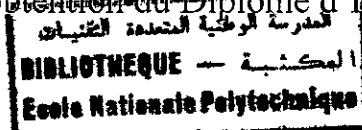


Ecole Nationale Polytechnique
Département : hydraulique.

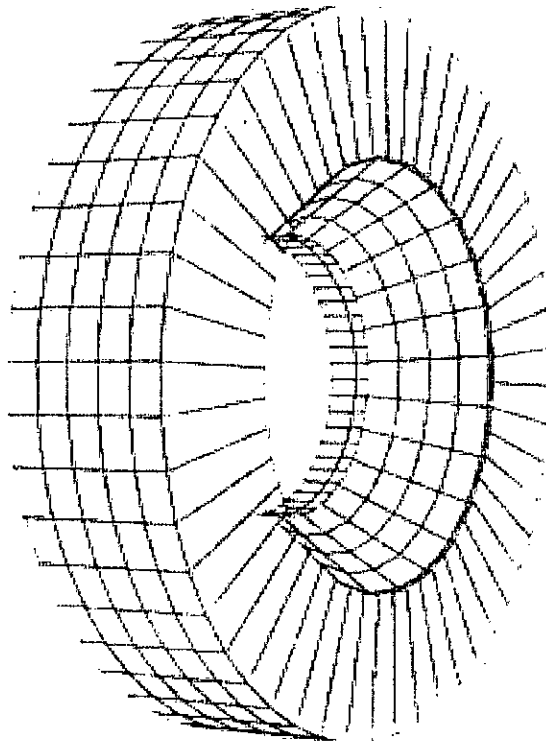
Projet de fin d'études

(En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat)



Étude Numérique de l'Écoulement dans une Conduite Cylindrique Comportant une Singularité.

Application : Diaphragme



Proposé et dirigé par :
M^r A.BILEK
M^r O.BELHADJ

Etudié par :
Mr. Amor MECHKEN

Septembre 2002

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail en signe de respect et de reconnaissance

A ma mère et mon père, à mes frères et mes sœurs

Et à mes ami(e)s

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier :

*Tous les Enseignants et Responsables ayant
contribué à ma formation*

*Et plus particulièrement Mr Bilek et Mr Belhadj
pour leurs conseils durant l'élaboration du présent projet
de fin d'études .*

*Ainsi que toutes les personnes ayant contribué de près
ou de loin à l'élaboration de cette thèse.*

ملخص

لقد قمنا بدراسة التدفق داخل أنابيب أسطوانية بدون حاجز و داخل أنابيب أسطوانية بحاجز. لقد تمت هذه الدراسة باستخدام مجموعة معادلات Navier-Stokes داخل معلم أسطواني. و قد حلت مجموعة المعادلات باستخدام بيان من نوع الفروق الامتائية و باستخدام طريقة النقل الاصطناعي.

Résumé

Nous avons analysé l'écoulement dans des conduites cylindriques sans singularité et dans des conduites comportant un diaphragme à mince paroi. Cette analyse a été faite à partir des équations de Navier-Stokes dans un repère en coordonnées cylindriques, et résolue numériquement par un schéma aux différences finies et par la méthode de compressibilité artificielle.

Abstract :

We analyzed the out-flow in the cylindrical conducts without oddness and in conducts including a diaphragm to thin partition. This analysis has was made numerically from equations of Navier-Stokes in a reference mark in cylindrical, and resolute coordinates by a diagram to the finished differences and by the artificial compressibility method.

MOTS CLEFS :

Conduite cylindrique, singularité, diaphragme, méthode de différence finies, méthode de compressibilité artificielle, équations de continuité et de NAVIER-STOKES.

SOMMAIRE

Introduction	1
CHAPITRE I : Mesures de débit	3
1.1. Les compteurs volumétrique.	4
1.2. Les débitmètres à organe déprimogène	5
1.2.1. Principe de mesure d'un débit par pression différentielle	5
1.2.2. Aperçu théorique	7
1.2.3. Les débitmètres à diaphragme	9
1.2.3.1. Diaphragme mince dans un tube	10
1.2.3.2. Diaphragme à l'extrémité d'un tube.	10
1.2.3. Venturi	14
1.2.4. Débitmètre à tuyère	16
CHAPITRE II : Equations fondamentales	17
II.1. Equation de continuité	18
II.2. Détermination des tensions visqueuses	20
II.3. Equations générales du mouvement d'un liquide réel « Equations de Navier-Stokes	25
II.4. Equations de l'écoulement en coordonnées cylindriques.	28
II.4.1. Equation de continuité	28
II.4.2. Equations de Navier-Stokes	29
CHAPITRE III : Présentation du modèle à étudier	30
III.1. Modèle à étudier	31
III.2. Modèle mathématique	32
III.2.1. Les Hypothèses de base	32
III.2.2. Les équations gouvernantes	32
III.2.3. Les conditions aux limites	33
Pour une conduite sans singularité.	33
Pour une conduite avec un diaphragme	34
III.2.4. Les conditions de symétrie	35
CHAPITRE IV : Modèle numérique pour la résolution des équations de Navier-Stokes	36
IV.1. Choix du maillage	37
IV.2. Méthode de résolution	37
IV.2.1. Méthode de compressibilité artificielle	38
IV.3. Discrétisation des équations	39
IV.3.1. Méthode générale de discrétisation	39
IV.3.2. Discrétisation des équations de Navier-Stokes et de continuité	41
Equations de Navier-Stokes	43
Equation de continuité	44
IV.4. Algorithme de résolution	46

CHAPITRE V : résultats et interprétation

V.1. présentation des résultats	58
V.1.1. Conduite simple sans singularité	59
V.1.1.1. Profils des vitesses	59
V.1.1.2. L'évolution de la pression	71
V.1.2. Conduite cylindrique avec un diaphragme mince	72
V.1.2.1. Profils des vitesses	72
V.1.2.2. L'évolution de la pression	74
Conclusion	81
BIBLIOGRAPHIE	





Introduction

On rassemble généralement sous le vocabulaire «mesures mécaniques» l'examen des moyens et des techniques de mesure des grandeurs qui interviennent dans l'étude du fonctionnement d'une machine. Ces grandeurs sont nombreuses et fort diverses, mais leur importance est extrêmement variable. Certaines n'intéressent que le spécialiste c'est le cas, par exemple des forces ou des accélérations. D'autres au contraire couvrent un très vaste domaine; elles débordent largement le champ des applications mécaniques et elles sont présentes constamment dans les activités quotidiennes. Parmi ces dernières, on peut citer les longueurs, les masses, les volumes, les débits, les vitesses.

Les trois grandeurs qu'on est amené à mesurer dans un écoulement, sont : la pression, la température et la vitesse. Dans le cas des écoulements industriels la vitesse locale n'est pas directement utilisée, elle doit être remplacée par le débit volumique ou massique.

En regard de ce besoin de mesure de débit, le marché du débitmètre industriel offre actuellement un grand nombre de type d'instruments qui, pour les principaux peuvent être classés comme suit [3] :

- débitmètre à turbine compteur.
- débitmètre électromagnétique.
- débitmètre à ultrasons.
- débitmètre à organe déprimogène.

Chacun de ces types de débitmètres a son domaine d'application en fonction du fluide, du besoin en étendue de mesure et en précision.

Les débitmètres à orifice déprimogène sont très largement utilisés dans l'industrie tant pour les liquides que pour les gaz et vapeurs. Ils ont été analysés scientifiquement pour la première fois au début du 17^{ème}, avec Castelli et Torricelli qui établirent que le débit dans un orifice est le produit de sa section par la vitesse d'écoulement du fluide, et varie comme la racine carrée de la chute de pression entre l'amont et l'aval. Bernoulli un siècle plus tard, énonce le théorème qui décrit de façon rigoureuse ce phénomène, alors qu'Henri Pitot avait inventé une sonde permettant la mesure de façon ponctuelle la vitesse d'écoulement d'un fluide, Venturi un peu plus tard, avait décrit le premier instrument de mesure de débit dans une conduite en charge. Avec l'ère industrielle, enfin apparurent les premiers dispositifs normalisés : les plaques à orifice [3].

L'analyse proposée ici, concerne l'étude de l'écoulement dans une conduite cylindrique de section transversale constante munie d'un diaphragme ; et de déterminer les caractéristiques de cette écoulement.

On sait que la technique utilisée et de déterminer le débit en fonction de la différence de pression entre l'amont et l'aval de la construction.

Pour y parvenir nous allons résoudre numériquement le système d'équations différentielles de Navier-Stokes, ce qui va nous permettre de déterminer le débit en fonction de la chute de pression entre l'amont et l'aval de la construction et vis versa.

CHAPITRE I :

Mesure de débit

Les mesures des débits de fluides ont une importance pratique considérable; ce sont elles qui interviennent dans toutes les installations de transport et de distribution d'hydrocarbures liquides, de gaz combustibles, d'eau, etc.

En regard de l'immense diversité des besoins en matière de mesure de débit des fluides, les constructeurs proposent de très nombreux modèles de débitmètres, dont aucun n'est véritablement universel et parmi lesquels il n'est pas toujours aisé de faire le choix optimal.

Aucun de ces modèles n'ayant, par ailleurs réellement atteint la perfection ou l'universalité, le sujet est en constante évolution.

Les appareils utilisés sont fondés sur des principes très divers. Certains sont surtout des instruments de laboratoire (rotamètre à flotteur, débitmètre à fil chaud) adaptés aux mesures de petits débits de quelques millimètres-cubes à quelques centimètres-cubes par seconde. Les débitmètres les plus communément employés sont les suivants :

I.1. Les compteurs volumétriques :

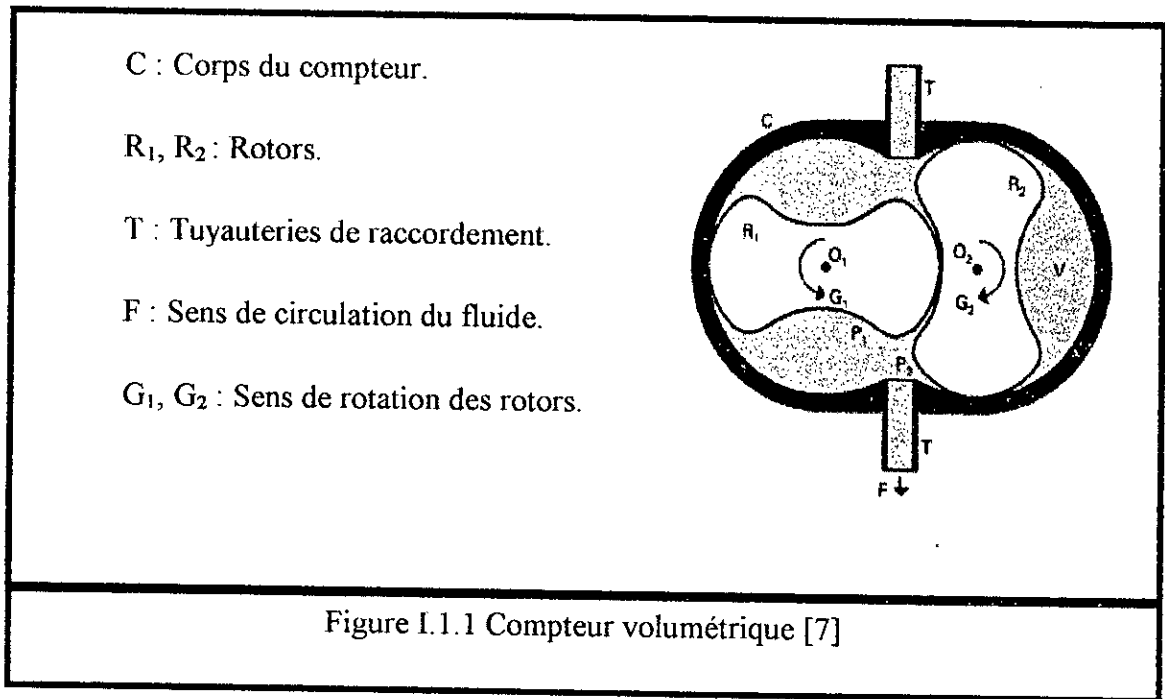
Ils présentent par rapport aux autres débitmètres l'avantage de permettre une totalisation aisée des quantités de fluide qui les traversent. On les utilise donc essentiellement pour les comptages de consommation de fluide (eau, gaz, fuel etc.).

Leur principe de fonctionnement est sous l'effet de la différence de pression entre l'amont et l'aval du compteur, les rotors tourne autour des axes O1 et O2 (Figure I.1.1) ; leur rotation est synchronisée par un engrenage extérieur. Le volume de fluide 'V' enfermé entre un lobe et le corps est transféré de l'entrée vers la sortie. Si 'ω' est la vitesse de rotation, le débit est :

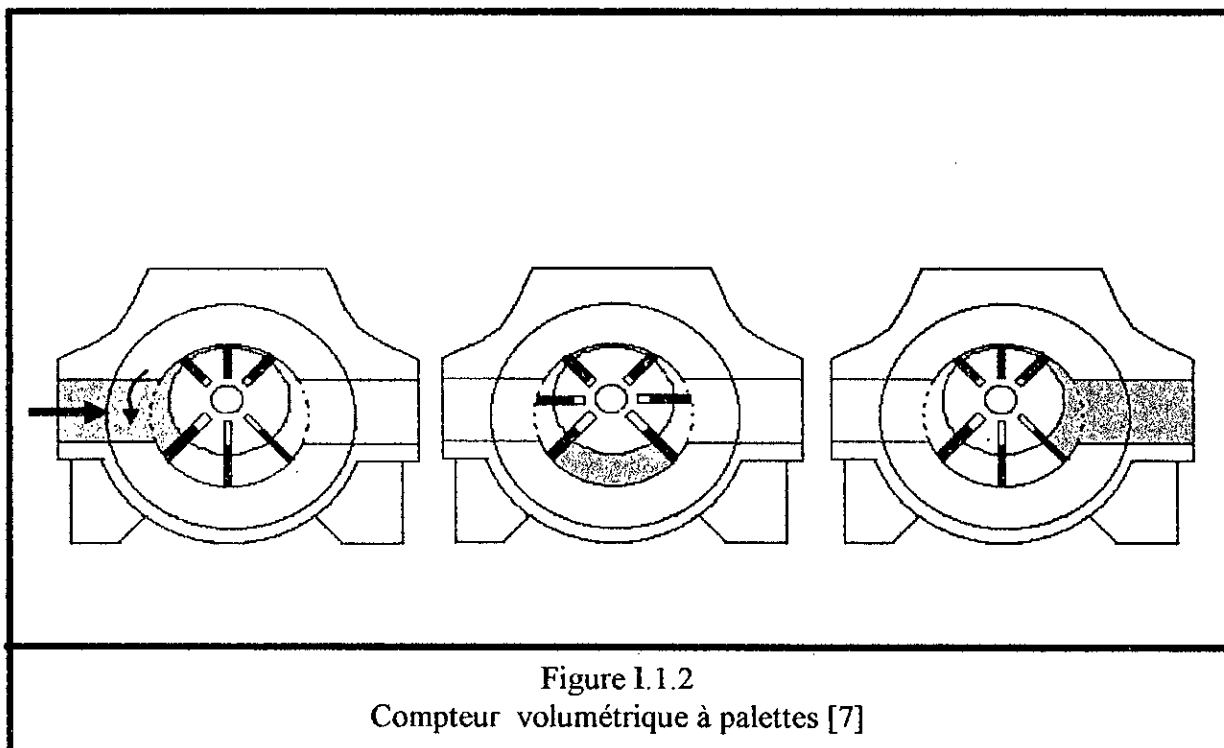
$$Q = 4V\omega \tag{I.1}$$

Et après 'n' tours, la quantité de fluide débitée est :

$$V = 4Vn \tag{I.2}$$



Pour les liquides, on peut utiliser des pompes volumétriques à palette ou à roues ovales fonctionnant en compteurs (Figure I.1.2) les compteurs à roues ovales conviennent particulièrement aux fluides corrosifs sous pression et à températures élevées [7]



I.2. Les débitmètres à organe déprimogènes :

I.2.1. Principe de mesure d'un débit par pression différentielle :

La figure (1.2.1) schématise l'écoulement d'un fluide dans une conduite fermée cylindrique et de section constante, au passage d'un diaphragme sans épaisseur percé d'un orifice de section circulaire, centré.

A débit constant dans une conduite complètement remplie (en charge), chacune des sections droite 1, 2 et 3 est traversée en des temps égaux par des masses égales de matière ; la vitesse d'écoulement est donc plus élevée en 2 qu'en 1 de sorte que l'énergie cinétique du fluide s'accroît localement à la traversée de l'étranglement. L'évolution de la pression est également schématisée par le bar graphe figuré au-dessus de la conduite. Il est à noter que ce n'est pas à l'endroit de la construction que la veine fluide active est la plus étroite mais un peu en aval, dans le plan dit « **Vena Contracta** » qui correspond à la section 2, figure (1.2.1) [3].

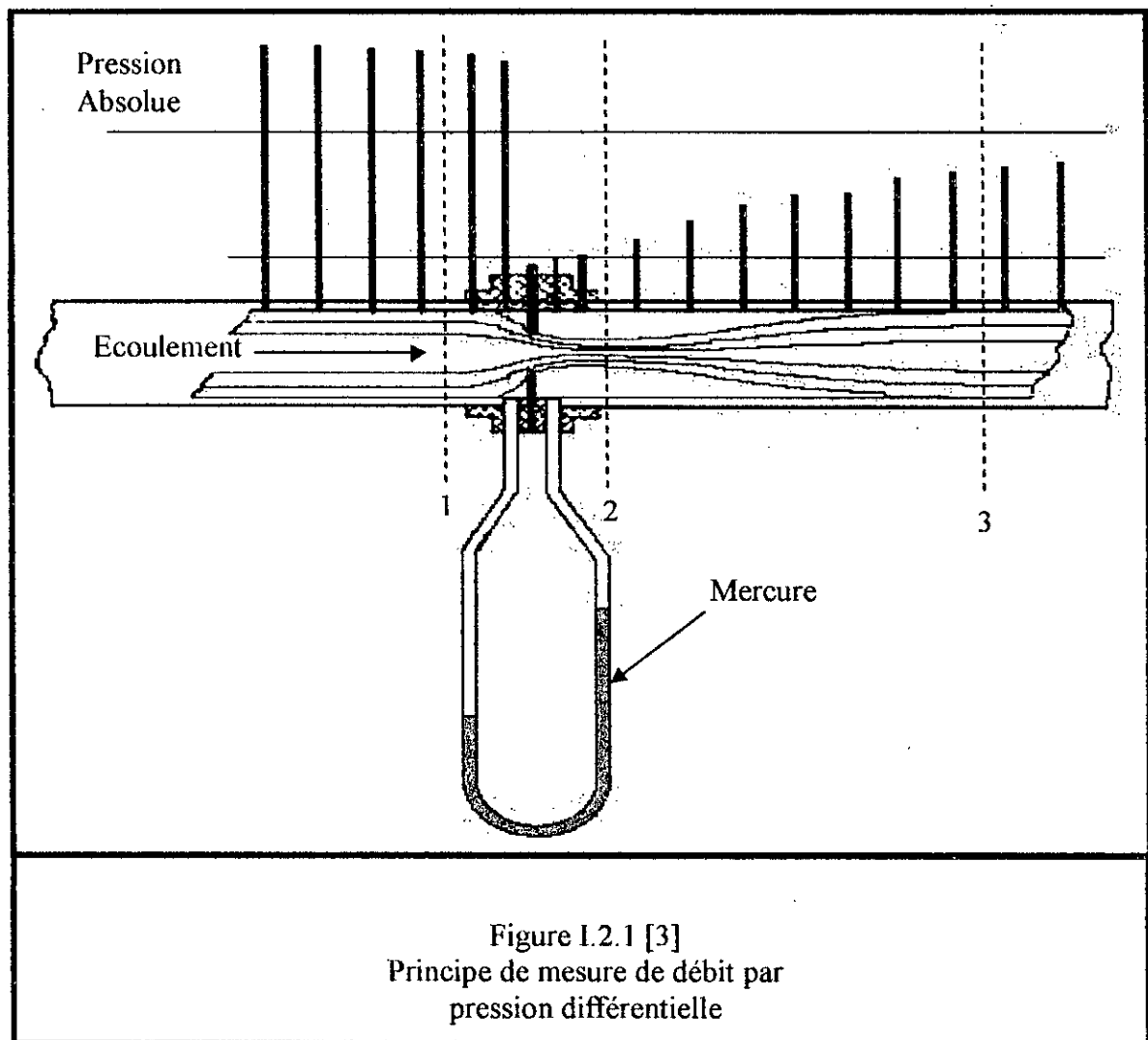


Figure I.2.1 [3]
Principe de mesure de débit par
pression différentielle

La chute de pression statique à la traversée de la construction (organe déprimogènes) entraîne une diminution temporaire de la densité du fluide, très généralement négligeable pour les liquides, mais non pour les gaz, ce qui accroît encore leur vitesse et leur énergie cinétique. Par ailleurs le fluide en aval de l'étranglement, retrouve nécessairement la vitesse qu'il avait en amont puisque le bilan-matière est nul. En ce qui concerne le bilan énergétique interne du fluide en amont, l'énergie est perdue par frottement à la traversée de la construction, et c'est l'énergie de la pression qui en assure la compensation : la pression en amont (section 1) n'est pas entièrement restaurée au niveau de la section 3.

C'est la différence de pression entre l'amont (section 1 figure I.2.1) et l'aval immédiat de la construction (au voisinage de la section 2) qui est exploitée pour mesurer le débit dans la conduite [3].

Différents modèles de débitmètres ont été construits et normalisés dans ce sens, tel que : diaphragme, venturis, tuyères.

Ces normes spécifient les dimensions de l'organe déprimogène, la position des prises de pression, les contrôles à effectuer lors de la fabrication ainsi que les conditions amont et aval à respecter pour qu'une précision de l'ordre de 1 à 2% puisse être garantie[3].

I.2.2. Aperçu théorique :

On considère comme incompressible un fluide dont la masse volumique ne varie pas de façon sensible sous l'effet de la dépression mise en œuvre pour mesurer son débit.

L'application du théorème de Bernoulli entre les sections 1 et 2 (figure I.2.1) permet d'obtenir une relation idéale entre le débit et la différence de pression créée par une contraction de l'écoulement :

$$Q = C \times a \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2}} \times \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} \quad I.3$$

V_1 étant la vitesse de l'écoulement à la section de la conduite à l'endroit de la prise de pression P_1 (section 1 figure I.2.1).

V_2 étant la vitesse de l'écoulement à la section contractée de la conduite (section 2 figure I.2.1).

a étant l'aire de l'orifice.

Le terme C est le **coefficient de décharge**.

La quantité :

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V_1^2}{V_2^2}}}$$

est le **coefficient de vitesse d'approche**, plus généralement exprimé par la formule $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^4}}$, dans la quelle β est le **rapport d'ouverture**, appelé aussi le rapport des diamètres (diameter ratio). Ce rapport d'ouverture est le quotient du diamètre de l'orifice sur le diamètre de la canalisation. On voit que ce coefficient exprime en réalité l'effet de la géométrie de la contraction de la veine fluide [3].

Notons encore que l'on appelle coefficient de débit α le produit du coefficient de décharge C et du coefficient de la vitesse d'approche E.

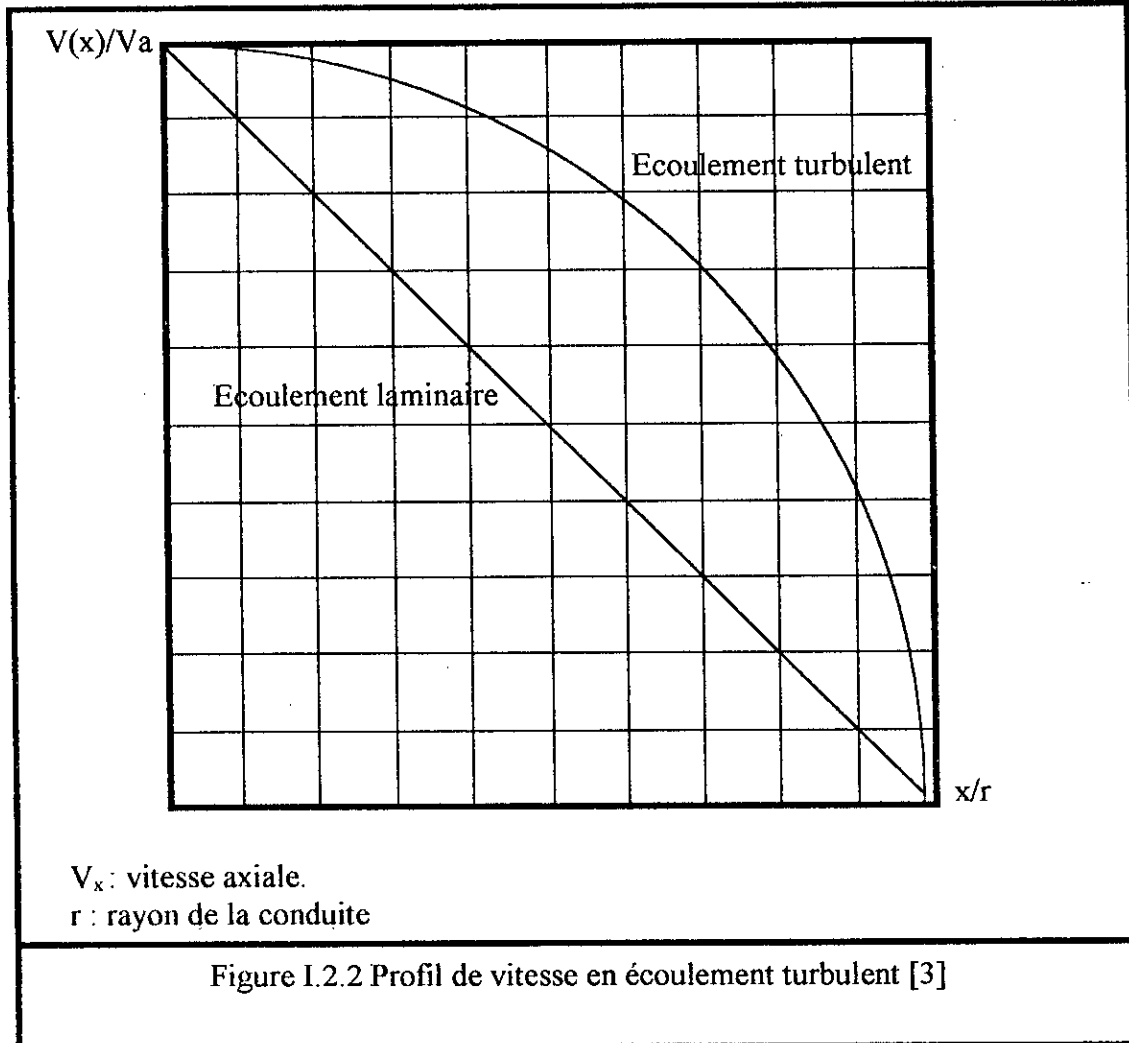
L'un des points forts de l'équation (I.3) réside dans le fait que le coefficient C ne varie que très peu avec le diamètre de la canalisation. Il n'est pas influencé par le rapport des diamètres β qui définit le système du point de vue géométrique. Mais celui-ci (β) doit être analysé du point de vue dynamique. On considère à cet effet un second paramètre qui est le nombre de Reynolds [3], habituellement en unités SI comme suit :

$$R_{ed} = \frac{U_1 D}{\nu} \tag{I.4}$$

relation dans laquelle U_1 , est la vitesse moyenne de l'écoulement en amont de la construction et « ν » la viscosité cinématique du fluide. Le nombre de Reynolds exprime le rapport des forces d'inertie aux forces de frottement, au sein du fluide. La symbolique R_{ed} indique que le calcul est fait avec la vitesse moyenne dans la conduite et la valeur D de son diamètre, plutôt qu'avec ces même quantités à la traversée de la construction, auquel cas on utiliserait le symbole R_{cd} .

Lorsque le nombre de Reynolds est faible, l'écoulement est dit laminaire ; il devient turbulent lorsque ce nombre croît ; la frontière étant habituellement fixée vers $R_e=2\ 000$. Un exemple de profil de vitesse en écoulement turbulent est donné par la figure (I.2.2) ; on voit que ce profil est pratiquement parabolique sur 90% du rayon à partir de l'axe, on remarque que la vitesse des filets liquides varie peu. Le profil rejoint ensuite très rapidement le point de vitesse zéro, sur la paroi. Dans un tel type d'écoulement la vitesse moyenne sur une section est inférieure à 80% de la vitesse axiale, et c'est dans ces conditions que l'on doit utiliser la plupart des appareils déprimogènes. En écoulement

laminaire le profil est purement parabolique, et la courbe représentative tend vers la diagonale (1-1) de la figure (I.2.2), dessinée en pointillés. Seuls les quelques orifices conçus pour des faibles valeurs de Re_D seront alors utilisables [3].



Remarques :

La formule (I.3) est valable pour les fluides incompressibles et peut être modifiée par un coefficient multiplicatif de compressibilité pour les mesures de débit de gaz.

Les diverses valeurs du coefficient de décharge C des divers éléments primaires (normalisés) ont été déterminées par expérimentation sur banc d'essai, pour chaque type d'élément [3]

I.2.3. Les débitmètres à diaphragme :

Les diaphragmes sont des plaques métalliques à orifice, qui engendrent une diminution locale de la pression d'écoulement (perte de charge locale).

