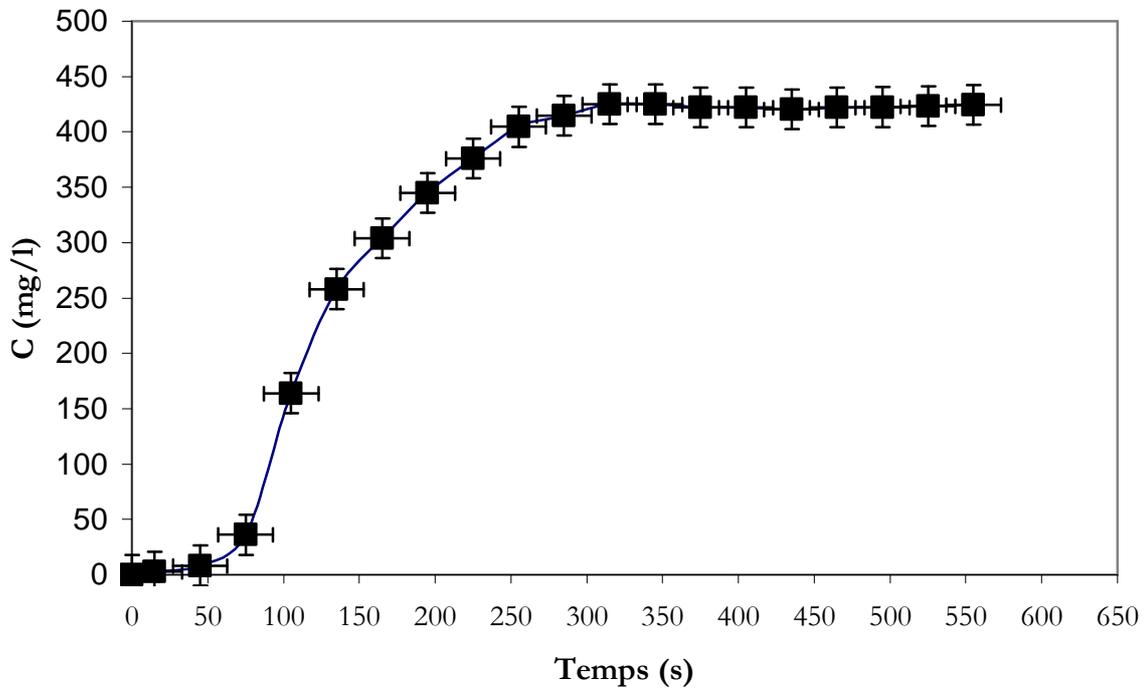


Figure IV-7 : Variation de la concentration en fonction du temps pour les données issues des expériences pour une source continue $C_0=500 \text{ mg/l}$ à $x = 1\text{m}$

La **figure IV-8** montre l'évolution de la concentration en fonction du temps obtenue à partir de notre modèle numérique pour une source continue $C_0 = 500\text{mg/l}$ au point $x = 1\text{m}$. Le débit de l'écoulement étant de 0.5l/s . Nous avons utilisé un coefficient de réaction de 0.013 .

