

7/98

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Ecole Nationale Polytechnique
Département d'hydraulique

*Mémoire de fin d'études
pour l'obtention du diplôme
d'ingénieur d'état*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

THEME

**ANALYSE D'UN ECOULEMENT
INSTATIONNAIRE EN 2D
"DAM BREAK"**

Proposé par:

Mr.O.BELHADJ

Etudié par :

Mr.R. ABDI
Mr.N.SEMANI



Promotion sept,98

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



DEDICACES



- à l'esprit de ma chère mère
- à mon père
- à mes frères et sœurs
- à mes neveux et nièces : Adnane ,chouchou, et le petit Moufdi
- à tous mes ami (es)
- à toi aussi Nadir.



Je dédie ce modeste travail

Redouane (Reda)

Je dédie ce modeste travail :

- à ma très chère mère et mon père.
- à mes frères REDHA, ALLEL, et mes chères sœurs.
- à ma tante.
- à mes petites nièces AMINA et MANEL.
- à mes très chers amis M 'HEND, MOHAMED et ABDESSELAM .
- à tous mes autres amis.

S. Nadir

Remerciement

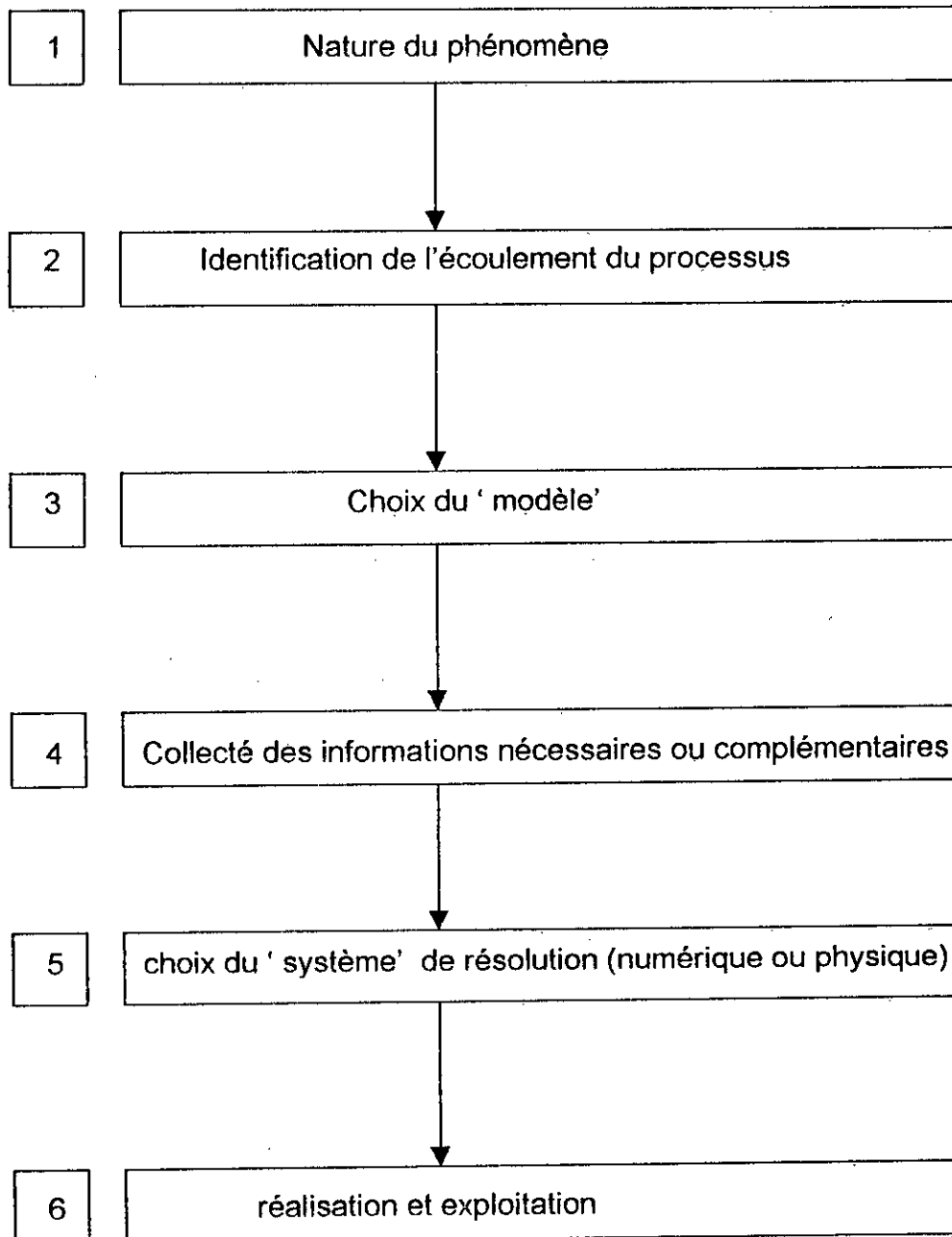
Nous remercions vivement notre promoteur Mr .O.BELHADJ pour nous avoir proposé le sujet de notre thème . Nos remerciements vont également à ceux qui ont contribué à notre formation au département d'hydraulique et en particulier Mlle .BEN MAAMAR le chef de département pour ces précieux conseils durant les années d'étude .

Nous tenons à remercier l'ensemble des membres de jury de l'honneur qu'ils nous font en acceptant de se présenter à la soutenance .

De part ces quelques lignes , nous leurs exprimons notre sincère gratitude.

Schéma d'utilisation : (1)

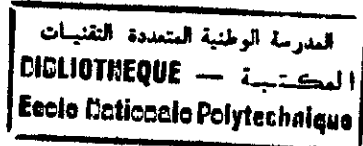
- Dans cette thèse, l'étude est amenée à suivre la conséquence classique suivante :



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE



HISTORIQUE

CHAPITRE I : GENERALITES

I.1 - INTRODUCTIONS	03
I.2 - CLASSIFICATIONS DES ECOULEMENTS	04
I.2.1 - VARIATION DU TEMPS	04
I.2.2 - VARIATION DE DISTANCE	05
I.2.3 - L'EFFET DE GRAVITE	06
I.2.4 - L'EFFET DE LA VISCOSITE	07
I.3 - ECOULEMENT TRANSITOIRE	08
I.4 - ETAT BIBLIOGRAPHIQUE	09

CHAPITRE II : MODELISATION MATHEMATIQUE

II.1 - DEFINITION	18
II.2 - EQUATIONS FONDAMENTALES	19
II.2.1 - HYPOTHESES	20
II.2.2 - MISE EN EQUATION	21
A) EQUATION DE CONTINUITE	22
B) EQUATION DYNAMIQUE	23
II.3 - FORME CONSERVATRICE DU SYSTEME D'EQUATION DE SAINT- VENANT	28
II.3.1 - EQUATION DE CONTINUITE	28
II.3.2 - EQUATION DYNAMIQUE	28
II.4 - CONDITIONS INITIALES, CONDITIONS AUX LIMITES	30
II.4.1 - CONDITIONS INITIALES	30
II.4.2 - CONDITIONS AUX LIMITES	31

CHAPITRE III : RESOLUTION PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

III.1 - DEFINITION	35
--------------------------	----

III.2 - SCHEMA EXPLICITE	38
III.3 - SCHEMA IMPLICITE	38
III.4 - LA CONSISTANCE, LA CONVERGENCE ET LA STABILITE D 'UN SCHEMA	
III.4.1 - LA CONSISTANCE	39
III.4.2 - LA CONVERGENCE	39
III.4.3 - LA STABILITE	39
III.5 - DIFFERENTS TYPES DE SCHEMAS NUMERIQUES	39
III.6 - CHOIX DU SCHEMA NUMERIQUE	40
III.6.1 - DESCRIPTION DES SCHEMAS DE TYPE PREDICTEUR- CORRECTEUR	40
III.6.2 - SCHEMA DE MAC-CORMACK	41
A) PROPRIETES DU SCHEMA	42
B) APPLICATION DU SCHEMA DE MAC-CORMACK AUX EQUATIONS DE SAINT-VENANT	44
III.7 - STABILITE DU SCHEMA	47
III.8 - ORGANIGRAMME	49
CHAPITRE IV : TECHNIQUE DE PROGRAMMATION ET PRESENTATION DES RESULTATS	
IV.1 - TECHNIQUE DE PROGRAMATION	51
IV.2 - PRESENTATION ET INTERPRETATION DES RESULTATS	52
IV.2.1 - CARACTERISTIQUES PHYSIQUES ET GEOMETRIQUES	52
IV.2.2 - VARIATION DE LA HAUTEUR ET DE LA VITESSE	54
IV.2.3 - INFLUENCE DE LA PENTE DU FOND	64
IV.2.4 - INFLUENCE DU COEFFICIENT DE RUGOSITE DE MANNING.....	66
IV.2.5 - INFLUENCE DE LA HAUTEUR D'EAU INITIALE	69
IV.3 - CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS	71

CONCLUSION GENERALE

ANNEXE :

BIBLIOGRAPHIE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

HISTORIQUE : (2,4)

L'hydraulique est une science très importante qui date depuis millénaires car elle commande toutes les utilisations de l'eau, en plus, plusieurs civilisations ont traité ce domaine, tel que les traces trouvées en Egypte, en Inde, en Chine...etc. L'œuvre de ces anciens constructeurs a permis à ceux qui ont pris la suite de développer la science de l'hydraulique.

Cela conduit après invention et découvertes faite par des ingénieurs grecs et romains à une renaissance de cette science qui a toujours traité les lois régissant la stabilité et l'écoulement des liquides et des problèmes posés par l'utilisation de l'eau

Enfin, l'hydraulique fit son apparition complète après retardement au moment où la méthode expérimentale apparaît dans le domaine de la mécanique, et c'est fut qu'aux 17^{ème} siècle qu'apporté l'amélioration des outils mathématique et les notions de mécanique que cette science se développa.

Parmi les principaux savants qui attribuèrent aux développements de l'hydraulique au cours de ces trois derniers siècles :

18^{ème} siècle : BERNOULLI, EULER, LAGRANGE, LAPLACE....

19^{ème} siècle : POISEUILLE, DUPUIT, DARCY....

20^{ème} siècle : KAARMEN, PRANDTL, BUCKINGHAM....

Actuellement, l'hydraulique moderne ne tient pas tant dans de nouvelles découvertes que dans la vérification, l'assimilation et le développement des découvertes déjà faites, et c'est à propos de ces mesures que les chercheurs actuels et futurs devront chercher à dominer.

La construction des barrages étant connue depuis l'antiquité, ces œuvres ont attirer beaucoup l'intention des chercheurs pour leur amélioration, car plusieurs sont connus pour s'être rompus dans le siècle passé.

Au cours des 175 dernières années plus de 600 ruptures ou accidents de barrages ont été publiés dans le monde, c'est pour cela qu'au deuxième congrès de la commission international des grands barrages, qui s'est tenu à MONTREAL en 1970, furent présenté 4 rapports dont l'un concernant les pertes en vies humaines et les dommages matériels qui pouvaient résulter des inondations dues à la mauvaise exploitation des ouvrages.

Quoi qu'il en soit, dans de nombreux pays les ingénieurs portent une attention croissante aux études de détermination des submersions à l'aval des barrages en cas de rupture, plus connu sous le nom de "DAM-BREAK".

CHAPITRE 1:
CHAPITRE 1:
CHAPITRE 1:

GENERALITEES

CHAPITRE I

GENERALITES : (3,15,21,22)**I.1. INTRODUCTION :**

La construction d'un barrage ne se réalise qu'après avoir fait des calculs importants sur les coefficients de sécurité, ainsi leur construction est minutieusement surveillée, ors leur rupture n'est pas impossible. IL est donc indispensable, avant de construire un ouvrage, de calculer l'onde de submersion qui résulterait de l'effacement éventuel, pour vérifier si elle est compatible avec les vocations actuelles et futures des vallées et des industries - surtout nucléaires - situées en aval, et pour prévoir un plan d'alerte aux populations si nécessaire.

Dans notre cas, il s'agit d'abord de modéliser le phénomène d'hydraulique et ensuite de le traiter par une méthode numérique, qui puisse rendre compte de manière satisfaisante les caractéristiques de ce dernier.

L'équation de Saint-Venant subsiste pour mieux comprendre le phénomène physique avec des conditions initiales et aux limites appropriées.

La méthode numérique aux différences finies par formulation explicite de MAC-CORMACK nous permettra de résoudre ce problème. Une telle méthode

permet d'apprécier l'importance du danger dû à la rupture et d'estimer si une étude plus complète à l'aide d'un modèle s'avère nécessaire.

Notre travail consiste à étudier les écoulements dans les canaux à surface libre, donc on distingue que la pression qui y règne est la pression atmosphérique. De tel comportement nous oblige à faire un choix de type d'écoulement à traiter.

I.2 CLASSIFICATIONS DES ECOULEMENTS :

Les écoulements définis comme étant un mouvement d'un fluide ou d'un corps visqueux qui s'écoule, sont classés de façon générale comme suit :

I.2.1 _ La variation du temps :

_ Ecoulement stationnaire :

il est dit stationnaire si les différents paramètres tel que la vitesse, la hauteur, ne varient pas dans le temps en grandeur et direction (fig.I.1.).

_ Ecoulement instationnaire (transitoire) :

il est dit instationnaire si ces paramètres varient dans le temps en grandeur et direction (fig.I.2.).

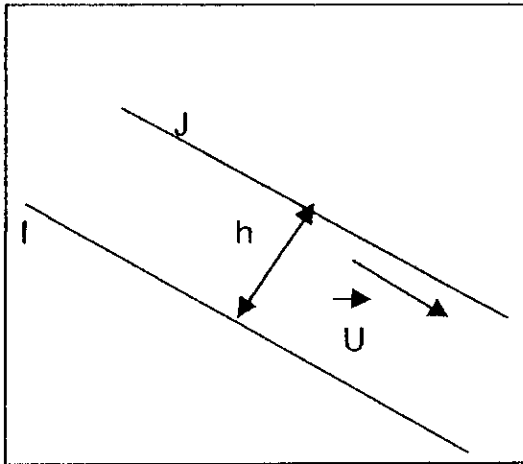


fig.I. 1 :
écoulement stationnaire.

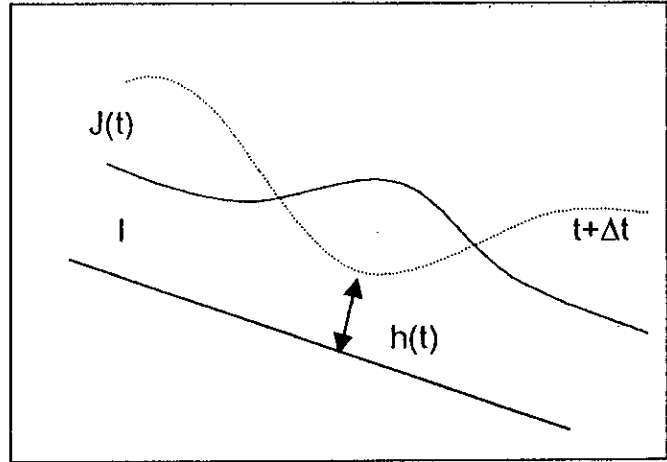


fig.I. 2 :
écoulement instationnaire.

I : pente du fond du canal.

J : pente de la surface libre.

I.2.2 _ La variation de distance :

_ Ecoulement uniforme :

Est celui dont les paramètres sont invariables dans les diverses sections du canal (fig.I.3.a.), dans le cas contraire :

_ Ecoulement non uniforme ou varié (fig.I.3.b.) : On peut alors avoir un :

* Ecoulement graduellement varié (fig.I.3.b.1.).

* Ecoulement rapidement varié (fig.I.3.b.2.).

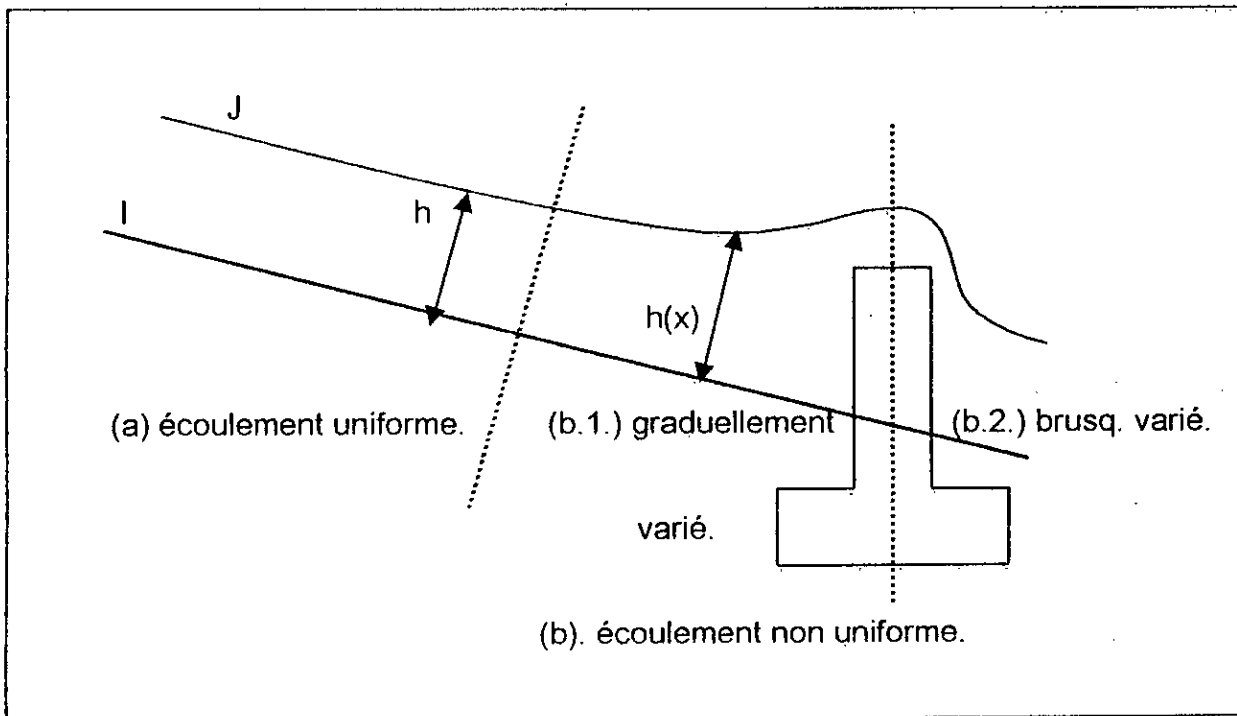


fig.I. 3 :
schéma des écoulements variables dans l'espace.

