

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR
D'ETAT EN HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

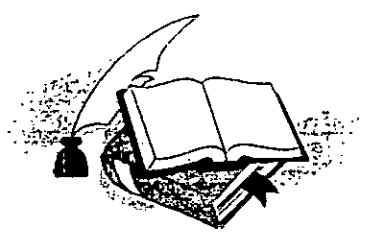
**CALCUL NUMERIQUE DE LA
PLUVIOMETRIE PAR LA
METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Proposé par :
Mr : HAMMOUM.H

Dirigé par :
Mr : HAMMOUM.H
Mr : BILEK.A

Réalisé par :

SI SALEM BELKACEM & KHEROUF MAHFOUD



-- PROMOTION 1998 --

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
MEMOIRE DE FIN D'ETUDE
POUR L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR
D'ETAT EN HYDRAULIQUE

THEME :

**CALCUL NUMERIQUE DE LA
PLUVIOMETRIE PAR LA
METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Proposé par :
Mr : HAMMOUM.H

Dirigé par :
Mr : HAMMOUM.H
Mr : BILEK.A

Réalisé par :

SI SALEM BELKACEM & KHEROUF MAHFOUD



-- PROMOTION 1998 --



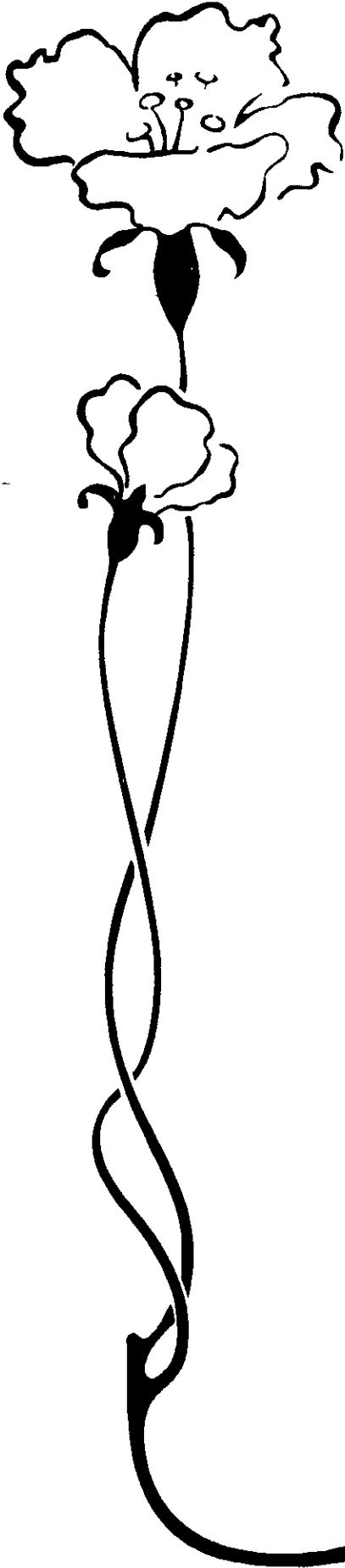
DEDICACES

**A tous ceux qui dont l'ombre est
partout dans le monde,
œuvrent pour que
la lumière de vérité jaillisse**

à tous ceux qui me sont très chers

sisalem

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



BENEGES

A mes parents

A mes frères et sœurs

A tous mes amis

Kherouf

REMERCIEMENTS

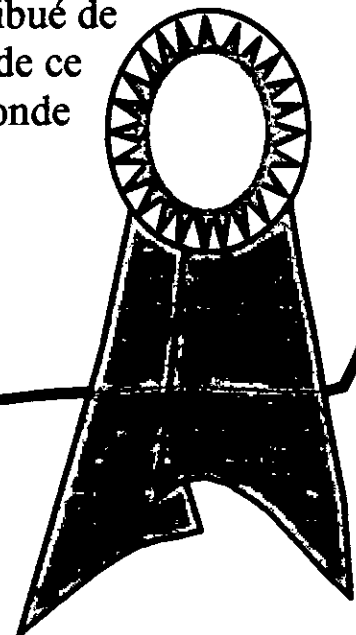
المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole National Polytechnique

Nous tenons d'abord à remercier notre bon dieu pour son aide et pour nous avoir permis de mener à bien ce travail.

Nous présentons également et tout particulièrement notre reconnaissance à Mr Hammoum et Mr Bilek pour nous avoir dirigé et pour les précieux conseils dont ils nous ont fait part durant tout ce travail.

Nous exprimons notre plus vive sympathie à tous les collègues et tous les enseignants pour la fraternelle et chaleureuse amitié dont ils nous ont entouré

que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, trouvent ici notre profonde reconnaissance



RESUME

Nous avons essayer de développer dans cette thèse le calcul de la pluviométrie par la méthode des éléments finis avec deux discrétisations différentes à savoir triangulaire et quadrilatérale, ensuite nous avons fait une étude comparative avec les méthodes classiques pour le calcul des précipitations. A la fin du travail, une application pratique du programme développé est présentée pour la région de Tizi-Ouzou

Mots clés : précipitation, Interpolation, élément de référence
Eléments finis, Quantité de pluie

ABSTRACT

We have tried to develop in this thesis the calculation of the precipitation by the method of elements finish with two different elements, then we have made a comparative study with classic methods for the calculation of precipitations. At the end of the work, an application practices the developed program is presented for the region of Tizi-Ouzou

Key words : precipitation, Interpolation, element of reference
elements finish, Quantity of rain

ملخص

حاولنا أن نتطرق في هذا الأنجاز إلى تقديم كيفية حساب كمية الامطار المتساقطة باستعمال طريقة العناصر المنتهية وبعد ذلك حاولنا إجراء مقارنة مع طرق أخرى لحساب ذلك
إحتتمنا العمل بوصف برنامج في الاعلام الالي يقوم بالحساب و ذلك لمنطقة تيزي وزو

PRINCIPALES NOTATIONS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

1. Notation matricielles :

- [U] : Matrice des coordonnées nodales
- [V] : Vecteur des valeurs nodales
- [N] : Vecteur des fonctions de forme

2. Lettres latines :

- A : Section
- P : Précipitation
- NEL : Nombre d'éléments
- V^r : Élément de référence
- V^e : Élément réel
- Q_T : Quantité de pluie totale
- Q_e : Quantité de pluie pour un élément
- W_i : Poids de gauss

3. Lettres grecques :

- ξ : Abscisses de gauss
- ε, η : Coordonnées de l'élément de référence
- τ^e : Transformation géométrique de l'élément réel à celui de référence

LISTE DES FIGURES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

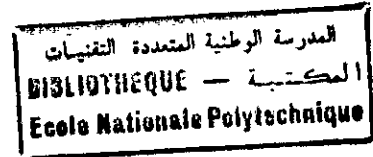
Chapitre 2 :

Figure (2-1) : schéma d'un bassin-versant	5
Figure (2-2) : schéma représentant la difficulté d'approche	11
Figure (2-3) : schéma représentant la facilité d'approche	11
Figure (2-4) : approche de Thiessen	12
Figure (2-5) : influence de la densité des stations sur les précipitations	13
Figure (2-6) : principe des facettes planes	14
Figure (2-7) : schéma pour la méthode des isohyètes	16
Figure (2-8) : schéma pour la méthode de Thiessen	17
Figure (2-9) : schéma pour la méthode des deux axes	18

Chapitre 3 :

Figure (3-1) : les éléments triangulaires	25
Figure (3-2) : les éléments quadrilatéraux	26
Figure (3-3) : positions interdites lors de la discrétisation	26
Figure (3-4) : élément de référence à une dimension	27
Figure (3-5) : élément de référence à deux dimensions (triangulaire)	28
Figure (3-6) : élément de référence à deux dimensions (quadratique)	28
Figure (3-7) : élément quadrilatéral réel et celui de référence	34
Figure (3-8) : élément triangulaire réel	37
Figure (3-9) : le triangle et les coordonnées barycentriques	40

SOMMAIRE



CHAPITRE 1 : INTRODUCTION

Introduction : 1

CHAPITRE 2 : ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

1. Introduction :	3
2. l'eau, une ressource naturelle :	3
2.1. introduction :	3
2.2. le cycle hydrologique :	4
3. les bassins versants :	5
3.1. introduction :	5
3.2. le bassin versant :	5
3.2.1. caractéristiques physiographiques :	6
3.2.2. caractéristiques physiques :	6
4. rappels d'analyse statistique :	7
4.1. introduction :	7
4.2. quelques définitions :	7
4.2.1. fréquence :	7
4.2.2. échantillon et population :	7
4.3. critique des données :	7
4.3.1. manque de données :	7
4.3.2. qualité des données :	8
5. analyse et mesure des précipitations :	8
5.1. introduction :	8
5.2. types de précipitations :	8
5.2.1. précipitations cycloniques :	8
5.2.2. précipitation de convection :	8
5.2.3. précipitations orographiques :	9
5.3. les précipitations et le relief :	9
5.4. difficulté d'une mesure correcte :	9
5.5. le réseau pluviométrique :	10
5.5.1. densité du réseau :	10
5.5.2. emplacements des stations pluviométriques :	10
5.6. quelques principes d'interpolations :	11
5.6.1. position du problème :	11
5.6.2. principe de Thiessen :	12
5.6.3. principe des facettes planes :	14
5.7. volume total des précipitations d'une région :	15
5.7.1. méthode de la moyenne arithmétique :	15
5.7.2. méthode des isohyètes :	15

5.7.3. méthode de Thiessen :	16
5.7.4. méthode des deux axes :	18
5.7.5. méthode des éléments finis :	19
6. conclusion :	20

CHAPITRE 3 : METHODE DE CALCUL

1. introduction :	21
2. généralités :	21
2.1. approximation nodale :	21
2.2. approximation par éléments finis :	23
2.3. table de définition des nœuds et éléments :	24
3. forme d'éléments classiques :	25
3.1. éléments triangulaires :	25
3.2. éléments quadrilatéraux :	26
4. règles de discrétisation d'un domaine en éléments finis :	26
5. méthodes de construction des fonctions nodales :	27
5.1. élément de référence :	27
5.2. transformation géométrique :	28
5.3. approximation sur un élément de référence :	30
5.3.1. choix de la base polynomiale :	30
5.3.2. construction des fonctions nodales :	31
6. construction des fonctions nodales pour un élément quadrilatéral :	34
7. construction des fonctions nodales pour un élément triangulaire :	37
8. transformation et évaluation de l'intégrale :	39
8.1. évaluation de l'intégrale pour un élément triangulaire :	40
8.1.1. rappel sur les coordonnées barycentriques :	40
8.1.2. application :	41
8.2. évaluation de l'intégrale pour un élément quadrilatéral :	43
9. conclusion :	45

CHAPITRE 4 : ORGANISATION INFORMATIQUE DU CALCUL

1. introduction :	46
2. algorithmes de résolution :	46
2.1. discrétisation triangulaire :	46
2.2. discrétisation quadrilatérale :	48
3. structure des fichiers de données :	49
3.1. pour les méthodes classiques :	49
3.1.1. méthode de Thiessen :	49
3.1.2. méthode des isohyètes :	49
3.1.3. méthode des deux axes :	49
3.2. pour la méthode des éléments finis :	50

3.2.1. discrétisation triangulaire :	50
3.2.2. discrétisation quadrilatérale :	50
4. structure des fichiers résultats :	51
4.1. cas des discrétisations triangulaires :	51
4.2. cas des discrétisations quadrilatérales :	51
5. description des données :	51
6. organigrammes de calculs :	52
6.1. discrétisation triangulaire :	52
6.2. discrétisation quadrilatérale :	54
7. taille et structure des deux programmes :	56
7.1. discrétisation triangulaire :	56
7.2. discrétisation quadrilatérale :	56
8. les unités :	57
9. conclusion :	57

CHAPITRE 5 : CONFRONTATION DU MODELE MATHEMATIQUE

1. introduction :	58
2. confrontation du modèle :	58
2.1. avec la méthode arithmétique :	58
2.2. avec la méthode des facettes planes :	59
2.3. avec la méthode de Thiessen :	60
2.4. avec la méthode des isohyètes :	60
2.5. avec la méthode des deux axes :	61
3. conclusion :	62

CHAPITRE 6 : CONCLUSION

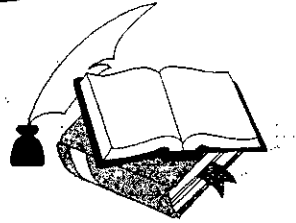
Conclusion :	63
--------------------	----

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ANNEXES

Annexe 1 : intégration numérique :	65
Annexe 2 : Effet de l'altitude avec la méthode des éléments finis :	70
Annexe 3 : listing des fichiers et des programmes :	74

INTRODUCTION



INTRODUCTION :

En considérant la complexité des calculs une chose du passé , l'avènement de l'ordinateur a révolutionné les sciences de l'ingénieur. Des problèmes considérés autre fois insolubles avec les méthodes classiques, sont maintenant facilement accessibles avec les méthodes numériques; une de ces méthodes est la méthode des éléments finis. De ce point de vue elle constitue un outils formidable à la disposition de l'ingénieur.

Pour évaluer le volume total des précipitations sur un bassin ou une région bien déterminée, il faut mesurer la hauteur moyenne de pluie s'étalant sur tout le bassin.

Voilà donc posé dès le départ un problème d'interpolation puisque la technique d'implantation d'un réseau relativement dense de pluviomètres impérativement nécessitée par la mesure cohérente de la lame d'eau moyenne précipitée, s'avère la solution généralement très coûteuse, ou même parfois impossible.

Si le problème de la mesure de la quantité d'eau ainsi recueillie par chaque appareil est parmi les objets de l'hydrologie , la diversité réelle de ces derniers et des préoccupations sociales qui les concernent ont suscité des approches parcellaires, parfois justifiables, mais souvent préjudiciables à la compréhension globale des phénomènes hydrologiques.

Dans ce présent travail, et dans le but d'apporter une solution à de tels problèmes, on a consacré le second chapitre comme analyse bibliographique par nature puisqu'il couvre les notions essentielles de l'hydrologie, à savoir, les définitions des concepts de base ayant trait au problème des précipitations et les différentes méthodes classiques proposées pour l'estimation de la lame d'eau moyenne précipitée sur une région bien déterminée.

Partant donc des différents paramètres influençant la pluviométrie du point de vue quantitatif et après avoir touché aux dimensions essentielles du problème, à savoir, la statistique et le relief ; nous avons essayé de développer de manière assez courte et aussi restreinte le problème des précipitations vue des différents principes d'interpolation et leur modélisation mathématique sans pour autant toucher aux méthodes modernes d'interpolation, vue leur complexités de calcul et le fait parfois qu'elles font intervenir des paramètres dont on a aucune information.

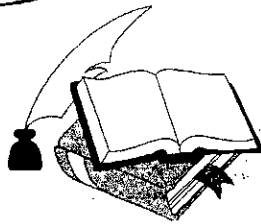
Le chapitre 3 quant à lui est consacré de manière à remédier au problème d'interpolation tout en utilisant l'approximation par éléments finis. Il traite les différents types d'éléments, voir triangulaire et quadrilatérale, ainsi que les règles de discrétisation des domaines appliquées dans notre cas au phénomène des précipitations. Y sont présentées aussi dans ce chapitre les méthodes de construction des fonctions inconnues sur ces éléments pour les problèmes de classe C^0 .

Dans le chapitre 4 et dans le but d'exploiter au mieux le développement des moyens de calcul sur ordinateurs qui joue un rôle déterminant, on a développé deux programmes informatiques avec les organigrammes correspondants, suivant les normes fortran 77, qui calculent la quantité de pluie tombée sur une région donnée en utilisant les différentes méthodes classiques d'une part, et en utilisant l'approximation par éléments finis avec ses différentes discrétisations de l'autre.

Dans le but de valider notre modèle mathématique nous avons jugé utile de le confronter en chapitre 5 à des résultats de calcul des méthodes classiques citées au chapitre 2. Et comme région d'étude nous avons arrêté notre choix sur la wilaya de TIZI-OUZOU.