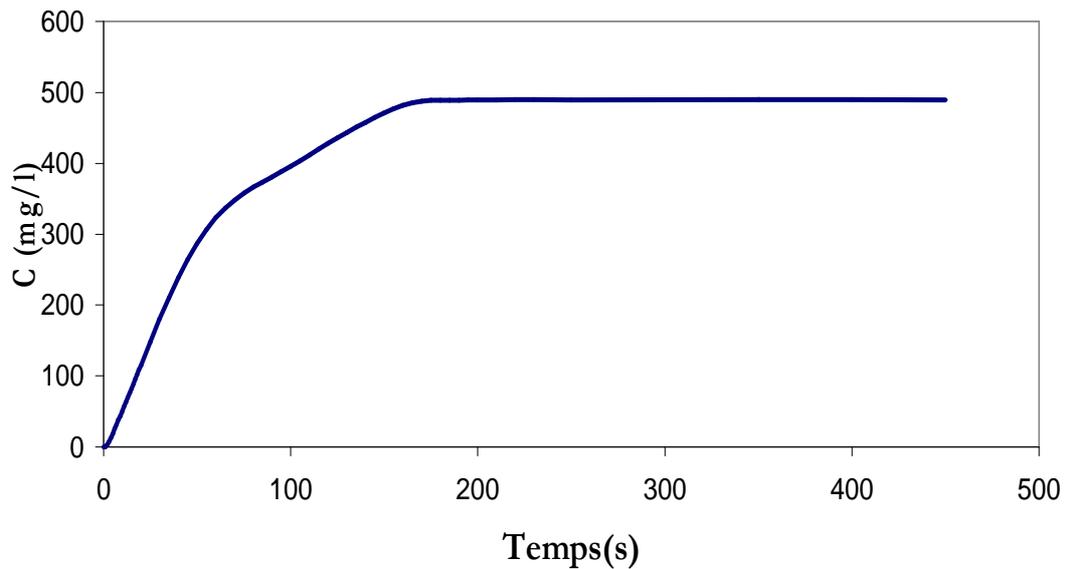


Figure IV- 8 : Variation de la concentration en fonction du temps pour une source continue à $x = 1\text{m}$, $Q = 0,5\text{ l/ s}$, $k_r = 0,013$, $C_0 = 500\text{ mg/l}$

Les deux profils ont presque la même allure.

Dans les deux cas, la variation de la concentration se fait comme suite :

D'abord une montée très rapide s'observe dans le cas du profil obtenu par les données numériques. Sur le profil expérimental, cette montée s'observe aussi, mais elle commence très lentement avant de devenir rapide : c'est la période convective.

La dernière phase se caractérise par une montée très lente, qui devient au file du temps presque constante : c'est la période diffusive.

Nous observons un pic plus important pour le profil obtenu à partir des données numériques. Cela est probablement dû au fait que nous avons utilisé un débit plus important ($Q = 0.5\text{ l/s}$) alors que le débit utilisé pour les données expérimentales est de 0.4 l/s .

Nous remarquons durant le passage du polluant, les concentrations données par le modèle numérique sont supérieures à celles issues des expériences. A ce niveau, nous pouvons dire que pour une source continue, notre modèle surestime les valeurs de la concentration.

IV. Analyse des autres paramètres intervenant dans la résolution numérique de notre problème

Nous venons de valider notre modèle en confrontant résultats numériques et expérimentaux. Nous remarquons que lors des expériences, certains paramètres n'ont pas été pris en compte : c'est le cas du coefficient de réaction du polluant.

Dans ce paragraphe, nous testerons la sensibilité de notre modèle numérique à la variation de ce coefficient de réaction. Nous mettrons en évidence comment le modèle numérique répond aux variations de la concentration initiale. Une analyse de la variation de la pente sera effectuée pour ressortir son influence sur le phénomène de transport de polluants.

4. Effet du coefficient de réaction

Le coefficient de réaction joue un rôle déterminant dans le transport des substances réactives. Il indique le taux avec lequel la substance diminue au cours temps. Sa détermination se fait expérimentalement.

Pour se rendre compte de son influence sur le transport d'un polluant actif, nous avons réalisé plusieurs scénarios en le faisant varier.

La **figure IV-10**, nous montre la variation de la concentration en fonction du temps à une distance $x = 1\text{m}$ à partir du point d'injection pour une source discontinue de concentration $C_0 = 500\text{mg/l}$, avec un débit d'écoulement de 0.4l/s .