1.2.3 _ L'effet de gravité sur l'écoulement à surface libre :

_ Cette dernière est représentée par le nombre de froude qui est égale au rapport des forces d'inerties aux forces de gravité :

$$F = \frac{w}{\sqrt{g \cdot h}}$$

w : vitesse d'écoulement en m/s.

g : accélération de la pesanteur en m/s².

h : hauteur hydraulique en m.

Cela conduit à trois régimes :

si $F = 1$ ($w = (g \cdot h)^{1/2}$) \longrightarrow écoulement critique.

si $F > 1$ ($w > (g \cdot h)^{1/2}$) \longrightarrow écoulement supercritique.

si $F < 1$ ($w < (g \cdot h)^{1/2}$) \longrightarrow écoulement subcritique ou fluvial.

Notons aussi que $(g \cdot h)^{1/2}$ représente la célérité de l'onde gravitaire qui apparaît dans le canal lors d'un changement local dans la profondeur de l'eau.

I.2.4 _ L'effet de la viscosité :

_ L'effet de viscosité étant représenté par le nombre de Reynolds ce dernier sera caractérisé suivant trois intervalles :

$$R_E = \frac{w \cdot h}{\nu}$$

w : vitesse de l'écoulement en m/s.

h : hauteur hydraulique en m.

ν : viscosité cinématique du liquide en mouvement en m^2/s .

ou : $R_E < 500$ \longrightarrow écoulement laminaire.

$R_E > 2000$ \longrightarrow écoulement turbulent.

$500 < R_E < 2000$ \longrightarrow écoulement transitoire.

1.3 ÉCOULEMENTS TRANSITOIR :

L'écoulement définit comme étant instationnaire ou plutôt connu sous le nom d'écoulement transitoire a comme particularité la variation dans le temps des paramètres physiques et géométriques.

Comme on peut en réalité avoir deux sortes d'écoulement :

- _ A surface libre ou
- _ En charge.

Notre étude se portera pour un écoulement transitoire a surface libre, qui peut être classé suivant la variation de la profondeur de l'écoulement dans le temps et dans l'espace.

Cependant on distingue deux catégories :

- _ Ecoulement transitoire graduellement varié.
- _ Ecoulement transitoire rapidement varié

On ne sera donc pas étonné si les écoulements avec surface libre se font par un processus de propagation. L'onde qui se propage le lent de cet écoulement possédera une certaine vitesse de propagation C qui varie avec la profondeur. Cette brusque variation de surface est provoquée par une brusque variation de débit.

I.4 ETAT BIBLIOGRAPHIQUE :

I.4.1 COMMISSION INTERNATIONALE DES GRANDS BARRAGE :(2)

La Commission Internationale des Grands Barrage à constitué un comité pour étudier les risques aux tiers découlants des grands barrages ,son objectif était d'examiner la pratique courante dans ce domaine ,de voir s'il y a lieu de l'améliorer et si possible de faire des propositions constructives par le biais de l'UNESCO pour une approche internationale de ce problème. Donc il cherche à définir la situation existante, en ce qui concerne les mesures prises pour minimiser le risque ainsi que les dispositions prises pour compenser des pertes accidentelles. Pour cela plusieurs questions sont émises :

- Dans votre pays, existe-t-il un classement des barrages en fonction du danger qu'ils font courir aux tiers?
- Des mesures de sécurité contre la possibilité de rupture sont-elles demandées pendant la conception, la construction, et l'exploitation des barrages?
- Existe-t-il des provisions pour l'indemnisation des tiers?
- Si vous avez des barrages construits sur des rivières internationales, quelles sont les accords sur d'éventuelles indemnisations?

I.4.2 CALCULE BIDIMENSIONNEL DE L'ONDE DE LA RUPTURE D'UN BARRAGE :(19)

Vue l'absence d'aucun travail expérimental qui montre l'aspect bidimensionnel de l'onde de submersion de la rupture d'un barrage, permettant la vérification et la calibration du modèle mathématique.

Cette étude vient de terminer une rupture partielle du barrage où ils ont utilisé la méthode des caractéristiques; qui réduit les équations hyperboliques à des équations ayant une seule direction de différentiation.

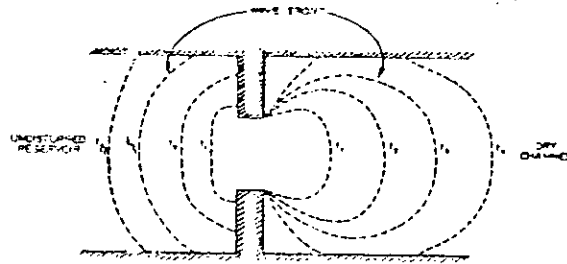


FIG. 1.—Wave Front Propagation for Partially Failed Dam

L'efficacité et la stabilité du modèle mathématique ont été testées par une application et les résultats de la propagation de l'onde sont présentés par la figure ci après:

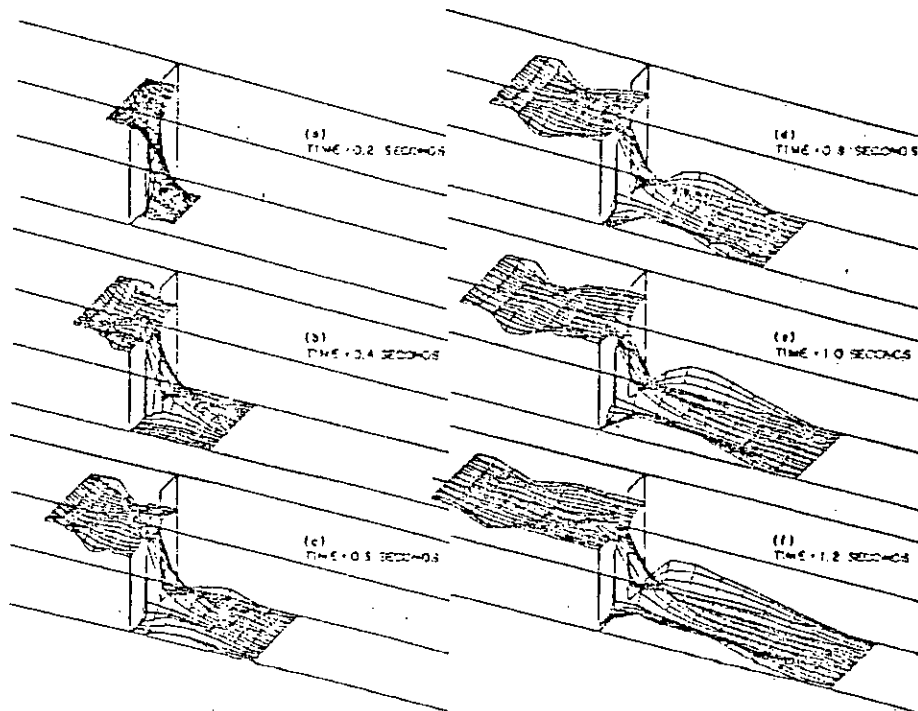


FIG. 6.—Evolution of Free-Surface Configuration; Longitudinal Extent in Each Case = 18 ft; Angles of Rotation for Projections are 25° about z-Axis and -3° about x-Axis

Les mêmes résultats montrent qu'au début, l'onde se propage latéralement selon toute la largeur du canal, puis la propagation se limite à la direction x , donc l'effet bidimensionnel devient de plus en plus faible en s'éloignant de la position de la rupture.

Ils concluent enfin que les modèles unidimensionnels de Dam Break ne peuvent pas simuler le détail de l'écoulement résultant d'une rupture de barrage. Pour ce faire, ce modèle bidimensionnel basé sur la méthode de caractéristique a été mis sous le test pour voir sa capacité en la matière.

Et a été dit que les résultats sont corrects en 2^{em} ordres pour quelques différences observées avec le test expérimental, dues à la considération de la pression hydrostatique en tous points.

Ainsi plus de recherches sont requises pour comprendre le phénomène de l'onde de la rupture et pour le développement du modèle mathématique.

1.4.3. SOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE SAINT VENANT AVEC LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES : SCHEMA DE MAC CORMACK₍₅₎

Cette étude décrit le développement d'un modèle mathématique simulant les équations qui régissent l'écoulement bidimensionnel peu profond "shallow water" en utilisant le schéma amélioré de Mac Cormack.

Pour tester la performance du modèle mathématique deux applications industrielles ont été effectuées : L'onde linéaire et le Dam Break unidimensionnel pour ce dernier qui nous intéresse.

Un obstacle séparant l'eau dans un canal à longueur unitaire où les profondeurs d'eau respectivement en amont et en aval sont h_1 et h_0 avec ($h_1 > h_0$) est enlevé instantanément, cette formulation est supposée pour s'approcher du champ d'écoulement résultant de la rupture catastrophique d'un barrage.

La comparaison entre les résultats obtenus par le modèle numérique de R. Garcia et R. Kahawita et la solution analytique a donné des résultats satisfaisants.

Enfin la simulation d'un général problème bidimensionnel d'un écoulement rapidement varie dans un domaine à limites irrégulières a été présentée pour montrer la performance du modèle dans la réalité et dans les applications industrielles, pour ceci la performance est considérée bonne et l'estimation des coûts paraît plus faible pour un modèle de ce type.

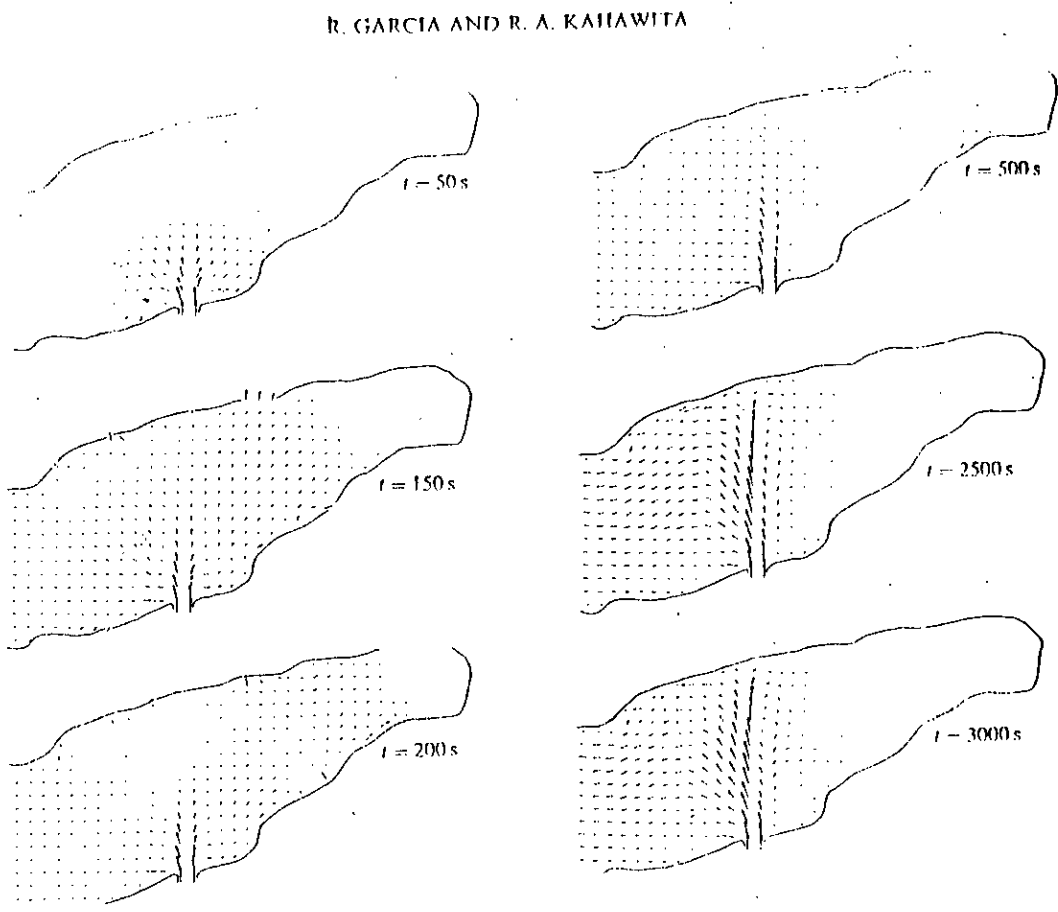


Figure 8. Delancy reservoir: flow patterns. $\Delta t = 10$ s, $\Delta x = \Delta y = 100$ m. (Velocity scale $\rightarrow 1.00$ (m/s))

I.4.4 ANALYSE D 'UN DAM BREAK SUR UNE RIVIERE AMENAGEE : (20)

Dans cette étude la rivière considérée a huit barrages et quatre affluents, si on fait une analyse de rupture, tous les barrages doivent être considérés.

Cette analyse nous éclaire sur le comportement de la rivière dans un contexte de bris de barrage .la crue prend 28.5 heures pour se propager et sa durée près du maximum est d'une semaine, l'influence de la rugosité et l'état du lit de la rivière ont été pris en compte. La volatisation de barrages est instantané ; cette hypothèse étant trop sévère, elle est compensée par le fait qu'on ne tolère pas le déversement sur chaque barrage.

Le modèle utilise est du type explicite "Lax Wendroff" il a supposé le front de l'onde comme une condition variable à l'aval et chaque barrage est considère bris lorsque l'onde arrive à sa structure.

Il a été déduit de cette étude que:

La hauteur de l'onde est proportionnelle à la rugosité du lit et la vitesse de l'onde dépend clairement des conditions du lit.

I.4.5. ANALYSE D 'UN ECOULEMENT INSTATIONNAIRE EN 1D : (22)

Dans cette étude ,ils ont simuler un écoulement transitoire à surface libre , rapidement varie, résultant d'une rupture totale et instantanée d'un barrage (Dam Break) dans un canal rectangulaire large et dans des canaux ayant des sections transversales de formes différentes .

L'étude est unidimensionnelle et a montrer l'influence de certain paramètre sur l'écoulement tel que :

La pente du fond, le coefficient de rugosité et la hauteur initiale de l'eau dans le réservoir (barrage).

Les résultats de cette étude ont été comparés partiellement a des résultats obtenus par V.Bellos et S.G.Sakkas, c' est à dire ils ont comparé seulement l'influence du coefficient de Manning et aux résultats expérimentaux de "Water Way Experiment" W.E.S (U.SA).

Ils ont trouvé lors de cette étude que:

Pour les différentes sections transversales la vitesse varie peu en fonction du temps et que la diminution de la hauteur est proportionnelle à la pente du canal et la variation de la hauteur en fonction du temps est indépendante de la hauteur d'eau initiale quel que soit la forme de la section transversale du canal.

I.4.6. CENTRE TECHNIQUE DU GENIE RURAL DES EAUX ET DES FORETS : (3)

En premier lieu ,ils ont songé à réaliser un modèle réduit représentant les différents caractéristiques d'une vallée ainsi que du barrage(ce dernier sera remplacer par une plaque métallique que l'on soulève brutalement) ,afin de pouvoir réaliser les mesures des hauteurs d'eau et des vitesses ,par ailleurs ces méthodes leur présente de sérieux inconvénients :

- L'encombrement du modèle nécessite l'emploi d'échelles distordues.
- Le prix des modèles est élevé.
- IL est délicat de présenter une rupture instantanée.
- La validité du modèle réduit n'est pas assurée ,en effet on ne domine pas mieux les lois de similitudes que les équations de Saint-Venant.

Cependant ,ils suggèrent une étude mathématique du phénomène est cela en émettant des hypothèses sur :

La rupture : qui est supposée instantanée, cette hypothèse semble ,si non réaliste, du moins prudente dans la grande majorité des cas .

Description de vallée : l'écoulement est unidimensionnel le long de l'axe de la vallée, son modèle mathématique permet de diviser la section de la vallée. la propagation de l'onde de submersion peut être calculée pour une vallée sèche ou dans le cas de concomitance entre une crue et la rupture de l'ouvrage, pour la vallée déjà inondée.

Frottement : toutes les pertes de charge sont prises en compte globalement sous la forme d'un coefficient de frottement (Manning-Strickler).

Écoulement : à l'amont de la zone frontale les hypothèses usuelles de l'hydraulique à surface libre sont respectées, l'écoulement est régi par les équations de Saint-Venant à une dimension :

$$\frac{\delta S}{\delta t} + \frac{\delta Q}{\delta x} = 0$$

$$\frac{\delta Q}{\delta t} + \frac{\delta QV}{\delta x} + g s \frac{\delta Y}{\delta x} = -g s J$$

en considérant un canal uniforme de pente nulle et sans frottement, les équations de Saint-Venant s'écrivent alors :

$$\frac{\delta S}{\delta t} + \frac{\delta Q}{\delta x} = 0$$

$$\frac{\delta Q}{\delta t} + \frac{\delta QV}{\delta x} + g s \frac{\delta Y}{\delta x} = 0$$

après amélioration et changement de variable, ils aboutissent au système suivant :

$$\chi \frac{\delta Y}{\delta t} + S \frac{\delta V}{\delta x} + V \chi \frac{\delta y}{\delta x} = 0$$

$$\frac{\delta V}{\delta t} + V \frac{\delta V}{\delta x} + g \frac{\delta Y}{\delta x} = 0$$

tel que : $\chi = \delta S / \delta y$

la solution numérique permet de poursuivre les calculs sur de très longues distances ce modèle comporte:

- Module d'initialisation.
- Module de résolution des équations de Saint-Venant.

la méthode numérique employée est une méthode explicite aux différences finies de type Lax-Wendroff.