En annexe, l'intégration numérique y figure car elle représente l'outil mathématique bien qu'elle constitue une partie intégrante de la méthode des éléments finis. Là essentiellement nous avons traité de façon bien détaillée la méthode de Gauss puisque c'est elle qui mène à bien le calcul assisté par ordinateur. Ensuite et en vue de tenir compte de l'altitude des stations dans le modèle éléments finis, on a présenté dans cette annexe aussi les équations de base permettant le calcul avec ce paramètre.

ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE



1) INTRODUCTION.

L'hydrologie est l'une des sciences les plus anciennes que l'on connaisse, mais son évolution a été extrêmement lente dans l'histoire de l'humanité. Une lenteur qui s'explique par le fait que l'épanouissement d'une discipline a toujours été fonction des besoins du moment et des problèmes particuliers que son ignorance peut engendrer.

Comme l'un des premiers soucis de l'homme a été la transformation mécanique de la ressource eau, son transport et sa distribution; l'hydrologie était la science qui étudiait les eaux terrestres, leur engins, leur mouvements et leur répartitions sur notre planète, leur propriétés physiques et chimiques, leur interactions avec l'environnement physique et biologique et leur influences sur les activités humaines. Les problèmes de qualité étant alors inexistant, c'est l'hydraulique qui a été l'objet des premières préoccupations.

Le véritable essor de l'hydrologie a commencé à partir des années 30, le développement agricole industriel et social de ces années et la croissance démographique accompagnée d'une amélioration notable du niveaux de vie ont obligé les ingénieurs à penser sérieusement qu'une étude approfondie de cette ressource était indispensable afin de planifier son utilisation de façon optimale et rationnelle pour les années avenir.

2) L'EAU, UNE RESSOURCE NATURELLE

2.1. INTRODUCTION

L'eau a toujours hanté l'esprit des hommes. Des différents symboles qu'elle suggère, le plus perceptible est celui du mouvement et de la vie. La réalité dépasse de beaucoup cette évocation. Si, depuis leur apparition dans les océans primitifs, les êtres vivants participent plus ou moins au « cycle de l'eau », c'est que, réciproquement, cette substance conditionne leur existence : elle est le constituant principal de leur organisme et de leur nourriture.

Élément de la vie quotidienne, l'eau est si familière que l'on en oublie souvent l'importance et l'originalité. Elle doit à ses caractères physico-chimiques très particuliers son rôle de premier plan à la surface du globe.

Bien qu'apparemment inépuisable, l'eau est cependant distribuée très inégalement entre les régions et selon les époques.

Le problème de l'eau est, à l'heure actuelle, loin d'être résolu. Il représente encore, sur le plan des ressources, le souci majeur de nombreuses nations. D'autre part, l'eau constitue toujours un danger pour l'homme, qui reste particulièrement désarmé face aux grands phénomènes hydrologiques : crues, pluies dévastatrices. Enfin, l'eau répand les déchets, les substances toxiques que l'homme fabrique en quantité croissante.

Ces aspects, parmi de nombreux autres, suffisent à justifier le nombre des disciplines qui s'intéressent à l'eau sous toutes ses formes, en particulier : l'océanographie, la glaciologie, l'hydrogéologie, la limnologie, etc., qui composent l'hydrologie, science des eaux naturelles ; l'hydrodynamique et l'hydraulique, qui s'intéressent à l'équilibre et au mouvement de l'eau à l'état liquide.

2.2. LE CYCLE HYDROLOGIQUE

L'ensemble de tous les processus de transformation de l'eau sur la terre s'appelle « cycle hydrologique », ses phases principales sont les suivantes :

- l'évaporation de l'eau des océans, du sol et des plantes
- la formation dans l'atmosphère de nuages, de brouillards et leur transport par le vent
- condensation de l'eau et précipitation sous forme de pluie, de neige, grêle
- Ruissellement de surface, infiltration, percolation, écoulement souterrain, retour en surface (sources, puits...).
- Formation de courants de surface, de rivières, de fleuves et leur décharge dans les lacs, les mers et les océans.
- Evaporation et répétition du cycle.

3) LES BASSINS-VERSANTS [1]

3.1. INTRODUCTION

L'adoption d'une unité géographique restreinte ayant certaines caractéristiques communes, s'avère le meilleur moyen qui facilite l'analyse des phénomènes hydrologiques et des composantes du cycle hydrologique en particulier.

3.2. LE BASSIN-VERSANT

Si l'on considère une section droite d'un cours d'eau, on peut lui associer un bassin versant, lieu géométrique des points de l'espace géographique où les précipitations sont susceptibles de contribuer au débit observé dans cette section. On définit aisément le bassin versant topographique limité par une ligne de partage des eaux, mais celui-ci peut différer du bassin versant réel à cause des circulations souterraines qui drainent parfois des eaux extérieures au bassin topographique ou, au contraire, drainent des eaux du bassin topographique hors de ce dernier.

Le concept de bassin versant peut être illustré par l'image suivante :

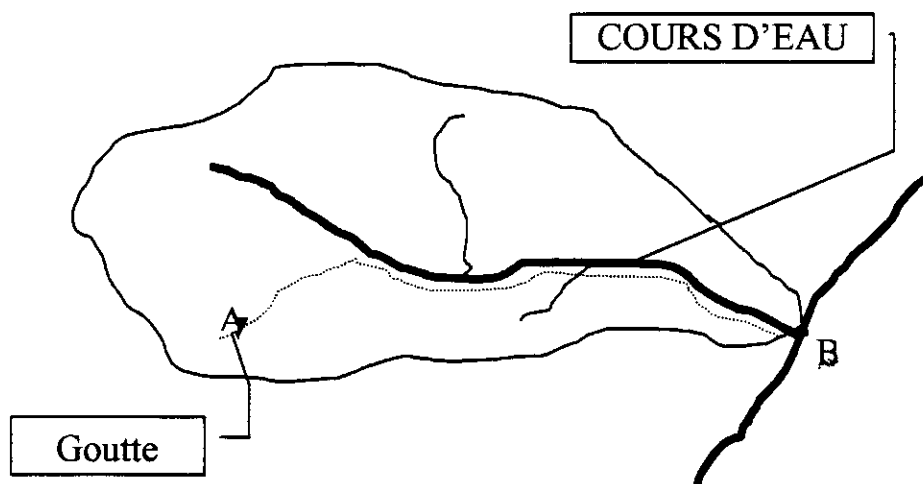


Figure 2.1 : schéma de bassin-versant

Une goutte d'eau tombant sur une région particulière A se met en mouvement par la force de gravité, et si elle n'est pas retenue sur son chemin ou ne s'est pas évaporée, elle se rendra jusqu'à un cours d'eau, un lac ou la mer.

Ainsi défini, il est évident que la limite d'un bassin est le lieu géométrique des points les plus élevés.

3.2.1. CARACTERISTIQUES PHYSIOGRAPHIQUES :

Elles expliquent généralement la différence des régimes d'écoulement pourront exister entre deux bassins soumis aux mêmes conditions climatiques. On parlera ici essentiellement de la pente du terrain et des cours d'eau, ayant un effet important sur le temps de réponses du bassin ; l'aspect qui influence d'une part la fonte des neiges et de l'autre part le contrôle en partie de l'évapotranspiration par le biais du tapis végétal.

3.2.2. CARACTERISTIQUES PHYSIQUES :

Elles jouent un rôle essentiel dans l'étude de certaines composantes du cycle hydrologique (l'infiltration, l'évaporation, etc.). les plus importantes ayant trait à la détermination de la précipitation sont :

□ La forme

C'est la configuration géométrique telle que projeté sur un plan horizontal. Elle affecte directement le temps de réponse du bassin

□ L'élévation

Les variations d'élévations à l'intérieur d'un bassin ainsi que l'élévation moyenne sont des données essentielles à l'étude de la température et de la précipitation. Son portrait le plus précis est donné par sa courbe hypsométrique exprimant le pourcentage de superficie du bassin au-delà d'une certaine élévation.

□ L'orientation :

En entend par ce mot la direction géographiques du bassin suivant la résultante de la pente générale. Ce paramètre est très important dans l'étude de l'ensoleillement du bassin étant un facteur essentiel de calcul de l'évaporation

4) RAPPELS D'ANALYSE STATISTIQUE

4.1 INTRODUCTION

L'analyse des données est généralement le premier pas à franchir dans l'étude d'un tel phénomène complexe comme les précipitation ,ces données hydrologiques constituent en générale le seul outils dont dispose l'hydrologue pour comprendre le comportement d'un phénomène donné. On travail généralement avec des données de précipitation, d'évaporation, de transpiration et avec des cartes topographiques dont les lois physiques sont aléatoires ou difficilement prévisibles.

4.2 QUELQUES DEFINITIONS

4.2.1 FREQUENCE

La fréquence d'observation d'un phénomène décrit par une série d'observations est la relation entre le nombre de fois qu'elle se produit dans la série et le nombre total d'observations par lequel le phénomène peut être défini

4.2.2 ECHANTILLON ET POPULATION

Une série d'observation d'un phénomène quelconque s'appelle échantillon . l'ensemble de toutes les observations possibles de ce phénomène s'appelle population.

4.3 CRITIQUE DES DONNEES

On rencontre généralement deux types de problèmes :

4.3.1 Manque de données :

Causé par le manque de stations ou d'enregistrements à leur niveaux, ce problème est généralement comblé par certaines méthodes de simulation et de régionalisation en générant des séries fictives ayant des caractéristiques statistiques particulières

4.3.2 Qualité des données

La mauvaise qualité des données vient en général du fait que les données ne sont pas homogènes ou qu'elles sont inconsistantes (erreur systématique).

5) ANALYSE ET MESURE DES PRECIPITATIONS

5.1 INTRODUCTION :

Les précipitations constituent un phénomène physique qui décrit le transfert d'eau, dans sa phase liquide ou solide entre l'atmosphère et le sol. Les précipitations représentent l'élément le plus important du cycle hydrologique

On distingue pour cela les trois étapes suivantes :

- Refroidissement de l'air jusqu'à saturation (point de rosée)
- Changement de phase de vapeur d'eau en liquide et / ou solide
- Croissance de gouttelettes d'eau jusqu'à la formation de gouttes de vapeur d'eau

5.2 TYPES DE PRECIPITATIONS [2]

On classe les précipitations atmosphériques en trois types différents :

5.2.1 PRECIPITATIONS CYCLONIQUES :

Ce type de précipitation est associé aux surfaces de contact entre les masses d'air de températures et d'humidités différentes, il produit généralement des précipitations importantes et prolongées

5.2.2 PRECIPITATIONS DE CONVECTION

Par temps calme, et après chauffage des masses d'air par la radiation solaire ; ces dernières se dilatent, s'élèvent et se refroidissent adiabatiquement jusqu'à atteindre le point de condensation. la durée de ce type de précipitation est assez courte mais son intensité est très grande.

5.2.3 PRECIPITATIONS OROGRAPHIQUES

Vient de l'arrivée des vents chargés d'humidité, soufflant des océans vers la terre et abordant les zones montagneuses.

5.3 LES PRECIPITATIONS ET LE RELIEF :

En général, les précipitations atmosphériques sur les régions montagneuses ne sont pas bien connues, malgré leur importance quantitative. La cause principale de ce manque de données est la difficulté d'accès aux stations météorologiques et le fait que la densité de population de ces régions est faible.

Pour remédier à ce problème on utilisera le fait que les précipitations augmentent avec l'altitude, une augmentation qu'on exprime généralement par le gradient hypsométrique de précipitation (augmentation de précipitation pour 1 mètre d'élévation).

Ce gradient hypsométrique est positif jusqu'à une certaine altitude au-delà de laquelle il change de signe, l'élévation de ce point dit point d'inversion dépend de plusieurs facteurs tel que l'élévation des terrains avoisinants, l'orientation de la montagne, la proximité relative de l'océan, etc.

5.4 DIFFICULTE D'UNE MESURE CORRECTE

La technique de mesure des précipitations la plus ancienne et la plus simple consiste à utiliser un pluviomètre, sorte de seau calibré à bords vifs, définissant une surface réceptrice standard de collection des précipitations. La hauteur au-dessus du sol doit être définie au préalable ; les géométries du pluviomètre et de son support introduisent, en présence de vent même modéré, des zones tourbillonnaires perturbatrices, et enfin les interactions de bâtiments ou d'arbres trop proches sont toujours à éviter. Il faut implanter un réseau relativement dense de pluviomètres si l'on veut estimer, par exemple, les hauteurs d'eau reçues par un bassin versant.[3]

La hauteur des précipitations est définie comme l'épaisseur comptée suivant la verticale de la lame d'eau qui s'accumulerait sur une surface horizontale, si toutes les précipitations reçues par celle-ci s'y trouvaient immobilisées.

La difficulté de la mesure s'explique alors par les facteurs suivants :

- Les perturbations aérodynamiques créées par le pluviomètre modifie plus ou moins le champs des précipitations en créant dans son voisinage immédiat des survitesses et des tourbillons qui affectent la quantité de pluie ou de neige captée.
- Une mesure ne peut jamais être répétée .
- L'échantillon relevé par le pluviomètre est petit et moins représentatif que l'hétérogénéité spatiale de la pluie sur la zone considérée est importante

5.5 LE RESEAU PLUVIOMETRIQUE :

5.5.1 DENSITE DU RESEAU

La densité optimum du réseau pluviométrique dépend de l'hétérogénéité spatiale des pluies dans la région étudiée (elle est plus forte en montagne qu'en plaine) et du but poursuivi dans l'étude (étude des crues , prospection des modules pluviométriques, etc.)

Ici nous pourrions dire que l'erreur de l'estimation de la lame d'eau moyenne précipitée augmente avec la diminution de la densité.

5.5.2 EMBLACEMENTS DES STATIONS PLUVIOMETRIQUES :

Vue l'intérêt que présente la mesure pluviométrique, la disposition des stations doit répondre à certains critères. Il faut donc :

- Les disposer de manière à pouvoir établir à partir de leur relevés des profils pluviométriques donnant la variation de la hauteur des précipitations avec l'altitude.
- Pour l'estimation de débits à partir des précipitations, les stations ne doivent être réparties uniformément mais disposées de façons à contrôler chacune une zone d'égal débits pluviométriques.
- La nécessité d'implanter les postes pas trop loin des lieux habités et des impératifs d'économie doit aussi être prise en considération.
- Eviter de les implanter au voisinage immédiat d'une crête toujours génératrice de remous et au voisinage des (arbres, bâtiments, etc.).

5.6 QUELQUES PRINCIPES D'INTERPOLATION : [4]

5.6.1 POSITION DU PROBLEME :

L'étude de nombreux phénomènes naturels qui se développent dans l'espace, repose sur des données acquises ponctuellement ; par exemple la pluie n'est connue qu'à partir des observations sur un réseau de pluviomètres. Pour de nombreuses applications, cette connaissance spatiale discrète est insuffisante.

Ainsi le schéma ci-dessous où nous avons reporté les valeurs expérimentales d'une fonction continue dans l'espace, n'est pas d'une interprétation facile et immédiate.

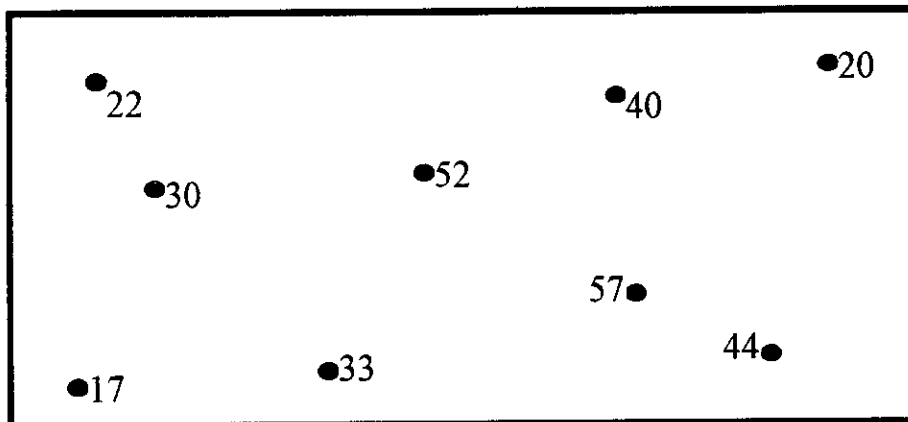


Figure 2.2

Au contraire, la représentation suivante permet d'un premier coup d'œil d'avoir une idée générale du phénomène.