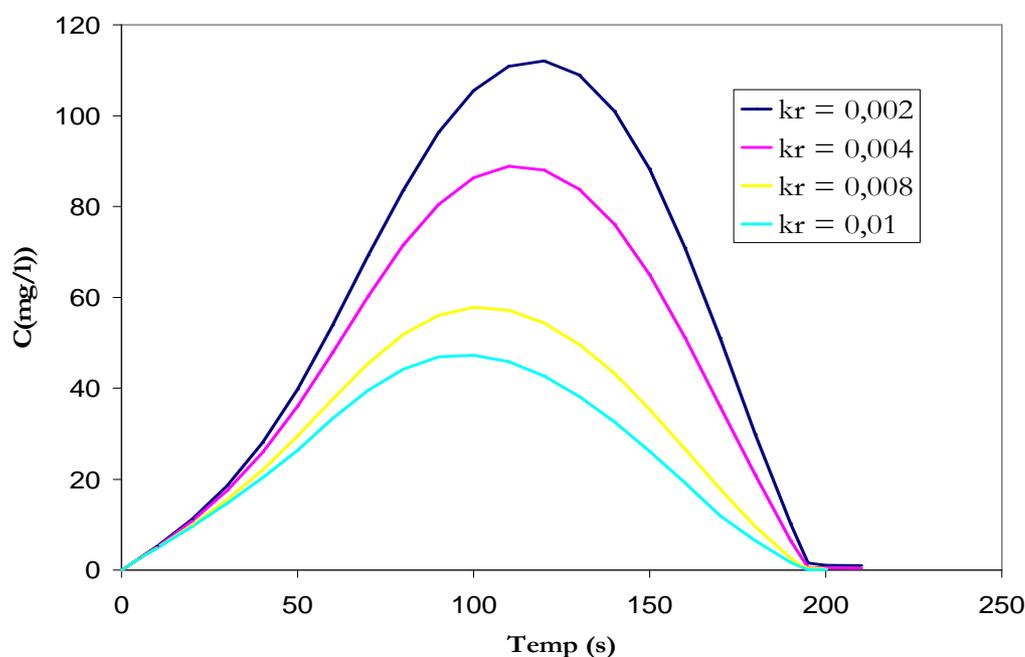


Figure IV-10 : Variation de la concentration en fonction du temps à $x = 1\text{m}$, $Q = 0,4\text{ l/s}$, $C_0 = 500\text{ mg/l}$, $\text{sox} = 0,0001$ pour différents k_r

Bien que les conditions d'écoulement soient les mêmes une faible diminution ou augmentation de k_r entraîne une variation importante de la concentration.

La **figure IV-10**, nous fait ressortir une augmentation importante de la concentration à chaque diminution du coefficient de réaction. Cela est tout à fait logique car ce coefficient indique la vitesse de réaction du polluant. Ainsi plus k_r est important, plus la réaction devient importante, donc la diminution de la concentration devient aussi importante.

5. Effet de la variation de la concentration initiale du polluant

Pour mettre en évidence la réponse de notre modèle numérique à la variation de la concentration, nous avons considéré les mêmes conditions d'écoulement ($Q = 0.4$ l/s) et le même coefficient de réaction. Nous avons considéré l'injection d'une source discontinue de concentration $C_0 = 50$ mg/l, 100 mg/l et 500 mg/l.

Les **figures IV-11 ÷ IV-13** montrent la variation de la concentration en fonction du temps à une distance $x = 1$ m de la zone d'injection pour différentes concentration.

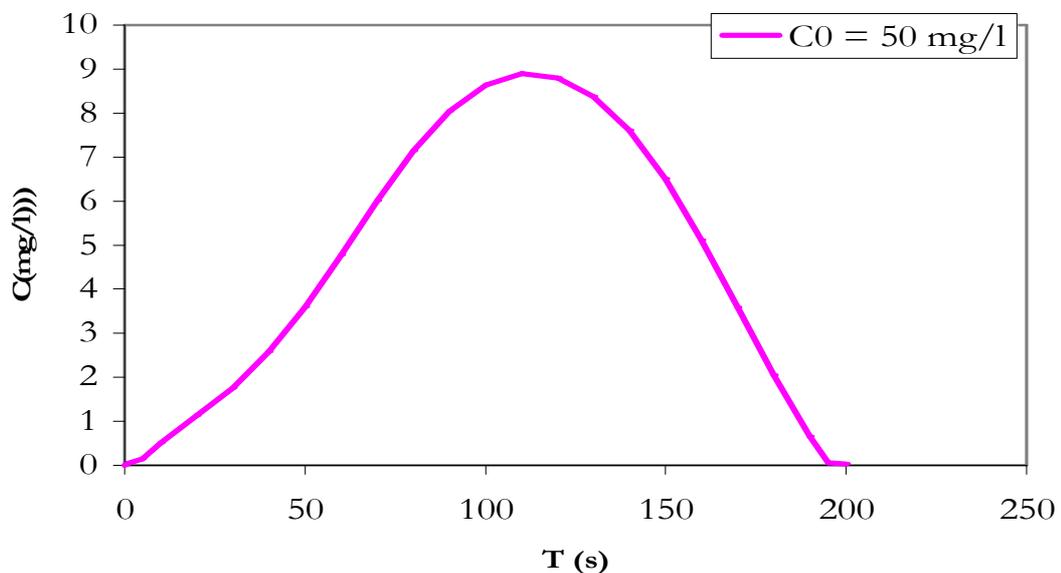


Figure IV-11 : Variation de la concentration en fonction du temps à $x = 1$ m , $Q = 0,4$ l/s , $k_r = 0,004$ pour $C_0 = 50$ mg/l