Après discretisation de l'abscisse avec un pas Δx et du temps avec un pas Δt les dérivées partielles sont représentées sous forme de différences.

$$\frac{\delta \rho}{\delta x} = \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{\Delta x}$$

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} = \frac{(\rho_{i+1}^{n+1} - \rho_{i+1}^n) + (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n)}{2\Delta t}$$

la condition à la limite amont donne les valeurs du débit qui sont calculées explicitement dans une première étape, en suite toutes les inconnues du temps $t+\Delta t$ sont calculées à partir de cette première estimation. la condition à la limite aval est prise en compte par le module d'avancer du front et intervient avec un pas de temps Δt .

Cette méthode est stable si le pas de temps respecte la condition de courant

$$\Delta t < \Delta x / (|V| + C)$$

Comme conclusion ,les hypothèses utilisées permettent de dégager quelques remarque utiles à la description du phénomène ,en particulier que la valeur du débit pour une valeur donnée de x ne dépend que très peu de la géométrie. de plus les valeurs obtenues du temps de vidange et de la vitesse correspondante ,nous permettent de mieux appréhender la rapidité du phénomène.

CHAPITRE 2:

MODELISATION
MATHEMATIQUE

CHAPITRE II

MODELISATION MATHEMATIQUE : (8,11,22,21)

"Sachant que l'atmosphère en général génère des écoulements dont la structure est bidimensionnelles, ceci revient à dire qu'après intégration suivant une direction privilégiée qui est en générale la direction verticale, ces écoulements se laissent décrire par des équations fonctions de deux variables spatiales correspondant aux deux dimensions restantes (horizontales la plupart du temps). Elle constitue cependant un stade beaucoup plus complexe que celui des écoulements filaires unidimensionnels, et qui ne peut être approché qu'après une maîtrise parfaite des écoulements filaires. "

M. HUG

II.1 _ DEFINITION :

Devant la complexité des mécanismes et concepts, régissant l'hydraulique, il s'avère difficile et parfois voire impossible de déterminer directement les caractéristiques hydrodynamiques des différents types d'écoulements sans avoir recours à la technique de simulation, soit par un modèle physique soit par un modèle mathématique, ce dernier est donc une schématisation de la réalité qui permet de calculer les grandeurs intéressant l'ingénieur.

Les modèles mathématiques «équations» traduisant la variation des vitesses d'un écoulement en fonction des différents variables mises en jeu dans un système donné, n'ont pu connaître un grand essor et une large utilisation que lorsque des moyens de calcul puissants ont fait leurs apparitions en l'occurrence les ordinateurs, donc les modèles mathématiques, numériques constituent un moyen moderne de simulation relativement rapide qui permet de traiter des problèmes pratiques, impossible à aborder par le calcul manuel.

II.2 EQUATIONS FONDAMENTALES : (9,21)

Pour nous permettre de déterminer, les champs de vitesses et de profondeur en tout point du domaine physique étudié lors d'un écoulement non permanent, nous allons développer ci après un modèle mathématique qui nous permettra de simuler le phénomène que nous nous proposons d'étudier dans ce mémoire.

Ce model mathématique bidimensionnel régissant les écoulements à surface libre non permanent, écrit sous forme d'équation appelée équation de SAINT-VENANT , découle des principes fondamentaux de la mécanique à savoir :

- Le principe de conservation de la masse qui conduit à l'équation de continuité.

- Le principe de conservation de la quantité de mouvement qui conduit à l'équation dynamique.

et ceci se fait en considérant un volume de contrôle fini et en s'appuyant sur des hypothèses.

Rappelons aussi que les équations hyperboliques de SAINT-VENANT, proviennent de l'intégration sur la profondeur de l'équation tridimensionnelle de NAVIER-STOKES, en eau peu profonde.

II. 2.1 _ HYPOTHESES : (1,15,16)

- Liquide incompressible.
- Distribution hydrostatique des pressions.
- Répartition uniforme des vitesses transversales.
- Faibles pentes du fond du canal.
- Les pertes de charge générales sont les mêmes que dans le cas d'un mouvement permanent et uniforme de même profondeur.
- Accélération de Coriolis négligée.
- Les contraintes tangentielles au fond du canal sont prépondérantes sur les autres contraintes.
- Une rupture totale est instantanée d'un barrage.

II. 2.2 _ MISE EN EQUATION :

L'espace étant rapporté à un trièdre orthonormé XYZ on se propose donc d'étudier l'écoulement d'une masse liquide à surface libre.

Les inconnues à déterminer en chaque point en fonction du temps sont :

⇒ h : le tirant d'eau.



⇒ W : la vitesse d'écoulement.

Considérons un prisme élémentaire de base $\Delta x, \Delta y$ et de hauteur h (fig.II.1) :

Ou : Z_F : cote du fond.

Z : cote de la surface libre.

h : tirant d'eau.



W : vecteur vitesse.

u : composante du vecteur vitesse W dans la direction X.

v : composante du vecteur vitesse W dans la direction Y.

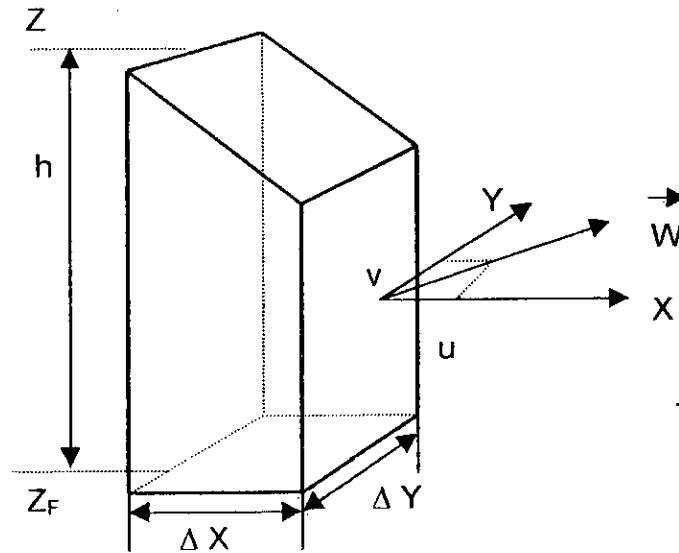


fig.II.1

A) _ EQUATION DE CONTINUITÉ : (1,6,15)

Elle exprime la liaison qui existe entre le mouvement des molécules voisines, donc, s'intéresse à la seule cinématique de l'écoulement sans chercher à connaître les forces qui lui donnent naissance.

Cette équation fondamentale résulte du principe de conservation de la masse qui dit que dans un volume donné, le fluide ne peut être ni créé ni disparu. La relation mathématique correspondante s'obtient en écrivant que l'accroissement de volume élémentaire est dû à la différence des débits qui y pénètrent et qui en sortent.

Donc la variation de masse :

→
 - Suivant l'axe des X est : $[\rho \cdot u \cdot h(x, y, t) - \rho \cdot u \cdot h(x+\Delta x, y, t)] \cdot \Delta y \cdot \Delta t$

→
 - Suivant l'axe des Y est : $[\rho \cdot v \cdot h(x, y, t) - \rho \cdot v \cdot h(x, y+\Delta y, t)] \cdot \Delta x \cdot \Delta t$

et la masse stockée sera :

$$\Delta h \Delta x \Delta y = [u h(x, y, t) - u h(x+\Delta x, y, t)] \Delta y \Delta t + [v h(x, y, t) - v h(x, y+\Delta y, t)] \Delta x \Delta t$$

En divisant par $\Delta x \Delta y \Delta t$ et en faisant tendre ces grandeurs vers zéro on obtient l'équation (1) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (u h)}{\partial x} + \frac{\partial (v h)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

B) _ EQUATION DYNAMIQUE : (4,6,15)

Elle s'appuie sur les relations connues entre les forces (pesanteur) qui provoquent l'écoulement et celles (inertie, viscosité) qui le freinent.

Elle résulte du principe de la conservation de la quantité de mouvement qui stipule que les forces extérieures sont en équilibre avec la force d'inertie spécifique.

$$\sum E_{EXT} = \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{W} \cdot \vec{W}_n d\Gamma$$

Ω : volume du prisme.

Γ : surface du prisme.

E_{EXT} : représente les forces extérieures (par unité de masse).

- En projetant sur l'axe des X on obtient :

$$\underbrace{-u\Delta x\Delta y h|_t + u\Delta x\Delta y h|_{t+\Delta t}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{u^2\Delta y\Delta t h|_x + u^2\Delta y\Delta t h|_{x+\Delta x} - vu\Delta x\Delta t h|_y + vu\Delta x\Delta t h|_{y+\Delta y}}_{\textcircled{2}}$$

- En projetant sur l'axe des Y on obtient :

$$\underbrace{-v\Delta x\Delta y h|_t + v\Delta x\Delta y h|_{t+\Delta t}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{v^2\Delta x\Delta t h|_y + v^2\Delta x\Delta t h|_{y+\Delta y} - vu\Delta y\Delta t h|_x + vu\Delta y\Delta t h|_{x+\Delta x}}_{\textcircled{2}}$$

$\textcircled{1}$: variation de la quantité de mouvement pendant l'intervalle de temps Δt .

$\textcircled{2}$: variation de la quantité de mouvement dans la masse fluide.

Donc en divisant par $\Delta x \Delta y \Delta t$ et en faisant tendre la variation de la quantité de mouvement pendant l'intervalle de temps Δt et la variation de la quantité de mouvement dans la masse fluide, vers zéro, on obtient les équations (2) et (3) :

$$E_x = \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial(uv h)}{\partial y} \quad (2)$$

$$E_y = \frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uv h)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2 h)}{\partial y} \quad (3)$$

> Les forces extérieures sont dues à :

- La pression.
- Au poids.
- Aux frottements.

LA PRESSION :

Dans l'hypothèse d'une répartition hydrostatique des pressions, les isobares sont des parallèles à la surface libre.

Soit P la résultante des forces de pression s'exerçant sur le prisme élémentaire :

$$\vec{P} = g \cdot h \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

- La projection suivant \vec{X} et \vec{Y} respectivement donne les équations (4) et (5) respectivement :

$$E_{px} = -g \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (4)$$

$$E_{py} = -g \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (5)$$

Ayant aussi la force de gravité qui a comme composante :

suisant X : $E_{gx} = g \Delta x \Delta y h \sin(\alpha x)$ (5.1)

suisant Y : $E_{gy} = g \Delta x \Delta y h \sin(\alpha y)$ (5.2)

LE POIDS :

Le poids n'intervient pas car il est pratiquement parallèle à Z.

LES FROTTEMENTS :

La force due au frottement est proportionnelle a la surface de contact de l'eau et du fond : le fond étant supposé relativement plat, cette surface est égale, pour le prisme élémentaire, à $\Delta x \Delta y$.

Elle est proportionnelle au carré de la vitesse et dirigé en sens opposé, d'où une expression de la forme (6) :

$$E_F = -C_F \cdot \vec{w} \cdot |\vec{w}| \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (6)$$

Suisant X : $E_{Fx} = - \frac{g n^2}{R_h^{1/3}} u (u^2 + v^2)^{1/2} \Delta x \Delta y$ (6.1)

Suisant Y : $E_{Fy} = - \frac{g n^2}{R_h^{1/3}} v (u^2 + v^2)^{1/2} \Delta x \Delta y$ (6.2)

C_F : coefficient de frottement.

• La loi de CHEZY donne :

$$C_F = \frac{g}{C^2}$$

C : coefficient de CHEZY.

Pour un coefficient de Manning : $C_n = R_h^{1/6} / n$.

n : coefficient de Manning.

R_h : est le rayon hydraulique. Si le canal est rectangulaire :

$$R_h = \frac{S_m}{P_m} = \frac{b \cdot h}{b+2h}$$

et s'il est infiniment large alors : $(R_h \# h)$

Divisant par $\Delta x \Delta y$ et faisant tendre ces quantités vers zéro avant de les sommer, on obtient alors le système d'équation final suivant :

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2 h + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(uvh)}{\partial y} = g h (S_{0x} - S_{Fx}) \quad (7)$$

$$\frac{\partial(vh)}{\partial t} + \frac{\partial(uvh)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2 h + gh^2/2)}{\partial y} = g h (S_{0y} - S_{Fy}) \quad (8)$$

$$S_{F_x} = n^2 \frac{u (u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} \quad (9)$$

$$S_{F_y} = n^2 \frac{v (u^2 + v^2)^{1/2}}{h^{4/3}} \quad (10)$$

$S_0(x, y)$: perte de fond dans les directions (x, y) .

$S_{F(x, y)}$: pente de frottement dans les directions (x, y) .

II.3_ FORME CONSERVATRICE DU SYSTEME D'EQUATION DE SAINT-

VENANT : (5)

Les équations (1), (7), (8) obtenues précédemment peuvent être mises sous forme conservatrice et cela de la manière suivante :

II.3.1_ EQUATION DE CONTINUITÉ :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

II.3.2_ EQUATION DYNAMIQUE :

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \text{suyant l'axe des X :} \end{array} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = E_x$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \text{suyant l'axe des Y :} \end{array} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = E_y$$

Tel que : x et y : sont les coordonnées horizontales.

t : le temps.

A savoir que les variables conservatrices sont :

$$H = h(x, y, t),$$

$$U = u(x, y, t) \quad h(x, y, t),$$

$$V = v(x, y, t) \quad h(x, y, t),$$

$$F = u^2 \cdot h + 1/2 \cdot g \cdot h^2 \quad \Rightarrow \quad F = U^2/H + g H^2 / 2$$

$$G = u v h \quad \Rightarrow \quad G = U \cdot V / H$$

$$S = v^2 \cdot h + 1/2 \cdot g \cdot h^2 \quad \Rightarrow \quad S = V^2 / H + g H^2 / 2$$

Et :

$$E_X(x, y, t) = g \cdot H (S_{0X} - S_{FX})$$

$$E_Y(x, y, t) = g \cdot H (S_{0Y} - S_{FY})$$

Et :

$$S_{FX} = \frac{n^2 \cdot U \cdot (U^2 + V^2)^{1/2}}{H^{10/3}}$$

$$S_{FY} = \frac{n^2 \cdot V \cdot (U^2 + V^2)^{1/2}}{H^{10/3}}$$

II.4_ CONDITIONS INITIALES, CONDITIONS AUX LIMITES :(5,9)

Afin de compléter le système d'équation de SAINT-VENANT, un ensemble de conditions initiales et aux limites doit être précieusement spécifier pour les écoulements à surface libre.

II.4.1_ CONDITIONS INITIALES :

Les valeurs des trois variables h , u et v sont judicieusement spécifiées en tous les points du maillage.

Lors des calculs, les conditions initiales sont, bien sûr, les conditions au temps initial $t=0$ donc de façon générale :

$$A: t = 0; \quad h(x, y, 0) = h_0(x, y)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y)$$

ces trois conditions sont applicables tous le long du champ d'écoulement et au temps $t=0$, cependant nous rajoutons une condition au site du barrage :

$$\left. \begin{array}{l} x = x_D \\ y = y_D \end{array} \right\} \begin{array}{l} h(x_D, y_D, 0) = h(x_D, y_D) \\ u(x_D, y_D, 0) = u(x_D, y_D) \\ v(x_D, y_D, 0) = v(x_D, y_D) \end{array}$$

II.4.2 CONDITIONS AUX LIMITES :

Dans ce cas on distingue :- Les conditions d'amont et d'aval.

- La condition de symétrie.

- Les conditions sur les parois latérales.

CONDITIONS D'AMONT ET D'AVAL :

le tableau ci dessous montre les conditions à adopter dans les écoulements à surface libre en fonction du type d'écoulement choisi et cela dans les différentes dimensions.

Problème considéré	Ecoulement subcritique $F < 1$		Ecoulement supercritique $F > 1$	
	Entrée (amont)	Sortie (aval)	Entrée (amont)	Sortie (aval)
1 Dimension	1	1	2	0
2 Dimension	2	1	3	0

CONDITION DE SYMETRIE :

Afin de déterminer les variables u , v et h au niveau de l'axe d'écoulement, il est préférable d'utiliser une procédure de réflexion qui consiste

à remplacer les valeurs des variables aux points du maillage fictif par les valeurs aux points intérieurs correspondante (figure.II.1).

Dans ce cas les variables du maillage fictif prennent les valeurs suivantes :

$$h(i, j-1) = h(i, j+1)$$

$$u(i, j-1) = u(i, j+1)$$

$$v(i, j-1) = -v(i, j+1)$$

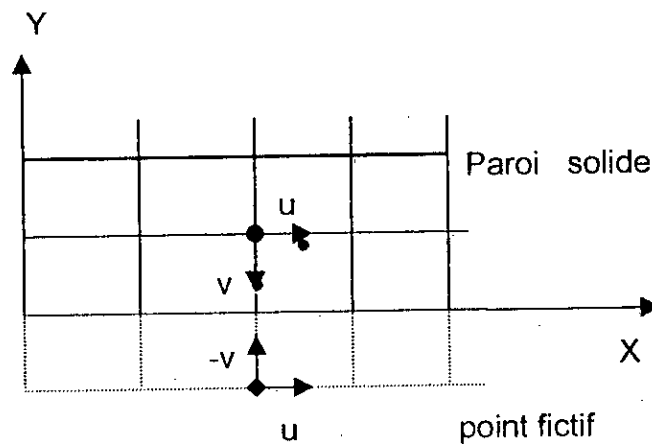


fig .II.1 .

CONDITION SUR LES PAROIS LATÉRALES :

les conditions seront rapporté aussi sur le choix de réflexion qui nous paré appropriée, car elle est très recommandée dans l'analyse des écoulements à travers des canaux à section rectangulaire. La composante u de la vitesse au niveau de la paroi est considérée nulle, en outre la réflexion

antisymétrique sera introduite pour la composante u et v de la vitesse au niveau du maillage fictif (fig.II.2), donc :

$$u(i, j-1) = -u(i, j+1)$$

$$v(i, j-1) = -v(i, j+1)$$

Et une réflexion symétrique sera utilisée pour la hauteur h :

$$h(i, j-1) = h(i, j+1)$$

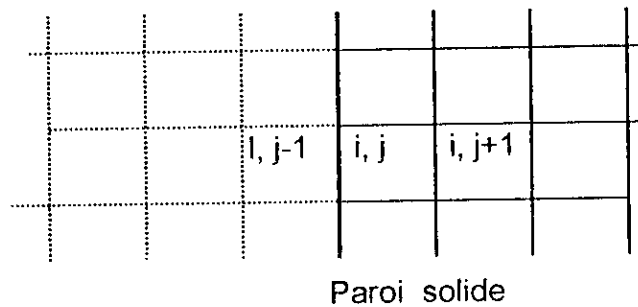


fig.II.2.