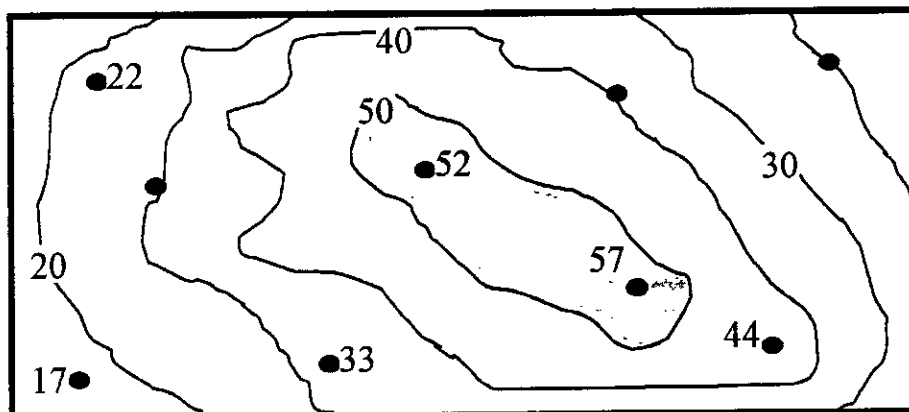


Figure 2.3

Etablir une cartographie d'un phénomène spatialement structuré répond à des besoins multiples. C'est premièrement un support qui permet d'évaluer l'intensité du phénomène en dehors des points d'observation, pour répondre à des questions ponctuelles : quelle est l'altitude d'un site ? quelle est la pluviométrie en un lieu ?

Un autre intérêt est de permettre d'obtenir une estimation globale de l'ampleur d'un phénomène sur une région déterminée : quel est le volume précipité moyen pendant une période de temps et sur un bassin versant donné ?

Dans toute la suite, nous illustrerons nos propos par l'exemple de l'étude du phénomène des précipitation car c'est le plus riche pour illustrer les problèmes des variables spatialement structurées .

5.6.2 PRINCIPE DE THIESSEN :

Dés 1911, Thiessen proposait une méthode pour évaluer des moyennes spatiales sur un domaine à partir d'information ponctuelles, d'une façon sous-jacente, la méthode de Thiessen est une technique d'interpolation basée sur la loi du plus proche voisin.

Supposons que la précipitation $P(x)$ soit connue en un certains nombres de points notés x_i . Thiessen admet qu'en un point quelconque x différent de x_i , on peut évaluer $P(x)$ par l'estimateur $P'(x)$ ainsi défini :

$$P'(x) = P(x_k) \quad (2.1)$$

(x_k étant parmi tous les x_i , celui qui est le plus proche de x).

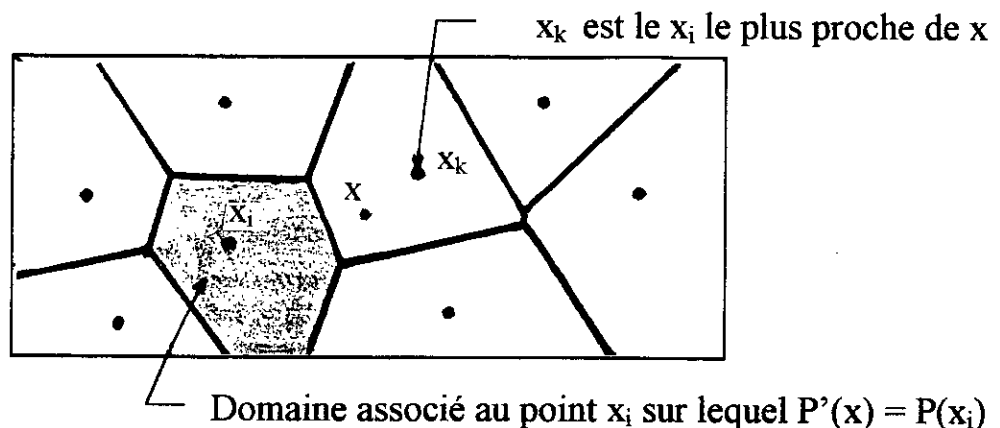


Figure 2.4 : approche de Thiessen .

L'unique avantage de cette méthode réside dans sa simplicité car on ne dispose d'aucune information objective sur la représentativité des interpolations.

Les schémas ci-dessous présentent le problème en se basant sur l'importance ou non de la densité des points d'échantillonnage x_i .

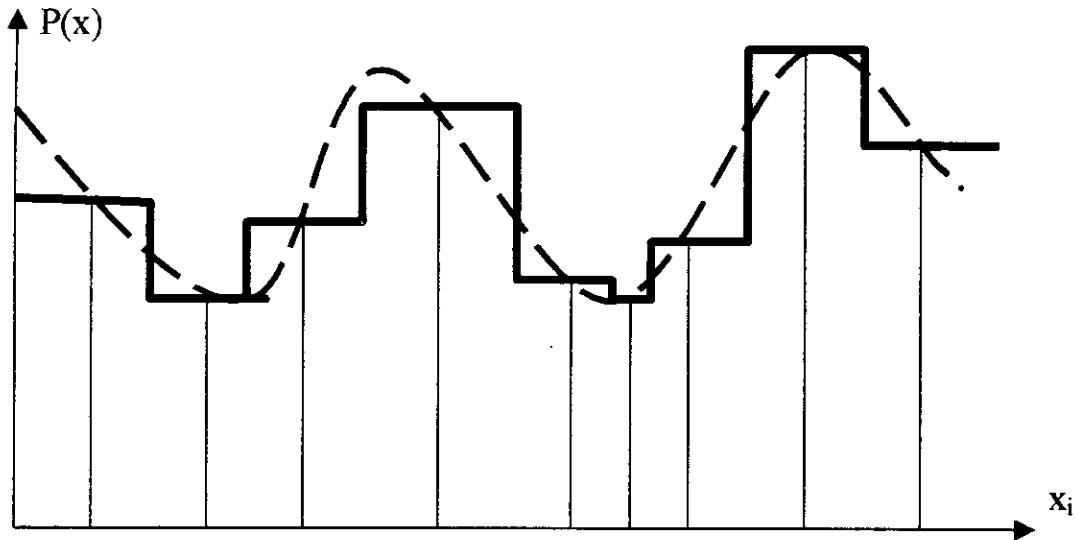


Figure 2.5.a : Forte densité

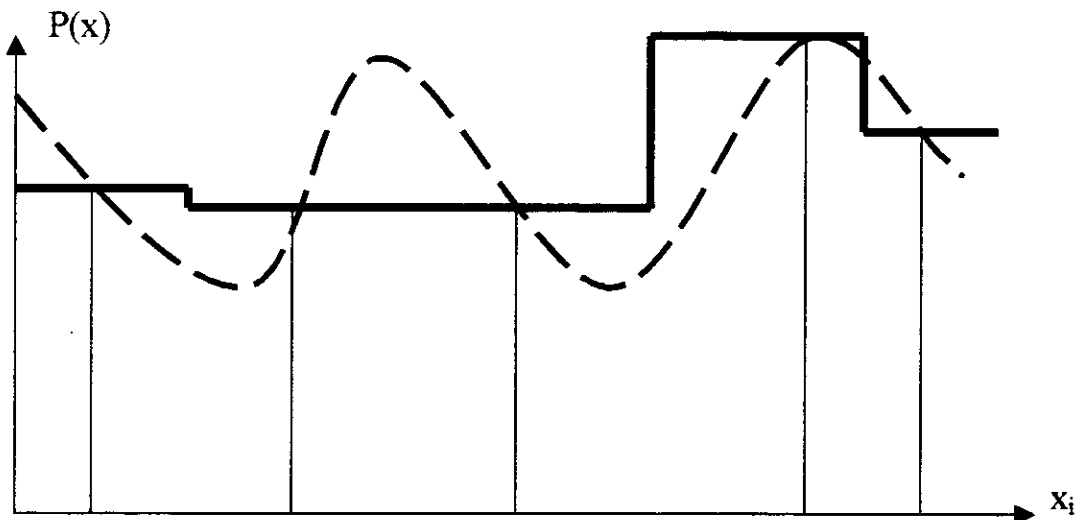


Figure 2.5.b : Faible densité

$P(x)$: hauteur des précipitations x_i : abscisse de la station i
 ——— Courbe approchée par Thiessen
 - - - Courbe réelle de la distribution des précipitations.

Figure 2.5 : influence de la densité des points d'échantillonnage sur la hauteur de précipitation

5.6.3 PRINCIPE DES FACETTES PLANES

Ce principe se base sur l'approche de la fonction $P(x)$ par $P'(x)$ qui soit un plan. Partant du principe que deux points sur une courbe, s'ils sont proches, peuvent engendrer une tangente qui soit confondue à la corde. De même une surface peut être approchée localement par son plan tangent, et si on dispose des valeurs de $P(x_i)$ en trois points x_i, x_j, x_k suffisamment proches, on pourra confondre $P(x)$ et le plan $P'(x)$ passant par $P(x_i), P(x_j), P(x_k)$.

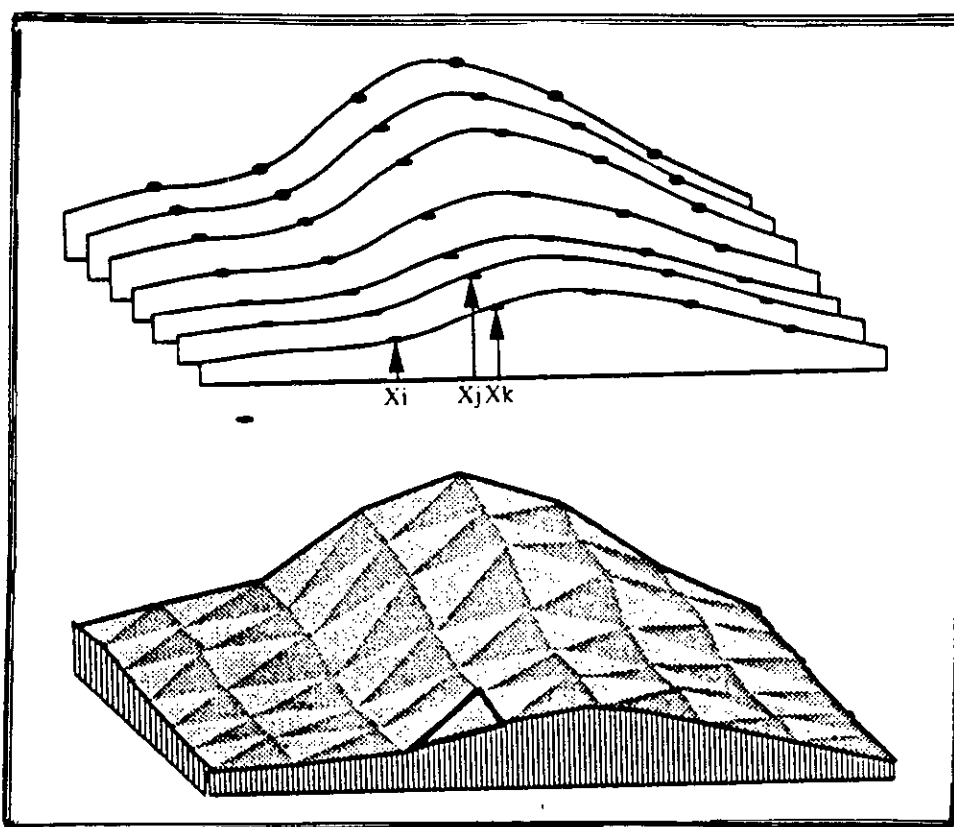


Figure 2.6 : schéma explicatif du principe des facettes planes

Comparée à la méthode de Thiessen, les points x_i seront liés entre eux de façon à couvrir le domaine d'un ensemble de triangles ayant pour sommets les x_i et qui seront les plus compacts possibles. A l'intérieur de ces triangles les $P'(x)$ sont des interpolations linéaires

Ainsi présentée, cette méthode dite des facettes planes repose sur le principe qu'elle soit sensiblement une moyenne entre les $P(x_i)$ des trois plus proches voisins.

5.7 VOLUME TOTAL DES PRECIPITATIONS D'UNE REGION :

Il s'agit là de déterminer la hauteur moyenne de pluie tout en s'appuyant sur les données disponibles procédant généralement de plusieurs stations pluviométriques où on a enregistré de façon ponctuelle la hauteur d'eau tombée.

La répartition géographique de la hauteur de pluie est loin d'être homogène puisque d'une part l'intensité de la précipitation diminue progressivement à partir du centre de l'averse, et de l'autre le problème de la représentativité de la mesure ponctuelle est encore présent; si cela est due à l'éloignement de la station, il fait preuve d'un rôle moins déterminant quant à l'estimation du volume moyen.

Nous allons voir dans ce qui suit les différentes méthodes existantes pour l'estimation de la précipitation moyenne pour en déduire enfin la fiabilité ou non des résultats obtenue par la méthode des éléments finis.

5.7.1 METHODE DE LA MOYENNE ARITHMETIQUE :

Cette méthode est strictement mathématique, elle prend comme moyenne d'une région la moyenne arithmétique des valeurs enregistrées en plusieurs stations durant une période fixe de temps

$$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i \quad (2.2)$$

n = nombre de stations.

P_i = précipitation enregistrée dans la station i

Dans cette méthode, aucune des stations n'est affectée par un coefficient de pondération géographique

5.7.2 METHODE DES ISOHYETES

Cette méthode se base sur les enregistrements disponibles dans les stations du bassin et d'autres stations avoisinantes, en traçant le réseau d'isolignes.

La hauteur moyenne des précipitations sur le bassin est donnée par la relation :

$$P = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^k s_i P_i \quad (2.3)$$

où

s_i = superficie comprise entre l'isohyète i et $i+1$.

$$P_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \quad (2.4)$$

h_i, h_{i+1} : hauteurs des précipitations des isohyètes i et $i+1$.

