

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT : D'HYDRAULIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

Thème

**Résolution des problèmes
Hydrauliques par la méthode
MARKER AND CELL
Application aux barrages**

Proposé par :

M^r. O. BELLHADJ
M^r. O. BILEK

Etudié par :

M^r. S. GUELLATI

Promotion 2001

E.N.P 10, Avenue HASSEN BADI-EL HARRACH-ALGER

كلمات مفتاح:

زلازل؛ الفروقات المشاهية؛ الضغط الهيدروديناميكي؛ سد صلب تحويلات هندسية؛
شبكة؛ الخلية.

Keys works

Earthquakes, finite difference, hydrodynamic pressure, rigid dam, geometry transformation, mesh sizes, cell.

Mots clé :

Séisme, différences finie, pression hydrodynamique, barrage rigide, transformation géométrique, maillage, cellule.

Objet: Analysis of pressure owed to the earthquake for a system dam reservoir, by the MARKER AND CELL method

Abstract: A *MARKER AND CELL* method was employed to calculate nonlinear hydrodynamic pressure on vertical and inclined face of dams, during an earthquake excitation.

Some results have been compared with other results gotten by the previous studies. The comparison shows that the results are very near.

Objet : Analyse des pressions hydrodynamiques dues à un séisme sur un barrage poids rigide, par la méthode *MARKER AND CELL*

Résumé :

Une méthode *MARKER AND CELL* a été employée pour le calcul des pressions hydrodynamiques non linéaire sur les parements amont incliné et vertical d'un barrage poids, au cours d'un séisme.

Quelques résultats obtenus ont été comparés avec d'autres résultats obtenus par des études précédentes. La comparaison montre que les résultats sont très proches.

الموضوع، تحليل القوى أو الضغوطات الهيدروديناميكية المؤثرة على سد ثقلي و الناجمة زلزال افقي بطريقة ماركو و سال (*MARKER AND CELL*).

ملخص:

باستعمال طريقة ماركو و سال قمنا بحساب الضغوطات الهيدروديناميكية الخطية و غير الخطية

المؤثرة على الواجبة الامامية لسد ثقلي أثناء هزات أرضية افقية وذلك باختلاف ميل

الواجبة الامامية.

بعض النتائج المتصل عليها قورنت بمثلاتها الناتجة عن دراسات سابقة، ولقد بينت هذه

المقارنة أن النتائج كانت جد متقاربة.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

- Ma mère
- Mon père
- Mes frères
- Tous mes amis.

S.GUELLATI

Remerciement

En premier lieu, je tiens à remercier
Mr O. Belhadj pour m'avoir conseiller et diriger.
Je remercie également Mr A. Bilek pour ses
conseils judicieux.

Qu'il me soit permis de remercier tous les
enseignants qui ont contribué à ma formation

Chapitre 4 : Modélisation Numérique

4.1-Introduction.....	25
4.2-Schéma marker and cell	25
4.2.1-Méthode de différences finies.....	25
4.2.2-Analyse de l'approximation.....	28
4.2.3-Schéma explicite, schéma implicite.....	29
4.2.4-Schéma Marker and cell	30
• Maillage décalé	31.
• Avantages et inconvénient de maillage décalé	31
○ Avantage	31
○ Inconvénient.....	31
4.3-Discretisation des équation de problème.....	32
4.4-Traitement des conditions aux limites	37
4.5-Stabilité du schéma	39
Organigramme de calcul.....	40

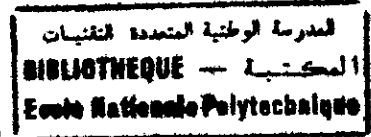
Chapitre 5 : Expérimentation Numérique43

Conclusion générale 50

Bibliographie

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction Générale



Introduction générale

Les tremblements de terre ont représenté depuis toujours un des plus graves désastres de l'humanité, elles se produisent tant bien dans des zones dont la sismicité n'est plus à prouver, mais aussi dans des zones considérées parfois comme géologiquement stables.

A la suite d'un fort séisme, on constate généralement que de nombreuses constructions, présentaient une sécurité insuffisante relativement aux moyens que le génie sismique pouvait mettre en œuvre à l'époque du séisme.

La conception des barrages surgit à des efforts dynamiques (en général résultant des mouvements de fondations) nécessite la considération des caractéristiques du mouvement, et des propriétés dynamiques de la structure.

Les mouvements causés par un séisme sont aléatoires, et l'amélioration de la connaissance de leurs caractéristiques reste liée au nombre d'enregistrements et à l'histoire sismique du site considéré.

Cependant, les études statiques de nombreux enregistrements sismiques permettent d'établir des spectres de réponses « enveloppes » pour la conception parasismique des barrages courants, presque tous les règlements en vigueur considèrent une charge statique horizontale à la base « équivalente » à la charge dynamique maximale amplifiée durant le séisme, il n'en demeure pas moins que bon nombre d'ouvrages nécessitent pour leur « bonne conception » une plus « précise » connaissance de leurs comportements.

L'analyse de comportement dynamique présente un certain nombre de traits indépendants du type du barrage.

Il dépend tout d'abord des propriétés de la fondation d'où il y résulte un couplage dynamique, lors d'un séisme, entre le barrage et la fondation.

Chapitre 1

Généralités

GENERALITES

1.1. Introduction :

L'analyse de comportement dynamique d'une structure revient à déterminer ses caractéristiques vibratoires tel que la fréquence, mode de vibration, histoire de la réponse.

Les premières analyses qui ont conduit par la suite au calcul dynamique n'apparurent qu'à la fin de siècle précédent. On considérait que les structures étaient parfaitement rigides de telle sorte qu'on peut assimiler les forces sismiques agissant au niveau du sol à une force statique équivalente. Puis vinrent les modèles dynamiques pour combler les carences de modèle statique en introduisant des coefficients fonctions des caractéristiques vibratoires de la structure. Ensuite apparut la méthode spectrale qui consiste à établir le spectre de réponse d'une structure résultant d'un accélérogramme imposé.

Enfin les ingénieurs développèrent plusieurs procédés de calcul se basant sur deux modèles : probabiliste et déterministe. Le premier consiste en une analyse statistique, nécessite donc, une collecte de données. Le second, est un modèle mathématique utilisant les méthodes de simulation numérique.

1.2. les systèmes couplés :

Fréquemment, deux ou plusieurs systèmes interagissent chacun avec l'autre de telle sorte qu'une solution indépendante de l'un d'entre eux devient impossible sans une solution simultanée des autres : ce type de système est dit couplé.

Les systèmes couplés classés en deux catégories :

- ❖ **Classe 1 :** dans cette classe, le couplage se fait sur un domaine interface via les conditions aux limites qui y imposées (figure 1.1.)
- ❖ **Classe 2 :** dans cette classe, les domaines se chevauchent totalement ou partiellement, le couplage se fait à l'aide de l'équation différentielle gouvernante(figure 1.2).

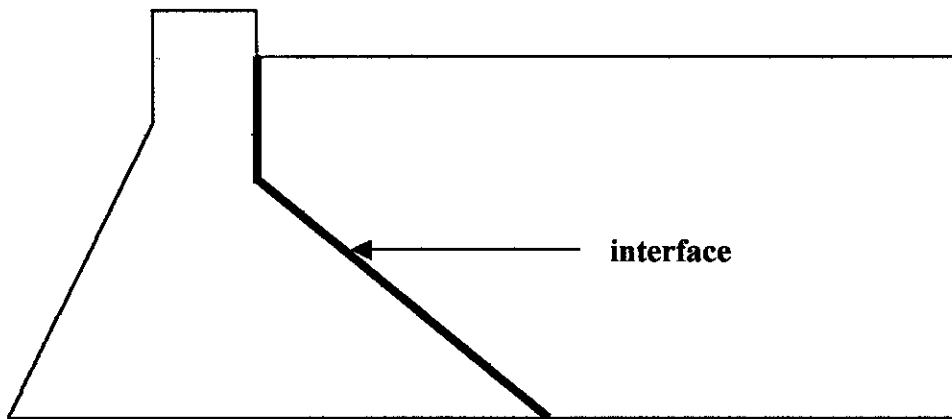


Figure 1.1

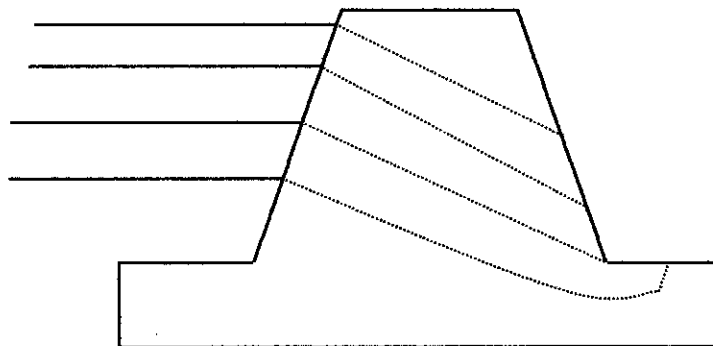


Figure 1.2

1.3 Interaction fluide structure :

L'interaction fluide- structure est un exemple frappant des problèmes couplés. Elle est de classe 1.

Ce problème est large et couvre plusieurs formes de comportement de fluide.

Bien que l'interaction soit dominante, les déplacements de fluide demeurent petits pour une grande variété de ce type de problème, tel est le cas d'un barrage et son réservoir.

Les mouvements du fond de la retenue et du barrage lors du séisme génèrent dans l'eau du réservoir des ondes de pression.

Les ondes de pression sur le parement amont modifient le mouvement du barrage qui lui même influe sur la répartition des pressions dans le fluide.

Il vient s'ajouter donc une force hydrodynamique qui affecte la réponse dynamique du barrage d'où la nécessité d'une analyse du phénomène de l'interaction fluide-structure (barrage-eau).

1.4. Les systèmes linéaire et non linéaire :

Les systèmes vibrant peuvent être classés selon leurs comportements en deux types : linéaires et non linéaires.

La classification se fait en inspectant le système d'équations différentielles associé. Ainsi, si celui-ci ne contient que des variables à une puissance et il n'existe aucun produit entre elle, il est dit linéaires, sinon il est non linéaires.

1.5. Le séisme :

1.5.A. Mécanisme général de production de séisme :

Les séismes tectoniques apparaissent comme des conséquences de toutes les déformations qui affectent les régions supérieures du globe terrestre et au cours desquels des quantités considérables d'énergie s'accumulent dans les matériaux constitutifs, sous forme d'énergie de déformation.

Lorsqu'un point moins résistant ou plus sollicités que les autres, un équilibre limite vient à être dépassé, il se produit une rupture qui s'étend très rapidement de proche en proche aux régions voisines.

Dans l'hypothèse la plus couramment admise, ces ruptures d'équilibre interviennent le long des failles qui, par nature, constituent des point faibles et sont effectivement susceptibles de montrer des jeux importants tant longitudinaux que verticaux. Elles s'accompagnent de la brusque libération de l'énergie potentielle accumulée dans la déformation et donnent naissance à un ébranlement qui se propage au loin sous la forme d'onde sismique.

L'onde sismique, à son origine, est une onde de volume.

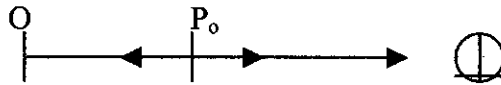
1.5.B. Les ondes sismique :

a. Les ondes de volume :

La théorie montre que si l'on considère un milieu continu élastique, homogène isotrope s'étendant dans les trois dimensions. Une perturbation prenant naissance en une région donnée du milieu se propage en engendrant deux types d'ondes (et deux seulement).

Les ondes longitudinales

Ce sont des ondes de compression–dilatation dans lesquelles les particules se meuvent suivant la direction de propagation.



Dans le cas de ces ondes, tel ou les ondes sonores, la déformation consiste en changement de volume des éléments du milieu sans distorsion.

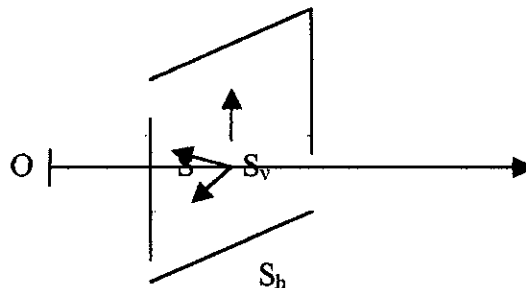
Ces ondes longitudinales sont aussi dites « ondes primaires » d'où la notation P. Leur vitesse de propagation est donnée par :

$$V_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho} \quad [1.1]$$

où λ et μ coefficient de lamé du milieu et ρ sa masse volumique.