On peut classer les diaphragmes selon leurs emplacements en deux types :

1.2.3.1. Diaphragme mince dans un tube :

Un diaphragme à bord mince (biseauté) obture partiellement un tube de diamètre 'D' (Figure I.3.1.1). L'écoulement est étranglé et on observe une contraction de la veine liquide puis un élargissement jusqu'au recollement de à la paroi. La perte de charge est exactement du même type que celle du rétrécissement brusque [3].

$$\Delta h = j \frac{U^2}{2g}$$

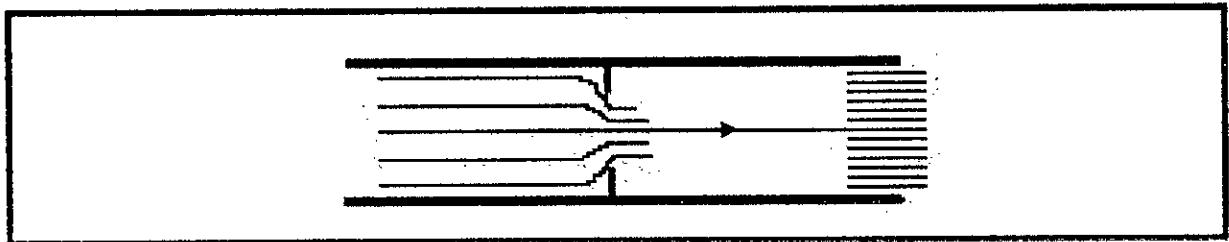
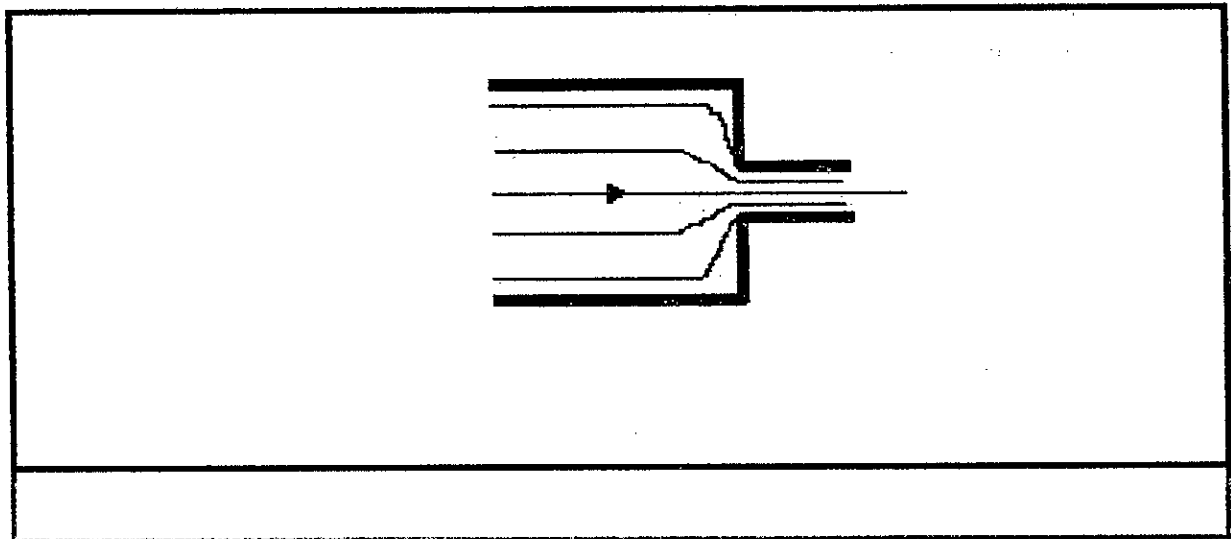


Figure I.3.1.1 Diaphragme mince dans tube [3]

1.2.3.2. Diaphragme à l'extrémité d'un tube :

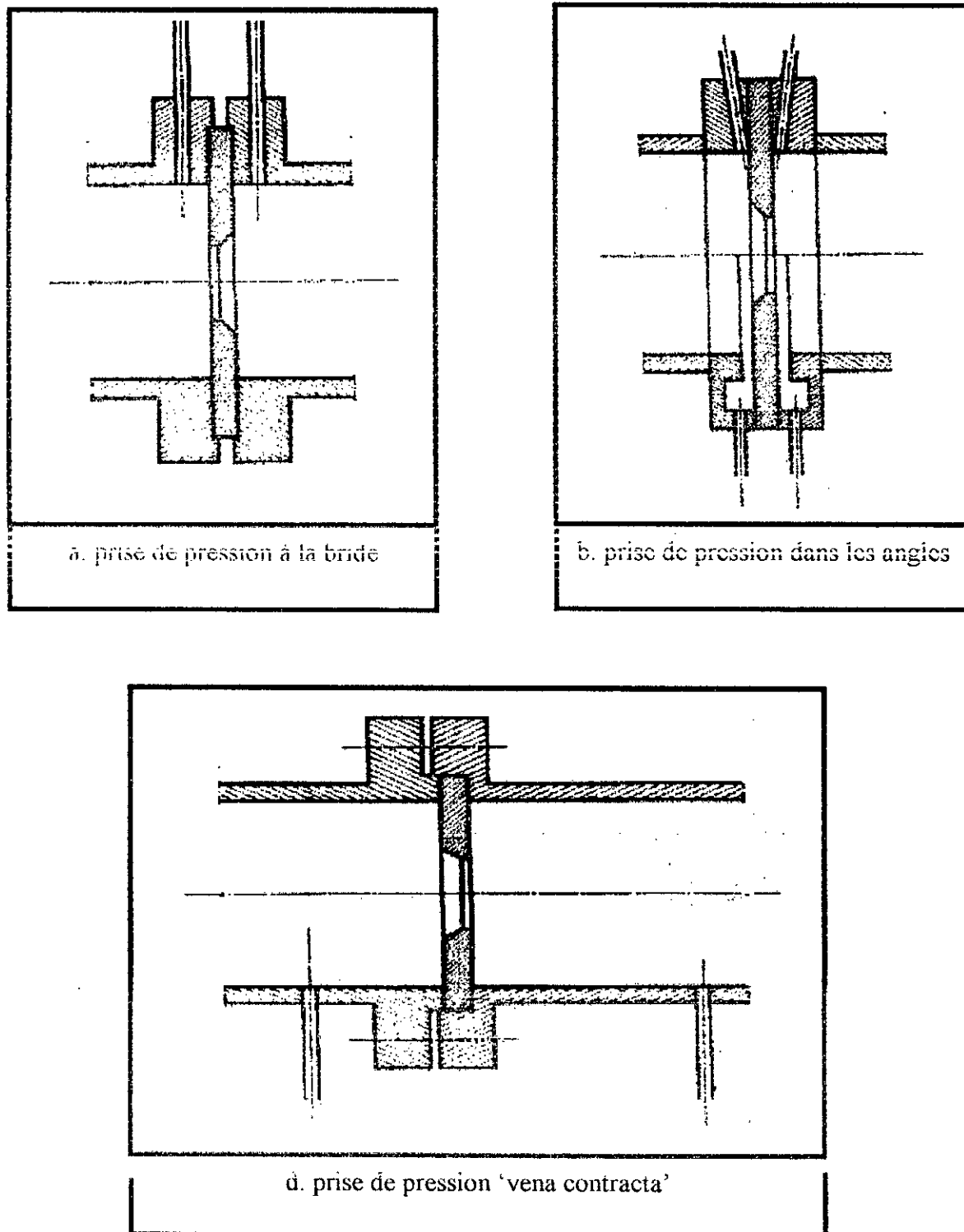
On est dans le cas d'un fluide débouchant dans un grand réservoir par un orifice restreint. Il y a comme précédemment, contraction de la veine en aval du diaphragme [3].



Dans notre étude nous ne considérerons que les diaphragmes mince placés dans une conduite cylindrique.

Il existe trois types de diaphragmes normalisés qui diffèrent par la position des prises de pression (figure 1.2.1).

Figure 1.3.2.1 diaphragme en mince paroi [7].



La relation donnant le coefficient de débit de ces diaphragmes sont plus au moins complexes et font intervenir différents paramètres comme par exemple la rugosité des parois dans le cas du diaphragme à prise de pression dans les angles [7]. En réalité les différences sont faibles, voire inférieures à 1% dans les conditions habituelles d'utilisation.

La formule de débit est :

$$Q = \alpha \varepsilon j \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 \frac{\Delta P}{\rho}} \quad 1.5$$

Avec les notations suivantes :

$\alpha = CE$: Coefficient de débit.

d : diamètre de l'orifice.

j : Coefficient de correction, (dépend de la rugosité des parois et du nombre de Reynolds).

ε : Coefficient de détente, dépend du rapport des diamètres, du rapport des pressions et de la nature du fluide.

Le coefficient 'j' n'intervient que pour les diaphragmes à prise de pression dans les angles. Ces divers facteurs sont donnés sous forme de tables, de graphiques ou de formule [7].

Le diaphragme « Vena Contracta » [7] est de construction plus simple que les diaphragmes à prise de pression dans les angles. Il comporte une chambre de tranquillisation mais il a un inconvénient : la prise de pression en aval est placée à une distance qui dépend du coefficient β .

Tableau I.1

Position de la prise de pression aval en fonction du rapport des diamètres [7]

β	Position de la prise de pression aval
0,1	0,84 D ± 30%
0,2	0,80 D ± 30%
0,3	0,76 D ± 30%
0,4	0,70 D ± 30%
0,5	0,63 D ± 30%
0,6	0,55 D ± 30%
0,7	0,45 D ± 30%
0,8	0,34 D ± 30%

Le coefficient total de débit du diaphragme à prise de pression Vena Contracta est donné par la relation :

$$\alpha = A + B \sqrt{\frac{10^6}{R_{ed}}} \tag{I.7}$$

$$\text{Ou : } A = 0,5922 + 0,4252 \left[\frac{0,3871 \times 10^{-3}}{1000D^2 \beta^2 + 0,254D} + \beta^4 + 1,25\beta^{16} \right]$$

$$\text{Et : } B = 0,25 \times 10^{-3} + 2,325 \times 10^{-3} \left[\beta + 1,75\beta^4 + 10\beta^{12} + 78,74D\beta^{16} \right]$$

D est exprimé par mètre.

R_{ed} est le nombre de Reynolds calculé dans la conduite à l'amont du diaphragme.

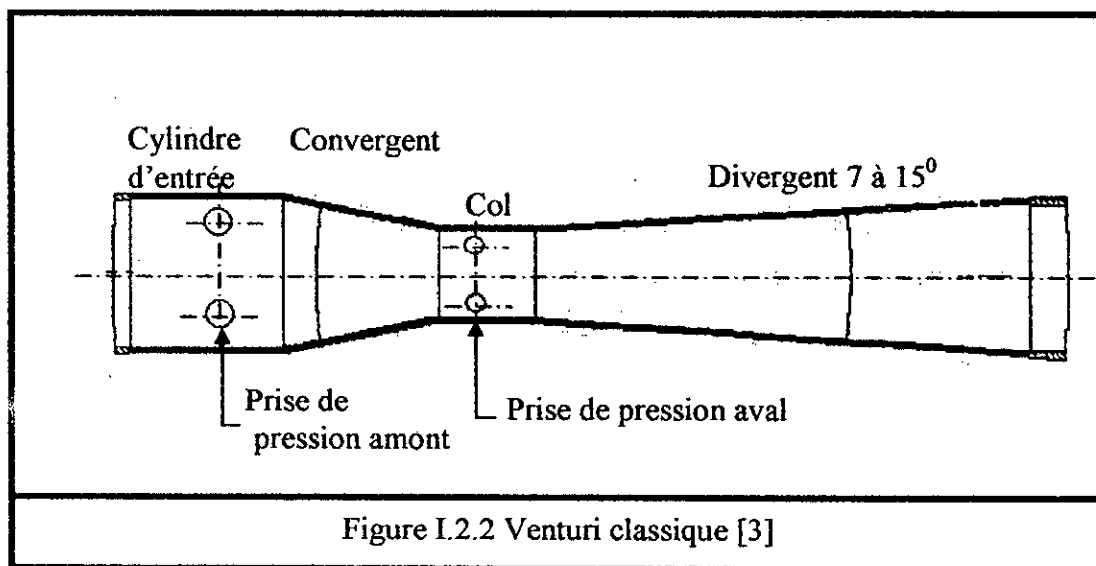
Ces valeurs ont été déterminées à partir d'expériences effectuées dans des tuyauteries en acier en bon état (rugosité relative 0,001) de diamètre compris entre 0,05 et 0,76 m et pour des valeurs de β comprises entre 0,1 et 0,8[7].

I.2.3. venturi :

Le phénomène de variation de pression dans les dispositifs convergents-divergents a été utilisé par l'ingénieur Clemens Herschell dans le débitmètre dit ' VENTURI ' pour mesurer le débit d'une canalisation en charge.

Le 'VENTURI' présente l'avantage d'une perte de charge résiduelle plus faible que celle d'un diaphragme mais il nécessite un espace plus important. Il se présente comme suit :

Sur un tronçon horizontal d'une canalisation (figure I.2.2) on monte un convergent suivi d'une courte longueur cylindrique appelée le col du Venturi et terminé par un divergent d'une longueur suffisante pour éviter les décollements (angle au sommet du cône divergent de l'ordre de 7° à 15°) [4].



Les relations permettant le calcul du débit ont la même forme que pour les diaphragmes. Le coefficient total de débit pour le Venturi classique (figure I.2.2) est calculé d'après les indications du tableau ci-dessous donnant α_0 et en fonction de β [7].

$$\alpha = \alpha_0 \sqrt{\frac{1}{(1 - \beta^4) + 0.9375 \left(\frac{1}{\alpha_0^2} - 1 \right)}} \quad \text{I.8}$$

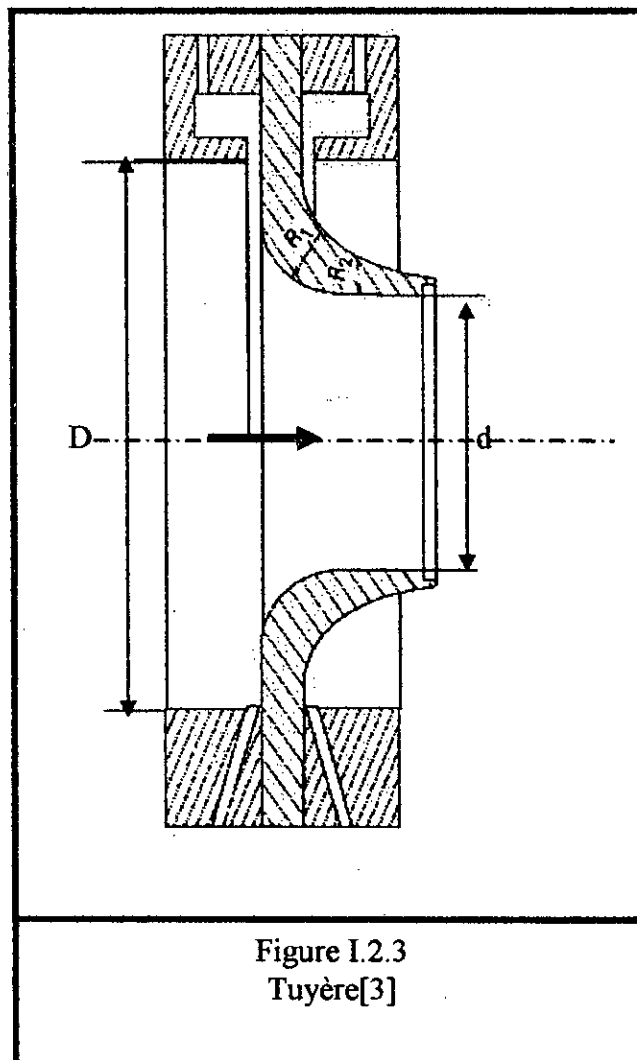
Tableau I.2 [7]

Coefficient de débit du venturi classique en fonction du diamètre et le nombre de Reynolds

D (mm)	Re _D	α_0	D (mm)	Re _D	α_0
25,5	2 000	0,909	203	70 000	0,981
	5 000	0,939		100 000	0,982
	10 000	0,952		>200 000	0,984
	50 000	0,972			
	>100 000	0,977			
51			381	100 000	0,983
				200 000	0,986
	30 000	0,970		>300 000	0,987
	50 000	0,975			
102	>100 000	0,980	762	200 000	0,986
				>400 000	0,988
	50 000	0,977			
	100 000	0,981	1 270	>500 000	0,989
	>200 000	0,983	2 540	>1 000 000	0,990

I.2.4. Débitmètre à tuyère :

Les tuyères (Figure I.2.3) ont été conçues pour donner des mesures acceptables de débits sur des fluides visqueux ou en charge, pour lesquels le diaphragme normalisé n'est pas utilisable. Elles présentent une perte de charge résiduelle plus faible que le diaphragme ou le venturi à cause de leurs formes qui moulent plus ou moins bien la veine-fluide en s'efforçant de suivre la configuration naturelle des lignes d'écoulement, tout en restant relativement faciles à la réalisation [3].



Les relations permettant le calcul du débit ont la même forme que pour les diaphragmes. Le coefficient total de débit pour les tuyères (figure I.2.3) est pratiquement le même que pour le venturi (équation I.8 tableau I.2) [7]

CHAPITRE II:**Equations Fondamentales**

La description analytique de l'écoulement d'un fluide s'appuie sur la traduction des lois physiques relatives à l'écoulement dans une forme mathématique adéquate. Dans notre étude on utilisera deux de ces lois (principes) physiques fondamentales, qui à l'exception des phénomènes relativistes, sont applicables à n'importe quel écoulement indépendamment de la nature du fluide considéré. Ces lois sont :

1. le principe de conservation de la masse, qui stipule la loi de continuité.
2. la loi fondamentale de la dynamique, appelée aussi seconde loi de NEWTON, dont l'équation mathématique traduit le théorème de la quantité de mouvement.

Ces équations de conservation peuvent s'exprimer aussi bien sous forme intégrale, lorsqu'elles sont appliquées à un volume de contrôle macroscopique, ou sous forme différentielle, quand le volume de contrôle est une particule fluide élémentaire.

Dans le premier cas, l'analyse s'intéresse uniquement aux quantités globales de matière, et de quantité de mouvement transitant par la surface de contrôle et aux variations totales de ces quantités au sein du volume de contrôle.

Dans le deuxième cas, l'analyse permet d'obtenir des informations sur les propriétés du fluide en chaque point du domaine d'écoulement, permettant ainsi une meilleure compréhension des mécanismes de transfert au sein du fluide. Une telle analyse permet d'établir la distribution des vitesses et des pressions à travers un domaine quelconque du champ de l'écoulement. Nous allons donc dans ce qui suit, présenter les équations de conservation dans leurs forme différentielle.

II.1. Equation de continuité :

II.1.1. Bilan de masse pour un volume de contrôle :

Soit un milieu fluide continu (ne comportant pas de trous d'air) sans source ni puits. [5]. Considérons le parallélépipède fixe élémentaire dx_1, dx_2, dx_3 , représenté sur la figure (II.1.1.a)

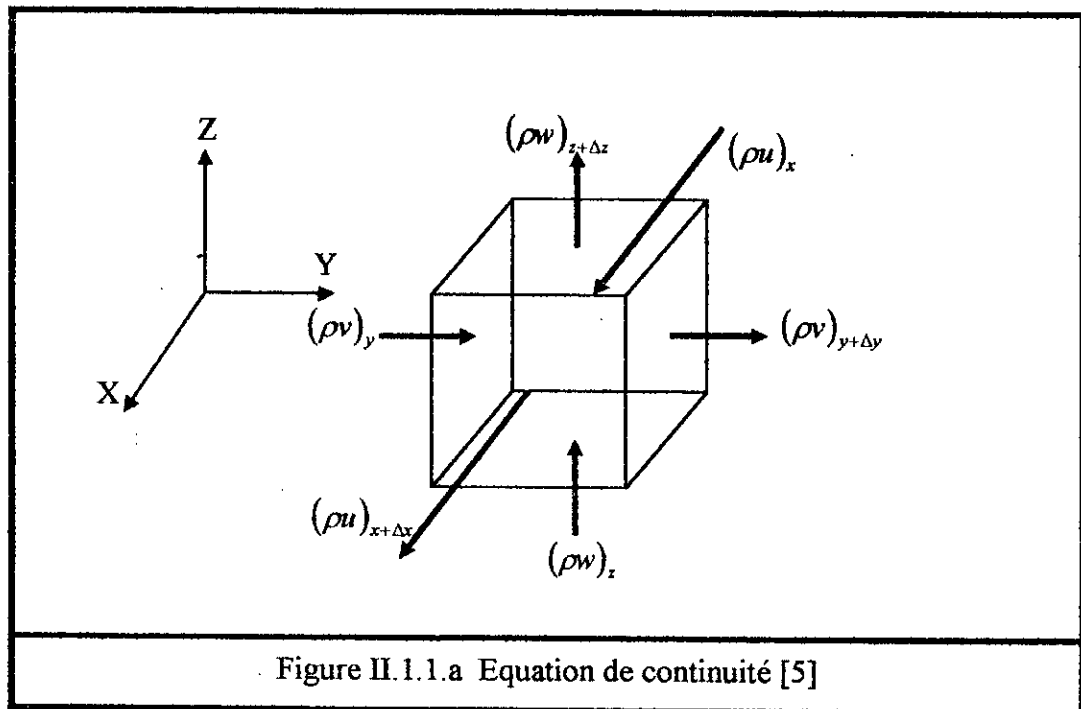
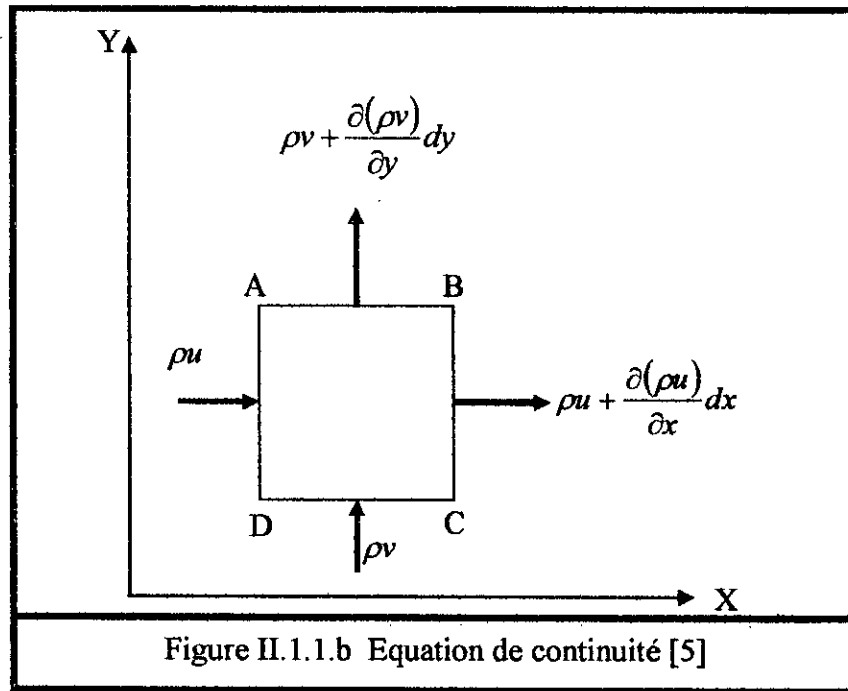


Figure II.1.1.a Equation de continuité [5]

Projetons ce volume de contrôle sur le plan (X,Y) (Figure 2.1.1.b). Et nous développons les relations $(\rho u)_{x+\Delta x}$, $(\rho v)_{y+\Delta y}$, et $(\rho w)_{z+\Delta z}$ en série de Taylor et nous ne conservons que les premiers termes.



Le volume du liquide qui entre par la face AD pendant le temps dt est :

$$u dy dz dt$$

La masse correspondante est :

$$\rho u dy dz dt$$

De même, la masse qui sort par la face BC est :

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy dz dt$$

Le parallélépipède perd, pour ces deux faces, la différence entre la masse sortante et la masse entrante, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt$$

On peut faire le même calcul pour les autres directions et, pour l'ensemble des six faces. La masse perdue est :

$$dm = \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

La masse que contient le parallélépipède à l'instant t est : $\rho dx dy dz$

Sa diminution est : $dm = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz$

En égalant les deux dernières expressions, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

dite équation de continuité, que l'on peut encore écrire sous cette forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} \tag{II.1}$$

Et compte-tenu de la dérivée particulaire :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho \quad \text{Et de} \quad \vec{\nabla} \rho \vec{V} = \rho \vec{\nabla} \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho$$

on obtient :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{II.2}$$

II.2. Détermination des tensions visqueuses :

Considérons un point M(x,y,z) du fluide dans un parallélépipède infiniment petit dont les arêtes dx, dy, dz sont parallèles aux axes ; soient u, v, w, les composantes de la vitesse \vec{V} du fluide au point M (figure 2.2.1) [4].

La tension s'exerçant sur un élément de surface dS de centre M sera entièrement déterminée si on connaît les tensions s'exerçant sur les trois faces du parallélépipède dx dy dz.

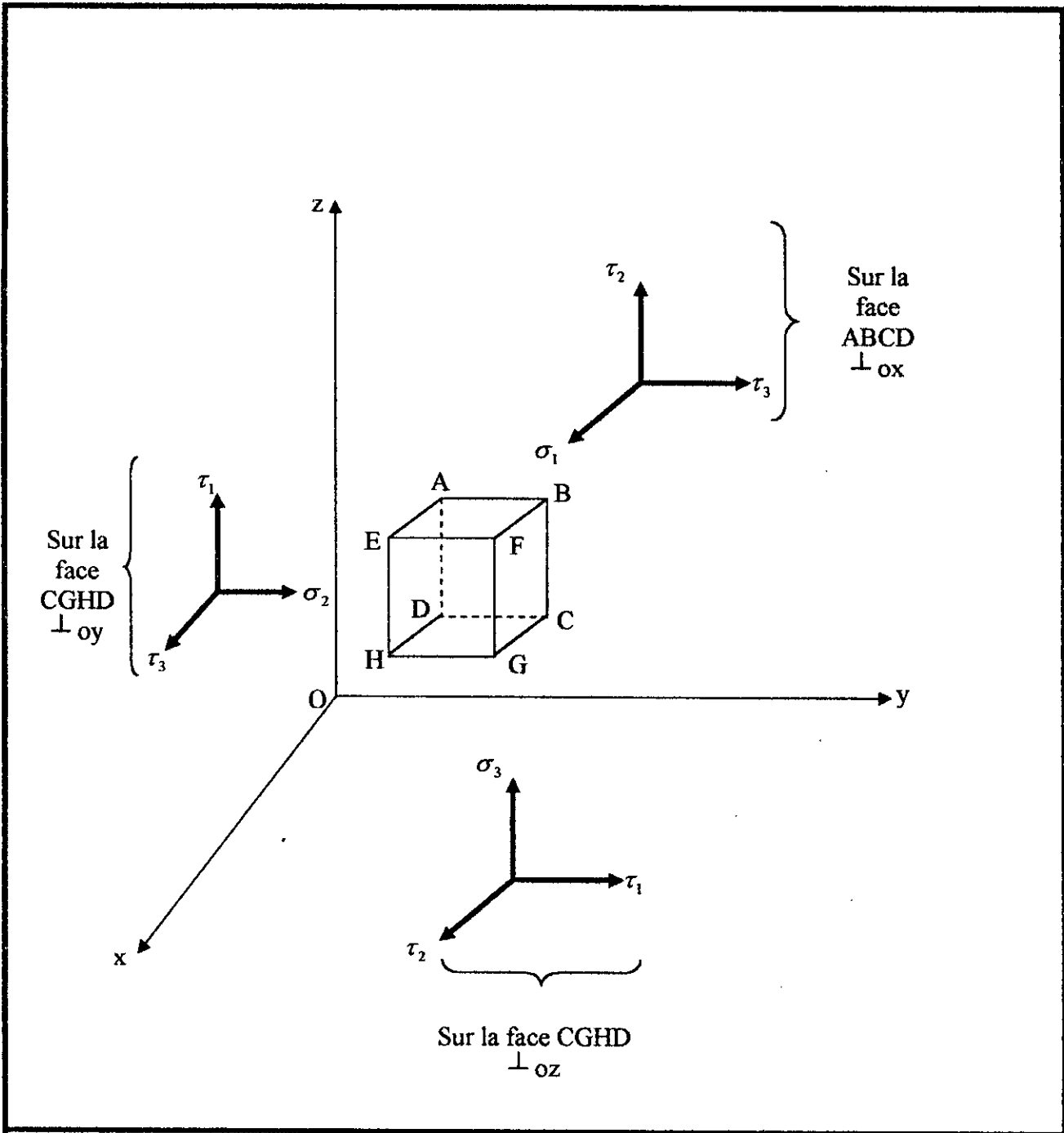


Figure II.2.1
Matrice du tenseur de contraintes [4]

Désignons respectivement par $P + \sigma_i$ et par τ les composantes normales et tangentielles de la tension s'exerçant sur les faces i ($i=1, 2, 3$). Pour un fluide homogène et isotrope, l'application du théorème du moment cinétique par rapport à un axe parallèle à l'un des axes de coordonnées et passant par le centre du parallélépipède montre, comme dans la théorie de l'élasticité du solide homogène et isotrope, que la matrice des contraintes est symétrique ; ce qui constitue le principe de la réciprocité des contraintes [4].