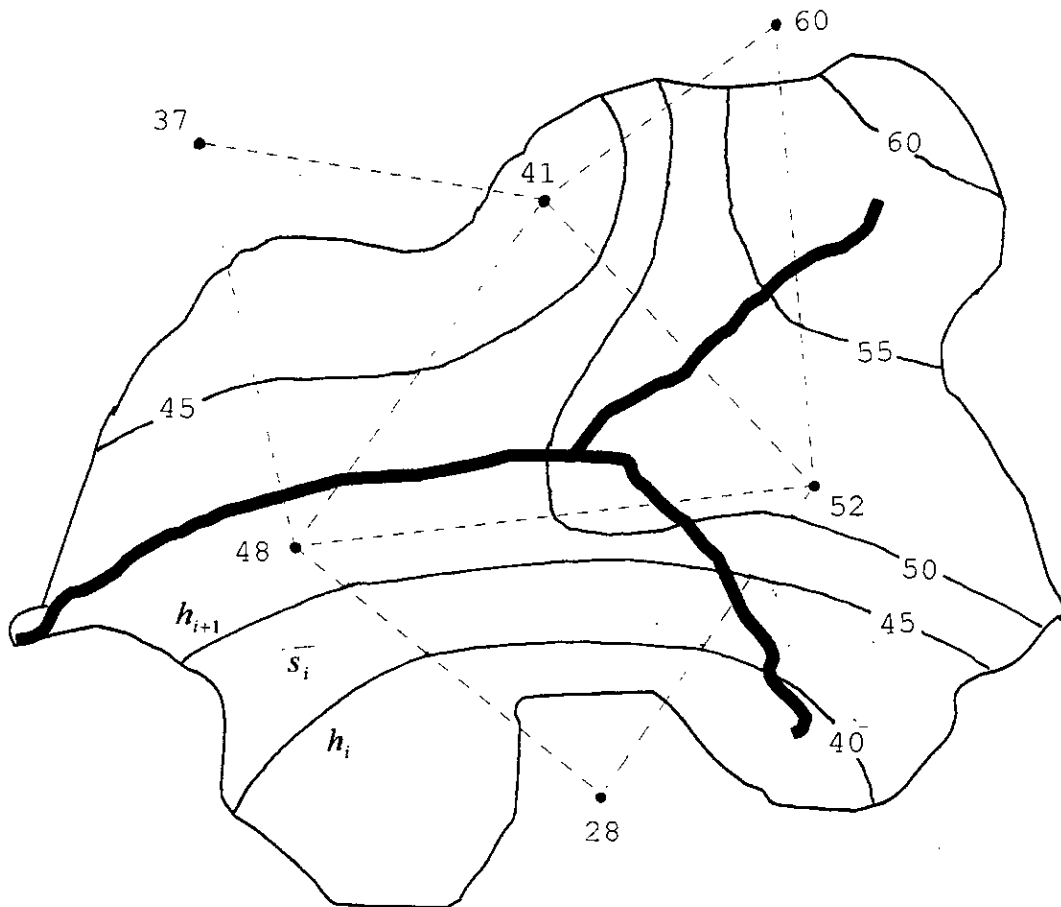


Figure 2.7 : méthode des isohyètes

Cette méthode est avantageuse par rapport à la méthode arithmétique puisqu'elle prend en considération la distribution géographique des stations, mais elle présente l'inconvénient d'être d'une application laborieuse

5.7.3 METHODE DE THIESSEN

Cette méthode dite méthode des polygones de Thiessen évalue la hauteur moyenne des précipitations sur un bassin d'après la moyenne pondérée des enregistrements pris en plusieurs stations.

Le facteur de pondération d'une station est la superficie du polygone formé par les médiatrices des segments d'union entre cette station et les stations avoisinantes ou avec les frontières physiques du bassin ou de la région

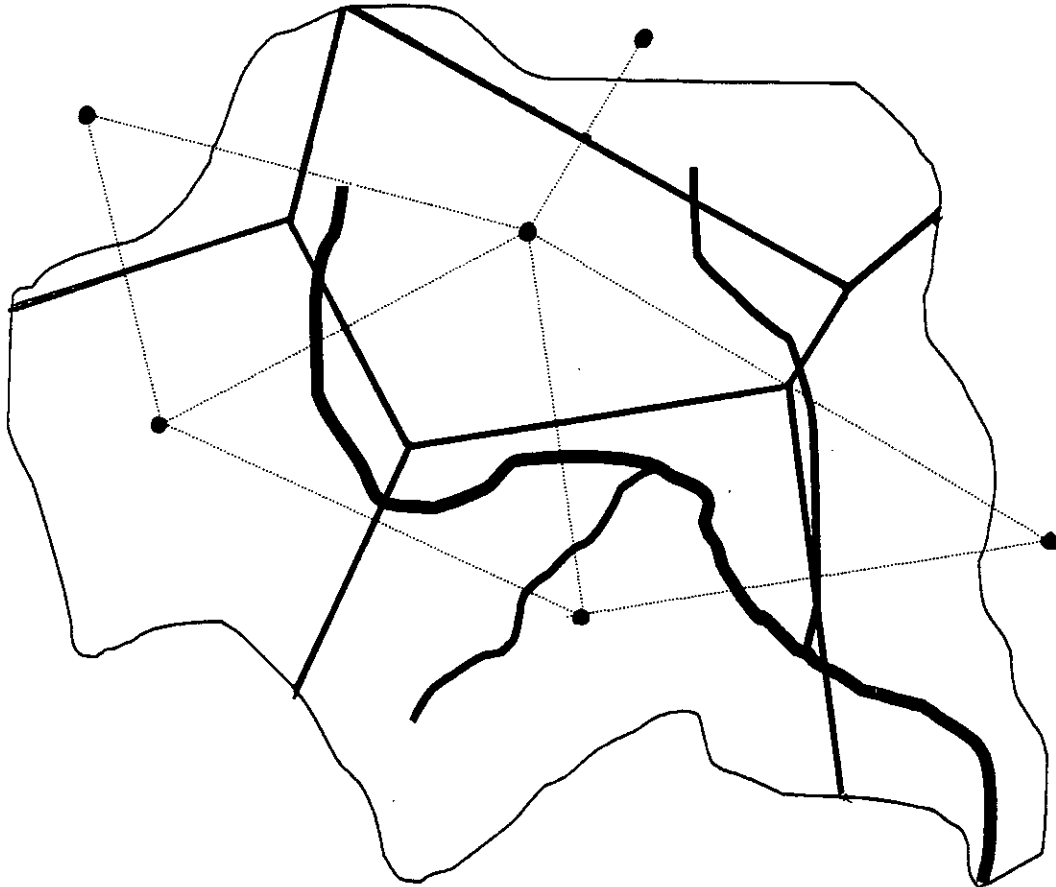


Figure 2.8 : méthode de Thiessen

La hauteur moyenne des précipitations est donnée par

$$P = \frac{1}{A} \sum s_i h_i \quad (2.5)$$

où

s_i = superficie du polygone de la station i .

h_i = hauteur enregistrée sur cette station

Cette méthode est purement géométrique, elle prend en considération les stations Périphériques qui ont un effet assez limité sur la hauteur moyenne des précipitations.

5.7.4 METHODE DES DEUX AXES :

En faisant intervenir l'éloignement de la station par rapport au centre géographique du bassin qui donne à la station son importance, cette méthode donne une autre dimension géométrique au calcul.

On trace une ligne droite allant du point le plus bas du bassin jusqu'au points le plus éloigné suivant le cours d'eau principal et sa prolongation virtuelle AB. Par la suite on trace la médiatrice de ce segment dont la partie qui est délimité par les limites du bassin s'appelle axe mineur CD. Finalement le segment de cet axe à l'intérieur du bassin est l'axe majeur EF.

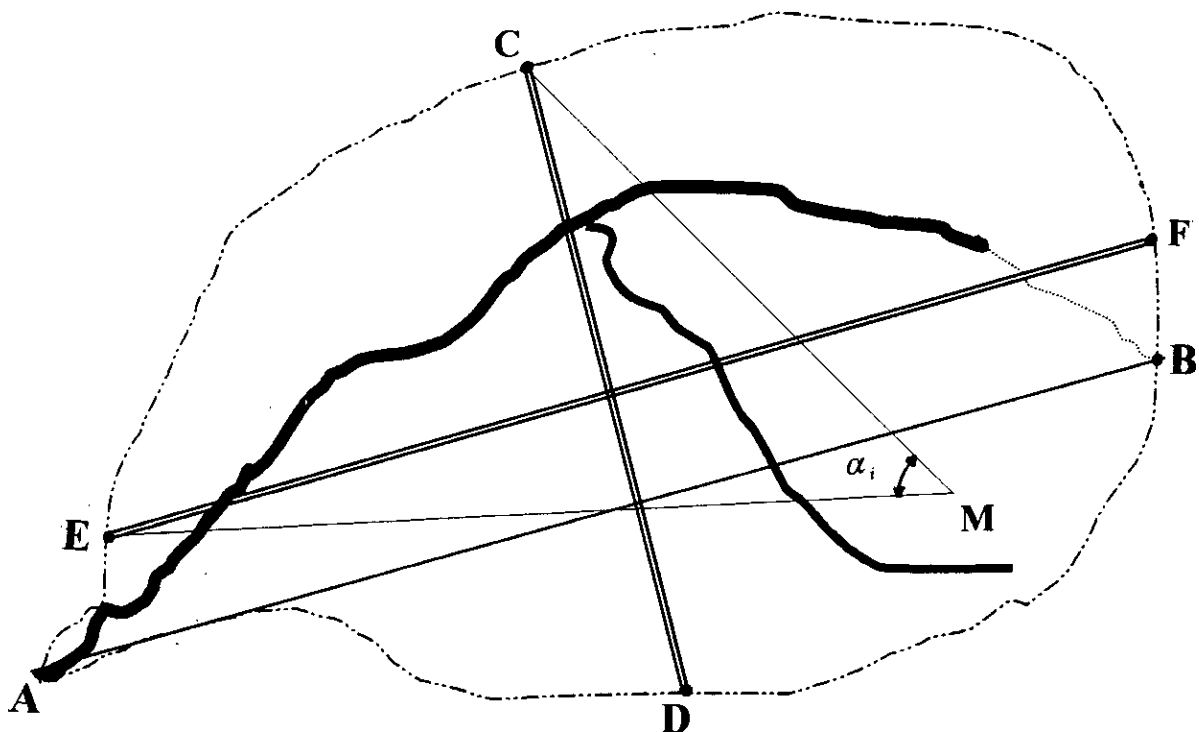


Figure 2.9 : méthode des deux axes

Soit M une station pluviométrique. Son coefficient de pondération est proportionnel à l'angle α_i formé par le point M et les extrêmes les plus éloignées des axes.

Le facteur de pondération d'une station est donné par la relation :

$$\omega_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} \quad (2.6)$$

n = nombre total de station.

Les précipitations moyennes sur le bassin seront :

$$P = \sum_{k=1}^n \omega_k P_k \quad (2.7)$$

P_k étant la précipitation enregistrée sur la station k

l'angle α_i est calculé d'après la formule :

$$\alpha_i = \cos^{-1} \left| \frac{l_1^2 + l_2^2 - a^2}{2l_1 l_2} \right| \quad (2.8)$$

tel que :

$$l_1 = ME \quad l_2 = MC \quad a = EC$$

la mise en application de la méthode requiert uniquement les mesures des distances entre chaque station et les extrémités les plus éloignées des axes, ainsi que les distances entre les extrémités de ces axes.

Cette méthode s'avère plus facile d'accès que les méthodes des isohyètes et de Thiessen et peut utiliser des stations très éloignées du bassin .

5.7.5 METHODE DES ELEMENTS FINIS :

L'évaluation des précipitations par la méthode des éléments finis est plus flexible que celles qui sont citées plus haut et tient compte d'un nouveau facteur qui est la pondération de l'altitude des stations pluviométriques

Cette méthode repose sur la discrétisation d'un milieu en éléments finis quadrilatérales ou triangulaires ou autre figure géométrique facilement définissable, avec, dans leur sommets, les stations de précipitations.

L'utilisation de cette méthode requiert :

- L'emploi des fonctions d'interpolation
- L'utilisation des méthodes d'intégration numérique (méthode de gauss)

Les détails du développement de la méthode sont illustrés dans le chapitre 3 .

6) CONCLUSION :

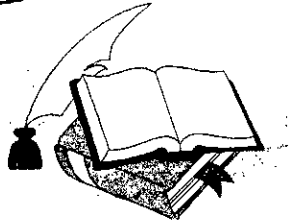
Les différentes méthodes exposées, souvent grossièrement approchées qui consistent à attribuer une certaine valeur moyenne de précipitation sur une région bien déterminée, nécessitent comme on l'a vu une connaissance très exacte de la variation de ce phénomène et dans le temps et dans l'espace.

Entre une méthode et une autre la différence figure uniquement dans la technique d'interpolation. Qu'elle soit géométrique ou rationnelle le problème de la densité du réseau pluviométrique ainsi que les différents critères pris en compte pour l'élaboration des coefficients de pondération, se pose fortement.

Toutefois, il faut souligner que ces méthodes sont asymptotiques et donnent donc des résultats semblables lorsque le nombre de stations croît jusqu'à la valeur optimale

Quant à la méthode des éléments finis que nous allons développer ci après dans le chapitre 3, nous découvrirons justement la façon par laquelle elle approche le problème.

METHODE DE CALCUL



1. INTRODUCTION

La complexité de la forme des phénomènes physiques en pratique, constitue la raison majeure du recours à la discrétisation en sous domaines de formes géométriques simples. Le calcul de la pluviométrie est l'un des problèmes où l'ingénieur utilisant la discrétisation en éléments finis, est amené à évaluer une intégrale des valeurs des précipitations tombantes sur une région, ayant la forme suivante :

$$Q = \int_V P(x,y) dV \quad (3.1)$$

Pour le faire, il faudrait tout d'abord penser aux différents types d'éléments qui existent, aux règles de discrétisation d'un domaine en éléments finis et le plus important, comment construire les fonctions d'interpolation (approchées) sur les éléments de telle manière à répondre aux exigences d'un tel phénomène.

Nous commençons dans ce chapitre par décrire l'approximation nodale d'une fonction U , sur un domaine V , pour introduire ensuite la notion d'approximation par éléments finis qu'on appliquera en fin de ce travail sur un exemple réel.

2. GENERALITES :

2.1. APPROXIMATION NODALE [7]

On peut approximer une fonction V dite exacte, par une fonction approchée U , construite sur la base des fonctions polynomiales linéairement indépendantes :

$$U(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_n x^{n-1} \quad (3.2)$$

Que nous pouvons écrire sous forme matricielle :

$$U(x) = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

Les coefficients α_i , sont les paramètres généralisés de l'approximation et n'ont en générale pas de sens physique cependant nous pouvons leur en donner un.

Pour cela, faisons en sorte que la fonction approchée, U, coïncide avec la fonction exacte V, aux « n » points x_i appelés : nœuds géométriques de l'approximation, alors :

$$\begin{aligned}
 U(x_1) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_1^{n-1} = V(x_1) = V_1 \\
 U(x_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_2^{n-1} = V(x_2) = V_2 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 U(x_n) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_n + \alpha_3 x_n^2 + \dots + \alpha_n x_n^{n-1} = V(x_n) = V_n
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Les valeurs V_i , ($i=1, n$), sont les variables nodales de l'approximation. Rappelons que le nombre des monômes constituant la fonction U doit être égal au nombre des variables nodales.

On réécrivant l'équation (3.4) sous forme matricielle on trouve :

$$\begin{bmatrix}
 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & \dots & x_1^{n-1} \\
 1 & x_2 & x_2^2 & & & x_2^{n-1} \\
 1 & x_3 & x_3^2 & & & x_3^{n-1} \\
 \vdots & & & & & \vdots \\
 \vdots & & & & & \vdots \\
 1 & x_n & x_n^2 & \dots & \dots & x_n^{n-1}
 \end{bmatrix}
 *
 \begin{Bmatrix}
 \alpha_1 \\
 \alpha_2 \\
 \alpha_3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \alpha_n
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 V_1 \\
 V_2 \\
 V_3 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 V_n
 \end{Bmatrix}
 \tag{3.5}$$

Ou d'une forme plus compacte :

$$[A]\{\alpha\} = \{V\}
 \tag{3.6}$$

Si la matrice [A] n'est pas singulière, c.a.d : $\det [A] \neq 0$, alors :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{V\}
 \tag{3.7}$$

En intégrant cette valeur de $\{\alpha\}$ dans l'équation :(3.3), nous trouverons :

$$U(x) = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle [A]^{-1} \{V\} \quad (3.8)$$

Et si on pose :

$$\langle N(x) \rangle = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle [A]^{-1} \quad (3.9)$$

Alors l'équation (3.3) prendra la forme suivante :

$$U(x) = \langle N(x) \rangle \{V\} \quad (3.10)$$

Qu'on peut aussi écrire sous forme plus précise :

$$U(x) = \langle N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x) \rangle \{V\} \quad (3.11)$$

Tel que les fonctions $N_i(x)$, sont les fonctions d'interpolations nodales ou fonctions de forme et qui vérifient la relation suivante :

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad i = 1, n \quad (3.12)$$

Ce type d'approximation est appelé approximation nodale, constitué dans la base des variables nodales V_i .