Les ondes transversales

Ce sont des ondes de distorsion dans lesquelles les particules se mouvent dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation.



Dans le cas de ces ondes, la déformation consiste en une distorsion à volume constant.

Ces ondes sont aussi dites « ondes secondaires », d'où la notation S. Leur vitesse de propagation est donné par :

$$V_s = \sqrt{\mu / \rho} \quad (1.2)$$

b. Ondes dans les milieux stratifiés :

Vu la complexité que revêtent les phénomènes de propagation au niveau des surfaces de séparation de deux milieux, nous ne faisons qu'attirer l'attention sur les faits que les ondes y arrivant sont réfractées, réfléchies d'une part et, des ondes de nature différente sont générées en réfraction et réflexion. C'est le cas pour chacune des composantes de l'onde de volume sauf pour le cas de la composante horizontale qui, par raison de symétrie ne donne naissance qu'à une réfléchie et une autre réfractée.

1.6. Effets induits par les séismes sur les barrages :

Les séismes peuvent causer aux barrages des dégâts considérables, ainsi pour les barrages en béton :

- Ils entraînent le glissement du barrage sur sa fondation ;
- Fissuration et ouverture des joints;
- Le déplacement par cisaillement ou basculement de plots de la section de la partie supérieur ;
- L'endommagement de l'évacuateur de crue ;
- Ils provoquent des contraintes de traction, de compression ou de cisaillement entraînant des dommages, des déformations permanentes de la fondation ou du barrage ;
- Les glissements des rives sur le barrage si la vague crée dépasse la revanche, et aussi la destruction d'organes de sécurité (vidange de fond et évacuateur de crue).

Chapitre 2

Analyse bibliographique

Analyse Bibliographique

2.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous présentons quelques études anciennes et récentes réalisées dans le but d'une analyse des pressions hydrodynamiques sur les barrages en supposant rigides et se déplaçant avec le fond de la retenue.

Westergaard fut le premier à aborder cette question en 1933 dans l'hypothèse d'une structure rigide soumise à un mouvement sismique harmonique horizontal.

D'autres approches ont été mises en œuvre pour le calcul de ces pressions hydrodynamiques, permettant de mettre en évidence l'influence non négligeable de :

- La compressibilité de l'eau.
- La direction de la vitesse de propagation de l'onde sismique.
- La dissipation d'énergie dans le fluide.
- L'inclinaison de parement amont.
- La génération d'onde gravitaire de surface.
- L'accélération convective (les termes non linéaires)

2.2 Solution de Westergaard [12]

La première approche de ce phénomène a été apportée par **Westergaard** (1933), qui a calculé la répartition de pression sur un écran vertical limitant un réservoir semi-infini de profondeur constante dans l'hypothèse d'un mouvement horizontal harmonique de l'écran de période T .

Dans le cas où la compressibilité de l'eau peut être négligeable, **Westergaard** a établi une expression parabolique approchée du résultat, indépendante de la période de vibration de l'écran

$$P(y) = \frac{7}{8} \alpha W (hy)^{1/2} \quad (2.1)$$

Avec :

- P : pression sur l'écran ;
- α : coefficient sismique ;
- W : poids volumique de l'eau ;
- h : profondeur du réservoir ;
- y : profondeur du point considéré.

la force de totale appliquée sur l'écran est égale à :

$$F = \frac{7}{12} \alpha W h^2 \quad (2.2)$$

Elle s'applique en un point situé au $2/5$ de la hauteur en partant du bas (fig.2.1)

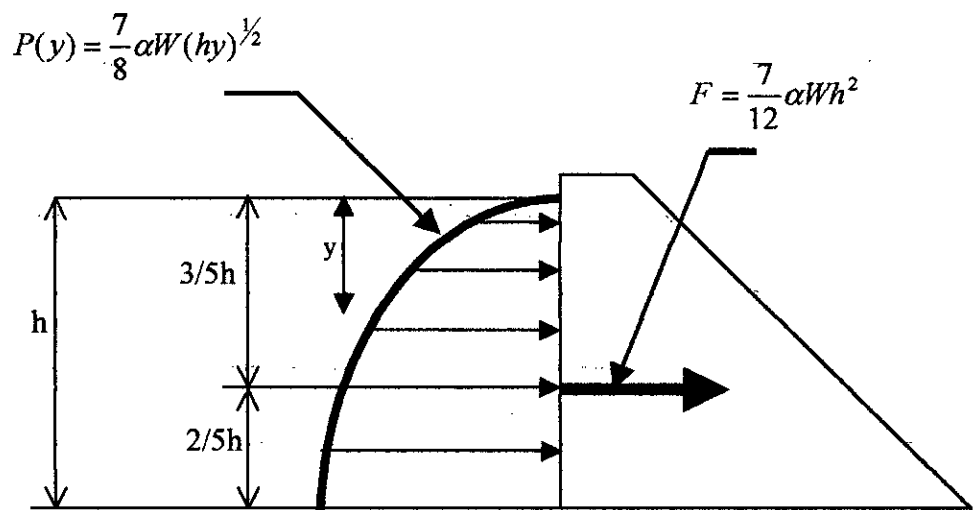


Figure 2.1

2.3 Etude de ZANGAR 1951 : [12]

L'influence de l'inclinaison du parement amont sur la distribution des pressions hydrodynamiques dans les mêmes conditions de mouvement harmonique que pour la méthode de Westergaard a été étudiée par ZANGAR,

qui a utilisé la méthode de l'analogie électrique, pour la résolution de l'équation de Laplace gouvernant l'évolution de la pression dans le réservoir dans l'hypothèse de fluide incompressible.

La pression hydrodynamique sur le parement est donnée par :

$$P = C\alpha Wh \quad (2.3)$$

C : est le coefficient de pression, il dépend seulement de la forme du barrage.

La distribution du coefficient de pression pour différentes inclinaisons du parement amont est représentée par la figure (II.2.1).

De cette figure on remarque que :

- Les coefficients de pressions diminuent avec l'augmentation de l'inclinaison du parement ;
- A l'exception du cas d'un parement vertical, le coefficient de pression maximal est toujours obtenu à une certaine distance au-dessus de la base ;
- La valeur maximale de coefficient de pression existe à la base du barrage ayant un parement vertical.

Les résultats expérimentaux ont fait l'objet d'une formulation analytique approchée :

$$P(y) = \frac{C_m}{2} \alpha Wh \left[\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) + \left(\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3.3)$$

Où

C_m est le coefficient de pression maximale donnée par la figure(II.2.2)

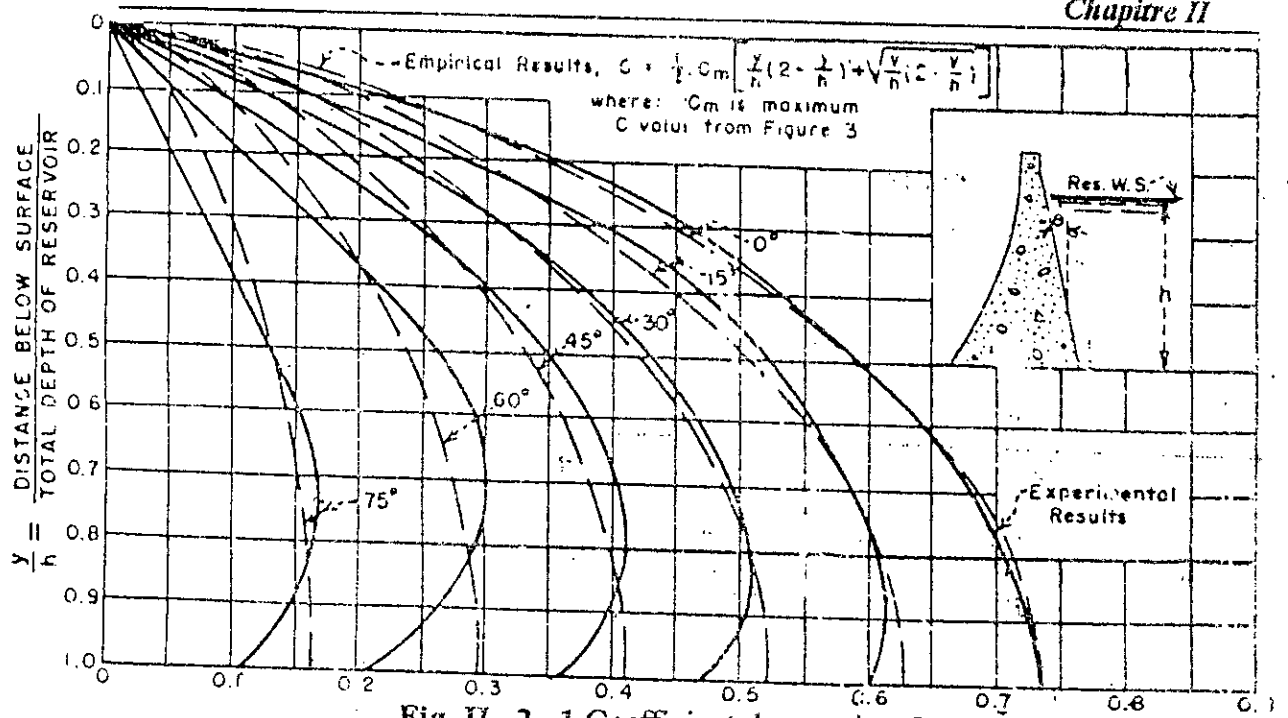


Fig. II . 2 . 1 Coefficient de pression C

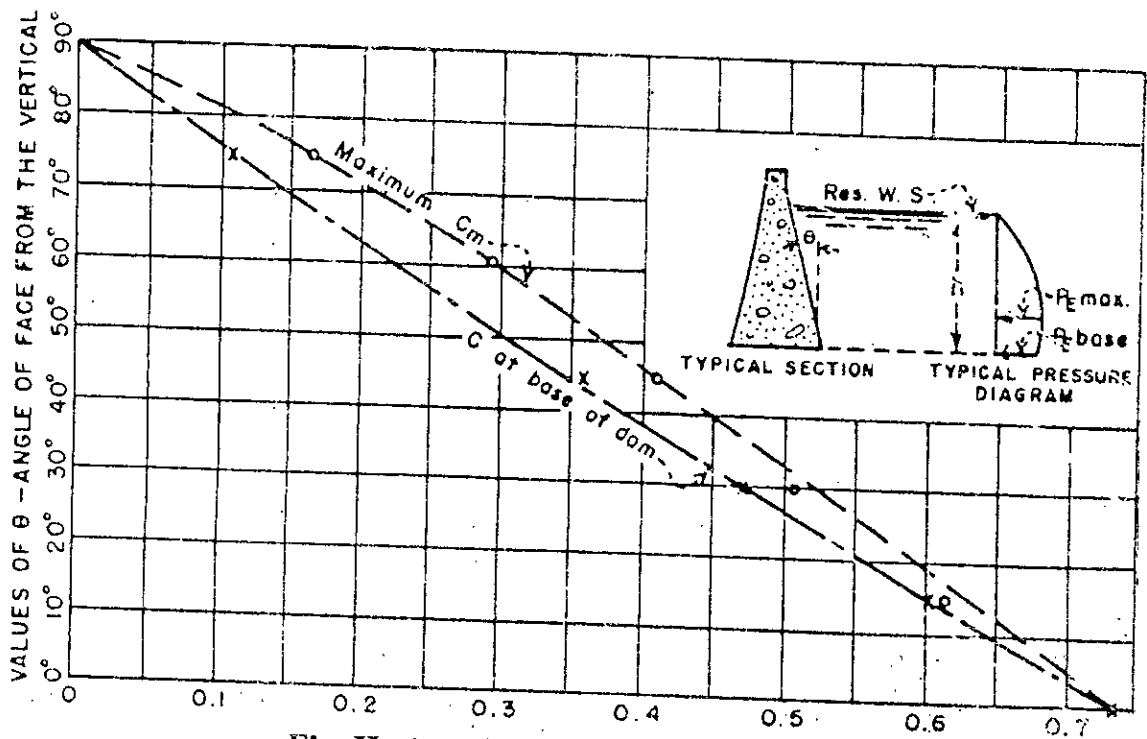


Fig. II . 2 . 2 Coefficient de pression maximale C_m

Chapitre 3

Equations fondamentales

Equations Fondamentales

3.1 Introduction :

La description mathématique du mouvement d'un fluide s'appuie sur la traduction des lois physiques relatives à l'écoulement dans une forme mathématique adéquate.

Ils existent trois lois (principes) physiques fondamentales qui, à l'exception des phénomènes relativistes et nucléaires, s'appliquent à n'importe quel écoulement, indépendamment de la nature du fluide considéré.