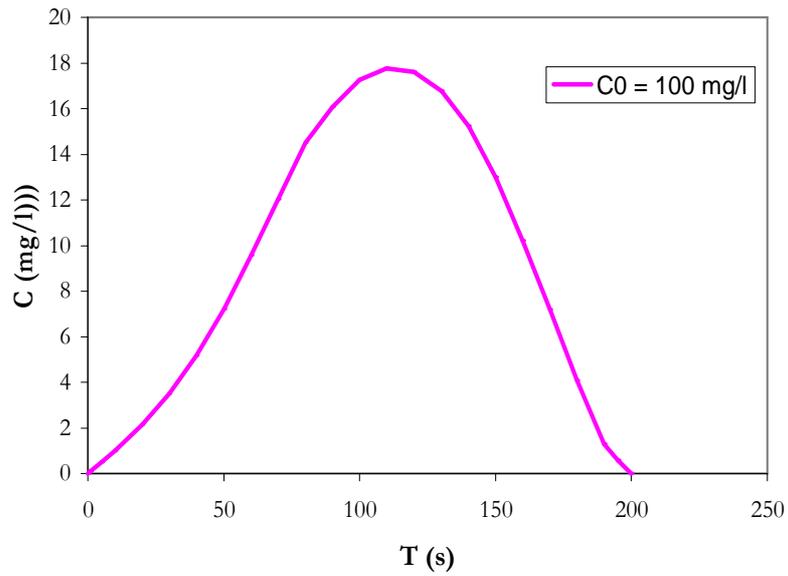


Figure IV- 12 : Variation de la concentration en fonction du temps à $x = 1\text{m}$, $Q = 0,41/\text{s}$, $kr = 0,004$ pour $C_0 = 100$ mg /l

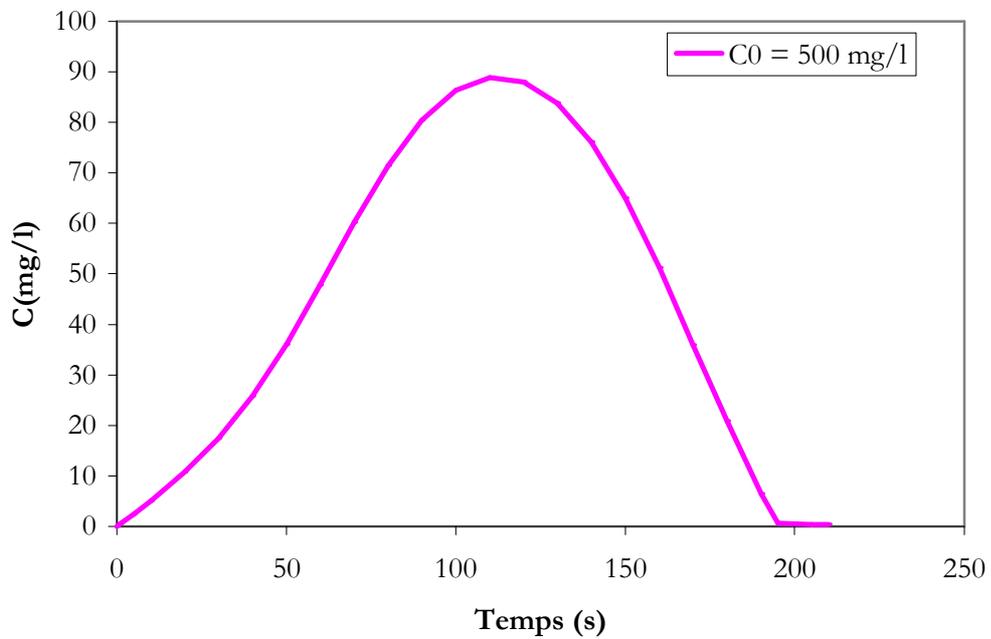


Figure IV-13 : Variation de la concentration en fonction du temps à $x = 1\text{m}$, $kr = 0,004$, $Q = 0,41/\text{s}$, $C_0 = 500$ mg/l

Nous voyons que dans les trois cas, les profils ont rigoureusement les mêmes allures. Aussi, il est logique de constater que plus la concentration injectée est importante, plus les quantités transportées sont importantes.