2.2. APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS : [7]

La construction d'une fonction approchée $U(x)$ est de plus en plus difficile que le nombre 'n' des nœuds ou des paramètres V_i devient plus important. Le problème se complique encore plus si le domaine d'intégration V a une forme complexe, et si de plus la fonction $U(x)$ doit satisfaire des conditions aux limites sur les frontières de V .

La méthode de l'approximation nodale qui procède par la subdivision en sous domaine, simplifie au mieux la construction de la fonction approchée $U(x)$ et s'adapte bien du point de vue calcul à la programmation sur ordinateur.

La méthode consiste à [6]:

- Discrétiser le domaine V en un nombre finis de sous domaines ou éléments, V^e .
- Définir ensuite une fonction approchée $U^e(x)$, différente sur chaque élément.

L'approximation nodale sur chaque élément V^e ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur le domaine V^e et sur sa frontière.

Les fonctions approchées $U^e(x)$ sur chaque élément, doivent être construites de manière à être continues sur V^e , et elles doivent aussi satisfaire les conditions de continuité entre les différents éléments. Une fois toutes les fonctions $U^e(x)$ sont construites, la fonction approchée $U(x)$ est obtenue par :

$$U(x) = \sum_e U^e(x) \quad (3.13)$$

2.3. TABLE DE DEFINITION DES NŒUDS ET ELEMENTS [7] :

Numérotons les nœuds géométriques sequentiellement de 1 à n , puis définissons chaque nœud par ses coordonnées dans un repère adapté au problème. Ces coordonnées sont stockées dans la table des coordonnées globales 'CORG'. Pour un problème à deux dimensions, cette table se présente sous la forme suivante :

	1	2	3	4	***	N
X	X_1	X_2	X_3	X_4	***	X_n
Y	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	***	Y_n

TABLE DES COORDONNEES GLOBALES

TABLEAU 3-1

Où n : est le nombre de nœuds géométriques par élément.

Numérotons les éléments sequentiellement de 1 à NEL , puis définissons chaque élément par la liste des numéros de ses nœuds géométriques. Cette liste est stockée dans la table de connectivité 'CONNEC' :

		Eléments				
		1	2	3	***	NEL
Nœuds	1					
	2					
	*					
	*					
	*					
n						

TABLE DE CONNECTIVITE**Tableau 3-2**

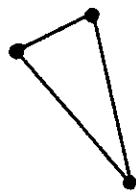
Ces deux tables CORG et CONEC sont suffisantes pour définir complètement la transformation (τ) de tous les éléments. C.a.d pour construire les fonctions $N(x)$ et le vecteur des coordonnées des nœuds de chaque élément :

$$\{x_i\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

3. FORME D'ELEMENTS CLASSIQUES :

Il existe plusieurs formes d'éléments classiques, nécessaires pour la discrétisation d'un domaine en éléments finis d'une, deux ou trois dimensions. Ici nous nous limitons à l'étude des éléments à deux dimensions et qui possèdent les formes suivantes :

3.1. Éléments triangulaires :



Linéaire

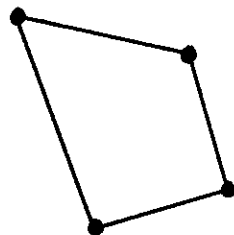


Quadratique

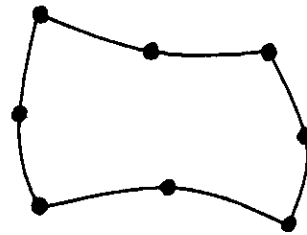
Figure 3-1

Ces éléments sont des triangles, dont les cotés sont des courbes polynomiales du premier ou deuxième degré.

3.2. ELEMENTS QUADRILATERAUX



Linéaire



Quadratique

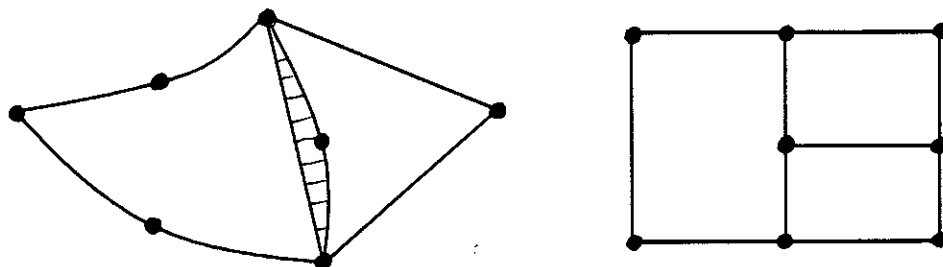
Figure : 3-2

Ces éléments sont des quadrilatères, dont les cotés sont des courbes polynomiales du premier ou deuxième degré.

4. REGLES DE DISCRETISATION D'UN DOMAINE EN ELEMENTS FINIS [6] :

La discrétisation d'un domaine en éléments finis doit obéir aux règles suivantes :

- Le recouvrement de deux éléments ou plus est exclu.



Positions interdites

Figure :3-3

Ce qui signifie d'une autre manière que les éléments doivent être assemblés de sorte qu'ils auront :

- Soit une intersection réduite à un sommet.
- Soit une intersection réduite à un coté commun.

D'autre part l'ensemble de tous les éléments doit constituer un domaine assez proche que possible du domaine original. Cependant les trous entre éléments sont exclus.

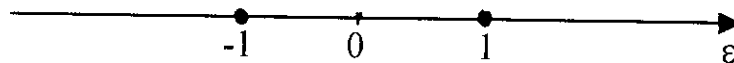
5. METHODE DE CONSTRUCTION DES FONCTIONS NODALES

5.1 ELEMENT DE REFERENCE [7] :

Un élément de référence (V^r) est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel (V^e) par une transformation géométrique (τ^e).

Exemples :

A) Elément de référence à une dimension :



linéaire

Figure : 3-4

B) Elément de référence à deux dimensions :

- Élément triangulaire : linéaire

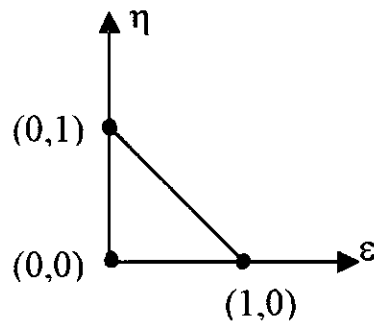


Figure : 3-5

- Élément carré : quadratique

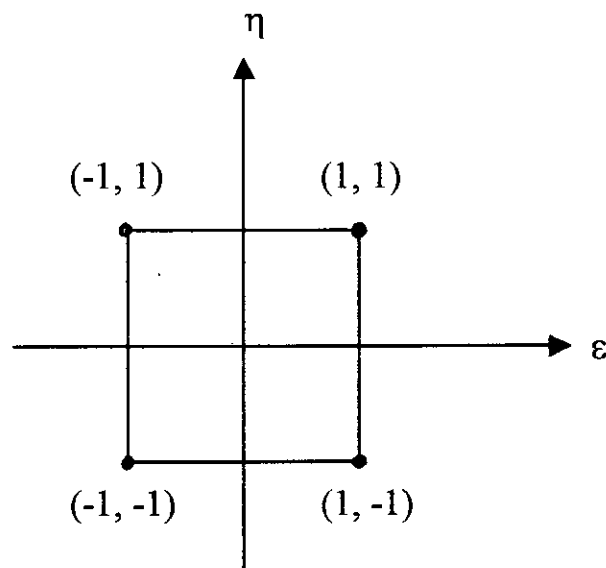


Figure : 3-6

Les différents éléments que nous venons de citer là haut, sont ceux que nous utiliserons dans la discrétisation en éléments finis

5.2 TRANSFORMATION GEOMETRIQUE.

Pour qu'on puisse passer d'un élément réel, V^T , d'une forme complexe à un élément de référence, on doit d'abords définir une transformation géométrique qui relie chaque point réel de coordonnées $\{x\}^e$ à celle de l'élément de référence $\{\varepsilon\}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tau^e : \{\varepsilon\} &\longrightarrow \{x\}^e = \{x\{\varepsilon\}\}^e \\ \text{tel que } \{\varepsilon\} &= \langle \varepsilon, \eta \rangle^T \\ \{x\} &= \langle x, y \rangle^T. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Cette transformation présente les propriétés suivantes :

- Elle est choisie de manière à ce qu'elle soit bijective .
- Les nœuds géométriques de l'élément doivent être confondues avec celle de l'élément de référence .

Les coordonnées d'un élément peuvent s'écrire alors :

$$\begin{aligned} \{x\}^e &= \langle \tau^e \rangle \{x_i\} \\ \{y\}^e &= \langle \tau^e \rangle \{y_i\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \{x_i\} &= \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle^T \\ \text{et } \{y_i\} &= \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle^T \end{aligned} \quad i = 1, n$$

Le Jacobien de la transformation sera :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

On peut aussi écrire l'équation 3.16 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \{x\} = \langle \tau^e \rangle \{x_i\} &= \langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \\ \{y\} = \langle \tau^e \rangle \{y_i\} &= \langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Après avoir défini $\{x\}$ et $\{y\}$ dans l'équation : (3.18) , et on les remplaçant par leurs valeurs dans l'équation : (3.17), le Jacobien s'écrira alors comme suit :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\tau_1 x_1 + \dots + \tau_n x_n) & \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\tau_1 y_1 + \dots + \tau_n y_n) \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(\tau_1 x_1 + \dots + \tau_n x_n) & \frac{\partial}{\partial \eta}(\tau_1 y_1 + \dots + \tau_n y_n) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau_i}{\partial \varepsilon} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau_i}{\partial \varepsilon} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

D'où on peut écrire J sous la forme matricielle suivante :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \varepsilon} & \dots & \frac{\partial \tau_n}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial \tau_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

5.3 APPROXIMATION SUR UN ELEMENT DE REFERENCE :

5.3.1 CHOIX DE LA BASE POLYNOMIALE : [7]

Exprimons $U\{\varepsilon\}$ sur l'élément de référence sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions connues indépendantes : $P_1\{\varepsilon\}$, $P_2\{\varepsilon\}$, ... qui sont le plus souvent des monômes indépendants.

Le choix des fonctions $P_i\{\varepsilon\}$ est l'une des opérations de base de la méthode des éléments finis.

$$U\{\varepsilon\} = \langle P\{\varepsilon\} \rangle \{a\} = \langle P_1\{\varepsilon\}, \dots, P_n\{\varepsilon\} \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

L'ensemble des fonctions $P_i\{\varepsilon\}$ constitue la base polynomiale de l'approximation. son nombre de termes doit être égal au nombres de variables nodales de l'élément.

Nous utilisons le plus souvent une base polynomiale complète, ce qui n'est possible que pour certaines valeurs de 'n'.

Le tableau suivant, illustre les différentes bases complètes et non complètes pour des éléments à une et deux dimensions :

Dimension	Nature de la base	Base polynomiale
01	Linéaire	$\langle 1 \ \varepsilon \rangle$
01	Quadratique	$\langle 1 \ \varepsilon \ \varepsilon^2 \rangle$
02	Linéaire	$\langle 1 \ \varepsilon \ \eta \rangle$
02	Quadratique	$\langle 1 \ \varepsilon \ \eta\varepsilon^2 \ \varepsilon\eta \ \varepsilon^2 \rangle$

Bases complètes

Tableau :3-3

Dimension	Nature de la base	Base polynomiale
02	Bilinéaire	$\langle 1 \ \varepsilon \ \eta \ \varepsilon\eta \rangle$

Base non complète

Tableau :3-4

5.3.2 CONSTRUCTION DES FONCTIONS NODALES :

Une fois le choix de la base est établi , on définira une forme analytique à la fonction approchée $U\{\varepsilon\}$ construite sur l'élément de référence .

D'après l'équation : (3.21) :

$$U\{\varepsilon\} = \langle P\{\varepsilon\} \rangle \{a\}$$

Et $\{a\} = \{a_1, \dots, a_n\}^T$: vecteur des coefficients généralisés.

$P\{\varepsilon\} = \langle P_1\{\varepsilon\}, P_2\{\varepsilon\}, \dots, P_n\{\varepsilon\} \rangle$: base polynomiale

Donc :

$$U\{\varepsilon\} = \langle P_1\{\varepsilon\}, P_2\{\varepsilon\}, \dots, P_n\{\varepsilon\} \rangle \{a\} \quad (3.22)$$

En chaque nœud d'interpolation de l'élément de coordonnées $\{\varepsilon_i\}$, la relation ; $U\{\varepsilon_i\} = V_i$ sera vérifiée .

$$\begin{bmatrix} P_1\{\varepsilon_1\} & P_2\{\varepsilon_1\} & \dots & P_n\{\varepsilon_1\} \\ P_1\{\varepsilon_2\} & P_2\{\varepsilon_2\} & \dots & P_n\{\varepsilon_2\} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ P_1\{\varepsilon_n\} & P_2\{\varepsilon_n\} & \dots & P_n\{\varepsilon_n\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_n \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Si on pose :

$$[P_n] = \begin{bmatrix} P_1\{\varepsilon_1\} & P_2\{\varepsilon_1\} & \dots & P_n\{\varepsilon_1\} \\ P_1\{\varepsilon_2\} & P_2\{\varepsilon_2\} & \dots & P_n\{\varepsilon_2\} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ P_1\{\varepsilon_n\} & P_2\{\varepsilon_n\} & \dots & P_n\{\varepsilon_n\} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

On trouve :

$$[P_n] \cdot \{a\} = \{V\} \quad (3.25)$$

Si $[P_n]$ n'est pas singulière , c.a.d :

$$\det [P_n] \neq 0,$$

On aura :

$$\{a\} = [P_n]^{-1} \{V\} \quad (3.26)$$

On remplaçant cette valeur de $\{a\}$ dans l'équation : (3.22) , on trouve :

$$U\{\varepsilon\} = \langle P\{\varepsilon\} \rangle [P_n]^{-1} \{V\} \quad (3.27)$$

Si on pose :

$$\langle N \rangle = \langle P\{\varepsilon\} \rangle [P_n]^{-1} \quad (3.28)$$

Alors :

$$U\{\varepsilon\} = \langle N \rangle \{V\} \quad (3.29)$$

Ou :

$$U\{\varepsilon\} = \langle N_1\{\varepsilon\}, N_2\{\varepsilon\}, \dots, N_n\{\varepsilon\} \rangle \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

Et :

N_1, N_2, \dots, N_n sont des fonctions nodales ou d'interpolation obtenue sur l'élément de référence .

De la même manière on exprime les coordonnées $\{x\}^e$ de l'élément réel tel que :

$$\begin{cases} x = \langle \bar{\tau}^e \rangle \{a_x\} \\ y = \langle \bar{\tau}^e \rangle \{a_y\} \end{cases}$$

pour aboutir aux relations suivantes :

$$\begin{cases} x = \langle \bar{\tau}^e \rangle [\bar{\tau}_n]^{-1} \{x_i\} \\ y = \langle \bar{\tau}^e \rangle [\bar{\tau}_n]^{-1} \{y_i\} \end{cases} \quad (3.31)$$

Dans le cas ou l'élément est isoparamétrique , les fonctions nodales seront celles de la transformation géométrique.

D'où :

$$N\{\varepsilon\} = \langle \bar{\tau}^e \rangle [\bar{\tau}_n]^{-1}$$

Donc :

$$\begin{cases} x = \langle N\{\varepsilon\} \rangle \{x_i\} \\ y = \langle N\{\varepsilon\} \rangle \{y_i\} \end{cases} \quad (3.32)$$

Remarques [7] :

Si on veut résumer les opérations de construction de $\langle N \rangle$, on distinguera les étapes suivantes :

1. Choix de la base polynomiale : $P\langle \{\varepsilon\} \rangle$.
2. Evaluation de la matrice $[P_n] = [P_j(\varepsilon_i)]$ $i, j = 1, n$.
3. Inversion de la matrice nodale $[P_n]$.
4. Calcul de $\langle N \rangle$ aux points ε_i désirés.

