

Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Hydraulique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en Hydraulique

Thème

*Etude d'un Ecoulement Turbulent dans
une Conduite à Motif Périodique*

Modèle K- ϵ

Proposé et dirigé par :

M^{elle} S. BENMAMAR

M^r S. BENZIADA

Etudié par :

Y. BAUCHE

A. BOUKHERCHA

Promotion : juin 1999 &

Ecole Nationale Polytechnique

Département d'Hydraulique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

Projet de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en Hydraulique

Thème

*Etude d'un Ecoulement Turbulent dans
une Conduite à Motif Périodique
Modèle K- ϵ*

Proposé et dirigé par :

M^{elle} S. BENMAMAR
M^r S. BENZIADA

Etudié par :

Y. BAUCHE
A. BOUKHERCHA

Promotion : juin 1999 &

Dédicace

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Bercé par votre amour infini

N'êtes vous pas à mes côtés toujours

C'est pour vous que ce travail est dédié

Ma mère, mon père, à vous mes frères et sœurs

Debout, sur quatre pieds mon amitié

Pour moi, elle restera éternelle

Laissant dans ma vie un souvenir affirmé

A toute ma grande famille, à mes cousins et cousines

à tous mes amis, à Yassine

je dédié

mon travail

A. Boukhercha

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A la généreuse ma mère.

A la mémoire de mon père.

A tous mes frères et sœurs.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

Y. Baouche

Remerciements

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Nous remercions Dieu de nous avoir donné la volonté et le courage afin d'arriver de faire ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer vivement notre profonde gratitude à notre promotrice M^{elle} : S.BENMAMAR & M^r : S.BENZIADA pour leurs confiances, leurs encouragements, leurs suiv i et pour les conseils qu'ils nous ont apportés pour l'achèvement de ce projet de fin d'étude.

Nous remercions également tous les enseignants, et particulièrement ceux du département de Génie HYDRALIQUE, qui ont contribué de près ou de loin à notre formation durant nos cinq ans d'étude.

Nous tenons également à remercier l'ensemble des membres de jury qui nous ont fait l'honneur de juger notre travail.

Nous voudrions associer nos remerciements à toute l'équipe de la bibliothèque, ainsi qu'à tout le personnel pour leur entière disponibilité.

NOTATION

$f(x)$	Fonction géométrique de la paroi de la conduite.
β	Dérivée de la fonction de la conduite.
e_x, e_y	Vecteurs unitaires dans le domaine physique suivant X, Y .
e_ζ, e_η	Vecteurs unitaires dans le domaine rectangulaire de calcul suivant ζ, η .
L	Longueur d'onde de la conduite.
\vec{n}	Vecteur normal a un élément de surface.
\bar{P}	Pression moyenne.
P	Pression instantanée.
P'	Pression fluctuante.
U_i, U_j	Composante de la vitesse dans les coordonnées cartésiennes X, Y .
\bar{U}	Vitesse moyenne.
U_η, U_ζ	Composante de la vitesse dans les coordonnées (η, ζ) .
ρ	Masse volumique du fluide.
Re	Nombre de Reynolds.
Re_T	Nombre de Reynolds turbulent.
μ	Viscosité dynamique.
ν	Viscosité cinématique moléculaire.
ν_T	Viscosité cinématique turbulente.
K	Energie cinétique turbulente.
ε	Taux de dissipation de l'énergie turbulente.
R_{ij}	Tension s de Reynolds.
L_m	Longueur de mélange.
L_n	Seconde longueur de mélange.
δ	Epaisseur de la couche limite.
U^*	Vitesse de frottement.
$F\mu, f\varepsilon_1, f\varepsilon_2$	Fonctions de pondérations.
U^+	Vitesse réduite (variable de paroi).
Y^+	Coordonnée réduite (variable de paroi).
K^+	Energie cinétique turbulente (variable de paroi).
ε^+	Taux de dissipation de l'énergie turbulente (variable de paroi).
θ	Angle d'ondulation.
τ_w	Contrainte de frottement.
k	Constante de VON Karman.

في هذه الدراسة قمنا بحساب عناصر انسياب زويعي في قناة دورية ذات جوانب متقاربة و متباعدة وذلك باستعمال النموذج $K-\epsilon$ وطريقة الفروق المنتهية.

الكلمات المفتاحية :

الفروق المنتهية، الزويعة، انسياب، خطوط التيار.

RESUME :

Dans notre étude, nous avons essayez de déterminer les grandeurs physiques (vitesse et pression), dans une conduite à motif périodique de type convergent – divergent, en utilisant le modèle $K-\epsilon$ et la méthode des différences finis.

Mots clés :

différences finis, turbulence, écoulement, lignes de courants.

ABSTRACT :

In our study, we have to try to determine the physical sizes (velocity and pressure), in aperiodical conduct motif of convergent divergent type, by using the $K-\epsilon$ model, and the finished differences method.

Key words :

finished différences, turbulence, flowing, line of currents

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	4
ETAT DE CONNAISSANCE SUR LES ECOULEMENTS DANS LES CONDUITES A MOTIFS PERIODIQUES	4
I ETAT DE CONNAISSANCE SUR LES ECOULEMENTS LAMINAIRES DANS LES CONDUITES A MOTIFS PERIODIQUES	4
II ETAT DE CONNAISSANCE SUR LES ECOULEMENTS TURBULENTS DANS LES CONDUITES A MOTIFS PERIODIQUES	14
CONCLUSION	17
CHAPITRE II	19
CONCEPT ET EQUATIONS DE BASE DE L'ECOLEMENT TURBULENT DANS DES CONDUITES A MOTIFS PERIODIQUES	19
A/ CONCEPT DE BASE LA TURBULENCE	19
I DEFINITION DE LA TURBULENCE	19
II LES CARACTERES DES ECOULEMENTS TURBULENTS	20
1°/ Aspect aléatoire	20
2°/ Aspect rotationnel	20
3°/ Aspect tridimensionnel	20
4°/ Aspect non linéaire	20
5°/ Aspect diffusif	21
6°/ Aspect dissipatif	21
7°/ Aspect d'imprédictibilité des trajectoires	21
III EFFET DE LA TURBULENCE	21
1°/ Effet sur le transport de masse	21
2°/ Effet sur la quantité de mouvement et l'énergie cinétique	21
IV APPROCHE DE LA TURBULENCE	22
1°/ Approche directe	22
2°/ Approche statistique	23
B/ EQUATIONS DE BASE DE L'ECOLEMENT TURBULENT DANS LES CONDUITES A MOTIFS PERIODIQUES	23
I EQUATIONS DE BASES	23
2°/ Equation de la quantité de mouvement	24
3°/ Schéma de la conduite d'étude	24
II HYPOTHESES	25
III EQUATIONS DE REYNOLDS – DYNAMIQUE DU MOUVEMENT MOYEN	25
1°/ Approche statistique de la turbulence	25
2°/ Equation du mouvement moyen	26
3°/ Equations du mouvement fluctuant	27
IV CONCLUSION	27
CHAPITRE III	29
MODELISATION DE LA TURBULENCE	29
I MODELES A VISCOSITE TURBULENTE	29
1°/ Modèle à viscosité turbulente algébrique	30
2°/ Modèle à une équation et deux équations de transport	32
a) Modèle à une équation de transport	32
b) Modèle à deux équations de transport	32
Exemple de modèle à deux équations de transport : Modèle K-ε	33

II MODELES AUX TENSIONS DE REYNOLDS	33
1°/ Modèle aux tensions de REYNOLDS R. S. M. (Reynolds Stress Model)	33
2°/ Modèle aux tensions de Reynolds algébrique (A. S. M.)	36
III CHOIX DU MODELE DE TURBULENCE	39
IV CONCLUSION	44
<u>CHAPITRE IV</u>	46
MODELISATION MATHEMATIQUE	46
I CARACTERE PERIODIQUE DE L'ECOULEMENT	46
II EQUATION DU PROBLEME	46
III METHODE DE TRANSFORMATION GEOMETRIQUE	47
<u>CHAPITRE V</u>	54
MODELISATION NUMERIQUE	54
I INTRODUCTION	54
1°/ Méthode des éléments finis	54
2°/ Méthode de volumes finis	54
3°/ Méthode de différences finis	54
a) La consistance	55
b) La stabilité	55
c) La convergence	55
II METHODE DE LA COMPRESSIBILITE ARTIFICIELLE	56
III DESCRITISATION DES EQUATIONS	56
IV CONDITIONS AUX LIMITES	61
1°/ Milieu de la conduite	61
2°/ Région de paroi	62
a) Fonction de paroi pour U	62
b) Fonction de paroi pour K-ε	66
V CONDITION DE STABILITE	67
VI ORGANIGRAMME	68
VI CONCLUSION	71
<u>CHAPITRE VI</u>	73
RESULTATS ET ANALYSE	73
I ECOULEMENT TURBULENT ET LAMINAIRE DANS UNE CONDUITE CYLINDRIQUE	73
1°/ première application : Ecoulement laminaire dans une conduite cylindrique	73
2°/ Deuxième application : Ecoulement turbulent dans une conduite cylindrique	74
II ECOULEMENT TURBULENT DANS UNE CONDUITE NON-CYLINDRIQUE TYPE CONVERGENT-DIVERGENT	78
III CONCLUSION	83
CONCLUSION GENERALE	85

Introduction

INTRODUCTION

Des observations très communes nous apprennent que la plupart des écoulements rencontrés en pratique ne présentent pas les propriétés idéales de l'écoulement laminaire ; C'est un autre régime d'écoulement : « l'écoulement turbulent ».

La plupart des écoulements rencontrés dans le domaine industriel sont de nature turbulente. Beaucoup de phénomènes tels que le transfert de chaleur ou de masse sont si intimement liés au mouvement du fluide que leur étude nécessite le calcul préalable de l'écoulement.

Ainsi la prédétermination numérique des écoulements turbulents est de première importance pour de nombreuses applications pratiques.

L'écoulement turbulent d'un fluide dans une conduite à motif périodique de type convergent-divergent est un phénomène extrêmement complexe. Cette complexité provient surtout du fait que l'on ne peut pas caractériser correctement la géométrie de ce milieu.

Notre travail consiste à étudier l'écoulement turbulent dans des conduites à géométrie complexe : conduite à motif périodique de type convergent-divergent.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté brièvement les travaux faits par différents chercheurs sur les écoulements laminaires et turbulents dans les conduites à motif périodique.

Le concept de la turbulence et les équations de base de l'écoulement étudié sont présentés dans le deuxième chapitre.

Le troisième chapitre est consacré aux différents modèles de la turbulence, ainsi qu'aux méthodes de fermeture des équations de Reynolds.

Dans le chapitre quatre est présenté la transformation géométrique utilisée pour transformer le domaine physique complexe de l'écoulement au domaine rectangulaire simple de calcul.

Dans le chapitre cinq sont illustrée les équations décritisées aux différences finis et l'utilisation de la méthode de la compressibilité artificielle pour le calcul de la pression, ainsi que les fonctions de parois comme conditions aux limites.

Enfin nous présenterons dans le dernier chapitre des applications du programme élaboré ainsi qu'une discussion sur les résultats obtenus et nous terminons par une conclusion générale.

CHAPITRE I

Etat de Connaissance sur les Ecoulements dans les Conduites à Motifs Périodiques

CHAPITRE I

ETAT DE CONNAISSANCE SUR LES ECOULEMENTS DANS LES CONDUITES A MOTIFS PERIODIQUE

Malgré la grande variété des études expérimentales sur la structure des écoulements turbulents, les mécanismes fondamentaux du phénomène demeurent bien encore imparfaitement élucidés maintenant encore, bien des problèmes restent ouverts, parfois énigmatiques.

Un certain nombre de travaux traitent le problème du régime laminaire dans les conduites non cylindriques.

A notre connaissance très peu d'études ont fait l'objet de l'écoulement turbulent dans conduites non cylindrique.

I ETAT DE CONNAISSANCE SUR LES ECOULEMENTS LAMINAIRES DANS LES CONDUITES A MOTIFS PERIODIQUES

L'écoulement laminaire d'un fluide incompressible dans des canaux non prismatiques, présente des caractéristiques très particulières, la géométrie du domaine faisant apparaître des tourbillons à la suite des lignes de courant.

1° Travaux de R. BERKER (1963) [1]

RATIP BERKER a étudié l'écoulement dans un canal bidimensionnel divergent-convergent. Pour le canal divergent, il donne l'évolution du profil de vitesse tel que décrit sur la figure (I.1. a).

Ce profil devient pointu au centre et s'aplatit sur les bords quand le nombre de Reynolds croît, jusqu'au moment où apparaît un courant de retour pour un nombre de Reynolds qui dépend de l'angle de divergence. Ce courant de retour provoque l'apparition d'un rouleau permanent.

Par contre, pour le canal convergent le profil de vitesse s'aplatit dans la partie centrale quand le nombre de Reynolds croît (figure (I.1.b)).

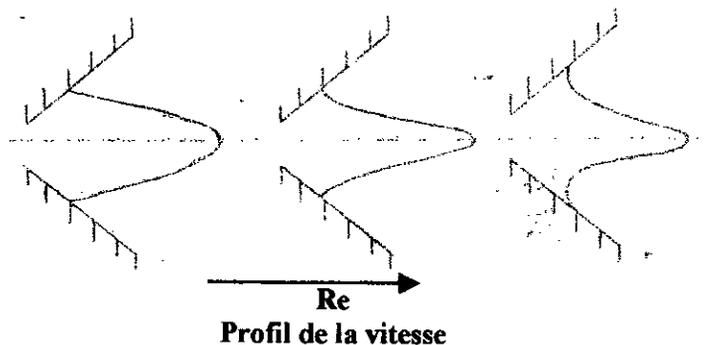


Figure I. 1. a

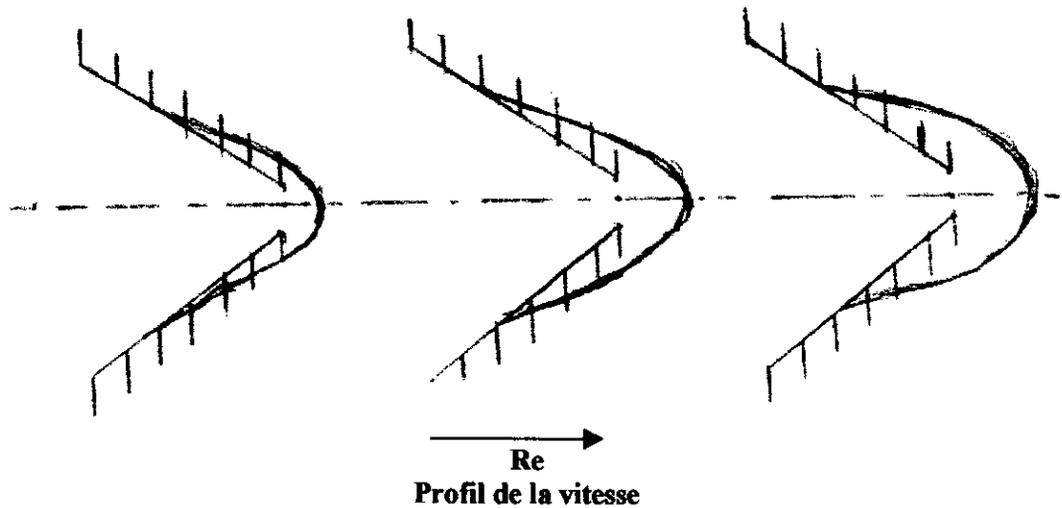


Figure I. 1. b

2° Travaux de G. CHAUVETEAU (1965) [1]

CHAUVETEAU a étudié un écoulement d'un fluide dans différente géométrie dans le domaine linéaire, puis au-delà du nombre de Reynolds limite jusqu'à l'apparition de la turbulence.

Son étude a permis principalement de montrer l'existence d'un nombre de Reynolds limite, caractéristique de l'écoulement laminaire pour un domaine d'écoulement donné. Ce nombre de Reynolds marque le début de la déformation de l'écoulement par les forces d'inertie, et, par la suite, la fin de l'écoulement à perte de charge linéaire.

Ce nombre de Reynolds limite est distinct du nombre de Reynolds critique caractérisant l'apparition de la turbulence.

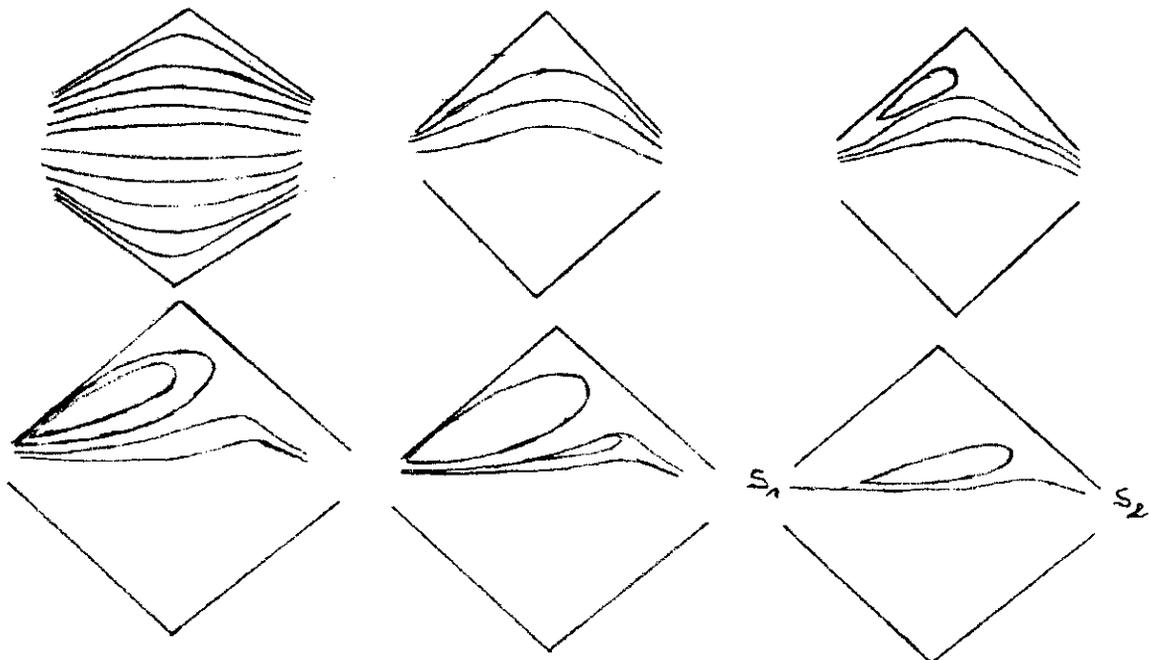


Figure I. 2

3°/ Travaux de FAGHRI et Col (1987) [2]

FAGHRI et ses collaborateurs ont développé une méthodologie de résolution des problèmes type convection-diffusion.

La méthode repose sur l'utilisation d'une transformation non-orthogonale de coordonnées. Qui, repère le domaine complexe du fluide vers un domaine rectangulaire, (figure I. 3).

Ces essais numériques sont effectués pour trois valeurs de l'angle d'ondulation 15° , 30° , et 45° .

Les résultats ont été comparés aux résultats expérimentaux d'**O'BRIEN** et **SPARROW** (1982), **IZUMI** et Col (1982), **SPARROW** et **COMB** (1983).

La figures (I.4) représente les lignes de courant dans la conduite pour un angle $\theta = 30^\circ$ et pour différents nombres de Reynolds (90 à 1500). **ASAKO** et **FAGHRI** ont remarqué une petite déformation des lignes de courant au sommet, ainsi que l'apparition des bulles pour des nombres de Reynolds important dans les zones de forte courbure de côté de la paroi.

La figure (I.5) donne le rapport de perte de charge pour une conduite ondulée et une conduite droite en fonction du nombre de Reynolds, pour différentes valeurs de H'/L et θ .

Les auteurs ont constaté que :

La perte de charge dans la conduite à angles arrondis est moindre que celle à angles vifs.

Le rapport de la perte de charge croit avec l'augmentation de l'angle d'ondulation (θ) et le nombre de Reynolds.

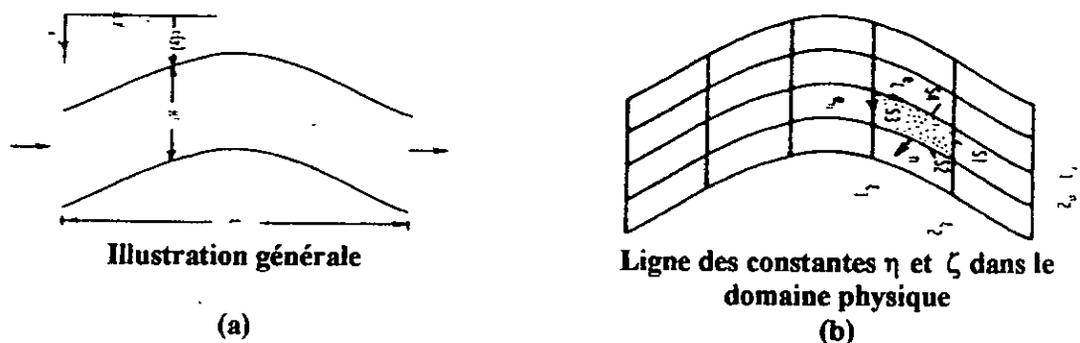


Figure I. 3

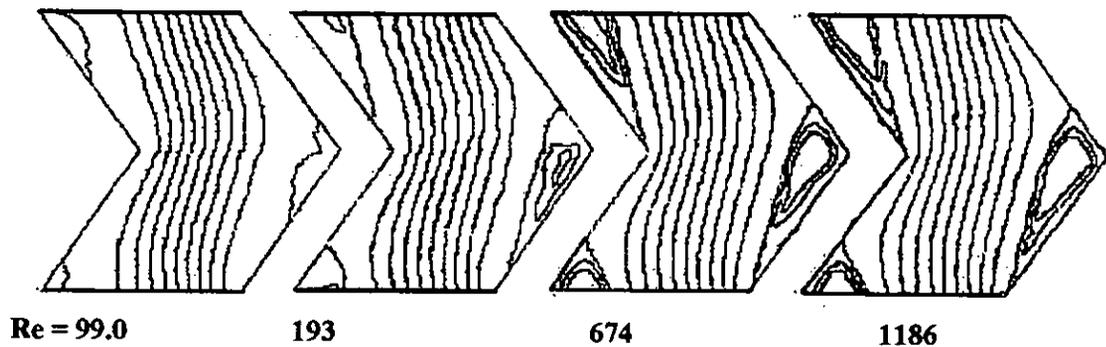
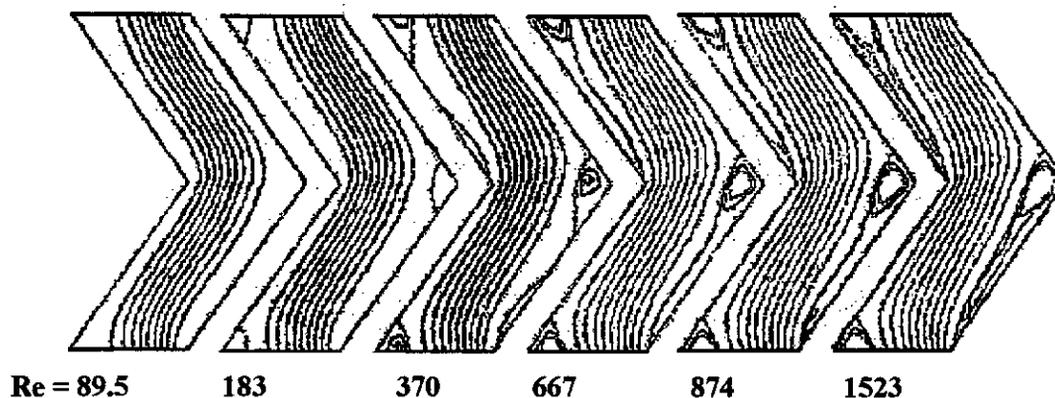
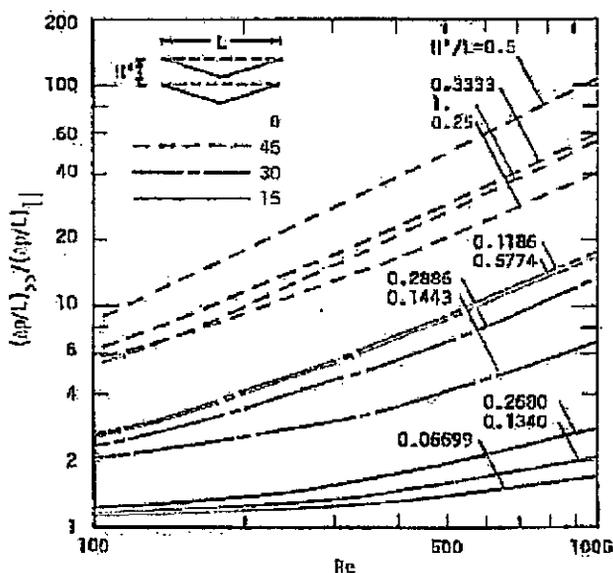
Ligne de courant pour $H'/L = 0.5774$ et $\theta = 30^\circ$

Figure I. 4. a



Ligne de courant pour $H'/L = 0.2886$ et $\theta = 30^\circ$

Figure I. 4. b



Comparaison de perte de charge pour une conduite ondulée et une conduite droite

Figure I. 5

4° ASAKO, NAKAMURA et FAGHRI (1987) [3]

ASAKO, NAKAMURA et FAGHRI ont déterminé numériquement les grandeurs physiques, pour une conduite ondulée avec des coins arrondis (figure I.6). Les frontières de la conduite sont approchées par des fonctions cosinus.