En définitive, notre modèle répond correctement aux variations de la concentration ; même à faible concentration initiale une courbe de variation de la concentration en fonction du temps en un point donné est obtenue.

6. Effet de la pente

Afin de faire ressortir les capacités de notre modèle à répondre aux variations de la pente, nous avons réalisé des scénarios où nous faisons varier la pente longitudinale du fond du canal. Nous avons considéré la pente transversale nulle.

Sur la **figure IV-14**, nous avons reproduit les profils de la concentration en fonction du temps pour différentes pentes à une distance $x = 1\text{m}$ de la source. La concentration initialement injectée de la source discontinue est de $C_0 = 500\text{mg/l}$ pour un coefficient de réaction de 0.004 . Les conditions d'écoulement sont les mêmes avec un débit de 0.4 l/s .

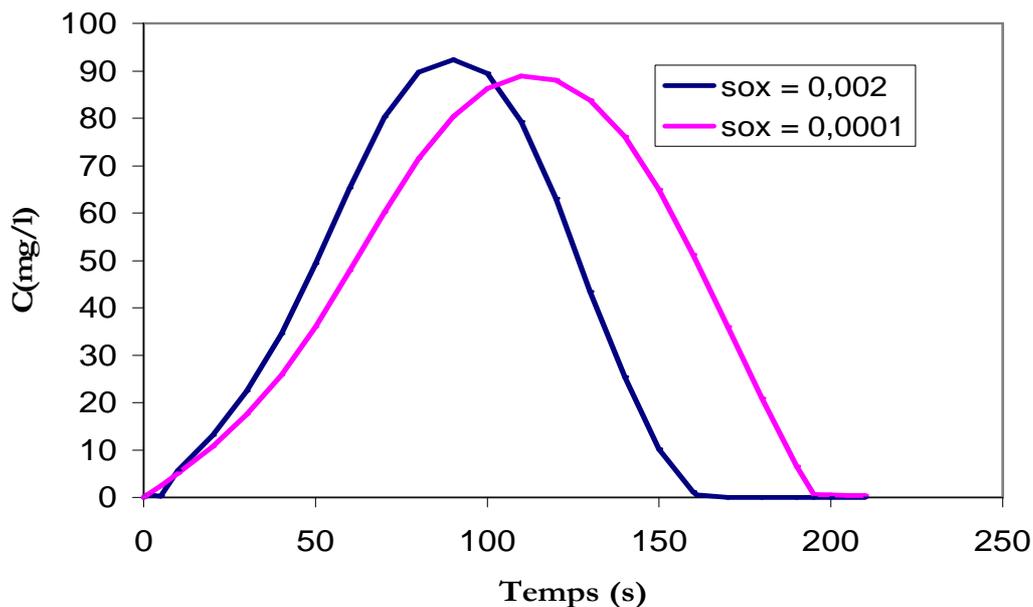


Figure IV - 14 : Variation de la concentration en fonction du temps à $x = 1\text{m}$, $Q = 0,004\text{l/s}$, $C_0 = 500\text{ mg/l}$, $k_r = 0,004$ pour différentes valeurs de la pente

Nous constatons que lorsque la pente augmente, la concentration augmente également. En effet, il est clair qu'une augmentation de la pente entraîne automatiquement une augmentation de la vitesse d'écoulement ; d'autre part, nous savons que lorsque la vitesse

augmente, le transport convectif devient aussi important, ce qui entraîne une augmentation du pic.

Il est aussi logique de constater que le pic obtenu pour la pente élevée soit plus important.