6. CONSTRUCTION DES FONCTIONS NODALES $N\{\varepsilon\}$ POUR UN ELEMENT QUADRILATERAL : [6]

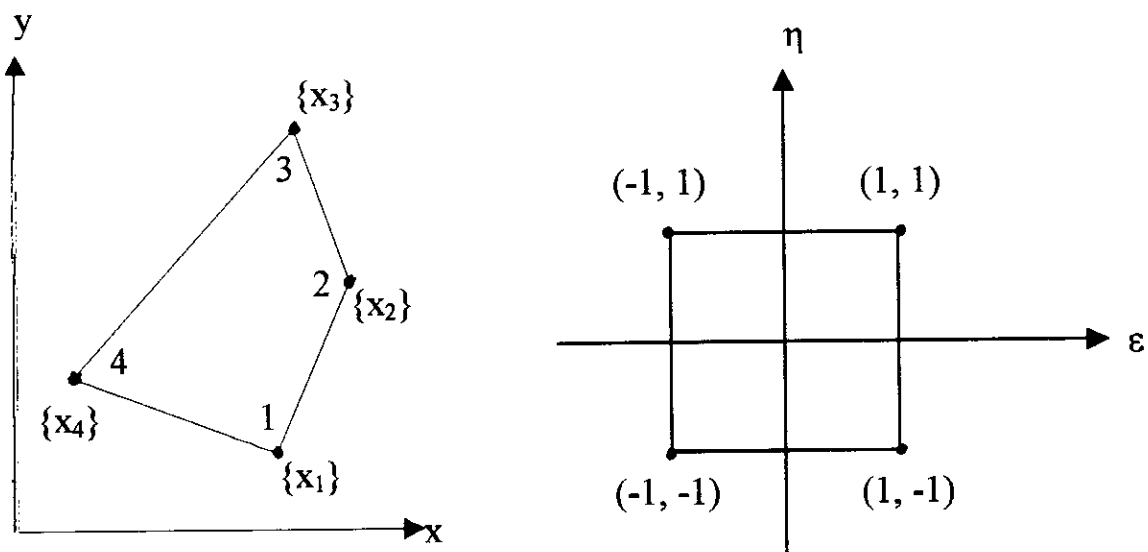


Figure :3-7

Puisque nous n'avons que quatre valeurs nodales, nous ne pourrions donc pas utiliser une base polynomiale complète pour construire U . De plus U doit être linéaire en ε et η . Le meilleur choix possible est une base bilinéaire en ε et η :

$$\langle P\{\varepsilon\} \rangle = \langle 1, \varepsilon, \eta, \varepsilon\eta \rangle$$

évaluons $\langle P\{\varepsilon\} \rangle$ en chaque point des quatre nœuds de l'élément de référence :

$$[P_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Nous remarquons que la matrice $[P_n]$ est orthogonale, puisque les produits scalaires de ses vecteurs colonnes sont nuls. De plus, chaque vecteur colonne est de norme égale à quatre. Ceci nous permet de l'inverser facilement, et nous trouvons :

$$[P_n]^{-1} = \frac{1}{4}[P_n]^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

□ **Expression de $\langle N\{\varepsilon\} \rangle$:**

$$\langle N\{\varepsilon\} \rangle = \langle P(\varepsilon, \eta) \rangle [P_n]^{-1} = \langle N_1(\varepsilon, \eta), N_2(\varepsilon, \eta), N_3(\varepsilon, \eta), N_4(\varepsilon, \eta) \rangle$$

avec :

$$N_1(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \varepsilon + \varepsilon\eta - \eta)$$

$$N_2(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \varepsilon - \varepsilon\eta - \eta)$$

$$N_3(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \varepsilon + \varepsilon\eta + \eta)$$

$$N_4(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{4} (1 - \varepsilon - \varepsilon\eta + \eta)$$

(3.35)

L'élément est aussi isoparamétrique .

$$\langle \tau^e \rangle = \langle N \rangle.$$

$$x(\varepsilon, \eta) = \langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

(3.36)

$$y(\varepsilon, \eta) = \langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

Remarque :

Aux différents nœuds (1, 2, 3, 4) de l'élément de référence nous avons les différentes valeurs correspondantes de N_i illustrées dans le tableau suivant :

Numéros du nœud	$N_1(\varepsilon, \eta)$	$N_2(\varepsilon, \eta)$	$N_3(\varepsilon, \eta)$	$N_4(\varepsilon, \eta)$
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

Valeurs de N_i aux différents nœuds

Tableau : 3-5

7. CONSTRUCTION DES FONCTIONS NODALES POUR UN ELEMENT TRIANGULAIRE :

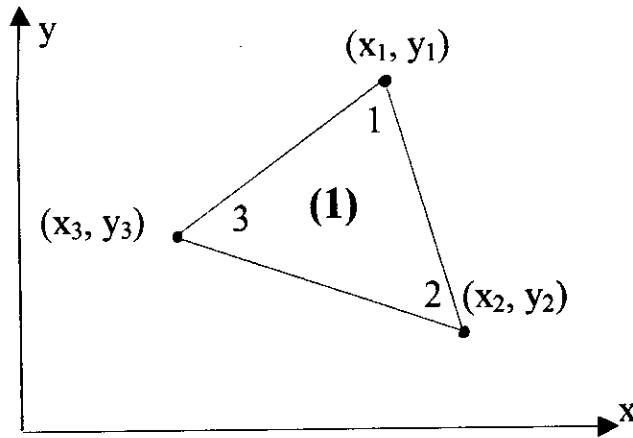


Figure :3-8

Pour construire une fonction approchée $U\{x\}$, $\{x\}^T = \langle x, y \rangle$ pour l'élément **(1)**, il faut lui donner d'abord, une forme analytique tel que :

$$U(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.37)$$

Ou d'une autre manière :

$$U(x, y) = \langle 1, x, y \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

Aux nœuds : 1, 2, 3 ; la fonction $U(x,y)$ prend respectivement les valeurs nodales : V_1 , V_2 , V_3 , donc l'équation : (3.38) appliquée aux trois nœuds sera équivalente aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{noeud : 1} &\rightarrow U(x_1, y_1) = V_1 = \langle 1, x_1, y_1 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \\
 \text{noeud : 2} &\rightarrow U(x_2, y_2) = V_2 = \langle 1, x_2, y_2 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \\
 \text{noeud : 3} &\rightarrow U(x_3, y_3) = V_3 = \langle 1, x_3, y_3 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ou sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \tag{3.40}$$

La matrice du système (3.40) n'est pas une matrice singulière, nous déduisons alors que :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \tag{3.41}$$

Donc l'équation : (3.38) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$U(x, y) = \langle 1, x, y \rangle \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \tag{3.42}$$

D'une autre manière, $U(x, y)$ peut s'écrire aussi :

$$U(x, y) = N_1(x, y) V_1 + N_2(x, y) V_2 + N_3(x, y) V_3 \tag{3.43}$$

D'où les fonctions nodales N_1, N_2, N_3 sont respectivement :

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{2V} [(y_3 - y_2)(x_2 - x) - (x_3 - x_2)(y_2 - y)] \\
 N_2(x, y) &= \frac{1}{2V} [(y_1 - y_3)(x_3 - x) - (x_1 - x_3)(y_3 - y)] \\
 N_3(x, y) &= \frac{1}{2V} [(y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(y_1 - y)]
 \end{aligned}
 \tag{3.44}$$

Tel que V est l'aire du triangle 1-2-3, il est calculé de la manière suivante :

$$V = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}
 \tag{3.45}$$

□ **Remarque :**

Nous illustrerons dans le tableau ci après les différentes valeurs de N_i pour chaque nœud

Numéros du nœud	N_1	N_2	N_3
(1) : (x_1, y_1)	1	0	0
(2) : (x_2, y_2)	0	1	0
(3) : (x_3, y_3)	0	0	1

Valeurs des N_i aux différents nœuds

Tableau 3-7

8. TRANSFORMATION ET EVALUATION DE L'INTEGRALE :

$$Q = \int_V P(x, y) dV$$

Les changements de variables (3.16) permettent de passer de l'intégration d'une fonction, ($P(x, y)$ par exemple, qui représente la précipitation dans une région V), sur l'élément réel V^e , à une intégration plus simple sur l'élément de référence V^r .

La précipitation sur un élément est :

$$Q_e = \int_{V^e} P(x, y) dV \quad (3.46)$$

La précipitation totale sera :

$$Q_T = \sum_e Q_e \quad (3.47)$$

la transformation est donc :

$$Q_e = \int_{V^e} P(x, y) dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P(\varepsilon, \eta) \det J(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta \quad (3.48)$$

Tel que $\det(J)$ étant défini dans l'équation (3.20)

Le calcul de cette intégrale dépend de la forme des éléments constituant le domaine discrétisé V . Pour cela on évalue l'intégrale (3.46) pour un élément triangulaire, puis pour un élément quadrilatéral.

8.1 EVALUATION DE L'INTEGRALE POUR UN ELEMENT TRIANGULAIRE :

Dans le cas d'un élément triangulaire, on se propose d'évaluer l'intégrale (3.46) sans tenir compte du changement de base, et cela s'effectue à l'aide des résultats obtenus en introduisant la notion des coordonnées barycentriques

8.1.1 RAPPEL SUR LES COORDONNEES BARYCENTRIQUES :

Soit un triangle i - j - k représenté ci-dessous :

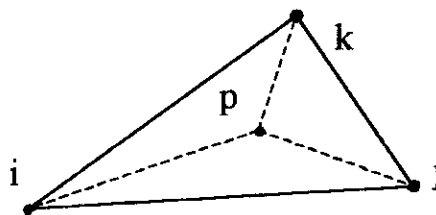


Figure :3-9

Où p est un point arbitraire .

Les coordonnées barycentriques : L_i, L_j, L_k sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{\text{aire } pjk}{\text{aire } ijk} \\ L_j &= \frac{\text{aire } pik}{\text{aire } ijk} \\ L_k &= \frac{\text{aire } pij}{\text{aire } ijk} \end{aligned} \quad (3.49)$$

à partir de ces définitions nous pouvons déduire :

$$L_i + L_j + L_k = 1 \quad (3.50)$$

Comme nous pouvons aussi déduire que :

- Si 'p' coïncide avec 'i', alors : $L_i = 1, L_j = 0, L_k = 0$
- Si 'p' coïncide avec 'j', alors : $L_i = 0, L_j = 1, L_k = 0$
- Si 'p' coïncide avec 'k', alors : $L_i = 0, L_j = 0, L_k = 1$

Ces observations nous permettent de conclure que les coordonnées : L_i, L_j, L_k possèdent les propriétés des fonctions nodales : N_i, N_j, N_k .

Admettons la relation suivante [6]:

$$\int_V L_i^\alpha L_j^\beta L_k^\gamma dV = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2V \quad (3.51)$$

Ce résultat sert à évaluer certains types d'intégrales sur un triangle au moyen des coordonnées barycentriques ,

8.1.2 APPLICATION

d'après l'équation (3.46) on a :

$$Q_c = \int_V P(x,y) dV \quad \text{avec: } dV = dx dy$$

si on pose $P(x,y) = U(x,y)$, il découle d'après l'équation (3.43) :

$$P(x, y) = N_1(x, y)V_1 + N_2(x, y)V_2 + N_3(x, y)V_3 \quad (3.52)$$

tel que : N_1 , N_2 , N_3 étants les fonctions nodales données par la formule (3.44).

En combinant les équations (3.46) et (3.52) , on aura :

$$Q_e = \int_V N_1(x, y)V_1 dV + \int_V N_2(x, y)V_2 dV + \int_V N_3(x, y)V_3 dV \quad (3.53)$$

et d'après la formule (3.51),on conclu :

$$Q_e = (V_1 + V_2 + V_3) \frac{V}{3} \quad (3.54)$$

□ **calcul de la surface V :**

l'aire du triangle formé par les nœuds : 1, 2, 3 , est donnée par la relation (3.45) :

$$V = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$\langle x_i, y_i \rangle^T$: étant les coordonnées des nœuds : V_1 , V_2 , V_3 respectivement .

□ **calcul de la quantité de pluie totale Q_T :**

la quantité de pluie totale est donnée par la relation (3.47) :

$$Q_T = \sum_e Q_e$$

8.2 EVALUATION DE L'INTEGRALE POUR UN ELEMENT QUADRILATERAL [6]:

pour cet élément nous construisons la fonction approchée sur l'élément de référence :

$$P(\varepsilon, \eta) = \langle N_1(\varepsilon, \eta), N_2(\varepsilon, \eta), N_3(\varepsilon, \eta), N_4(\varepsilon, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

les fonctions nodales $\langle N \rangle$ sont données par les formules (3.35) .

les coordonnées (x, y) d'un point de l'élément réel, sont définies en fonction des coordonnées nodales de l'élément et des coordonnées (ε, η) du point correspondant de l'élément de référence :

$$x = \langle N_1(\varepsilon, \eta), N_2(\varepsilon, \eta), N_3(\varepsilon, \eta), N_4(\varepsilon, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

$$y = \langle N_1(\varepsilon, \eta), N_2(\varepsilon, \eta), N_3(\varepsilon, \eta), N_4(\varepsilon, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

□ quantité de pluie tombée sur un élément :

la quantité de pluie tombée sur un élément est donnée par l'équation (3.48):

$$Q_e = \int_{V'} P(x, y) dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P(\varepsilon, \eta) \det J(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta$$

On procédant par l'intégration numérique, et en utilisant la méthode de Gauss [développée en annexe], l'intégrale ci-dessus se résout de la manière suivante :

$$Q_e = \sum_i^{r_1=2} \sum_j^{r_2=2} W_i W_j \langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix} \det J(\varepsilon_i, \eta_j) \quad (3.57)$$

tel que :

$$\langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle = \langle N_1(\varepsilon_i, \eta_j), N_2(\varepsilon_i, \eta_j), N_3(\varepsilon_i, \eta_j), N_4(\varepsilon_i, \eta_j) \rangle$$

□ **quantité de pluie totale**

cette valeur qui représente la somme des quantités tombées sur chaque élément est calculée d'après la relation (3.47) :

$$Q_T = \sum_e Q_e$$

□ **calcul de l'aire d'un élément**

l'aire de l'élément est donnée par la relation :

$$V_e = \int_{V^e} dV = \iint_{V^e} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det J(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta \quad (3.58)$$

D'où :

$$V_e = \sum_i^{r_1=3} \sum_j^{r_2=3} W_i W_j \det J(\varepsilon_i, \eta_j) \quad (3.59)$$

□ **calcul de l'aire totale :**

Elle est donnée par la relation :

$$V = \sum_e V_e \quad (3.60)$$

9 CONCLUSION :

Nous avons vu dans ce chapitre la nécessité impérative de la disposition des moyens de calcul sur ordinateur que fait intervenir la méthode des éléments finis lors des différentes discrétisations

On a aussi remarqué que cette méthode est flexible puisqu'on a pu l'appliquer au problème des précipitations, elle permet d'évaluer la quantité de pluie tombée sur une région V discrétisée en éléments, ainsi que l'aire de chaque éléments.

Avec tous les avantages que possède cette méthodes, elle présente l'inconvénient d'être d'une application laborieuse vue qu'elle nécessite d'une part la diversité des discrétisations , et de l'autre la connaissance de la fonction $P(x, y)$ en plusieurs points qui sous entend un nombre assez important de stations pour atteindre une précision voulue surtout que cette précision est d'autant plus importante que le nombre de stations est aussi important.

**ORGANISATION
INFORMATIQUE DU
CALCUL**



1. INTRODUCTION

Après avoir mis le point, et sur les méthodes classiques et sur la méthode des éléments finis dans les deux chapitres précédents, nous allons essayer dans ce chapitre d'exploiter les offres de l'informatique pour mettre en application les deux modèles.