Les auteurs ont proposé une transformation géométrique du domaine physique complexe du fluide au domaine mathématique rectangulaire.

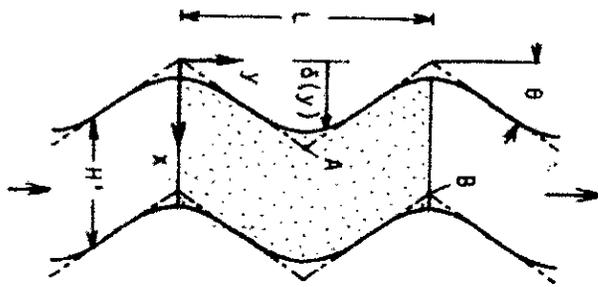
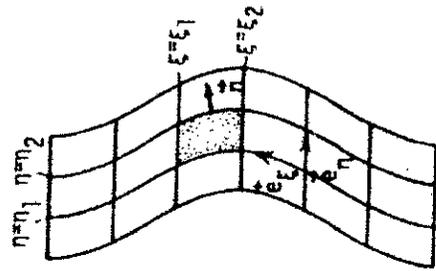


Schéma d'une conduite ondulée

Figure I. 6. a



Lignes de constantes de η et ζ dans le domaine physique

figure I. 6. b

Les auteurs ont observé une petite déformation des lignes de courants au sommet pour différents nombres de Reynolds (figure III.7). Ainsi que l'apparition des bulles pour des nombres de Reynolds important dans les zones de forte courbure de côté de paroi.

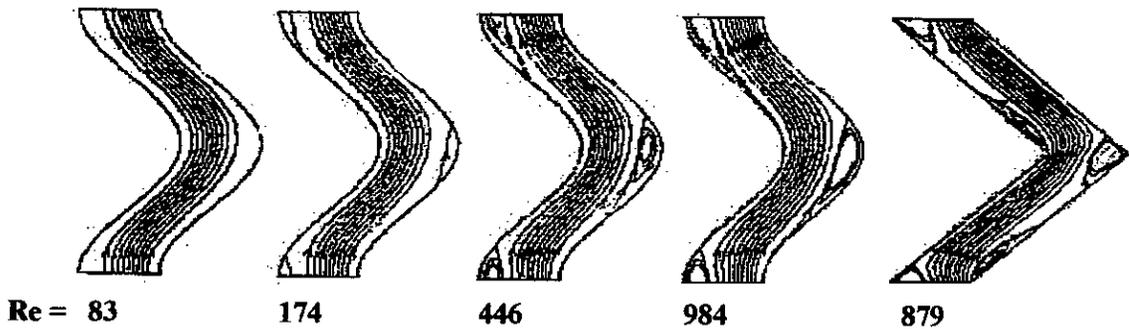
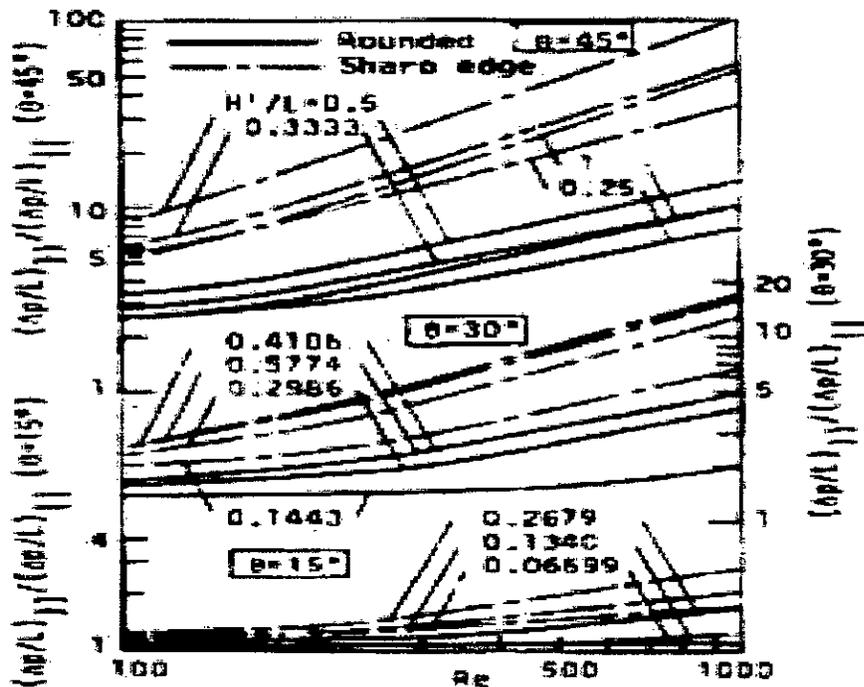


Figure I. 7



Comparaison de la perte de charge pour une conduite ondulée et une conduite droite

Figure I. 8

5° Travaux PATANKER et Col [16]

PATANKER et Col ont fait des études sur un canal dont les parois sont interrompues périodiquement par des plaques placées transversalement à la direction du courant (figure I.9).

Cette particularité permet de ramener l'étude de ce type d'écoulement, à celle d'un module isolé de longueur égale à la distance entre deux sections identiques, aux extrémités des quelles sont appliquées des conditions aux limites périodiques.

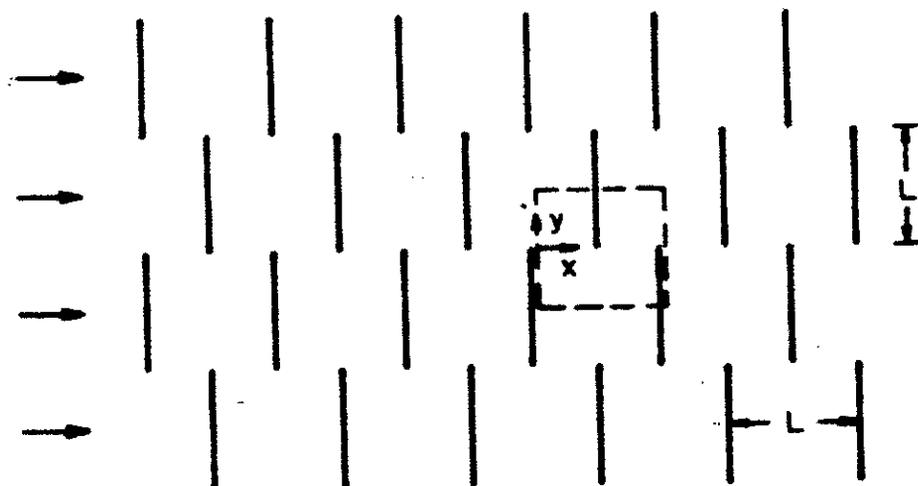
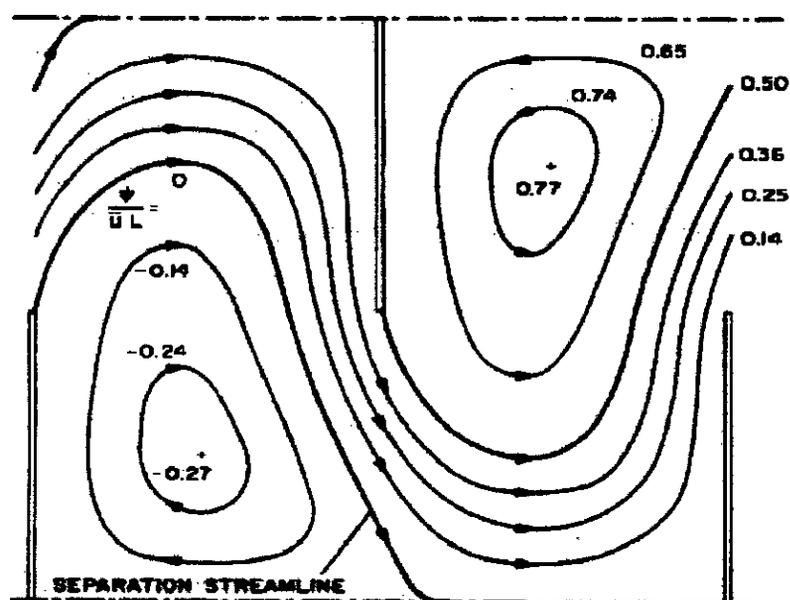


Diagramme schématique de la plaque traversée

Figure I. 9

Les profils de lignes de courant représentées sur les figures (I.10), sont obtenus à partir de la fonction de courant $\Psi = \int U dy$.



lignes de courant, $Re = 1040$

Figure I.10. a

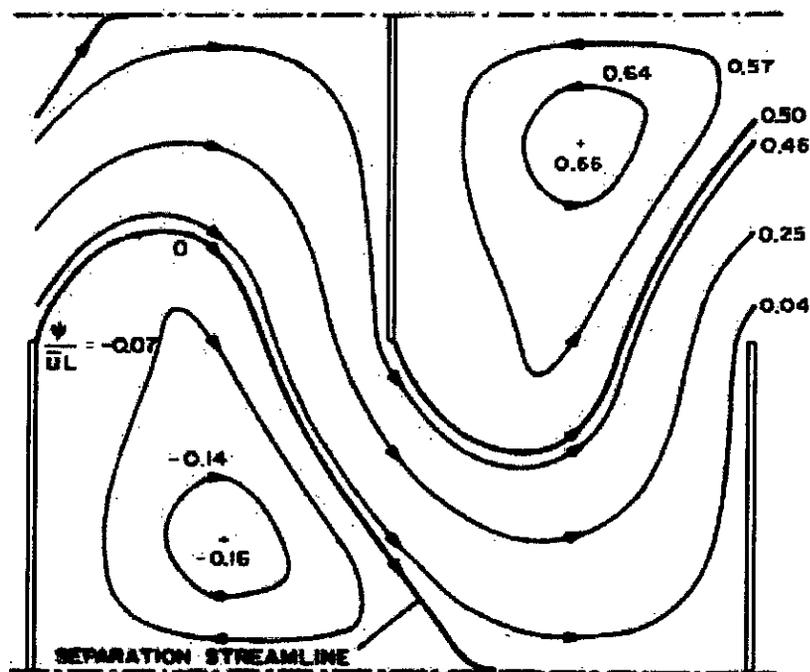
Lignes de courant, $Re = 140$

Figure I. 10. b

Ils ont remarqué deux phénomènes dans le champ d'écoulement :

- Le premier est la rapidité du fluide à tourner à cause du blocage imposé par les alcades des plaques.
- Le deuxième est la zone de recirculation massive située à l'aval de chaque plaque. La dimension de cette zone est un peu plus grande pour des nombres de **REYNOLDS** importants.

6°/ Travaux de ASAKO et FAGHRI [2]

ASAKO et **FAGHRI** ont étudié les caractéristiques d'un écoulement dans une conduite à motif périodique et de type convergent-divergent figure (I.11).

Pour cela, Ils ont utilisé un schéma aux différences finis figure (I.12).

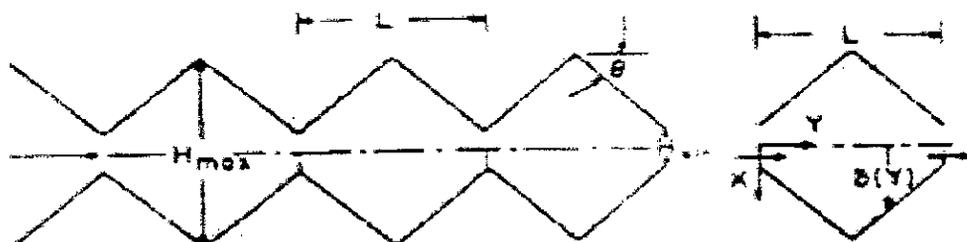


Schéma de la conduite convergent – divergent

Figure I. 11

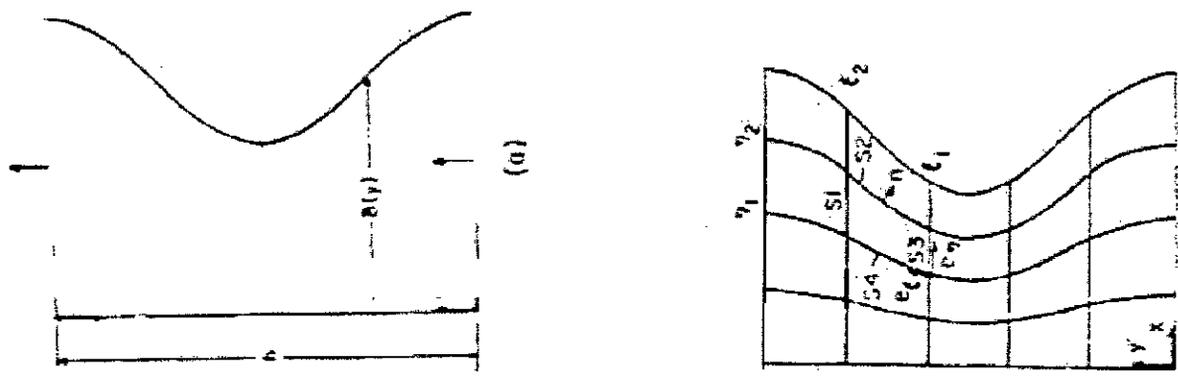
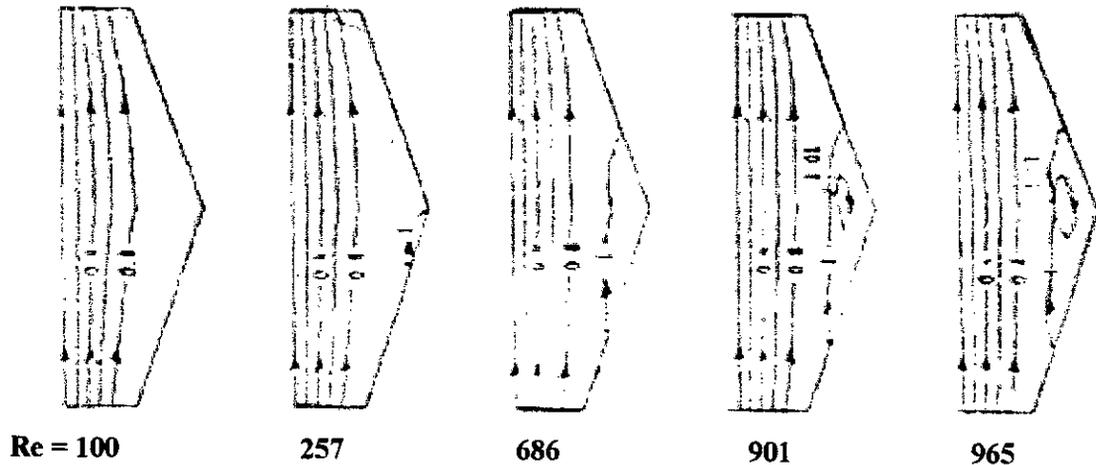


Illustration générale du problème, les lignes de constantes η et ζ dans le domaine physique

Figure I. 12

La figure (I.13) représente les lignes de courants dans la conduite étudiée pour différents nombres de Reynolds. **ASAKO** et **FAGHRI** ont remarqué :

- des petites déformations de ces lignes pour de faibles nombres de Reynolds,
- une déformation avec la présence de zones de recirculation aux sommets des conduites pour des nombres de Reynolds importants.

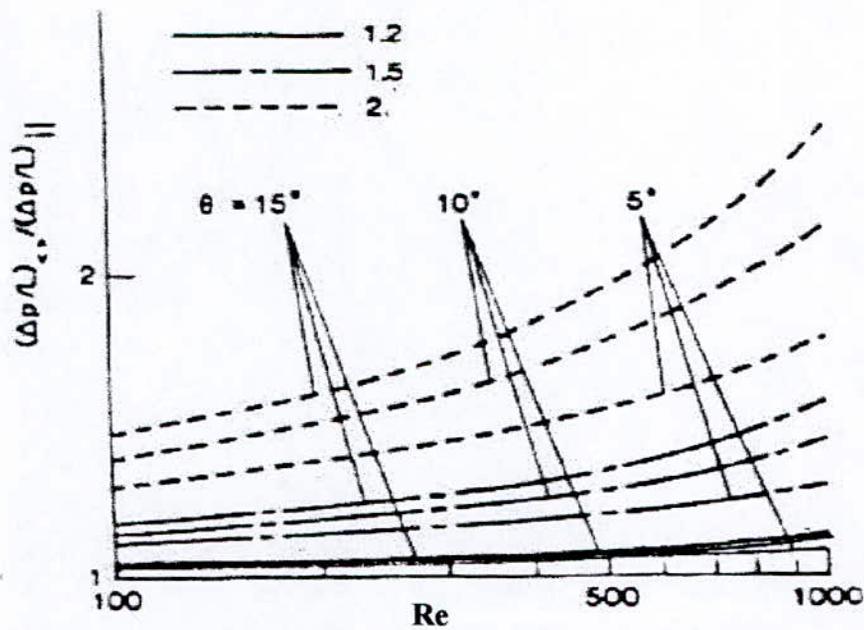


Les lignes de courant pour $H_{\max}/H_{\min} = 2$ et $\theta = 15^\circ$

Figure I. 13

La figure (I.14) représente l'évolution de la perte de charge en fonction du nombre de Reynolds, pour différent angle d'ondulation et le rapport H_{\max}/L .

Les auteurs ont remarqué que le rapport de la perte de charge augmente avec l'augmentation du nombre de ces paramètres, c'est à dire que la perte de charge dans la conduite périodique est plus grande que celle dans la conduite cylindrique.



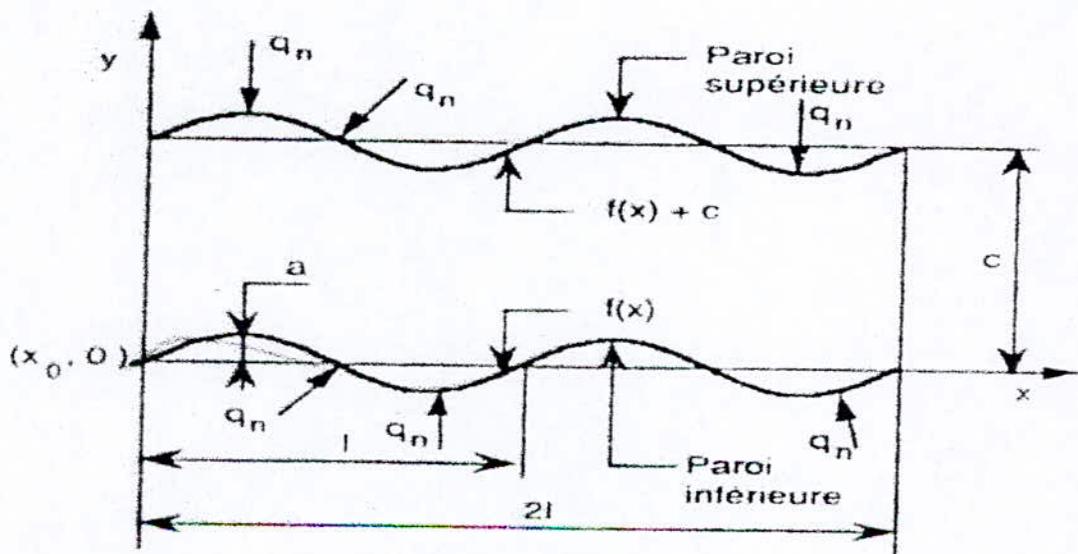
Comparaison de perte de charge pour une conduite périodique et une conduite cylindrique

Figure I. 14

7°/ Travaux A. HASSAINE, DAGUENET et MENGY (1994) [11]

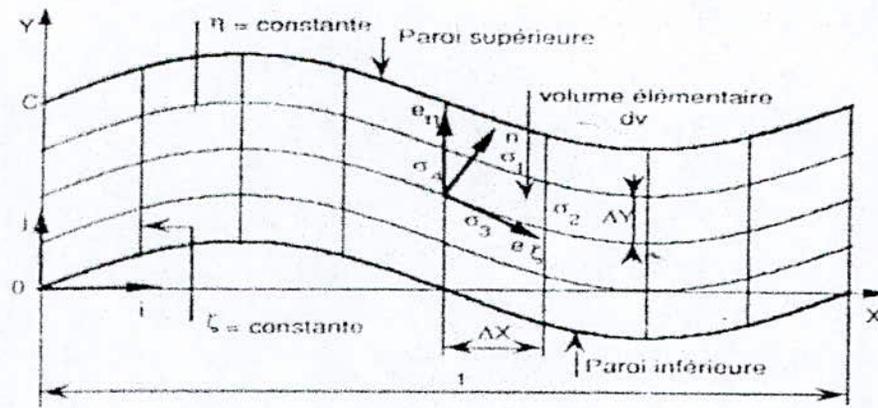
HASSAINE, DAGUENET et MENGY ont développé une approche numérique pour la détermination des caractéristiques cinématiques et thermiques d'un écoulement bidimensionnel, laminaire, et permanent dans un canal à paroi sinusoïdale figure (III.15.a).

Cette approche est basée sur une transformation non-orthogonale de coordonnées qui change le domaine physique de configuration complexe en un domaine rectangulaire de calcul (figure (III.15.b)).



Coupe longitudinale du canal

Figure I. 15. a



Domaine physique d'écoulement

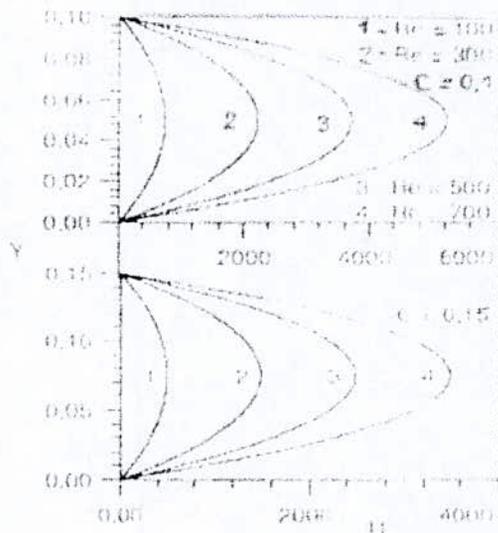
Figure I. 15. b

La figure (I.16.a) représente un profil parabolique de la vitesse horizontale pour une amplitude $A = 0$. Les calculs donnent une composante verticale nulle.

La figure (I.16.b) représente les lignes de courants dans une conduite ondulée, où la hauteur de la conduite a été multipliée par le rapport A/C .

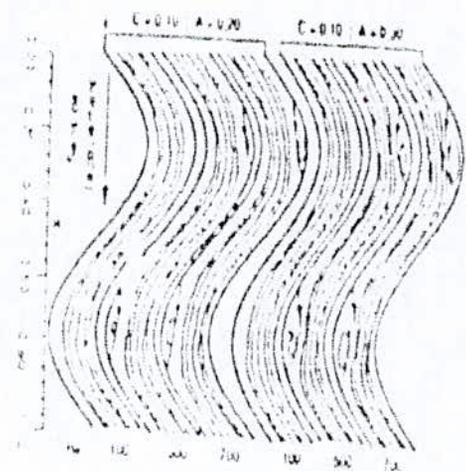
Les auteurs ont remarqué :

- L'apparition d'une déformation de ces lignes dans les zones de forte courbure de côté de la paroi. Cette déformation s'accroît avec l'augmentation de l'amplitude A et du nombre de Reynolds.
- L'apparition de poches de recirculation dans ces zones.



Profil de la vitesse pour $A=0$

Figure I. 16. a



Lignes de courants

Figure I. 16. b

8°/ Travaux de A. DJERBOUA et F. LENOUAR (1996) [8]

M. A. DJERBOUA et F. LENOUAR ont fait une étude sur un écoulement laminaire dans une conduite à motif périodique.

Ils ont observé que, pour une conduite cylindrique et droite le profil de la composante horizontale de la vitesse est parabolique, et que, ce profil s'allonge avec l'augmentation du nombre de Reynolds, et diminue lorsque le diamètre de la conduite augmente (figure I. 17), pour la composante verticale de la vitesse, ils ont trouvé qu'elle est nulle.