La solution de Ritter sera considéré applicable à l'instant de la rupture du barrage et au niveau de son axe.

Ayant l'expression de la surface libre suivante :

$$x(H) = (u_0 - 3(g H)^{1/2} + 2(g H_0)^{1/2})$$

au niveau de la section du barrage : $x=0$, à tout les temps t nous aurons la profondeur: $H_{x=0} = 4/9 \cdot H_0$

Cette profondeur restera constante ,donc indépendante du temps :

De part la vitesse exprimer ci-dessous :

$$U(H) = (u_0 - 2(gH)^{1/2} + 2(gH_0)^{1/2})$$

Sera à $x=0$: $u_{x=0} = 2/3 \cdot (gH_0)^{1/2}$, qui est aussi indépendante du temps.

CHAPITRE 3:

RESOLUTION NUMERIQUE PAR LA METHODE DES DIFFERENCES FINIES

CAPITRE III

**RESOLUTION PAR LA METHODE DES
DIFFERENCES FINIES** (11,12,13,14)

« Les solutions analytiques exactes, qui sont rares en physique, sont élégantes, mais n'ont pas plus de valeur intrinsèque que les solutions numériques. On ne doit pas sous-estimer la facilité et la puissance des méthodes de calcul numérique »

M.A.RUDERMAN
Cours de physique de BERKELEY.

III.1 _ DEFINITION : (7)

IL existe plusieurs méthodes de discrétisation : différences finies, éléments finis, volumes finis...etc. Dans notre présente étude, nous allons appliquer la méthode des différences finies pour résoudre les équations hydrodynamiques de SAINT-VENANT.

Les équations aux dérivées partielles, constituent l'un des plus rapides développements dans toutes les branches des sciences physiques. D'une façon générale, toute méthode de résolution numérique d'un problème continu permettant

d'obtenir une approximation de la solution d'une équation aux dérivées partielles comporte deux étapes :

- Une phase de discrétisation et une phase de réalisation.

On matérialise cette approche dans l'espace, par une discrétisation du domaine continu, en introduisant une schématisation géométrique définie par un ensemble fini de mailles, délimité par des frontières et formant un réseau, la maille est représentation du plus petit détail de calcul. Les fonctions étant définies par leurs valeurs aux nœuds de ce maillage, la méthode consiste à approcher - leur dérivées par des différences entre ces valeurs.

Les équations discrétisées ne seront alors fonction que des valeurs aux nœuds du maillage, elles doivent permettre de déterminer les valeurs inconnues en fonction des valeurs connues (conditions initiales et aux limites).

On va donc remplacer le système d'équation aux dérivées partielles à résoudre par un système algébrique dont le nombre de degrés de liberté N est défini par le maillage (le nombre d'inconnues par maille correspondant au nombre d'équation à résoudre).

Les dérivées d'une fonction « f » sont approchées par combinaison linéaire des valeurs de la fonction au sommet du maillage, les coefficients de la combinaison étant déterminés grâce aux formules de développement de TAYLOR ci dessous :

soit « f » une fonction continue et continûment différentiable :

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + R_n$$

Où R_n est le reste ou erreur de troncature d'ordre de $\|\Delta x\|^n$ noter par :

$$R_n = o(\|\Delta x\|^n)$$

Notre problème étant rapporté à 2D, ainsi si "f" dépend de deux variables (x, y), et si dans le plan OXY on trace une série de droite parallèle aux axes déterminant de la sorte un réseau de point (i, j) au quel correspond les coordonnées de la fonction inconnue $f_{i,j}$ (fig.III.1), on peut écrire pour les différences centrales :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{ij} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{ij} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

i, j : représente le point du maillage.

$\Delta x \Delta y$: les pas d'espaces suivant les 2 directions x et y.

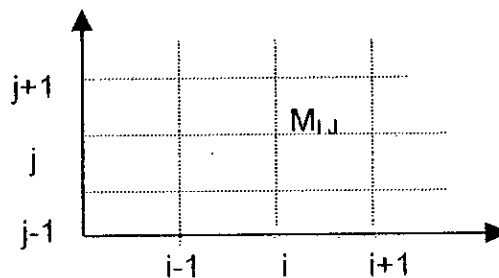


fig.III.1 : Domaine discrétisé.

Etant dans un écoulement transitoire, on aura le facteur temps qui va intervenir (fig.III.2) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{ij} = \frac{f^{K+1}_{i,j} - f^K_{i,j}}{\Delta t}$$

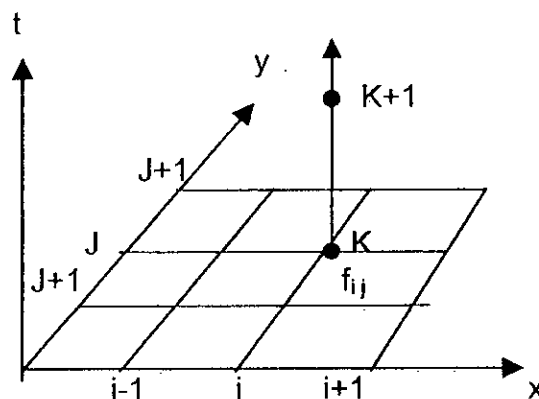


fig.III.2 : maillage bidimensionnel

- problème transitoire -

Dans la méthode des différences finies il existe deux schémas :

III.2_ SCHEMA EXPLICITE :

Afin de déterminer chaque point approché de la solution au temps $t+\Delta t$ on utilisera les valeurs connues de la solution précédente au temps t .

III.3_ SCHEMA IMPLICITE :

Ce schéma utilisera les points connus de la solution précédente au temps t et les points inconnues de l'étape $t+\Delta t$, donc on distingue une liaison implicite entre toutes les valeurs au temps $t+\Delta t$.

III.4_ LA CONSISTANCE, LA CONVERGENCE ET LA STABILITE D'UN SCHEMA : (10,13)

II.4.1_ LA CONSISTANCE :

La consistance est de meilleur choix lorsqu'on obtient entre la différence des dérivées partielles et les différences finies, un résultat infiniment petit.

La qualité de cette consistance s'appelle : la précision du schéma.

III.4.2_ LA CONVERGENCE :

Le schéma numérique est convergent si la solution du problème discrétisé tend vers la solution du problème aux dérivées partielles, lorsque les pas d'espace Δx et de temps Δt tendent simultanément vers zéro.

III.4.3_ LA STABILITE :

La stabilité d'un schéma numérique concerne uniquement l'évolution dans le temps. On dira alors qu'un schéma numérique est stable, s'il est peu sensible à l'accumulation des erreurs de discretisation et d'arrondis, c'est à dire que le stock d'erreur déjà obtenu à l'étape K ne doit en aucun cas se multiplier à l'étape K+1.

On admet en général qu'un schéma stable et consistant est nécessairement convergent.

III.5_ DIFFERENTS TYPES DE SCHEMA NUMERIQUES :

IL existe plusieurs types de schémas numériques qui peuvent être utiliser afin de décrire les écoulement à surface libre bidimensionnels en régime

non permanent :

- Les schémas de BEAM et WARNING.
- Le schéma de MAC-CORMACK.
- Le schéma de LAMBDA.
- Le schéma de GABUTTI.

Ces schémas sont du second ordre en espace et temps, le premier est implicite et les trois autres sont explicites.

III.6_ CHOIX DU SCHEMA NUMERIQUE :

Pour notre cas, d'écoulement bidimensionnel nous utiliserons un schéma explicite du second ordre bien adapté aux écoulements a surface libre pour résoudre le système hyperbolique de SAINT-VENANT, ce schéma permet d'obtenir d'excellents résultats pour les écoulements rapidement variés et graduellement variés, il est de type : predicteur-correcteur : schéma explicite de MAC-CORMACK (1971).

III.6.1 _ DESCRIPTION DES SCHEMAS DE TYPE PREDICTEUR-CORECTEUR :

(8,22)

Si on considère une équation écrite sous forme conservatrice de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0 \quad (DF1)$$

le schéma s'écrit en deux étapes :

- Etape prédiction :

$$u^*_i = (1-\beta) u^n_i + \beta u^n_{i+1} - \alpha \lambda (F^n_{i+1} - F^n_i)$$

- Etape correction :

$$u^{n+1}_i = u^n_i - (\lambda / 2\alpha) [(\alpha - \beta) F^n_{i+1} + (2\beta - 1) F^n_i + (1 - \alpha - \beta) F^n_{i-1} + F^*_i - F^*_{i-1}]$$

ou : $\lambda = \Delta t / \Delta x$

Sans oublier que : $F^n_i = F(u^n_i)$

$$F^*_i = F(u^*_i)$$

u^*_i : valeur prédictee.

α, β : des paramètres réels dont le rôle intervient au niveau de la stabilité et la consistance du schéma.

On peut considérer que u^*_i approche la solution exacte de (DF1) au point :

$$(X_i + \beta \Delta x, t_n + \alpha \Delta t).$$

III.6.2 _ SCHEMA DE MAC-CORMACK :

Le schéma de MAC-CORMACK est un schéma de différence finie de type à pas fractionnaires ou l'opérateur bidimensionnel de différences finies est simplifié en deux opérations appelées : prédicteur-correcteur.

Ce dernier est obtenu en remplaçant dans les équations algébriques précédentes : α par 1 et β par 0.

A) PROPRIETES DU SCHEMA :

- IL est à deux niveaux en temps car il ne fait intervenir que les temps t^n et t^{n+1} .
- IL est explicite car les valeurs approchées de la variable à l'instant t^{n+1} sont données explicitement en fonction des valeurs à l'instant t^n .
- C'est un schéma à deux étapes, prédiction-correction et l'application du cycle complet des deux étapes avance la solution d'un seul pas du temps Δt .

Donc si on considère l'équation (DF2) sous forme conservative :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial L(P)}{\partial x} + \frac{\partial B(P)}{\partial y} = K(P, x, y, t) \quad (\text{DF2})$$

Le schéma s'écrit comme précédemment en deux étapes :

- Etape prédiction :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P^*_{ij} - P^n_{ij}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{L^n_{i+1,j} - L^n_{ij}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{B^n_{i,j+1} - B^n_{ij}}{\Delta y}$$

$$K = K^n_{ij}$$

⇒ D'où en tire l'expression (DF3) :

$$P^*_{ij} = P^n_{ij} - \lambda_x (L^n_{i+1,j} - L^n_{ij}) - \lambda_y (B^n_{i,j+1} - B^n_{ij}) + K^n_{ij} \Delta t \quad (\text{DF3})$$

Ou :

$$\lambda_x = \Delta t / \Delta x$$

$$\lambda_y = \Delta t / \Delta y$$

• Etape correction :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P^{**}_{ij} - P^*_{ij}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{L^*_{ij} - L^*_{i-1,j}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{B^*_{ij} - B^*_{i,j-1}}{\Delta y}$$

$$K = K^*_{ij}$$

De cette deuxième étape on tire l'expression (DF4) :

$$P^{**}_{ij} = P^*_{ij} - \lambda_x (L^*_{ij} - L^*_{i-1,j}) - \lambda_y (B^*_{ij} - B^*_{i,j-1}) + K^*_{ij} \Delta t \quad (\text{DF4})$$

Ou :

$$\lambda_x = \Delta t / \Delta x$$

$$\lambda_y = \Delta t / \Delta y$$

La solution au temps (n+1) est telle que :

$$P^{n+1}_{ij} = \frac{P^n_{ij} + P^{**}_{ij}}{2} \quad (\text{DF5})$$

remarque :

Dans ce schéma, les différences finies avant sont utilisées pour approximer les dérivées partielles spatiales dans l'étape prédiction et les différences finies arrières, utilisant les variables prédites, sont utilisés dans l'étape correction.

Sachant qu'en peut inverser le rôle des différences finies avant et arrières comme il est possible aussi d'alterner la direction de différentiation d'un pas de temps a l'autre.

B)_ APPLICATIONS DU SCHEMA DE MAC-CORMACK AUX EQUATIONS DE SAINT-VENANT :

A partir des équations de SAINT-VENANT, obtenues des équations de base, misent sous forme conservatrice dans le chapitre (II) partie (II.3), notre

problème sera plus simple a formuler :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = g \cdot H \cdot (S_{0X} - S_{FX})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = g \cdot H \cdot (S_{0Y} - S_{FY})$$

Les équations de SAINT-VENANT auxquelles on applique le schéma de MAC-CORMACK se mettent sous la forme :

- Etape prédiction :

$$\frac{H_{ij}^* - H_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{U_{i+1,j}^n - U_{ij}^n}{\Delta x} + \frac{V_{i,j+1}^n - V_{ij}^n}{\Delta y} = 0$$

$$\frac{U_{ij}^* - U_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1,j}^n - F_{ij}^n}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1}^n - G_{ij}^n}{\Delta y} = g \cdot H_{ij}^n \cdot (S_{0X} - S_{FXij}^n)$$

$$\frac{V_{ij}^* - V_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{G_{i+1,j}^n - G_{ij}^n}{\Delta x} + \frac{S_{i,j+1}^n - S_{ij}^n}{\Delta y} = g \cdot H_{ij}^n \cdot (S_{0Y} - S_{FYij}^n)$$

⇒ De cette première étape on tire l'expression :

$$H^*_{ij} = H^n_{ij} - \lambda_X (U^n_{i+1,j} - U^n_{ij}) - \lambda_Y (V^n_{i,j+1} - V^n_{ij}) \quad (DF6)$$

$$U^*_{ij} = U^n_{ij} - \lambda_X (F^n_{i+1,j} - F^n_{ij}) - \lambda_Y (G^n_{i,j+1} - G^n_{ij}) + g H^n_{ij} (S_{0X} - S^n_{FXij}) \Delta t \quad (DF7)$$

$$V^*_{ij} = V^n_{ij} - \lambda_X (G^n_{i+1,j} - G^n_{ij}) - \lambda_Y (S^n_{i,j+1} - S^n_{ij}) + g H^n_{ij} (S_{0Y} - S^n_{FYij}) \Delta t \quad (DF8)$$

• Etape correction :

$$\frac{H^{**}_{ij} - H^*_{ij}}{\Delta t} + \frac{U^*_{ij} - U^*_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{V^*_{ij} - V^*_{i,j-1}}{\Delta y} = 0$$

$$\frac{U^{**}_{ij} - U^*_{ij}}{\Delta t} + \frac{F^*_{ij} - F^*_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{G^*_{ij} - G^*_{i,j-1}}{\Delta y} = g \cdot H^*_{ij} \cdot (S_{0X} - S^*_{FXij})$$

$$\frac{V^{**}_{ij} - V^*_{ij}}{\Delta t} + \frac{G^*_{ij} - G^*_{i,j-1}}{\Delta x} + \frac{S^*_{ij} - S^*_{i,j-1}}{\Delta y} = g \cdot H^*_{ij} \cdot (S_{0Y} - S^*_{FYij})$$

⇒ De cette deuxième étape on tire l'expression :

$$H^{**}_{ij} = H^*_{ij} - \lambda_X (U^*_{ij} - U^*_{i-1,j}) - \lambda_Y (V^*_{ij} - V^*_{i,j-1}) \quad (DF9)$$

$$U^{**}_{ij} = U^*_{ij} - \lambda_X (F^*_{ij} - F^*_{i-1,j}) - \lambda_Y (G^*_{ij} - G^*_{i,j-1}) + g H^*_{ij} (S_{0X} - S^*_{FXij}) \Delta t \quad (DF10)$$

$$V^{**}_{ij} = V^*_{ij} - \lambda_X (G^*_{ij} - G^*_{i,j-1}) - \lambda_Y (S^*_{ij} - S^*_{i,j-1}) + g H^*_{ij} (S_{0Y} - S^*_{FYij}) \Delta t \quad (DF11)$$

Ou : $\lambda_x = \Delta t / \Delta x$

$\lambda_y = \Delta t / \Delta y$

La solution au temps (n+1) est telle que :

$$H^{n+1}_{ij} = \frac{H^n_{ij} + H^{**}_{ij}}{2} \quad (\text{DF12})$$

$$U^{n+1}_{ij} = \frac{U^n_{ij} + U^{**}_{ij}}{2} \quad (\text{DF13})$$

$$V^{n+1}_{ij} = \frac{V^n_{ij} + V^{**}_{ij}}{2} \quad (\text{DF14})$$

III.7 _ STABILITE DU SCHEMA :

On dira que le schéma de MAC-CORMACK est stable une fois qu'il satisfait la condition de « C.F.L » : COURANT, FRIEDRICKS et LEWY, qui s'exprime par le nombre de courant C_R .