La matrice du tenseur des contraintes s'écrit ainsi :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 + P & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \sigma_2 + P & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3 + P \end{pmatrix}$$

On met ainsi en évidence la pression P , quantité scalaire indépendante de l'orientation de l'élément de surface dS autour de M , alors que les composantes σ et τ sont uniquement d'origine visqueuse.

Pour un liquide de fluidité parfaite, on aurait :

$$\sigma_i = \tau_i = 0.$$

En définitive, la matrice du tenseur des contraintes de viscosité s'écrira :

$$t_{\mu} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \sigma_2 & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{II.3}$$

Ce qui correspond au tableau suivant (Figure II.2.1).

Contraintes s'exerçant sur les faces perpendiculaires à	Contraintes parallèles à		
	OX	OY	OZ
OX	σ_1	τ_3	τ_2
OY	τ_3	σ_2	σ_1
OZ	τ_2	σ_1	σ_3

Pour lier ces tensions visqueuses aux déformations de la particule liquide, rappelons que les analyses des déformations élémentaires d'une particule fluide a montré que cette déformation pouvait être considérée comme la composition d'une translation, d'une rotation en bloc de la particule elle-même et d'une déformation pure ou distorsion. Dans la translation et la rotation, la particule se déplace en bloc comme un corps solide ; les tensions visqueuses liées aux caractéristiques propres du liquide ne peuvent donc intervenir que dans la déformation de la particule. Rappelons également que cette déformation se décompose elle-même [4].

- En une vitesse de déformation linéaire ou vitesse de dilatation dont les composantes

correspondent aux termes : $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial w}{\partial z}$

- Et une vitesse de déformation angulaire ou vitesse de glissement, dont les composantes correspondent aux termes g_1 , g_2 et g_3 .

Le tenseur de déformation s'écrit ainsi :

$$t_d = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & g_3 & g_2 \\ g_3 & \frac{\partial v}{\partial y} & g_1 \\ g_2 & g_1 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{II.4}$$

Ces résultats sont pris en considération dans l'hypothèse d'un fluide homogène, isotrope et de faible vitesse de déformation .On peut développer les relations en série de Taylor et ne conserver que les premiers termes ; on est ainsi conduit à des fonctions linéaires

et homogènes qui se traduisent par les deux hypothèses suivantes de Stokes et Newton, analogues à celle de Hooke dans la théorie de l'élasticité [4] :

- 1- les contraintes tangentielles τ_i sont proportionnelles aux vitesses de déformation angulaire, soit

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= -2\mu g_1 \\ \tau_2 &= -2\mu g_2 \\ \tau_3 &= -2\mu g_3 \end{aligned} \right\} \quad \text{II.5}$$

Les déformations angulaires correspondant donc à des glissements à l'intérieur de la particule.

- 2- les contraintes normales σ_i sont des fonctions linéaires des vitesses de déformation linéaire, si on ne considère que la contrainte visqueuse parallèle à Ox :

$$\sigma_1 = a \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

La forme du second terme du second membre résulte de l'isotropie du fluide.

Cette expression s'écrit également

$$\sigma_1 = (a + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Si on considère :

$$a + \lambda = -2\mu$$

Et

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta \quad (\text{Dilatation cubique})$$

on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_1 = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \theta \\ \sigma_2 = -2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda \theta \\ \sigma_3 = -2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \lambda \theta \end{cases}$$

μ et λ sont des grandeurs caractéristiques du fluide et dépendent de l'état thermodynamique local ; on les considère généralement comme constantes, elles correspondent au coefficient de Lamé défini dans la théorie de l'élasticité.

μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

Pour un liquide supposé incompressible, l'équation de continuité impose

$$\theta = \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

et il reste

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_2 &= -2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_3 &= -2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \text{II.6}$$

II.3. Equations générales du mouvement d'un liquide réel :

Equation de Navier Stokes

L'étude d'un parallélépipède élémentaire, faite en II.2 (Figure II.2.1) est encore valable ; mais dans le cas d'un fluide visqueux il faut tenir compte des forces de contact dues à la viscosité et les rajouter aux autres forces qui s'exercent sur le parallélépipède. Autrement dit, nous devons écrire l'équilibre du système de forces suivantes :

- forces extérieures
- pression normale
- force d'inertie
- force de viscosité

En considérant les forces correspondantes s'exerçant sur l'unité de masse du liquide, les trois premières catégories de forces ont conduit aux équations d'Euler [4] :

$$\frac{1}{\rho} \overline{\operatorname{grad} P} = \vec{F} - \vec{\gamma}$$

Il suffit d'ajouter à chacune de ces équations les composantes sur l'axe correspondant des forces de viscosité par unité de masse.

Considérons les projections sur l'axe Ox (Figure II.2.1) :

a) Composante σ_1 :

Sur la face ABCD :

$$\sigma_1 dydz$$

Sur la face EFGH :

$$-\left(\sigma_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dx\right) dydz$$

Résultante :

$$-\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dx dy dz$$

b) Composante τ_2 :

Sur la face CGHD :

$$\tau_2 dx dy$$

Sur la face ABEF :

$$-\left(\tau_2 + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} dz\right) dx dy$$

Résultante :

$$-\frac{\partial \tau_2}{\partial z} dz dx dy$$

c) Composante τ_3 :

Sur la face ADHE :

$$\tau_3 dx dz$$

Sur la face BCGF :

$$-\left(\tau_3 + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} dy\right) dx dz$$

Résultante :

$$\frac{\partial \tau_3}{\partial y} dy dx dz$$

Les autres composantes σ_2 , σ_3 , τ_1 , τ_2 et τ_3 sont perpendiculaires à Ox et leur projection est donc nulle.

En définitive, la résultante des forces de viscosité projetée sur l'axe Ox a pour expression :

$$-\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_3}{\partial z}\right) dx dy dz$$

En remplaçant σ_1 , τ_2 et τ_3 par leurs valeurs tirées des relations (II.5) et (II.6) et en tenant compte des expressions de g_1 , g_2 et g_3 il résulte :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} &= -2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= -\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div} \vec{V} = 0$$

Par ailleurs :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

donc la résultante des forces de viscosité projetée sur l'axe Ox, s'écrira :

$$-\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} \right) dx dy dz = \mu \Delta u dx dy dz$$

Il suffit donc d'adjoindre cette valeur à celle figurant au deuxième membre de la première équation d'Euler, on remarque que pour, conserver l'homogénéité de l'équation il convient de ramener cette force à l'unité de masse du fluide c'est-à-dire que son expression est en définitive :

$$\frac{\mu}{\rho} \Delta u = \nu \Delta u$$

On obtient ainsi la première des trois équations suivantes ; les deux autres sont déduites facilement [4] :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{du}{dt} + \nu \Delta u \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{dv}{dt} + \nu \Delta v \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{dw}{dt} + \nu \Delta w \end{aligned} \right\} \quad \text{II.7}$$

Ces équations peuvent se condenser en une équation vectorielle unique :

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \vec{F} - \vec{\gamma} + \nu \Delta \vec{V} \quad \text{II.8}$$

Sous sa forme vectorielle l'équation de Navier Stokes exprime la relation entre les différentes forces s'exerçant sur la particule fluide de masse unité :

- : Force de pression.
- : Forces extérieures.
- : Force d'inertie résultante du mouvement.
- : Force de viscosité.

II.4. Equations de l'écoulement en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

Soit :

u_r, u_θ, u_z les composantes de la vitesse U

F_r, F_θ, F_z les composantes de la force de volume par unité de masse.

La dérivée particulaire d'une fonction scalaire U(r,θ,z) est [5]:

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + u_r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

Le laplacien de U est [5]:

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Nous nous bornerons à donner les équations de l'écoulement pour un fluide incompressible visqueux

II.4.1. Equation de continuité :

Pour un fluide incompressible l'équation de continuité est ::

$$\Delta U = 0$$

Elle devient en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \text{II.9}$$

II.4.2. Equations de Navier Stokes en coordonnées cylindriques :

Pour un fluide visqueux et incompressible les équations de Navier Stokes en coordonnées cylindriques s'écrivent [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \frac{u_r}{r} \right) = \frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} \\ F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \frac{u_\theta}{r} \right) = \frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu (\Delta u_z) = \frac{Du_z}{Dt} \end{array} \right. \quad \text{II.10}$$

Avec : $\Delta u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}$
 $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$

En développant les équations (II.9) et (II.10) on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial U_r}{\partial t} = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} \right] - \\ \left[U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right] - \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{\nu}{r^2} U_r + \frac{1}{r} U_\theta^2 \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial t} = F_\theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} \right] - \\ \left[\left(\frac{\nu}{r} - U_r \right) \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right] + \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \left(\frac{\nu}{r^2} + \frac{U_r}{r} \right) U_\theta \\ \frac{\partial U_z}{\partial t} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right] - \\ \left[\left(\frac{\nu}{r} - U_r \right) \frac{\partial U_z}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} - U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right] \end{array} \right\} \quad \text{II.11}$$

L'équation de continuité devient

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{r} U_r = 0 \quad \text{II.12}$$

Chapitre III :

Présentation du modèle à étudier

Les premiers dispositifs standardisés (Plaque à orifice) apparurent aux Etats-Unis au début du vingtième siècle dans l'industrie du pétrole, vu sa simplicité de mise en œuvre et la précision de mesure qu'il offre pour des fluides visqueux (Dans de bonnes conditions d'installation) son champ d'application n'a pas cessé de s'élargir et on le retrouve pratiquement dans toutes les installations industrielles telles que les raffineries de pétrole, dans les circuits de refroidissement des centrales électronucléaire et dans l'industrie chimique.

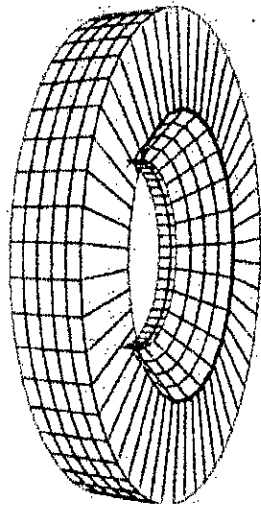
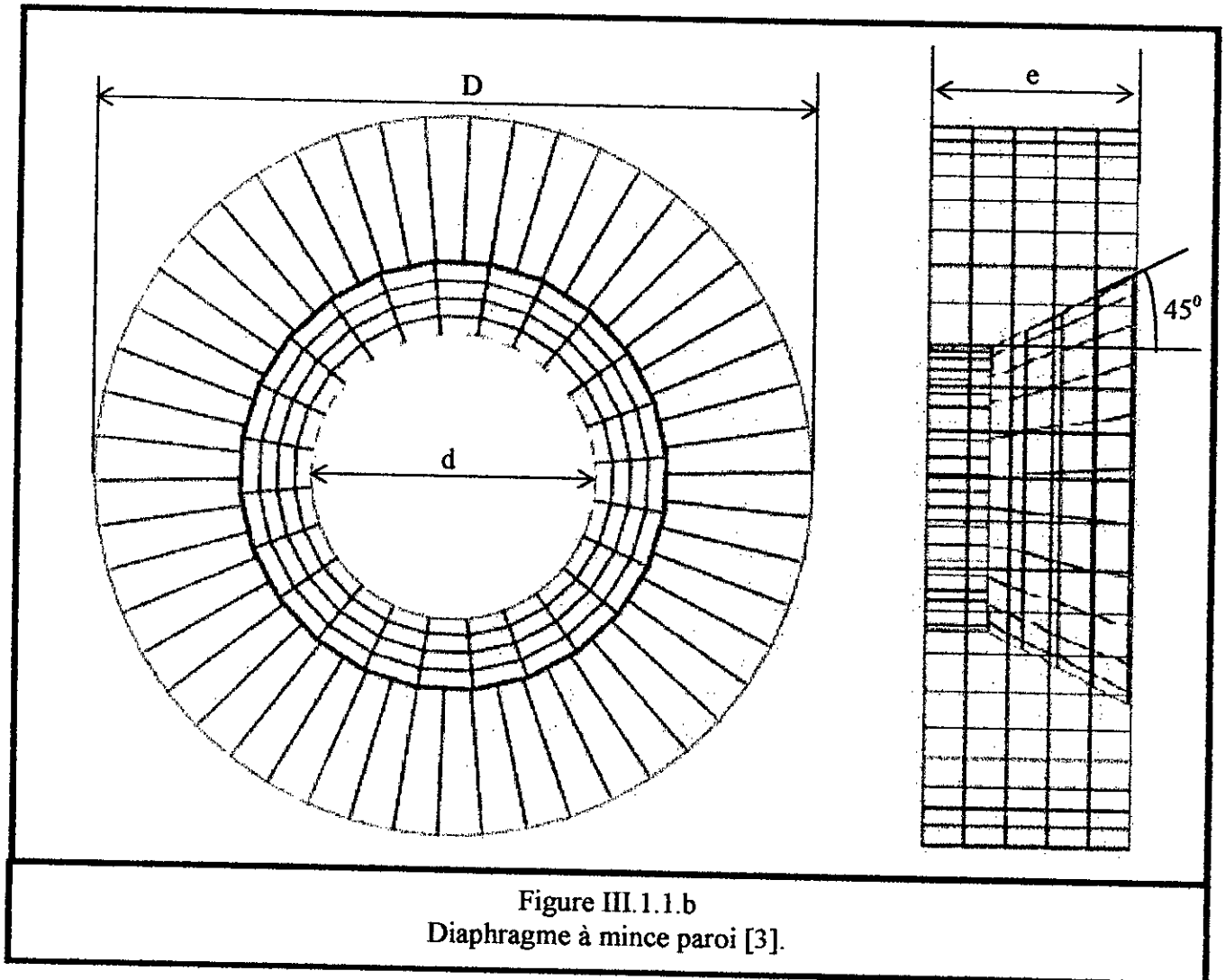


Figure III.1.1. a
Diaphragme à mince paroi [3].

III.1. Modèle à étudier :

Le modèle que l'on se propose d'étudier, est un débitmètre à diaphragme à mince paroi placé dans une conduite cylindrique figure (III.1)



On placera le diaphragme à une distance 'l' de l'extrémité amont de la conduite. Ses caractéristiques sont :

e est son épaisseur (Figure III.2.3 b) biseautée avec un angle de 45°

d est le diamètre de l'orifice.

Comme nous l'avons présenté au chapitre (I) les débitmètres à diaphragme sont des débitmètres à pression différentielle ; les relations permettant le calcul du débit sont données en fonction de la différence de pression entre l'amont et l'aval de la construction . Elles sont de la forme :

$$Q = a(\Delta h)^b$$

III.1

Avec

Δh : la perte de charge entre l'amont et l'aval de la construction.

$$\Delta h = \frac{P_1 - P_2}{\rho g}$$

III.2

a et b : Sont des constantes.

III.2. Modèle mathématique :

III.2.1. Hypothèses de base :

- On considère que notre fluide est incompressible, de masse volumétrique qui ne varie pas sous l'effet de la dépression ($\rho = \text{constante}$).
- La viscosité du fluide (μ) reste constante tout le long de la conduite.
- L'écoulement est dans une conduite cylindrique en charge de section transversale constante et de rayon R , à l'intérieur de laquelle se déplace notre fluide en régime permanent.
- L'origine amont de la conduite est profilée de manière à éviter les décollements à l'entrée
- L'écoulement est bidimensionnel ($U_\theta=0$).
- Les pressions et les vitesses ne dépendent que des coordonnées r et z ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$).
- Pour raison de symétrie, l'écoulement reste identique à lui-même dans tous les plans passant par l'axe de la conduite. On prendra l'axe (OZ) comme axe confondu avec l'axe de la conduite et l'axe (Or) perpendiculaire à (OZ).

III.2.2. Les équations gouvernantes :

Sur la base de ces hypothèses, les équations régissant le problème s'obtiennent à partir des équations fondamentales du Chapitre (II) (Equations II.11 et II.12) ; de la manière suivante :

- Equation de continuité : c'est l'équation (II.12) écrite pour un écoulement bidimensionnel

$$\left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{r} U_r \right) = 0$$

III.3

- Equations de Navier-Stokes : Elles s'obtiennent à partir des équations (II.11), où le terme relatif aux forces extérieures suivant la direction (OZ) est négligé.

On obtient ainsi en coordonnées cylindriques :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial t} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial Z^2} \right] - \left[U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial Z} \right] - \frac{\nu}{r^2} U_r \\ \frac{\partial U_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} + \nu \left[\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial Z^2} \right] + \left[\left(\frac{\nu}{r} - U_r \right) \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial Z} \right] \end{aligned} \right\} \quad \text{III.4}$$

Pour valider notre modèle d'étude ; nous allons appliquer nos équations sur une conduite cylindrique simple sans aucune singularité, Puis nous analyserons l'écoulement dans la conduite avec le diaphragme.

Vu la symétrie de la conduite par rapport à l'axe (OZ), nous traiterons le problème en prenant qu'une partie de la conduite comme domaine d'étude figure (III.2.3.1).

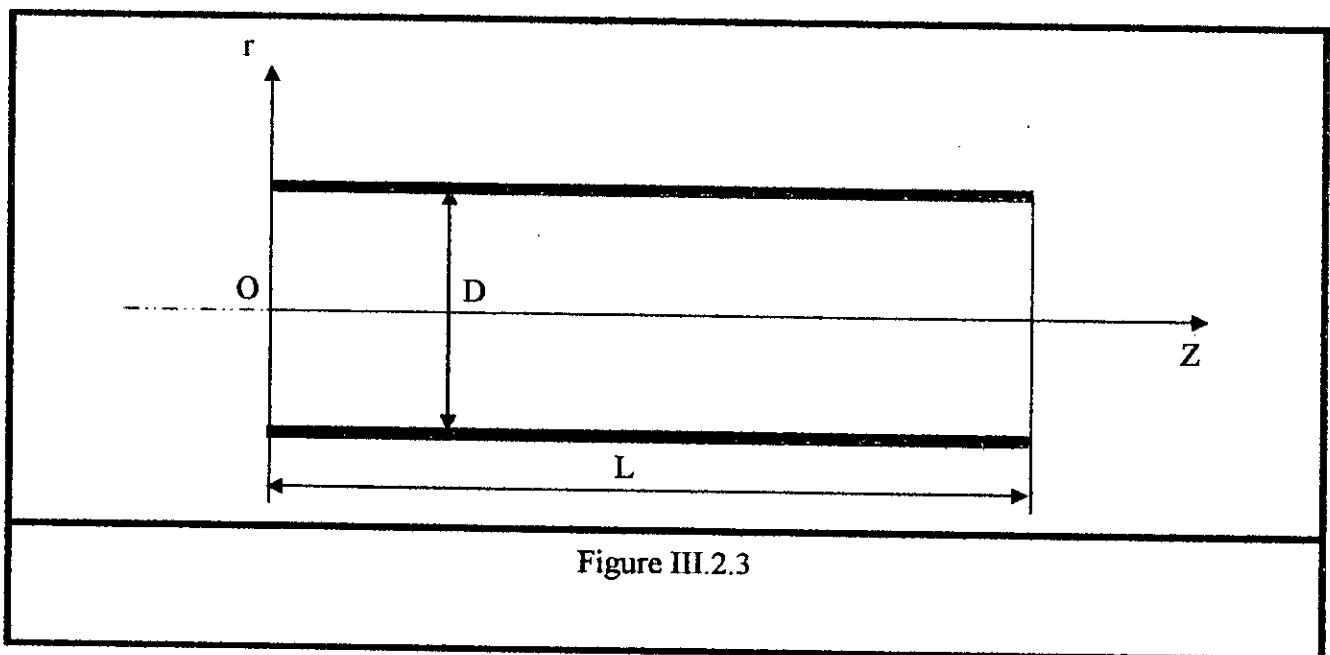


Figure III.2.3

III.2.3 Conditions aux limites :

➤ Conduite simple sans singularité :

Vitesse :

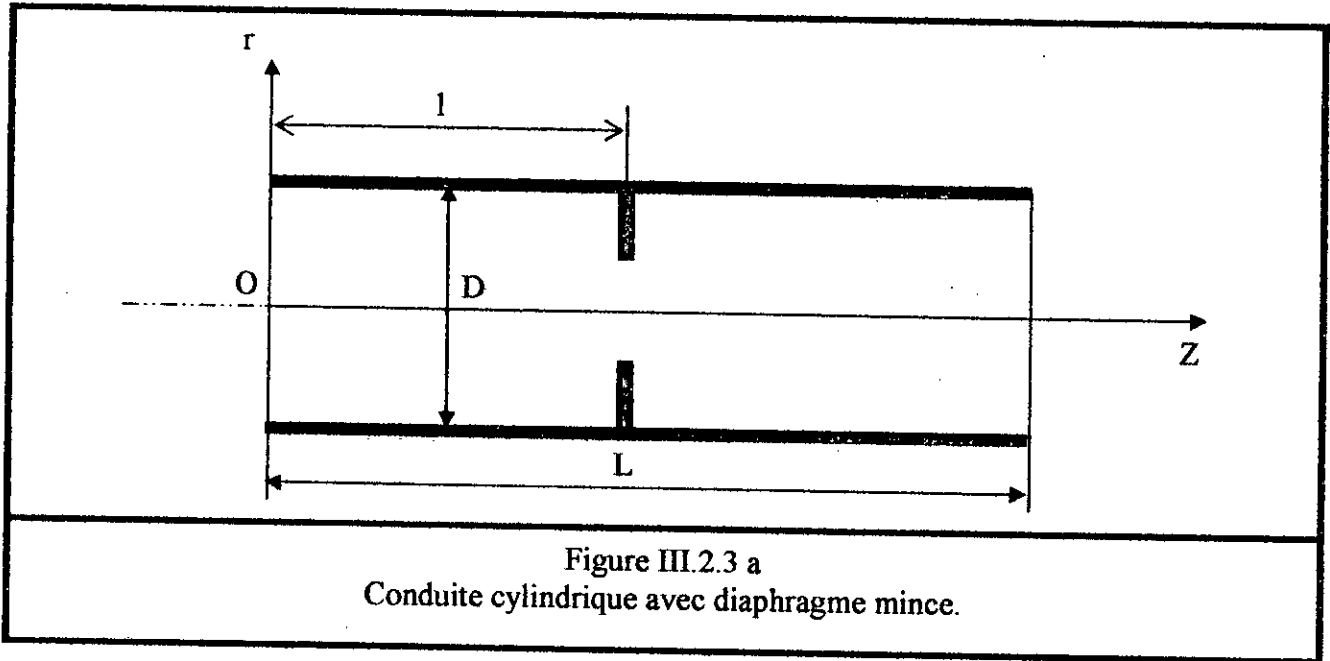
Au niveau des parois, le vecteur vitesse est nul :

$$\left. \begin{aligned} \forall t \\ U_r(R,Z) &= 0 \\ U_z(R,Z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{III.5}$$

• **Pression :**

L'absence des conditions aux limites concernant la pression présente un problème que nous traiterons dans la partie modélisation numérique.

➤ **Conduite cylindrique avec un diaphragme à mince paroi :**



Vitesse :

Au niveau des parois, le vecteur vitesse est nul :

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \\ U_r(R, Z) = 0 \\ U_z(R, Z) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{III.8}$$

Au niveau du diaphragme

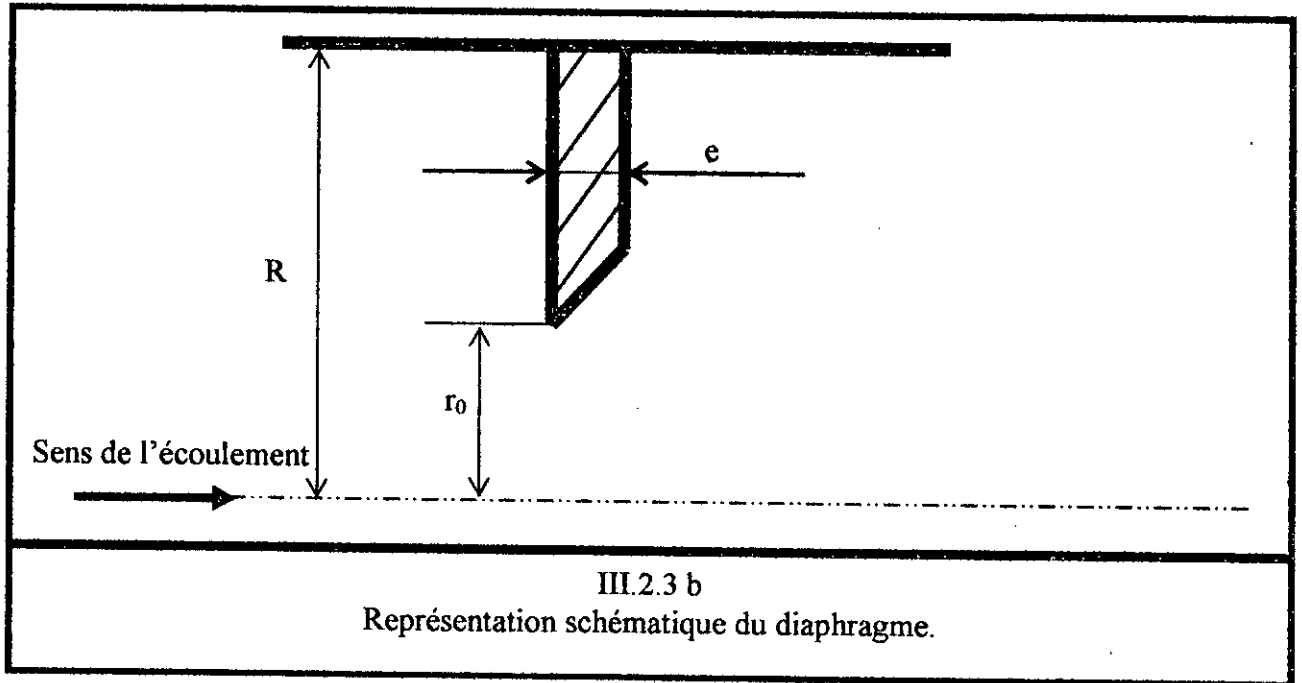
Le diaphragme est placé à une distance 'l' de l'extrémité amont de la conduite et 'e' son épaisseur (figure III.2.3 a et b).

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \\ U_r(r, Z) = 0 \\ U_z(r, Z) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{III.9}$$

Avec :

$$Z \in \left[l - \frac{e}{2}, l + \frac{e}{2} \right]$$

$$r \in [r_0, R]$$



III.2.4. Conditions de symétrie :

- Vitesse :

$$U_r(r, Z) = U_r(-r, Z)$$

$$U_z(r, Z) = U_z(-r, Z)$$

$$U_r(0, Z) = 0$$



III.6

- Pression :

$$P(r, Z) = P(-r, Z)$$

III.7

Chapitre IV

Modèle numérique pour la résolution Des équations de Navier – Stokes

Le modèle mathématique présenté au chapitre (III), pose les équations qui donnent une description complète de notre problème, dans les limites définies par les hypothèses et les conditions aux limites que nous avons spécifiées.

Dans le présent chapitre, nous allons nous intéresser à la résolution des équations de Navier – Stokes. Pour y parvenir nous utiliserons une méthode numérique bien adaptée à la mécanique des fluides : c'est la méthode **des différences finies**. Elle est appréciée pour la simplicité de sa mise en oeuvre et surtout parce qu'elle donne de bons résultats.

La méthode consiste, à estimer par approximation successive les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions en se basant sur les conditions aux limites.

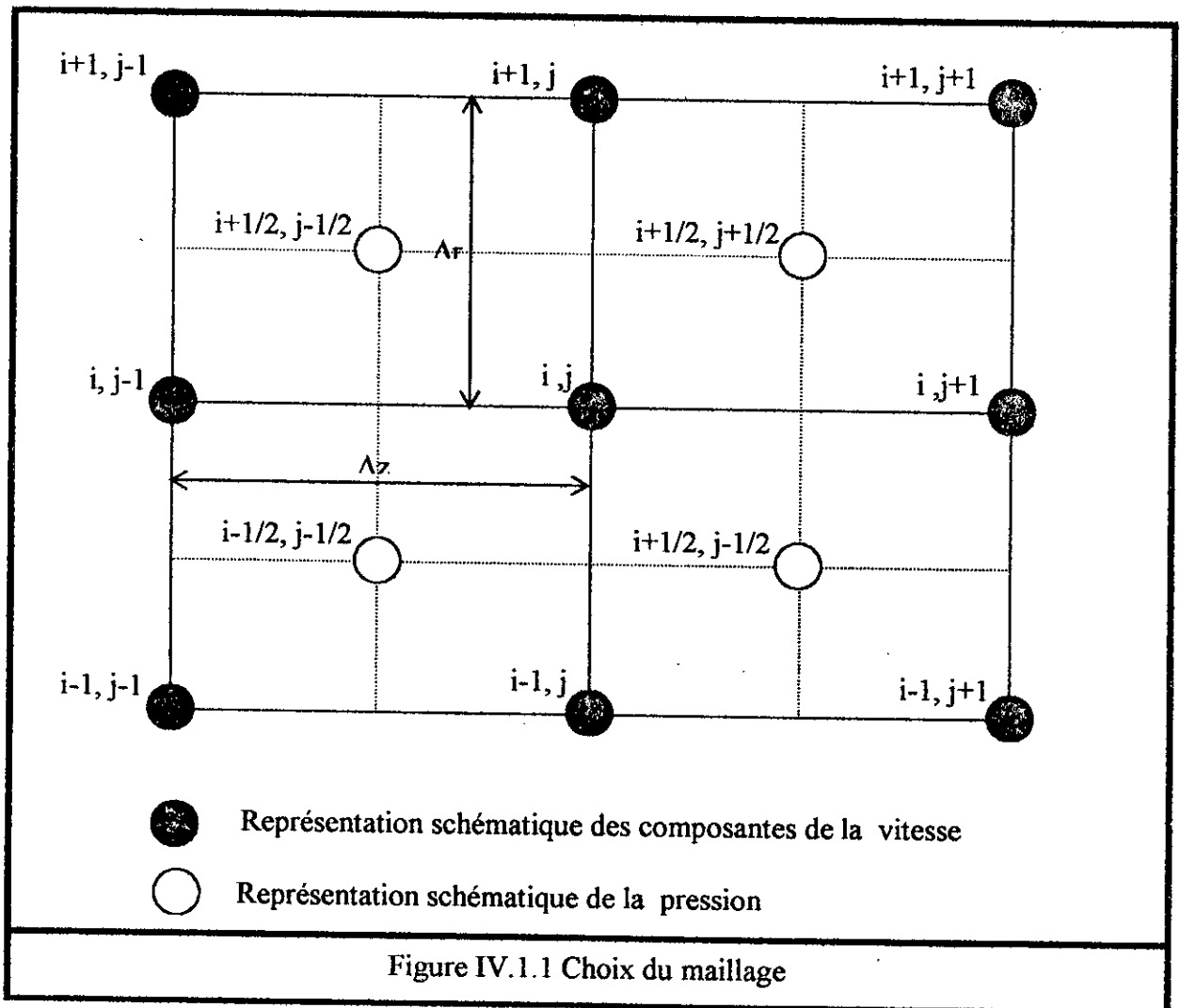
Cette approximation découle d'une discrétisation du domaine d'étude et le remplacement de l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences finies. En d'autres termes, le domaine de variation continue est remplacé par un ensemble de points (nœuds), créant ainsi des frontières qui forment le maillage.