Pour une conduite de type convergent – divergent, ils ont remarqué la présence des vitesses négatives dans la zone de forte courbure ce qui explique la présence de courant de recirculation dans cette zone. Cette recirculation est plus intense quand le nombre de Reynolds est grand.

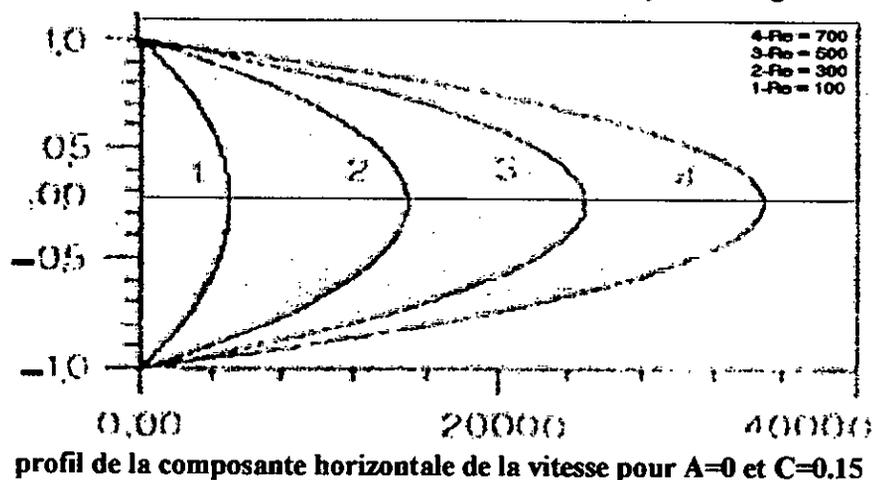


Figure I. 17

II ETAT DE CONNAISSANCE SUR LES ECOULEMENTS TURBULENTS DANS LES CONDUITES A MOTIFS PERIODIQUES

L'influence des ondulations de faible amplitude sur l'écoulement turbulent, dans une conduite axisymétrique a été étudiée par voie expérimentale, et par modélisation numérique basée sur le concept de viscosité turbulente.

Ces études, en faisant ressortir le caractère complexe de l'écoulement étudié, ont montré que les résultats classiques relatifs à l'écoulement turbulent établi en tube droit étaient profondément modifiés particulièrement à cause de l'effet des variations de section, de l'effet de courbure des parois et de la présence de courants de retour instationnaire derrière chaque crête.

Peu de travaux expérimentaux en conduites existent dans la littérature scientifique sur ce sujet. Citons toutefois les mesures de HSU et KENNEDY à l'intérieur d'un tube à paroi sinusoïdale. Par contre, plusieurs études numériques relatives à l'écoulement laminaire ou turbulent sur parois ondulées, fixes ou en mouvements, ont été publiées par N. C. G. MARKATOS et P. R. GENT, ainsi que, sur l'écoulement avec contraction locale de veine par J. S. LEE et par W. L. OBERKAMPF.

La prévision numérique des grandeurs dynamiques par **CHAVE** et **SCHIESTEL** obtenue à l'aide du modèle **K-ε** de **JONES** et **LAUNDER** a permis de retrouver les principales caractéristiques de l'écoulement, mises en évidence par l'expérience de **CHAUVE**.

1°/ Travaux de R. SCHIESTEL et M. P. CHAUVE (1982) [1]

SCHIESTEL et **CHAUVE** ont effectué une étude dynamique de l'écoulement turbulent dans un tube à paroi faiblement ondulée.

Les figures (I. 18) présentent les profils expérimentaux et calculés de la vitesse moyenne pour deux sections, comparés à ceux obtenus dans un tube droit, pour des nombres de Reynolds voisins.

En l'absence d'ondulation, **SCHIESTEL** et **CHAUVE** ont constaté le bon accord entre l'expérience de **M. ELENA** et le calcul effectué pour une amplitude nulle (tube droit).

En présence d'ondulation, l'accélération que le fluide subit au col et la décélération, qui s'ensuit au creux se traduit sur les profils de vitesse par des effets successifs de convergents et de divergents, comparables à ceux obtenus par **J. NIKURADSE**.

Les calculs permettent de retrouver les mêmes tendances que l'expérience quant à la disposition relative des profils du tube droit, ainsi que leur évolution d'un col à un creux. Toutefois quelques écarts subsistent sur les valeurs des vitesses moyennes. Nous retiendrons que ces écarts sont moins accusés au nombre de Reynolds de 115 000.

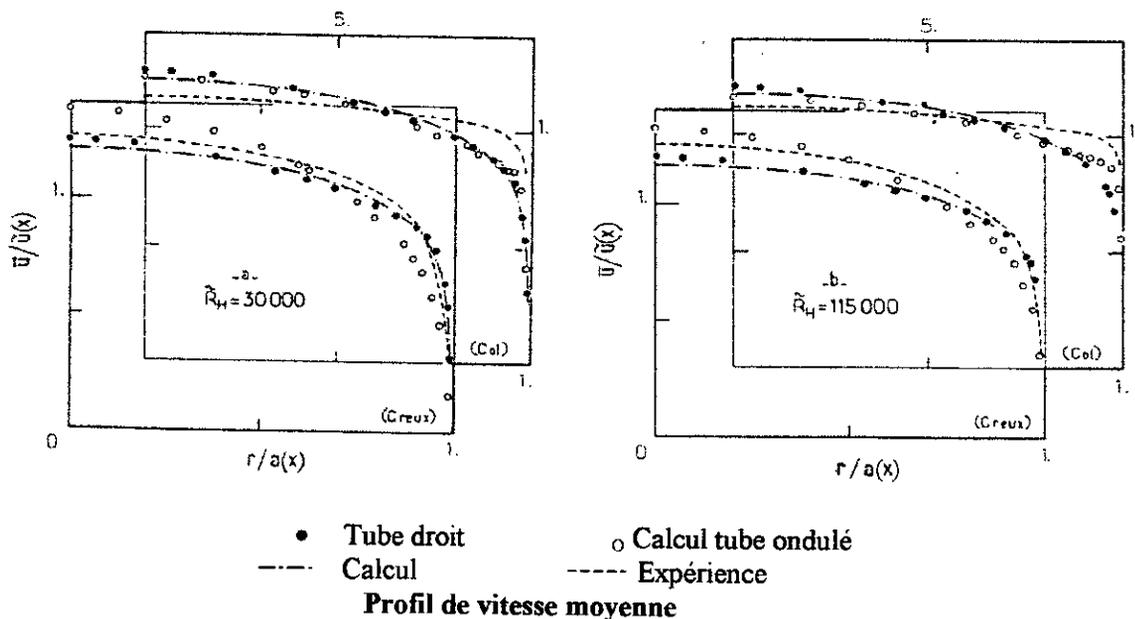


Figure I. 18

Les figures (I. 19) donnent en représentation semi - logarithmique, les profils expérimentaux et calculés dans différentes sections la valeur de la vitesse, et est ici rapportée à la vitesse de frottement constante u^* égale à celle obtenue dans un tube droit pour un même nombre de Reynolds. On retrouve les écarts mentionnés entre, les valeurs expérimentales et les valeurs calculées tout en constatant que la forme générale, et la disposition relative des profils obtenus en chaque section, restent qualitativement

bien décrites. Les auteurs ont remarqué que, ces profils ne présentent pas de zone d'équilibre dynamique, comme dans le cas d'un régime établi dans un tube droit. La non - existence de cette zone d'équilibre paraît être une conséquence du caractère complexe de l'écoulement, qui soumis à effets de courbure variable est en constante réorganisation.

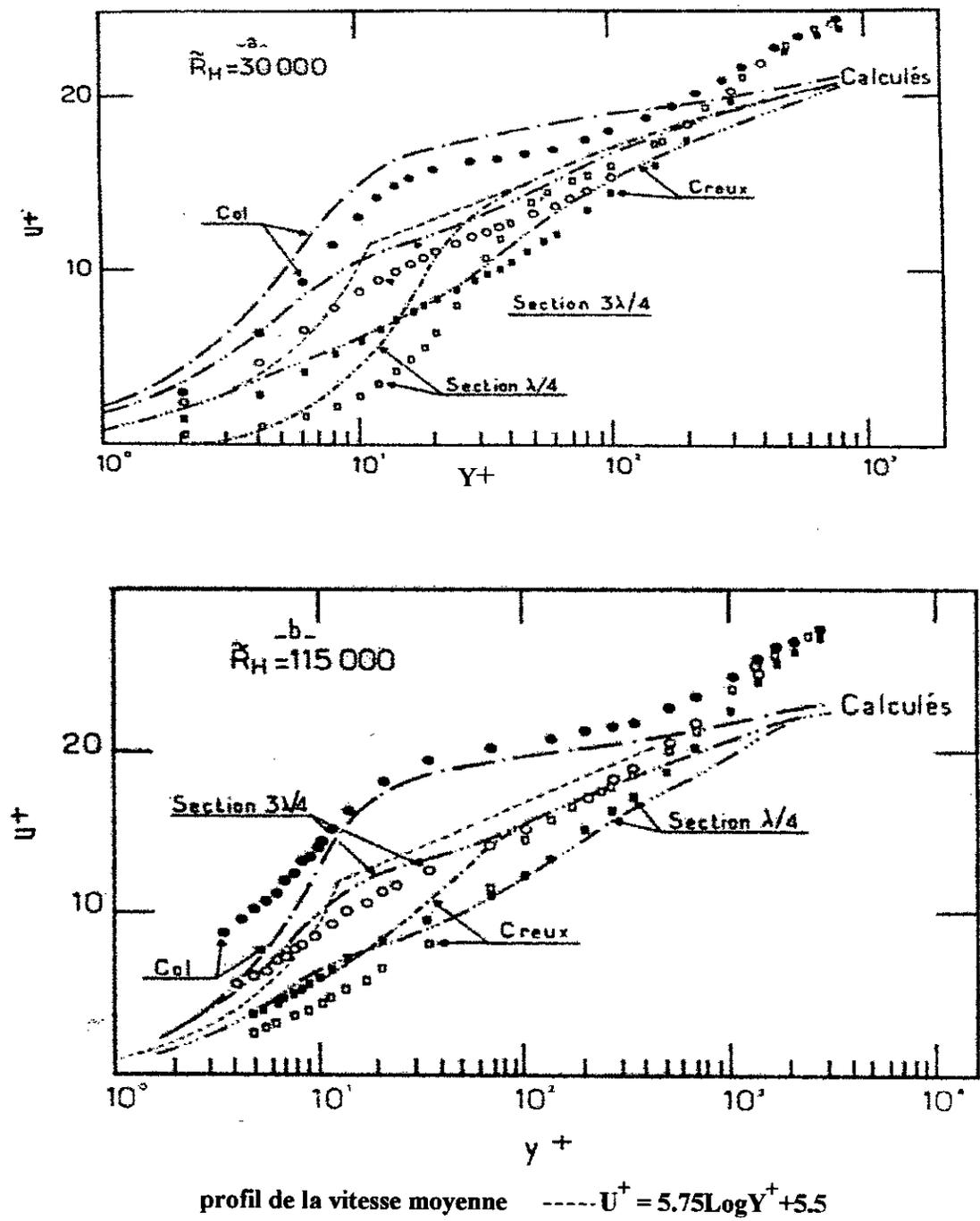


Figure I. 19

On conclut, que l'étude dynamique de l'écoulement turbulent dans un tube a paroi faiblement ondulée a permis la confrontation des résultats expérimentaux, et des prévisions numériques basées sur un modèle simple de turbulence.

Bien que, le modèle s'avère insuffisant à décrire en détail le champ turbulent, la comparaison a fait ressortir une bonne estimation des grandeurs dynamiques moyennes notamment au nombre de Reynolds de 115 000.

2°/ Travaux de M. BOUDGHENE STAMBOULI et HAMINH [8]

M. BOUDGHENE STAMBOULI et HAMINH ont simulé un écoulement turbulent en conduite axisymétrique de 5 cm de diamètre pulsé avec deux fréquences d'oscillations.

Pour une faible fréquence ($F = 0.5$ Hz) les profils des tensions de Reynolds, ont un comportement variable le long de la section, on observe aussi un décalage dans le profil de vitesse.

Pour une haute fréquence ($F = 3.6$ Hz), la simulation montre que les tensions sont constantes dans la région centrale, et varient légèrement près de la paroi. Les profils de la vitesse moyenne ainsi que de l'énergie turbulente semblent insensibles aux pulsations.

3°/ Travaux de A. SAADI et BERRABAH, A (1997) [1]

M. Aït SAADI et BERRABAH, ont fait une étude numérique sur un écoulement turbulent dans une conduite à motif périodique.

Ils ont fait la modélisation des tensions de Reynolds en utilisant le modèle **A. S. M.** (Algebraic Stress Model).

Ils ont remarqué la présence des relaux de recirculations dans la zone de forte courbure. Ces relaux sont plus grands quand le nombre de Reynolds est grand.

CONCLUSION

Dans les différents types des conduites ondulées, on remarque que les lignes de courants suivent la forme de la paroi pour des nombres de Reynolds faibles, et que des zones de recirculations apparaissent dans les zones de forte courbure, ces zones sont influencées par l'accroissement du nombre de Reynolds et l'angle d'ondulation (θ).

CHAPITRE II

Equations de Base de l'Ecoulement Turbulent dans les Conduites à Motifs Périodiques

CHAPITRE II

CONCEPT ET EQUATIONS DE BASE DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT DANS DES CONDUITES A MOTIFS PERIODIQUES

INTRODUCTION

Des observations très communes nous apprennent que la plupart des écoulements rencontrés en pratique ne présentent pas les propriétés idéales laminaires.

Ce phénomène a été analysé dès 1883 par **O. REYNOLDS** qui a étudié l'écoulement dans des conduites rectilignes de section circulaire.

La description d'une expérience apparemment aussi simple que celle de l'écoulement dans une conduite montre déjà combien il est difficile de faire la distinction entre divers régimes d'écoulements. Il est faux de dire que l'écoulement n'est plus laminaire dès qu'il est instationnaire et on ne peut pas dire non plus qu'il est pleinement turbulent dès qu'il n'est plus laminaire.

A/ CONCEPT DE BASE DE LA TURBULENCE

I. DEFINITION DE LA TURBULENCE

Dans l'édition de **LAROUSSE** de 1994, on trouve la signification suivante du mot "turbulence" ; « c'est une agitation désordonnée, d'un fluide en écoulement turbulent ».

D'après MARCEL LESIEUR [13]

« Il est difficile de donner une définition précise, de ce que l'on entend par turbulence, et ceci est l'origine de bien des malentendus. On peut cependant très grossièrement définir la turbulence, par opposition à ce que l'on appelle un écoulement laminaire, c'est à dire un écoulement bien organisé, tel que celui d'un large fleuve calme. Un écoulement turbulent apparaît comme une superposition de mouvements en apparence incohérents qu'il semble difficile, voire impossible, de prévoir ».

D'après M. A. FAVRE et M. L. S. G. KOVASZNAY [9]

« On peut aisément se faire une idée de ce qu'est la turbulence d'après le sillage d'un navire ou le cours d'un torrent, qui sont animés de mouvements tourbillonnaires très irrégulièrement distribués à la fois dans l'espace et dans le temps ».

« La turbulence est une propriété des écoulements du fluide et non de fluide lui-même. La définition générale et précise de ce phénomène n'a pas été donnée, mais on peut indiquer les caractéristiques que présentent les écoulements des fluides, que l'on convient d'appeler turbulence, lorsqu'on les considère à une échelle d'observation déterminée ».

D'après CHASSAING (1991) [4]

« L'écoulement turbulent est un mode naturel de mouvement de fluide visqueux où des mécanismes internes d'échanges énergétiques assurent, au sein même de l'écoulement, la création et le maintien de toute une hiérarchie de mouvements chaotiques répartis continûment sur une large gamme d'échelles macroscopiques ».

II) LES CARACTERES DES ECOULEMENTS TURBULENTS

1°/ Aspect aléatoire

Les paramètres physiques de l'écoulement turbulent tels que la vitesse et la pression varient de façon aléatoire dans le temps, et dans l'espace.

2°/ Aspect rotationnel

Un écoulement turbulent présente des fluctuations du rotationnel de vitesse.

3°/ Aspect tridimensionnel

Les écoulements turbulents sont toujours tridimensionnels et instationnaire, sauf pour des cas spécifiques, ils sont bidimensionnels.

4°/ Aspect non linéaire

Dans un écoulement turbulent, le transfert d'énergie des fluctuations des vitesses à grande échelle, vers les fluctuations à plus petite échelle est du même ordre de grandeur, que l'énergie dissipée, en chaleur par les effets de viscosité. Ce phénomène est lié aux interactions non linéaires, qui sont représentées par les termes d'inerties dans les équations des écoulements turbulents.

5°/ Aspect diffusif

Le milieu turbulent diffuse toute quantité de matière ou d'énergie transportable, à un ordre de grandeur qui dépasse celui de la diffusion moléculaire. Cette diffusion est due, aux termes de convection au niveau des fluctuations.

6°/ Aspect dissipatif

L'énergie dissipée dans les écoulements turbulents est beaucoup plus importante que celle dans les écoulements laminaires du fait de la viscosité et de la présence de fort gradient de vitesse.

7°/ Aspect d'imprédictibilité des trajectoires

Les trajectoires des particules ne dépendent pas des conditions initiales sur de long période. Ce qui explique les difficultés de la prévision à long terme ; c'est le phénomène d'imprédictibilité.

III) EFFET DE LA TURBULENCE**1°/ Effet sur le transport de masse**

Dans un mélange de fluides, la turbulence provoque un transport de masse par diffusion turbulente. Cette diffusion, fait en sorte que le mélange devient homogène, par exemple, une goutte de colorant, se disperse très lentement dans une masse liquide immobile, sous la seule action de la diffusion moléculaire, au contraire, il suffit de provoquer une agitation turbulente, pour obtenir une dispersion rapide du colorant qui se repartie de façon homogène dans tout le volume du liquide.

De même dans les mers la turbulence provoque la diffusion des sels, des sédiments, des organismes vivants passifs, et des divers polluants.

2°/ Effet sur la quantité de mouvement et l'énergie cinétique

Les tensions de **REYNOLDS** qui s'ajoutent dans l'équation dynamique, sont la conséquence de la diffusion turbulente de quantité de mouvement et la viscosité.

Dans l'équation de l'énergie cinétique, la turbulence introduit des termes de diffusion, et des termes de production de fluctuation de l'énergie cinétique.

IV) APPROCHES DE LA TURBULENCE

Il n'existe pas de théorie générale qui explique le phénomène de la turbulence, mais il y a des théories partielles et incomplètes. Donc il y a plusieurs approches et qui sont les suivantes :

1°/ Approche directe

La plupart des approches de la turbulence supposent que le mouvement instantané détaillé du fluide est décrit par les équations de **NAVIER-STOKES**. Le fluide est alors considéré comme un continuum par rapport à l'échelle moléculaire. Selon ce point de vue on connaît donc les équations de la turbulence et certaines recherches se sont orientées vers l'étude de «solution turbulente» des équations de **NAVIER-STOKES**, l'étude de tout écoulement turbulent pourrait donc se faire, du moins en principe, par résolution directe des équations de **NAVIER-STOKES**. Pourquoi ne pas résoudre directement les équations **NAVIER-STOKES** ? Cette vue consisterait à faire un calcul direct du mouvement turbulent pour une ou plusieurs réalisations avec des conditions aux limites aléatoires et faire ensuite un traitement statistique sur les solutions obtenues. On montre toutefois que le nombre de points de discrétisation nécessaire pour représenter les plus petites échelles de la turbulence atteint des valeurs faramineuses.

Pour avoir une idée, essayons de préciser quantitativement les ressources informatiques nécessaires. La turbulence étant tridimensionnelle et instationnaire, le nombre N^3 de points de maillage (qui conditionne l'espace mémoire nécessaire sur ordinateur) dans un domaine cubique sera proportionnel à $(\delta x)^3$, δx étant le pas d'espace, et le temps de calcul sera proportionnel à $N^3/\delta t$ où δt est le pas de temps [17].

De manière à présenter les plus petites échelles, δx et δt doivent être de l'ordre des échelles de **KOLMOGOROFF**.

Considérons par exemple une section de l'écoulement turbulent en conduite. Si l'on admet $Re_r \approx Re_c/10$ où Re_c est le nombre de Reynolds de l'écoulement, $Re_c = \frac{UL}{\nu}$, on trouve pour $Re_c = 80\,000$ $N^3 = 4 \cdot 10^{10}$.

Cette approche directe nécessite de puissants moyens informatiques, elle ne peut être conduite actuellement que sur des écoulements en géométrie relativement simple et pour des nombres de **REYNOLDS** peu élevés.

2°/ Approche statistique

Les équations du mouvement turbulent présentent des fluctuations irrégulières, dans l'espace et dans le temps. Cette complexité à causer l'introduction, des méthodes statistiques.

O. REYNOLDS a introduit la notion d'écoulement moyen. Il a proposé la décomposition des grandeurs physiques (vitesse, pression) de l'écoulement turbulent en deux composantes, une moyenne et l'autre fluctuante. La moyenne doit vérifiée les règles dites « règles de **REYNOLDS** ». Cette décomposition permet de développer un traitement statistique des équations du mouvement.

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$\overline{af} = a\overline{f} \quad a : \text{constante} \quad (\overline{a} = a)$$

$$\overline{fg} = \overline{f} \overline{g}$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial S} = \overline{\frac{\partial f}{\partial S}} \quad \text{où } S \text{ désigne variable d'espace ou de temps}$$

B/ EQUATIONS DE BASE DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT DANS LES CONDUITES A MOTIFS PERIODIQUES

I EQUATIONS DE BASES

Pour un fluide Newtonien, les équations gouvernant le mouvement dans les conduites en charge sont les équations de **NAVIER-STOKES** et de continuité.

1°/ Equation de continuité

L'équation de continuité est basée sur le principe de la conservation de la masse, elle s'écrit comme suite :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 3 \quad (\text{II.1})$$

où, ρ est la masse volumique du fluide et U est la vitesse des particules fluide.

2°/ Equation de la quantité de mouvement

Les particules fluides sont entraînées en mouvement sous l'effet des forces de volume, de pression, et de viscosité, qui sont exprimés par les équations de **NAVIER-STOKES** :

$$\frac{\partial \rho U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \rho U_i}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \quad i, j = 1, 3 \quad (\text{II.2})$$

où : F_i ($i = 1, 2, 3$) représente les forces extérieures de volume.

3°/ Schéma de la conduite d'étude

Afin de poser le problème physique étudié en termes généraux, on est amené à considérer un écoulement turbulent dans un domaine défini par une géométrie complexe schématisée par la figure ci-dessous :

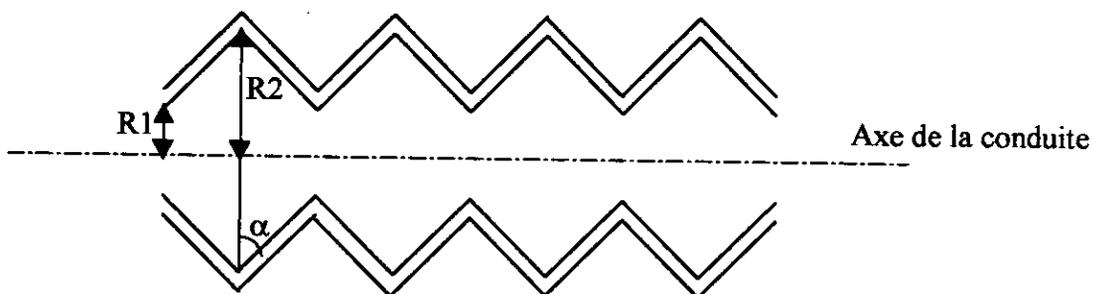


Figure II.1 : Conduite à motif périodique

II HYPOTHESES

On pose les hypothèses suivantes :

- Le fluide est incompressible, donc la masse volumique ρ est égale à une constante.
- Le fluide est non pesant.
- L'écoulement est bidimensionnel.

Les équations de continuité et de quantités de mouvement deviennent :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{II.4})$$

avec, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$: viscosité cinématique de fluide.

III EQUATIONS DE REYNOLDS - DYNAMIQUE DU MOUVEMENT MOYEN**1°/ Approche statistique de la turbulence**

Pour l'écoulement turbulent, on adopte l'approche statistique de REYNOLDS. Cette approche décompose une grandeur physique, en une grandeur moyenne et une fluctuante.

$$F = \bar{f} + f \quad (\text{II.5})$$

où, F est la valeur instantanée, \bar{f} est la valeur moyenne temporelle et f est la valeur fluctuante.