Ces lois sont :

1. le principe de conservation de la masse, dont l'équation mathématique est dite « équation de continuité ».
2. la loi fondamentale de la dynamique, appelée aussi second loi de Newton, dont l'équation mathématique traduit le théorème de la quantité de mouvement.
3. le premier principe de la thermodynamique, dont l'équation mathématique est dite « équation de l'énergie ».

Ces équations de conservations peuvent s'exprimer aussi bien sous forme intégrale, lorsqu'elles sont appliquées à un volume de contrôle macroscopique, ou sous forme différentielle, quand le volume de contrôle est une particule fluide élémentaire.

Nous allons donc, dans ce qui suit, présenter les équations de conservation dans leurs formes différentielles.

Dans ce chapitre, nous allons étudier le mouvement de l'eau dans la cuve sous l'action d'un séisme. (figure 3.1)

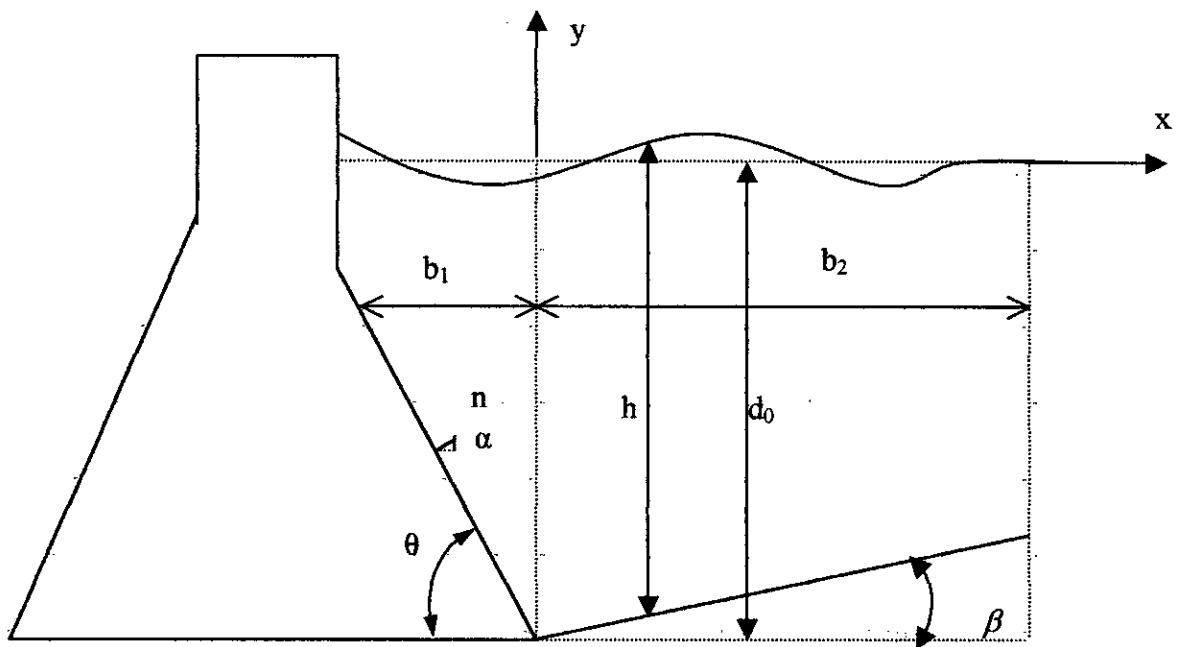


Figure 3.1

3.2 Equations de base [8,11,]:

Le mouvement du fluide est défini par le vecteur vitesse \vec{V} , la pression P , la masse volumique ρ et la hauteur h du liquide dans le barrage soumis à une excitation sismique.

- **Equation de continuité :**

Elle traduit le principe de conservation de la masse et permet d'établir une relation entre certaines caractéristiques fluide et ses mouvements indépendamment des causes qui les provoquent.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (3.1)$$

Si l'écoulement est incompressible

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

il suit que

$$\text{div}(\vec{V}) = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.3).$$

• **Equation de quantité de mouvement :**

Elle traduit le principe de mécanique (loi de Newton) qui permettent d'établir des relations entre les caractéristiques du fluide, celles de ses mouvements et les causes qui les produisent.

Cette loi appliquée à des particules d'un fluide visqueux donne :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}P + \frac{\mu}{\rho} D\vec{V} + \frac{\nu}{3} \text{grad}(\text{div}\vec{V}). \quad (3.4).$$

3.3 Hypothèses de base [13,7]:

Dans la pratique, la résolution totale d'un problème de mécanique des fluides, nécessite l'introduction d'hypothèses simplificatrices dont l'intérêt est étroitement lié à la possibilité de résolution de ces équations :

- la viscosité μ est négligeable.
- Le fluide est incompressible.
- L'écoulement est bidimensionnel.
- L'écoulement est isotherme.
- Les parois du réservoir ne se déforment pas.

D'après ces hypothèses, les équations de base se simplifient et s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.5).$$

$$\rho \left(\frac{\partial(u+u_0)}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \rho g - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.7).$$

Où les termes : $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$, $u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$ représentent l'accélération convective

D'après cette description des équations et des hypothèses de base, il est évident qu'on dispose des équations nécessaires pour déterminer les variables recherchées.

Il faut encore ajouter les conditions aux limites et les conditions initiales afin d'obtenir une formulation complète du point de vue mathématique.

3.4. Transformation géométrique[11,2,4] :

Afin de simplifier l'expression des conditions aux limites sur le pourtour du barrage, il est plus convenable de transformer le domaine physique quelconque en un domaine rectangulaire en opérant le changement de coordonnées suivant :

$$y^* = 1 - \frac{y + d_0}{h(x, t)} \quad (3.8.a)$$

$$x^* = \frac{x - b_1(y)}{b_2 - b_1(y)} \quad (3.8.b)$$

$b_1(y)$: est été en rapport avec la forme de parement amont du barrage ;

b_2 : la distance entre la base du barrage et la fin-section ;

$h(x, t)$: la profondeur d'eau lors de l'excitation ;

d_0 : longueur de référence égale au profondeur de barrage avant l'excitation(fig3.1.).

3.5 Raffinement du maillage[11] :

Les variables recherchées varient de façon importante au niveau des frontières du domaine physique. Pour une meilleur description de ces variables en différences finies, nous utilisons un maillage à pas variable. Le maillage est très serré au niveau des frontières du domaine d'intégration, où les variations des paramètres U, V, P et H sont très importantes (figure3.2).

Nous utilisons les fonctions exponentielle suivante :

$$X = \beta_2 + (x^* - \beta_2)e^{k_2 x^*(x^*-1)} \quad (3.9.a)$$

$$Y = \beta_1 + (y^* - \beta_1)e^{k_1 y^*(y^*-1)} \quad (3.9.b)$$

où :

$\beta_1, k_1, \beta_2, k_2$: sont des constantes qui définissent les dimensions des mailles (fig3.2).

3.6 Variables adimensionnelles :

Nous utilisons des variables adimensionnelles, en prenant des valeurs de référence soit :

on utilise la vitesse de référence u_0 tel que :

$$U = \frac{u}{u_0} = \frac{u}{u_m F_1(t)} \quad (3.10)$$

$$V = -\frac{v}{u_0} = -\frac{v}{u_m F_1(t)}$$

La pression et le temps adimensionnelles sont :

$$P = \frac{P}{\rho g d_0} \quad (3.11)$$

$$T = \frac{u_m t}{d_0}$$

Remarque :

Le mouvement du sol (excitation sismique horizontale) est caractérisé par une fonction F_1 qui dépend du temps et d'une vitesse maximale u_m tel que :

$$u_0 = u_m F_1(t) \quad (3.12)$$

3.7 Transformation des équations :

Dans le but d'appliquer la procédure précédente on doit évidemment écrire les équations (3.5), (3.6), (3.7), dans le nouveau système de cordones (X,Y)

Soit f une fonction de $x(X, Y)$ et $y(X, Y)$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} \end{array} \right. \quad (*)$$

L'application de l'équation (*) donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y}$$

tel que :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial y^*} \frac{\partial y^*}{\partial y}$$

Dans le nouveau système de coordonnées X, Y les équations (3.5), (3.6) et (3.7) deviennent :

$$C_5 C_6 \frac{\partial U}{\partial X} + C_1 C_3 \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{C_3}{H} \frac{\partial V}{\partial Y} + C_4 C_6 \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (3.13).$$

$$\begin{aligned} (1+U) \frac{F_1^*}{F_1^2} + \frac{1}{F_1} \frac{\partial U}{\partial T} + C_2 C_3 \frac{\partial U}{\partial Y} + C_5 C_6 \frac{\partial U^2}{\partial X} + C_1 C_3 \frac{\partial U^2}{\partial Y} + \frac{C_3}{H} \frac{\partial UV}{\partial Y} \\ + C_4 C_6 \frac{\partial UV}{\partial X} = -\frac{C_1 C_3}{F^2} \frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{C_5 C_6}{F^2} \frac{\partial P}{\partial X} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} V \frac{F_1^*}{F_1^2} + \frac{1}{F_1} \frac{\partial V}{\partial T} + C_2 C_3 \frac{\partial V}{\partial Y} + C_5 C_6 \frac{\partial UV}{\partial X} + C_1 C_3 \frac{\partial UV}{\partial Y} + \frac{C_3}{H} \frac{\partial V^2}{\partial Y} + C_4 C_6 \frac{\partial V^2}{\partial X} \\ = \frac{1}{F^2} \left(1 - \frac{C_3}{H} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{C_4 C_6}{F^2} \frac{\partial P}{\partial X} \end{aligned} \quad (3.15)$$

avec :

$$H = \frac{h(x,t)}{d_0} ;$$

Le premier terme de l'équation (3.15), $(F_1^* = \frac{dF_1}{dT})$ est dû à $\frac{\partial u_0}{\partial t}$, u_0 variable

dépend de temps utilisé comme une référence dans $\frac{\partial U}{\partial T}$.

F : est le nombre de **Froud** défini par :

$$F = \frac{u_0(t)}{\sqrt{gd_0}} \quad (3.16)$$

F : Caractérise le paramètre dynamique de l'écoulement.

Les coefficients C1 et C2 sont en rapport avec les variations spatiales et temporelles de H, respectivement:

$$C_1 = \frac{y+d_0}{H^2(b_2-b_1)} \frac{\partial H}{\partial x^*} \quad (3.17)$$

$$C_2 = \frac{y+d_0}{H^2 F_1 d_0} \frac{\partial H}{\partial T} \quad (3.18)$$

Le coefficient C3 est le dérivé de Y par rapport à y^* :

$$C_3 = [1 + k_1(y^* - \beta_1)(2y^* - 1)] e^{k_1 y^*(y^*-1)} \quad (3.19)$$

Il devient une unité quand $k_1=0$ c à d ($C_3 = 1$ quand $k_1 = 0$)

C_4 et C_5 sont introduits pour décrire la forme du parement amont du barrage :

$$C_4 = \frac{d_0}{(b_2 - b_1(y))^2} (b_2 - x) \frac{db_1}{dy} \quad (3.20)$$

$$C_5 = \frac{d_0}{(b_2 - b_1(y))^2} \quad (3.21)$$

Pour un visage du barrage vertical, le coefficient C_4 disparaît, et C_5 deviennent un constant.

Le coefficient C_6 est le dérivé de X par rapport à x^* :

$$C_6 = [1 + k_2(x^* - \beta_2)(2x^* - 1)] e^{k_2 x^*(x^* - 1)} \quad (3.22)$$

Il devient une unité quand $k_2 = 0$ c à d ($C_6 = 1$ quand $k_2 = 0$)

3.8 Conditions initiales et conditions aux limites [13]:

3.8.A Conditions initiales :

Pour le déroulement des calculs, il est nécessaire de déterminer les conditions initiales correspondantes au temps initial $t = 0$, où les valeurs P , U , V , H sont judicieusement spécifiées en tous les points du maillage.

3.8.B Conditions aux limites :

Comme pour tout problème physique, les conditions aux limites spécifient le problème étudié. Dans notre analyse, nous optons pour les conditions aux limites suivantes :

- Condition à la surface libre.
- Condition sur le parement amont
- Condition sur le fond
- Condition sur la limite du réservoir

❖ Condition à la surface libre :

La surface libre est une surface de séparation entre un liquide et un gaz. Cette surface ne peut être traversée par des particules fluides, c'est à dire les particules fluides sur la surface libre restent sur la surface.