IV.1. Choix du maillage :

Le maillage a une importance capitale dans la méthode de discrétisation des équations aux dérivées partielles, et dans l'application des conditions aux limites.

Sachant que les pressions ne sont pas connues sur les parois de la conduite, nous choisissons un schéma où les vitesses sont représentées sur les nœuds des mailles et la pression au centre des mailles, de manière à éviter de faire intervenir les pressions sur les parois de la canalisation (Figure IV.1.1).

Nous prendrons un schéma explicite.



IV.2. Méthode de résolution :

Notre problème comporte deux difficultés particulières, dont il faut tenir compte lorsque nous nous apprêtons à choisir une méthode de résolution :

- L'équation de continuité (I.1) doit être satisfaite à tout instant.
- L'absence des conditions aux limites concernant la pression nous oblige à chercher une méthode, qui nous permet de contourner cette contrainte.

La méthode de « **compressibilité artificielle** » semble satisfaire ces deux contraintes, c'est pourquoi nous l'utiliserons pour la résolution de notre système d'équations.

IV.2.1. Méthode de compressibilité artificielle :

La particularité de la méthode de compressibilité artificielle, réside dans le fait que l'équation de continuité est perturbée, quand nous injectons un terme qui dépend du temps. Elle est transformée comme suit :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad \text{IV.1}$$

Nous pouvons regarder cette transformation comme l'équation de continuité d'un fluide, dont l'équation d'état s'écrit de la manière suivante [2]:

$P = C^2 \rho$ où C est une constante.

Il est évident que lorsque (t) tend vers l'infini ($t \longrightarrow \infty$), le régime devient permanent, et l'équation (IV.1) tendra vers l'équation de continuité que nous cherchons à satisfaire. Donc l'équation (IV.1) n'a pas de sens physique seulement lorsque le régime devient permanent c'est-à-dire quand (t) tend vers l'infini.

La méthode considérée, consiste à joindre aux équations de Navier Stokes l'équation (IV.1) et à résoudre le système ainsi obtenu qui comporte la variable (t) . Cependant, cette variable n'est pas significative physiquement ; comme nous l'avons signalé. Il n'en demeure pas moins que lors de la résolution du régime « **pseudo-stationnaire** » ainsi généré [2], notre système évolue vers le régime permanent, ce qui nous permet d'éviter la contrainte imposée par la pression.

Nous remarquons que l'équation (IV.1) converge vers l'équation de continuité indépendamment du terme $\frac{\partial P}{\partial t}$ si C^2 tend vers 0. Il est à déduire qu'il faut prendre (C^2) très grand pour que l'équation (IV.1) puisse représenter approximativement notre équation de continuité dans le régime « **pseudo-stationnaire** ».

Cependant des instabilités ont été observées dans le processus de calcul pour de très grandes valeurs de C^2 [2]. Il y a donc une limite à ne pas dépasser pour cette constante ; cette limite sera définie dans les conditions de stabilité de cette méthode.

Nous aurons donc à résoudre avec la méthode de compressibilité artificielle le système d'équations différentielles ci-dessous obtenues à partir des équations (III.3 et III.4.)

• **Equations de Navier Stokes :**

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial t} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial Z^2} \right] - \left[U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial Z} \right] - \frac{\nu}{r^2} U_r \\ \frac{\partial U_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} + \nu \left[\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial Z^2} \right] + \left[\left(\frac{\nu}{r} - U_r \right) \frac{\partial U_z}{\partial r} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial Z} \right] \end{aligned} \right\} \text{IV.2}$$

• **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C^2 \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial U_z}{\partial Z} + \frac{1}{r} U_r \right) = 0 \quad \text{IV.3}$$

IV.3. Discrétisation des équations :

IV.3.1. Méthode générale de discrétisation :

Soit ϕ une grandeur quelconque, qui peut être U_r , U_z , ou P . En effectuant le développement limité sur ϕ suivant la direction (Or) ou voisinage du point $M(r,z)$ [1] (Figure IV.3.1.1), nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} \Phi(r + \Delta r, z) &= \Phi(r, z) + \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial^2 \Phi(r, z)}{\partial r^2} (\Delta r)^2 + \dots \\ \Phi(r - \Delta r, z) &= \Phi(r, z) - \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial^2 \Phi(r, z)}{\partial r^2} (\Delta r)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \text{IV.4}$$

Nous supposons que $\phi(r,z)$ est défini au point M (Figure IV.3.1.1) tel que :

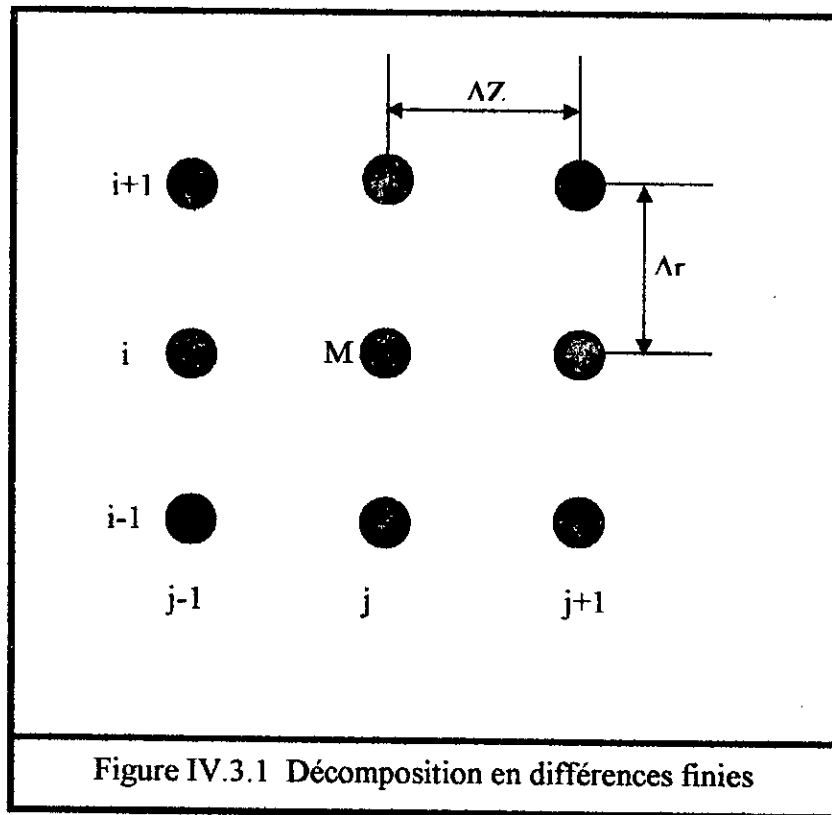
$$\phi(r,z)_M = \phi_{i,j}(r,z) \quad \text{IV.5}$$

Donc :

$$\phi(r+\Delta r,z) = \phi_{i+1,j}(r,z) \quad \text{IV.6}$$

Et

$$\phi(r-\Delta r,z) = \phi_{i-1,j}(r,z) \quad \text{IV.7}$$



Nous pouvons alors écrire les équations (IV.4) comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \phi_{i+1,j}(r,z) &= \phi_{i,j}(r,z) + \frac{\partial \phi(r,z)}{\partial r} \Big|_M \Delta r + \frac{\partial^2 \phi(r,z)}{\partial r^2} \Big|_M (\Delta r)^2 + \dots (a) \\ \phi_{i-1,j}(r,z) &= \phi_{i,j}(r,z) - \frac{\partial \phi(r,z)}{\partial r} \Big|_M \Delta r + \frac{\partial^2 \phi(r,z)}{\partial r^2} \Big|_M (\Delta r)^2 + \dots (b) \end{aligned} \right\} \text{IV.8}$$

- En soustrayant (b) de (a), nous obtenons :

$$\phi_{i+1,j}(r,z) - \phi_{i-1,j}(r,z) = 2 \frac{\partial \phi(r,z)}{\partial r} \Big|_M \Delta r + o(r)$$

le terme $o(r)$ regroupe les termes du troisième ordre que nous négligeons devant $2 \frac{\partial \phi(r,z)}{\partial r} \Big|_M$.

Nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial \phi(r,z)}{\partial r} \Big|_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j}(r,z) - \phi_{i-1,j}(r,z)}{2\Delta r} \quad \text{IV.9}$$

Nous refaisons le même calcul pour $\phi(r,z)$ dans la direction (z), et nous obtenons :

$$\frac{\partial \phi(r,z)}{\partial Z} \Big|_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1}(r,z) - \phi_{i,j-1}(r,z)}{2\Delta Z} \quad \text{IV.10}$$

- La somme de (a) et (b) donne :

$$\phi_{i+1,j}(r, z) + \phi_{i-1,j}(r, z) = 2\phi_{i,j}(r, z) + \frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r^2} \Big|_M (\Delta r)^2 + o(r)$$

En négligeant (or) devant $\frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r^2} \Big|_M$, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial r^2} \Big|_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j}(r, z) + \phi_{i-1,j}(r, z) - 2\phi_{i,j}(r, z)}{\Delta r^2} \quad \text{IV.11}$$

De même dans la direction (oZ) :

$$\frac{\partial^2 \phi(r, z)}{\partial Z^2} \Big|_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1}(r, z) + \phi_{i,j-1}(r, z) - 2\phi_{i,j}(r, z)}{\Delta Z^2} \quad \text{IV.12}$$

- La discrétisation des termes en $(\frac{\partial}{\partial t})$ se fera en négligeant les termes du 2^{ème} ordre ; donc

nous aurons :

$$\frac{\partial \phi_{i,j}(r, z)}{\partial t} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1}(r, z) - \phi_{i,j}^n(r, z)}{\Delta t} \quad \text{IV.13}$$

IV.3.2. Discrétisation des équations de Navier Stokes et de continuité :

En prenant la figure (IV.1.1) comme référence et suivant les relations (IV.9, 10, 11,12) , les dérivés partielles qui apparaissent dans les équations de Navier Stokes (IV.2) et de continuité (IV.3.) seront discrétisées de la manière suivante :

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} = \frac{U_r^{n+1}(i, j) - U_r^n(i, j)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial U_r(i, j)}{\partial r} = \frac{U_r^n(i+1, j) - U_r^n(i-1, j)}{2\Delta r}$$

$$\frac{\partial U_r(i, j)}{\partial Z} = \frac{U_r^n(i, j+1) - U_r^n(i, j-1)}{2\Delta Z}$$

$$\frac{\partial^2 U_r(i, j)}{\partial r^2} = \frac{U_r^n(i+1, j) + U_r^n(i-1, j) - 2U_r^n(i, j)}{2(\Delta r)^2}$$

$$\frac{\partial^2 U_r(i, j)}{\partial Z^2} = \frac{U_r^n(i, j+1) + U_r^n(i, j-1) - 2U_r^n(i, j)}{2(\Delta Z)^2}$$

$$\frac{\partial P^n(i, j)}{\partial r} = \frac{P^n(i+1/2, j) - P^n(i-1/2, j)}{2\Delta r}$$

$$\frac{\partial P(i+1/2, j+1/2)}{\partial t} = \frac{P^{n+1}(i+1/2, j+1/2) - P^n(i+1/2, j+1/2)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} = \frac{U_z^{n+1}(i, j) - U_z^n(i, j)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial U_z(i, j)}{\partial r} = \frac{U_z^n(i+1, j) - U_z^n(i-1, j)}{2\Delta r}$$

$$\frac{\partial U_z(i, j)}{\partial Z} = \frac{U_z^n(i, j+1) - U_z^n(i, j-1)}{2\Delta Z}$$

$$\frac{\partial^2 U_z(i, j)}{\partial r^2} = \frac{U_z^n(i+1, j) + U_z^n(i-1, j) - 2U_z^n(i, j)}{2(\Delta r)^2}$$

$$\frac{\partial^2 U_z(i, j)}{\partial Z^2} = \frac{U_z^n(i, j+1) + U_z^n(i, j-1) - 2U_z^n(i, j)}{2(\Delta Z)^2}$$

$$\frac{\partial P(i, j)}{\partial Z} = \frac{P(i, j+1/2) - P(i, j-1/2)}{2\Delta Z}$$

En remplaçant ces termes dans les équations de Navier-Stokes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 U_r^{n+1}(i, j) &= U_r^n(i, j) + \Delta t \left[F_r - \frac{1}{\rho \Delta r} \left[P^n(i+1/2, j) - P^n(i-1/2, j) \right] \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2\Delta r} \left[\frac{v}{\Delta r} + \frac{v}{i\Delta r} - U_r^n(i, j) \right] U_r^n(i+1, j) + \frac{1}{2\Delta r} \left[\frac{v}{\Delta r} - \frac{v}{i\Delta r} + U_r^n(i, j) \right] U_r^n(i-1, j) \\
 &\quad + \frac{1}{2\Delta Z} \left[\frac{v}{\Delta Z} - U_z^n(i, j) \right] U_r^n(i, j+1) + \frac{1}{2\Delta Z} \left[\frac{v}{\Delta Z} + U_z^n(i, j) \right] U_r^n(i, j-1) \\
 &\quad \left. - \nu \left[\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(\Delta Z)^2} + \frac{1}{(i\Delta r)^2} \right] U_r^n(i, j) \right) \\
 U_z^{n+1}(i, j) &= U_z^n(i, j) + \Delta t \left[F_z - \frac{1}{\rho \Delta Z} \left[P^n(i, j+1/2) - P^n(i, j-1/2) \right] \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2\Delta r} \left[\frac{v}{\Delta r} + \frac{v}{i\Delta r} - U_r^n(i, j) \right] U_z^n(i+1, j) + \frac{1}{2\Delta r} \left[\frac{v}{\Delta r} - \frac{v}{i\Delta r} + U_r^n(i, j) \right] U_z^n(i-1, j) \\
 &\quad + \frac{1}{2\Delta Z} \left[\frac{v}{\Delta Z} + U_z^n(i, j) \right] U_z^n(i, j+1) + \frac{1}{2\Delta Z} \left[\frac{v}{\Delta Z} - U_z^n(i, j) \right] U_z^n(i, j-1) \\
 &\quad \left. - \nu \left[\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(\Delta Z)^2} \right] U_z^n(i, j) \right)
 \end{aligned} \tag{IV.14}$$

L'équation de continuité devient :

$$\begin{aligned}
 P^{n+1}(i+1/2, j+1/2) &= P^n(i+1/2, j+1/2) - \Delta t C^2 \left(\frac{1}{i\Delta r} U_r^{n+1}(i+1/2, j+1/2) \right. \\
 &\quad + \frac{U_r^{n+1}(i+1, j+1/2) - U_r^{n+1}(i, j+1/2)}{\Delta r} \\
 &\quad \left. + \frac{U_z^{n+1}(i+1/2, j+1) - U_z^{n+1}(i+1/2, j)}{\Delta Z} \right)
 \end{aligned} \tag{IV.15}$$

Les termes en P et U qui n'apparaissent pas sur le schéma (IV.1.1) sont obtenus par interpolation linéaire ; soit :

$$\begin{aligned}
 P^n(i+1/2, j) &= \frac{1}{2} \left[P^n(i+1/2, j+1/2) + P^n(i+1/2, j-1/2) \right] \\
 P^n(i, j+1/2) &= \frac{1}{2} \left[P^n(i+1/2, j+1/2) + P^n(i-1/2, j+1/2) \right] \\
 P^n(i-1/2, j) &= \frac{1}{2} \left[P^n(i-1/2, j+1/2) + P^n(i-1/2, j-1/2) \right] \\
 P^n(i, j-1/2) &= \frac{1}{2} \left[P^n(i+1/2, j-1/2) + P^n(i-1/2, j-1/2) \right]
 \end{aligned} \tag{IV.16.a}$$

$$\left. \begin{aligned}
 U_r^{n+1}(i+1/2, j+1/2) &= \frac{1}{4} \left(U_r^{n+1}(i+1, j+1) + U_r^{n+1}(i+1, j) \right. \\
 &\quad \left. + U_r^{n+1}(i, j+1) + U_r^{n+1}(i, j) \right) \\
 U_r^{n+1}(i, j+1/2) &= \frac{1}{2} \left(U_r^{n+1}(i, j+1) + U_r^{n+1}(i, j) \right) \\
 U_r^{n+1}(i+1/2, j) &= \frac{1}{2} \left(U_r^{n+1}(i+1, j) + U_r^{n+1}(i, j) \right) \\
 U_z^{n+1}(i+1/2, j+1/2) &= \frac{1}{2} \left(U_z^{n+1}(i+1, j+1) + U_z^{n+1}(i, j) \right) \\
 U_z^{n+1}(i, j+1/2) &= \frac{1}{2} \left(U_z^{n+1}(i, j+1) + U_z^{n+1}(i, j) \right) \\
 U_z^{n+1}(i+1/2, j) &= \frac{1}{2} \left(U_z^{n+1}(i+1, j) + U_z^{n+1}(i, j) \right)
 \end{aligned} \right\} \text{IV.16.b}$$

Finalement le système résultant de la discrétisation est :

• **Equations de Navier-Stokes :**

$$\left. \begin{aligned}
 U_r^{n+1}(i, j) &= U_r^n(i, j) + \Delta t \left[-g - \frac{1}{2\rho\Delta r} [P(i+1/2, j+1/2) - P(i-1/2, j+1/2)] \right. \\
 &\quad \left. + P(i+1/2, j-1/2) - P(i-1/2, j-1/2) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{\nu}{\Delta r} - U_r^n(i, j) + \frac{\nu}{i\Delta r} \right) U_r^n(i+1, j) + \frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{\nu}{\Delta r} + U_r^n(i, j) - \frac{\nu}{i\Delta r} \right) U_r^n(i-1, j) \\
 &\quad + \frac{1}{2\Delta z} \left(\frac{\nu}{\Delta z} - U_z^n(i, j) \right) U_r^n(i, j+1) + \frac{1}{2\Delta z} \left(\frac{\nu}{\Delta z} + U_z^n(i, j) \right) U_r^n(i, j-1) \\
 &\quad - \nu \left[\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} + \frac{1}{(i\Delta r)^2} \right] U_r^n(i, j) \\
 U_z^{n+1}(i, j) &= U_z^n(i, j) + \Delta t \left[-\frac{1}{2\rho\Delta z} [P(i+1/2, j+1/2) - P(i-1/2, j+1/2)] \right. \\
 &\quad \left. + P(i-1/2, j+1/2) - P(i-1/2, j-1/2) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{\nu}{\Delta r} - U_r^n(i, j) + \frac{\nu}{i\Delta r} \right) U_z^n(i+1, j) + \frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{\nu}{\Delta r} + U_r^n(i, j) - \frac{\nu}{i\Delta r} \right) U_z^n(i-1, j) \\
 &\quad + \frac{1}{2\Delta z} \left(\frac{\nu}{\Delta z} - U_z^n(i, j) \right) U_z^n(i, j+1) + \frac{1}{2\Delta z} \left(\frac{\nu}{\Delta z} + U_z^n(i, j) \right) U_z^n(i, j-1) \\
 &\quad + \nu \left[\frac{1}{2(\Delta r)^2} + \frac{1}{2(\Delta z)^2} \right] U_z^n(i, j)
 \end{aligned} \right\} \text{IV.17}$$

• **Equation de continuité :**

$$\begin{aligned}
 P^{n+1}(i+1/2, j+1/2) = P^n(i+1/2, j+1/2) - \\
 \Delta t C^2 \left[\left(\frac{1}{4i\Delta r} + \frac{1}{2\Delta r} \right) [U_r^{n+1}(i+1, j+1) + U_r^{n+1}(i+1, j)] \right. \\
 \left. \left(\frac{1}{4i\Delta r} - \frac{1}{2\Delta r} \right) [U_r^{n+1}(i, j+1) + U_r^{n+1}(i, j)] \right] \\
 \left. \frac{1}{2\Delta Z} [U_z^{n+1}(i+1, j+1) - U_z^{n+1}(i+1, j) + U_z^{n+1}(i, j+1) - U_z^{n+1}(i, j)] \right]
 \end{aligned}
 \tag{IV.18}$$

Pour permettre le calcul de U_r , U_z et P au voisinage de la paroi, plusieurs procédures sont utilisées. [8]

Notre choix s'est porté sur la procédure de réflexion qui semble la plus appropriée ; c'est l'une des méthodes les plus utilisées pour analyser l'écoulement au voisinage des parois.

En se référant à la figure (IV.3.2) les valeurs de la pression et de la vitesse résultante (U) au point de réflexion fictif du maillage et au point intérieur correspondant, sont les mêmes en module.

La direction de la vitesse résultante au point fictif ($R+1$ figure IV.3.2) est déterminée telle que la résultante des vitesses normales à la paroi. Cette résultante est donc nulle.

C'est-à-dire :

$$\left. \begin{aligned}
 U_r(R+1, j) = -U_r(R, j) \\
 U_z(R+1, j) = -U_z(R, j)
 \end{aligned} \right\}
 \tag{IV.19}$$

Précisons que dans les équations (IV.17 et 18):

$i \in [1, R]$ Est un compteur dans la direction r .

$j \in [1, L]$ Est un compteur dans la direction Z .

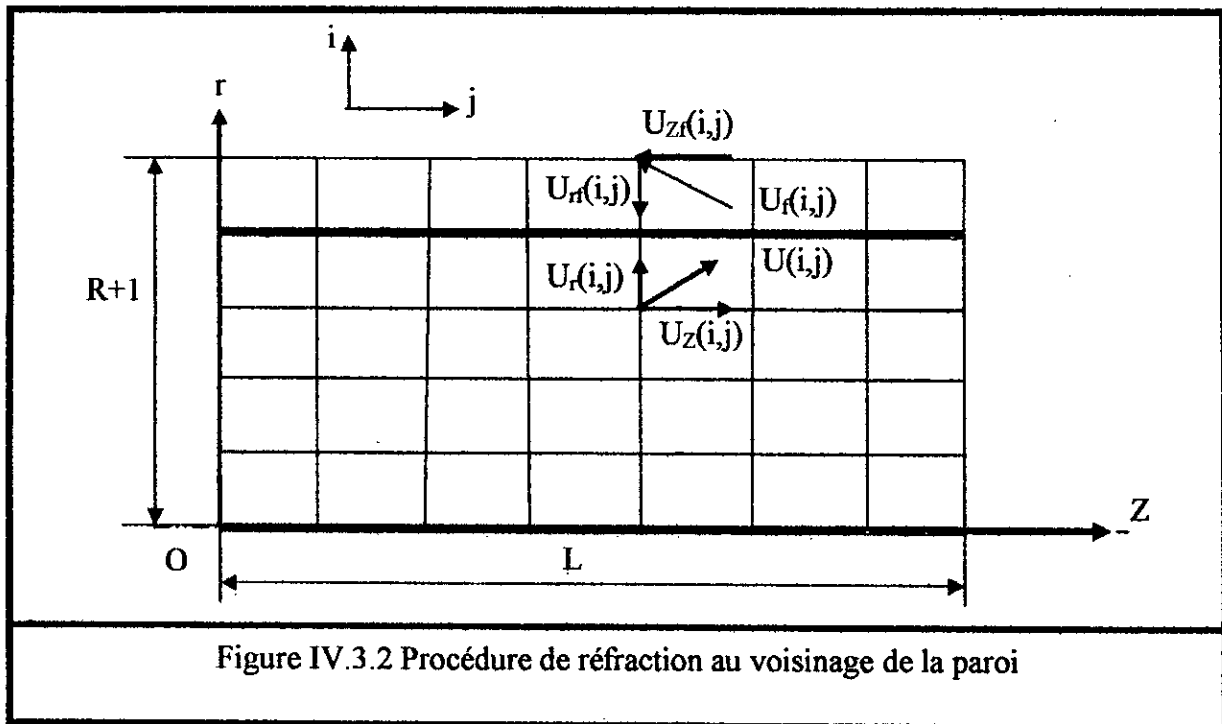


Figure IV.3.2 Procédure de réfraction au voisinage de la paroi

En joignant aux équations (IV.17 et IV.18) :

- **Les conditions aux limites :**

Les composantes de la vitesse (U_r , U_z) sont nulles aux parois :

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \\ U_r^n(R, j) = 0 \\ U_z^n(R, j) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{IV.20}$$

- **Les conditions de réfraction :**

$$\left. \begin{array}{l} \forall t \\ U_r^n(R+1, j) = -U_r^n(R, j) \\ U_z^n(R+1, j) = U_z^n(R, j) \end{array} \right\} \quad \text{IV.21}$$

- **Les conditions initiales :**

A $t=t_0 \forall i, j$ on a :

$$\left. \begin{aligned} U_r^0(i, j) &= U_{r0} \\ U_z^0(i, j) &= U_{z0} \\ P^0(i+1/2, j+1/2) &= P_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{IV.22}$$

- **Les conditions de stabilité [2]:**

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(U_{r0}^2 + U_{z0}^2)\Delta t &\leq 1 \\ 2\Delta t \left(\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right) \left(1 + \frac{\Delta C^2}{2} \right) &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad \text{IV.21}$$

Ainsi le modèle numérique se trouve prêt pour la résolution. Cependant nous devons injecter dans le processus de calcul un test pour la vérification de la convergence de notre modèle.

A cet effet deux tests peuvent être utilisés :

- Le premier consiste à vérifier si nous avons atteint le régime permanent ; c'est-à-dire que le débit se trouve constant [2]. Le test sera donc

$$|Q^{n+1} - Q^n| \leq \varepsilon \quad \text{IV.22}$$

- Le second consiste à tester les paramètres entre deux itérations successives :

Nous devons vérifier par exemple :

$$\max \left(\frac{1}{\Delta t} |U_r^{n+1} - U_r^n|, \frac{1}{\Delta t} |U_z^{n+1} - U_z^n|, \frac{1}{\Delta C^2} |P^{n+1} - P^n| \right) \leq \varepsilon \quad \text{IV.23}$$

Où ε est un infiniment petit.

Nous utiliserons le premier test (IV.22) pour sa facilité

Les différentes étapes du processus de calcul sont représentées ci-dessous.

IV.4. Algorithme de résolution :

Début :

1. Introduction des données nécessaires à la résolution :

$$R, N1, M, U_{r0}, U_{z0}, P_0, \varepsilon$$

1.1. **Evaluation de :** $\Delta r=R/M, \Delta Z=L/N, \Delta t, C$ (à partir des conditions de stabilité).