La valeur moyenne temporelle d'une grandeur physique entre deux instants t et $t+T$ est défini par :

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f dt \quad (\text{II.6})$$

Donc le mouvement moyen est un mouvement permanent, et complètement défini. Par contre le mouvement fluctuant n'est pas permanent et imprévisible.

Pour l'étude mathématique de la turbulence, l'utilisation de la moyenne statistique à la place de la moyenne temporelle est tout à fait légitime, à condition que la moyenne utilisée vérifie un certain nombre de règles de Reynolds qui se formulent :

$$\begin{aligned} \overline{f+g} &= \overline{f} + \overline{g} \\ \overline{af} &= a \overline{f} \quad a : \text{constante} \quad (\overline{a} = a) \\ \overline{fg} &= \overline{f} \overline{g} \\ \frac{\partial \overline{f}}{\partial S} &= \overline{\frac{\partial f}{\partial S}} \quad \text{où } S \text{ désigne variable d'espace ou de temps} \end{aligned}$$

Si on désigne par \overline{U}_i et \overline{P} les grandeurs hydrodynamiques caractérisant l'écoulement moyen, on a la décomposition suivante :

$$U_i = \overline{U}_i + u_i' \tag{II.7}$$

$$P = \overline{P} + p' \tag{II.8}$$

u_i' et p' désignent respectivement les fluctuations de vitesse et de pression.

En introduisant les relations (II.7) et (II.8) dans les équations (II.3) et (II.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{U}_i + u_i') &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\overline{U}_i + u_i') + (\overline{U}_j + u_j') \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{U}_i + u_i') &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{P} + p') + \frac{\partial (\overline{U}_i + u_i')}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \tag{II.9}$$

2°/ Equation du mouvement moyen

On prend la moyenne de ces deux équations, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right) - R_{ij} \right] \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \tag{II.10}$$

où, $R_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$

Les termes $\overline{u_i' u_j'}$ donnent naissance aux tensions de Reynolds. Ils proviennent de la non-linéarité des équations de Navier-Stokes ; Ces termes traduisent l'interaction entre le mouvement moyen et le mouvement fluctuant.

3°/ Equations du mouvement fluctuant

Par soustraction de l'équation (II.10) de l'équation (II.9), on obtient les équations du mouvement fluctuant :

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.11})$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) + \overline{u_i' u_j'} \right] \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{II.12})$$

IV CONCLUSION

L'écoulement turbulent dans une conduite à motif périodique type convergent-divergent est régi par le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) - R_{ij} \right] \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{II.14})$$

où, $R_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$

Ce système est ouvert ; il y a plus d'inconnues que d'équations. Pour cela, on doit faire appel à des modèles permettant la modélisation du tenseur de Reynolds.

Il existe plusieurs modèles de turbulence. Cette diversité est due à l'inexistence d'un modèle universel.

CHAPITRE III

Modélisation de la Turbulence

CHAPITRE III

MODELISATION DE LA TURBULENCE

Les modèles de la turbulence sont applicables dans des cas bien précis, donc ils présentent des avantages et des inconvénients, on dit qu'un tel ou tel modèle est bon, s'il vérifie les critères suivants [10]

- Fermeture du système d'équations.
- Contenir un minimum de constantes ou fonctions empiriques.
- Présente un degré d'universalité maximum.
- Etre simple et rapide dans la résolution numérique.
- Donne des résultats précis.

I MODELES A VISCOSITE TURBULENTE

En 1877 **M.J. BOUSSINESQ** a introduit la notion de la viscosité turbulente, pour modéliser les tensions de Reynolds, il s'agit de faire une analogie avec les tensions de la viscosité moléculaire. Cette notion consiste à supposer que les tensions de Reynolds soient proportionnelles aux gradients de vitesse moyenne, et aussi même forme que les tensions de viscosité moléculaires.

$$-\overline{u'_i u'_j} = -R_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad \text{avec } i,j=1, 3 \quad (\text{III.1})$$

où, ν_t : Viscosité turbulente.

La viscosité turbulente ν_T est une propriété de l'écoulement turbulent et non du fluide lui-même.

1°/ Modèle à viscosité turbulente algébrique

Les modèles à viscosité turbulente algébrique ne font appel à aucune équation de transport, puisque ν_t est donné par une expression algébrique.

PRANDTL a introduit la notion de longueur de mélange, pour faciliter le développement de cette expression.

D'après la théorie cinétique des gaz, la viscosité moléculaire ν est égale au produit de la vitesse moyenne des molécules par leur libre parcours moyen. Par analogie, **PRANDTL** suggéra que la viscosité turbulente peut elle aussi être mise sous forme de produit d'une vitesse et d'une longueur caractéristique du mouvement turbulent, appelée longueur de mélange. Ce qui conduit à l'expression suivante de la viscosité turbulente :

$$\nu_t = L_m \left| \frac{dU_1}{dx_2} \right| \quad (\text{III.2})$$

Et dans le cas général :

$$\nu_t = L_m^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2} \quad i, j = 1, 3 \quad (\text{III.3})$$

Plusieurs formules sont proposées pour la longueur du mélange L_m suivant le type de l'écoulement.

M. PRANDTL a supposé que la longueur de mélange est proportionnelle à l'épaisseur de la couche limite :

➤ turbulence libre :

- zone de mélange $\frac{L_m}{\delta} = 0.07$
- jet plan $\frac{L_m}{\delta} = 0.09$
- jet round $\frac{L_m}{\delta} = 0.075$

Un défaut apparaît là où la vitesse présente un extremum, v_t et par voie de conséquence les termes de turbulence s'annulent, **PRANDTL** a corrigé en proposant :

$$v_t = L_m^2 \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + L_n^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2} \quad (\text{III.4})$$

L_n : seconde longueur de mélange.

Pour la turbulence de paroi **VON KARMAN** a proposé :

$$- \frac{y}{\delta} \leq 0.22 \quad L_m = 0.41y$$

$$- \frac{y}{\delta} > 0.22 \quad L_m = 0.09\delta$$

Où, δ : épaisseur de couche limite.

y : distance à la paroi.

VANDRIEST a apporté une correction sur l'équation de **VON KARMAN** :

$$L_m = Ky \left[1 - \exp\left(-y \frac{U^*}{26\nu}\right) \right] \quad (\text{III.5})$$

où, U^* : la vitesse de frottement.

Pour la turbulence en canal ou en tube **NIKURADSE** a proposé :

$$L_m = D \left[0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{y}{D}\right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{y}{D}\right)^4 \right] \quad (\text{III.6})$$

où, D : demi-largeur du canal ou le rayon du tube.

Les expressions citées précédemment, d'une part, elles sont d'une mise en œuvre simple et ne donnent pas d'équation supplémentaire, et le bon choix de L_m conduit à des résultats très satisfaisants surtout en écoulement de type couche limite. Mais d'autre part, elles ignorent le caractère non local de

la turbulence, qui ne peut être pris en compte qu'en introduisant dans la définition de ν_t au moins une grandeur turbulente décrite par une équation d'évolution.

2°/ Modèle à une équation et deux équations de transport

a) Modèle à une équation de transport

Ce modèle est proposé indépendamment par **KOLMOGOROV** et **PRANDTL**. Il découle naturellement de l'expression de la viscosité turbulente ν_t en fonction d'une longueur et d'une vitesse caractéristique :

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{KL} \quad (\text{III.7})$$

où, C_μ : constante numérique égale à 0.09.

K : l'énergie cinétique moyenne produit par le mouvement fluctuant, donnée par :

$$K = \frac{1}{2} \overline{u_j' u_j'} = \frac{1}{2} R_{jj} \quad j = 1, 3 \quad (\text{III.8})$$

Le transport de la turbulence est pris en compte grâce à l'équation d'évolution de K , mais le problème de la détermination de la longueur caractéristique L reste entier.

On peut donc formuler les mêmes réserves pour ce modèle que pour le modèle de viscosité turbulente algébrique. Quant à son application aux écoulements à géométrie complexe.

b) Modèle à deux équations de transport

Le problème de détermination de l'échelle de longueur caractéristique L peut être décrit par une équation de transport. (Les structures turbulentes sont convoitées par l'écoulement moyen, et leur taille varie sous l'effet de la dissipation visqueuse et de phénomène du type étirement de filets tourbillonnaires). En fait, choisir L comme variable associée à K n'est pas fondamental. Toute combinaison de la forme $K^m L^n$ (permettant de déduire L connaissant K) convient tout aussi bien.

De nombreux modèles à deux équations de transport, ne diffèrent que par le choix du couple d'exposant (m, n) . Ainsi ont vu le jour (modèle $K-K^{1/2}L^{-1}$, modèle $K-KL$, modèle $K-KL^{-2}$, modèle $K-K^{3/2}L^{-1}$ (ou modèle $K-\epsilon$). L'équation de transport supplémentaire conserve la même forme générale quel que soit le choix du couple (m, n) .

Exemple de modèle à deux équations de transport : modèle K-ε

Dans le cas, où on prend $m=3/2$ et $n=-1$, on obtient le modèle $K-K^{3/2}L^{-1}$ appelé modèle K-ε. Dans ce modèle, la viscosité turbulente est définie par :

$$\nu_t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (\text{III.9})$$

$$\text{où, } \varepsilon = K^{3/2}L^{-1}$$

ε, est le taux de dissipation de l'énergie cinétique.

L'équation de transport de K s'écrit :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + U_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = -R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j' \frac{\partial u_i' u_j'}{2} + \frac{p'}{\rho} u_j' - \nu \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] - \nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \text{ avec, } i, j = 1, 3 \quad (\text{III.10})$$

L'équation d'évolution de ε s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - 2\nu \left(u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_j \partial x_m} \right) - \\ & 2\nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial u_j'}{\partial x_m} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \right)^2 \right) - 2 \frac{\nu}{\rho} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_m} \right) + \\ & \nu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} \right) - 2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_m} \right)^2 \end{aligned} \quad \text{Avec, } i, j = 1, 3 \quad (\text{III.11})$$

II) MODELES AUX TENSIONS DE REYNOLDS**1°/ Modèle aux tensions de REYNOLDS R.S.M. (Reynolds Stress Model)**

Dans ce modèle la fermeture du système d'équation est réalisable, par l'introduction des équations d'évolution des tensions de Reynolds, à l'aide de la méthode générale de construction d'équation aux moments proposé par L. V. KELLER et A.A. FRIEDMANN, qui consiste à utiliser la relation :

$$\overline{\frac{\partial u_j' u_j'}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial u_j'}{\partial t} u_i'} + \overline{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial t}} \quad (\text{III.12})$$

En prenant la moyenne de l'équation (III.11) sur la fluctuation U_i , après l'avoir multiplié par U_j , on obtient une équation pour le premier des deux termes du nombre de droite de la relation (III.12). Par permutation des indices i et j , on obtient une équation pour le second terme. La somme de ces deux équations fournit alors l'équation recherchée qui, après réorganisation de certains termes, s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + U_m \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} = & - \left(R_{im} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} + R_{im} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} \right) + \overline{p' \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\overline{u_i' u_j' u_m'} + \frac{\overline{p'}}{\rho} u_i' \delta_{jm} + \frac{\overline{p'}}{\rho} u_j' \delta_{im} - \nu \left(u_i' \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m'}{\partial x_j} \right) + u_j' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m'}{\partial x_i} \right) \right) \right] \\ & - \nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m'}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial u_j'}{\partial x_m} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m'}{\partial x_i} \right) \right) \text{ avec } i, j, m = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

En utilisant l'incompressibilité du champ de fluctuation de vitesse on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + U_m \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} = & - \underbrace{\left(R_{im} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} + R_{im} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} \right)}_{\pi_{ij}} + \underbrace{\overline{p' \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)}}_{\phi_{ij}} \\ & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_m} \left[\overline{u_i' u_j' u_m'} + \frac{\overline{p'}}{\rho} u_i' \delta_{jm} + \frac{\overline{p'}}{\rho} u_j' \delta_{im} - \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right]}_{\lambda_{ij}} - \underbrace{2\nu \left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial u_j'}{\partial x_m} \right]}_{\varepsilon_{ij}} \text{ avec } i, j, m = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Modélisation des termes de tension de REYNOLDS [12]

K. HANJALIK et B. E. LAUNDER ont proposé une expression valable pour tout nombre de **REYNOLDS** :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \left[(1 - f_s) \delta_{ij} + \frac{3}{2} \frac{R_{ij}}{K} f_s \right] \text{ avec } i, j = 1, 2 \quad (\text{III.15})$$

où :

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)$$

f_s est une fonction du nombre de Reynolds de la turbulence ($R_t = \frac{K^2}{\nu \varepsilon}$) : $f_s = (1 + A_s R_t)^{-1}$

A_s étant une constante numérique égale à 0.1

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left[C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{m,n} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_n} + \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right] \text{ avec } i, j, m, n = 1, 2 \quad (\text{III.16})$$

C_s étant une constante numérique.

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^{(1)} + \phi_{ij}^{(2)} + \phi_{ij}^{(P)} \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{III.17})$$

où :

$$\phi_{ij}^{(1)} = -C_1 \frac{\varepsilon}{K} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \right)$$

$$\phi_{ij}^{(2)} = -C_2 \left(\pi_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right)$$

$$\phi_{ij}^{(P)} = \left[C_1' \frac{\varepsilon}{K} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \right) + C_2' (\pi_{ij} - D_{ij}) \right] f_s \left(\frac{L}{x_2} \right)$$

où :

$$\pi_{ij} = - \left[R_{im} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + R_{jm} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right] \quad (\text{III.18})$$

$$\pi = \frac{1}{2} \pi_{mm} = \frac{1}{2} D_{mm} = -R_{mn} \frac{\partial U_m}{\partial x_n}$$

C_1, C_2, C'_1, C'_2 étant des constantes numériques.

Après cette modélisation l'équation (III.14) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{DR_{ij}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left[C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{im} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} + \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right] - C_{\phi 1} \frac{\varepsilon}{K} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \right) - C_{\phi 2} \left(\pi_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) \\ - C_{\phi 3} \frac{\varepsilon}{K} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) - C_{\phi 4} K \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) + \pi_{ij} - \frac{\varepsilon}{K} \left[R_{ij} f_s + \frac{2}{3} (1-f_s) K \delta_{ij} \right] \quad i, j, m = 1, 2 \quad \text{(III.19)} \end{aligned}$$

avec,

$$C_{\phi 1} = C_1 - C'_1 f_s \left(\frac{L}{x_2} \right)$$

$$C_{\phi 2} = \frac{C_2 + 8}{11} - C'_2 f_s \left(\frac{L}{x_2} \right)$$

$$C_{\phi 3} = \frac{C_2 - 2}{11} + C'_2 f_s \left(\frac{L}{x_2} \right)$$

$$C_{\phi 4} = \frac{30C_2 - 2}{55}$$

où :

$$C_1 = 1.5, C_2 = 0.4, C'_1 = 0.5, C'_2 = 0.06$$

2°/ Modèle aux tensions de REYNOLDS algébriques (A.S.M.)

Pour avoir le modèle aux tensions de Reynolds algébrique, il suffit de négliger tous les termes faisant intervenir les dérivées partielles des tensions de Reynolds dans l'équation.

$$\frac{dR_{ij}}{dt} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + U_m \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \quad i, j, m = 1, 2 \quad \text{(III.20)}$$

Après une modélisation de cette équation à l'aide des termes équivalants de l'équation d'évolution de K, on obtient :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial K}{\partial t} + U_m \frac{\partial K}{\partial x_m} \quad (\text{III.21})$$

- Les termes de diffusion :

$$\text{Diff}(R_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_n} + \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right) \quad i, j, m, n = 1, 2 \quad (\text{III.22})$$

Avec le même procédé que ci-dessus, on obtient :

$$\text{Diff}(K) = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(C_s \frac{\bar{K}}{\varepsilon} R_{mn} \frac{\partial K}{\partial x_n} + \nu \frac{\partial K}{\partial x_m} \right) \quad m, n = 1, 2 \quad (\text{III.23})$$

La modélisation proposée par **W. RODI** est :

$$\frac{dR_{ij}}{dt} - \text{Diff}(R_{ij}) = \frac{R_{ij}}{K} \left(\frac{dK}{dt} - \text{Diff}(K) \right) \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{III.24})$$

où l'équation d'évolution de K s'écrit :

$$\frac{dK}{dt} - \text{Diff}(K) = \pi - \varepsilon$$

on déduit :

$$\frac{dR_{ij}}{dt} - \text{Diff}(R_{ij}) = \frac{R_{ij}}{K} (\pi - \varepsilon) \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{III.25})$$

La modélisation de l'équation (III.25) permet de transformer les équations modélisées sur les tensions de Reynolds (III.19) en :

$$\begin{aligned} \frac{R_{ij}}{K}(\pi - \varepsilon) = & -C_{\phi 1} \frac{\varepsilon}{K} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \right) - C_{\phi 2} \left(\pi_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) - C_{\phi 3} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \pi \delta_{ij} \right) \\ & - C_{\phi 4} K \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \pi_{ij} - \frac{\varepsilon}{K} \left[R_{ij} f_s + \frac{2}{3} (1 - f_s) K \delta_{ij} \right] \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

En introduisant la partie déviatrice du tenseur des tensions de Reynolds définie par :

$$a_{ij} = R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2$$

L'expression des termes π_{ij} , D_{ij} et π en fonction de ces quantités est :

$$\pi_{ij} = - \left(a_{jm} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} + a_{im} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} \right) - \frac{2}{3} K \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad i, j, m, n = 1, 2$$

$$D_{ij} = - \left(a_{jm} \frac{\partial U_m}{\partial x_i} + a_{im} \frac{\partial U_m}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} K \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\pi = -\frac{1}{2} \pi_{mm} = \frac{1}{2} D_{mm} = -a_{mn} \frac{\partial U_m}{\partial x_n}$$

L'équation (III.26) s'écrit :

$$\begin{aligned} \left[\delta_{jm} \delta_{in} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{A_2 \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + A_3 \frac{\partial U_m}{\partial x_j}}{A_1} \right) \delta_{in} + \frac{K}{\varepsilon} \left(\frac{A_2 \frac{\partial U_j}{\partial x_n} + A_3 \frac{\partial U_n}{\partial x_i}}{A_1} \right) \delta_{ij} - \frac{2K}{3\varepsilon} \left(\frac{A_2 + A_3}{A_1} \right) \frac{\partial U_m}{\partial x_n} \delta_{ij} \right] a_{mn} = \\ - \frac{A_4 K^2}{A_1 \varepsilon} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad i, j, m, n = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

avec,

$$A_1 = C_{\phi_1} + f_s + \frac{\pi}{\varepsilon} - 1$$

$$A_2 = 1 - C_{\phi_2}$$

$$A_3 = -C_{\phi_3}$$

$$A_4 = \frac{2}{3}(1 - C_{\phi_2} - C_{\phi_3}) + C_{\phi_4}$$

III CHOIX DU MODELE DE TURBULENCE

Etant donné les réserves émises à propos de la capacité des modèles à zéro et à une équation de transport à traiter les écoulements à géométrie complexe, il semble que dans un modèle efficace, on ne peut pas descendre au-dessous de deux équations de transport.

Notre choix de modèle de turbulence c'est porté donc, sur un modèle à deux équations de transport à savoir le modèle K- ε :

L'équation d'évolution de K s'écrit :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + U_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \underbrace{-R_y}_{\pi} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j' \frac{\partial u_i' u_j'}{2} + \frac{p'}{\rho} u_j' - \nu \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] - \underbrace{\nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)}_{\varepsilon} \text{ avec } i, j = 1, 2 \quad (\text{III.28})$$

L'équation d'évolution de ε s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - 2\nu \left(u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_j \partial x_m} \right) - 2\nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial u_j'}{\partial x_m} \right) \\ & - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \right)^2 \right) - 2 \frac{\nu}{\rho} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_m} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} \right) - 2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_m} \right)^2 \text{ avec } i, j = 1, 2 \quad (\text{III.29}) \end{aligned}$$

En introduisant l'hypothèse des grands nombres de Reynolds dans l'équation (III.28), le terme de diffusion moléculaire $\nu \frac{\partial^2 K}{\partial x_j^2}$ peut être négligé, et les deux autres termes seront modélisés sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j' \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2} + \frac{\overline{p' u_j'}}{\rho} \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{III.30})$$

σ_K : constante numérique.

L'hypothèse des grands nombres de Reynolds permet de négliger les premier, second, troisième, sixième et septième terme du membre de droite de l'équation (III.29)

L'hypothèse de diffusion en gradient permet de modéliser le cinquième terme (le terme de diffusion restant).

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu u_j' \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_m} \right)^2 \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad i, j, m = 1, 2 \quad (\text{III.31})$$

σ_ε : constante numérique.

La modélisation utilisée pour le quatrième et le dernier terme est celle proposé par **LANDER**, **REECE** et **RODI**.

$$- 2\nu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_m} \frac{\partial u_j'}{\partial x_m} \right) - 2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j \partial x_m} \right)^2 = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \pi - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$

$C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$: constantes numériques.

En remplaçant les tensions de Reynolds par leur expression en fonction des taux de déformation moyens (équation de la viscosité turbulente), et les différents termes modélisés, les équations de transport de K et de ε s'écrivent :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + U_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right) + \frac{C_\mu}{2} \frac{K^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - \varepsilon \quad i, j=1, 2 \quad (\text{III.32})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{C_\mu}{2} K \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad i, j=1, 2 \quad (\text{III.33})$$

Du fait de l'hypothèse de grands nombres de Reynolds, le modèle $K-\varepsilon$ n'est pas valable pour décrire le voisinage immédiat d'une paroi solide, où l'action des forces visqueuses devient dominante, et où l'hypothèse d'isotropie locale n'est plus vérifiée, les structures dissipatives étant directement sous l'influence de l'écoulement moyen.

Cette difficulté est généralement surmontée grâce à la technique de «fonctions de paroi». Le maillage au lieu de s'étendre jusqu'à la paroi, s'achève à une certaine distance de celle-ci, de façon à ce que tous les points de sa frontière se situent dans la zone pleinement turbulente de la région de paroi, et la couche limite est alors prise en compte en imposant le frottement, dont la valeur τ_p est fournie par les fonctions de paroi.

Dans tous les cas, le principe de base, de l'extension, de validité de l'équation sur ε , aux nombres de Reynolds faibles est le même, une dépendance des constantes de cette équation ($C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$), par rapport au nombre de Reynolds local, est introduite au moyen de deux fonctions de pondération $f_{\varepsilon 1}$, $f_{\varepsilon 2}$, le nombre de Reynolds peut être traduit par, le nombre de Reynolds de la turbulence :

$$R_t = \frac{K^2}{\nu \varepsilon} \quad (\text{III.34})$$

ou par un nombre de Reynolds dans le quel l'influence de la paroi est plus explicite (y désignant la distance à la paroi) :

$$R_y = \frac{\sqrt{K} y}{\nu} \quad (\text{III.35})$$

Ces derniers modèles présentent un traitement appliqué à la constante C_μ , intervenant dans l'expression (III.15) de la viscosité turbulente, qui devient :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (\text{III.36})$$

En introduisant les trois fonctions de pondération f_μ , $f_{\varepsilon 1}$ et $f_{\varepsilon 2}$ ainsi que l'expression (III.36) de la viscosité turbulente, les équations (III.32) et (III.33) deviennent :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + U_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + \frac{C_\mu f_\mu K^2}{2 \varepsilon} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - \varepsilon \quad (\text{III.37})$$

$$i, j = 1, 2$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} \frac{C_\mu f_\mu}{2} K \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (\text{III.38})$$

Les différentes expressions des fonctions de pondération proposées pour $f_{\varepsilon 1}$, $f_{\varepsilon 2}$ ont les formes générales suivantes :

$$\begin{cases} f_{\varepsilon 1} = 1 - \left(\frac{A_{\varepsilon 1}}{f_\mu} \right)^3 & (\text{III.39}) \\ f_{\varepsilon 2} = 1 - A_{\varepsilon 2} \exp \left[- (B_{\varepsilon 2} R_t)^2 \right] & (\text{III.40}) \end{cases}$$

où, $A_{\varepsilon 1}$, $A_{\varepsilon 2}$, $B_{\varepsilon 2}$ constantes numériques.

Pour la fonction f_μ , les expressions sont beaucoup plus variées, les plus intéressantes seraient celle de LAUNDER et SCHARMA :

$$f_\mu = \exp \left[\frac{-A_\mu}{(1 + B_\mu R_t)^2} \right] \quad (\text{III.41})$$

et celle de LAM et BREMHORST :

$$f_\mu = \left[1 - A_\mu \exp(-B_\mu R_t) \right]^2 \left(1 + \frac{D_\mu}{R_t} \right) \quad (\text{III.42})$$

où : A_μ , B_μ , D_μ , constantes numériques.