On notera que pour les écoulements bidimensionnels, la condition de stabilité qui impose le pas de temps Δt , s'exprime de la manière suivante (DF15) :

$$C_R = \frac{(W + \sqrt{g \cdot h}) \Delta t}{\Delta x \Delta y} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leq 1 \quad (\text{DF15})$$

IL est donc évident de prendre l'incrément de temps suivant :

$$\Delta t \leq \frac{C_R \Delta x \Delta y}{\max. (W + \sqrt{g.h}) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \quad (\text{DF16})$$

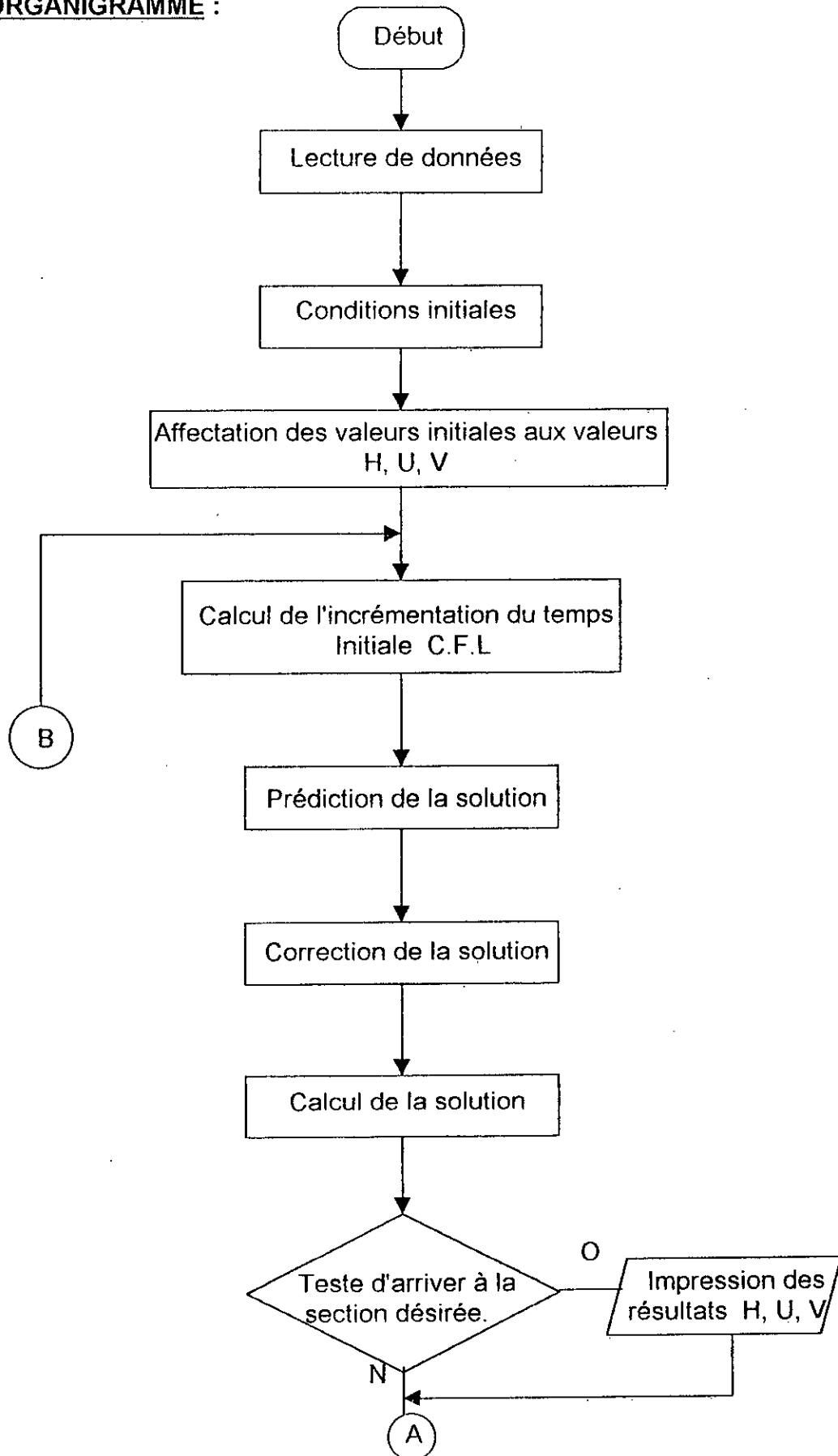
Tel que :

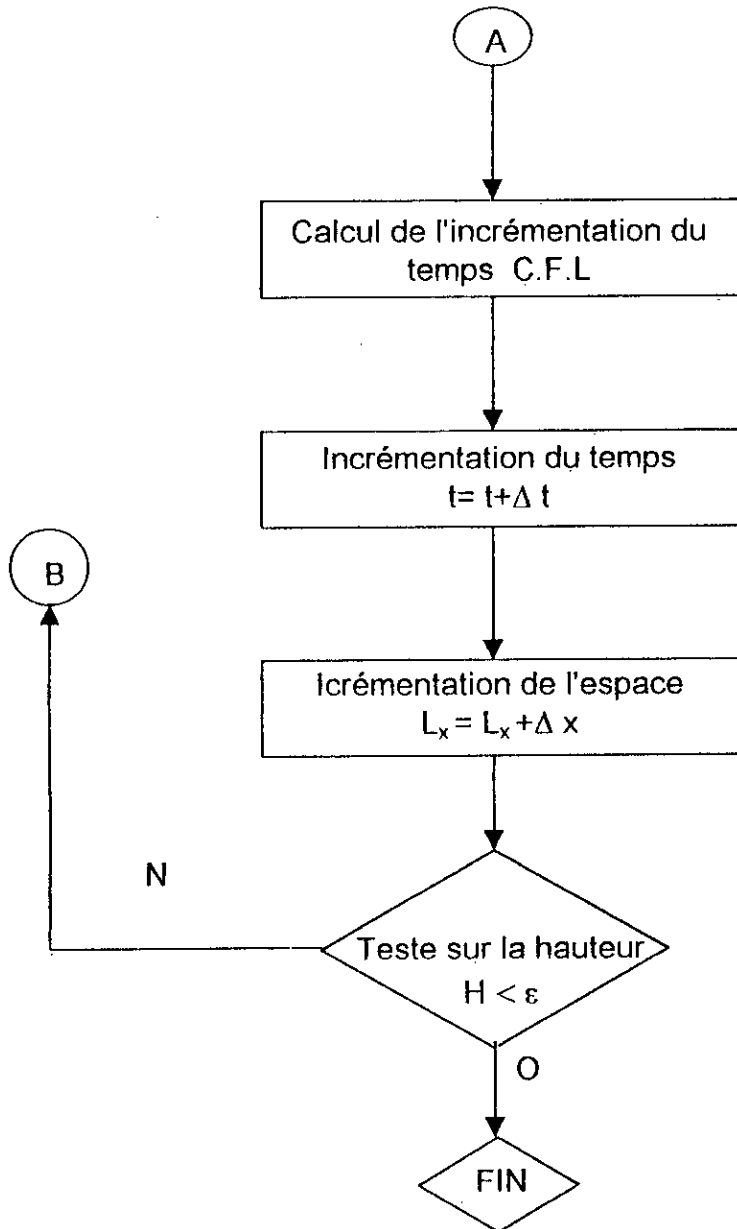
W : module de la vitesse au point du maillage.

C_R : nombre de courant. C.F.L.

La formule (DF16) fixe le pas temps Δt à chaque itération, les pas d'espace Δx et Δy étant supposés constants.

III.8 ORGANIGRAMME :





CHAPITRE 4:

TECHNIQUE DE
PROGAMMATION
ET PRESENTATION
DES RESULTATS

CHÂPITRE IV

PRESENTATION DES RESULTATS :**IV.1 TECHNIQUES DE PROGRAMMATION :**

La technique de programmation qu'on a adoptée lors de notre simulation nous a bien orientés vers le but cherché.

Cependant, nous avons choisi une programmation en FORTRAN 32, qui est un langage à exécution rapide et a un environnement très maniable (FORTRAN sous Windows).

Lors de notre programme, nous avons créés des fichiers à partir desquels on traite les résultats en utilisant les logiciels de graphisme tel que Grapher. Ce choix été long mais nous a permis à aboutir facilement à nos résultats.

Par ailleurs, nous sommes arrivés à :

- Nous familiariser avec l'ordinateur.
- Savoir programmer en Fortran 32.
- Maîtriser les logiciels de graphisme.

IV.2 PRESENTATION ET INTERPRETATION DES RESULTATS :

La rupture instantanée du barrage et ce à l'instant $t=t_0$, crée un accroissement de vidange dans le réservoir qui se constate par l'écoulement amont-aval. Ce débit de vidange commençant à s'accroître et ce à l'instant $t=0.0819s$ provoque une légère croissance suivie d'une décroissance de la hauteur d'eau à l'aval, enfin la vidange complète du réservoir se constate à l'instant $t=8.068s$.

Afin de concrétiser ces résultats, un choix s'est porté sur le canal à étudier, il est de type rectangulaire large. Le modèle établit nous a permis durant la simulation d'obtenir l'évolution dans le temps de la hauteur d'eau et de la vitesse (moyen sur la vertical) en différentes positions.

De plus on s'est intéressé à l'étude de l'influence de certains paramètres sur l'écoulement tel que :

- La pente du fond (selon x S_{0x}).
- La rugosité de Manning.
- La hauteur d'eau initiale dans le réservoir.

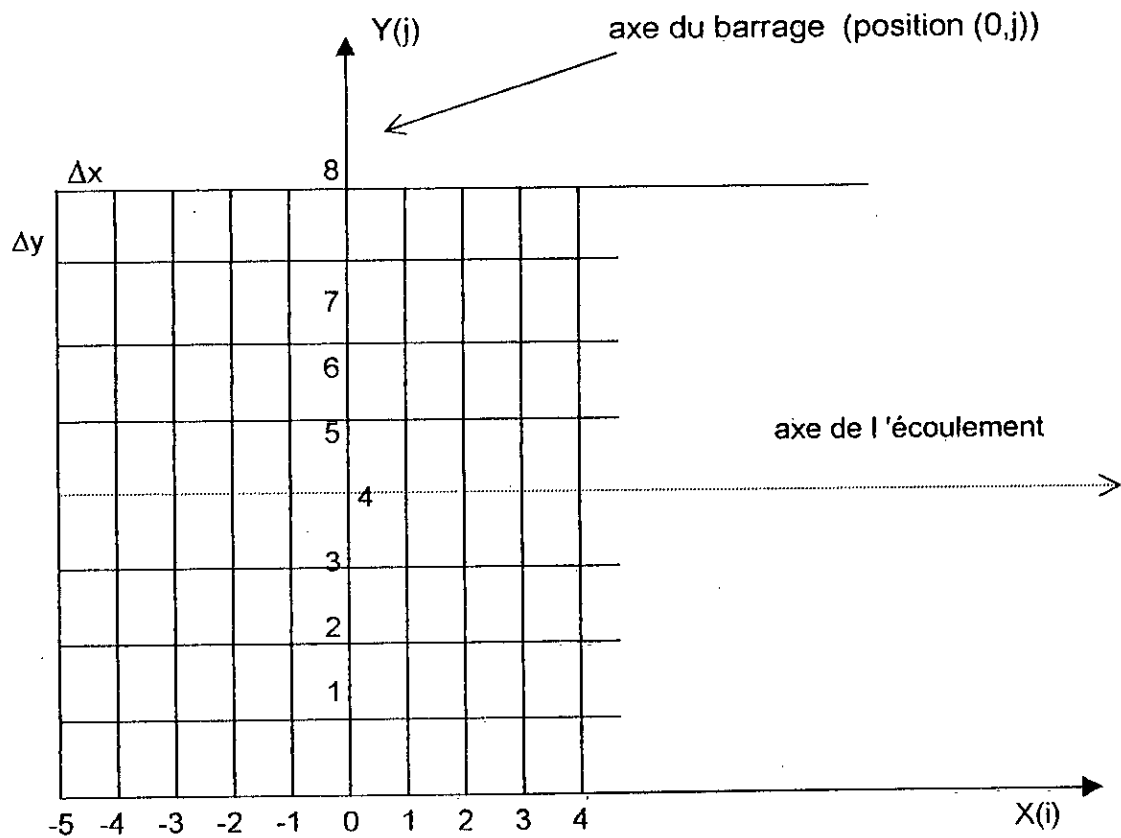
IV.2.1 CARACTERISTIQUES PHYSIQUES ET GEOMETRIQUES :

Dans l'étude des caractéristiques physiques et géométriques de l'exemple d'application, on résume les caractères suivants :

- Réservoir rectangulaire de dimension : Longueur : 1m , Largeur: 2m

- Hauteur d'eau initiale dans le réservoir : 0.64m.
- Longueur du canal (à l'aval du réservoir) : 2 m.
- Pente du canal : 0% suivant y , de 0% à 10% suivant x .
- Coefficient de rugosité de Manning C_n : 0.025.

Ci dessous nous représentant le maillage utiliser avec : $\Delta x=0.22\text{m}$ et $\Delta y=0.25\text{m}$.



IV.2.2_ VARIATION DE LA HAUTEUR ET DE LA VITESSE :

Les résultats obtenus et représentés en figures H 1),2),3),4) et W 1),2),3),4) illustrent l'évolution dans le temps de la hauteur d'eau et de la vitesse d'écoulement en différentes positions dans le cas où la pente du canal suivant x est nulle avec un coefficient de Manning égal à 0.025.

Après la rupture totale et instantanée du barrage, une onde de rupture se forme réduisant la hauteur d'eau à l'axe du barrage à une hauteur $h = 0.28$ m (position (0,4)) , cette hauteur est égale au $(4/9)^{em}$ de la hauteur initiale (solution de Ritter), cette hauteur diminue et s'annule à $t = 8.068$ s, temps correspondant à la vidange du réservoir.

La vitesse d'écoulement correspondant à la position (0.4) augmente de $w = 0$ (Avant la rupture du barrage) à une vitesse maximale $w = 1.7$ [m/s] . cette vitesse est relative au moment de la rupture et est égale à $2/3 [gh_{initiale}]^{1/2}$ (solution de RITTER).

En parcourant les différentes positions, dans le réservoir et dans le canal, le long de l'axe à l'aval dans le sens de l'écoulement, on constate :

A l'amont de l'axe du barrage, la hauteur d'eau diminue de manière continue de $h_{initi} = 0.64$ [m] à $h_{fin} \cong 0$. pour ces mêmes positions, les vitesses augmentent pour atteindre un maximum, puis diminuent tout en gardant une légère oscillation pour s'annuler en fin de parcours, c'est à dire à la vidange du réservoir.

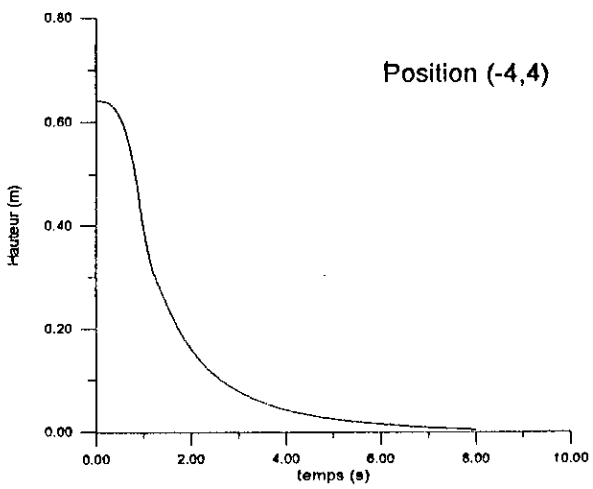
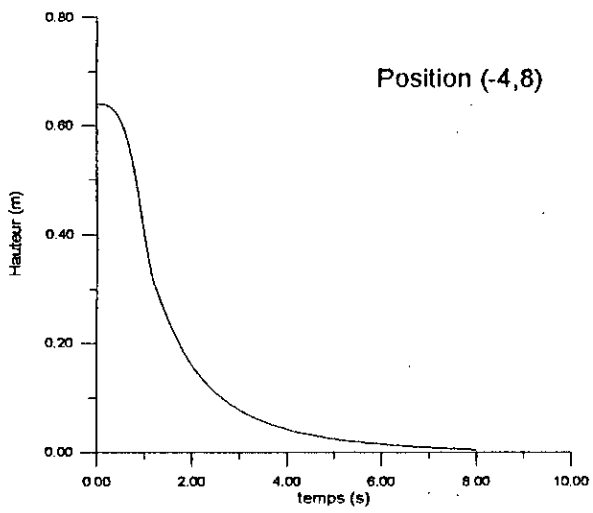
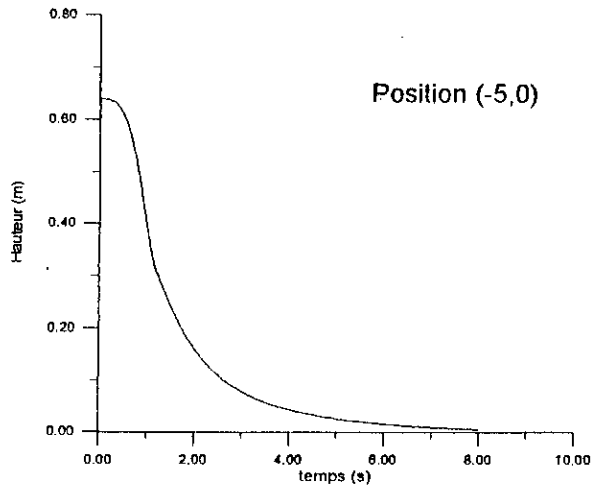
A noter que w_{max} est plus importante à chaque fois que l'on se rapproche de l'axe du barrage.

A l'aval de l'axe, la hauteur d'eau augmente de $h_{av \text{ init}} = 0$ à $h_{av \text{ max}}$ dû à l'arrivée du fond de l'onde de rupture à ces positions initialement sèches, puis diminue progressivement et s'annule. $H_{av \text{ max}}$ est d'autant plus importante que l'on se rapproche de l'axe du barrage, mais reste toujours inférieur à $4/9 h_{\text{init}}$, c'est à dire $h = 0.28[m]$.