Dans ce qui suit nous allons expliquer la méthodologie suivie dans l'informatisation des deux modèles et les différents algorithmes et organigrammes seront présentés, et puisque nous avons développés les deux discrétisations avec deux programmes différents, nous serons obligés de spécifier à chaque fois que possible sur lesquels des programmes il s'agit.

2. ALGORITHMES DE RESOLUTION :

2.1. discrétisation triangulaire

dans ce programme le calcul se fera par élément, de telle sorte que pour chaque élément et après avoir lu les fichiers de données correspondants, nous ouvrons une boucle sur ces derniers qui, pour chaque élément et après définition des numéros des nœuds des élément, leurs précipitations correspondantes et leurs coordonnées géométriques, on calculera la quantité de pluie pour cet élément par la relation :

$$q_{el} = (\text{aire}) * (V_1 + V_2 + V_3) / 3$$

tel que :

aire = aire de l'élément

V_1, V_2, V_3 : sont les valeurs nodales de l'élément

Cela se fait à l'aide d'un sous programme qui calcul aussi l'aire de chaque élément par la relation :

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} [(x_j * y_k - x_k * y_j) - (x_i * y_k - x_k * y_i) + (x_i * y_j - x_j * y_i)]$$

Tel que :

$(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$: représentent respectivement les coordonnées géométriques des nœuds i, j, k de l'élément en question.

Ainsi la quantité totale de pluie (q_{tot}) sera la somme sur le nombre d'éléments, des quantités de pluie par élément (q_{el}), et l'aire totale ($aire_{tot}$) sera la somme des aires de tous les éléments

La précipitation moyenne sera donnée par la relation :

$$p_{3moy} = q_{tot} / aire_{tot}.$$

Dans ce programme aussi sont inclus les différentes méthodes classiques du calcul de la quantité de pluie totale

□ **Méthode arithmétique :**

Une simple instruction est rajoutée dans le programme qui , après lecture des précipitations de chaque nœud elle fait la somme de ces dernières et la divise par le nombre de nœuds pour obtenir une précipitation moyenne , puis en la multipliant par l'aire totale on obtient la quantité de pluie totale

□ **Méthode de Thiessen :**

Pour cette méthode on était obligé de faire les constructions géométriques sur la région d'étude pour construire les polygones de Thiessen auxquels, et à l'aide d'un planimètre on a attribuer les surfaces correspondantes. Ensuite et dans le programme, à l'aide d'un ensemble d'instructions qui lit pour chaque nœud les précipitations et surfaces de Thiessen correspondantes, on a pu déterminer l'aire totale de Thiessen, la moyenne des précipitations et la quantité de pluie totale par les relations adéquates.

□ **Méthode des deux axes :**

Pour cette méthode, le problème était de déterminer les coefficients de pondérations de chaque station, pour cela il a été introduit aussi dans le programme des instructions calculants pour chaque station son coefficient et cela après lecture du fichier de donnée approprié.

□ **Méthode des isohyètes :**

Pour cette méthode, il a été construit un fichier qui englobe les précipitations moyennes entre deux isohyètes consécutives, ainsi que les surfaces d'isohyètes correspondantes obtenues par planimétrie , ensuite le calcul est une simple application qui donne la moyenne des précipitations et la quantité totale de pluie.

2.2. DISCRETISATION QUADRILATERALE :

Dans ce programme aussi la procédure est faite pour chaque élément puis généralisée sur l'ensemble, au début et après spécification du nombre d'éléments obtenue (nel), du nombre de nœuds par élément (nne = 4) et du nombre de points pour l'intégration de gauss (ngp), il sera procédé à la détermination des abscisses et poids de gauss pour l'intégration numérique.

Après, une boucle sur les éléments est ouverte pour quantifier enfin la pluie tombée sur un élément en utilisant les résultats de la méthode de gauss, pour l'intégration numérique :

$$Q_e = \sum_i^{\eta_1=2} \sum_j^{\eta_2=2} W_i W_j \langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle \left\{ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} \right\} \det J(\epsilon_i, \eta_j)$$

tel que :

$$\langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle = \langle N_1(\epsilon_i, \eta_j), N_2(\epsilon_i, \eta_j), N_3(\epsilon_i, \eta_j), N_4(\epsilon_i, \eta_j) \rangle$$

pour le calcul de la pluie totale cela revient à sommer sur tous les éléments les quantités de pluie trouvées pour chaque élément:

$$Q_T = \sum_e Q_e$$

pour le calcul de l'aire des éléments, nous avons calculer pour chaque élément :

$$V_e = \sum_i^{\eta_1=3} \sum_j^{\eta_2=3} W_i W_j \det J(\epsilon_i, \eta_j)$$

puis la somme :

$$V = \sum_e V_e$$

On a rajouter dans ce programme aussi le calcul pour les méthodes classiques.

3. STRUCTURE DES FICHIERS DE DONNEES :

Comme exemple réel dans ce travail, notre choix s'est arrêté au territoire de la wilaya de Tizi-Ouzou qui couvre environ une superficie de 3000 km² et un réseau pluviométrique de 36 stations réparties sur le pourtour de la wilaya :

Les données de précipitations enregistrées au niveau des 36 stations pour l'année 1994 tirées au service de la direction d'hydraulique de la wilaya de Tizi-Ouzou ont été mises à notre disposition, pour approcher la quantité annuelle de pluie tombée sur cette région.

Dans ce qui suit nous allons présenté la structure des différents fichiers de données qu'on a utilisé pour chaque méthode mise en application dans le programme , quant aux fichiers, eux ils sont présentés en annexe 3.

3.1. POUR LES METHODES CLASSIQUES :

3.1.1. Méthode de Thiessen :

Le fichier porte le nom : (p-s-thie.txt) qui symbolise les précipitations et les surfaces de Thiessen, il est structuré de telle manière que la première ligne indique le nombre de stations et les autres lignes suivantes indiquent respectivement (le numéros de la station , sa précipitation en cm , et la surface du polygone qu'elle engendre en km²)

3.1.2. Méthode des isohyètes :

Le fichier porte le nom : (p-s-iso.txt) et symbolise aussi les précipitations et les surfaces des isohyètes, il est conçu de telle manière que la première ligne indique le nombre de pas pris pour l'échantillon et que les autres attribuent pour chaque précipitation moyenne prise en cm de deux isohyètes consécutives sa surface planimétrée qui lui est correspondante en km²

3.1.3. Méthode des deux axes :

Pour ce fichier qui porte le nom : (deuxaxes.txt), nous avons mis dans la première ligne le nombre de stations pluviométriques, quant aux autres qui suivent nous les avons répartis de la façon suivante :

- Dans la première colonne, c'est les numéros des stations qui y figure.
- Dans la deuxième et troisième colonne respectivement, on a mis les coordonnées x , y des stations pluviométriques.
- Dans la quatrième et cinquième colonnes on trouvera les coordonnées x , y du point E. De même pour la sixième et septième colonne on trouve les coordonnées x , y du point C tel que E et C représentent les extrémités les plus éloignées des axes pour la station i

3.2. POUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS :

Pour cette méthode un fichier commun entre les deux discrétisations à savoir triangulaire et quadrilatérale est présenté sous le nom : (prec-x-y.txt), il comporte dans sa première ligne le nombre de stations mise en jeu, et dans les lignes qui suivent sont présentés dans l'ordre : (le numéros de la station , sa précipitation en cm , ses coordonnées x et y dans l'ordre en km).

3.2.1. Discrétisation triangulaire :

Pour cette discrétisation un fichier permettant de savoir la façon dont les éléments triangulaires sont connectés entre eux est présenté comme suit sous le nom : (connect3.txt) :

Il comporte dans sa première ligne respectivement : (le nombre d'éléments triangulaires obtenus = nel , le nombre de nœuds par élément = nne).

Les lignes qui suivent sont organisées en quatre colonnes où on trouve respectivement : (le numéros de l'élément , le numéros du nœuds 1 , le numéros du nœuds 2 , le numéros du nœuds 3)

3.2.2. Discrétisation quadrilatérale :

Pour cette discrétisation aussi est présenté un fichier de connectivité des éléments sous le nom (connect4.txt) , comportant dans sa première ligne respectivement : (le nombre d'éléments = nel , le nombre de nœuds par élément = nne , et le nombre de points d'intégration de gauss = ngp).

Les lignes qui suivent sont réparties en cinq colonnes où sont présentés respectivement : (le numéros de l'élément , le numéros du nœud 1 , le numéros du nœud 2 , le numéros du nœud 3 , le numéros du nœud 4).

4. STRUCTURE DES FICHIERS RESULTATS :

Nous avons essayé d'organiser au maximum les fichiers résultats pour qu'on puisse les lire et comprendre dès la première fois.

4.1. Cas des discrétisations triangulaires:

Avec un format spécifié le fichier nommé : (result3.txt) nous informe sur :

- Le numéros de l'élément suivi de l'aire de cet élément en km^2 et de la quantité de pluie tombée dans cet élément en cm.km^2 .
- Puis il nous transcrit pour chaque méthode de calcul la superficie totale de la région étudiée en km^2 , la quantité totale annuelle de pluie tombée dans la région et la précipitation moyenne annuelle

4.2. Cas des discrétisation quadrilatérales :

Il possède la même structure que pour le précédent et il porte le nom (result4.txt)

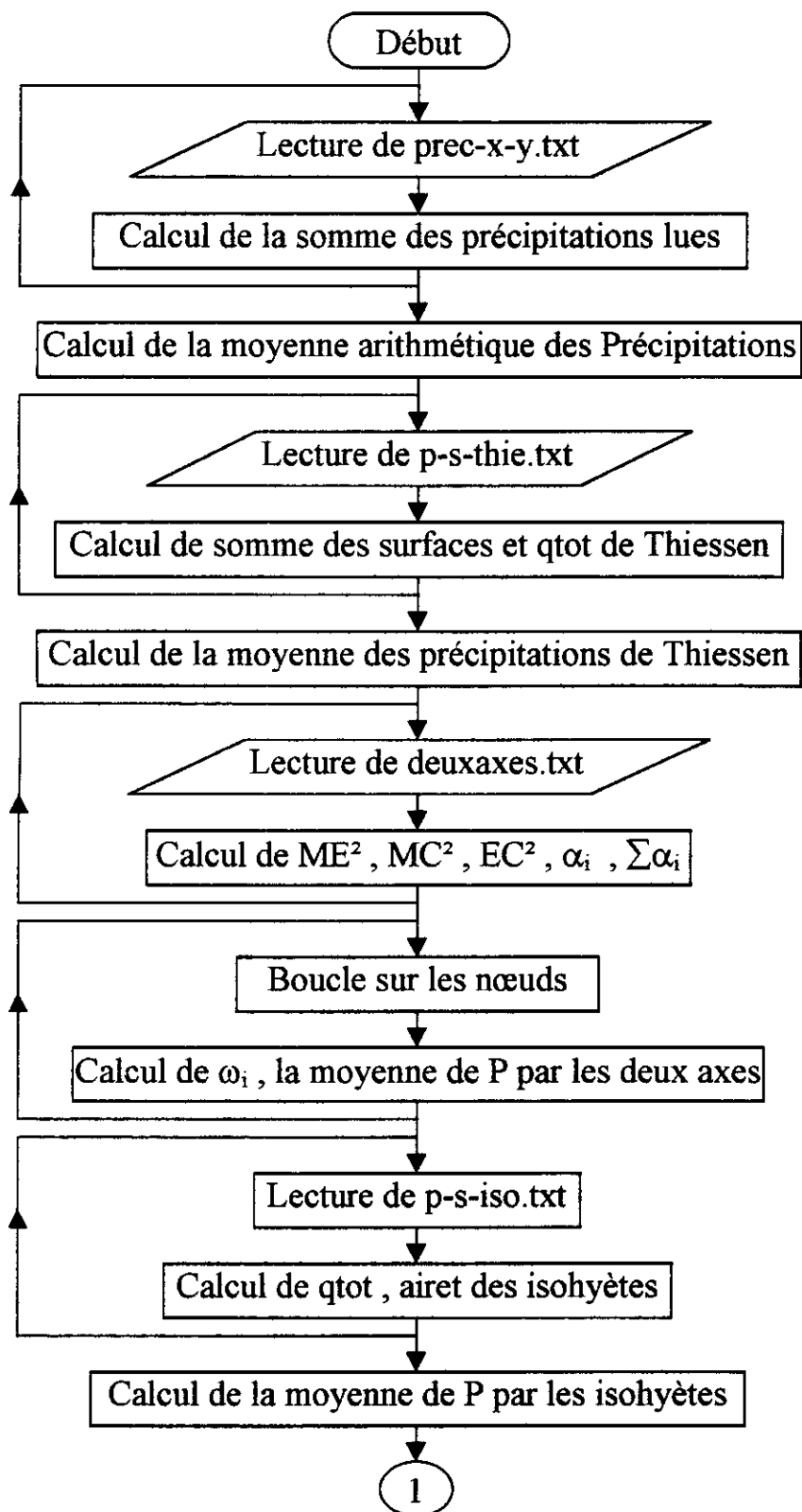
5. DESCRIPTION DES DONNEES :

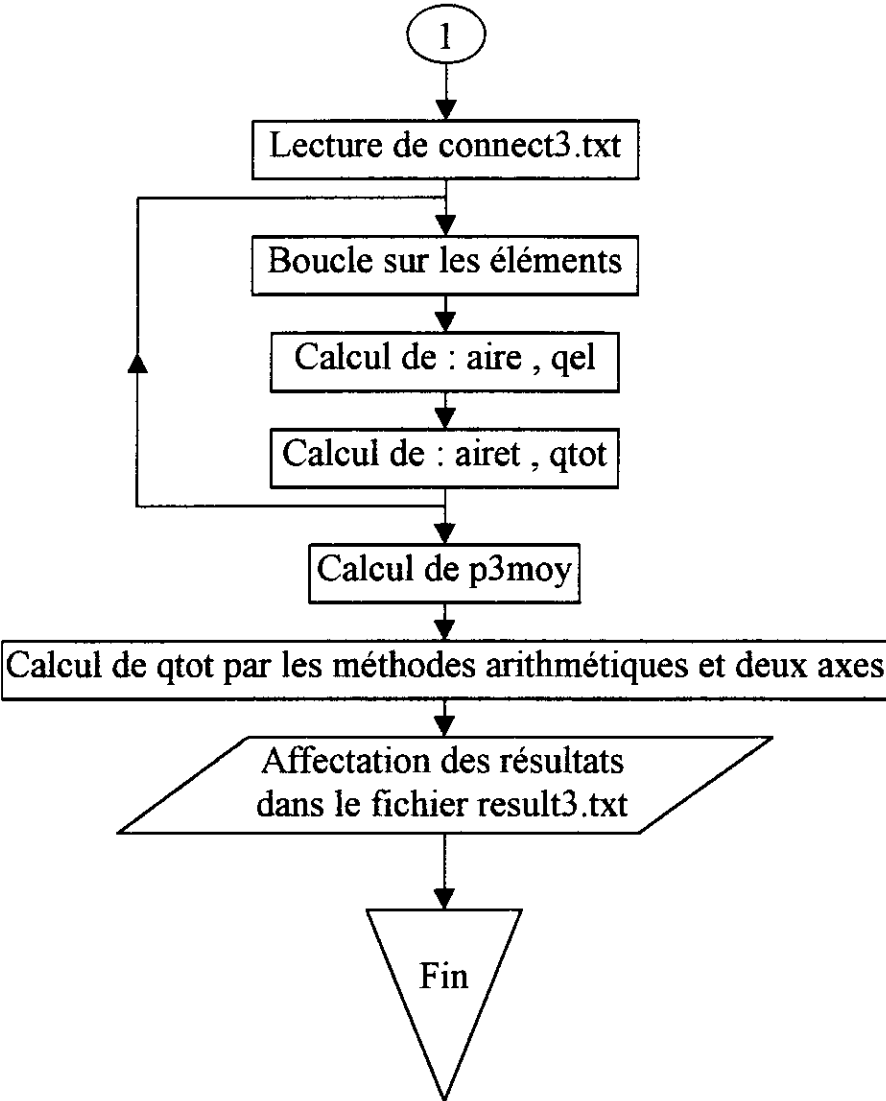
On essaiera de décrire les données essentielles des deux programmes dans le tableau qui suit :