La quantité ε ne peut être identifiée à la dissipation que sous l'hypothèse des grands nombres de Reynolds. Ainsi, alors que la dissipation s'annule sur une paroi, la quantité ε y prend une valeur

constante. Une conséquence gênante pour l'équation sur ε est que son terme de destruction ($C_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$) ne reste pas borné au voisinage d'une paroi, pour surmonter ce problème **W. C. REYNOLDS** et **C. K. G. LAM** et **K. BREMHORST** proposent de choisir une fonction de pondération $f_{\varepsilon 2}$ tendant plus vite vers zéro à la paroi, que le rapport $\frac{\varepsilon^2}{K}$ ne tend vers l'infini. Avec l'expression (III.42) ceci est possible simplement, on prenant la constante $A_{\varepsilon 2}$ égale à 1.

La question de la valeur de ε à imposer aux parois, peut être analysée au moyen d'un développement de **TAYLOR** des fluctuations de vitesse au voisinage de la paroi. La condition de non-glissement et la condition d'incompressibilité conduisent à :

$$\begin{cases} u' = a_1 y + a_2 y^2 + \dots & \text{(III.43)} \\ v' = b_2 y^2 + \dots & \text{(III.44)} \\ w' = c_1 y + c_2 y^2 + \dots & \text{(III.45)} \end{cases}$$

où : u' , v' , w' désigne les fluctuations des vitesses suivant les directions X, Y, Z.

a_1 , a_2 , b_2 , c_1 et c_2 sont des fonctions de X, Z et t.

D'où le développement de **TAYLOR** pour K et ε :

$$\left\{ \begin{aligned} K &= \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) = Ay^2 + By^3 + \dots & \text{(III.46)} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \nu \left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) = 2\nu(A + 2By + \dots) & \text{(III.47)} \end{aligned} \right.$$

A et B étant des fonctions de X, Z et t.

Les cinq constantes du modèle sont déterminées par rapport à des écoulements turbulents simples servant de référence. Les valeurs conseillées par **LAUNDER** et **SPALDING** sont :

$$C_u = 0.09, C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92, \sigma_K = 1, \sigma_\varepsilon = 1.3$$

Mais ces valeurs ne sont pas valables, pour tous les écoulements.

IV CONCLUSION

Après modélisation du tenseur de Reynolds, le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{II.48})$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} \right) - R_{ij} \right] \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{II.49})$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} + U_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + \frac{C_{\mu} f_{\mu}}{2} \frac{K^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 - \varepsilon \quad (\text{III.50})$$

$$i, j = 1, 2$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} \frac{C_{\mu} f_{\mu}}{2} K \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (\text{III.51})$$

CHAPITRE IV

Modélisation Mathématique

CHAPITRE IV

MODELISATION MATHÉMATIQUE

I CARACTERE PERIODIQUE DE L'ECOULEMENT

La section de la conduite se répète à chaque longueur d'onde (figure IV.1). De ce fait à partir d'une distance x_0 suffisamment grande de l'entrée du canal, l'écoulement devient périodique, c'est à dire qu'il se répète pour deux sections distantes d'une longueur d'onde. Pour les grandeurs physiques, cette périodicité se traduit par les relations suivantes :

$$U(x, y) = U(x + l, y) = U(x + 2l, y) = \dots$$

$$V(x, y) = V(x + l, y) = V(x + 2l, y) = \dots$$

$$P(x, y) = P(x + l, y) = P(x + 2l, y) = \dots$$

II EQUATION DU PROBLEME

L'écoulement dans la conduite à motif périodique type convergent-divergent est bidimensionnel et turbulent. Les équations régissant l'écoulement s'écrivent sous la forme suivante :

- ◆ L'équation adimensionnelle de continuité est :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.1})$$

- ◆ Les équations adimensionnelles de quantité de mouvement s'écrivent:

$$x: \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - R_{11} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - R_{12} \right) \quad (\text{IV.2.a})$$

$$y: \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - R_{12} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - R_{22} \right) \quad (\text{IV.2.b})$$

- ◆ L'équation de l'énergie turbulente K est :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + U \frac{\partial K}{\partial x} + V \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1}{Re} + \frac{C_w f_u K^2}{\sigma_k \varepsilon} \right) \frac{\partial K}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{1}{Re} + \frac{C_w f_u K^2}{\sigma_k \varepsilon} \right) \frac{\partial K}{\partial y} \right) + C_w f_u E \frac{K^2}{\varepsilon} - \varepsilon \quad (\text{IV.3})$$

- ♦ L'équation du taux de dissipation de l'énergie turbulente ε :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1}{Re} + \frac{C_{\omega} f_u K^2}{\sigma_{\varepsilon} \varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{1}{Re} + \frac{C_{\omega} f_u K^2}{\sigma_{\varepsilon} \varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{\omega} f_u C_{\varepsilon} E K - C_{\varepsilon} f_{\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (\text{IV.4})$$

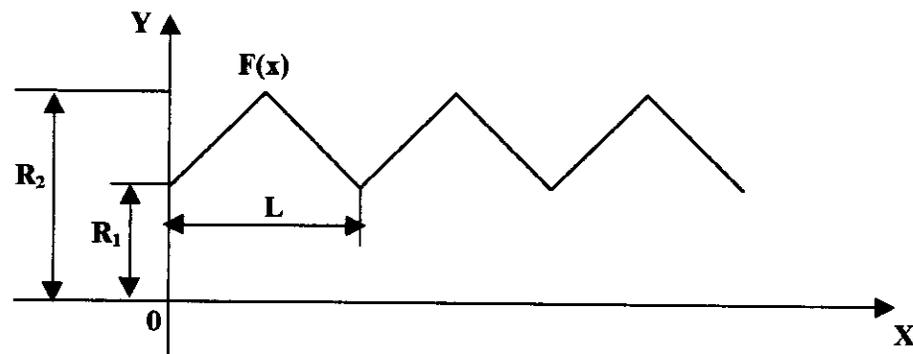
l'hypothèse des grands nombres de Reynolds, nos permet de négliger les termes de diffusion moléculaire devant les termes de diffusion turbulente, donc, les équations (IV.2) deviennent :

$$x: \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (R_{11}) - \frac{\partial}{\partial y} (R_{12}) \quad (\text{IV.5.a})$$

$$y: \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (R_{12}) - \frac{\partial}{\partial y} (R_{22}) \quad (\text{IV.5.b})$$

III METHODE DE TRANSFORMATION GEOMETRIQUE

La méthode repose sur l'utilisation d'une transformation non-orthogonale de coordonnées, qui change le domaine physique (figure IV.1) du fluide en domaine rectangulaire de calcul (figure IV.2). On opère un changement de coordonnées cartésiennes (x, y) , de manière à ce que les frontières du domaine d'écoulement se traduisent par des valeurs constantes des nouvelles coordonnées (ζ, η) .



Domaine physique de fluide

Figure IV. 1

Pour les études des écoulements dans les conduites à motif périodique, il existe plusieurs transformations géométriques de coordonnées :

$$\bullet \begin{cases} \zeta = \frac{x}{L} \\ \eta = \frac{y}{f(x)} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} \zeta = \frac{x}{L} \\ \eta = \frac{y - f(x)}{L} \end{cases}$$

où : L : la longueur d'un élément de la conduite.

$f(x)$: équation du profil des parois de la conduite.

En utilisant la 2^{ème} transformation pour la conduite d'étude, on a :

$$0 \leq \zeta \leq 1 \quad 0 \leq \eta \leq \frac{R_2}{L}$$

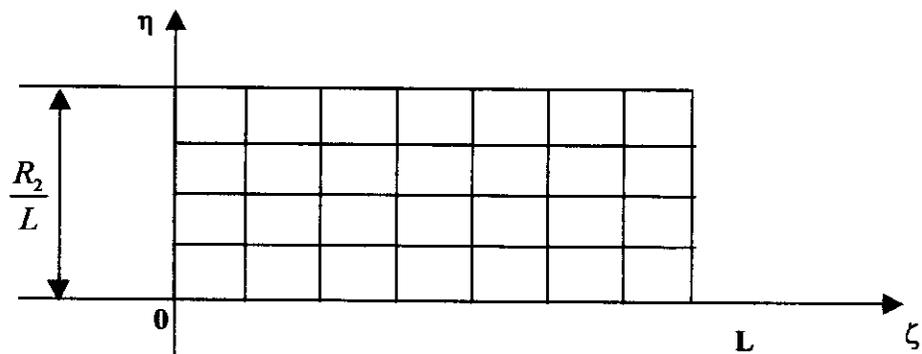


Figure IV. 2 Domaine rectangulaire de calcul

Les vecteurs unitaires \vec{e}_ζ et \vec{e}_η ne sont pas perpendiculaires, et \vec{e}_ζ change de direction avec sa position, alors que \vec{e}_η reste parallèle à \vec{e}_y , donc $\vec{e}_\eta = \vec{e}_y$

Détermination de \vec{e}_ζ

En considérant, le vecteur \vec{n} , normal à la ligne de la constante η , on a :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} n}{|\vec{\nabla} n|}$$

$$\vec{\nabla} n = -\frac{f'}{L} \vec{e}_x + \vec{e}_y$$

$$|\vec{\nabla} n| = \left[\left(-\frac{f'}{L} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

on pose :

$$\begin{cases} \beta = \frac{f'}{L} \\ \alpha = 1 + \left(\frac{f'}{L} \right)^2 \end{cases}$$

On obtient

$$\vec{n} = -\frac{\beta \vec{e}_x + \vec{e}_y}{\alpha^{1/2}}$$

Les vecteurs \vec{n} et \vec{e}_ζ sont perpendiculaires :

$$\vec{n} \cdot \vec{e}_\zeta = 0 \Rightarrow \vec{e}_\zeta = \frac{\left(\vec{e}_x + \beta \vec{e}_y \right)}{\alpha^{1/2}}$$

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \alpha^{1/2} \vec{e}_\zeta - \beta \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_y = \vec{e}_\eta \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

Les composantes de la vitesse dans les nouvelles coordonnées sont données par :

$$\begin{cases} U_\zeta = U \alpha^{1/2} \\ U_\eta = V - \beta U \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

Pour avoir les équations différentielles du problème dans le nouveau système de coordonnées (ζ, η) , il faut remplacer les dérivées en (x, y) par les dérivées en (ζ, η) .

♦ Les dérivées premières sont données par :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{ou}$$

$$[J^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta} \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

♦ Les dérivées secondes sont données par :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial xy} \end{bmatrix} = [T1] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} + [T2] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{avec,}$$

$$[T1] = - [T2][C][J]$$

$$[T2] = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{12}^2 & 2J_{11}J_{12} \\ J_{21}^2 & J_{22}^2 & 2J_{21}J_{22} \\ J_{11}J_{21} & J_{12}J_{22} & J_{11}J_{22} + J_{12}J_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta^2 & -2\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & 1 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_{11} & \frac{\partial}{\partial \zeta} J_{12} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} J_{21} & \frac{\partial}{\partial \eta} J_{22} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} J_{11} + \frac{\partial}{\partial \zeta} J_{21} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} J_{12} + \frac{\partial}{\partial \zeta} J_{22} \right) \end{bmatrix}$$

et puisque notre transformation est linéaire donc, la matrice $C = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2\beta \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ -\beta \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

En introduisant (IV.6), (IV.7), (IV.8) et (IV.9) dans (IV.1), (IV.3) et (IV.5), on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{IV.10})$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + (U_\eta + \beta U) \frac{\partial U}{\partial \eta} = - \left(\frac{\partial P}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial R_{11}}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial R_{11}}{\partial \eta} + \frac{\partial R_{12}}{\partial \eta} \quad (\text{IV.11.a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\eta}{\partial t} + U \frac{\partial U_\eta}{\partial \zeta} + (U_\eta + \beta U) \frac{\partial U}{\partial \eta} = & - \left[(1 + \beta^2) \frac{\partial P}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right] + \frac{\partial R_{12}}{\partial \zeta} + 2\beta \frac{\partial R_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial R_{22}}{\partial \eta} \\ & - \beta \left[\frac{\partial R_{11}}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial R_{11}}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.11.b})$$

avec,

$$R_{ij} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - \nu_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\text{où, } \nu_i = C_\mu f_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} + U \left(\frac{\partial K}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) + (U_\eta + \beta U) \frac{\partial K}{\partial \eta} = & \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{C_u f_u K^2}{\sigma_k \varepsilon} \right) \left(\frac{\partial K}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) \right] \\ & - \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{C_u f_u K^2}{\sigma_k \varepsilon} \right) \left(\frac{\partial K}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{C_u f_u K^2}{\sigma_k \varepsilon} \right) \frac{\partial K}{\partial \eta} \right] + C_u f_u \frac{K^2}{\varepsilon} - \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) + (U_\eta + \beta U) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{C_u f_u K^2}{\sigma_\varepsilon \varepsilon} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) \right]$$

$$- \beta \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{C_u f_u K^2}{\sigma_\varepsilon \varepsilon} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} - \beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{C_u f_u K^2}{\sigma_\varepsilon \varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right] + C_u f_u C_{\varepsilon 1} E K + C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (\text{IV.13})$$

CHAPITRE V

Modélisation Numérique

CHAPITE V

MODELISATION NUMERIQUE

I INTRODUCTION

Pour étudier un problème physique, nous sommes obligés de passer par l'une des deux voies ; la première, c'est la voie expérimentale qu'on utilise rarement à cause de son coût (matériel trop cher). Ainsi que, la réalisation d'un modèle réduit ou une expérience est très longue. La deuxième, est l'approche numérique qui est développé avec le développement du matériel informatique.

L'avantage de cette approche est :

- La rapidité des calculs.
- La possibilité de refaire la simulation (expérience) plusieurs fois en changeant les paramètres qui caractérisent le phénomène.

Cette approche est basée sur la transformation d'un modèle mathématique a un modèle numérique, on passant par les méthodes numériques tel que volumes finis, éléments finis ou différence finis.

1°/ Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis, est la méthode la plus utilisée pour les études des structures à trois dimensions, car, elle étend les possibilités des méthodes matricielles a un très vaste domaine d'application, et permet donc, l'analyse des structures complexes.

Le principe de cette méthode, consiste à subdiviser la structure étudier en sous domaine de forme relativement simple, appelés «éléments finis », et donc, l'approximation de la solution concernera l'élément constitutif et non pas la structure totale.

2°/ Méthode de volumes finis

Il s'agit d'une méthode de formulation intégrale dans l'espace physique des lois de conservation. Bien qu'elle ne soit pas fondamentalement différente aux méthodes aux différences finis ou aux éléments finis. Il est usage de la considérer à part, par ce que, elle trouve un domaine d'application tout à fait spécifique.

La méthode trouve tout son épanouissement dans son application sur un maillage quelconque (non forcément rectiligne, orthogonale).

3°/ Méthode de différences finis

La méthode de différences finies est basée sur l'approximation d'une fonction par son développement de TAYLOR autour d'un point, elle permet de remplacer les équations aux dérivées partielles par des équations numériques.

Les approximations plus précises d'ordre supérieur sont obtenues, soit en augmentant le nombre des points dans l'expression de dérivée, soit en utilisant les formules implicites.

Plusieurs méthodes de différences finies spécifiques à la résolution des équations du mouvement en variables primitives ont été développées. En écoulement incompressible, la principale difficulté réside dans le couplage vitesse pression à partir de l'équation de continuité.

Une des méthodes les plus anciennes pour les écoulements stationnaires, est la méthode de compressibilité artificielle qui, introduit une équation de pression avec une évolution fictive.

a) La consistance

Une approximation par les différences finies, est consistante, si la différence entre l'équation au dérivé partielle et l'équation au différence finis tend vers zéro lorsque Δx et Δt deviennent très petites :

$$\frac{f(x, t + \Delta t) - \frac{[f(x + \Delta x, t) + f(x - \Delta x, t)]}{2}}{\Delta t} + \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} = 0$$

b) La stabilité

Un schéma numérique est stable, si les erreurs de n'importe quelle origine n'augmentent pas à chaque pas de temps de calcul. L'instabilité numérique peut avoir une cause d'origine physique ; c'est le cas lorsque le phénomène n'est pas correctement modélisé.

c) La convergence

La convergence d'un problème signifie que la solution de l'équation aux différences se rapproche de la vraie solution de l'équation aux dérivées partielles ayant les mêmes conditions initiales et aux limites, lorsque la dimension des mailles de discrétisation diminue.

Généralement, un schéma consistant est stable et également convergent.

II METHODE DE LA COMPRESSIBILITE ARTIFICIELLE

Les principales difficultés rencontrées dans la résolution des équations dont les inconnus sont la vitesse et la pression sont :

- La présence de la contrainte $\nabla V = 0$ qu'il faut satisfaire à chaque instant, ne permet pas l'utilisation d'une méthode explicite simple.
- Il y a un manque de conditions aux limites pour la pression.

Dans le cas permanent, la difficulté $\nabla V = 0$ peut être surmontée en utilisant la méthode de compressibilité artificielle.

Cette méthode a été introduite indépendamment sous formes légèrement différentes par VALDIMIROVA et AL(1965), et par CHORIN(1967) [17].

La méthode de CHORIN est établie en écrivant en premier l'équation de continuité perturbée :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + C^2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = 0 \quad (\text{V.1})$$

ou, C^2 est une constante arbitraire.

Cette équation n'a pas de sens physique avant que l'état permanent ne soit atteint $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$.

La contrainte $\nabla V=0$ est satisfaite seulement à la convergence.

Le paramètre C^2 doit être choisi, pour assurer la convergence c'est-à-dire assurer l'existence de la solution numérique stable du système d'équations à résoudre avec les conditions aux limites et les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} V = V_0 & t = t_0 \\ P = P_0 & t = t_0 \end{cases}$$

Avec, V_0 et P_0 sont arbitraires.

III DISCRETISATION DES EQUATIONS

Les équations du problème sont discrétisées par un schéma explicite simple, comme suite :

$$\frac{\partial U}{\partial t} \cong \frac{U^{n+1}(i, j) - U^n(i, j)}{\Delta t} \quad (\text{V. 2})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} \cong \frac{U^n(i+1, j) - U^n(i-1, j)}{2\Delta \zeta} \quad (\text{V. 3})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} \cong \frac{U^n(i, j+1) - U^n(i, j-1)}{2\Delta\eta} \quad (\text{V. 4})$$

$$\frac{\partial U_\eta}{\partial t} \cong \frac{U_\eta^{n+1}(i, j) - U_\eta^n(i, j)}{\Delta t} \quad (\text{V. 5})$$

$$\frac{\partial U_\eta}{\partial \zeta} \cong \frac{U_\eta^n(i+1, j) - U_\eta^n(i-1, j)}{2\Delta\zeta} \quad (\text{V. 6})$$

$$\frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} \cong \frac{U_\eta^n(i, j+1) - U_\eta^n(i, j-1)}{2\Delta\eta} \quad (\text{V. 7})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \cong \frac{U^n(i+1, j) + U^n(i-1, j) - 2U^n(i, j)}{\Delta\zeta^2} \quad (\text{V. 8})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \cong \frac{U^n(i, j+1) + U^n(i, j-1) - 2U^n(i, j)}{\Delta\eta^2} \quad (\text{V. 9})$$

$$\frac{\partial^2 U_\eta}{\partial \zeta^2} \cong \frac{U_\eta^n(i+1, j) + U_\eta^n(i-1, j) - 2U_\eta^n(i, j)}{\Delta\zeta^2} \quad (\text{V. 10})$$

$$\frac{\partial^2 U_\eta}{\partial \eta^2} \cong \frac{U_\eta^n(i, j+1) + U_\eta^n(i, j-1) - 2U_\eta^n(i, j)}{\Delta\eta^2} \quad (\text{V. 11})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta \partial \zeta} \cong \frac{U^n(i+1, j+1) + U^n(i-1, j-1) - U^n(i+1, j-1) - U^n(i-1, j+1)}{4\Delta\eta \Delta\zeta} \quad (\text{V. 12})$$

$$\frac{\partial^2 U_\eta}{\partial \eta \partial \zeta} \cong \frac{U_\eta^n(i+1, j+1) + U_\eta^n(i-1, j-1) - U_\eta^n(i+1, j-1) - U_\eta^n(i-1, j+1)}{4\Delta\eta \Delta\zeta} \quad (\text{V. 13})$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} \cong \frac{P^{n+1}(i, j) - P^n(i, j)}{\Delta t} \quad (\text{V. 14})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} \cong \frac{P^n(i+1, j) - P^n(i, j)}{\Delta \zeta} \quad (\text{V. 15})$$

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} \cong \frac{P^n(i, j+1) - P^n(i, j)}{\Delta \eta} \quad (\text{V. 16})$$

En introduisant ces relations, dans les équations de mouvements, de continuité, et dans les équations de K et ε , on obtient :

$$\begin{aligned} U^{n+1}(i, j) = & U^n(i, j) - U^n(i, j) \frac{\Delta t}{2\Delta \zeta} (U^n(i+1, j) - U^n(i-1, j)) - U^n(i, j) \frac{\Delta t}{2\Delta \eta} (U^n(i, j+1) - U^n(i, j-1)) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} P^n(i+1, j) + \beta \frac{\Delta t}{\Delta \eta} P^n(i, j+1) + \left(\frac{1}{\Delta \zeta} - \beta \frac{1}{\Delta \eta} \right) \Delta t P^n(i, j) \\ & - \frac{\Delta t}{3\Delta \zeta} (K^n(i+1, j) - K^n(i-1, j)) + \beta \frac{\Delta t}{3\Delta \eta} (K^n(i, j+1) - K^n(i, j-1)) \\ & - \frac{5}{4} \left(\frac{\beta v_i \Delta t}{\Delta \zeta \Delta \eta} \right) (U^n(i+1, j+1) + U^n(i-1, j-1) - U^n(i-1, j+1) - U^n(i+1, j-1)) \\ & - \left(\frac{v_i \Delta t}{4\Delta \zeta \Delta \eta} \right) (U^n(i+1, j+1) + U^n(i-1, j-1) - U^n(i-1, j+1) - U^n(i+1, j-1)) \\ & + \left(\frac{2v_i \Delta t}{\Delta \eta^2} \right) (U^n(i+1, j) + U^n(i-1, j) - 2U^n(i, j)) + \frac{(3v_i \beta^2 + v_i) \Delta t}{\Delta \eta^2} (U^n(i+1, j) + U^n(i-1, j) - 2U^n(i, j)) \\ & + \left(\frac{\beta v_i \Delta t}{\Delta \eta^2} \right) (U^n(i, j+1) + U^n(i, j-1) - 2U^n(i, j)) \end{aligned} \quad (\text{V. 17})$$

$$\begin{aligned} U_\eta^{n+1}(i, j) = & U_\eta^n(i, j) - U^n(i, j) \frac{\Delta t}{2\Delta \zeta} (U_\eta^n(i+1, j) - U_\eta^n(i-1, j)) - U_\eta^n(i, j) \frac{\Delta t}{2\Delta \eta} (U_\eta^n(i, j+1) - U_\eta^n(i, j-1)) \\ & + \beta \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} P^n(i+1, j) - \frac{(\beta^2 + 1) \Delta t}{\Delta \eta} P^n(i, j+1) + \left(\frac{\beta^2 + 1}{\Delta \zeta} - \frac{\beta}{\Delta \eta} \right) \Delta t P^n(i, j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta\Delta t}{3\Delta\zeta}(K(i+1,j)-K(i-1,j))+\frac{(\beta^3+1)\Delta t}{3\Delta\eta}(K(i,j+1)-K(i,j-1)) \\
& +\left(\frac{v_t-6\beta^2v_t}{4\Delta\zeta\Delta\eta}\right)\Delta t(U^n(i+1,j+1)+U^n(i-1,j-1)-U^n(i-1,j+1)-U^n(i+1,j-1)) \\
& -\left(\frac{3v_t\beta\Delta t}{4\Delta\zeta\Delta\eta}\right)(U_\eta^n(i+1,j+1)+U_\eta^n(i-1,j-1)-U_\eta^n(i-1,j+1)-U_\eta^n(i+1,j-1)) \\
& +\frac{(2v_t\beta^3-4v_t\beta)\Delta t}{\Delta\eta^2}(U^n(i,j+1)+U^n(i,j-1)-2U^n(i,j)) \\
& +\left(\frac{2\beta^2v_t-2v_t}{\Delta\eta^2}\right)\Delta t(U_\eta^n(i,j+1)+U_\eta^n(i,j-1)-2U_\eta^n(i,j))+\left(\frac{\beta v_t\Delta t}{\Delta\eta^2}\right)(U^n(i+1,j)+U^n(i-1,j)-2U^n(i,j)) \\
& +\left(\frac{v_t\Delta t}{\Delta\zeta^2}\right)(U_\eta^n(i+1,j)+U_\eta^n(i-1,j)-2U_\eta^n(i,j)) \tag{V. 18}
\end{aligned}$$