2. Conditions initiales :

Pour $i=0$ à $N1$

	Pour $j=0$ à M
	$U_r^0(i, j) = U_{r0}$ $U_z^0(i, j) = U_{z0}$ $P^0(i, j) = P_0$

3. Résolution des équations de Navier- Stokes :

Pour $n=0$ à 100

	Calcul de U_r^{n+1} et U_z^{n+1} à partir des équations (IV.17)
	Pour $j=0$ à M (Déplacement de section en section)
	Pour $i=0$ à $N1$
	$U_r^{n+1}(i, j) = U_r^n(i, j) + \Delta t \left[-g - \frac{1}{2\rho\Delta r} [P(i+1/2, j+1/2) - P(i-1/2, j+1/2) + P(i+1/2, j-1/2) - P(i-1/2, j-1/2)] \right.$ $+ \frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{v}{\Delta r} - U_r^n(i, j) + \frac{v}{i\Delta r} \right) U_r^n(i+1, j) + \frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{v}{\Delta r} + U_r^n(i, j) - \frac{v}{i\Delta r} \right) U_r^n(i-1, j)$ $+ \frac{1}{2\Delta Z} \left(\frac{v}{\Delta Z} - U_z^n(i, j) \right) U_r^n(i, j+1) + \frac{1}{2\Delta Z} \left(\frac{v}{\Delta Z} + U_z^n(i, j) \right) U_r^n(i, j-1)$ $\left. - v \left[\frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{(\Delta Z)^2} + \frac{1}{(i\Delta r)^2} \right] U_r^n(i, j) \right]$
	$U_z^{n+1}(i, j) = U_z^n(i, j) + \Delta t \left[-\frac{1}{2\rho\Delta Z} [P(i+1/2, j+1/2) - P(i-1/2, j+1/2) + P(i-1/2, j-1/2) - P(i-1/2, j-1/2)] \right.$ $+ \frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{v}{\Delta r} - U_r^n(i, j) + \frac{v}{i\Delta r} \right) U_z^n(i+1, j) + \frac{1}{2\Delta r} \left(\frac{v}{\Delta r} + U_r^n(i, j) - \frac{v}{i\Delta r} \right) U_z^n(i-1, j)$ $+ \frac{1}{2\Delta Z} \left(\frac{v}{\Delta Z} - U_z^n(i, j) \right) U_z^n(i, j+1) + \frac{1}{2\Delta Z} \left(\frac{v}{\Delta Z} + U_z^n(i, j) \right) U_z^n(i, j-1)$ $\left. + v \left[\frac{1}{2(\Delta r)^2} + \frac{1}{2(\Delta Z)^2} \right] U_z^n(i, j) \right]$

n

n

3.1. Conditions aux limites :

Pour $i=N1$

Pour $j= 0$ à $M+1$

	$U_r^{n+1}(i, j) = 0$ $U_z^{n+1}(i, j) = 0$
--	---

3.2. Conditions de symétrie :

Pour $i =N1+1$

Pour $j=0$ à $M+1$

	$U_r^{n+1}(i, j) = -U_r^{n+1}(i-1, j)$ $U_z^{n+1}(i, j) = U_z^{n+1}(i-1, j)$
--	--

4. Test d'arrêt :

Calcul des éléments de $V1$ et $V2$

Pour $j= 0$ à M

		<p>Pour $i= 0$ à $N1$</p> <p>Si $(Q^{n+1} - Q^n \leq \epsilon)$</p> <p>Ecrire $U_r^{n+1}(i, j), U_z^{n+1}(i, j), P^{n+1}(i, j)$</p> <p>Si non</p> <p>Calcul des nouvelles valeurs de P (Equation de continuité)</p>
--	--	--

j	i	$P^{n+1}(i+1/2, j+1/2) = P^n(i+1/2, j+1/2) -$ $\Delta C^2 \left[\left(\frac{1}{4\Delta x} + \frac{1}{2\Delta x} \right) [U_r^{n+1}(i+1, j+1) + U_r^{n+1}(i+1, j)] \right.$ $\left. - \left(\frac{1}{4\Delta x} - \frac{1}{2\Delta x} \right) [U_r^{n+1}(i, j+1) + U_r^{n+1}(i, j)] \right]$ $- \frac{1}{2\Delta z} [U_z^{n+1}(i+1, j+1) - U_z^{n+1}(i+1, j) + U_z^{n+1}(i, j+1) - U_z^{n+1}(i, j)]$
---	---	--

Après exécution du programme élaboré sur la base de l'algorithme présenté ci-dessus, nous formulons les remarques suivantes :

Pour des nombres de Reynolds relativement élevés ($Re > 500$), nous obtenons des chutes de pression importantes, des problèmes de stabilité et de convergence surgissent et les conditions de stabilité utilisées deviennent insuffisantes.

Ces problèmes sont dus au fait que les termes convectifs apparaissant dans les équations de Navier-Stokes subissent des fluctuations importantes pour des nombres de Reynolds élevés lorsque nous passons d'une itération à l'autre. Pour y remédier, nous pourrions réduire l'incrément (Δt) qui sépare deux itérations successives mais ceci conduirait à un processus de convergence très lent. Cependant il existe d'autres alternatives [1] dont la plus courante est la méthode de « Upwind ».

Nous allons à présent modifier notre processus de calcul sur la base des remarques ci-dessus formulées. Appliquons la méthode de « Upwind » pour discrétiser les termes convectifs des équations de Navier-Stokes. Si nous prenons le terme $\left(U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} \right)$, la discrétisation se fait de la manière suivante :

$$\left(U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) = \frac{U_r(i,j)}{2\Delta r} [(1 - \varepsilon_1)U_r(i+1,j) + 2\varepsilon_1 U_r(i,j) + (1 + \varepsilon_1)U_r(i-1,j)] \quad \text{IV.24}$$

Où

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } U_r(i,j) > 0 \\ -1 & \text{si } U_r(i,j) < 0 \end{cases} \quad \text{IV.25}$$

Précisons que cette méthode se contente toutefois d'une approximation du premier ordre.

En procédant de même pour les autres termes convectifs apparaissant dans les équations de Navier-Stokes et en gardant les autres termes tel qu'ils sont dans les équations (IV.17), notre modèle numérique devient alors :

Navier-Stokes :

$$\begin{aligned}
 U_r^{n+1}(i, j) = & U_r^n(i, j) + \Delta t \left(-g - \frac{1}{2\rho\Delta r} [P^n(i+1/2, j+1/2) - P^n(i-1/2, j+1/2)] \right. \\
 & + P^n(i+1/2, j-1/2) - P^n(i-1/2, j-1/2) \\
 & + \frac{\nu}{(\Delta r)^2} [U_r^n(i+1, j) + U_r^n(i-1, j) - 2U_r^n(i, j)] \\
 & + \frac{\nu}{(\Delta Z)^2} [U_r^n(i, j+1) + U_r^n(i, j-1) - 2U_r^n(i, j)] \\
 & + \frac{\nu}{2i(\Delta r)^2} [U_r^n(i+1, j) + U_r^n(i-1, j)] \\
 & + \frac{U_r^n(i, j)}{2\Delta r} [(1 - \varepsilon_1)U_r^n(i+1, j) + 2\varepsilon_1 U_r^n(i, j) + (1 + \varepsilon_1)U_r^n(i-1, j)] \\
 & \left. + \frac{U_z^n(i, j)}{2\Delta z} [(1 - \varepsilon_2)U_r^n(i, j+1) + 2\varepsilon_2 U_r^n(i, j) + (1 + \varepsilon_2)U_r^n(i, j-1)] \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_z^{n+1}(i, j) = & U_z^n(i, j) + \Delta t \left(-\frac{1}{2\rho\Delta Z} [P^n(i+1/2, j+1/2) - P^n(i+1/2, j-1/2)] \right. \\
 & + P^n(i-1/2, j+1/2) - P^n(i-1/2, j-1/2) \\
 & + \frac{\nu}{(\Delta r)^2} [U_z^n(i+1, j) + U_z^n(i-1, j) - 2U_z^n(i, j)] \\
 & + \frac{\nu}{(\Delta Z)^2} [U_z^n(i, j+1) + U_z^n(i, j-1) - 2U_z^n(i, j)] \\
 & + \frac{\nu}{2i(\Delta r)^2} [U_z^n(i+1, j) + U_z^n(i-1, j)] \\
 & + \frac{U_r^n(i, j)}{2\Delta r} [(1 - \varepsilon_1)U_z^n(i+1, j) + 2\varepsilon_1 U_z^n(i, j) + (1 + \varepsilon_1)U_z^n(i-1, j)] \\
 & \left. + \frac{U_z^n(i, j)}{2\Delta z} [(1 - \varepsilon_2)U_z^n(i, j+1) + 2\varepsilon_2 U_z^n(i, j) + (1 + \varepsilon_2)U_z^n(i, j-1)] \right)
 \end{aligned}$$

IV.26

Avec :

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_1 = \text{signe}(U_r^n(i, j)) \\
 \varepsilon_2 = \text{signe}(U_z^n(i, j))
 \end{aligned} \right\}$$

IV.27

Et nous utiliserons la condition de Courant-Friedrichs-lewy [1] comme nouvelle condition de stabilité

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{\Delta r^2}{2\nu + \Delta r |U_{r0}|}, \frac{\Delta Z^2}{2\nu + \Delta Z |U_{z0}|} \right)$$

IV.28

Et nous rajoutons les conditions aux limites concernant le diaphragme :

- Conditions aux limites concernant le diaphragme :

$$\text{Pour } \left. \begin{array}{l} j \in [L - e/2, L + e/2] \\ i \in [r_0, R] \end{array} \right\}$$

$$\forall t$$

$$U_r(i, j) = 0$$

$$U_z(i, j) = 0$$

$$i \in [r_0 + 1, R]$$

$$\forall t$$

$$U_r(i, j) = 0$$

$$U_z(i, j) = 0$$

$$i \in [r_0 + 2, R]$$

$$\forall t$$

$$U_r(i, j) = 0$$

$$U_z(i, j) = 0$$

IV.29

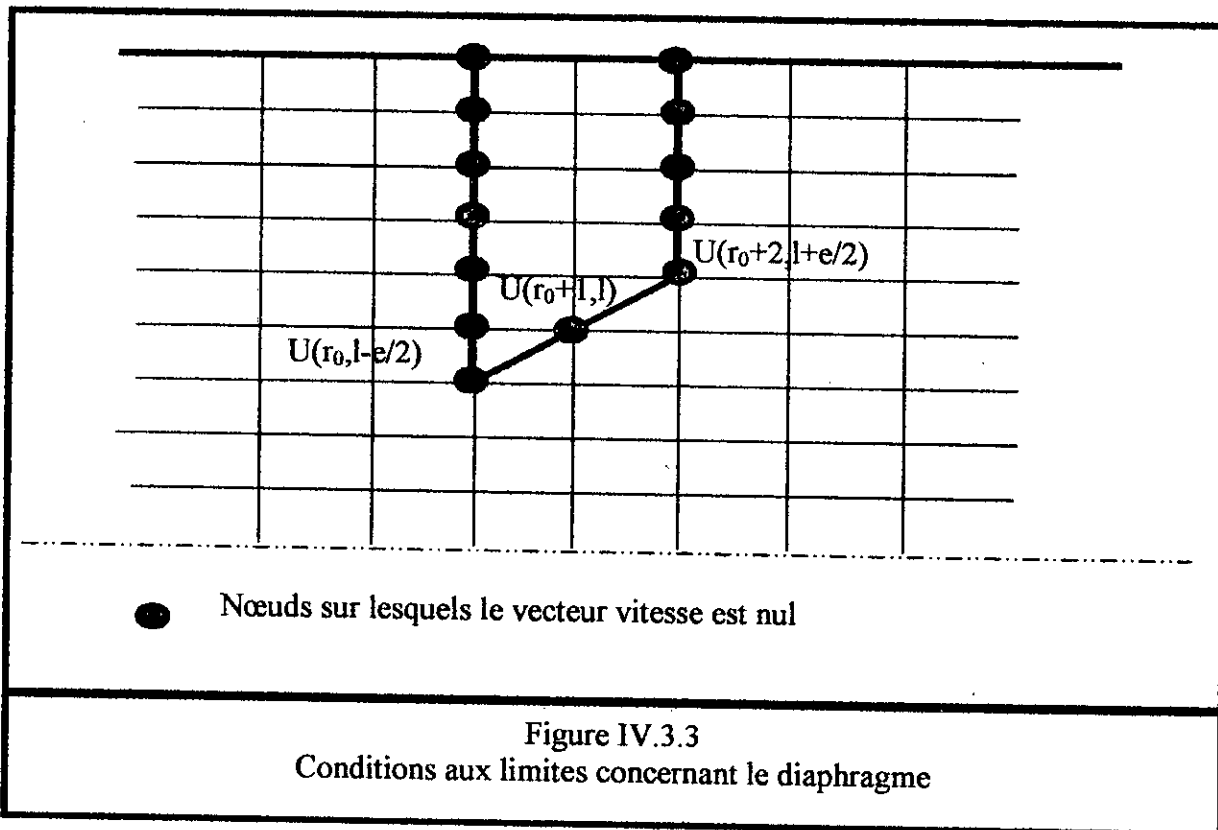
Avec :

L : Longueur à laquelle est placé le diaphragme.

e : Epaisseur du diaphragme.

R : Rayon de la conduite.

r_0 : Rayon de l'orifice.



Algorithme tenant compte des nouvelles conditions :

Début**1. Introduction des données nécessaires à la résolution :**

$$R, N, M, U_{r0}, U_{z0}, P_0, \varepsilon, \tau$$

1.1. Evaluation de :

$$\Delta r=R/M, \Delta Z=L/N, \Delta t, C \text{ (à partir des conditions de stabilité).}$$

2. Conditions initiales

Pour $i=0$ à $N+1$

Pour $j=0$ à $M+1$

$$U_r^0(i, j) = U_{r0}$$

$$U_z^0(i, j) = U_{z0}$$

$$P^0(i, j) = P_0$$

3. Résolution des équations de Navier-Stokes :

 Pour $n=0$ à 100

 Calcul de U_r^{n+1} et U_z^{n+1} à partir des équations (IV.26)

 Pour $j=1$ à M

 Pour $i=1$ à N

$$\begin{aligned}
 U_r^{n+1}(i, j) = & U_r^n(i, j) + \Delta t \left(-g - \frac{1}{2\rho\Delta r} [P^n(i+1/2, j+1/2) \right. \\
 & + P^n(i+1/2, j-1/2) - P^n(i-1/2, j-1/2)] \\
 & + \frac{\nu}{(\Delta r)^2} [U_r^n(i+1, j) + U_r^n(i-1, j) - 2U_r^n(i, j)] \\
 & + \frac{\nu}{(\Delta Z)^2} [U_r^n(i, j+1) + U_r^n(i, j-1) - 2U_r^n(i, j) \\
 & + \frac{\nu}{2i(\Delta r)^2} [U_r^n(i+1, j) + U_r^n(i-1, j)] \\
 & + \frac{U_r^n(i, j)}{2\Delta r} [(1-\varepsilon_1)U_r^n(i+1, j) + 2\varepsilon_1 U_r^n(i, j) + \\
 & + \frac{U_z^n(i, j)}{2\Delta z} [(1-\varepsilon_2)U_r^n(i, j+1) + 2\varepsilon_2 U_r^n(i, j) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_z^{n+1}(i, j) = & U_z^n(i, j) + \Delta t \left(-\frac{1}{2\rho\Delta Z} [P^n(i+1/2, j+1/2) \right. \\
 & + P^n(i-1/2, j+1/2) - P^n(i-1/2, j-1/2)] \\
 & + \frac{\nu}{(\Delta r)^2} [U_z^n(i+1, j) + U_z^n(i-1, j) - 2U_z^n(i, j)] \\
 & + \frac{\nu}{(\Delta Z)^2} [U_z^n(i, j+1) + U_z^n(i, j-1) - 2U_z^n(i, j) \\
 & + \frac{\nu}{2i(\Delta r)^2} [U_z^n(i+1, j) + U_z^n(i-1, j)] \\
 & + \frac{U_r^n(i, j)}{2\Delta r} [(1-\varepsilon_1)U_z^n(i+1, j) + 2\varepsilon_1 U_z^n(i, j) + \\
 & + \frac{U_z^n(i, j)}{2\Delta z} [(1-\varepsilon_2)U_z^n(i, j+1) + 2\varepsilon_2 U_z^n(i, j) +
 \end{aligned}$$

n

j

i

n

3.1. Conditions aux limites :

Pour $i=N$

Pour $j=0$ à $M+1$

	$U_r^{n+1}(i, j) = 0$ $U_z^{n+1}(i, j) = 0$
--	---

3.2. Conditions de symétrie :

Pour $i=0$ à $N+1$

Pour $j=0$ à $M+1$

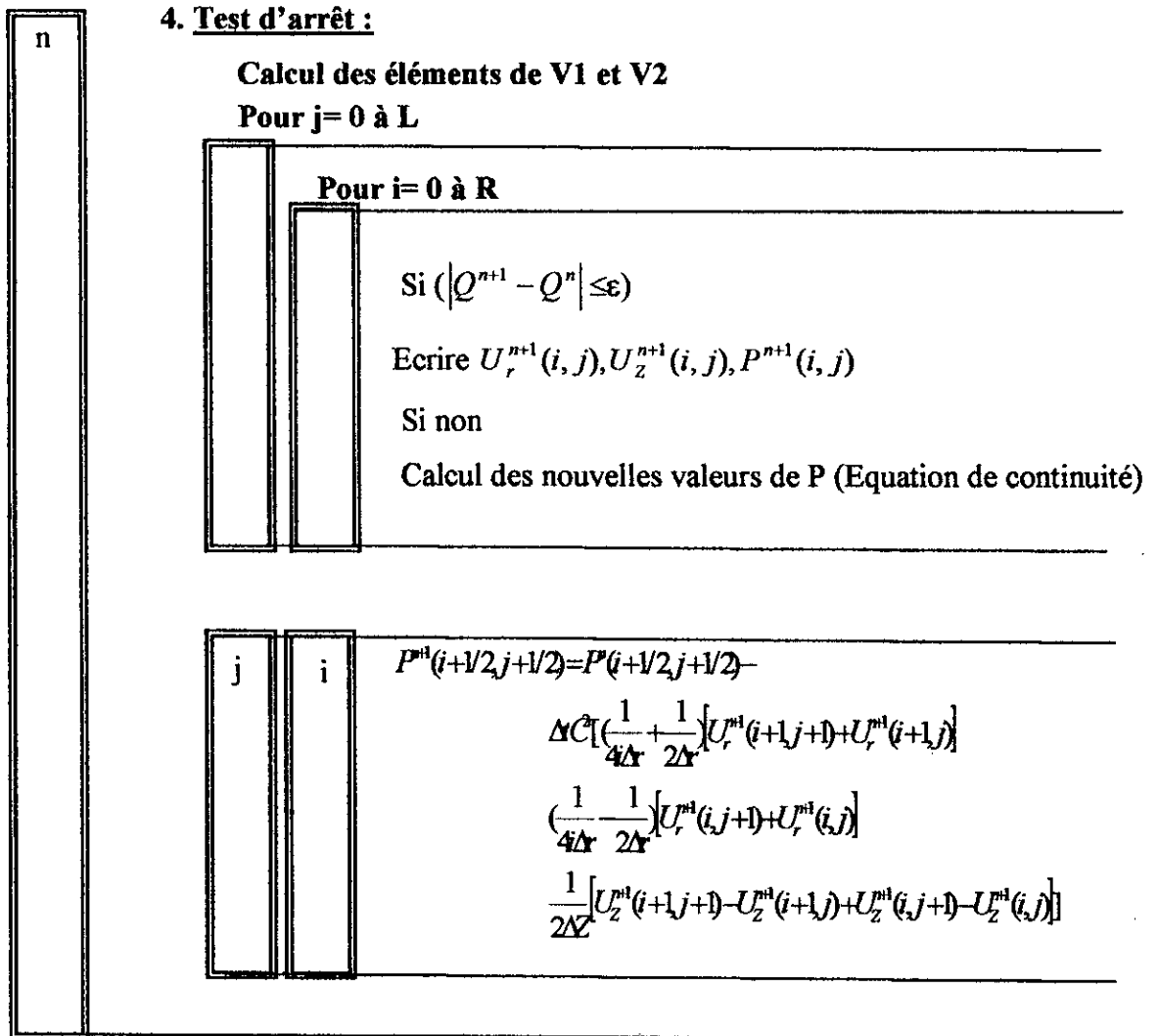
	$U_r^{n+1}(i, j) = -U_r^{n+1}(i-1, j)$ $U_z^{n+1}(i, j) = U_z^{n+1}(i-1, j)$
--	--

3.3. Conditions aux limites concernant le diaphragme

Pour $j=0$ à $L+1$

	<p>Pour $i=r$ à R</p> <table border="1"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td> $U_r^{n+1}(i, j) = 0$ $U_z^{n+1}(i, j) = 0$ </td> </tr> </table>		$U_r^{n+1}(i, j) = 0$ $U_z^{n+1}(i, j) = 0$
	$U_r^{n+1}(i, j) = 0$ $U_z^{n+1}(i, j) = 0$		
	<p>Pour $i=r+1$ à R</p> <table border="1"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td> $U_r^{n+1}(i, j) = 0$ $U_z^{n+1}(i, j) = 0$ </td> </tr> </table>		$U_r^{n+1}(i, j) = 0$ $U_z^{n+1}(i, j) = 0$
	$U_r^{n+1}(i, j) = 0$ $U_z^{n+1}(i, j) = 0$		
	<p>Pour $i=r+2$ à R</p> <table border="1"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td> $U_r^{n+1}(i, j) = 0$ $U_z^{n+1}(i, j) = 0$ </td> </tr> </table>		$U_r^{n+1}(i, j) = 0$ $U_z^{n+1}(i, j) = 0$
	$U_r^{n+1}(i, j) = 0$ $U_z^{n+1}(i, j) = 0$		

n



Pour la conduite avec le diaphragme, la comparaison des vitesses devient insuffisante pour le test d'arrêt. Il est indispensable de comparer la variation du débit dans l'espace et dans le temps ; c'est-à-dire nous devons comparer :

$$|Q^n(j) - Q^n(j+1)| \text{ et } |Q^{n+1}(j) - Q^n(j)|$$

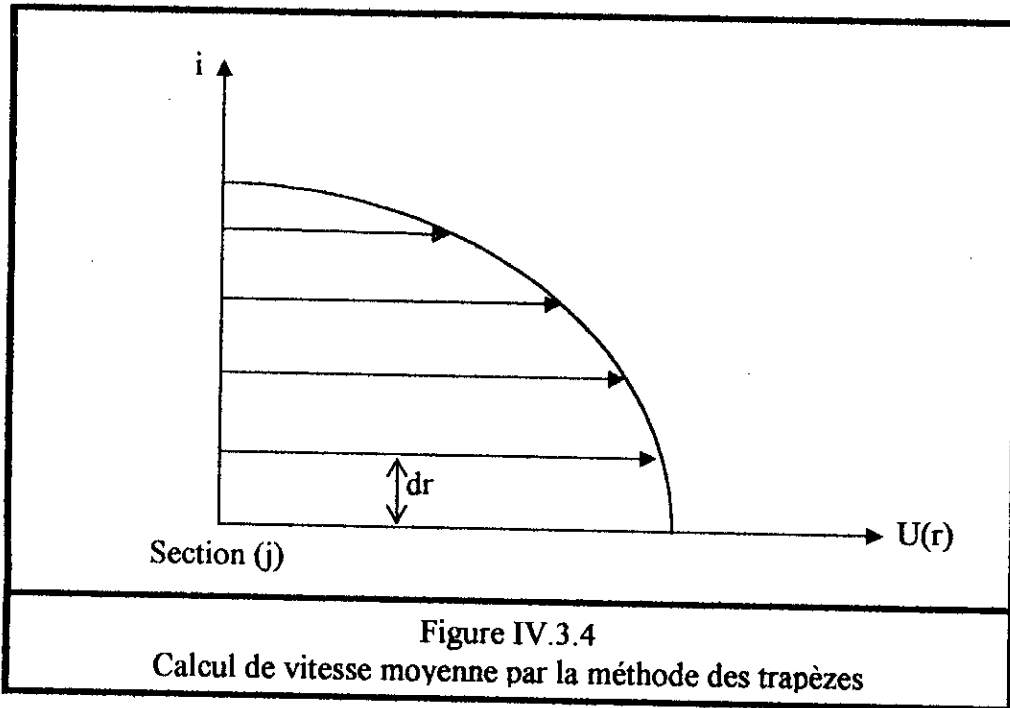
Le débit est défini comme étant le produit de la vitesse moyenne d'une section et l'aire de cette section.

$$Q^n(j) = U^n(j) \times S^n(j) \tag{IV.30}$$

La vitesse moyenne d'une section est calculée à partir de l'équation (IV.31)

$$U_m = \frac{1}{R} \int_0^R U(r) dr \tag{IV.31}$$

Pour le calcul de cette intégration nous avons utilisé la méthode des trapèzes :



$$U_m^n(j) = \sum_0^{R-1} U^n(i, j) \times i + \sum_0^{R-1} \frac{1}{2} [U^n(i, j) - U^n(i+1, j)] \quad \text{IV.32}$$

Avec $i \in [0, R-1]$

Les sections sont calculées de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} S(j) &= 2\pi \int_0^R r dr \\ S(j) &= \pi \sum_0^R i^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{IV.33}$$

Finalement le débit dans une section est :

$$Q^n(j) = U^n(j) \times S^n(j)$$

Chapitre V :

Résultats et interprétation

Avant de présenter les résultats de notre étude, il convient de relever les observations suivantes concernant l'exécution du programme.

Le choix du nombre de nœuds du maillage utilisé est conditionné par la valeur du nombre de Reynolds (R_D) et de l'emplacement du diaphragme.

En effet, le maillage doit être d'autant plus fin que (R_D) est élevé. Ainsi, par exemple pour un nombre de Reynolds inférieur à 1000, on pourrait se contenter d'un maillage de (10 x 160) pour une conduite de 40mm de diamètre. Si le nombre de Reynolds dépasse cette valeur, il devient nécessaire d'opter pour un maillage plus fin ; (20 x 800) par exemple.

Un autre facteur qui influe sur le nombre de nœuds du maillage, est l'emplacement du diaphragme. Le maillage doit être plus fin qu'on se rapproche du diaphragme.

Une fois le maillage choisi (Δr) et (ΔZ) seront fixés. La valeur de (Δt) et de la constante de compressibilité artificielle (C) limite à ne pas dépasser, seront fixées à partir des conditions de stabilités (IV.21 et IV.28).

V.1. Présentation des résultats et discussion :

Les résultats de l'étude sont présentés en deux parties :

V.1.1.conduite simple sans singularité :

Les résultats sont représentés graphiquement sur les figures (V.1.1) à (V.1.6)

V.1.1.1. Les profils de vitesses :

Sur les figures (V.1.1 et V.1.4 a, b, c), nous avons représenté pour différents diamètres le profil de la vitesse axiale U_z pour six abscisses correspondant respectivement à l'entrée, à 2mm de l'entrée, au quart, à la moitié, au trois-quart, et à la sortie de la conduite pour le régime laminaire et turbulent.

- Figure (V.1.1) pour un nombre de Reynolds de 800.

Nous observons l'évolution que subissent ces profils le long de la conduite. A l'entrée de la conduite la répartition des vitesses est uniforme sur toute la section, plus le fluide s'écoule dans la conduite, la courbe représentative des vitesses tend à un profil purement parabolique avec un maximum au centre de la section et une vitesse nulle aux parois. Ceci est dû à la présence des parois qui provoquent un freinage des particules fluides au contact créant ainsi une couche limite laminaire. Les particules liquides de la zone centrale de la conduite qui n'ont pas subi l'effet du frottement sont accélérées de manière que le débit total à travers toutes les sections soit maintenu constant.

Pour ces trois conduites de différents diamètres nous avons remarqué qu'à partir d'une distance (l) approximativement égale à 16 fois le diamètre (Figure V.1.1) de l'origine amont de la conduite, la vitesse axiale ne subit plus de grande variation et elle est pratiquement égale à deux fois la vitesse moyenne et la forme de la courbe représentative des vitesses ne change pas de façon importante. Ceci indique que la couche limite laminaire est pleinement développée c'est-à-dire que son épaisseur est maintenue constante à partir de cette section jusqu'à l'extrémité aval de la conduite. En régime laminaire, la couche limite laminaire occupe presque la totalité de la section de la conduite [5] (Figure V.1.3).