6. Influence du coefficient alpha

Rappelons que lors de la résolution du problème, il fallait déterminer la pression pour pouvoir calculer les différentes inconnues. Pour cela, nous avons utilisé la méthode de la viscosité artificielle qui modifie l'équation de la continuité en y ajoutant un terme de dérivée temporelle de la pression. Seulement, cette méthode fait intervenir un coefficient dont le choix se fait arbitrairement afin de garantir la convergence du système.

Dans ce paragraphe, nous mettrons en évidence l'influence de ce coefficient sur la qualité de résultats obtenus. Pour ce faire, nous réaliserons un certain nombre de scénarios, où nous maintiendrons les mêmes caractéristiques de l'écoulement et où tous les autres paramètres sont maintenus constants. En faisant varier le coefficient alpha (coefficient arbitraire), nous comparons les différents profils de concentration ainsi obtenus afin d'en ressortir l'intervalle de valeurs de alpha qui nous donneront des résultats assez satisfaisants.

Sur la **figure IV-15**, nous avons reproduit les profils de concentration du polluant à une distance $x = 1\text{m}$ à partir de la zone d'injection d'une source discontinue de 500mg/l pour différentes valeurs de alpha. Le débit d'écoulement est de 0.4 l/s le coefficient de réaction ainsi adopté est de 0.004 , la pente de fond du canal s_{0x} est égale à 0.0001 .

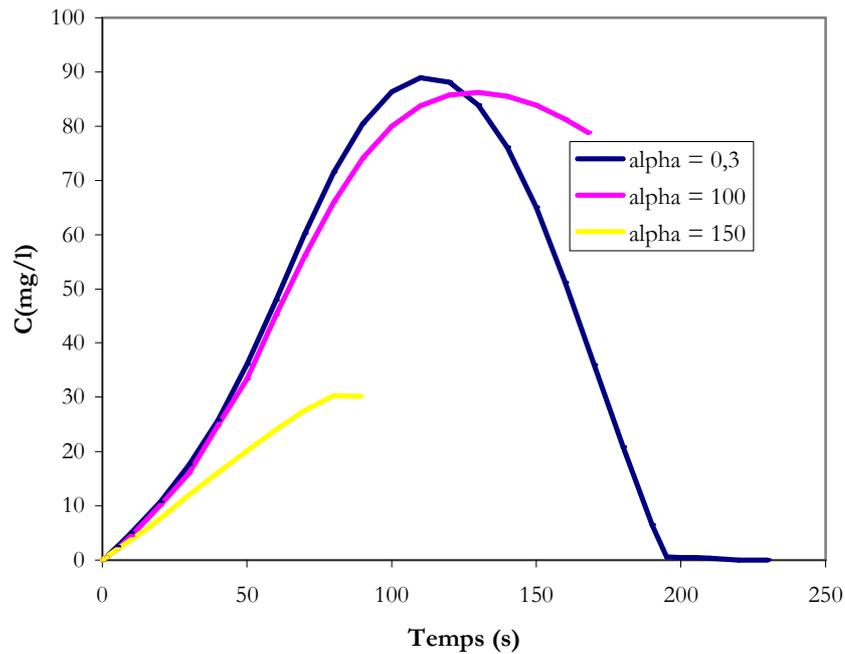


Figure IV-15 : Variation de la concentration à $x = 1\text{m}$, $Q = 0,4\text{ l/s}$, $k_r = 0,004$ pour différentes valeurs de α

L'analyse de la **figure IV-15** fait ressortir une influence considérable du coefficient α sur la qualité des résultats obtenus.

Lorsque α est égal à **0.3**, nous remarquons que notre modèle numérique simule tout le temps de passage de la pollution. Le profil obtenu correspond à ceux décrits dans les paragraphes précédents.

Lorsque **$\alpha = 100$** , nous observons une diminution sensible de la concentration. Le profil est devenu plus large et nous remarquons que le modèle ne simule pas tout le temps de passage du polluant ; seule la phase de la montée est simulée ; une fois que la pointe est atteinte, la simulation s'arrête sans que les valeurs de la concentration dans la phase de la descente ne soient calculées.

Lorsque **$\alpha = 150$** , le profil obtenu révèle une diminution considérable de la concentration. En plus, seule une petite partie de la variation de la concentration en fonction du temps est simulée. Ceci montre l'importance primordiale que joue ce coefficient dans la simulation de la dispersion d'un polluant à partir de notre modèle numérique.