La profondeur adimensionnelle $H = \frac{h(x,t)}{d_0}$ n'est pas connue, elle sera

déterminé avec les trois inconnues U , V et P . En d'autres termes, les équations

(3.5), (3.6), (3.7) sont intégrés avec la condition de la surface libre :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial (h - d_0)}{\partial x} = -v \quad (3.23).$$

La forme adimensionnelle transformée de l'équation (3.23) est :

$$\frac{1}{F_1} \frac{\partial H}{\partial T} + C_5 C_6 U \frac{\partial H}{\partial X} = V \xrightarrow{a} Y = 0 \quad (3.24)$$

❖ Condition sur le parement amont :

Le barrage est considéré rigide et se déplace avec le fond de la retenue. Cette hypothèse est acceptable lorsque la fréquence de séisme est petite devant la fréquence propre du barrage.

La condition au limite s'exprime par :

$$\frac{\partial p}{\partial n}(S, t) = -\rho \vec{\gamma} \cdot \vec{n} e^{i\alpha}$$

D'où :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \gamma_n$$

Avec : γ_n : la composante de l'accélération selon la normale.

S : la coordonnée curviligne le long du parement.

Quand l'excitation est causée par un séisme horizontal

$$\gamma_n = -\cos(\alpha) \cdot \gamma$$

α : étant l'angle entre le parement et la verticale

D'où :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \gamma \cdot \cos(\alpha) \quad (3.25).$$

Dans le cas d'un séisme vertical :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \gamma \cdot \sin(\alpha) \quad (3.26).$$

Dans notre cas l'excitation sismique est causée par un séisme horizontal avec un accélération $\gamma = \frac{\partial u_0}{\partial t}$

D'où : la forme adimensionnelle de (3.25) après la transformation géométrique est :

$$\frac{C_1 C_3}{F^2} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{C_5 C_6}{F^2} \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{F_1^*}{F_1^2} \cos(\alpha) \quad (3.27)$$

❖ Condition sur le fond du réservoir :

La condition au limite doit tenir compte de l'effet d'amortissement du sol qui provoque une absorption partielle des ondes de pression incidentes.

La condition au limite s'exprime par :

$$\frac{\partial p}{\partial n}(S', \omega) = -\rho \gamma_n - j\omega C_a p(s, \omega) \quad (3.28)$$

Avec S' : la coordonnée curviligne le long du fond ;

C_a : coefficient d'amortissement du sol;

ω : impulsion (fréquence) de l'excitation sismique

La partie imaginaire dans l'équation (3.28) représente le terme d'amortissement.

Pour une fondation rigide $C_a = 0$, et il aura une réflexion totale des ondes.

Pour une excitation sismique horizontale :

$$\gamma_m = \gamma \sin(\beta)$$

Pour une excitation sismique verticale :

$$\gamma_m = -\gamma \cos(\beta)$$

β : étant l'angle entre le fond et l'horizontale.(voir figure 3.1)

Ainsi pour un fond de réservoir horizontal l'équation (3.28) devient :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ c'est à dire } \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

la forme adimensionnelle après transformation est :

$$\frac{C_3}{HF^2} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{C_4 C_6}{F^2} \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \quad (3.29)$$

❖ Condition sur la limite de réservoir :

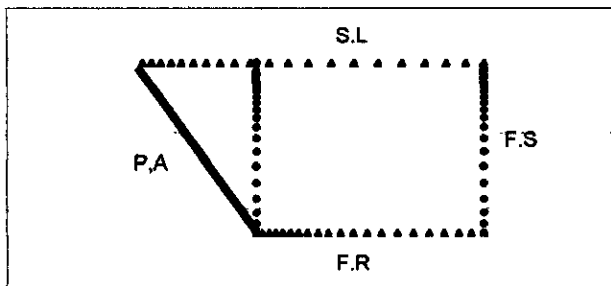
Cette limite est définie après une certaine distance du parement au delà duquel il n'y a plus une réflexion d'ondes.

La condition au limite s'exprime par :

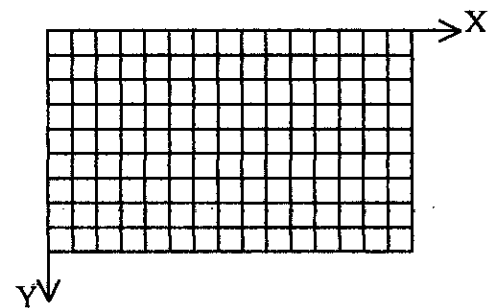
$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

La forme adimensionnelle après la transformation géométrique est :

$$\frac{C_1 C_3}{F^2} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{C_5 C_6}{F^2} \frac{\partial P}{\partial X} = 0 \quad (3.30)$$



(a)



(b)

Figure 3.2 Raffinement de maillage

Remarque : les paramètres $k_1=2, b_1=1 ; k_2=1, b_2=1$ définissent le maillage de la figure (3.2a)

En résumé, le système final décrivant le problème considéré, sous sa forme adimensionnelle et après transformation géométrique est le suivant :

$$(1+U) \frac{F_1}{F_1^2} + \frac{1}{F_1} \frac{\partial U}{\partial T} + C_2 C_3 \frac{\partial U}{\partial Y} + C_5 C_6 \frac{\partial U^2}{\partial X} + C_1 C_3 \frac{\partial U^2}{\partial Y} + \frac{C_3}{H} \frac{\partial UV}{\partial Y} + C_4 C_6 \frac{\partial UV}{\partial X} = -\frac{C_1 C_3}{F^2} \frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{C_5 C_6}{F^2} \frac{\partial P}{\partial X}$$

$$V \frac{F_1}{F_1^2} + \frac{1}{F_1} \frac{\partial V}{\partial T} + C_2 C_3 \frac{\partial V}{\partial Y} + C_5 C_6 \frac{\partial UV}{\partial X} + C_1 C_3 \frac{\partial UV}{\partial Y} + \frac{C_3}{H} \frac{\partial V^2}{\partial Y} + C_4 C_6 \frac{\partial V^2}{\partial X} = \frac{1}{F^2} \left(1 - \frac{C_3}{H} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{C_4 C_6}{F^2} \frac{\partial P}{\partial X}$$

$$C_5 C_6 \frac{\partial U}{\partial X} + C_1 C_3 \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{C_3}{H} \frac{\partial V}{\partial Y} + C_4 C_6 \frac{\partial V}{\partial X} = 0$$

$$\frac{1}{F_1} \frac{\partial H}{\partial T} + C_5 C_6 U \frac{\partial H}{\partial X} = V \xrightarrow{a} Y = 0$$

avec les autres conditions aux limites telles que représentés dans l'équations :(3.27), (3.29), (3.30)

Ces équations sont applicables sur des domaines unité.

Chapitre 4

Modélisation Numérique

Modélisation Numérique

4.1. Introduction :

La résolution numérique des équations aux dérivées partielles s'est considérablement développé depuis 1950 avec la mise au point d'ordinateurs de plus en plus rapides et ayant une taille mémoire à chaque fois plus grande. L'impact des grands calculateurs a été donc d'une très grande importance dans le traitement des problèmes décrits par les équations aux dérivées partielles. Divers méthodes numériques ont été développées dans ce contexte, et qui sont classées en trois principales catégories :

- Méthode des différences finies.
- Méthode des éléments finies.
- Méthode des intégrales aux frontières.

Parmi les différentes méthodes citées ci-dessus, on optera pour la méthode des différences finies. Elle est la plus utilisée et la plus appropriée pour les problèmes complexes de la mécanique des fluides, tels que les phénomènes régis par les équations de Navier Stocks.

Dans ce chapitre nous allons approché notre problème par un schéma numérique appelé « schéma MARKER AND CELL ».

4.2 Schéma MARKER AND CELL (MAC)^[9] :

4.2.1 Méthode des différences finies

Dans la méthode des différences finies, le système d'équations aux dérivées partielles est remplacé par un système d'équations algébriques à résoudre.

La méthode consiste à approcher les équations aux dérivées partielles par des équation aux différences. En d'autres termes, le domaine de variation continu, est remplacé par un ensemble fini de points ou nœuds, délimités par des frontières et formant ainsi un maillage ou grille. (figure 4.1)

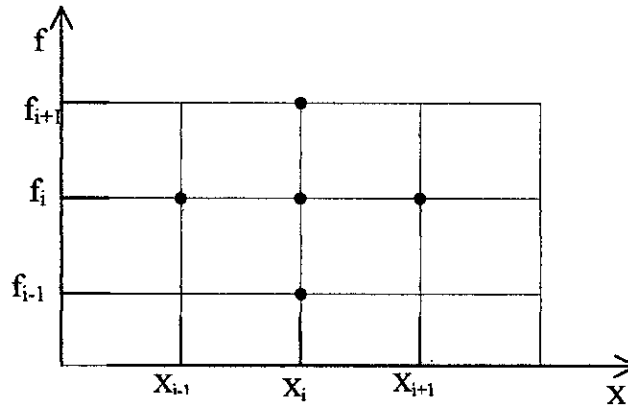


Figure 4.1 : Maillage élémentaire

Si f est une fonction continue et différentiable, on doit écrit alors

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

avec :

$$f_i = f(x_i) \quad \text{et} \quad x_i = (i-1) \Delta x$$

Dans les différentiations ci-dessus, on a utilisé respectivement une différence avant et une différence arrière.

L'ordre d'approximation dans une méthode aux différences finies se détermine à l'aide d'un développement en série de Taylor de la fonction f :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_x + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{(n-1)} f}{\partial x^{n-1}} \right|_x + R_n$$

où, le reste R_n est de l'ordre de $\|\Delta x\|^n$, ce que l'on note habituellement :

$$R_n = o(\|R_n\|)$$

Par ailleurs, la méthode des différences finies peut être facilement étendue au cas où la fonction f considérée est de deux ou plusieurs variables. Ainsi, si f dépend de deux variables (x, y) ; et si dans le plan oxy on trace une série de droites parallèles aux axes, déterminant de la sorte un réseau de points (i, j) auxquels correspond les coordonnées de la fonction inconnue $f_{i,j}$; on peut écrire pour les différences centrales : (figure 4.2.)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

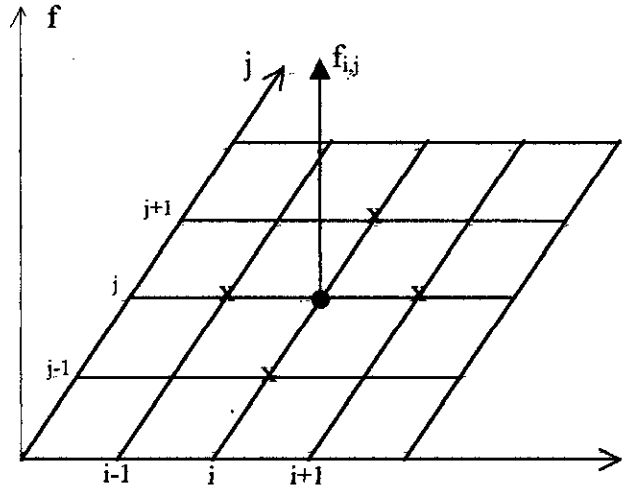


Figure 4.2 : Maillage correspondant à une fonction dépendant de deux variables

D'une manière similaire, pour les dérivées de second ordre, on a :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)_{i,j} = \frac{(f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}) - (f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1})}{4\Delta x \Delta y}$$

4.2.2 Analyse de l'approximation[4,6,2] :

❖ Erreur de troncature^[6] :

L'erreur de troncature vient du fait qu'on a tronqué le développement en série de Taylor de la fonction f . l'erreur de troncature par pas est la différence entre la valeur calculée et la valeur exacte, en supposant qu'au pas précédent, la valeur calculée et la valeur exacte étaient identiques.

❖ Stabilité d'un schéma aux différences finies :

Bien entendu, les opérations de l'algorithme ne sont jamais effectuées exactement. Lors de la résolution d'un algorithme, on n'attaque pas le pas $j \rightarrow j+1$ dans les mêmes conditions que le pas $0 \rightarrow 1$, car on l'aborde avec un lourd handicap : la lourde charge est constituée par la somme des erreurs de discrétisation précédentes (et d'arrondis à l'occasion !) : les erreurs sont donc petites à chaque opérations, mais comme il y a beaucoup d'opérations, leur accumulation peut avoir un effet désastreux. Ainsi un coureur qui à déjà fait trois « cent mètres » dans sa journée n'aborde pas le quatrième dans la même forme que le premier !

Par conséquent, on dira qu'un schéma numérique est stable s'il est peu sensible à l'accumulation des erreurs de discrétisation et d'arrondis.