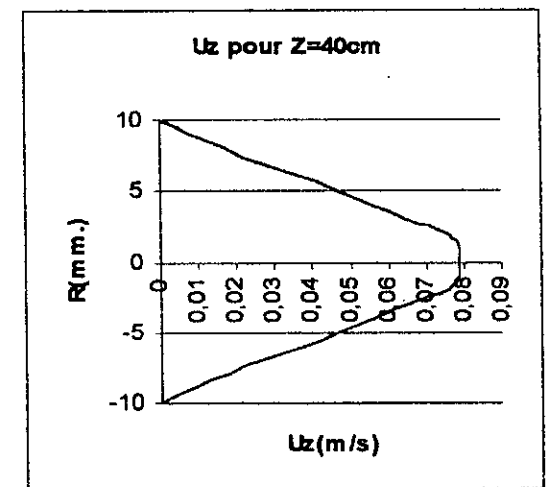
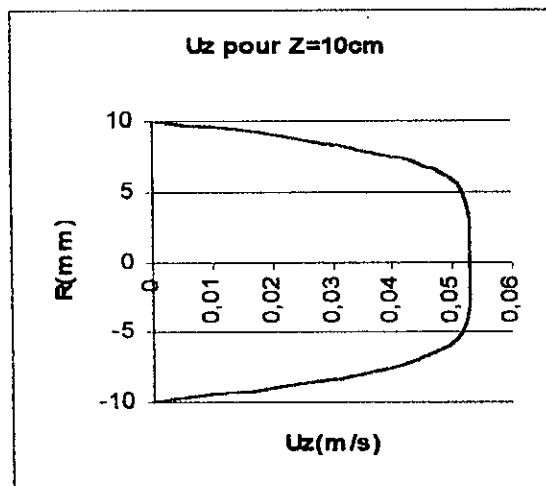
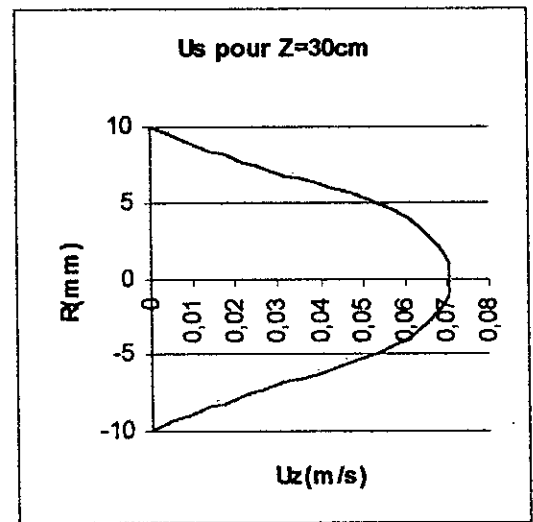
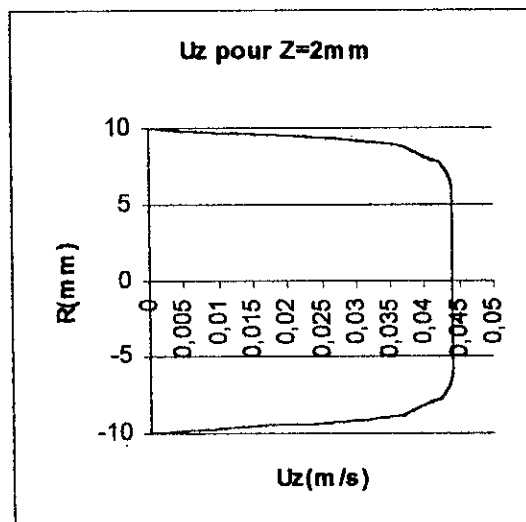
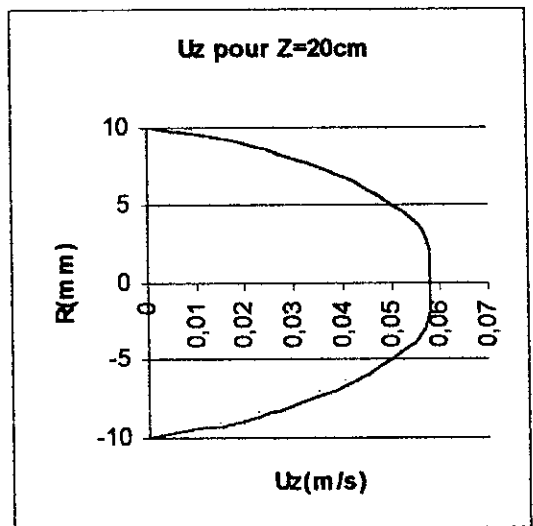
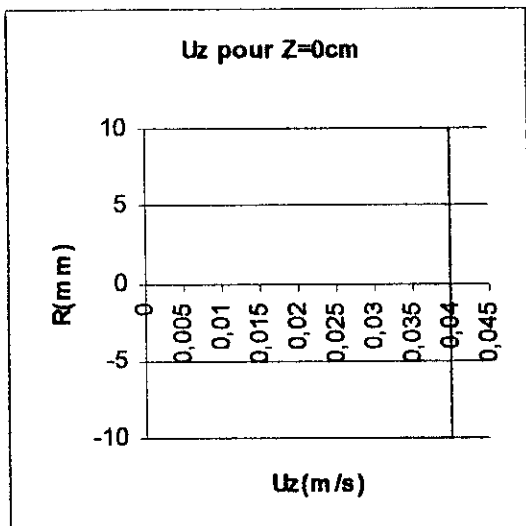


Figure V.1.1.a
Répartition des vitesses dans une conduite cylindrique de 20mmde diamètre en régime laminaire
 $R_d=800$

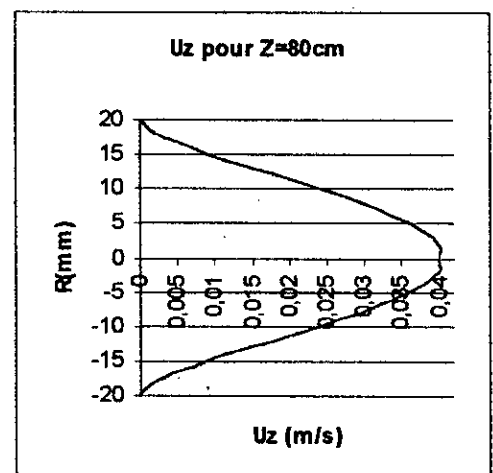
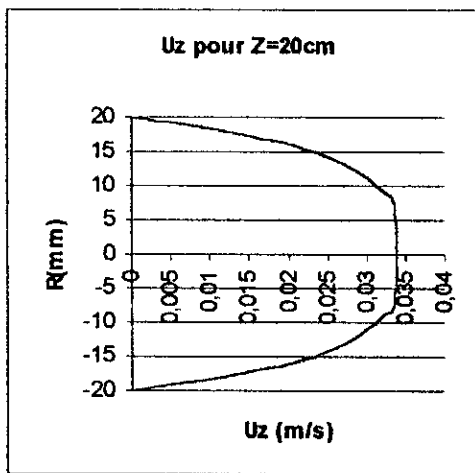
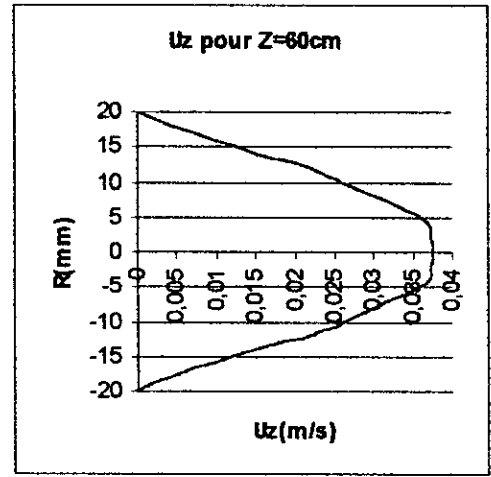
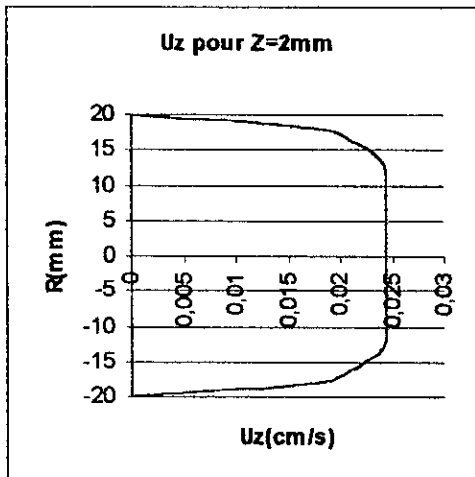
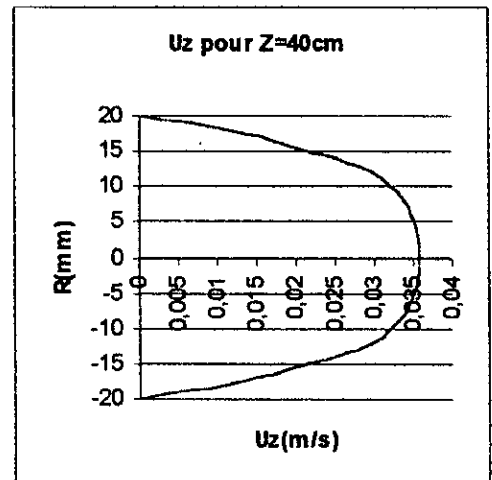
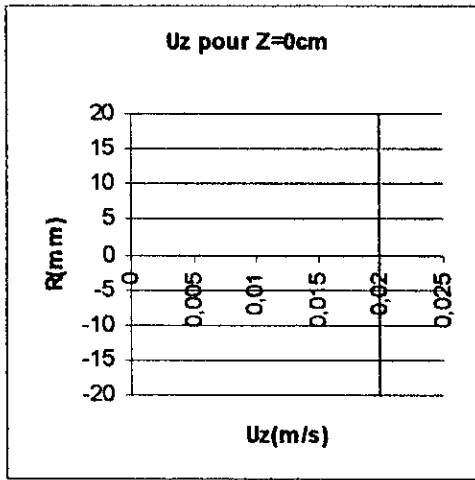


Figure V.1.1.b Répartition des vitesses dans une conduite cylindrique de 40mmde diamètre en régime laminaire $R_d=800$

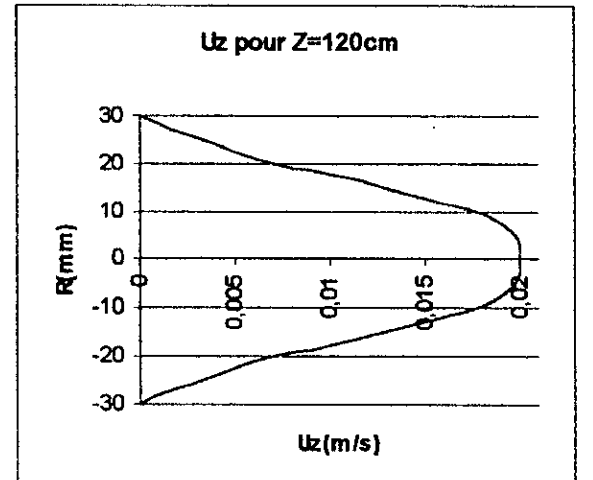
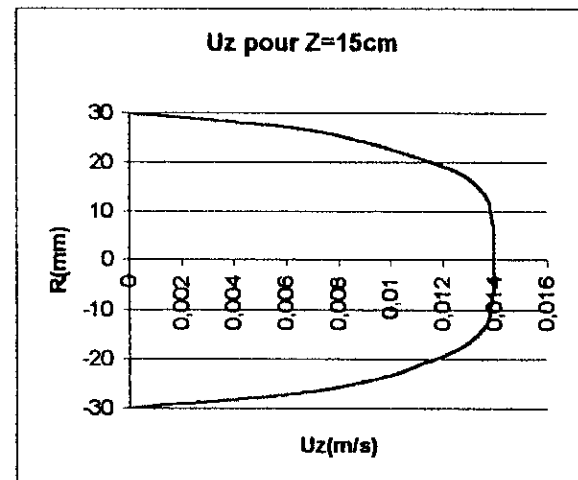
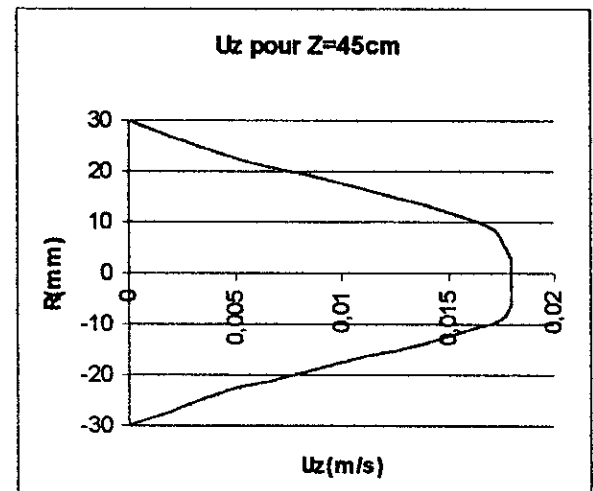
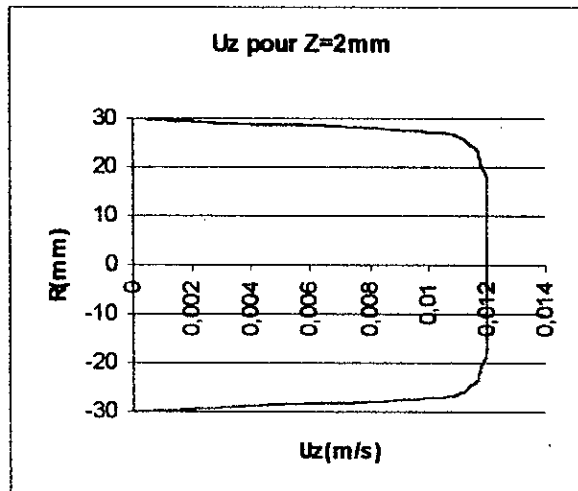
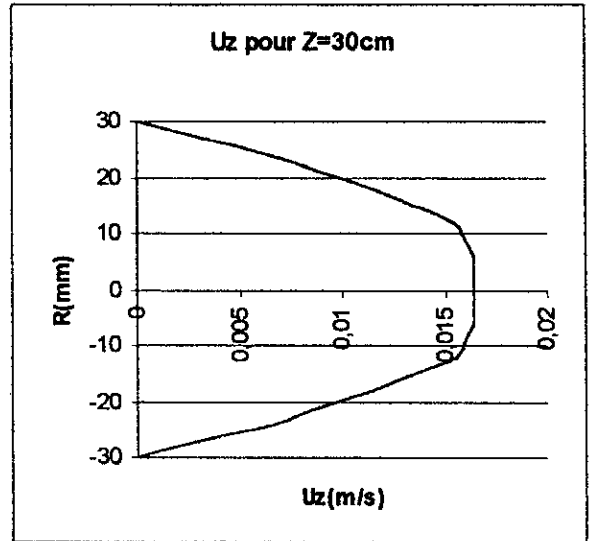
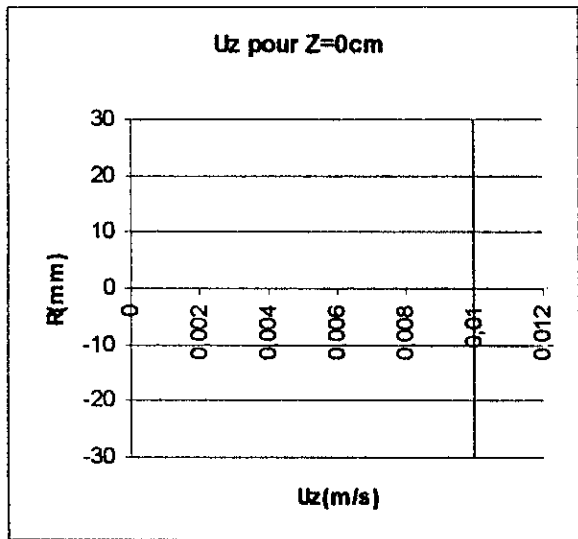


Figure V.1.1 c
Répartition des vitesses dans une conduite cylindrique de 60mm de diamètre en régime laminaire $R_d=800$

La distance (l) expérimentale [4] mesurée depuis l'origine amont du tube à partir de laquelle la couche limite est pleinement développée est donnée par la formule :

$$l = 0,0195 \frac{D^2 U}{\nu} \tag{V.1}$$

U étant la vitesse moyenne de l'écoulement.

Nous avons calculé la valeur de cette longueur de l'équation (V.1) pour les trois conduites et nous avons comparé les résultats obtenus avec les résultats théoriques calculés à partir de l'équation (V.1).

Les résultats sont représentés sur le tableau (1)

Tableau (1) : longueurs auxquelles la couche limite laminaire est pleinement développée.

Diamètre de la conduite en (mm)	Longueur calculée à partir de l'équation (V.1) en (cm)	Longueur obtenue à partir les résultats numériques en (cm)
20	31,2	31
40	62,4	63
60	93,6	95

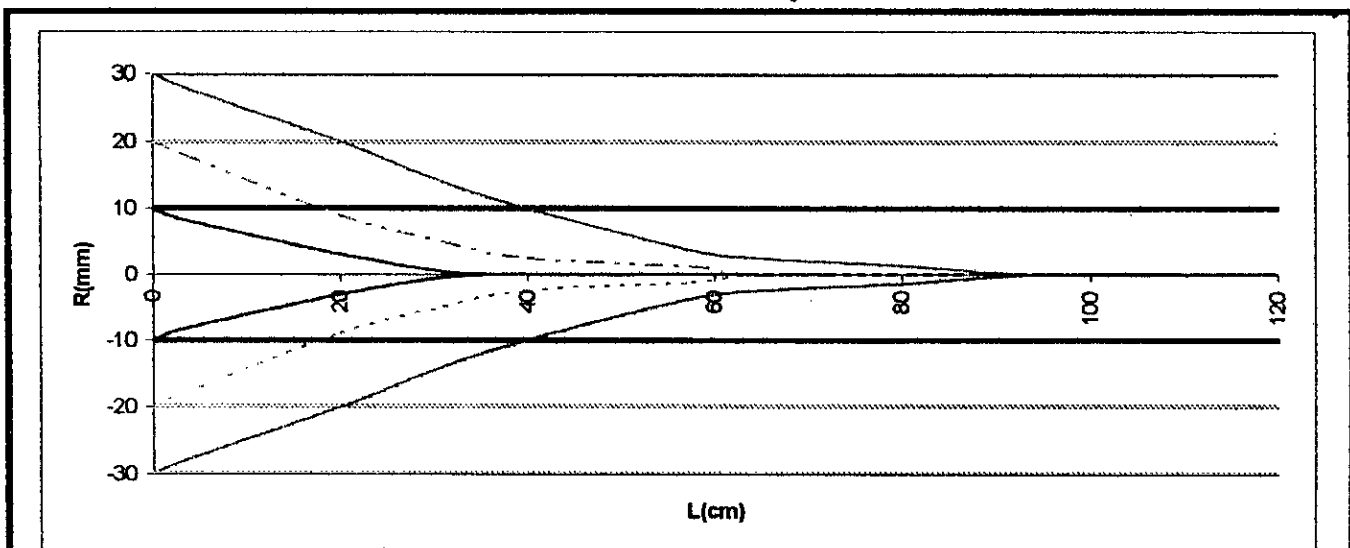
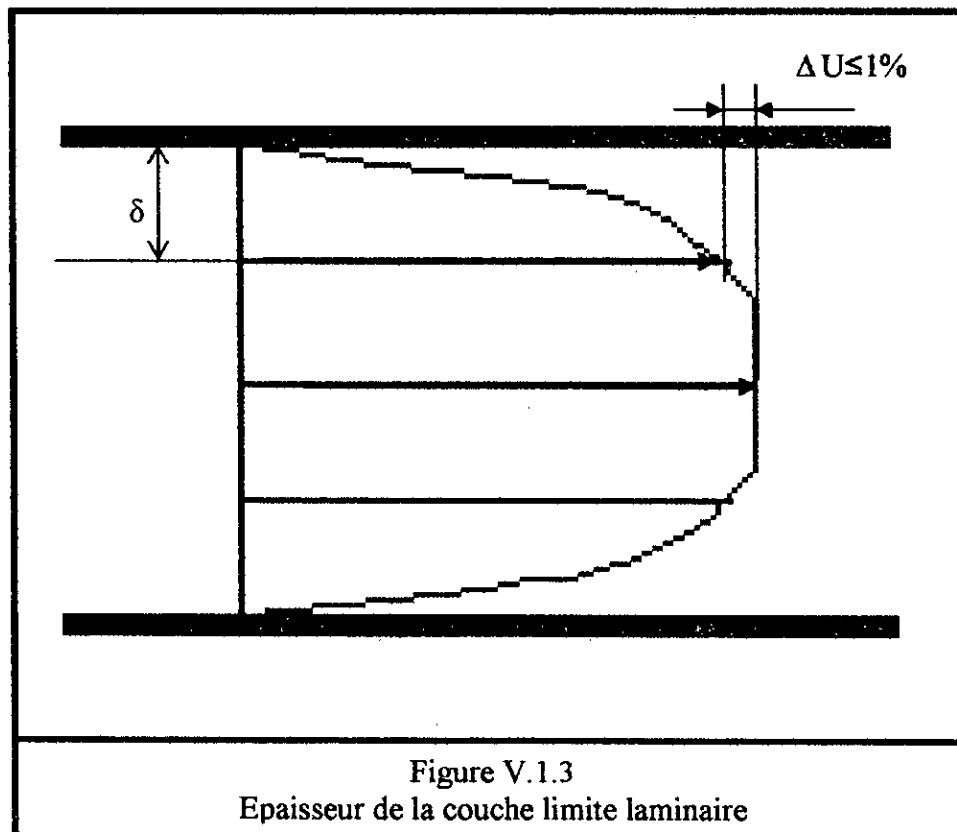


Figure V.1.2
Evolution de la couche limite dans des conduites cylindriques de différentes sections en régime laminaire

Pour représenter l'évolution de la couche limite laminaire nous avons opté pour la convention suivante :

L'épaisseur de la couche limite laminaire est définie comme étant la distance à laquelle la vitesse diffère de moins de 1% de la vitesse dans le corps de l'écoulement.



L'épaisseur de la couche limite laminaire [4] est donnée par la formule (V.2)

$$\delta = \frac{KZ}{\sqrt{R_x}} \quad \text{V.2}$$

Avec :

δ : Epaisseur de la couche limite laminaire.

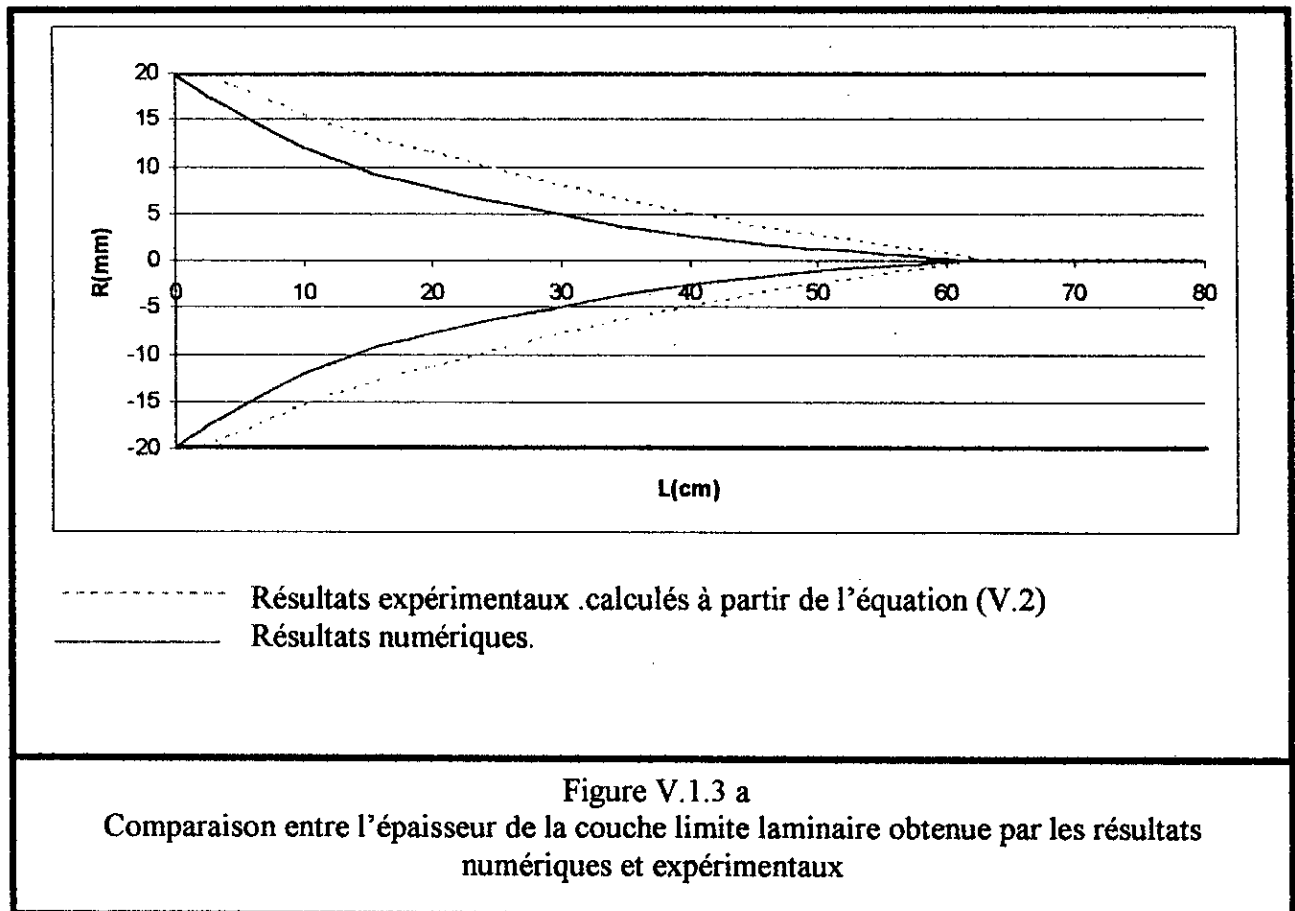
Z : Distance a partir de l'origine amont de la conduite.

R_x : Nombre de Reynolds calculé avec la vitesse axiale à la distance Z .

K : Constante (généralement la constante $K=5$).

Nous avons comparé l'épaisseur de la couche limite laminaire (Figure V.1.3 a) obtenue à partir de résultats numériques avec celles calculées par l'équation (V.2) .

Nous remarquons que l'allure de la courbe que nous avons obtenu à partir des résultats numériques a la même forme que celle tracée à partir de l'équation (V.2).



Quand à l'épaisseur obtenue numériquement est plus importante que celle tracée à partir de l'équation (V.2), nous estimons ce décalage à une surestimation de la différence de vitesse entre le corps de l'écoulement et la vitesse dans la couche limite laminaire ($\Delta U \leq 0.01$ [5]).

Les Figures (V.1.4 a, b et c) représentent l'évolution de la vitesse axiale dans des conduites de différents diamètres et pour un nombre de Reynolds de 30 000.

Nous remarquons que les profils de vitesse sont pratiquement paraboliques et peuvent être décomposés en deux zones distinctes :

➤ Zone centrale : elle représente le corps de l'écoulement. Dans cette zone la vitesse des filets liquides varie peu, voire même qu'elle présente une répartition uniforme des vitesses.

➤ La deuxième zone située au voisinage des parois comporte une très faible partie de l'écoulement. Dans cette zone la vitesse des filets liquides varie de façon plus importante par rapport à la zone centrale et le profil des vitesses rejoint très rapidement le point de vitesse zéro sur les parois.

Cette brusque variation est due toujours à la présence de parois qui freinent les filets fluides créant ainsi une couche limite.

La répartition, presque uniforme des vitesses dans la zone centrale de l'écoulement est une conséquence directe de la présence de la turbulence qui provoque une égalisation des vitesses par rapport au régime laminaire [5].