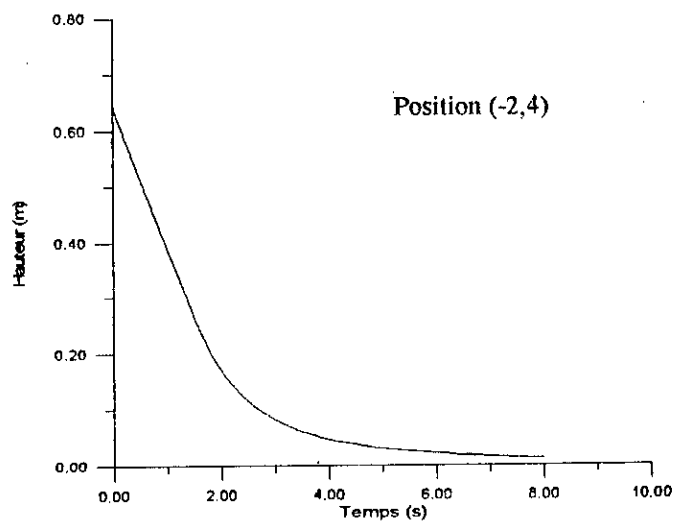
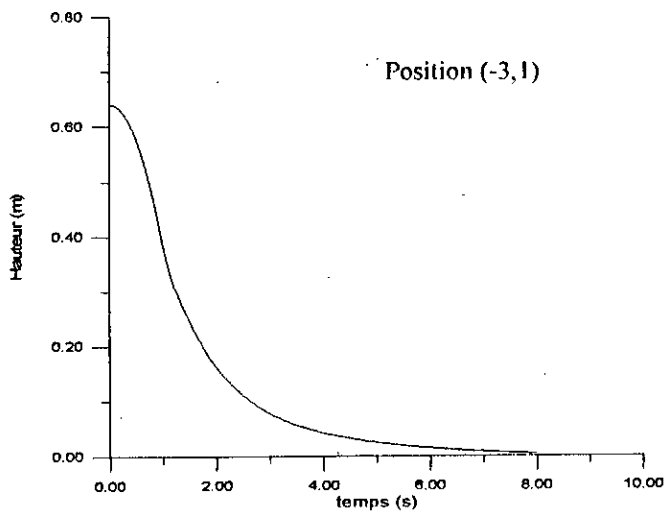
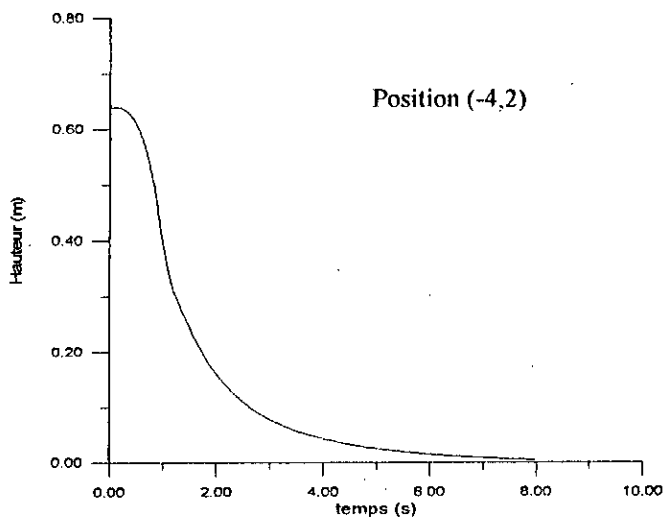
Les vitesses obtenues augmentent de $w_{av \text{ init}} = 0$, à une vitesse maximale considérable (de l'ordre de 2 à 3 m/s), puis diminuent continuellement jusqu'à

$w_{av \text{ fin}} = 0$.

A noter que la vitesse maximale obtenue est toujours supérieure à celle du niveau du barrage (solution de RITTER), c'est à dire à 1.7 m/s.

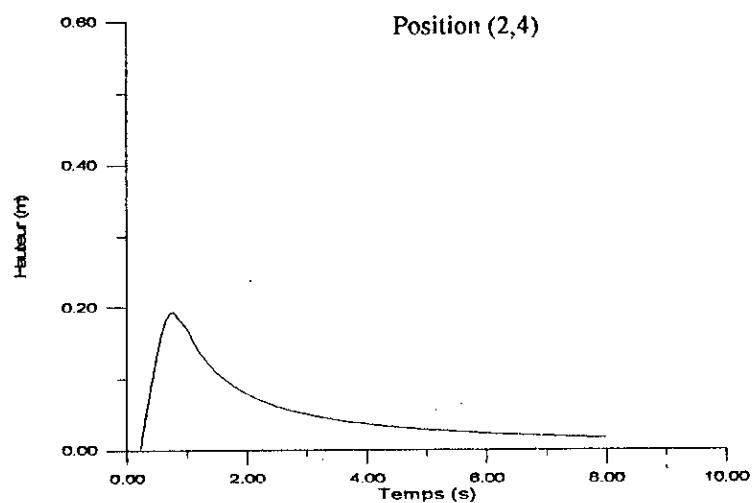
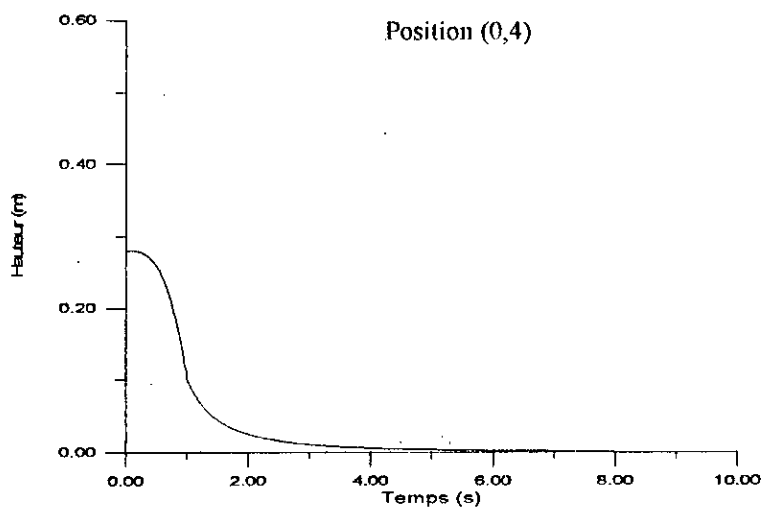
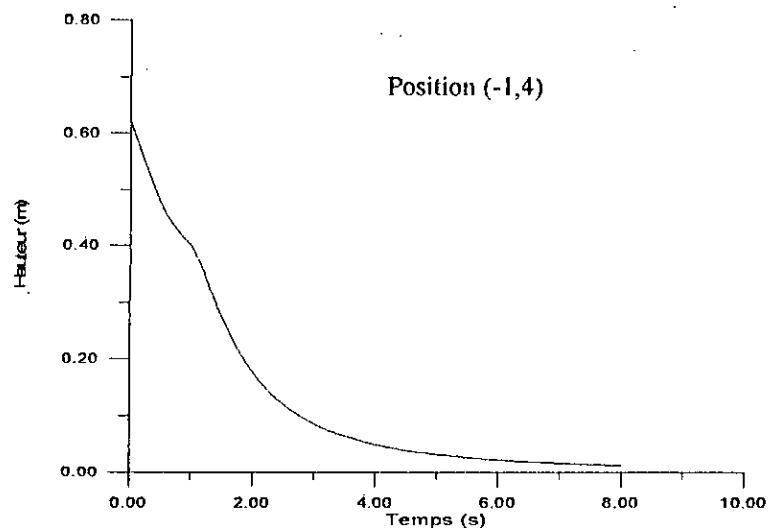


EVOLUTION DE LA HAUTEUR EN FONCTION DU TEMPS
Figure H 1



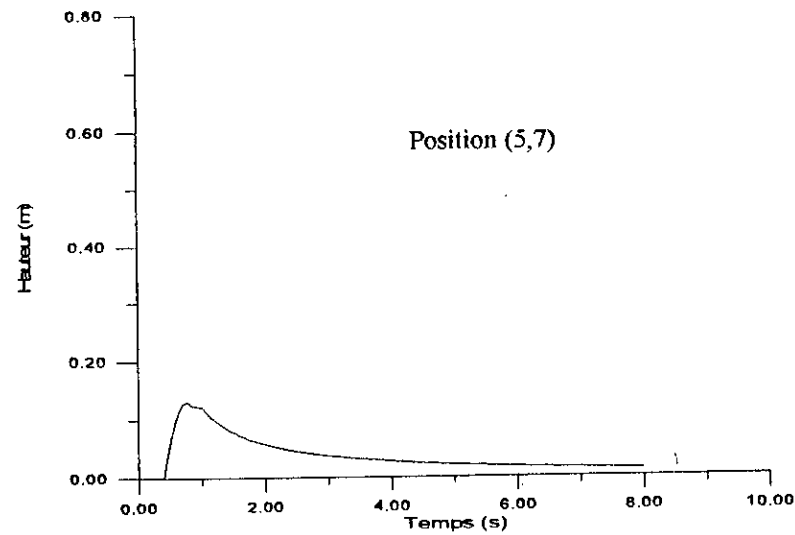
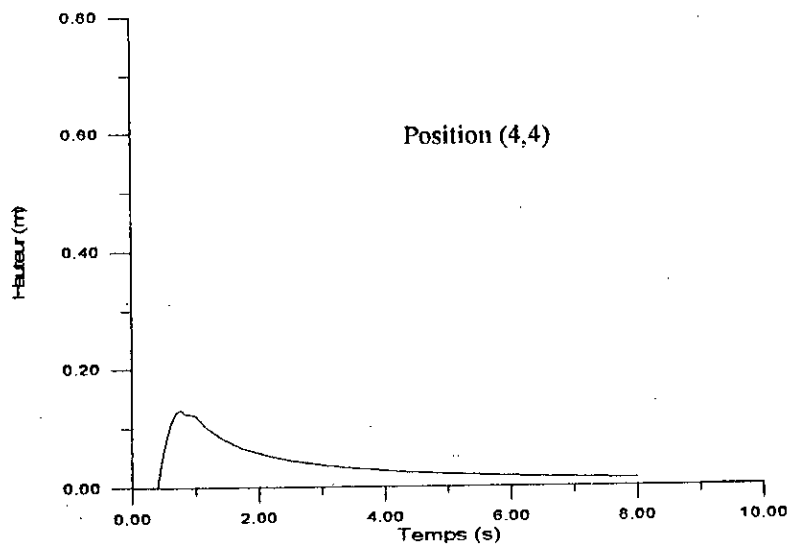
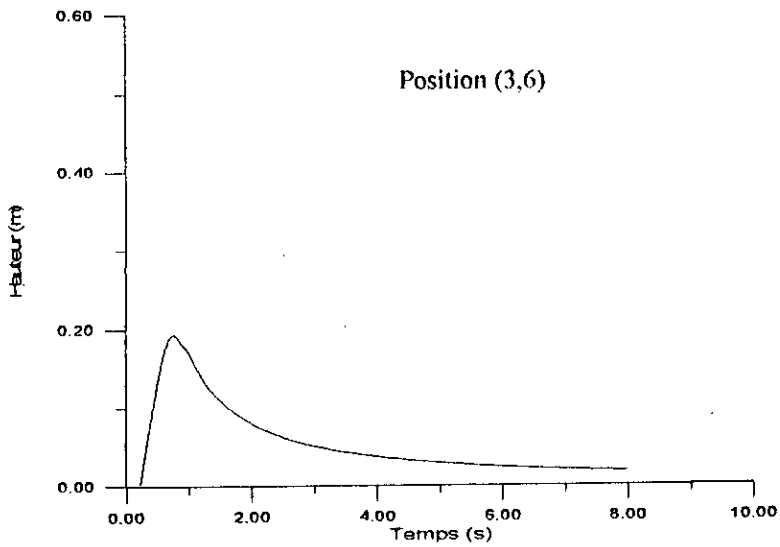
EVOLUTION DE LA HAUTEUR EN FONCTION DU TEMPS

Figure H 2

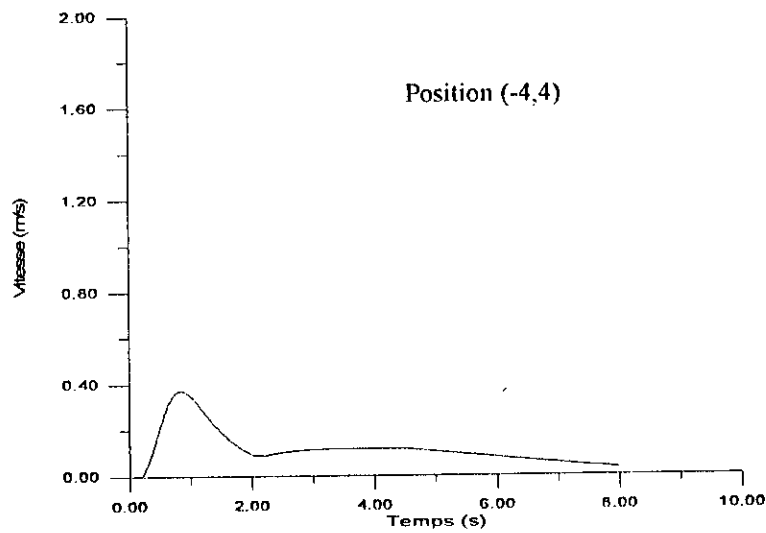
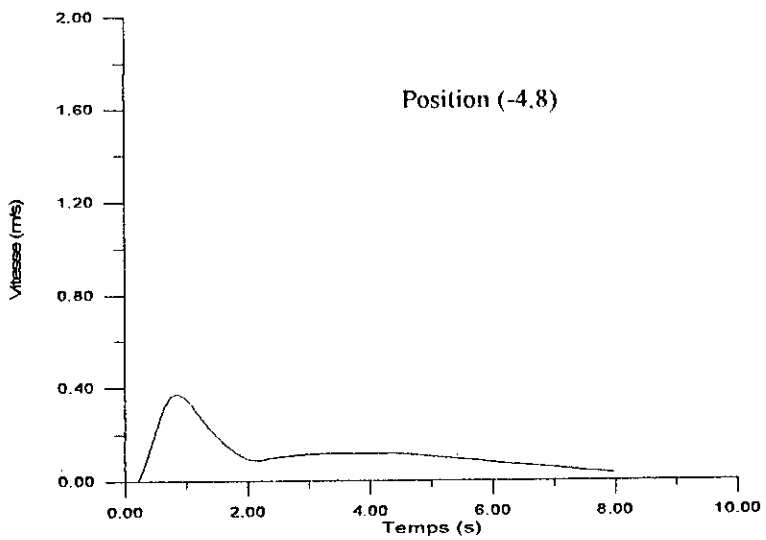
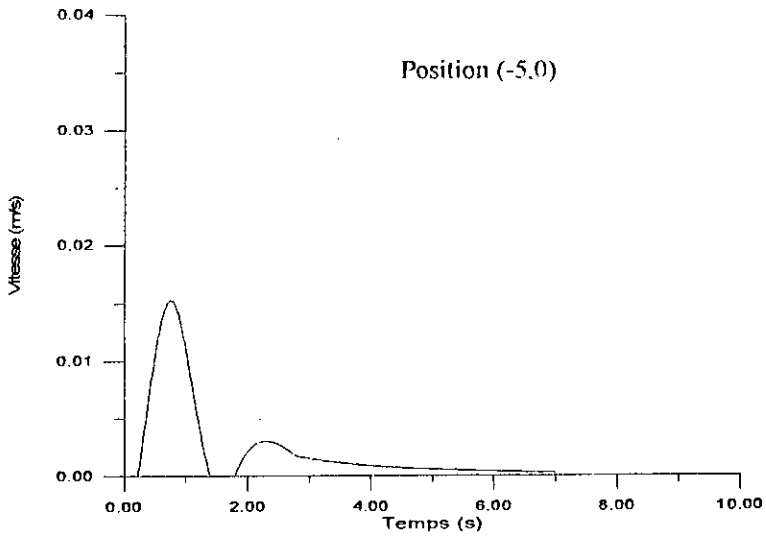