- **Stabilité** : Dans la méthode explicite, une condition de stabilité sur le pas de temps devra être satisfaite, ce qui n'est pas le cas pour une méthode implicite.
- **Simplicité (souplesse) de programmation** : la méthode explicite est relativement plus facile à programmer que la méthode implicite. Par conséquent, quand le temps nécessaire pour le développement d'un programme est limité, la méthode explicite doit être utilisée
- **Economie** : Puisque la valeur du pas de temps Δt pour un schéma implicite n'est pas restreinte par un critère de stabilité, une grande valeur de Δt est permise, ce qui donnera un temps de calcul relativement inférieur comparé au schéma explicite dans lequel Δt est limité par une condition de stabilité.

4.2.4 Schema MARKER-and-CELL [9]:

Le schéma MAC a été développé par HARLOW et WELSH (1965).

La méthode de discrétisation repose sur des bilans de masse, de quantité de mouvement, d'énergie, sur des volumes de contrôle élémentaires qui définissent un maillage de calcul appelé maillage décalé figure(4.4).

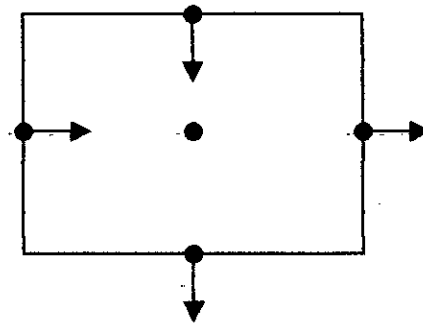


Figure 4.3 la maille de MAC

- Point où est définie la pression
- Point où est définie la vitesse selon X
- ↓ Point où est définie la vitesse selon Y

❖ Maillage décalé :

Historiquement, le maillage décalé a été le premier utilisé dans les méthodes aux volumes finis. Le principe repose sur trois systèmes de maillage, pour U , V et P , superposés comme montre (figure 4.4).

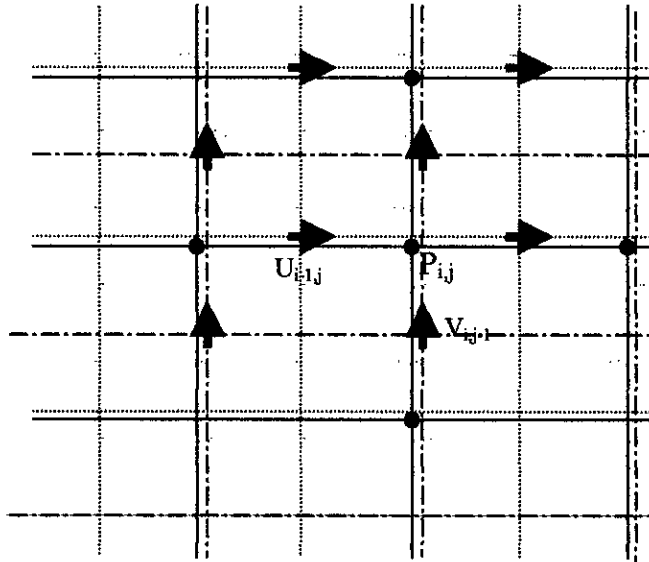


Figure.4.4 : Maillage décalé

Plusieurs conditions interviennent :

- Dans le maillage relatif à P les composantes de vitesse sont exprimées sur les surface qui entourent le volume.
- La conservation de la masse est ainsi assurée .
- Le maillage doit être construit pour que les frontières passent par les points de vitesses, et non de pressions.

Avantages et inconvénients de maillage décalé :

Avantages :

L'avantage majeur des maillages décalés c'est :

- Eviter des oscillations de la solution, surtout pour la pression P , lorsque les dérivées sont centrées, et lorsque le maillage est unique.
- Résolution plus exacte de l'équation de POISSON pour la pression

Inconvénients :

- Lecture difficile des programmes (problème des indices).
- Condition aux limites difficiles à imposer (frontières différentes) au moins pour des deux composantes de la vitesse.
- Difficultés de construire des coordonnées généralisées.

4.3. Discrétisation des équations de problème :

Les équations régissant notre problème s'écrivent dans le domaine de calcul, telle que :

$$(1+U) \frac{F_1}{F_1^2} + \frac{1}{F_1} \frac{\partial U}{\partial T} + C_2 C_3 \frac{\partial U}{\partial Y} + C_5 C_6 \frac{\partial U^2}{\partial X} + C_1 C_3 \frac{\partial U^2}{\partial Y} + \frac{C_3}{H} \frac{\partial UV}{\partial Y} + C_4 C_6 \frac{\partial UV}{\partial X} = - \frac{C_1 C_3}{F^2} \frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{C_5 C_6}{F^2} \frac{\partial P}{\partial X} \quad (4.1)$$

$$V \frac{F_1}{F_1^2} + \frac{1}{F_1} \frac{\partial V}{\partial T} + C_2 C_3 \frac{\partial V}{\partial Y} + C_5 C_6 \frac{\partial UV}{\partial X} + C_1 C_3 \frac{\partial UV}{\partial Y} + \frac{C_3}{H} \frac{\partial V^2}{\partial Y} + C_4 C_6 \frac{\partial V^2}{\partial X} = \frac{1}{F^2} \left(1 - \frac{C_3}{H} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{C_4 C_6}{F^2} \frac{\partial P}{\partial X} \quad (4.2)$$

$$C_5 C_6 \frac{\partial U}{\partial X} + C_1 C_3 \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{C_3}{H} \frac{\partial V}{\partial Y} + C_4 C_6 \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (4.3)$$

Ces équations sont couplées avec la condition au limite adimensionnelle de la surface libre :

$$\frac{1}{F_1} \frac{\partial H}{\partial T} + C_5 C_6 U \frac{\partial H}{\partial X} = V \xrightarrow{a} Y = 0 \quad (4.4)$$

La discrétisation se fait à l'aide d'un schéma au différences centré à trois point.

Pour la discrétisation de (4.1) , on choisit le schéma de la figure (4.4a) pour U
 Pour la discrétisation de (4.2), on choisit le schéma de la figure (4.4b) pour V

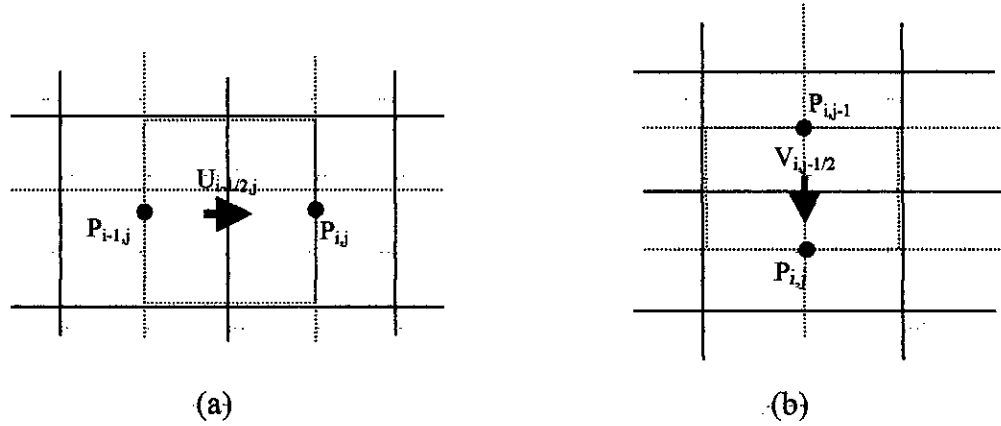


figure (4.4)

Cela fait apparaître un résultat précis au second ordre, avec la pression sur la surface de contrôle.

$$\left. \frac{\partial P}{\partial X} \right|_{i-1/2,j} = \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{\Delta X} \quad (4.5)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial X} \right|_{i,j-1/2} = \frac{P_{i+1/2,j-1/2} - P_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta X} \quad (4.6)$$

de même pour $\frac{\partial P}{\partial Y}$.

De façon explicite l'équation (4.1) devient :

$$U_{i-1/2,j}^{n+1} = U_{i-1/2,j}^n + \Delta T F_1 \left(\xi_{i-1/2,j}^n - \frac{C_1 C_3}{F^2} \frac{P_{i-1/2,j+1/2}^{n+1} - P_{i-1/2,j-1/2}^{n+1}}{\Delta Y} - \frac{C_5 C_6}{F^2} \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta X} \right) \quad (4.7)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\xi_{i-1/2,j}^n &= -C_2 C_3 \frac{U_{i-1/2,j+1/2} - U_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta Y} - C_5 C_6 \frac{(U^2)_{i,j} - (U^2)_{i-1,j}}{\Delta X} - \\
C_1 C_3 \frac{(U^2)_{i-1/2,j+1/2} - (U^2)_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta Y} - \frac{C_3}{H_{i-1/2}} \frac{(UV)_{i-1/2,j+1/2} - (UV)_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta Y} - \\
C_4 C_6 \frac{(UV)_{i,j} - (UV)_{i-1,j}}{\Delta X} - (1 + U_{i-1/2,j}) \frac{F_1^*}{F_1^2}
\end{aligned} \quad (4.8)$$

de même l'équation (4.2) devient:

$$V_{i,j-1/2}^{n+1} = V_{i,j-1/2}^n + \Delta T F_1 \left(\zeta_{i,j-1/2}^n - \frac{C_4 C_6}{F^2} \frac{P_{i-1/2,j+1/2}^{n+1} - P_{i-1/2,j-1/2}^{n+1}}{\Delta X} - \frac{C_3}{H_j F^2} \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta Y} \right) \quad (4.9)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\zeta_{i,j-1/2}^n &= -C_2 C_3 \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta Y} - C_5 C_6 \frac{(UV)_{i+1/2,j-1/2} - (UV)_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta X} - \\
C_1 C_3 \frac{(UV)_{i,j} - (UV)_{i,j-1}}{\Delta Y} - \frac{C_3}{H} \frac{(V^2)_{i,j} - (V^2)_{i,j-1}}{\Delta Y} - \\
C_4 C_6 \frac{(V^2)_{i+1/2,j-1/2} - (V^2)_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta X} + \frac{1}{F^2} - \frac{F_1^*}{F_1^2} V_{i,j-1/2}
\end{aligned} \quad (4.10)$$

les expressions de ξ et ζ définissent l'apport des termes non linéaires (*accélération convective*)

Remarque :

les termes de pressions $P_{i-1/2,j-1/2}$, $P_{i-1/2,j+1/2}$, $P_{i+1/2,j-1/2}$, $P_{i+1/2,j+1/2}$ seront calculés par interpolation :

$$P_{i-1/2,j-1/2} = \frac{1}{4}(P_{i,j} + P_{i-1,j} + P_{i-1,j-1} + P_{i,j-1})$$

Pour les vitesses $U_{i,j}$, $U_{i-1/2,j-1/2}$

$$U_{i,j} = \frac{1}{2}(U_{i-1/2,j} + U_{i+1/2,j}) \quad \text{et} \quad U_{i-1/2,j-1/2} = \frac{1}{2}(U_{i-1/2,j} + U_{i+1/2,j-1})$$

même remarque pour $V_{i,j}$, $V_{i-1/2,j-1/2}$.

$$V_{i,j} = \frac{1}{2}(V_{i-1/2,j} + V_{i+1/2,j}) \quad \text{et} \quad V_{i-1/2,j-1/2} = \frac{1}{2}(V_{i-1/2,j} + V_{i+1/2,j-1})$$

Les composantes des vitesses au temps $(n+1)\Delta T$ doivent vérifier l'équation de continuité, comme dans les équations (4.7) et (4.9), la pression P apparaît implicitement.