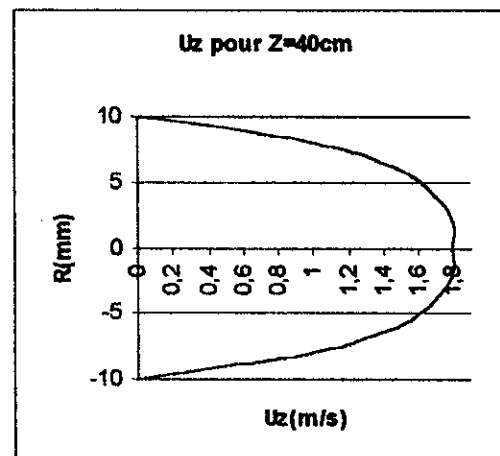
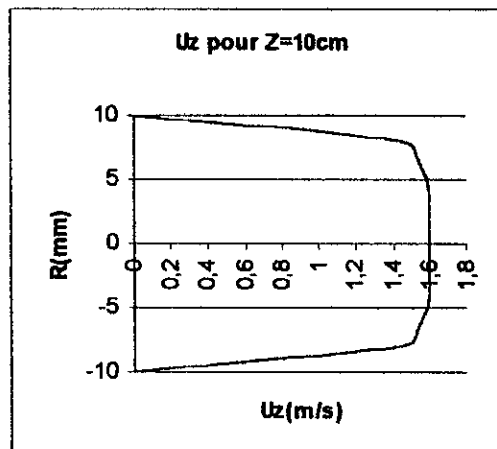
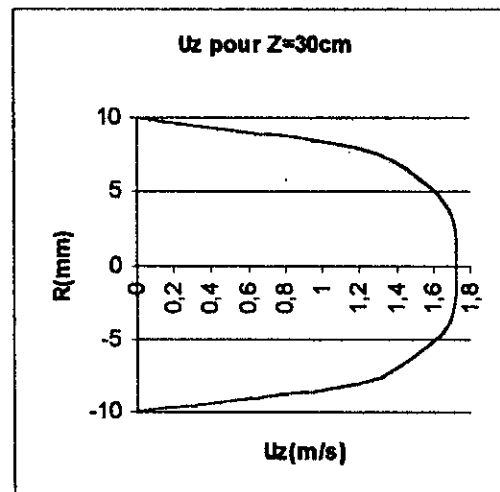
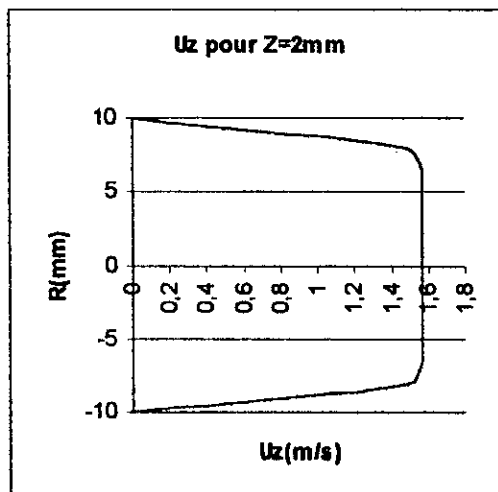
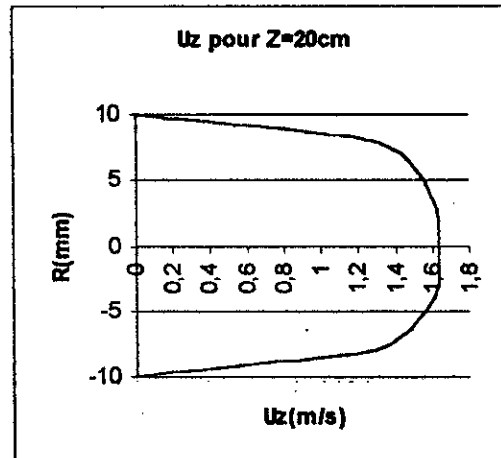
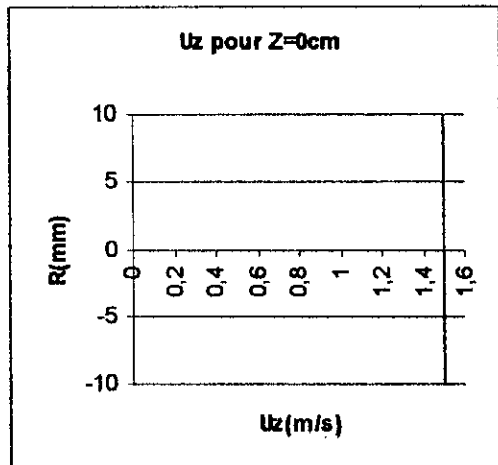


Figure V.1.4 a
Répartition des vitesses dans une conduite cylindrique de 20mm de diamètre en régime turbulent $Rd=30\ 000$

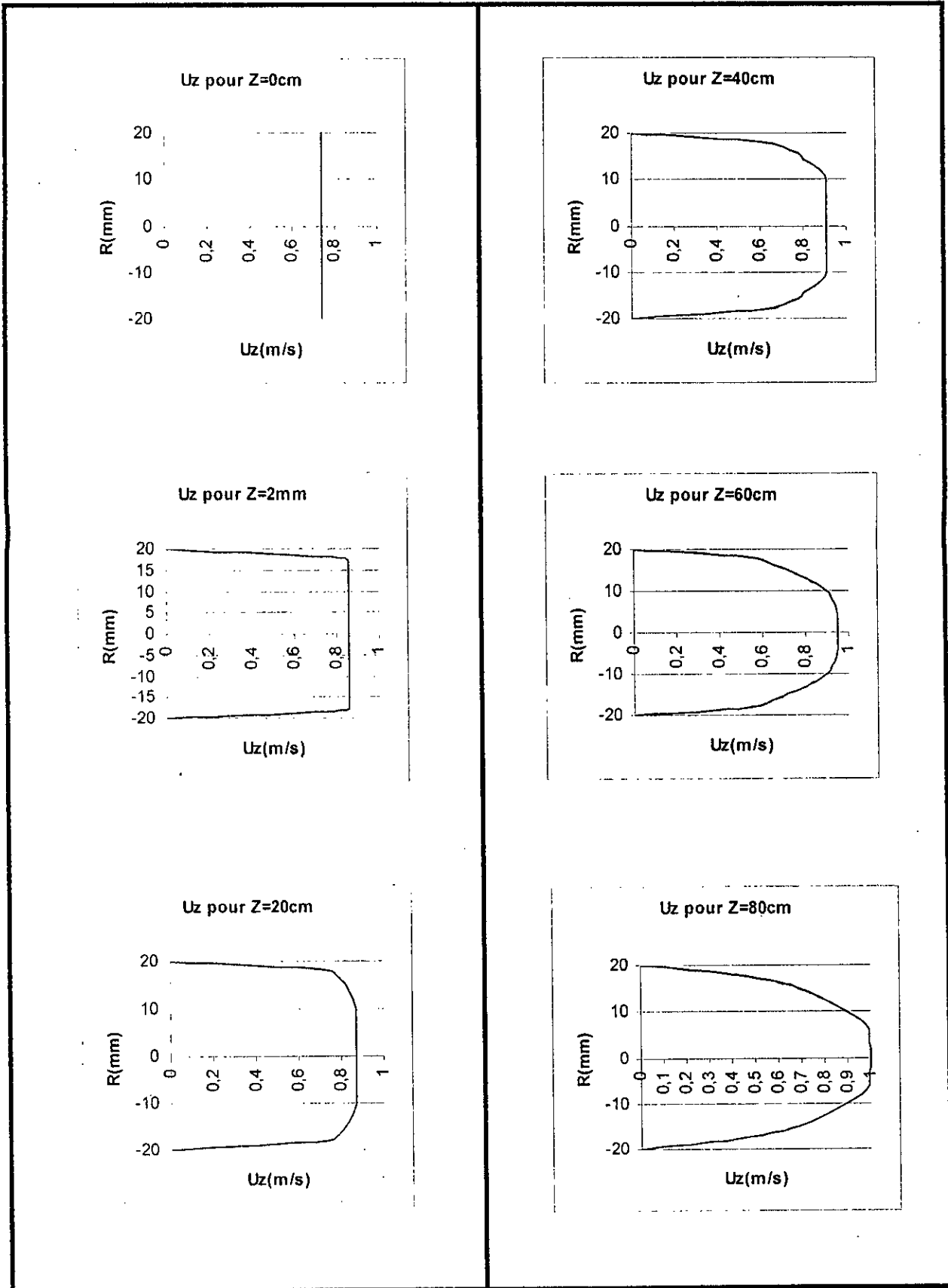


Figure V.1.4 b
Répartition des vitesses le long d'une conduite cylindrique de 40mmde diamètre en régime turbulent $Rd=30\ 000$

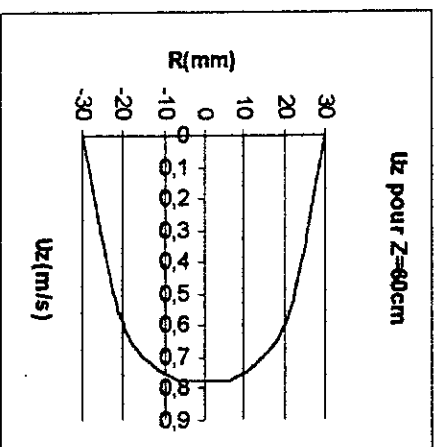
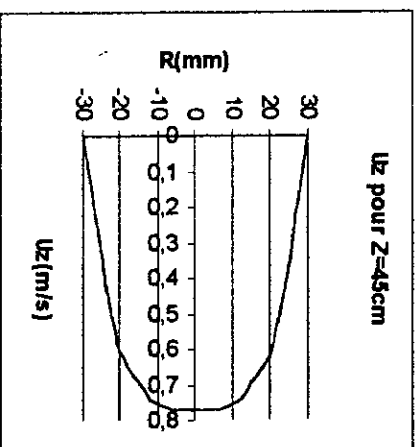
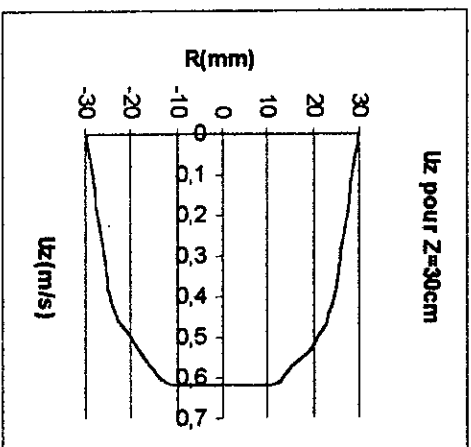
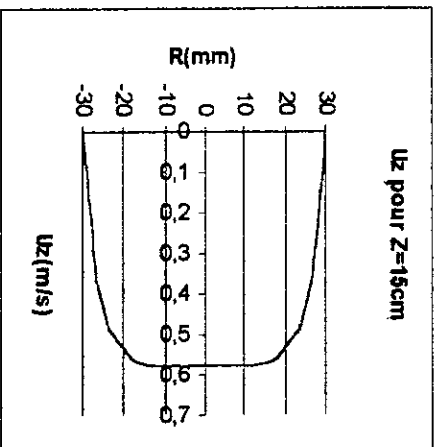
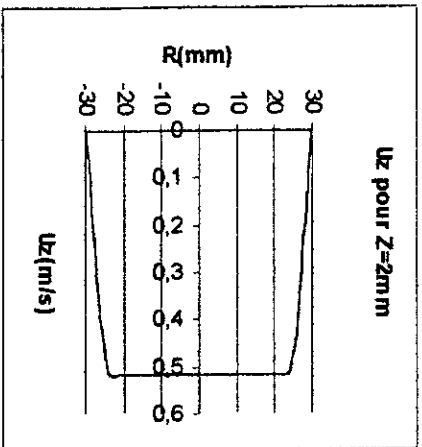
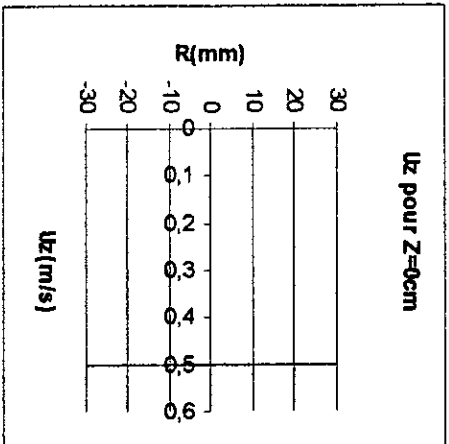


Figure V.1.4 c
Répartition des vitesses le long d'une conduite cylindrique de 60mm de diamètre en régime turbulent $R_d=30\ 000$

La figure (V.1.5) représente l'évolution des vitesses radiales U_r le long d'une conduite de 20mm de diamètre pour différents rayons.

Nous remarquons nettement que les vitesses radiales sont constantes sur un même rayon, et elles diminuent au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'axe de la conduite. Cette diminution est la conséquence directe de la présence de la couche limite ; en effet, les couches fluides qui sont au voisinage des parois présentent un grand gradient de vitesse ; ce dernier diminue lorsque l'on s'éloigne de la zone d'influence de la couche limite [5].

Les courbes représentatives de l'évolution des vitesses radiales pour le régime laminaire et le régime turbulent ont la même allure ; sauf que le gradient de vitesse radiale dans le régime laminaire est plus faible que celui du régime turbulent. Toutefois le gradient de vitesse radiale reste négligeable devant le gradient des vitesses axiales.

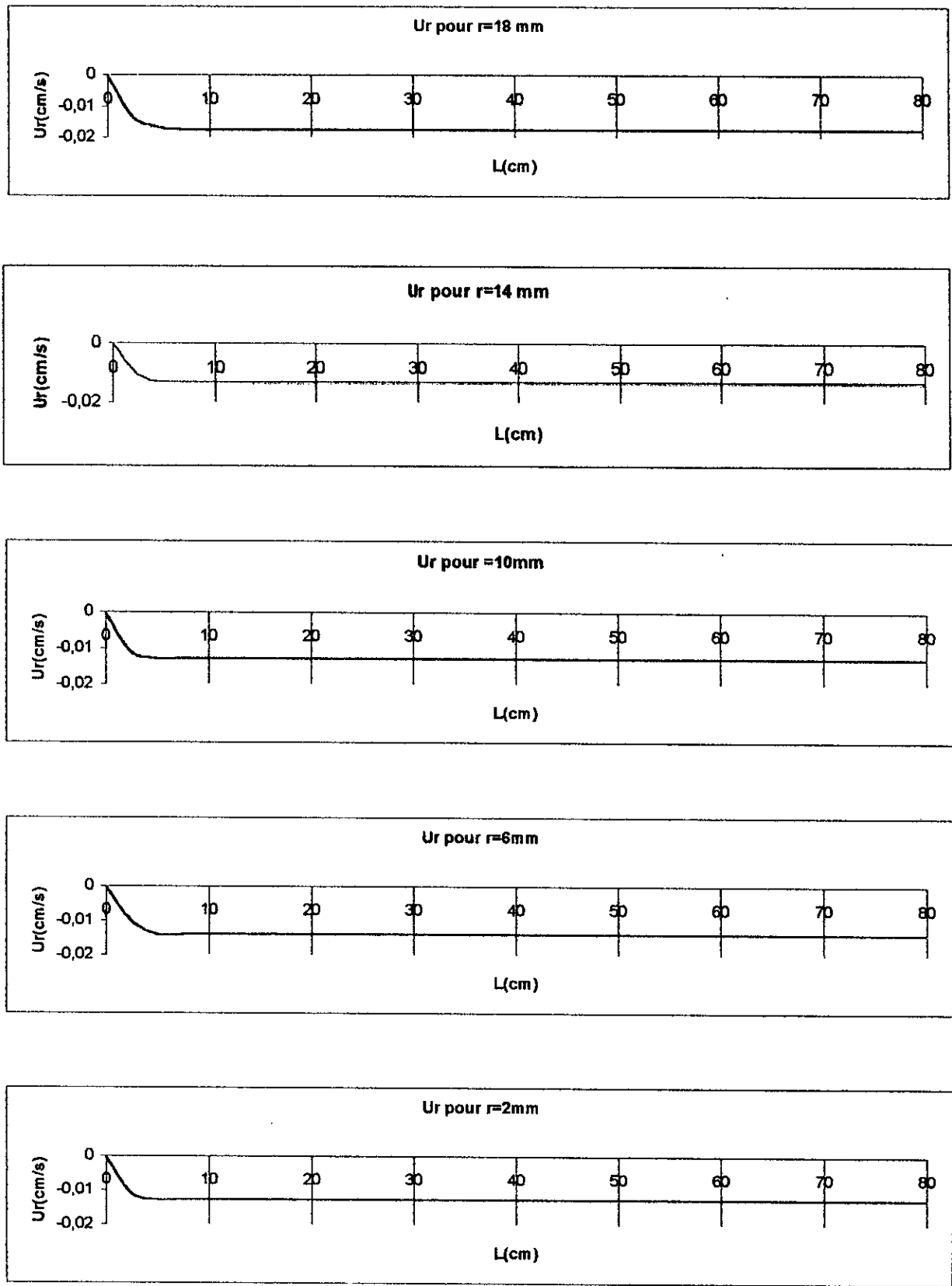
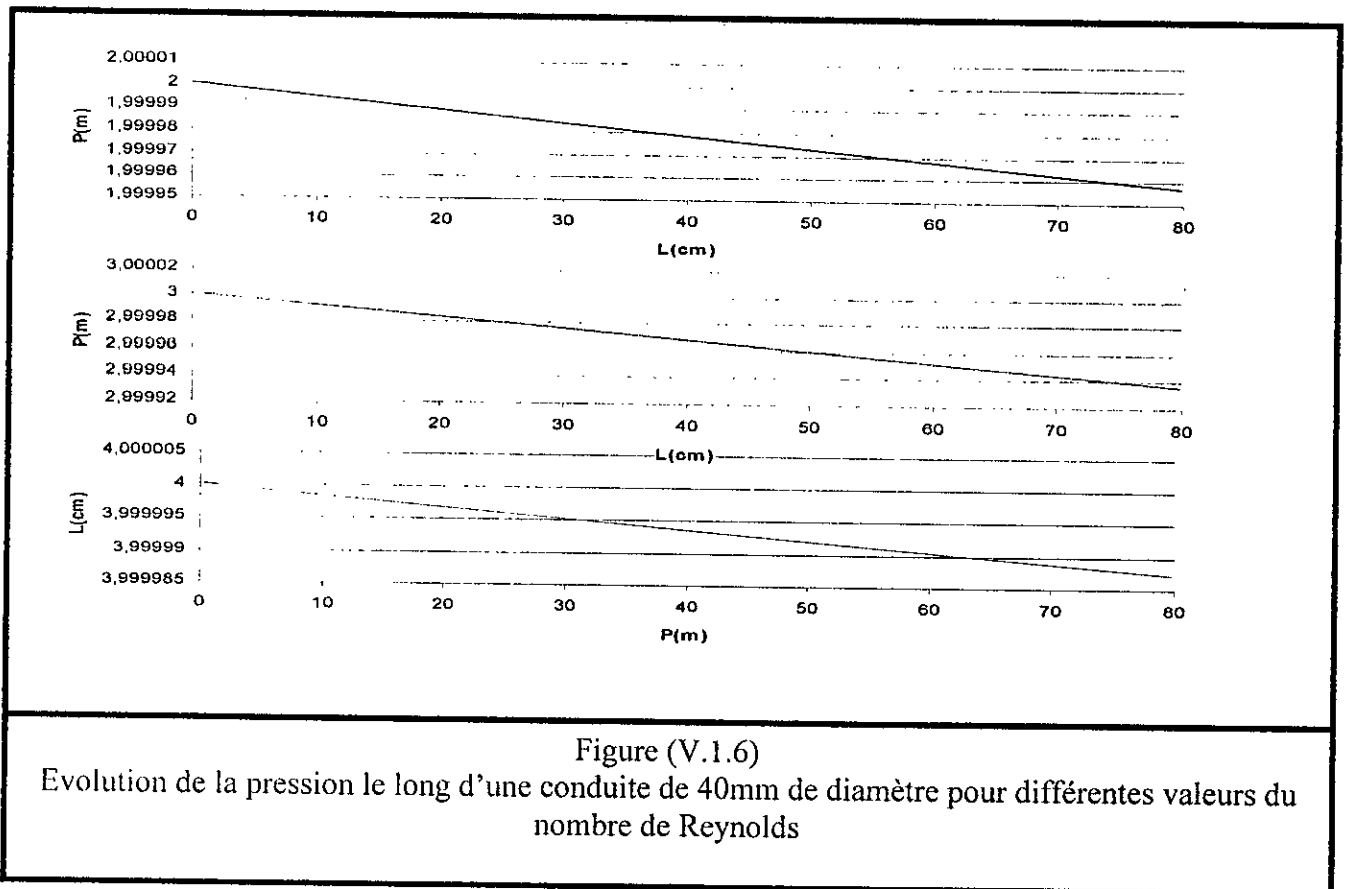


Figure V.1.5
Evolution de la vitesse radiale le long d'une conduite de 20mm de diamètre en régime turbulent $R_d=30\ 000$

V.1.1.2. la pression :

La figure (V.1.6) représente l'évolution de la pression le long d'une conduite cylindrique de 40mm de diamètre sur son axe, pour différentes valeurs du nombre de Reynolds.

La courbe représentative de la pression est une droite décroissante le long de la conduite. Cette diminution de la pression est due à l'augmentation de la vitesse locale de l'écoulement conformément au théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie) [4]. Cette chute de pression diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds.



Pour le régime laminaire ($Rd < 2000$) la courbe de la chute de pression est décroissante, c'est-à-dire qu'elle est inversement proportionnelle au nombre de Reynolds c'est ce qu'exprime l'équation (V.3) [5].

$$\Delta P = \rho \frac{1}{2} \frac{64}{R_d} \frac{L}{D} U^2 \text{ (Pas)} \quad \text{V.3}$$

Toutefois la chute de pression obtenue par les résultats numériques n'est pas aussi importante que celle décrite par l'équation (V.3), car nous n'avons pas tenu compte de la rugosité des parois.

Après cette analyse de l'écoulement dans une conduite cylindrique sans singularité et la comparaison des résultats obtenus avec les résultats théoriques et expérimentaux d'autres auteurs, cesdits résultats obtenus nous confirment la validité de notre modèle mathématique.

A présent nous allons analyser l'écoulement dans une conduite cylindrique comportant un diaphragme

V.1.2. Conduite cylindrique comportant un diaphragme :

V.1.2.1. profil des vitesses :

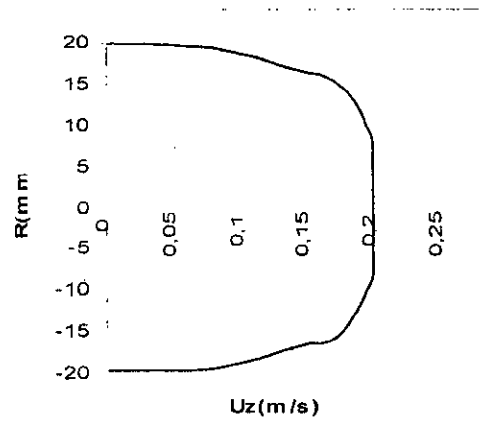
Sur les figures (V.2.1 a, b et c), nous avons représenté le profil de la vitesse axiale U_z dans une conduite de 40mm de diamètre.

La figure (V.2.1.a) représente le profil des vitesses U_z pour six abscisses dont la plus éloignée est distante de 12mm du diaphragme avec un pas de 2mm. A partir de cette section la veine fluide commence à se contracter. Les vitesses dans le corps de l'écoulement augmentent d'une façon assez appréciable et les vitesses dans les zones situées au voisinage des parois diminuent de façon à conserver le débit a travers toutes les sections.

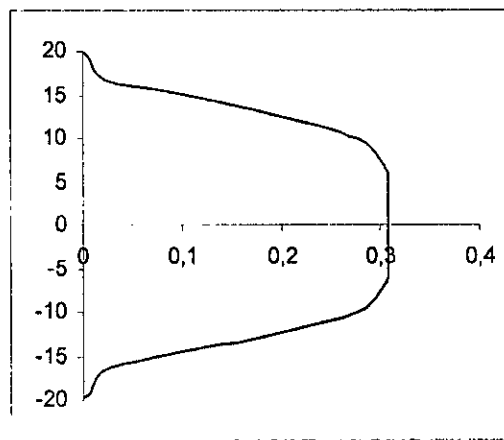
La figure (V.2.1.b.) représente l'évolution de la vitesse axiale à l'intérieur du diaphragme ; à l'entrée du diaphragme les vitesses du corps de l'écoulement au contact avec le diaphragme s'annulent ; tandis que les vitesses de la partie de l'écoulement qui passe à travers l'orifice du diaphragme augmentent de façon importante de manière à garder le débit constant dans cette restriction de section. Plus l'écoulement évolue dans le diaphragme plus la section de l'orifice commence à s'élargir progressivement et les vitesses décroissent de façon moins importante.

La figure (V.2.1.c) représente l'évolution de la vitesse axiale à l'amont du diaphragme. A la sortie du diaphragme on est dans le cas d'un élargissement brusque de section. Le fluide qui était contracté dans le diaphragme se décontracte progressivement. Les vitesses de la partie centrale du corps de l'écoulement diminuent tandis que la partie de la veine fluide décontractée présente des vitesses négatives créant ainsi des rouleaux de recirculations. Au fur et à mesure que le fluide s'écoule du coté aval de la construction les vitesses négatives disparaissent progressivement et redeviennent positives indiquant que le fluide occupe de nouveau la totalité de la section de la conduite.

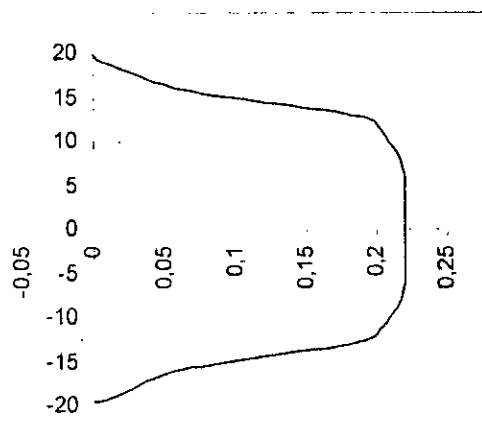
La perturbation de la veine fluide en aval de la construction apparaît à une distance approximativement égale à $D/3$, et la veine réoccupe de nouveau la totalité de la section à une distance approximativement égale à $D/2$.



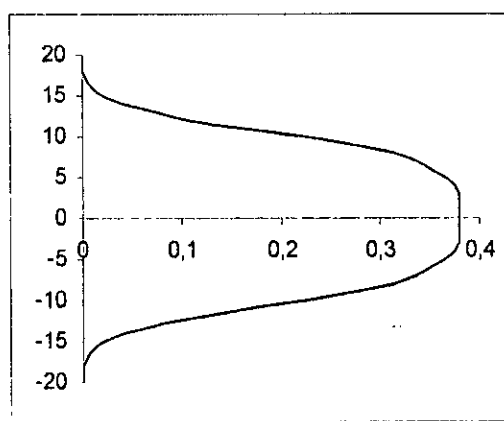
Z=58,8 cm



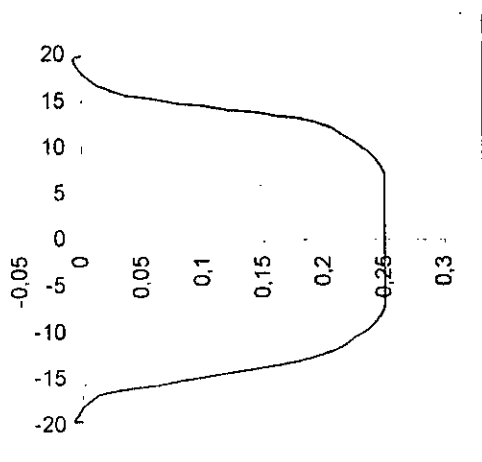
Z=59,4 cm



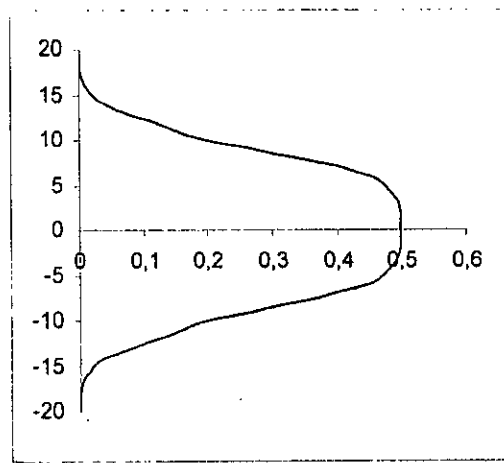
Z=59 cm



Z=59,6 cm



Z=59,2 cm



Z=59,8 cm

Figure V.2.1 a
Répartition des vitesses dans une conduite cylindrique de 40mm de diamètre comportant un diaphragme, à l'amont de la construction ($R_d=800$).

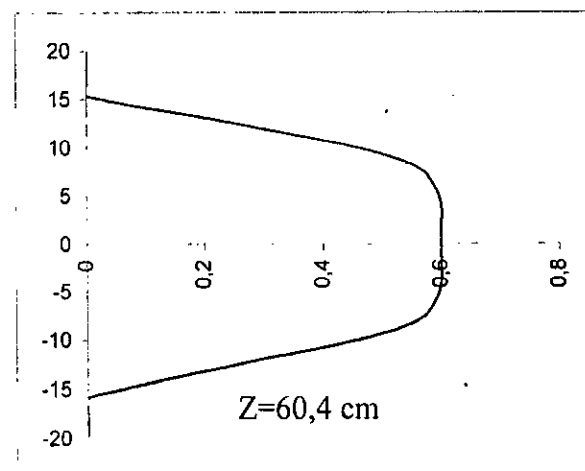
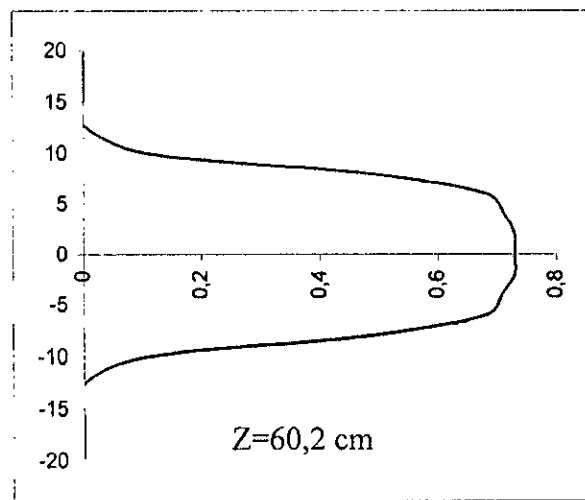
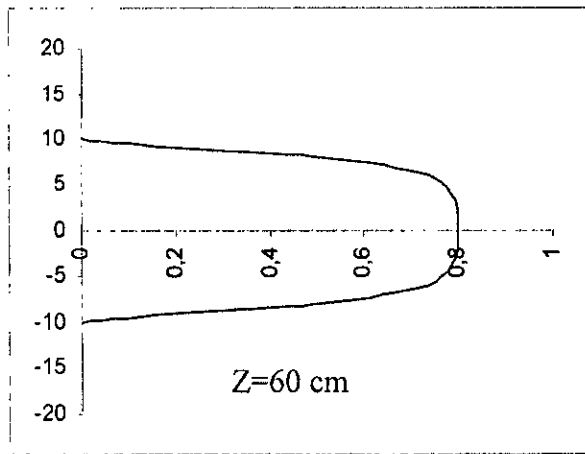


Figure V.2.1 b
Répartition des vitesses au niveau du diaphragme dans une conduite cylindrique de 40mm de diamètre comportant un diaphragme ($R_d=800$).