EVOLUTION DE LA HAUTEUR EN FONCTION DU TEMPS

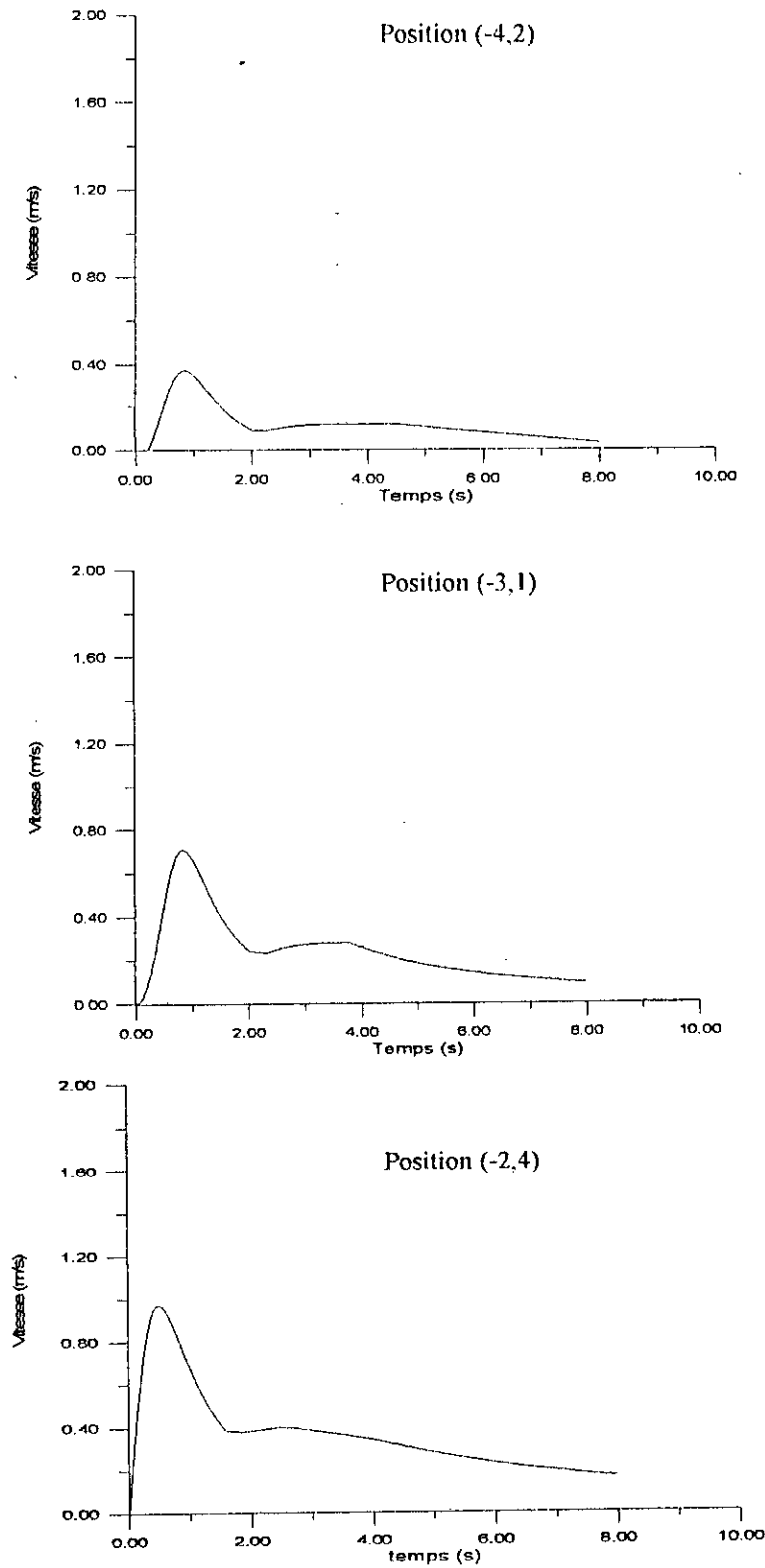
Figure H 3



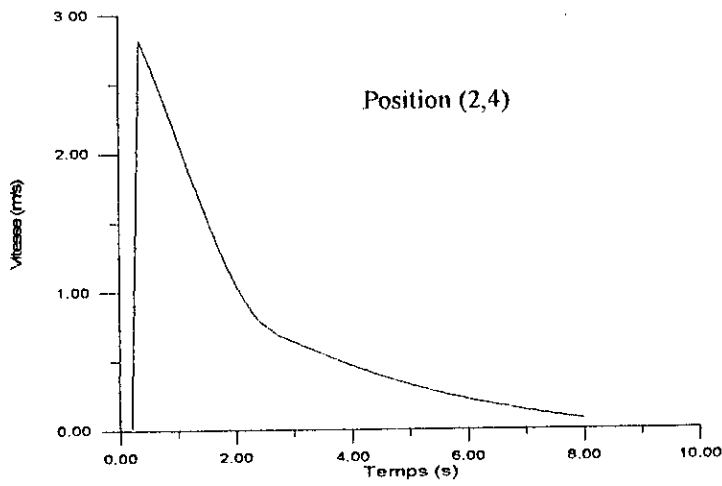
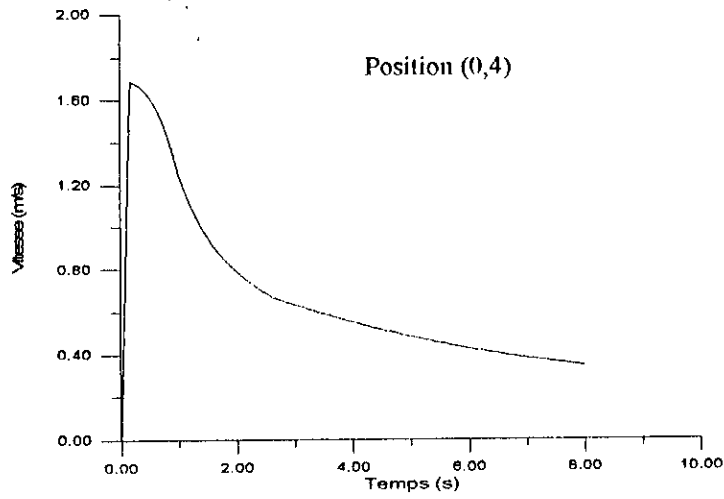
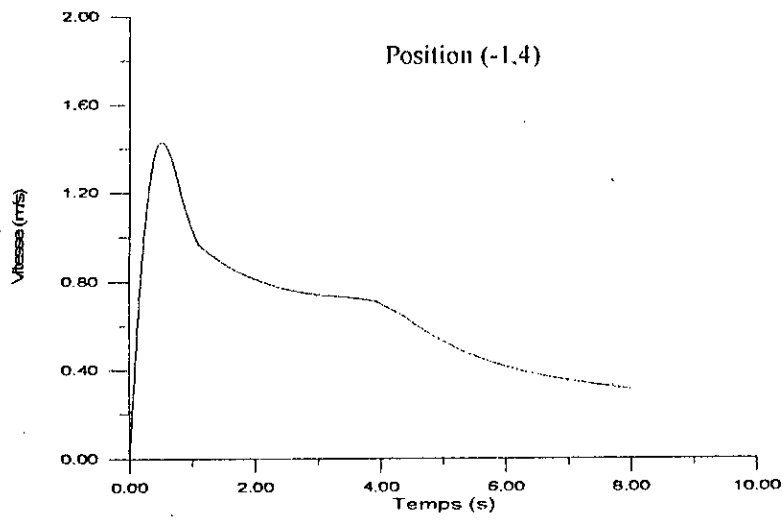
EVOLUTION DE LA HAUTEUR EN FONCTION DU TEMPS
Figure H4



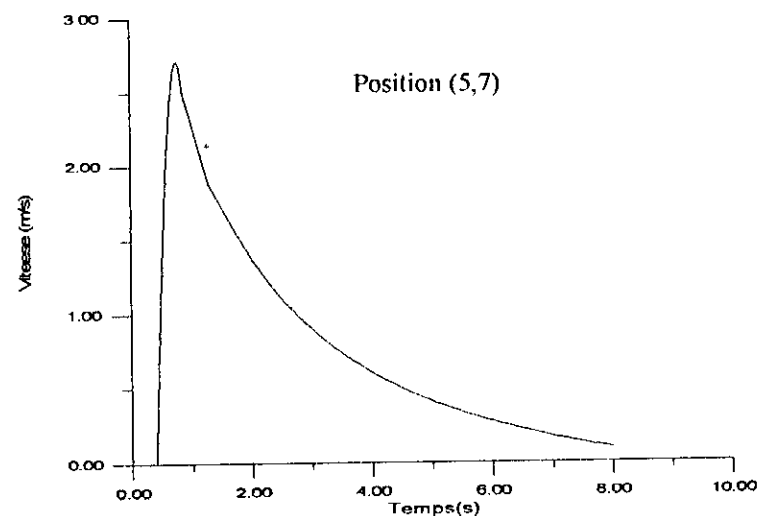
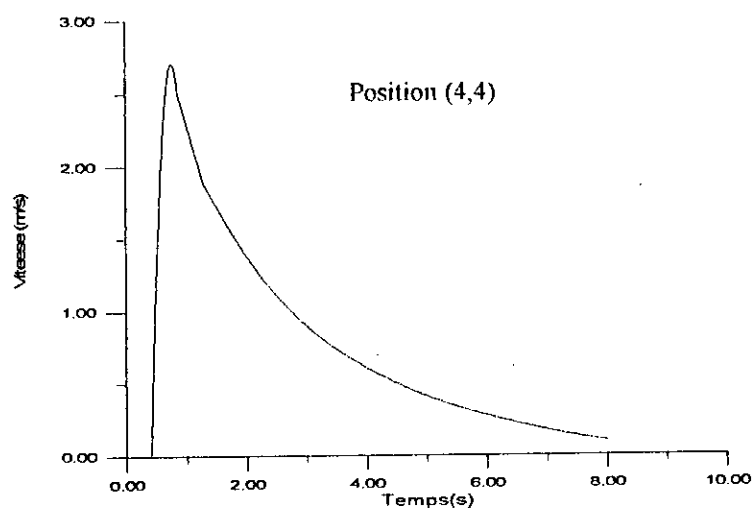
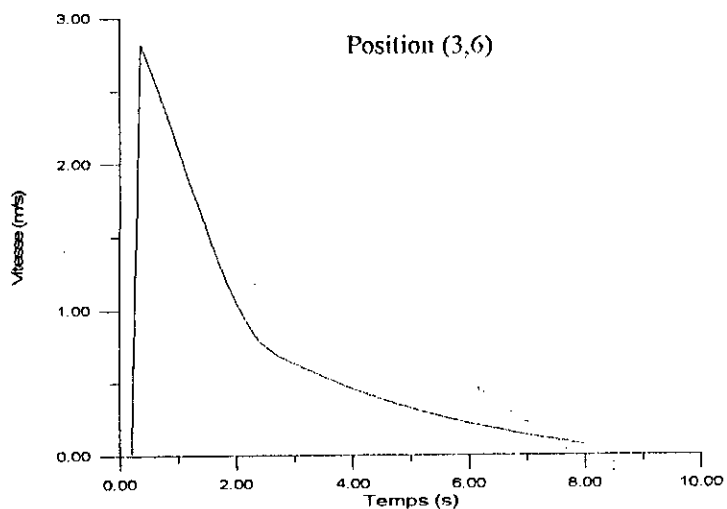
EVOLUTION DE LA VITESSE EN FONCTION DU TEMPS
Figure W1



EVOLUTION DE LA VITESSE EN FONCTION DU TEMPS
Figure W2



EVOLUTION DE LA VITESSE EN FONCTION DU TEMPS
Figure W3

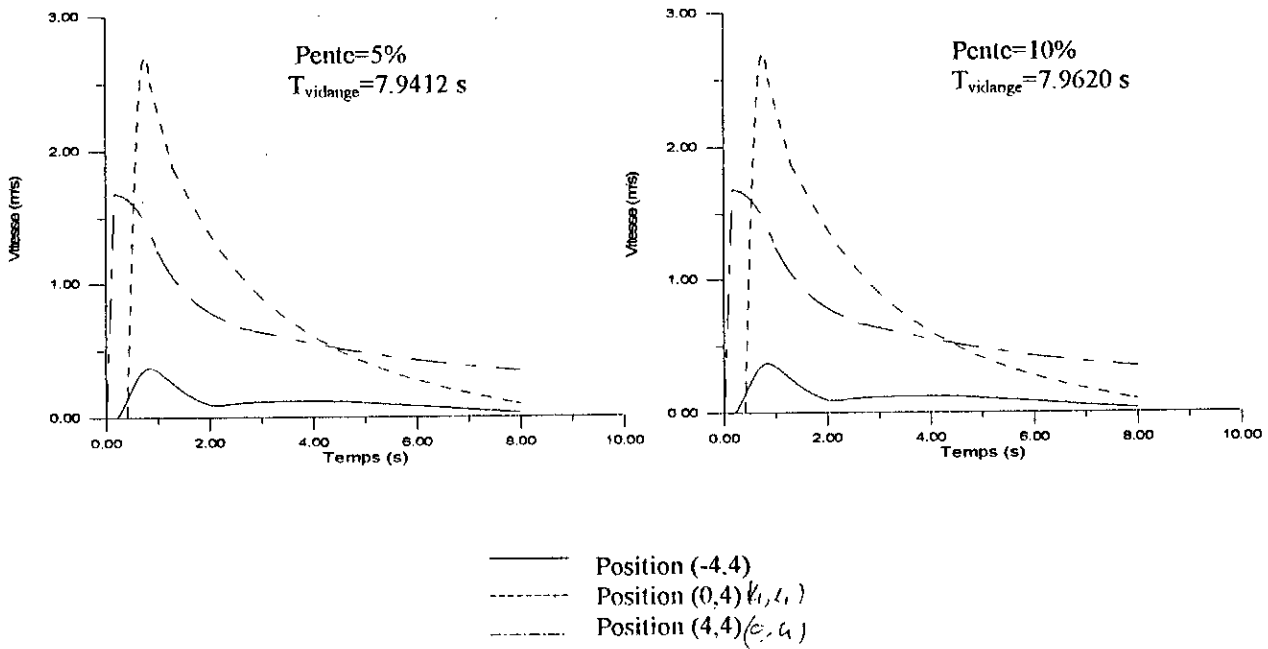
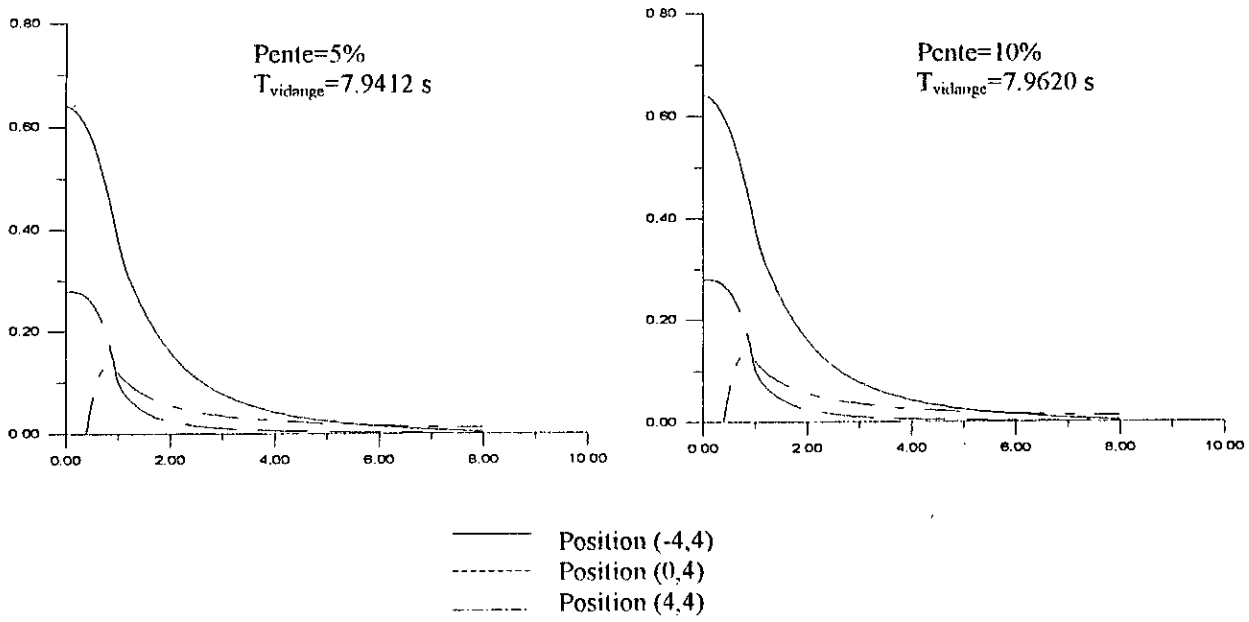


EVOLUTION DE LA VITESSE N FONCTION DU TEMPS
Figure W4

IV.2.3_ INFLUENCE DE LA PENTE DU FOND :

La figure ci jointe (P.1), montre l'évolution de la hauteur et de la vitesse respectivement pour deux pentes de fond différentes ($S_{0x} = 5\%$ et 10%) avec un coefficient de rugosité $C_n = 0.025$ constant.

Selon les résultats obtenus, nous pouvons conclure que l'influence de la pente est négligeable, à noter que ces dernières sont très faibles et ceci est l'une des hypothèses de Saint-Venant.



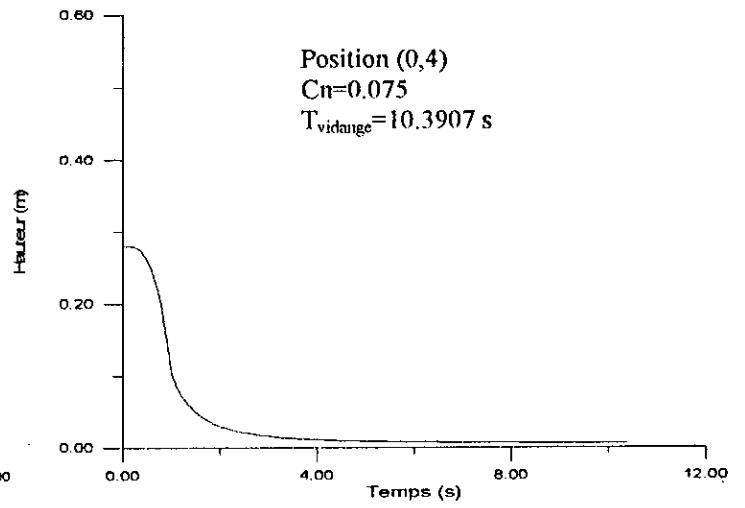
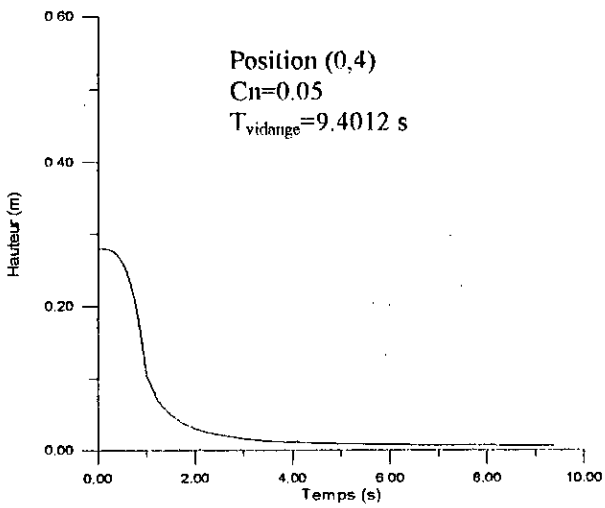
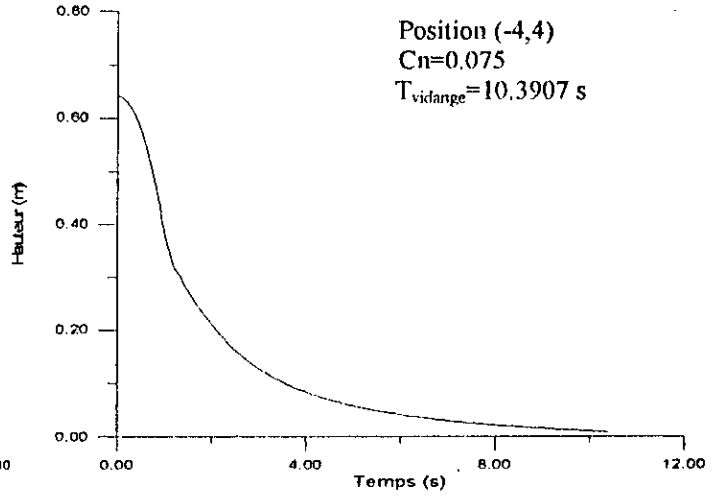
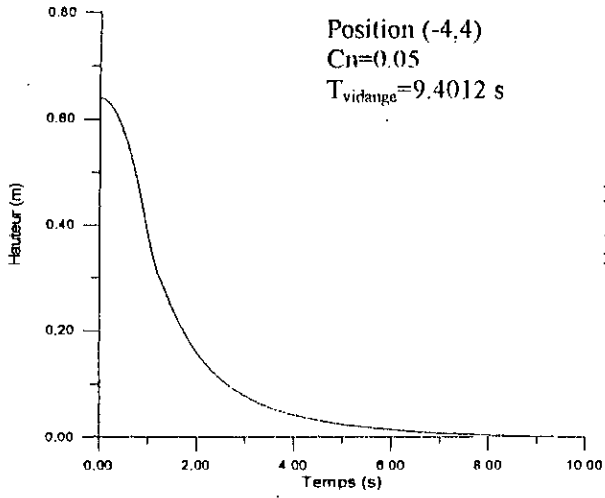
INFLUENCE DE LA PENTE DU CANAL
Figure P1