En fait, P a été calculé antérieurement. En effet l'équation de continuité s'écrit :

$$C_5 C_6 \frac{U_{i+1/2,j}^{n+1} - U_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta X} + \frac{C_3}{H} \frac{V_{i,j+1/2}^{n+1} - V_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta Y} + C_1 \frac{U_{i,j+1/2}^{n+1} - U_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta Y} + C_4 C_6 \frac{V_{i+1/2,j}^{n+1} - V_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta X} = 0 \quad (4.10)$$

En remplaçant $U_{i+1/2,j}$, $U_{i-1/2,j}$... de (4.10) par (4.7) et (4.9) on obtient l'équation de pression suivante :

$$P_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{D_{i,j}} \left[\sum d_{k,l} P_{k,l}^{n+1} - \frac{F^2}{\Delta T F_1} A_{i,j} - F^2 B_{i,j} \right] \quad (4.11)$$

Avec :

$$D_{i,j} = \left[\frac{2C_6^2(C_5^2 + C_4^2)}{\Delta X^2} + \frac{2C_3^2(C_1^2 + \frac{1}{H_i^2})}{\Delta Y^2} \right] \quad (4.12)$$

$P_{k,l}$: les pressions dans des points adjacents proche de $P_{i,j}$ (voir figure.4.5)

$d_{k,l}$: les coefficients sont tel que :

$$d_{i+1,j} = d_{i-1,j} = \frac{C_6^2(C_5^2 + C_4^2)}{\Delta X^2} \quad (4.13)$$

$$d_{i,j+1} = d_{i,j-1} = \frac{C_3^2(C_1^2 + \frac{1}{H_i^2})}{\Delta Y} \quad (4.14)$$

$$d_{i+1/2,j+1/2} = d_{i-1/2,j-1/2} = -d_{i-1/2,j+1/2} = -d_{i+1/2,j-1/2} = \frac{2C_3C_6}{\Delta X \Delta Y} (C_1C_5 + \frac{C_4}{H_i}) \quad (4.15)$$

$$B_{i,j} = C_5 C_6 \frac{\xi_{i+1/2,j} - \xi_{i-1/2,j}}{\Delta X} + \frac{C_3}{H} \frac{\zeta_{i,j+1/2} - \zeta_{i,j-1/2}}{\Delta Y} + C_1 C_3 \frac{\xi_{i,j+1/2} - \xi_{i,j-1/2}}{\Delta Y} + C_4 C_6 \frac{\zeta_{i+1/2,j} - \zeta_{i-1/2,j}}{\Delta X} \quad (4.16)$$

$$A_{i,j} = C_5 C_6 \frac{U_{i+1/2,j} - U_{i-1/2,j}}{\Delta X} + \frac{C_3}{H} \frac{V_{i,j+1/2} - V_{i,j-1/2}}{\Delta Y} + C_1 C_3 \frac{U_{i,j+1/2} - U_{i,j-1/2}}{\Delta Y} + C_4 C_6 \frac{V_{i+1/2,j} - V_{i-1/2,j}}{\Delta X} \quad (4.17)$$

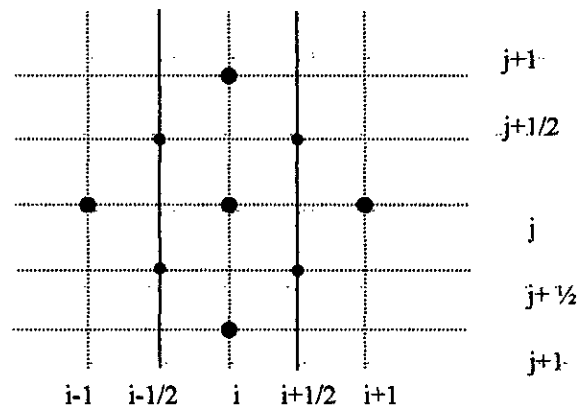


Figure 4.5 Schéma de calcul de pression :

La discrétisation de la condition sur la surface libre :

$$H_i^{n+1} = H_i^n + \Delta T F_1 \left(V_i^{n+1} - C_5 C_6 U_i^{n+1} \frac{H_{i+1/2}^n - H_{i-1/2}^n}{\Delta X} \right) \quad (4.18)$$

4.4. Traitement des conditions aux limites

Soit le domaine de calcul suivant :

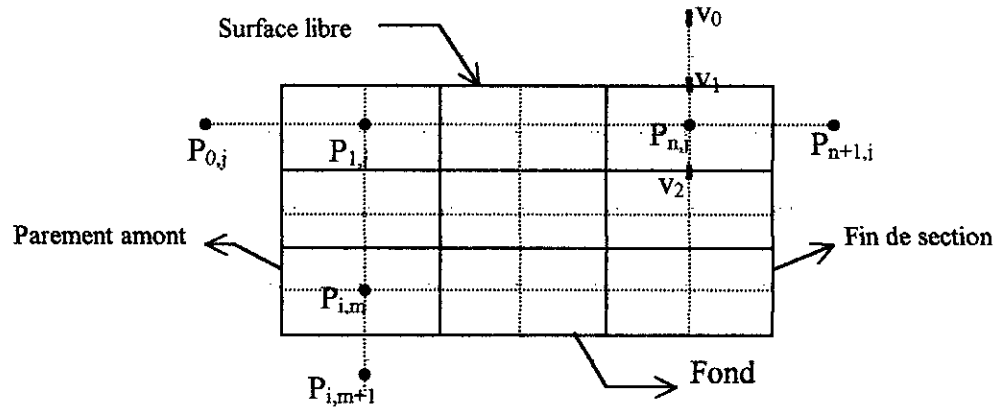


Figure 4.6 -frontières de la maille MAC

D'après le schéma de pression représenté précédemment, le calcul de $P_{1,j}$ nécessite les valeurs de $P_{0,j}$ qui seront calculées en utilisant la condition au limite sur le parement amont.

$$\frac{C_1 C_3}{F^2} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{C_5 C_6}{F^2} \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{F_1^*}{F_1^2} \cos(\alpha)$$

La discrétisation est comme suit :

$$\frac{C_1 C_2}{\Delta Y} (P_{i-1/2, j+1/2} - P_{i-1/2, j-1/2}) + \frac{C_5 C_6}{\Delta X} (P_{i,j} - P_{i-1,j}) = \frac{F_1^*}{F_1^2} F^2 \cos(\alpha)$$

d'où

$$P_{0,j} = P_{1,j} + \frac{\Delta X}{C_5 C_6} \left[\frac{C_1 C_3}{\Delta Y} (P_{1/2, j+1/2} - P_{1/2, j-1/2}) - \frac{F_1^*}{F_1^2} F^2 \cos(\alpha) \right] \quad (4.19)$$

Et avec la condition au limite sur le fond nous déterminons les pressions $P_{i,m+1}$

$$\frac{C_3}{HF^2} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{C_4 C_6}{F^2} \frac{\partial P}{\partial X} = 0$$

La discrétisation est comme suit :

$$\frac{C_3}{H} (P_{i,j+1} - P_{i,j}) + \frac{C_4 C_6}{\Delta X} (P_{i+1/2,j+1/2} - P_{i-1/2,j+1/2}) = 0$$

d'où

$$P_{i,m+1} = P_{i,m} - \frac{H_i C_4 C_6}{\Delta X C_3} (P_{i+1/2,m+1/2} - P_{i-1/2,m-1/2}) \quad (4.20)$$

de même pour les pression $P_{n+1,j}$

on a la condition de la fin de section suivant :

$$\frac{C_1 C_3}{F^2} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{C_5 C_6}{F^2} \frac{\partial P}{\partial X} = 0$$

dont la discrétisation est :

$$\frac{C_1 C_3}{\Delta Y} (P_{i+1/2,j+1/2} - P_{i+1/2,j-1/2}) + \frac{C_5 C_6}{\Delta X} (P_{i+1,j} - P_{i,j}) = 0$$

$$P_{n+1,j} = P_{n,j} - \frac{\Delta X}{C_5 C_6} \frac{C_1 C_3}{\Delta Y} (P_{n+1/2,j+1/2} - P_{n+1/2,j-1/2}) \quad (4.21)$$

Pour le calcul de la vitesse V_0 qui se trouve en dehors du domaine. Cette valeur peut être définie par extrapolation linéaire. La technique consiste à écrire la vitesse V_1 comme la valeur moyenne des deux vitesses V_0 et V_2 , soit :

$$V_0 = 2V_1 - V_2 \quad (4.22)$$

4.5. Stabilité du schéma

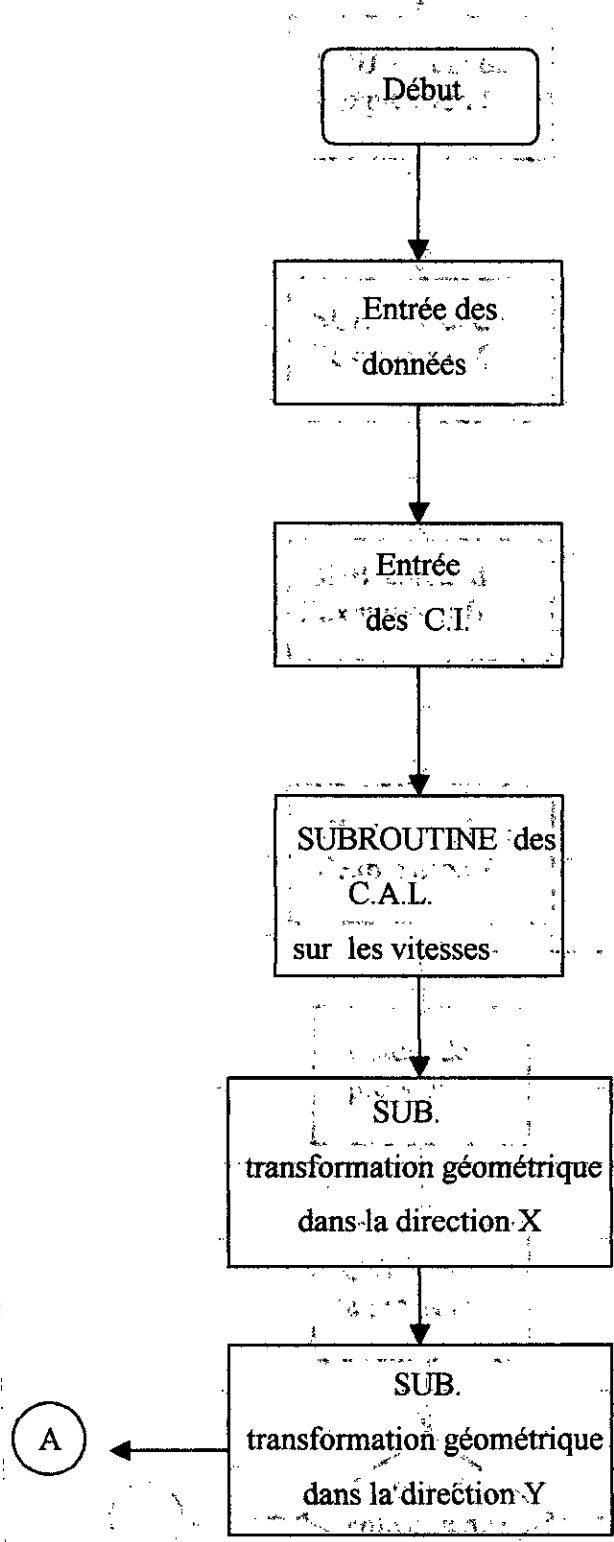
Puisque les équations de vitesses (4.7) et (4.9) sont explicites, il y a donc un critère de stabilité selon PEYRET – TAYLOR qui s'écrit comme suit :

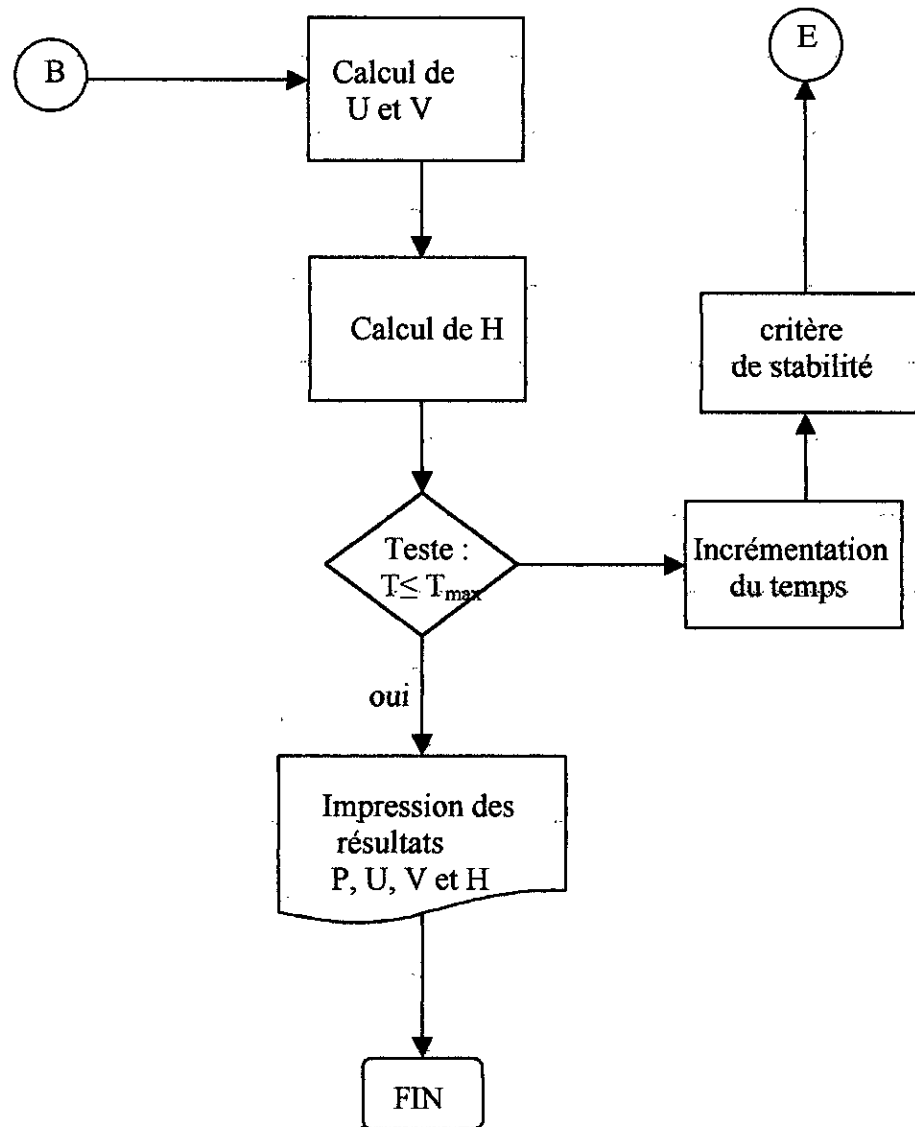
$$\frac{1}{4} (|U| + |V|)^2 \leq 1 \quad (4.23)$$

Cette condition doit être satisfaite en tout les points du maillages, il est donc évident de prendre l'incrément de temps suivant :

$$\Delta T = \frac{4}{(|U| + |V|)^2} \quad (4.24)$$

ORGANIGRAMME DE CALCUL





Chapitre 5

Expérimentation numérique

Expérimentation Numérique

Deux parties essentielles constituent l'ossature de ce chapitre.