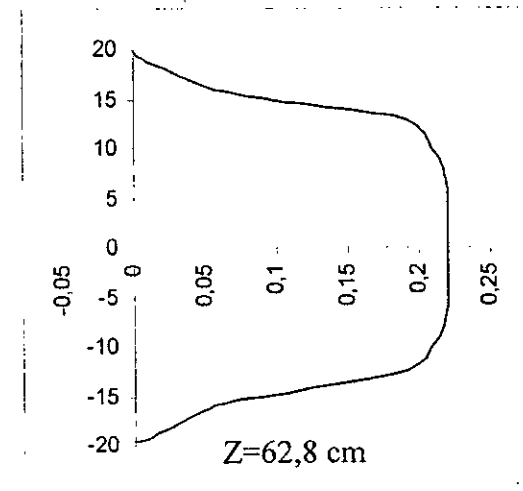
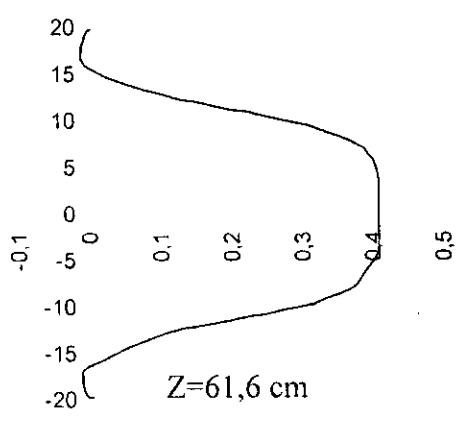
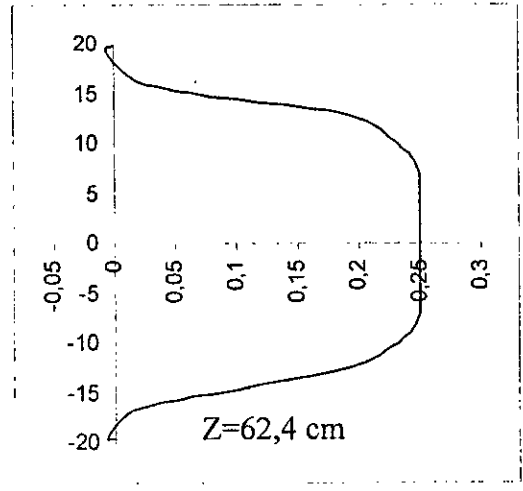
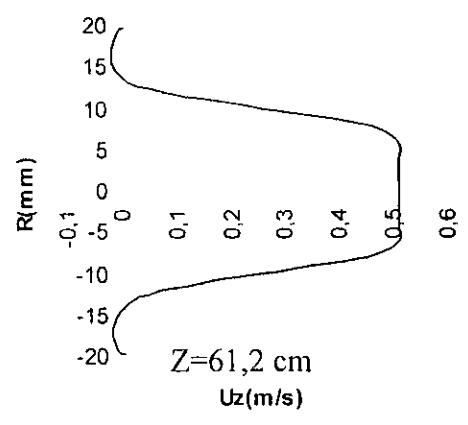
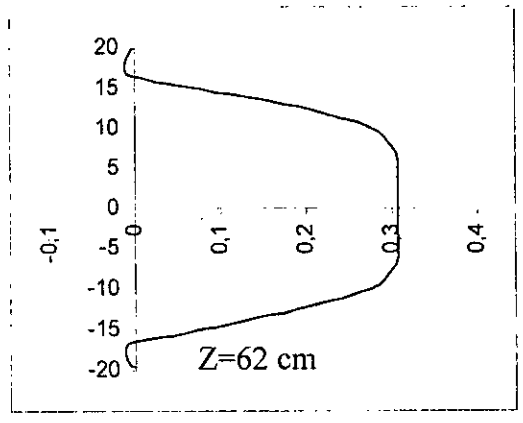
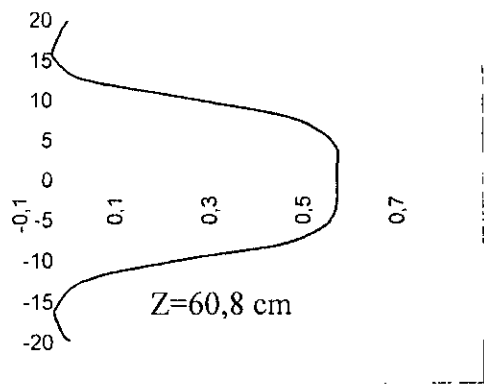


Figure V.2.1 c
Répartition des vitesses dans une conduite cylindrique de 40mm de diamètre comportant un diaphragme, à l'aval de la construction ($R_d=800$).

La figure (V.2.2) représente l'évolution de la pression le long d'une conduite de 40mm de diamètre munie d'un diaphragme, de 4mm d'épaisseur et un rapport de diamètre de 0.5 placé à une distance de 60cm de l'origine amont de la conduite pour un nombre de Reynolds de 30 000.

Nous remarquons que cette courbe présente une chute de pression importante au niveau du diaphragme. Cette chute de pression est due à l'augmentation brusque de la vitesse locale de l'écoulement créant ainsi une perte de charge locale au niveau du diaphragme.

La chute de pression qu'engendre le diaphragme [4], est donnée par la formule (V.4).

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho U^2 \left[\frac{S}{m S_0} - 1 \right]^2 \text{ (Pas)} \tag{V.4}$$

Avec :

U : vitesse moyenne de l'écoulement.

S : aire de la conduite.

S₀ : aire de l'orifice du diaphragme.

m : coefficient de contraction de la veine fluide.

Pour un diaphragme mince avec un rapport de diamètres de 0.5 m=0,65

Nous avons calculé la chute de pression engendrée par le diaphragme pour la même conduite, pour le même nombre de Reynolds et pour plusieurs rapports des diamètres à partir de l'équation (V.4) et nous avons comparé ces résultats avec les résultats que nous avons obtenus (figure V.3). Les résultats sont dans le tableau (3).

Tableau (2) : coefficient de contraction de la veine fluide pour un diaphragme mince
En fonction du rapport des diamètres.[4]

Coefficient de contraction de la veine liquide m	Rapport des diamètres $\beta=r/R$
0,62	0,4
0,65	0,5
0,68	0,6
0,76	0,8

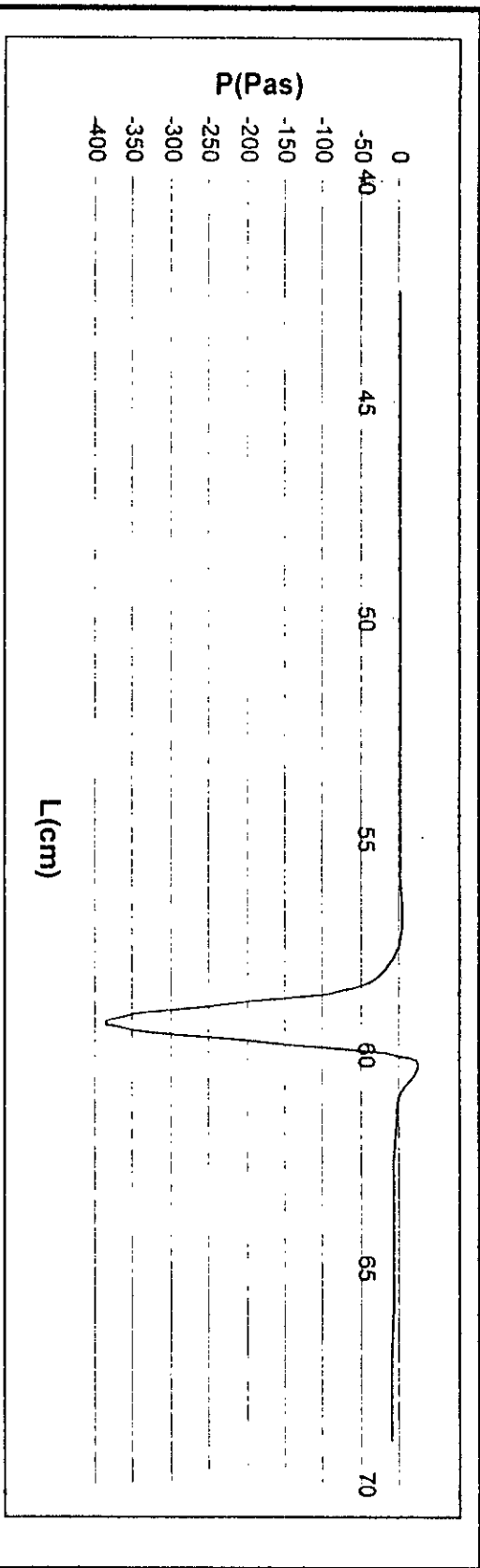
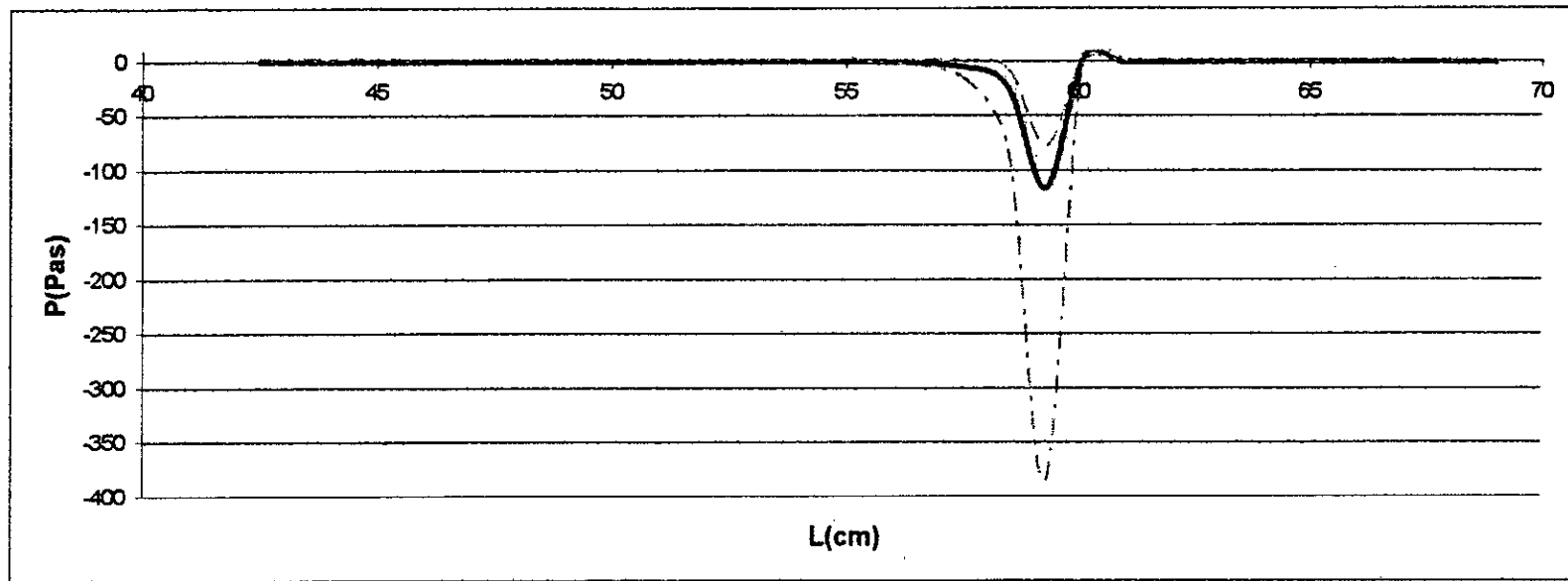


Figure V.2.2.a

Evolution de la pression dans une conduite cylindrique de 40mm de diamètre comportant un diaphragme ($R_D=30\ 000$)



- $\beta=0.4$
- $\beta=0.5$
- $\beta=0.6$

Figure V.2.2.b
Evolution de la pression dans une conduite cylindrique pour plusieurs rapports des diamètres

Tableau (3)

β	Chute de pression calculée à partir de l'équation (V.4)	Chute de pression obtenue par résultats numériques (Pas)
0,4	421,30	384,47
0,5	132,2	115,47
0,6	47,58	40,31

Nous remarquons que la chute de pression devient plus importante avec l'augmentation du rapport des diamètres, c'est ce que laisse à dire qu'il y a une proportionnalité inverse entre la chute de pression et le diamètre de l'orifice.

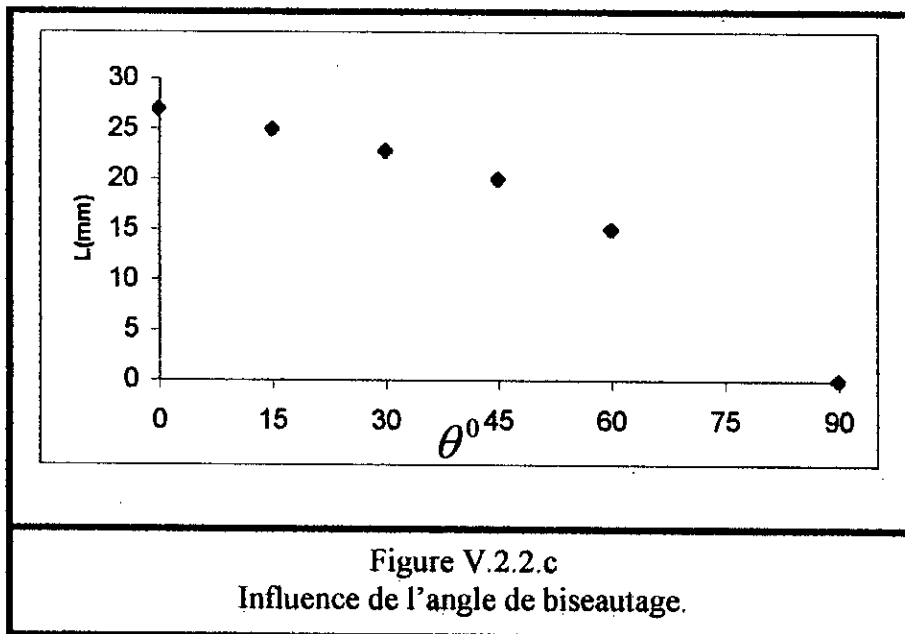
En effet [4] plus le diamètre de l'orifice augmente, plus la chute de pression devient moins importante, c'est ce que l'équation (V.4) exprime.

V.2.2. influence de l'angle de biseautage :

Pour mettre en évidence l'effet de l'angle de biseautage, nous avons fait varier l'angle de biseautage du diaphragme à la limite à laquelle le maillage le permet. Nous avons relevé les observations suivantes :

- La variation de l'angle de biseautage n'a pas une grande influence sur la variation de la pression. Donc seul le diamètre de l'orifice influe..

- l'augmentation de l'angle de biseautage engendre une augmentation de la longueur à laquelle la veine fluide contractée à l'aval de la construction réoccupe de nouveau la totalité de la section de la canalisation (figure V.2.2.c).



La courbe $L = f(\theta)$ est une parabole, qui peut être écrite sous la forme suivante :

$$L = a + a'\theta^b$$

V.5

où a , a' et b sont des constantes à déterminer.

Pour déterminer la fonction qui décrit l'évolution de la longueur à laquelle le fluide réoccupe de nouveau la totalité de la section, nous avons utilisé la méthode des moindres carrés.

Le résultat final est :

$$L = 27 - 0,0034\theta^{2,04}$$

V.6

V.2.3. Etalonnage du débitmètre :

Comme nous l'avons présenté au chapitre (III) les débitmètres à diaphragme sont des débitmètres à pression différentielle ; les relations permettant le calcul du débit sont données en fonction de la différence de pression (Equation III.1).

Pour déterminer les constantes a et b de la relation (III.1), nous procéderons de la manière suivante :

Pour plusieurs valeurs de débit nous prendrons la différence de pression entre l'aval et l'amont de la construction respectivement aux distances $D + D/10$ et $D/2 + D/20$ [13].

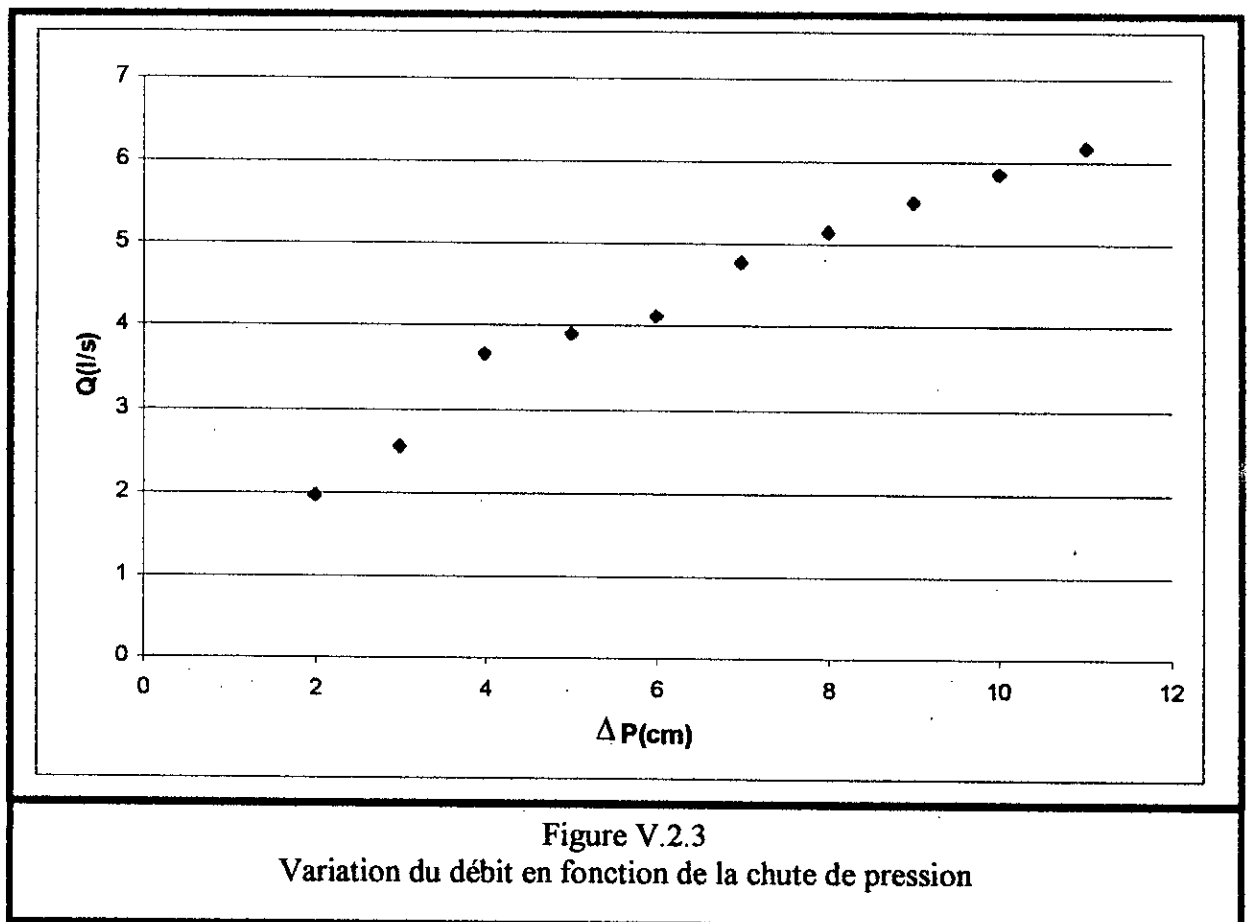
D est le diamètre de la conduite.

Les résultats sont représentés graphiquement sur la figure (V.2.3).

Dans un dispositif d'étranglement la relation permettant le calcul du débit est de la forme suivante (Chapitre III)

$$Q = a\Delta h^b$$

V.7



Les constantes a et b seront déterminées graphiquement

En introduisant le logarithme sur les deux membres de l'équation (V.5) nous obtenons:

$$\text{Log}(Q) = \text{Log}(a) + b\text{Log}(\Delta h) \quad \text{V.8}$$

En posant :

$$\text{Log}(Q) = Y$$

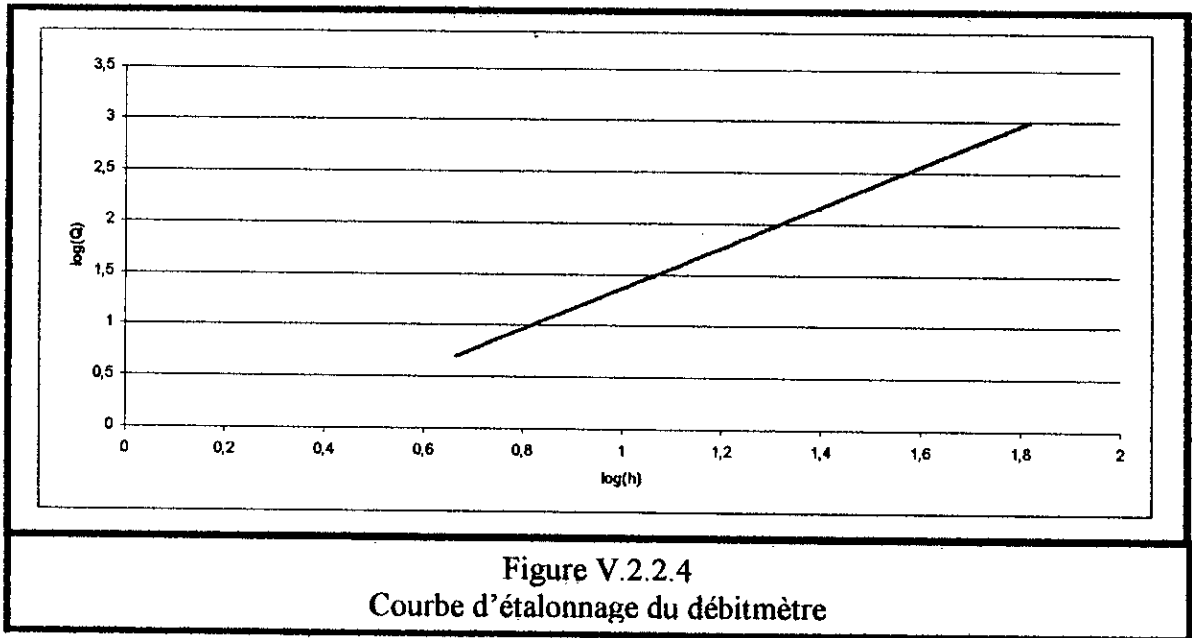
$$\text{Log}(\Delta h) = X$$

$$\text{Log}(a) = A$$

Nous obtenons :

$$Y = A + bX \quad \text{V.9}$$

Qui est l'équation d'une droite de pente b Figure (V.2.2.4).



Avec

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = 0,48$$

$$A = Y - bX = 4,08 \Rightarrow a = 1,406$$

Donc la relation qui permet le calcul du débit est :

$$Q = 1,406(\Delta h)^{0,48}$$

V.10

De la même manière nous avons refait le calcul pour plusieurs rapports des diamètres, les résultats sont représentés sur le tableau (4)

Tableau 4
Etalonnage du débit mètre

Rapport des diamètres	a	b
0,4	1,16	0,56
0,5	1,40	0,48
0,6	1,54	0,5
0,8	1,87	0,51

CONCLUSION

Nous avons analysé, les écoulements dans des conduites cylindriques, simples, sans singularité en charge et à section transversale constante, ainsi que dans des conduites comportant un diaphragme.

Pour adapter les équations de Navier-Stokes à la géométrie cylindrique des conduites, nous avons utilisé un repère en coordonnées cylindriques ainsi que l'utilisation d'un schéma de discrétisation en différences finies conjointement avec la méthode de « **compressibilité artificielle** ». La résolution du système d'équations différentielles de Navier-Stokes nous a permis d'établir le champ de vitesse et de pression, et par la suite d'étalonner le débitmètre.

La comparaison des résultats de l'étude avec ceux obtenus par d'autres auteurs ayant utilisé d'autres méthodes d'une part et avec ceux que donne l'expérience d'autre part nous confirme la validité du modèle mathématique utilisé et des résultats obtenus.

Nous retiendrons en particulier de cette étude, que l'épaisseur de la couche limite laminaire est proportionnelle à la longueur de la conduite et qu'elle se développe pleinement à une distance approximativement égale à 16 fois le diamètre.

Dans les conduites comportant un diaphragme, le débit qui s'écoule dans la conduite est proportionnel à la racine carrée de la chute de pression entre l'amont et l'aval de la construction, et que cette chute augmente avec le rétrécissement de l'orifice de l'organe.

Cette approche gagnerait à être étudiée en considérant d'autres organes déprimogènes non normalisés tels que les diaphragmes à orifice rectangulaire ou excentrique, d'introduire la turbulence, et d'étudier de façon plus rigoureuse l'évolution de la couche limite.

Enfin, des essais expérimentaux sont indispensables pour évaluer le degré de précision des analyses.

Bibliographie

- C. Qianshun [1]
Applied numerical methods
John Wiley and Sons 1988
- R. Peyret [2]
Computational methods for fluid flow
Springer Verlag 1990
- C. Gailledreau. [3]
Débitmètres à pression différentielle.
Techniques de l'ingénieur « Mesure et contrôle » 1994
- M. Carlier [4]
Hydraulique générale et appliquée
Eyrolles 1980
- J.Larras [5]
Hydraulique
Presse universitaire de France 1974
- L. Landau et E. Lifchitz [6]
Mécanique des fluides appliquée
Eyrolles 1971
- R. Oiziaux et J Perier [7]
Mécanique des fluides
Eyrolles 1973 3^{ème} édition
- M. Hug [8]
Mécaniques des fluides appliquées
Eyrolles 1975
- Mécanique numérique des fluides incompressibles (partie IIIc) [9]
Presse universitaire de France 1996

Pipeline and gas journal [10]

Trenchless technologies

Juin 1996

D. Euvrar [11]

Résolution numérique des équations aux dérivées partielles

1993

White [12]

Viscous fluid flow

McGraw-Hill series in mechanical engineering 1982

A. Berrekis et A. Bouhadji

Simulation et analyse des écoulements à surface libre en zone de transition.

PFE [13]

M.F. tounsi et M.M. Zedouk

Simulation numérique d'un écoulement sur une paroi poreuse. [14]

Juin 1999

www.INRIA.fr/rrrt/rr-0989.html

Techniques de mesure utilisées en thermique [15]

Juin 2000

www.INRIA.fr/rrtr/rr-0997.html

Analyse numérique appliquée à la mécanique des fluides [16]

Juin 2000

Diaphragme mince dans un tube :

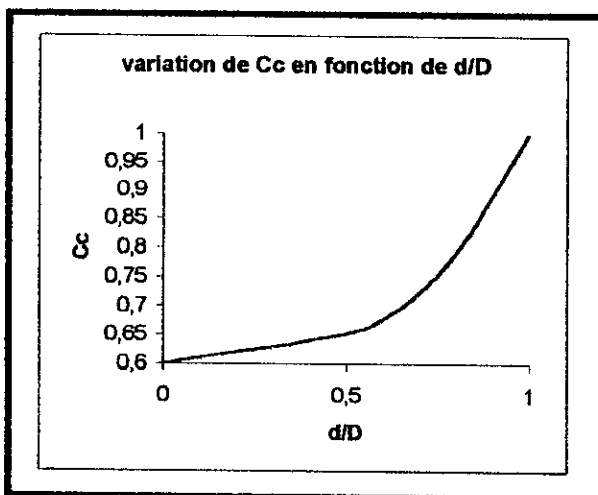
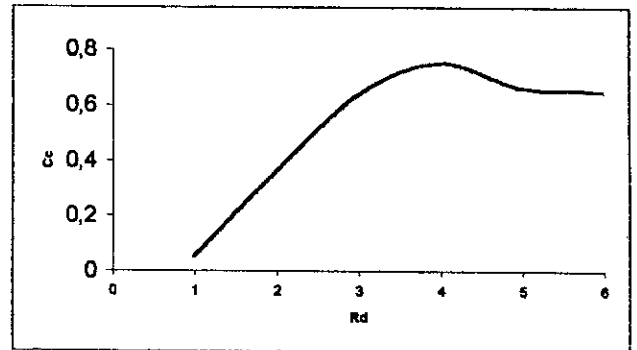
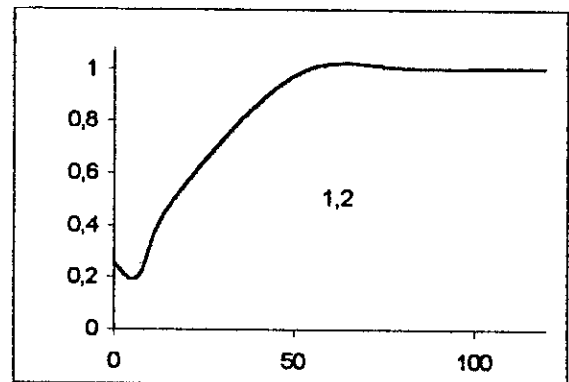
Un diaphragme à bord mince obture partiellement un tube de diamètre 'D' L'écoulement est étranglé et on observe une contraction de la veine liquide puis un élargissement jusqu'au recollement à la paroi. La perte de charge est exactement du même type que celle du rétrécissement brusque.

Si d désigne le diamètre de l'orifice du diaphragme et C_c le coefficient de contraction la perte de charge est caractérisé par

$$\Delta P = \frac{\rho V^2}{2} \left(\frac{D^2}{C_c d^2} - 1 \right)^2$$

Le coefficient de contraction est fonction du nombre de Reynolds et du rapport D/d .

La figure ci-dessous représente la variation de C_c en fonction de d/D pour $R_d > 10^5$

**Coefficient de débit en fonction du nombre de Reynolds :****Evolution du coefficient de perte de charge singulière en fonction de l'angle au sommet d'un divergent :**

Débitmètres à ultrasons :

Il est constitué par deux émetteurs qui dirigent les ondes sonores sous un certain angle d'un coté à l'autre de la canalisation l'un dans la direction du courant l'autre contre le courant. Le mouvement de l'eau accélère la propagation de l'un des signaux et ralentit l'autre. La différence de temps de transmission et les dimensions du canal permettent de calculer le débit.

Débitmètre capacitif :

Un pluviomètre capacitif a été proposé pour la mesure des précipitations ; l'eau collectée passe entre les électrodes d'un condensateur dont la capacité varie avec l'intensité de la pluie. La mesure est transformée en un courant dont la fréquence est modulée ou en un courant continu que l'en peut intégrer.

Débitmètre électromagnétique :

Le mouvement d'un fluide conducteur dans un champ magnétique crée un courant dont la mesure permet de déterminer le débit ou la vitesse du fluide. On peut également, si la conductivité électrique est importante, mesurer le champ magnétique produit par ce courant liquide.

Ce type de débitmètre est utilisé pour les métaux liquides.

Déversoir canaux jaugeur :

On appelle déversoir tout ouvrage par-dessus lequel l'eau s'écoule en formant à l'aval une veine libre.

La hauteur à laquelle l'eau s'élève pour traverser le déversoir est proportionnelle au débit.

Organigramme de calcul