En définitive, l'obtention des résultats de bonnes qualités, passe alors par l'utilisation d'une valeur admissible du coefficient α .

D'une façon générale, lorsque alpha est inférieur à 1, le modèle numérique simule tout le temps de passage du polluant avec une variation sensible du pic. La confrontation des résultats numériques aux résultats expérimentaux, nous a permis de retenir **0.3** comme valeur de alpha pour une utilisation optimale de notre modèle.

Conclusion

Nous venons de valider notre modèle mathématique en confrontant les résultats expérimentaux aux résultats numériques. Les courbes de variation de la concentration en fonction du temps ont à peu près les mêmes allures. Les profils obtenus à partir des données expérimentales montent et descendent plus lentement. L'analyse des différentes courbes de variation relève un pic plus pointu pour les résultats expérimentaux alors que les pics issus des résultats numériques ont une forme arrondie.

D'une manière générale, notre modèle répond correctement aux variations du débit, à l'augmentation de la distance, aux variations de la pente, aux variations du coefficient de réaction.

Enfin l'analyse des différents résultats fait ressortir le rôle prépondérant que joue le coefficient de réaction dans le transport des substances actives. Une simulation numérique de la dispersion de ces substances ne donnera des résultats satisfaisants que lorsque le bon k_r est connu. En ce qui concerne le transport proprement dit, deux phénomènes prépondérants y interviennent : le phénomène de convection et de diffusion turbulente. Donc une modélisation rigoureuse des coefficients de diffusion longitudinale et transversale s'impose.

Conclusion générale

Nous venons d'atteindre notre objectif qui était de réaliser une simulation numérique de la dispersion d'un polluant actif dans un canal par le schéma explicite de Mac Cormack.

Pour ce faire, nous avons d'abord développé un modèle mathématique en s'appuyant sur les équations de Navier Stokes. Ce modèle décrit finement tous les phénomènes prépondérants qui interviennent dans le processus de transport. C'est le cas du phénomène de la turbulence que nous avons rigoureusement pris en compte en compte dans la partie hydrodynamique du problème.

Vu l'importance primordiale jouée par la turbulence dans la dispersion d'un polluant, nous avons utilisé l'approche statistique afin de prendre en compte certains effets engendrés par ce phénomène. Mais seulement cette approche a introduit des inconnues supplémentaires qui nous ont conduit à un problème de fermeture. Pour y remédier, nous avons utilisé le modèle de fermeture $k - \epsilon$.

En ce qui concerne le transport du polluant, nous avons utilisé l'équation d'advection – diffusion en 2D.

La résolution du système d'équation ainsi obtenu exige une approche numérique, d'où l'utilisation du schéma explicite aux différences finies de Mac Cormack. La stabilité de ce schéma a été assurée en utilisant la condition de « Courant – Freidrich –Lewy » (C.F.L) où un nombre de Courant inférieur à 1 est imposé.

L'établissement des profils de vitesse a montré la qualité de réponse de notre modèle hydrodynamique.

La confrontation des résultats numériques aux résultats expérimentaux a révélé des profils de concentrations identiques à quelques différences près.

La sensibilité de notre modèle aux variations de débits, et de la distance a été mise en évidence. L'influence de certains paramètres comme le coefficient de réaction, le coefficient alpha, la pente de fond du canal sur la qualité des résultats obtenus a été également testé.

D'une manière générale, les résultats obtenus sont intéressants. Cependant ces résultats doivent être améliorés en essayant une autre méthode pour la détermination de la pression. A ce niveau, nous suggérons d'utiliser la méthode de Sorin et Temam (méthode de projection) ou encore la méthode de MAC à la place de la méthode de la viscosité artificielle qui fait intervenir un coefficient arbitraire dont son mauvais choix peut porter atteinte à la qualité des résultats obtenus.

Pour minimiser les dégâts en cas de pollution accidentelle dans une rivière, le coefficient de réaction de tous les produits pouvant être source de pollution doivent être rigoureusement déterminés d'avance. En effet quelque soit la performance des modèles utilisés, l'obtention des bons résultats est fortement conditionnée par ce coefficient.