$$P^{n+1}(i,j)=P^n(i,j)-C^2\frac{\Delta t}{\Delta\zeta}(U^n(i+1,j)-U^n(i,j))-C^2\frac{\Delta t}{\Delta\eta}(U_\eta^n(i,j+1)-U_\eta^n(i,j)) \tag{V. 19}$$

$$\hat{A}=\frac{C_\mu f_\mu K^n(i,j)}{\sigma_K \varepsilon^2(i,j)} \tag{V. 20}$$

$$\hat{B}=\frac{C_\mu f_\mu K^n(i,j)}{\sigma_\varepsilon \varepsilon^2(i,j)} \tag{V. 21}$$

$$\hat{C}_K=K^n(i+1,j)-K^n(i-1,j) \tag{V. 22}$$

$$\hat{C}_\varepsilon=\varepsilon^n(i+1,j)-\varepsilon^n(i-1,j) \tag{V. 23}$$

$$\hat{D}_K=K^n(i,j+1)-K^n(i,j-1) \tag{V. 24}$$

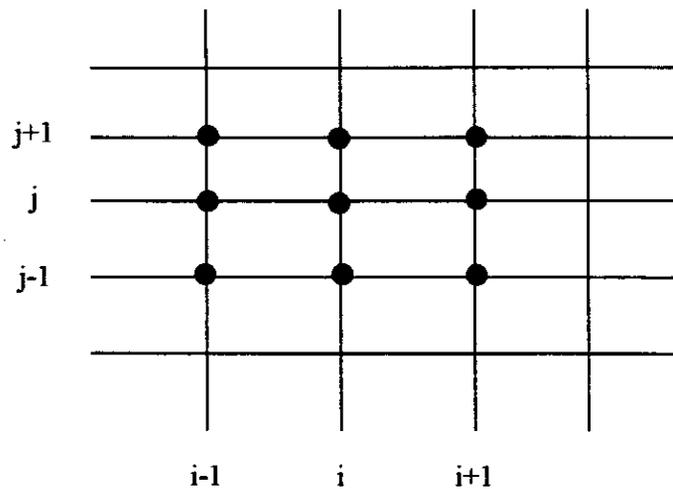
$$\hat{D}_\varepsilon=\varepsilon^n(i,j+1)-\varepsilon^n(i,j-1) \tag{V. 25}$$

$$\hat{E}_K=K^n(i+1,j+1)+K^n(i-1,j-1)-K^n(i-1,j+1)-K^n(i+1,j-1) \tag{V. 26}$$

$$\hat{E}_\varepsilon=\varepsilon^n(i+1,j+1)+\varepsilon^n(i-1,j-1)-\varepsilon^n(i-1,j+1)-\varepsilon^n(i+1,j-1) \tag{V. 27}$$

$$\begin{aligned}
K^{n+1}(i,j) = & K^n(i,j) - \frac{U^n(i,j)}{2\Delta\zeta} \Delta \hat{C}_K - \frac{U_\eta^n(i,j)}{2\Delta\eta} \Delta \hat{D}_K - \hat{A} \left[\frac{1}{\Delta\zeta} \hat{C}_K \varepsilon^n(i,j) - \frac{1}{2\Delta\zeta} \hat{C}_\varepsilon K^n(i,j) \right] \frac{1}{2\Delta\zeta} \hat{C}_K \varepsilon^n(i,j) \\
& - \beta \hat{A} \frac{1}{2\Delta\eta} \hat{D}_K \left[\frac{1}{\Delta\zeta} \hat{C}_K \varepsilon^n(i,j) - \frac{1}{2\Delta\zeta} \hat{C}_\varepsilon K^n(i,j) \right] + \frac{1}{\Delta\zeta^2} (K^n(i+1,j) + K^n(i-1,j) - 2K^n(i,j)) \left(\frac{1}{Re} + \hat{A} K^n(i,j) \right) \\
& - \frac{\beta}{4\Delta\zeta\Delta\eta} \hat{E}_K \left(\frac{1}{Re} + \hat{A} K^n(i,j) \right) - \beta \hat{A} \frac{1}{2\Delta\zeta} \hat{C}_K \left[\frac{1}{\Delta\eta} \hat{D}_K \varepsilon^n(i,j) - \frac{1}{2\Delta\eta} \hat{D}_\varepsilon K^n(i,j) \right] \\
& + \beta^2 \hat{A} \frac{1}{2\Delta\eta} \hat{D}_K \left[\frac{1}{\Delta\eta} \hat{D}_K \varepsilon^n(i,j) - \frac{1}{2\Delta\eta} \hat{D}_\varepsilon K^n(i,j) \right] - \frac{\beta}{4\Delta\zeta\Delta\eta} \hat{E}_K \left(\frac{1}{Re} + \hat{A} K^n(i,j) \right) \\
& + \frac{\beta^2}{\Delta\eta^2} (K^n(i,j+1) + K^n(i,j-1) - 2K^n(i,j)) \left(\frac{1}{Re} + \hat{A} K^n(i,j) \right) + C_{\mu f_\mu} E(i,j) \frac{K^2(i,j)}{\varepsilon(i,j)} + \varepsilon(i,j) \quad (V.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{n+1}(i,j) = & \varepsilon^n(i,j) - \frac{\Delta U^n(i,j)}{2\Delta\zeta} \hat{C}_\varepsilon - \frac{\Delta U_\eta^n(i,j)}{2\Delta\eta} \hat{D}_\varepsilon - \hat{B} \left[\frac{1}{\Delta\zeta} \hat{C}_K \varepsilon^n(i,j) - \frac{1}{2\Delta\zeta} \hat{C}_\varepsilon K^n(i,j) \right] \frac{1}{2\Delta\zeta} \hat{C}_\varepsilon \\
& - \frac{\beta \hat{B}}{2\Delta\eta} \hat{D}_\varepsilon \left[\frac{1}{\Delta\zeta} \hat{C}_K \varepsilon^n(i,j) - \frac{1}{2\Delta\zeta} \hat{C}_\varepsilon K^n(i,j) \right] + \frac{1}{\Delta\zeta^2} (\varepsilon^n(i+1,j) + \varepsilon^n(i-1,j) - 2\varepsilon^n(i,j)) \left(\frac{1}{Re} + \hat{B} K^n(i,j) \varepsilon^n(i,j) \right) \\
& - \frac{\beta}{4\Delta\zeta\Delta\eta} \hat{E}_\varepsilon \left(\frac{1}{Re} + \hat{B} K^n(i,j) \varepsilon^n(i,j) \right) - \beta \hat{B} \left[\frac{1}{\Delta\eta} \hat{D}_K \varepsilon^n(i,j) - \frac{1}{2\Delta\eta} \hat{D}_\varepsilon K^n(i,j) \right] \frac{1}{2\Delta\zeta} \hat{C}_\varepsilon \\
& + \beta^2 \hat{B} \hat{D}_\varepsilon \frac{1}{2\Delta\eta} \left[\frac{1}{\Delta\eta} \hat{D}_K \varepsilon^n(i,j) - \frac{1}{2\Delta\eta} \hat{D}_\varepsilon K^n(i,j) \right] - \frac{\beta}{4\Delta\eta\Delta\zeta} E_\varepsilon \left(\frac{1}{Re} + \hat{B} K^n(i,j) \varepsilon^n(i,j) \right) \\
& + \frac{\beta^2}{\Delta\eta^2} (\varepsilon^n(i,j+1) + \varepsilon^n(i,j-1) - 2\varepsilon^n(i,j)) \left(\frac{1}{Re} + \hat{B} K^n(i,j) \varepsilon^n(i,j) \right) \\
& + \hat{B} \left[\frac{1}{\Delta\eta} \hat{D}_K \varepsilon^n(i,j) - \frac{1}{2\Delta\eta} \hat{D}_\varepsilon K^n(i,j) \right] \frac{1}{2\Delta\eta} \hat{D}_\varepsilon + \frac{1}{\Delta\eta^2} (\varepsilon^n(i,j+1) + \varepsilon^n(i,j-1) - 2\varepsilon^n(i,j)) \left(\frac{1}{Re} + \hat{B} K^n(i,j) \varepsilon^n(i,j) \right) \\
& + C_{\mu f_\mu} C_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} E(i,j) K^n(i,j) + C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2(i,j)}{K^n(i,j)} \quad (V.29)
\end{aligned}$$



● Les points de calcul pour U, V, P, K et ε dans la maille

Figure (V. 1)

IV CONDITIONS AUX LIMITES

1°/ milieu de la conduite

a – Valeurs fictives à l'axe

pour des raisons de symétrie on a :

$$U_{\eta}(i, j-1) = -U_{\eta}(i, j+1)$$

$$U(i, j-1) = U(i, j+1)$$

$$P(i, j-1) = P(i, j+1)$$

b – Valeurs fictives à l'amont

pour des raisons de périodicité on a :

$$U_{\eta}(-1, j) = U_{\eta}(n-1, j)$$

$$U(-1, j) = U(n-1, j)$$

$$P(-1, j) = P(n-1, j)$$

c – Valeurs fictives à l'aval

pour des raisons de périodicité on a :

$$U_{\eta}(n+1, j) = U_{\eta}(1, j)$$

$$U(n+1, j) = U(1, j)$$

$$P(n+1, j) = P(1, j)$$

2°/ Région de paroi [12, 17]

Les effets d'une paroi sur-le-champ de la turbulence sont nombreux, et complexes on peut citer :

- La création d'une zone adjacente à la paroi dans la quelle la viscosité moléculaire est dominante.
- Le caractère fortement anisotrope de la turbulence près de la paroi.
- Le caractère fortement non homogène du champ turbulent.

Ces effets ont des conséquences très importantes sur les propriétés de l'écoulement, et surtout sur les frottements.

a Fonctions de paroi pour U

Le calcul des propriétés de l'écoulement dans la zone adjacente de la paroi nécessite l'introduction des points de descriptions en nombre élevé.

Une méthode pratique pour palier à cet inconvénient est de faire un raccordement à une loi universelle.

Pour cette raison de nombreux chercheurs ont proposé des modèles de fonction pour calculer les propriétés de l'écoulement dans la zone de paroi, ceci nous permet d'avoir les conditions aux limites.

α) Formulation de PATANKAR et SPALDING

La fonction de paroi peu être obtenue par intégration des équations de mouvements dans l'approximation unidimensionnelle de l'écoulement de couette.

$$\frac{d u^+}{d y^+} = \frac{1 + m^+ + u^+ + p^+ + y^+}{\mu^+}$$

u^+, y^+ : Grandeurs adimensionnelles caractérisant la région près de la paroi.

m^+ : Flux de masse.

p^+ : Gradient de pression longitudinal.

μ^+ : Viscosité efficace.

$$\beta) \text{ Formulation basée sur : } y^+ = y \sqrt{\frac{k_p}{\nu}}$$

Cette formulation est basée sur l'utilisation de l'énergie cinétique fluctuant du premier point de discrétisations comme une échelle de vitesse.

On a une grande généralité en prenant $(K_p)^{1/2}$ comme une échelle de vitesse. Il est bien sûr nécessaire dans ce cas de résoudre une équation de transport sur K .

$$u^+ = \frac{u}{u^*} \quad (V. 30)$$

$$\text{avec } u^* = \frac{\tau_w}{\rho c_u^{1/4} k_p^{1/2}}$$

$$y^+ = \frac{y c_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\nu} \quad (V. 31)$$

$$\tau_w = \nu_a \frac{u_p}{y_p} \quad (V. 32)$$

ν_a : Viscosité apparente.

$$\chi) \text{ Formulation basée sur : } y^+ = y \sqrt{\frac{k_v}{\nu}}$$

La formulation précédente qui utilise l'énergie cinétique fluctuante du premier point de discrétisations à l'inconvénient de dépendre du maillage utilisé (utilisation de la distance y_p). Aussi **CHIENG**, et **LAUNDER** ont préféré utiliser l'énergie cinétique turbulente à la frontière de la sous couche visqueuse K_v .

$$u^+ = \frac{u k_v^{1/2}}{\tau_w / \rho} \quad (V. 33)$$

$$y^+ = y \frac{k_v^{1/2}}{\nu} \quad (V. 34)$$

$$u^+ = y^+ \quad , \quad y^+ \leq y_v^+ \quad (V. 35)$$

$$K^* = C_\mu^{1/4} K$$

$$u^+ = \frac{1}{K^*} \text{Log}(E^* y^+) \quad y^+ \geq y_v^+ \quad (\text{V. 36})$$

$$E^* = c_u^{1/4} E$$

E : Constante de la loi logarithmique de la vitesse.

K : Constante de **KARMAN**.

y^+ : Définit l'épaisseur de la sous couche.

$$\delta) \text{ Formulation basée sur : } y^+ = y \sqrt{\frac{k_b}{\nu}}$$

AMANO R. S, JENSEN M.K et GOEL, 1983 et AMANO R.S., 1984 introduisent un schéma de paroi à trois zones :

- Zone de sous couche.
- Zone tampon.
- Zone logarithmique.

L'échelle de la vitesse ($\sqrt{k_b}$) est prise à la frontière entre la zone tampon et la zone logarithmique.

$$u^+ = \frac{u}{u^*} \quad (\text{V. 37})$$

avec $u^* = \frac{\tau_w}{\rho k_b^{1/2}}$

$$y^+ = \frac{k_b^{1/2}}{\nu}$$

$$u^+ = \frac{1}{K^*} \text{Log}(E^* y^+) \quad (\text{V. 38})$$

$$\epsilon) \text{ Formulation basée sur : } y^+ = y \frac{u_*}{\nu}$$

Cette formulation est basée sur le profil de la vitesse de frottement u^* .

$$(u^*)^2 = \frac{\tau_w}{\nu} = \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \quad (\text{V. 39})$$

- sous couche visqueuse :

La sous couche visqueuse est la couche la plus proche de la paroi ($y^+ < 5$) ou le transport turbulent peut être négligé devant le transport moléculaire.

Donc :

$$(u^*)^2 = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{V. 40})$$

Ce qui donne la formule universelle :

$$u^+ = y^+ \quad (\text{V. 41})$$

- Zone intermédiaire ($5 < y^+ < 30$) :

Cette zone est située entre deux zones où, le transport turbulent et le transport moléculaire sont de même ordre, les valeurs expérimentales suggèrent un profil de vitesse de la forme logarithmique :

$$u^+ = A \ln(y^+) + B$$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des deux formules de la zone de sous couche visqueuse et la zone pleinement turbulente à la limite ($y^+ = 5$, $y^+ = 30$).

$$u^+ = 5 \ln(y^+) - 3.05 \quad (\text{V. 42})$$

- zone pleinement turbulente :

La zone pleinement turbulente est la couche la plus éloignée de la paroi ($30 < y^+ < 100$) ou le transport moléculaire peut être négligé devant le transport turbulent :

$$(u^*)^2 = -\overline{u'v'}$$

Une modélisation par la longueur de mélange donne :

$$\overline{u'v'} = (u^*)^2 = \left(\nu y \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$$u^+ = \frac{1}{k} \text{Log}(Ey^+) + \text{const}$$

k : Constante de KARMAN = 0.41

La constante d'intégration est choisie selon la rugosité de la paroi. Pour une paroi lisse cette constante est égale à 5.5.

Donc :

$$u^+ = 2.5 \text{Ln}(y^+) + 5.5 \quad (\text{V. 43})$$

Notre choix c'est porté sur cette dernière formulation, à savoir :

$$u^+ = y^+ \quad 0 < y^+ < 5 \quad (\text{V. 44})$$

$$u^+ = 5 \text{Ln}(y^+) - 3.05 \quad 5 < y^+ < 30 \quad (\text{V. 45})$$

$$u^+ = 2.5 \text{Ln}(y^+) + 5.5 \quad 30 < y^+ < 100 \quad (\text{V. 46})$$

Il y a également de proposé dans notre cas une fonction de paroi pour K et ε

b Fonction de paroi pour K et ε

Pour la zone pleinement turbulente les fonctions de paroi de K et de ε sont données par :

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{(u^*)^4}{k \nu y^+} \\ K = \frac{(u^*)^2}{\sqrt{c_u}} \end{cases} \quad (\text{V. 47})$$

Cette formulation est basée sur l'hypothèse que la frontière du maillage se situe en zone pleinement turbulente. Pour que le calcul soit valable en tout point de l'écoulement, une extension de ces formules a été faite.

Le comportement de K et de ε dans la sous couche visqueuse peut être approché en considérant le développement de **TAYLOR** en fonction de la distance à la paroi.

$$\begin{cases} K = Ay^2 + By^3 + \dots \\ \varepsilon = 2\nu (A + 2By + Cy^2 + \dots) \end{cases}$$

En limitant ces développements en second ordre ($B = 0$), on obtient :

$$\begin{cases} K = Ay^2 \\ \varepsilon = 2\nu (A + 2Cy^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = \frac{A\gamma^2}{(u^*)^2} (y^+)^2 \\ \varepsilon = 2\nu A + \frac{2C\gamma^2}{(u^*)^2} (y^+)^2 \end{cases} \quad (\text{V. 48})$$

Si on fait un raccordement avec les expressions de K et ε de la zone pleinement turbulente on obtient les coefficients A et C :

$$A = \frac{(u^*)^4}{\nu^2 \delta^2 \sqrt{c_u}} \quad , \quad C = \frac{(u^*)^6}{2\nu^2 \delta^3} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{\delta \sqrt{c_u}} \right)$$

d'où pour la zone visqueuse, on a :

$$\begin{cases} K = \frac{(u^*)^2}{\sqrt{c_u}} \left(\frac{y^+}{\delta} \right)^2 \\ \varepsilon = \frac{(u^*)^4}{\delta \nu} \left[\frac{1}{k} \left(\frac{y^+}{\delta} \right)^2 + \frac{2}{\delta \sqrt{c_u}} \left(1 - \left(\frac{y^+}{\delta} \right)^2 \right) \right] \end{cases} \quad (\text{V. 49})$$

De plus si on définit :

$$\begin{cases} K^+ = \frac{K}{(u^*)^2} \\ \varepsilon^+ = \frac{\varepsilon}{R_\varepsilon (u^*)^4} \end{cases} \quad (\text{V. 50})$$

les expressions universelles des fonctions de paroi de K et ε pour l'ensemble de la région de paroi sont données par :

$$\begin{cases} K^+ = \frac{1}{\sqrt{c_u}} \\ \varepsilon^+ = \frac{1}{\nu y^+} \end{cases} \quad \delta < y^+ \quad (\text{V. 51})$$

$$\begin{cases} K^+ = \frac{1}{\sqrt{c_u}} \left(\frac{y^+}{\delta} \right)^2 \\ \varepsilon^+ = \frac{1}{k} \left(\frac{y^+}{\delta} \right)^2 + \frac{2}{\delta^2 \sqrt{c_u}} \left[1 - \left(\frac{y^+}{\delta} \right)^2 \right] \end{cases} \quad 0 \leq y^+ \leq \delta \quad (\text{V. 52})$$

avec :

$$8 \leq \delta \leq 12, \quad C_u = 0.09, \quad k = 0.41$$

Nous avons utiliser les expressions ci-dessus pour le calcul de K et ε dans la région de paroi

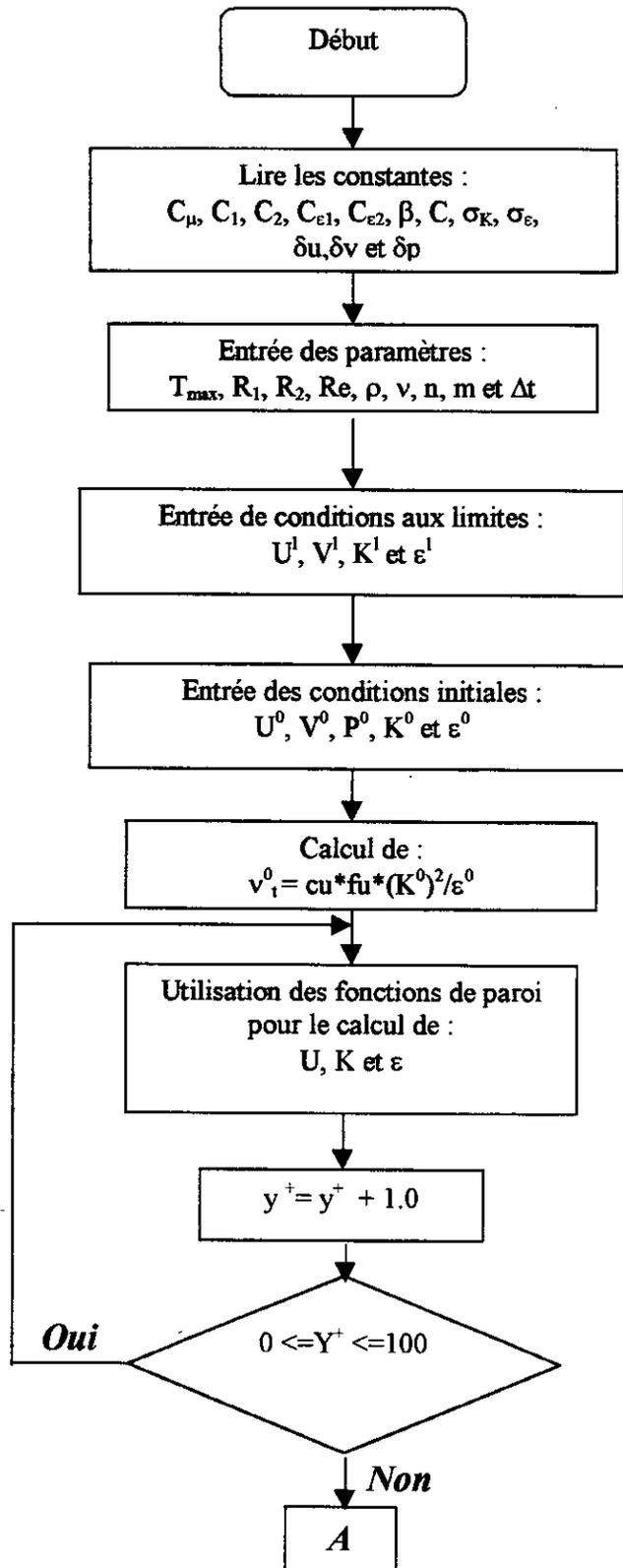
V CONDITION DE STABILITE

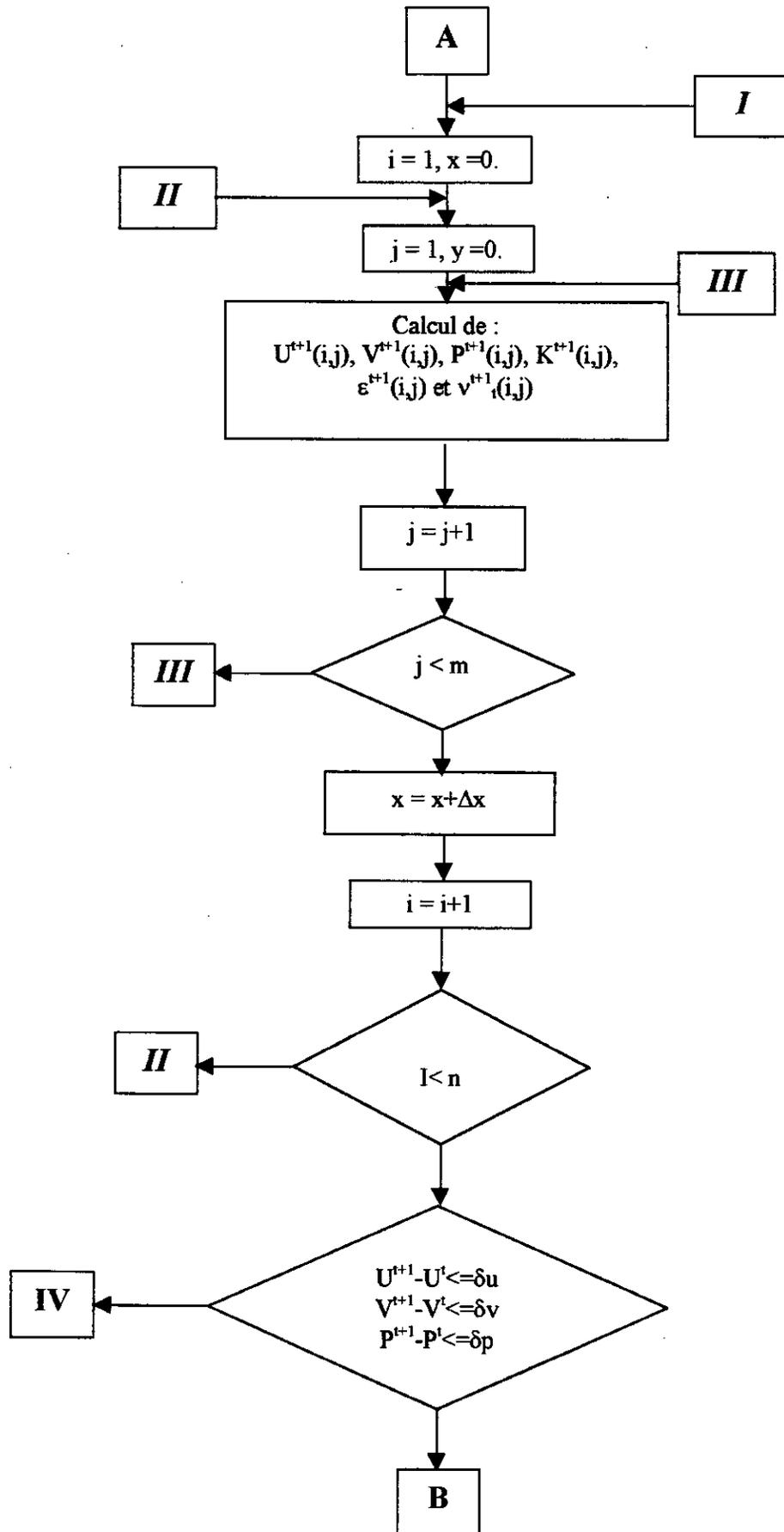
Dans le cas général le critère de stabilité est associé à l'équivalence suivante :