IV.2.4 INFLUENCE DU COEFFICIENT DE RUGOSITE DE MANNING :

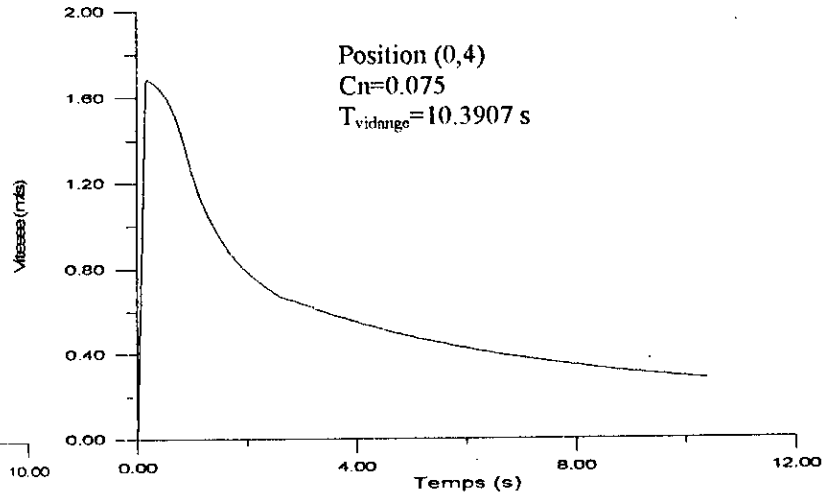
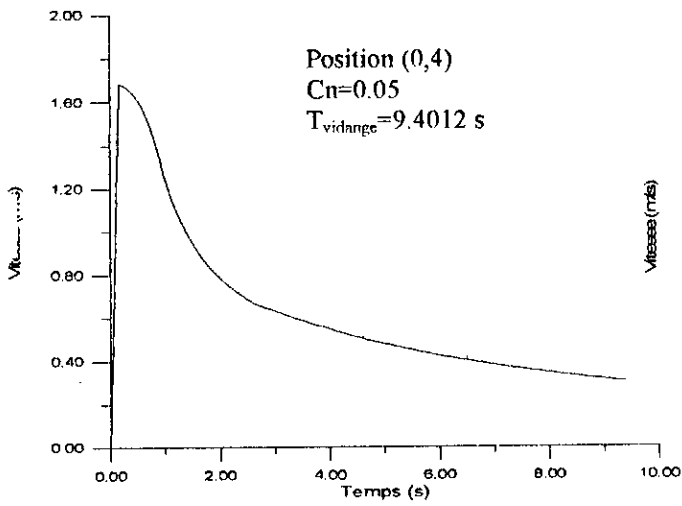
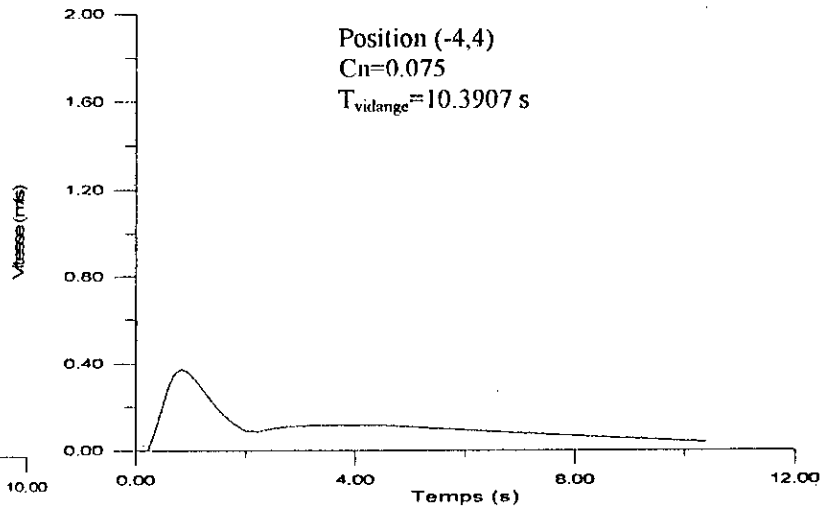
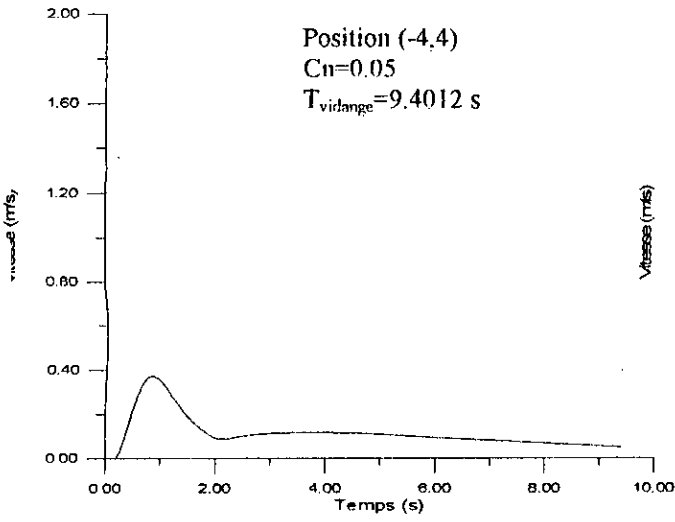
Pour une pente de fond nulle, et selon les résultats obtenus en (R1) et (R2) représentant la variation de la hauteur et de la vitesse respectivement ,pour deux coefficients de Manning ($C_n = 0.05$ et 0.075) on constate que l'écoulement est plus rapide pour un coefficient plus petit.

Pour $C_n = 0.05$ le temps de vidange (du phénomène) et $t_v = 9.4012$ s.

Pour $C_n = 0.075$, $t_v = 10.3907$ s.



INFLUENCE DE LA RUGOSITE DE MANNING
Figure R1



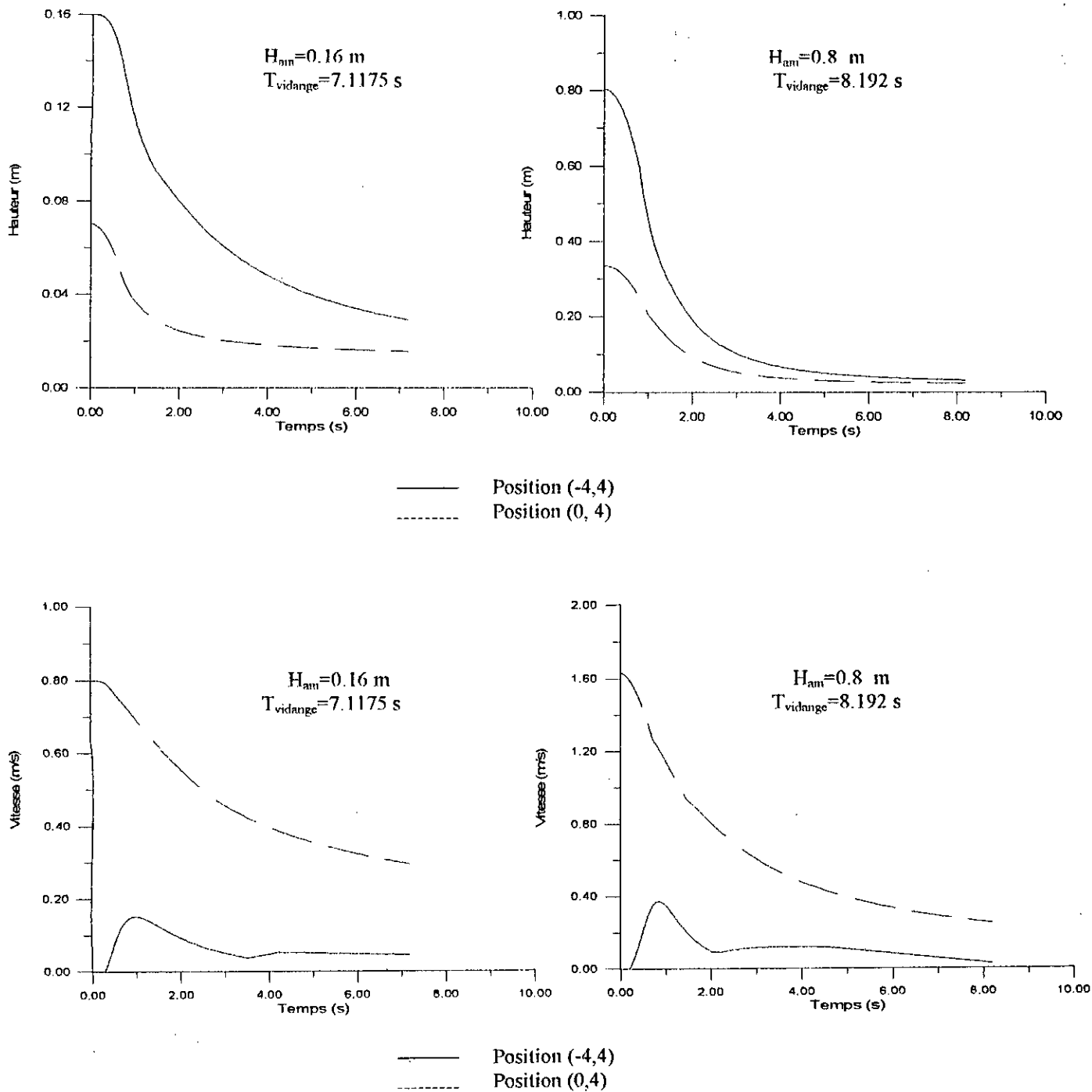
INFLUENCE DE LA RUGOSITE DE MANNING
 Figure R 2

IV 2.5 INFLUENCE DE LA HAUTEUR D'EAU INITIALE :

Le tracé de la figure (I.1) représentant la variation de la hauteur et de la vitesse en fonction du temps respectivement pour deux hauteurs d'eau initiales différentes ; $H_{am} = 0.16 \text{ m}$ et 0.8m .

Ce tracé montre l'influence de la hauteur d'eau initiale dans le réservoir (barrage) pour une pente de fond nulle et un coefficient de rugosité égal à 0.025.

D'après les résultats obtenus: Nous pouvons dire que la variation de la hauteur en fonction du temps en différentes positions est indépendante de la hauteur initiale . donc l'effet de la hauteur d'eau initiale dans le réservoir est négligeable .



INFLUENCE DE LA HAUTEUR D'EAU INITIALE
Figure I 1

IV.3_ CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS :

L 'ensemble des résultats obtenus lors de cette étude montrent une bonne concordance avec les études faites dans le chapitre.1. "état bibliographique".

Toutefois le travail fait reste très modeste et ne constitue en fait qu 'un début, mais considéré comme base d'un outil ou moyen permettant de simuler et prévoir l'évolution d 'une onde de rupture d 'un barrage.

Des améliorations doivent être portées à ce modèle, pour ceux qui s'intéressent au sujet, à l'occasion d'autre projet de fin d 'étude ,cependant nous suggérons à titre indicatif d 'adapter le modèle, au cas d 'une rupture partielle, de tenir compte d'une hauteur d 'eau à l 'aval non nulle et d'autre part essayer d élaborer un modèle physique qui pourrait tenir compte des différents paramètres du phénomène, enfin d 'appliquer le modèle "final" à un cas réel de barrage en Algérie.

CONCLUSION

Conclusion générale :

L'utilisation des modèles mathématiques, pour simuler les phénomènes complexes et souvent aléatoires tel que Dam Break constitue un moyen efficace permettant d'arriver à des résultats acceptables. Ce moyen demeure attractif par son coût relativement faible malgré son caractère qui ne traduit pas toujours la réalité. Cependant il existe une multitude de méthode d'analyse dont celle adoptée dans notre cas, il s'agit donc de trouver le model dynamique linéaire, connaissant une suite de valeurs des entrées et des sorties.

En effet, la plupart des modèles mathématiques développés pour simuler fidèlement les phénomènes de rupture, reposent sur des hypothèses simplificatrices permettant de fixer les bases de ces modèles et qui sont émises beaucoup plus pour faciliter la résolution des différentes équations, que pour améliorer l'approche des aspects qui caractérisent ces phénomènes de rupture des barrages.

Le travail accompli dans ce mémoire inscrit dans cet ordre d'idée, ne constitue qu'une contribution à l'élaboration d'un modèle numérique afin de simuler le phénomène de rupture de barrage.

Cependant l'étude que nous avons menée nous a permis de compléter nos connaissances en hydraulique générale et d'autre part d'apprendre une des méthodes les plus performantes utilisées actuellement, pour traiter le phénomène d'évolution.

Enfin , on estime qu 'afin de mieux visualiser la réalité, l 'élaboration d 'un modèle physique tenant compte des aspects réels du phénomène est nécessaire pour mettre en relief les caractéristiques de ce dernier.

Annexe

Rupture de barrages dans le monde

Nom	Rivière ou région- pays	Type	H	(A-A),(A-R)	Causes
Puentes	Murcie-Espagne	Poids	50	1791-1802	Effet renard dans la fondation alluviale
South Fork	Johnstown pennsylvanie	Remblai	22	1852-1889	Déversement antérieur en 1862
Bouzey	Epinal France	Poids	20	1880-1895	Sous-pression
Tigra	Madhya Pradesh Inde	Poids	24	1917-1917	Déversement de crue en cours de construction
Gleno	Bergame Italie	Voûtes multiples sur radier	29	1923-1923	Sous-pression sous le radier en premier remplissage
St francis	Saugus Californie U.S.A.	Poids	56	1926-1928	Faiblesse de la fondation (Sous-pression probable)
Baldwin hills	Los-angeles Californie U.S.A.	Remblai	80	1951-1963	Mouvement du sous sol (faille sous la digue)
Malpasset	Frejus France	Voûte mince	66	1954-1959	Sous pression dans le sol de fondation
Vega de tera	Rio tera Espagne	Contrefort	34	1956-1959	Cisaillement des contreforts trop souples au premier remplissage complet
Oros	Ceara Brésil	Remblai	54	1960-1960	Déversement de crue en cours de construction
Vajont	Fleuve piave Italie	Voûte mince	265	1960-1963	Glissement de terrain

A-A: année d'achèvement du barrage .

A-R: année de rupture du barrage.

Bibliographie

Ouvrage et article :

- [01] : M.HUG :
« Mécanique des fluides appliquées aux problèmes
d'aménagements et énergétiques ». Edition Eyrolles, 1975.
- [02] : C.I.G.B : Commission Internationale des Grands Barrages
« Les barrage risques aux tiers ». Bulletin 29, 1977,France.
- [03] : C.T.GREF : Centre Technique du Génie Rural des Eaux et des Forets
« calcul d'onde de submersion due à la rupture d'un barrage ».
Mars 1978,France.
- [04] : M.CARLIER :
« hydraulique générale et appliquée ». Edition Eyrolles, 1980.
- [05] : R.GARCIA et M.KAHAWITA :
« Numérical solution of the SAINT-VENANT équations with
MAC-CORMACK finite différence scheme ». International
Journal for Numérid methods in fluids. vol 6 , 1986.
- [06] : FRANCIS DUPRIEZ :
« écoulement de liquide à surface libre ». Technique d'ingénieur.
Référence {R5} R2210, 1992.
- [07] : MARC DEMOULIN :
« écoulement instationnaire ». Technique d'ingénieur. Référence
{AF4} A 1920 . 1995.

- [08]: R.DAUTRAY-J.L.LIONS :
« analyse mathématique et calcul numérique » .Ed. Masson 1988.
- [09]: M.H.CHAUDHRY and S.M.BHALLAMUDI :
« computation of flows in Open-Channel transitions ». Jour. of
Hydr. Reseach, vol 30, No : 1,1992.
- [10]: J.P.NOUGIER :
« méthodes de calcul numérique ». Ed. Masson 1991.
- [11]: R.J.FENNEMA et M.H.CHAUDHRY :
« Explicit methods for 2-D transcient free surface flows ». Jour
of hydraulic enginneering, vol 116, No : 8, August, 1990.
- [12]: R.J.FENNEMA et M.H.CHAUDHRY :
« Implicit méthodes for two dimensional unsteady free surface
flows ». Jour of hydr. Research, vol 27, No : 3, 1989.
- [13]: D.EUVRARD :
« Résolution numérique des équations aux dérivées partielles.
Différence finies, éléments finis, méthodes des singularités ».
2^{lem} édition, 1993.
- [14]: J.M.HERVOUET et P.PECHON :
« Modélisation numérique des écoulements à surface libre ».
La houille blanche No : 2, 1991.
- [15]: M.ALTINAKAR et W.H.GRAF :
« Hydraulique fluviale ». vol 16, Tome 1.
Presses polytechniques universitaires romandes, 1993.
- [16]: JEAN A.CUNGE :
« Modèles mathématiques en hydraulique et en hydrologie ».
Technique D'ingénieur .Référence C180, Mai, 1995.

- [17] : G.NICOLLET et G.LABADIE :
« Modèles hydrauliques fluviaux ». Technique D 'ingénieur.
Référence C184, Mai, 1991.
- [18] : A.STROHMEIER :
« FORTRAN 77 ». Edition Eyrolles , 1985.
- [19] : N.KATOPODES et T.STRELKOFF :
« calcul bidimensionnel de l'onde de rupture d'un barrage ».
Université de California.Davis.1978.
- [20] : L.CARBALLADA :
« analyse d'un Dam Break sur une rivière aménagée ». Professeur
associe. Université Concordia .Montréal. H.B.89

Thèses :

- [21] : Mr. A.BERREKSI et A.BOUHADJI :
« simulation et analyse des écoulements bidimensionnelles à
surface libre en zones de transition ». Thèse d'ingénieur
d'état ENP, 1993.
- [22] : H.BENATSOU-M.K.BOUZID :
« analyse d'un écoulement instationnaire DAM-BREAK ». Thèse
d'ingénieur d'état ENP, 1992.
- [23] : L.DRIDI - M.NACER BEY :
« rejet thermique dans un canal prismatique ». Thèse d'ingénieur
d'état ENP , 1997.