- Cas linéaire (les termes non linéaire sont négligés) :

Consacrée à la validation du modèle adopté, en comparant les résultats obtenus avec ceux obtenus par Zangar.

Les différences constatées (erreur Max de l'ordre de 2.4%) sont dues aux erreurs de troncature, d'arrondis

- Cas non linéaire (tenir compte de l'accélération convective) :

déterminer la distribution de pression hydrodynamique sur le parement amont pour différentes inclinaisons

les paramètres utilisés sont (figure 5.1) :

$$k_1 = 1 ; b_1 = 1 \quad d_0 = 1\text{m}$$

$$k_2 = 1 ; b_2 = 1 \quad b_2 = 4d_0$$

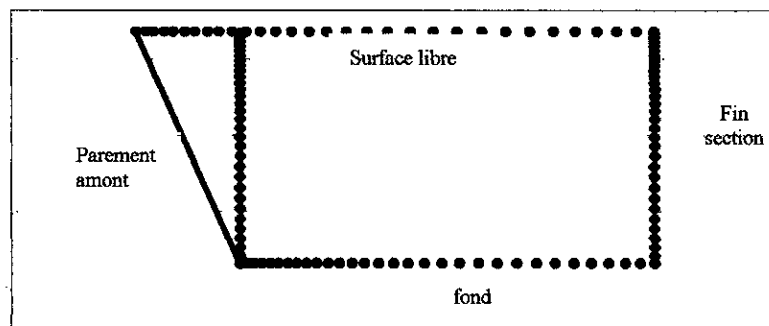


figure 5.1 Domaine physique

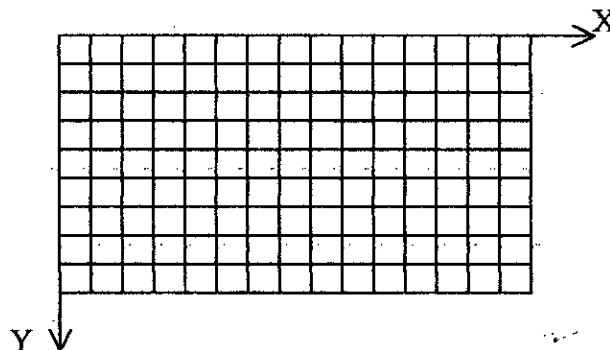


Figure 5.2. Domaine de calcul

La distribution de pression hydrodynamique sur le parement amont du barrage sera représentée par la variation de coefficient de pression $C_p = \frac{P}{\rho \alpha g d_0}$ en fonction de la profondeur de réservoir $\frac{y + d_0}{d_0}$

Où :

P : pression hydrodynamique exercée sur le parement amont.

ρ : la masse volumique du fluide.

α : coefficient sismique

d_0 : la profondeur constante de réservoir

Cas linéaire :

Validation :

Pour les figure (5.1, 5.2, 5.3, 5.44) on remarque :

On a obtenue des résultat satisfaisant comparativement à ceux données par Zangar

Les différences constatées (erreur max. de l'ordre de 2.4%) sont dues aux
erreurs de troncature ;
erreurs d'arrondis ;
à la méconnaissance des conditions expérimentales de Zangar.

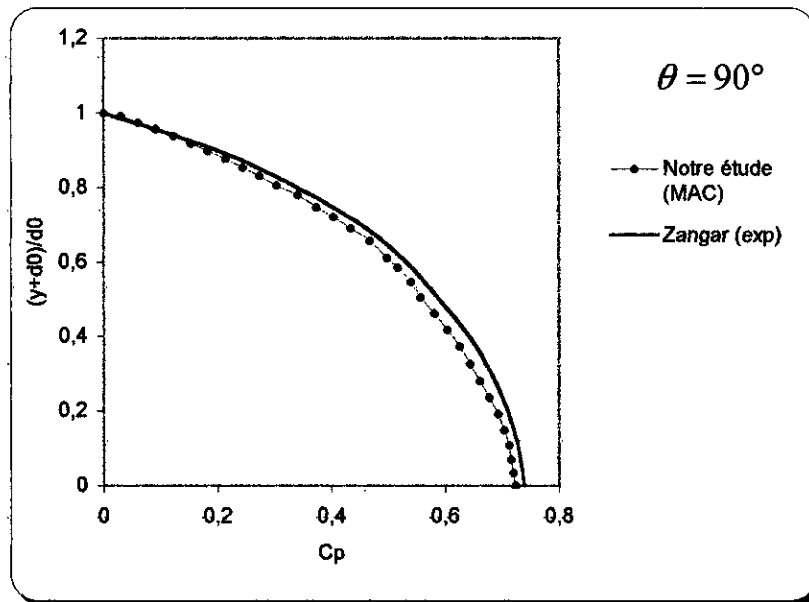
Pour la figure (5.5) on constate que l'inclinaison du parement amont du barrage modifie les pression hydrodynamique.

Il est trouvé aussi que l'augmentation de l'inclinaison de parement génère une diminution des pression hydrodynamiques.

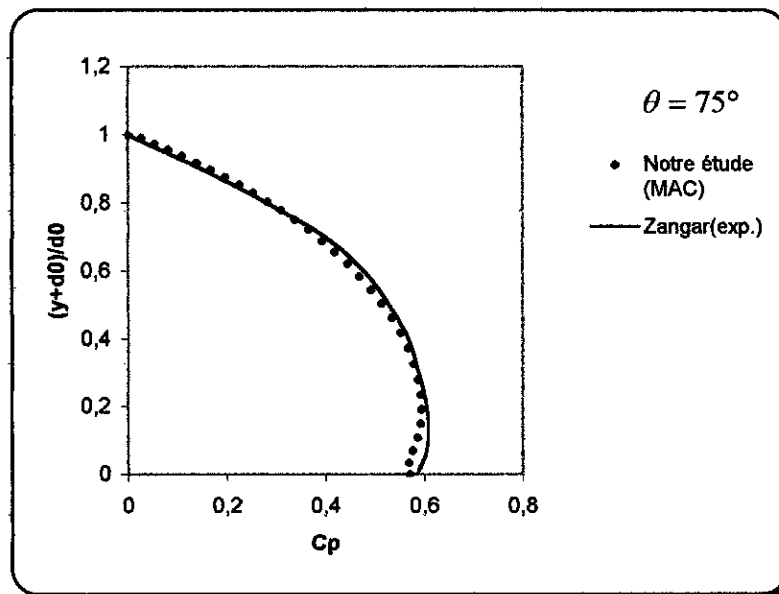
La courbe à 90° est l'enveloppe de courbes de pression c'est à dire, la pression hydrodynamique maximale (cas le plus défavorable) est obtenue pour un parement vertical et au fond du réservoir.

Cas non linéaire : (figure 5.8)

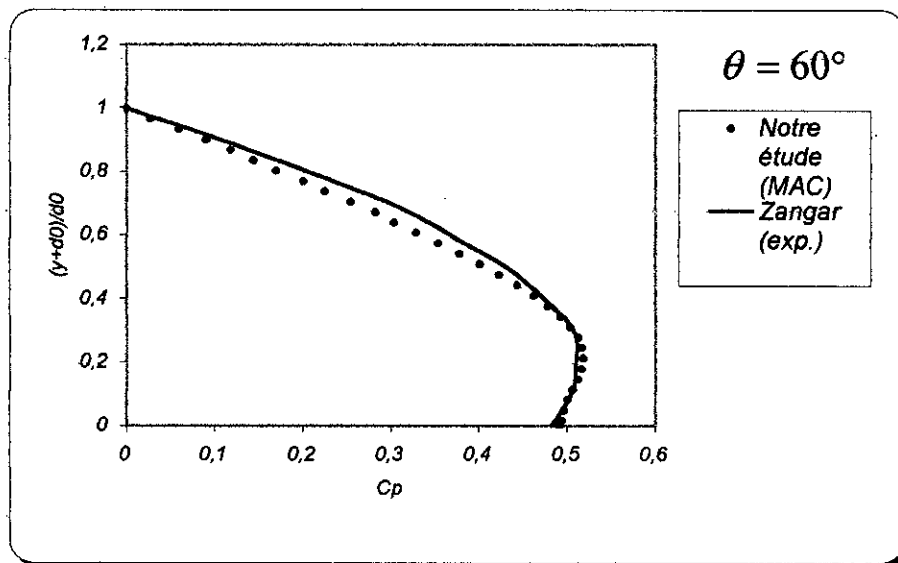
On remarque que les terme non linéaire (l'accélération convective) modifie les pression hydrodynamique par rapport au cas linéaire car l'accélération convective augmente ou diminue la pression hydrodynamique selon leur sens .



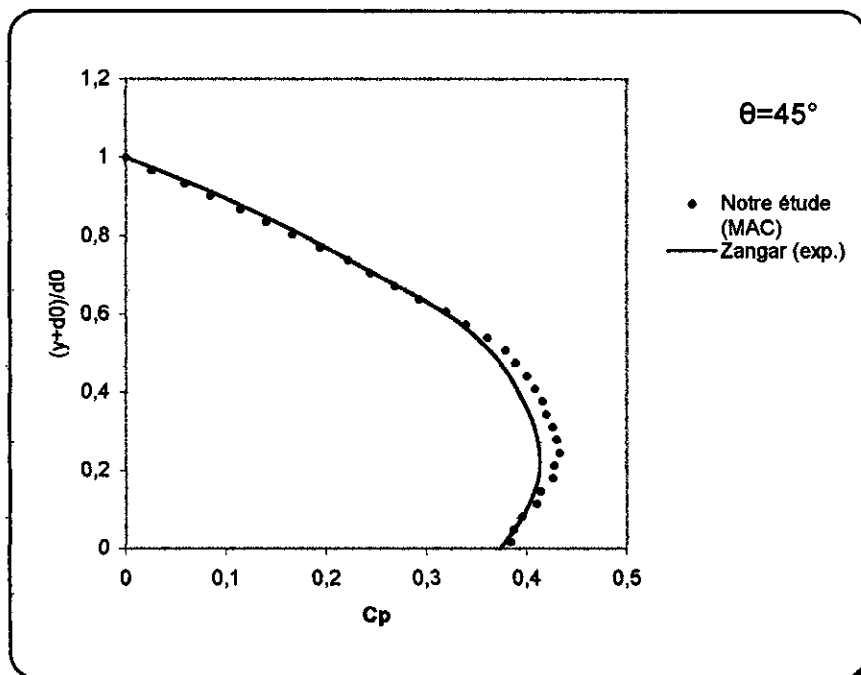
*Distribution de la pression hydrodynamique
sur le parement amont d'un barrage poids rigide
figure 5.1*