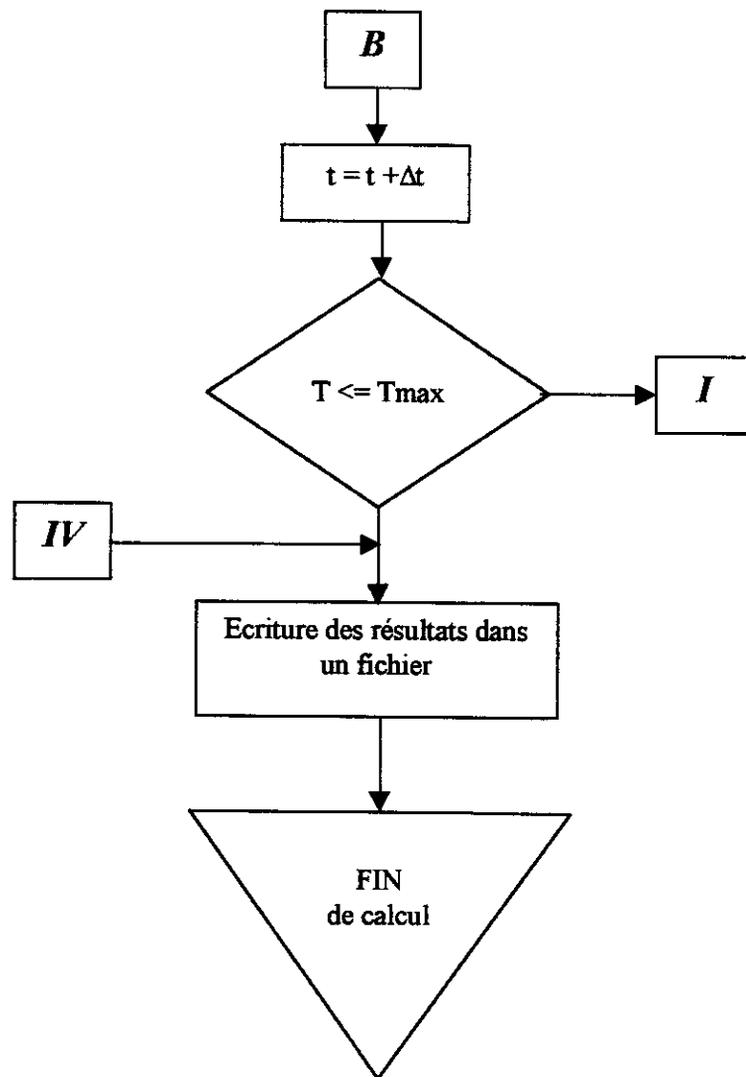
$$\frac{4\Delta t}{\Delta x^2} \left(\frac{1}{Re} + \frac{\Delta t C^2}{2} \right) \leq 1 \quad C > 0$$

VI L'ORGANIGRAMME

L'organigramme ci-dessous présente les étapes qu'ont à suivre, pour la résolution de système d'équations :







VI CONCLUSION

Nous avons développé un programme qui nous permet de résoudre les équations en discrétisant ces dérivées selon la méthode aux différences finies.

Pour le calcul de la pression nous avons fait appel à la méthode de compressibilité artificielle. Cette méthode est basée sur la perturbation de l'équation de continuité en introduisant une constante C choisie afin d'assurer la convergence.

Pour notre étude numérique, nous avons fait recours aux fonctions de paroi basées sur la formulation de $y^+ = y \frac{u_*}{\nu}$, et qui donnent l'évolution de la vitesse U , l'énergie cinétique turbulente K et le taux de dissipation ε dans la région de paroi.

CHAPITRE VI

Analyse des Résultats

CHAPITRE VI

RESULTATS ET ANALYSES

Pour valider notre modèle, nous avons utilisé plusieurs applications. Pour ce faire, des applications ont été faites sur les écoulement laminaire et turbulent dans des conduites cylindriques résultats bien connus par les hydrauliciens.

I ECOULEMENTS TURBULENT ET LAMINAIRE DANS UNE CONDUITE CYLINDRIQUE

1°/ Première application : Ecoulement laminaire dans une conduite cylindrique

a) Caractéristiques de la conduite cylindrique

Dans cette application, nous avons déterminé la variation de la pression et de la vitesse dans une conduite cylindrique, dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Le diamètre $D = 0.1$ m
- La longueur $L = 1$ m
- Le maillage $n \times m = 100 \times 10$

Les conditions initiales : $U_0 = 0.1$ m/s.

b) Résultats et Analyse

❖ La figure (VI. 1) donne la variation de la pression P en fonction de la longueur L . La courbe obtenue est une droite ; Résultats conforme aux résultats analytiques qu'on connaît.

❖ La figure (VI. 2) représente la distribution de la vitesse U en fonction de y . La courbe obtenue est une parabole ; Résultat également conforme aux résultats analytiques qu'on connaît.

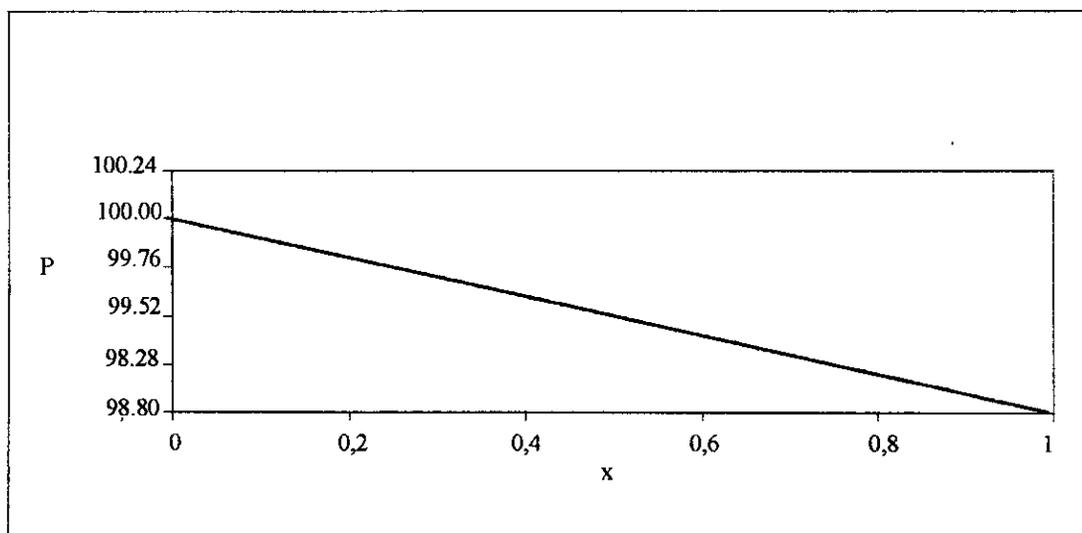


Figure VI. 1 Profil de la pression dans la conduite cylindrique pour un régime laminaire à $y = 0.5$

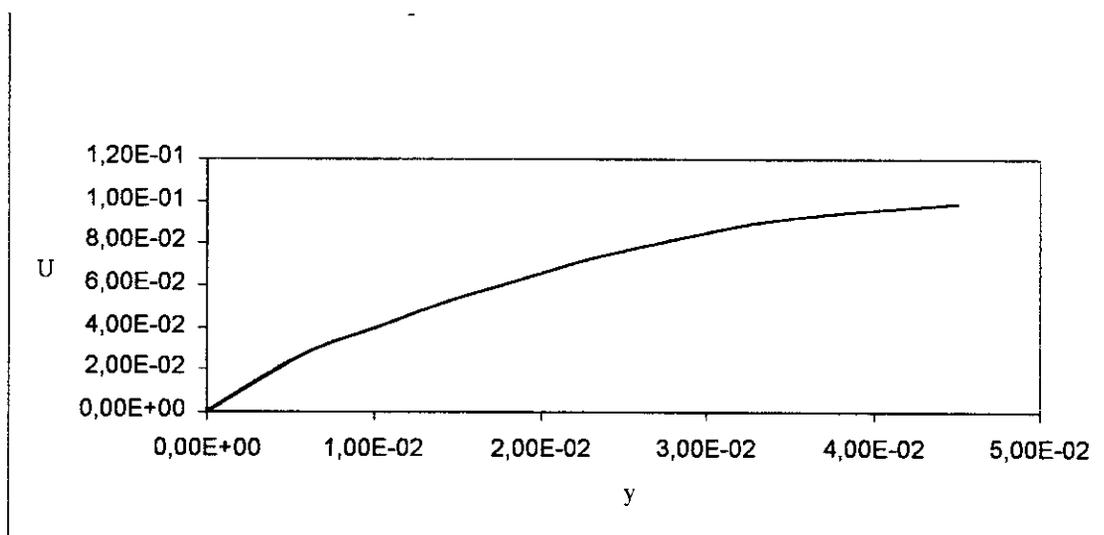
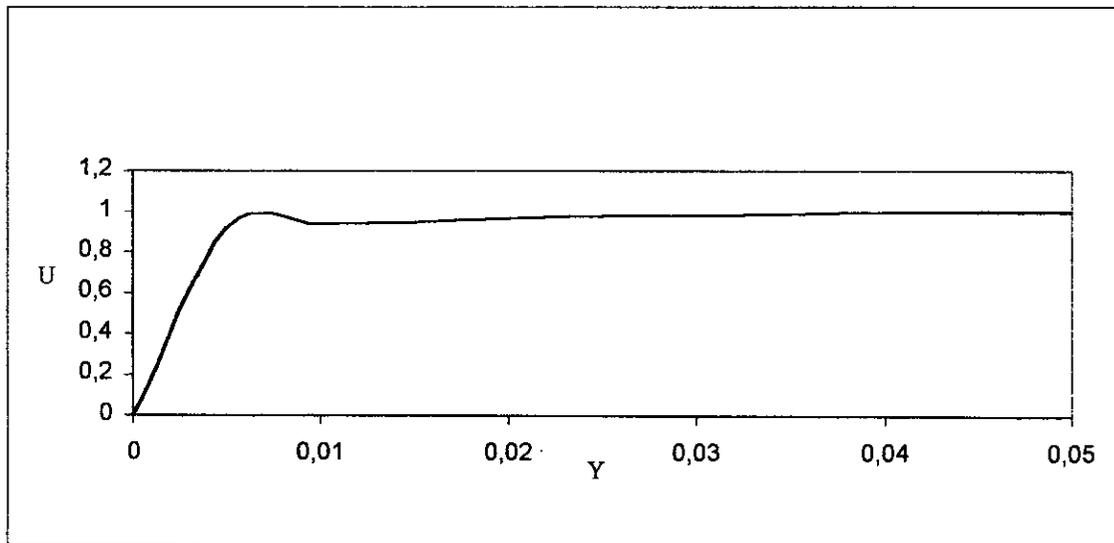


Figure VI. 2 Profil de la vitesse dans une conduite cylindrique pour un régime laminaire

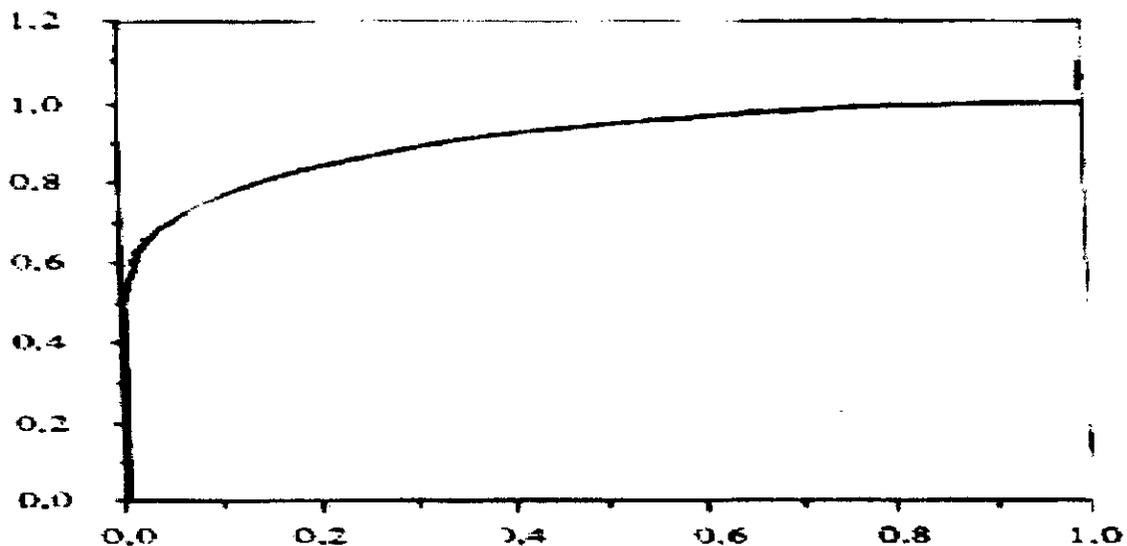
2) Deuxième application : Écoulement turbulent dans une conduite cylindrique

Dans cette application, nous avons déterminé la variation de la vitesse, de l'énergie cinétique turbulente (K), et du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente (ϵ). Les résultats obtenus sont comparés aux résultats de M. JEAGER. Ce dernier a fait une simulation numérique d'écoulements turbulents incompressibles et isothermes de fluides Newtoniens par les éléments finis tridimensionnels dans une conduite cylindrique.

❖ Les figures (VI.3) montrent la distribution de la vitesse U en fonction de y , obtenu avec les deux modèles numériques à savoir celui de JEAGER et le notre. On constate que l'allure de la vitesse donnée par notre modèle est proche de celui de JEAGER, sauf que celle de notre modèle est plus éloignée de l'axe des coordonnées, cet éloignement est dû aux fonctions de paroi.



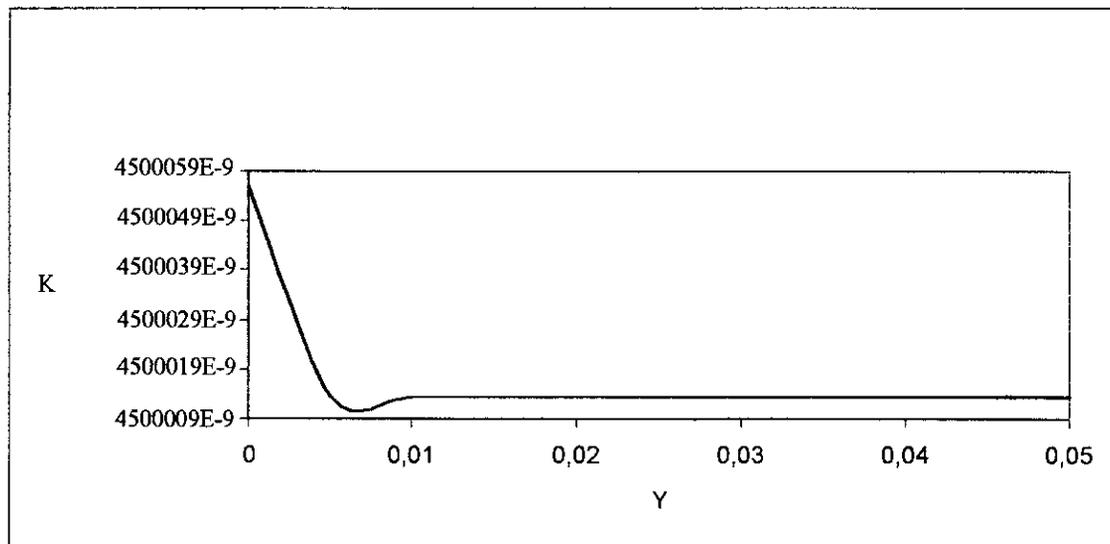
a) Résultats obtenus



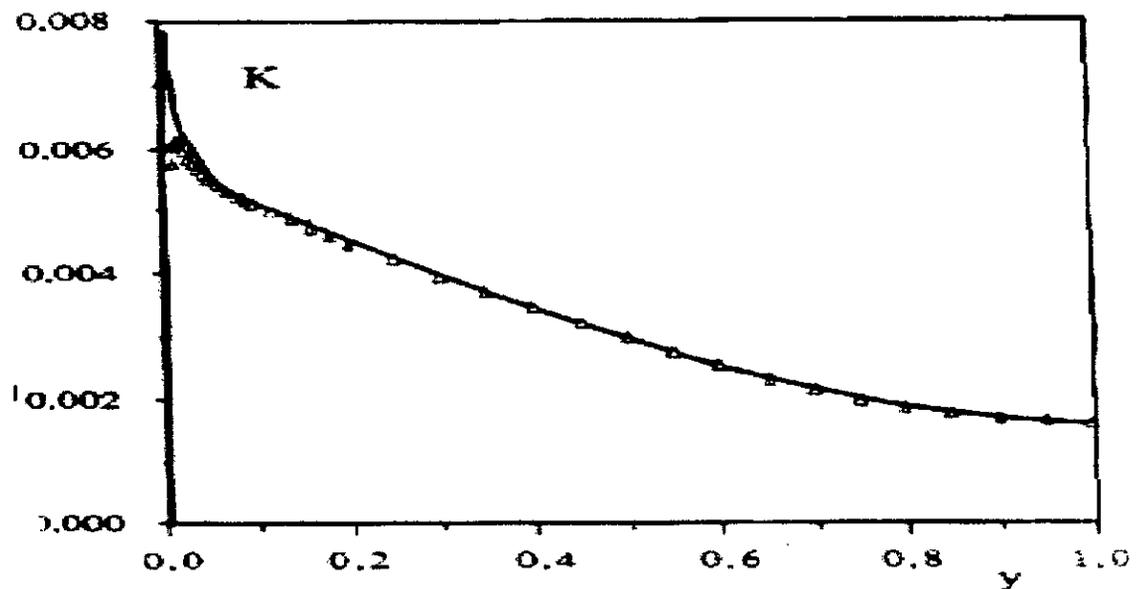
b) Résultat de M. Jeager

Figure VI. 3 Profil de la vitesse dans une conduite cylindrique pour un régime turbulent à $x = 0.50$

❖ Les figures (VI.4) donnent la variation de l'énergie cinétique turbulente (K) en fonction de y , pour les deux modèles. L'allure générale des deux courbes est identique. Quoique, notre courbe, est assez éloignée de l'axe vertical du repère. Ceci peut être expliquer par le fait que les fonctions de parois choisies sont très importantes et qu'il y a donc lieu de modéliser ses fonctions à part.



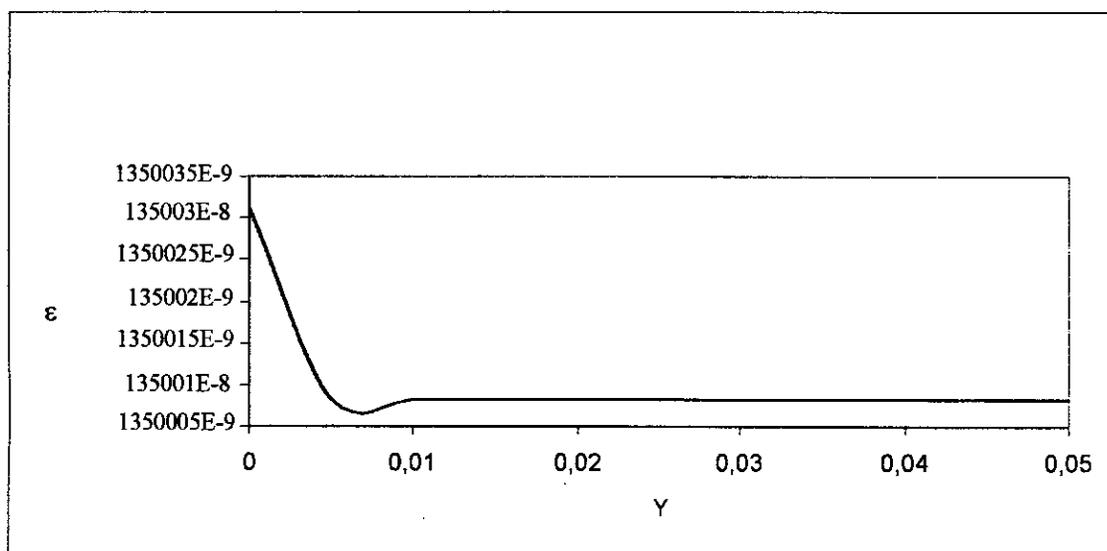
a) Résultats obtenus



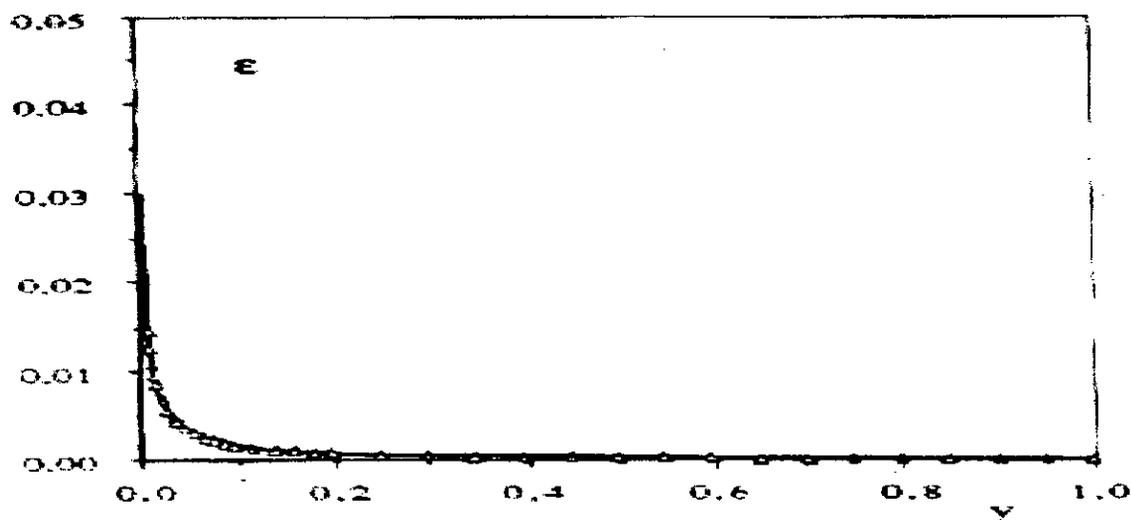
b) Résultats de M. Jeager

Figure VI. 4 Profil de l'énergie turbulente dans une conduite cylindrique

❖ Les figures (VI.5) représentent la variation du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente (ε) en fonction de y , pour les deux modèles. L'allure générale des deux courbes est identique sauf que celle de notre modèle est plus éloignée de l'axe des coordonnées. On peut dire également ici que les fonctions de parois sont responsables de ce décalage entre les deux modèles.



b) Résultats obtenus



b) Résultats de M. Jeager

Figure VI. 5 Profil du taux de dissipation de l'énergie turbulente dans une conduite cylindrique

A travers les résultats obtenus, nous pouvons dire que, notre modèle numérique donne de bons résultats pour les écoulements laminaire et turbulent dans une conduite cylindrique.