Des études plus poussées doivent être effectuées sur le problème de la dispersion afin d'étendre notre modèle en dimension 3D en tenant compte d'autres paramètres comme la dispersion suivant la hauteur car en réalité, au voisinage de la zone d'injection, le mélange se réalise dans toutes les direction de l'espace.

Des modèles pouvant prendre en charge les écoulements non permanent doivent également mis en places pour une meilleure simulation de la dispersion.

Bibliographie

- Alexandre, C., 2004.** « Simulation des Grandes Echelles d'écoulements turbulents avec transferts de chaleur ». Thèse Doctorat à l'Institut Nationale Polytechnique de Grenoble.
- Bernhard, H. S., 2004.** «Simplification in Longitudinal Transport Modeling: Case of Instantaneous Slug Releases». Journal of Hydrologic Engineering, Volume 9, N°4, pp 319-324.
- Cadot, O., 2006.** « Introduction à la Turbulence ». Polycopié de cours Cours Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées, 74 pages.
- Chassaing, P., 2000.** « Turbulence en mécanique des fluides ». Edition CEPADUES, 625 pages.
- Euvrard, D., 1993.** « Résolution numérique des équations aux dérivées partielles ». Edition Masson.
- Fares, Y. R., 1998.** "Transport of Pollutant Discharges in Reservoir and River Systems". Estuary and river quality, parallel session (parallel 113), 10 pages.
- Ferdi, L. H., 2005.** « Measuring and Modeling Large – Scale Pollutant Dispersion in Surface Waters», Boston MA 02115, 24 pages.
- Frédéric, D. & Henri, P. 2003.** , « Élément d'analyse numérique ». Cours Ecole Nationale Supérieure des Techniques Avancées , 69 pages.
- Garcia, R. & Rene, A.H., 1986.** « Numerical solution of the ST.Venant equations with the MacCormack finite difference scheme ». International Journal for Numerical Methods in Fluids, Volume 6, pp 259-274.
- Graba, M., 2003.** « Simulation de la dispersion de la pollution dans les écoulements à surface libre ». Memoire de magister de l'Université Abderahmane Mira de Bejaia, 92 pages.
- Graf, W. H. & Altinakar, M. S., 1996.** «Hydraulique Fluviale». Presses polytechniques et universitaires romande, Tome II, 378 pages.
- Jabbour, D., 2006.** « Etude expérimentale et modélisation de la dispersion en champs lointain suite à un rejet accidentel d'un polluant miscible dans un cours d'eau. Application à la gestion de crise ». Thèse Doctorat à l'Université de Provence (Aix – Marseille I), 246 pages.
- Jean Michel, H., 2003.** « Hydrodynamique des écoulements à surface libre ». Presse de l'école nationale des Ponts et chaussées, Paris, 309 pages.
- Michael, S. 2006.** « Computational Engineering Introduction to Numerical Meyhodes ». Edition Springer, 326 pages.
- Mohammadi, B. & Pironneau, O., 1994.** « Analysis of the K-Epsilon Turbulence Modèle ». Edition Masson.

Olaf, K., 2002. « Computational Methods in Environment Fluid Mechanics ». Edition Springer, 378 pages

Pierre-Louis, L., 2003. « Modélisation Mathématique ». Presses de l'Ecole Polytechnique, France, 263 pages.

Pierre-Louis, V. & Jean-Paul, C. & Pascal, E. & Dominique, L., 1998. « Mécanique des fluides appliquées ». Presse de l'école nationale de ponts et chaussées.

Rastogi, A. K. & Rodi, W., 1978. « Prediction of Heat and Mass Transfert in Open Channels ». Journal of the Hydraulics Division, Volume 104, N°3, pp 397- 417.

Reggio, M. , « Systemes différentiels ». Polycopié de cours, Ecole Polytechnique de Montréal, 187 pages.

Runkel, R., 1996. « Solution to the Advection – Dispersion Equation : Continuous Load of Finite Duration ». Water Resources Research, Volume 32, pp 409-430.

Schiestel, R., 1993. « Modélisation et simulation des écoulement turbulents ». Edition Hermes, Paris, 442 pages.

Yoo, M. K. & Cho, S. W. & Jun, K. S., 2000. “Unsteady Dispersion of Nonconservative Pollutants in Natural Rivers”. Université de Sungkyunkwan, Corée du Sud.