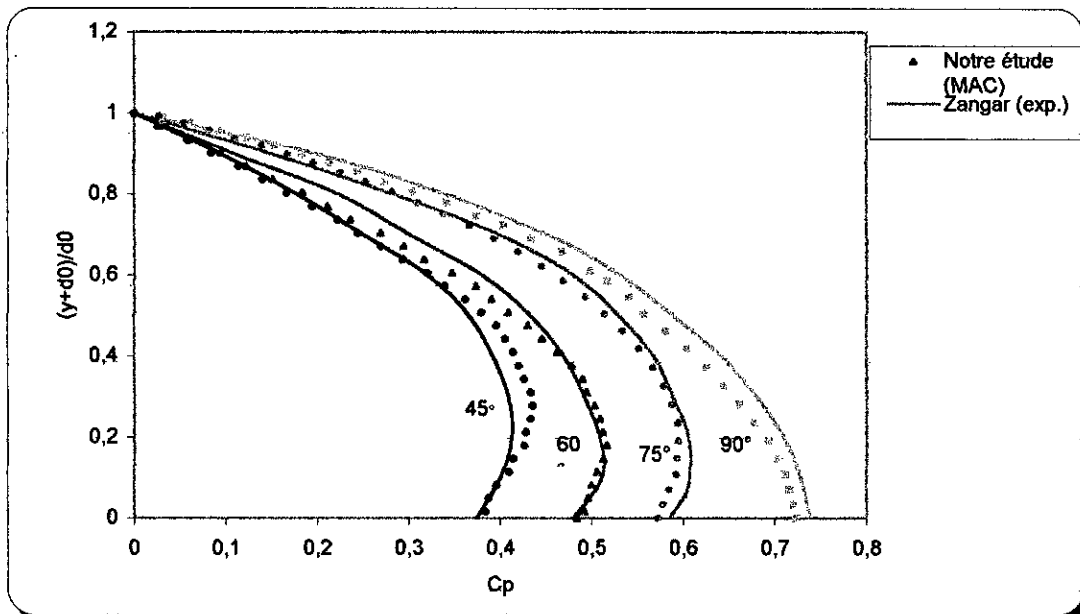
*Distribution de la pression hydrodynamique
sur le parement amont d'un barrage poids rigide
figure 5.2*



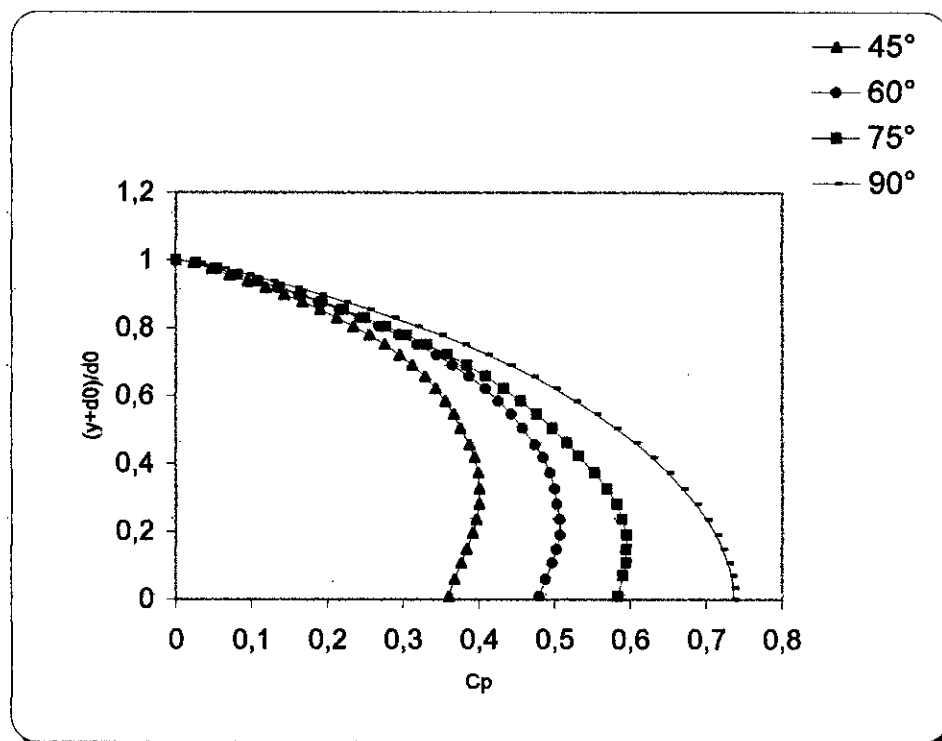
distribution de la pression hydrodynamique
sur le parement amont d'un barrage poids rigide
figure 5.3



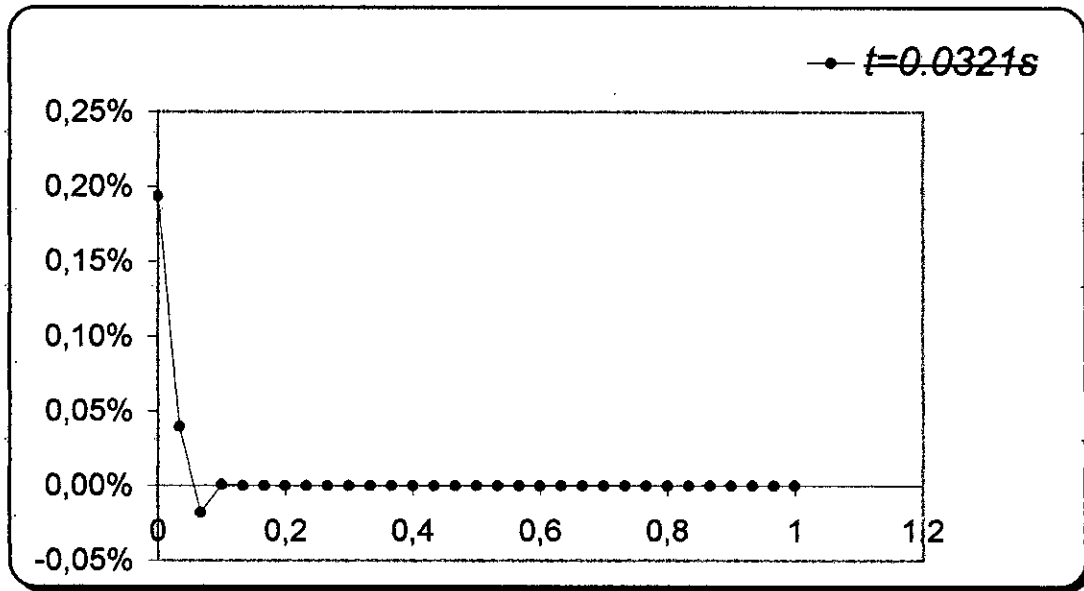
distribution de la pression hydrodynamique
sur le parement amont d'un barrage poids rigide
figure 5.4



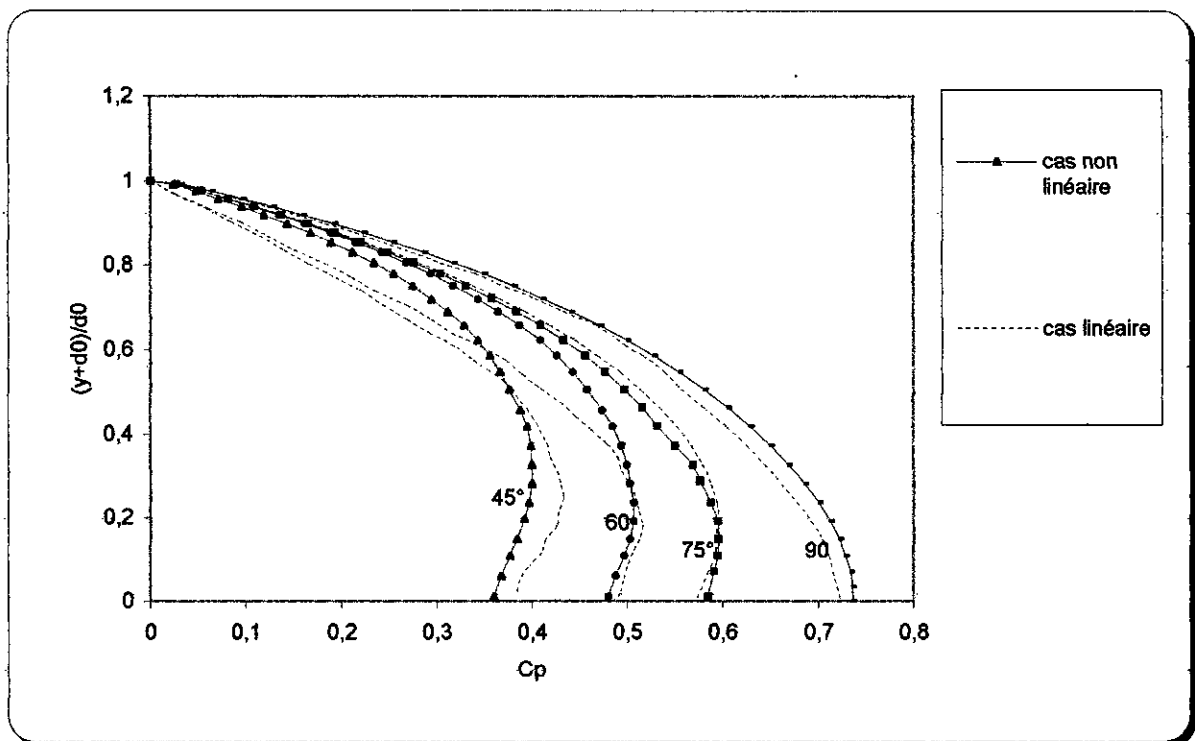
*distribution de la pression hydrodynamique
sur le parement amont d'un barrage poids rigide
figure 5.5*



*Distribution de la pression hydrodynamique non linéaire
sur le parement amont d'un barrage poids rigide
Figure -5.6-*



*La variation de la hauteur H en fonction de x
Figure 5.7*



*Distribution de la pression hydrodynamique
sur le parement amont d'un barrage poids rigide
cas linéaire et cas non linéaire
Figure 5.8*

Conclusion générale

CONCLUSION :

Dans les problèmes relevant de l'analyse de la réponse du barrage au séisme on recherche la distribution des pressions hydrodynamique sur le parement, ainsi que l'influence de la forme de ce parement. La résolution de ces problèmes consiste en la détermination des équations régissant le comportement du système qui, sont des équations aux dérivées partielles dont la solution exacte est très rare. La méthode des différences finies est aujourd'hui parmi les méthodes les plus utilisées pour résoudre effectivement ces équations, elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur.

Nous recommandons pour un meilleur traitement du problème de tenir compte des aspects suivants :

- ❖ les termes convectifs (les termes non linéaire $u \frac{\partial u}{\partial x}$, $v \frac{\partial u}{\partial y}$, ...), ne sont pas négligés dans le cadre de ce travail, contrairement aux différents travaux effectués au laboratoire hydraulique.
- ❖ Dans le cadre de ce travail, nous avons tenu compte aussi la variation de la hauteur d'eau dans l'espace et dans le temps, élément n'ayant pas été pris en compte dans les travaux précédents.
- ❖ Le modèle de calcul ainsi élaboré peut aussi tenir compte des forces de viscosité négligées dans les différents modèles de calculs rencontrés
- ❖ Le programme permet de résoudre les cas des barrages avec parement à double fruit ainsi qu'avec un fond incliné.

Bibliographie

[1] J. AVILES

‘Water pressures on rigid gravity dams with finite reservoir, during earthquakes’
Earthquake Eng. Struct Dyn. V18, 527-537 (1989)

[2] ALI BERIKSI , ABDELATIF BOUHADJI

Simulation et analyse des écoulement bidimensionnels a surface libre en zone
de transition

Thèse d’ingénieur d’état E.N.P 1993

[3] BENDJEBBAS SAMIR ,AKBI MOHAMED

Analyse des pression dues au séisme sur un système barrage-réservoir

Thèse d’ingénieur d’état E.N.P 2000

[4] R. DAUTRAY

Analyse mathématique et calcul numérique

Ed. Massan 1988

[5] V. DAVIDOVICI

Génies parasismique

Presses de l’école nationale des ponts et
Chaussés (1985)

[6] EUVRAR

Résolution numérique des équation aux dérivées partielles de la physique, de la
mécanique et des science de l’ingénieur.

Ed Massan Paris (1990).

[7] FILALI

Etude numérique d’un problème hyperbolique appliquée aux barrages rigide.

Thèse d’ingénieur d’état E.N.P 1993.

[8] M.HUG

Mécanique des fluides appliquée .

Ed. EYROLLES (1975)

[9] Cours DEA. Toulouse

[10] HUNG.T.K

“Spiral flows in finite rotating annular tubes”.

Journal of engineering mechanics division 1973. pp13-19

[11] TIN-KAN HUNG

Non-linear hydrodynamic pressure on rigid dam montion

Journal of engineering mechanics division V113 ;N° 4 1973. pp482-499

[12] S. YAHAOUI, M. DOUGHA

Etudes des pression hydrodynamique sur les barrages poids rigide
par la méthode des équation intégral aux frontières

Thèse d'ingénieur d'état E.N.P 1995