II ECOULEMENT TURBULENT DANS UN CONDUITE NON CYLINDRIQUE

TYPE CONVERGENT- DIVERGENT

a) Caractéristiques de la conduite

Dans cette application, nous avons déterminé la variation de la vitesse, l'énergie cinétique turbulente (K), le taux de dissipation de cette énergie (ϵ), et la viscosité turbulente dans une conduite non-cylindrique de type convergent-divergent, dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Le diamètre intérieur $D_{int} = 0.25$ m
- Le diamètre extérieur $D_{ext} = 1.0$ m
- La longueur $L = 1$ m
- Le maillage $n \times m = 80 \times 80$
- $\text{tg}\alpha = \beta = 0.75$

Les conditions initiales : $U_0 = 0.1$ m/s.

$$\epsilon_0 = 0.00135$$

$$K_0 = 0.0045, \text{Re} = 10\,000$$

b) Résultats et Analyse

❖ La figure (VI. 6) représente le profil de la vitesse en fonction de la distance à la paroi.

Nous remarquons deux pics, l'un est positif et l'autre est négatif.

Le premier pic est dû au choix de la fonction de paroi, le deuxième signale la présence de reseau de recirculation près de la région de paroi, résultat conforme aux études déjà faites [1, 2,3 et 16].

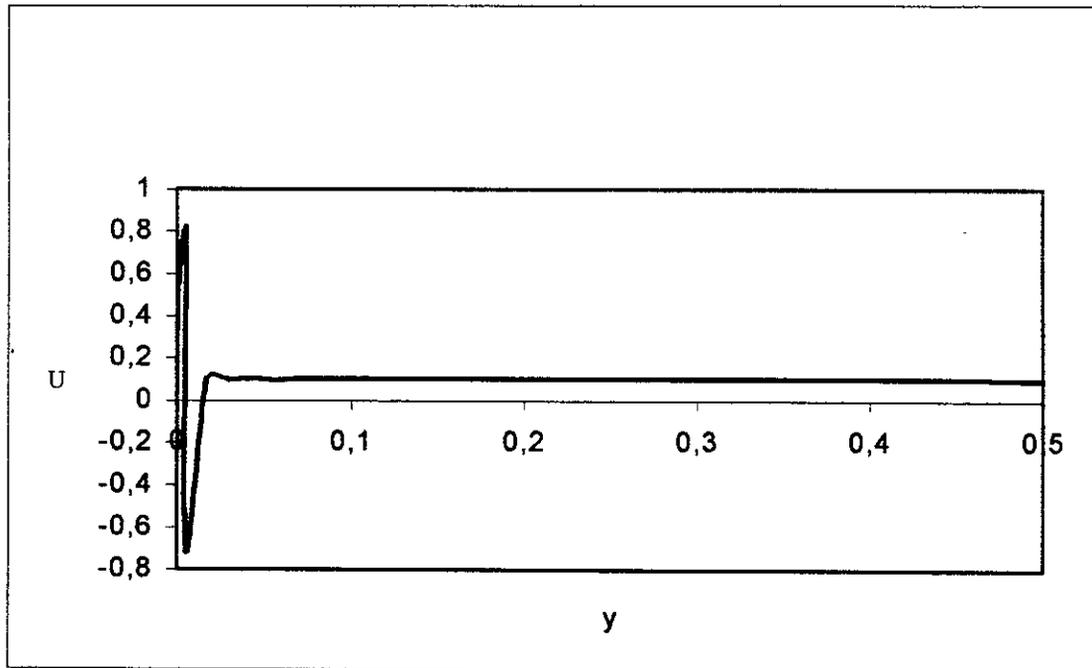


Figure VI. 6 Profil de la vitesse U dans une conduite à motif périodique à $x = 0.5$

❖ La figure (VI. 7) donne la variation de la vitesse en fonction de x à l'axe

Nous observons que, la vitesse est positive, on remarque également, des perturbations à $x = 0.5$ et $x = 1.0$. Ces perturbations sont dues à la discontinuité de la fonction géométrique de la paroi de la conduite.

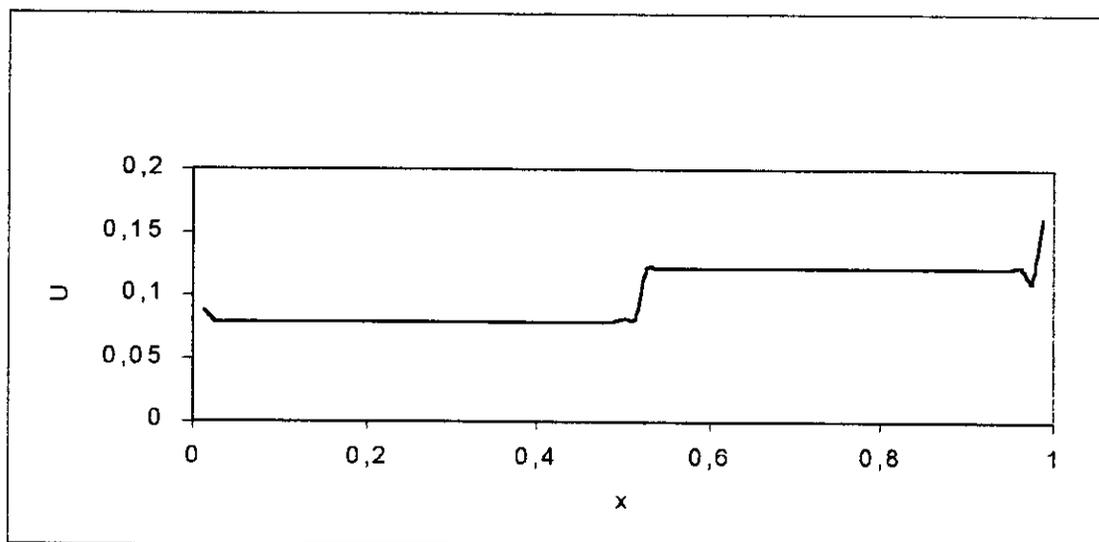
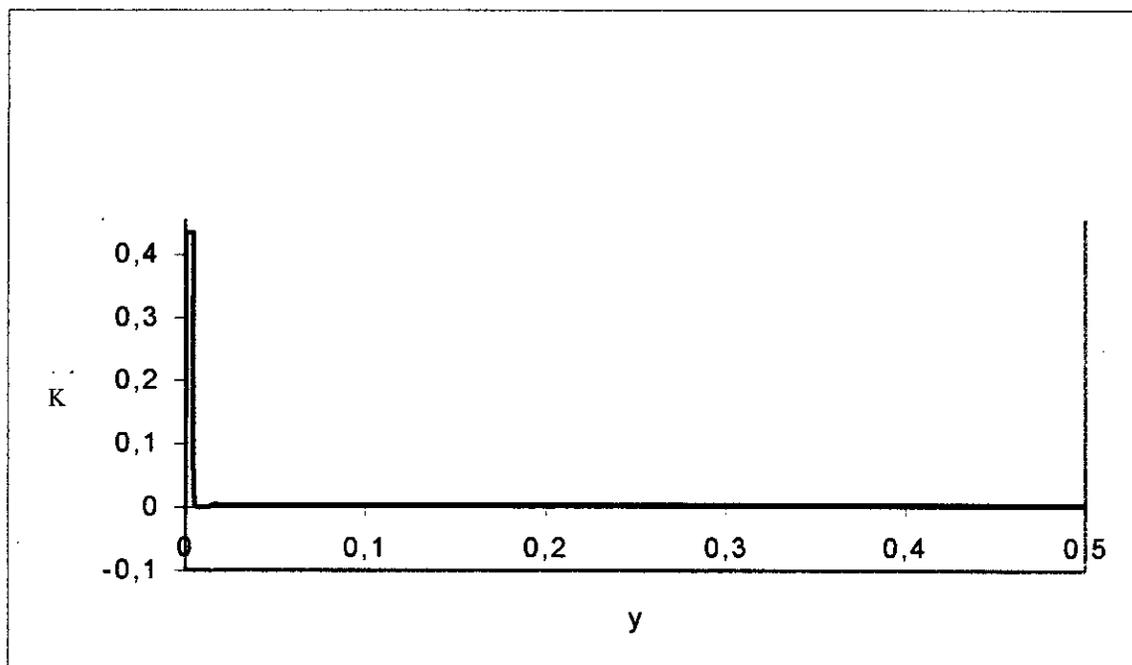


Figure VI. 7 Profil de la vitesse U dans une conduite à motif périodique à $y = 0.50$

❖ La figure (VI. 8) montre la distribution de l'énergie cinétique turbulente (k) en fonction de la distance à la paroi (y). Nous remarquons qu'elle est maximale à la fin de la région de paroi (écoulement pleinement développé), puis, elle se stabilise dans le reste de la conduite. Ceci nous a conduit à tracer la variation de l'énergie turbulente (k) en fonction de x .



❖ La figure (VI. 9) représente le profil de l'énergie turbulente en fonction de x .

Nous remarquons une fluctuation à $x = 0,5$, qui est toujours due à la discontinuité de la fonction de paroi de la conduite.

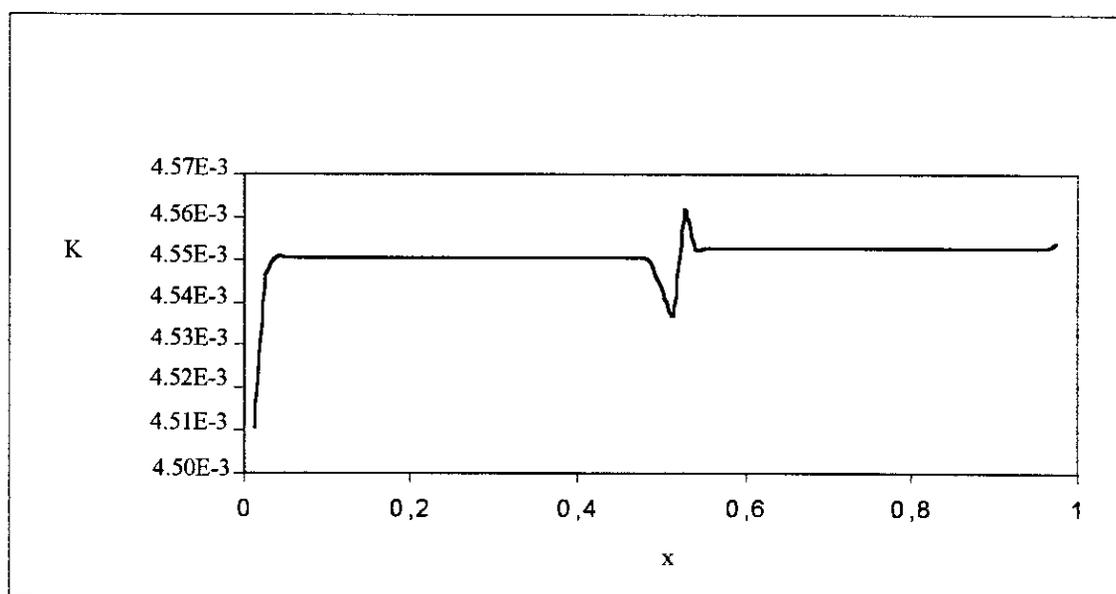


Figure VI. 9 Profil de l'énergie turbulente dans une conduite à motif périodique $y = 0,50$

❖ La figure (VI. 10) donne la variation du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente en fonction de la distance à la paroi. Nous observons un maximum à la fin de la région de paroi, ceci est également dû au fonction de paroi très importante

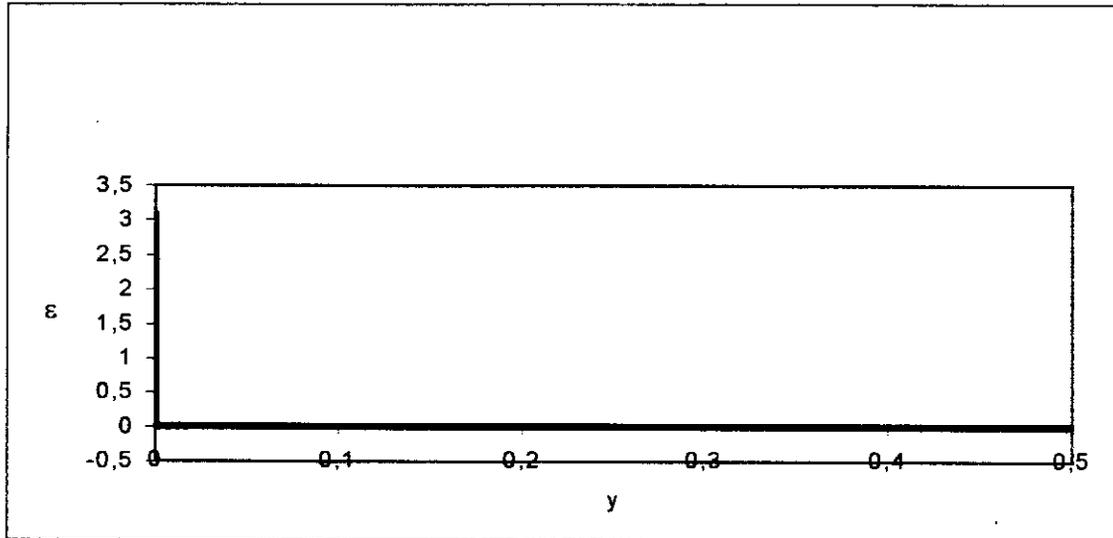


Figure VI. 10 Profil du taux de dissipation de l'énergie turbulente dans une conduite à motif périodique à $x = 0.5$

❖ La figure (VI. 11) montre la distribution du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente à l'axe. Nous constatons une faible variation de ce paramètre, et la présence d'une perturbation à $x = 0.5$. Ceci est dû également à la discontinuité de la fonction géométrique de la paroi.

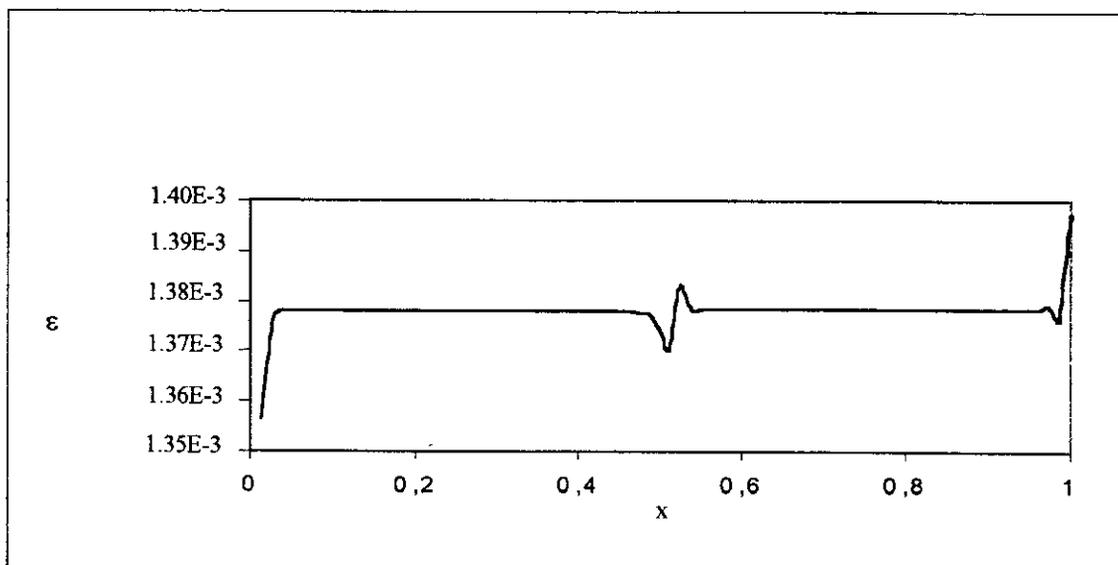


Figure VI. 11 Profil du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente dans une conduite à motif périodique à $y = 0.50$

❖ La figure (VI. 12) représente le profil de la viscosité turbulente en fonction de la distance à la paroi, nous remarquons qu'elle prend une valeur nulle à la paroi puis, elle augmente jusqu'à une valeur maximale a la fin de la région de paroi (commencement de la zone pleinement turbulente), ensuite, elle a tendance à se stabiliser vers l'axe. Ceci nous a conduit à tracer la variation du taux de dissipation (ν_T) en fonction de x .

❖ La figure (VI. 13) donne la variation de la viscosité turbulente en fonction de x à l'axe

Nous observons des perturbations à $x = 0.5$ et $x = 1.0$. Ces perturbations sont dues à la discontinuité de la fonction géométrique de la paroi de la conduite.

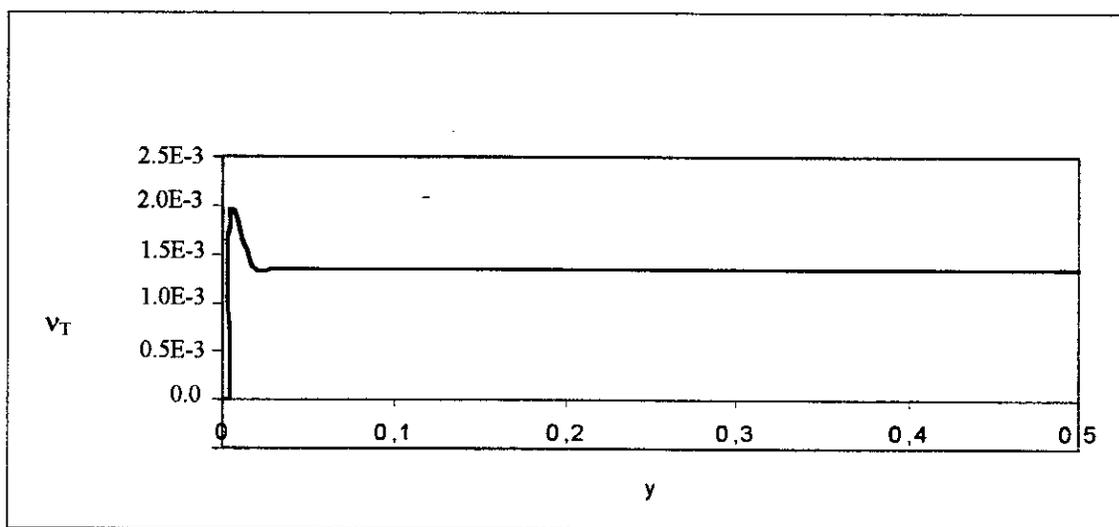


Figure VI. 12 Profil de la viscosité turbulente dans une conduite à motif périodique à $x = 0.50$

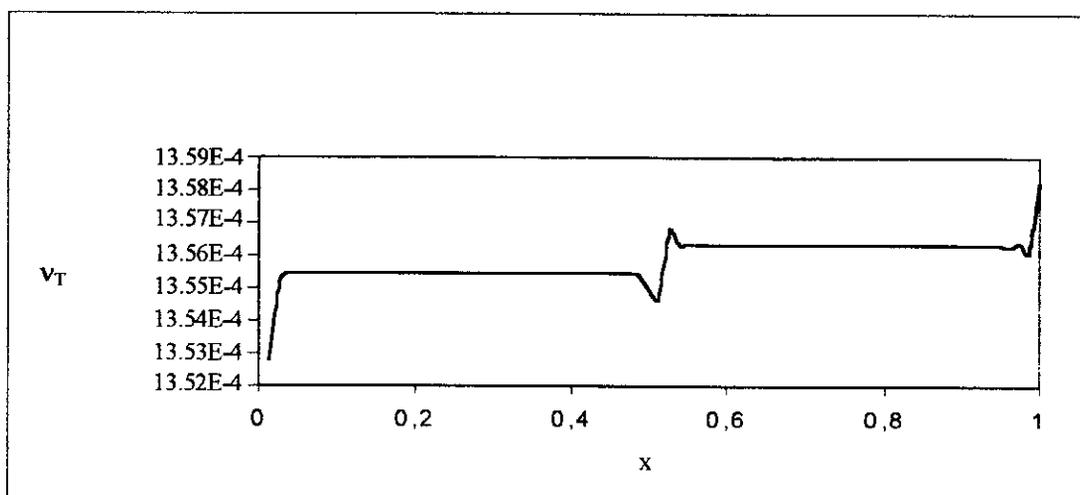


Figure VI. 13 Profil de la viscosité turbulente dans une conduite à motif périodique à $y = 0.50$

III CONCLUSION

Au vu des résultats obtenus ; nous pouvons dire que les fonctions de parois ont une influence très importante ~~sur la modélisation de la turbulence~~ sur la modélisation de la turbulence. Et qu'il y a donc lieu de les modéliser à part.

Conclusion Générale

CONCLUSION GENERALE

Dans le présent travail, nous avons utilisé le modèle $K-\epsilon$ pour étudier et simuler l'écoulement turbulent dans une conduite à motif périodique de type convergent-divergent.

L'adaptation d'une méthode numérique basée sur une transformation non orthogonale de coordonnées, de la méthode de compressibilité artificielle et d'un schéma numérique aux différences finis, nous ont permis la résolution des équations de Reynolds, dont les inconnues sont la vitesse U_i et la pression P .

Nous avons développé un programme, en utilisant comme langage de programmation le **FORTRAN 90**.

Les deux premières applications sont faites sur un écoulement laminaire et turbulent dans une conduite cylindrique, pour valider le modèle.

Les résultats obtenus pour ces deux applications sont très proches des résultats connus.

La dernière application est effectuée sur un écoulement turbulent dans une conduite à motif périodique de type convergent - divergent.

Les résultats obtenus présentent des vitesses négatives dans la région près de la paroi, ce qui signifie l'existence des reaux de recirculation dans cette zone.

Au vu des bons résultats obtenus pour la conduite cylindrique et ceux obtenus pour la conduite non-cylindrique de type convergent-divergent, on peut dire que le modèle $k-\epsilon$ n'est pas un modèle adéquat pour la simulation de la turbulence dans les conduites non cylindrique. Ces résultats sont peut être dus aux choix des fonctions de parois et la discontinuité de la fonction géométrique de la paroi au sommet.

Nous recommandons donc l'utilisation d'autres fonctions de parois. Ou de faire une modélisation à part de ses fonctions de parois.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AIT SAADI L. «Etude numérique d'un écoulement turbulent dans un conduit à motif
&
BERRABAH A. périodique modélisée par A. S. M. » Projet de Fin d'Etudes ENP
Septembre 1997.
- [2] ASAKO Y. «Finite volume solutions for laminar flow and heat transfer in corrugated
&
FAGHRI M. duct». Journal of Heat Transfer, August 1987, volume.09/627.
- [3] ASAKO Y. «Heat transfer and pressure drop characteristics in a corrugated duct with
&
FAGHRI M. rounded corners ». Journal of Heat Mass Transfer, Volume 31.N°6, 1988.
&
NAKAMURA H.
- [4] P. CHASSAING «Turbulence en mécanique des fluides ». Cours ENSEEIHT, 1991.
- [5] CHIENG K. Y. « Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-
number turbulence model ». A.I.A.A. 80-0134R, Janvier 1980.
- [6] COUSTEIX J. «Turbulence et couche limite». CEPADUES, Septembre 1989.
- [7] DELANNOY C. «Programmer en fortran 90». EYROLLES 1991.
- [8] DJERBOUA A. «Simulation numérique d'un écoulement laminaire dans des conduites non
&
LENOUAR F. cylindriques a motif périodique». Projet de Fin d'Etudes ENP juin 1996.
- [9] FAVRE A. «Turbulence en mécanique des fluides» Gautier – Villars, Paris, 1988.
&
KOVASZNAY L.
- [10] FLETCHER C. «Computational techniques for fluid dynamics».
- [11] HASSAINE A. «Etude du champ des vitesses et du transfert thermique dans un canal à paroi
&
sinusoïdale soumises à un flux de chaleur de densité constante »
Int. Journal Heat Mass Transfer, Vol 37 n°5 717-725 1994.
- DAGUENET M.
&
MENGY G.

- [12] JAEGER M. «Simulation numérique d'écoulements turbulents incompressibles et isothermes de fluides newtoniens par éléments finis tridimensionnels»
Thèse d'état Compiègne juin 1990.
- [13] LESIEUR M. «La turbulence développée». 1982.
- [14] LESIEUR M. «La turbulence». Presse Universitaire de Grenoble 1994.
- [15] MOUHAMMADI B. «Analysis of the K- ϵ turbulence model», Massons, 1994
&
PIRONNEAU O.
- [16] PATANKAR S.V. «Fully developed flow and heat transfer in ducts having streamwise -
&
periodic variations of cross-sectional area ». Transactions of the
LIU C. H ASM 180/ volume 99, may 1977.
&
SPARROW E. M.
- [17] R. SCHIESTEL «Modélisation et simulation des écoulements turbulents», Hermès,
Paris, 1993.