Données	Signification
Nnt	Nombre de nœuds ou de stations
Nel	Nombre d'éléments
Nne	Nombre de nœuds par élément
Ngp	Nombre de points de gauss : 1 , 2 ou 3
Num (nne)	Vecteur des numéros des nœuds d'un élément
Prec (nnt)	Vecteur des précipitations des stations
Connec (nel,nne)	Matrice de connectivité des éléments
Geom (nnt, 2)	Matrice des coordonnées x , y des stations
Coord (nne , 2)	Matrice des coordonnées x , y des stations d'un élément
Vn (nne)	Vecteur des précipitations des nœuds d'un élément
Aire	Aire d'un élément
Airet	Aire totale de la région étudiée
Qel	Quantité de pluie pour un élément
Qtot	Quantité totale de pluie tombée dans la région
P3moy	Moyenne de pluie pour les éléments triangulaires
P4moy	Moyenne de pluie pour les éléments quadrilatéraux

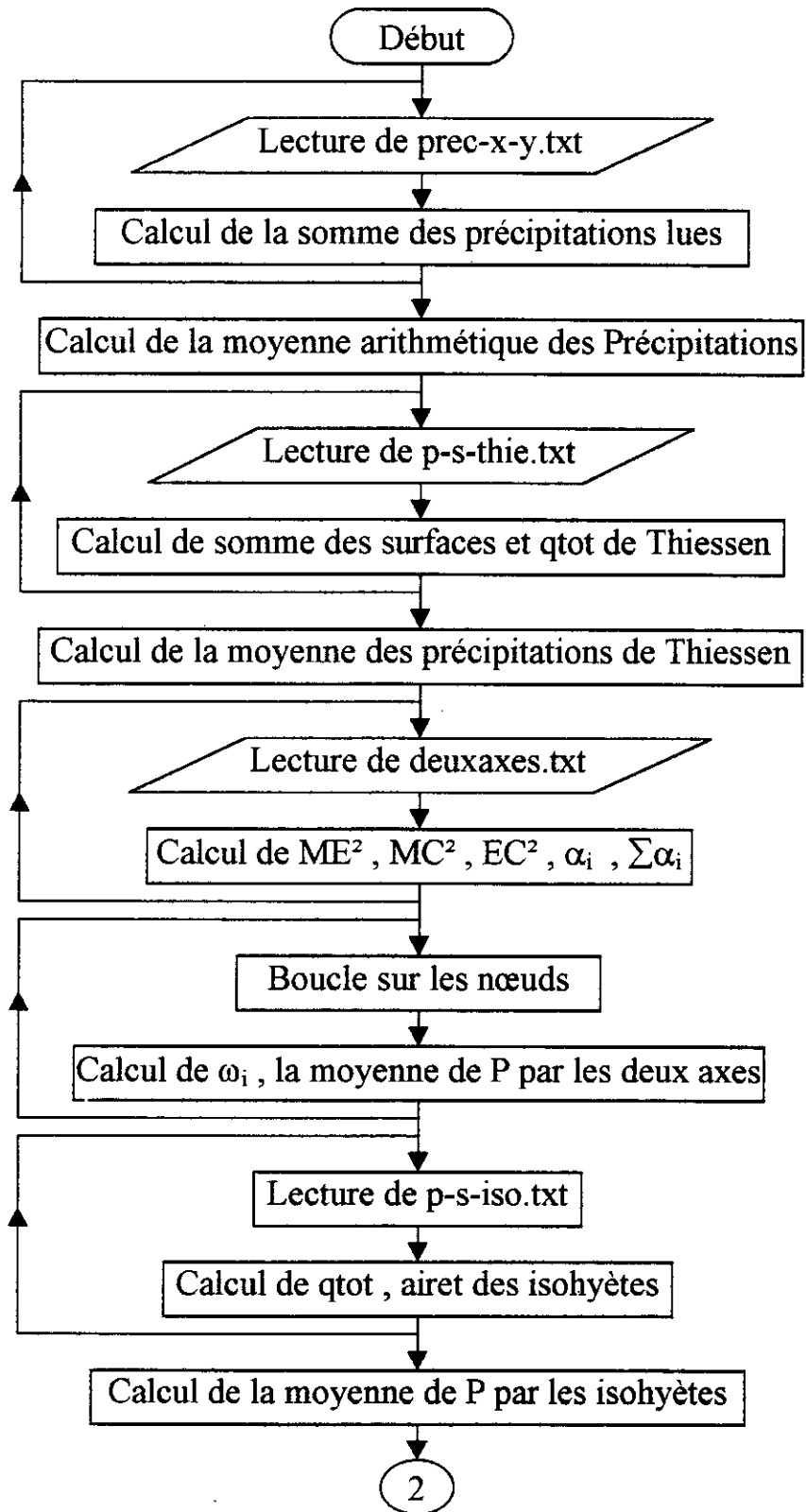
6. ORGANIGRAMMES DE CALCUL :

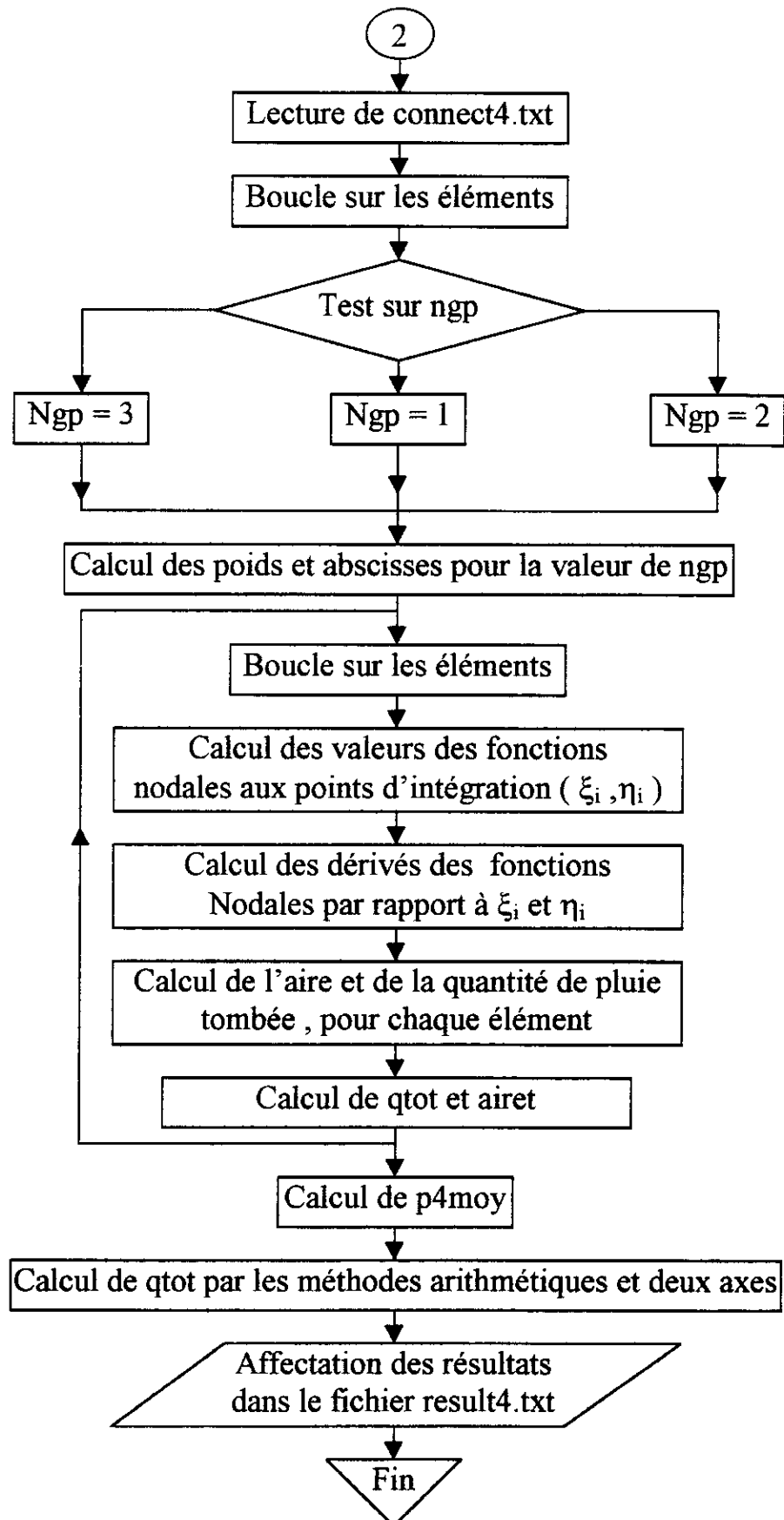
6.1. discrétisation triangulaire :





6.2. Discrétisation quadrilatérale :





7. TAILLE ET STRUCTURE DES DEUX PROGRAMMES :

Les deux programmes mis au point permettront d'évaluer pour une région donnée, la quantité de pluie tombée et la moyenne précipitée pendant une période de temps bien déterminée. Ils permettent aussi d'évaluer l'aire de chaque élément pour les deux discrétisations ainsi que l'aire totale de la région, à partir des coordonnées x et y des différentes stations.

Ces différents résultats nous seront bénéfiques quant à la compréhension du comportement d'une méthode empirique comme celle des éléments finis vis à vis des méthodes classiques pour le problème étudié, aussi bien que la valeur en elle même pour des besoins d'étude des phénomènes hydrologiques ou autres

Les programmes ainsi présentés sont écrit suivant les normes du fortran 77, et comportent au total environ 800 lignes.

7.1. discrétisation triangulaire :

Le programme développé pour cette discrétisation porte le nom progtria.for il est composé d'un petit programme principal et de deux sous programmes dont les fonctions sont les suivantes :

N °	Nom	Fonction
1	Triang	Evaluer la quantité de pluie en utilisant les méthodes classiques puis les éléments triangulaires.
2	Qupltr	Calculer l'aire d'un triangle à partir de ses coordonnées nodales, et ensuite évaluer la quantité de pluie sur le triangle

7.2. Discrétisation quadrilatérale :

Le programme développé pour cette discrétisation des éléments porte le nom de : progquad.for, il est aussi composé d'un petit programme principal et de six sous programmes dont les fonctions sont les suivantes :

N °	Nom	Fonction
1	Quadr	Evalue la quantité de pluie en utilisant les méthodes classiques et la discrétisation en éléments quadrilatéraux
2	Samp	Calcul les abscisses et poids de l'intégration de gauss
3	Func	Calcul les valeurs des fonctions nodales aux points ξ_i et η_i
4	Deriva	Calcul les dérivés des fonction nodales par rapport à ξ_i et η_i
5	Pscal	Calcul le produit scalaire de deux vecteurs
6	Matmul	Calcul le produit de deux matrices

8. LES UNITES :

Nous avons fait appel dans ce programme à trois unités de mesure qui sont les suivantes :

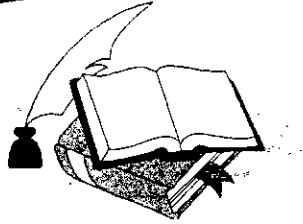
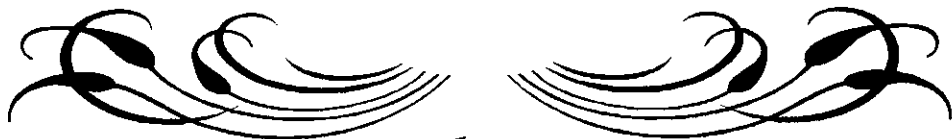
La mesure	L'unité
Les longueurs , coordonnées	Km
Les aires	Km ²
Les précipitations	Cm
Les quantités de pluie	Cm.km ² = 10000 m ³

9. CONCLUSION :

un important pas aura ainsi été franchi, celui de la mise au point d'un outils de calcul des éléments finis et des méthodes hydrologiques pour le calcul de la pluviométrie.

Les programmes de calcul ainsi élaborés sont directement utilisables par les ingénieurs. nous les avons aménagé de manière à pouvoir introduire dans l'avenir de nouveaux paramètres influençant la pluviométrie, sans pour autant les affecter dans leurs globalité. Quant aux limitations de leurs dimensions, elles peuvent être augmentées si nécessaire, en fonction de l'importance de la région étudiée et de la capacité de notre PC.

CONFRONTATION DU MODELE MATHEMATIQUE



1. INTRODUCTION

On a vu dans ce qui précède et après avoir écrit un programme d'éléments finis, qu'on pourra le faire aussi pour la plupart des problèmes aux limites qui interviennent dans les applications

Si cela s'explique par La flexibilité de ces méthodes d'un côté et des progrès de la technique des ordinateurs de l'autre, il ne faut pas oublier qu'il s'agit là d'une approche qui doit être validée pour que ses résultats soient pris en considération.

Dans ce qui suit, et dans le but de valider notre modèle justement nous allons le confronter aux différentes méthodes citées dans le chapitre 2.

2. CONFRONTATION DU MODELE

2.1. Avec la méthode arithmétique

	Méthode arithmétique	M.E.F Triangulaire	Différence	<u>Arithmétique Triangulaire</u>
Quantité de pluie en cm.km ²	230846.96	233109.68	2262.72	0.9903
Précipitation moyenne (cm)	87.32	88.17	0.85	0.9904

	Méthode arithmétique	M.E.F Quadrilatérale	Différence	<u>Arithmétique Quadrilatérale</u>
Quantité de pluie en cm.km ²	230846.96	229950.71	896.25	1.0039
Précipitation moyenne (cm)	87.32	86.98	0.34	1.0039

Il est à signaler dès le départ que la superficie totale couverte par les deux méthodes ici est la même quoiqu'elle peut être extensible pour la méthode arithmétique puisqu'elle ne pose aucune condition de ce point de vue, ce qui n'est pas le cas pour les deux discrétisations des éléments finis

L'extension de surface pour les deux discrétisations nécessite des stations pluviométriques en plus pour en former de nouveaux éléments triangulaires ou quadrilatéraux

Du point de vue quantité de pluie le rapport est d'autant plus proche de 1 pour les éléments quadrilatéraux que pour les éléments triangulaires on conclut de cela que la méthode prendra la dimension d'une moyenne arithmétique des différentes stations de la région si celle-ci est discrétisée en éléments engendrant des surfaces importantes .

2.2. Avec la méthode des facettes planes

	Facettes planes	M.E.F Quadrilatérale	Différence	<u>Facettes Quadrilatérale</u>
Quantité de pluie en cm.km ²	233109.68	229950.71	3158.97	1.0137
Précipitation moyenne (cm)	88.17	86.98	1.19	1.0137

	Facettes planes	M.E.F Triangulaire	Différence	<u>Facettes Triangulaire</u>
Quantité de pluie en cm.km ²	233109.68	233109.68	0.00	1.0000
Précipitation moyenne (cm)	88.17	88.17	0.00	1.0000

Cette méthode qui exige à ce que les triangles soient de superficie la plus petite possible, donne le même résultat que dans le cas des discrétisations triangulaires puisque le principe de calcul est le même ; et donne un rapport relativement important par rapport à la méthode arithmétique mais souvent proche de 1 dans le cas des éléments quadrilatéraux

Dans le deuxième cas l'écart revient à la différence majeure entre les deux principes d'interpolations en question

2.3. Avec la méthode de Thiessen

	Méthode de Thiessen	M.E.F Quadrilatérale	Différence	<u>Thiessen</u> Quadrilatérale
Quantité de pluie en cm.km ²	229786.14	229950.71	164.54	0.9993
Précipitation moyenne (cm)	86.92	86.98	0.06	0.9993

	Méthode de Thiessen	M.E.F Triangulaire	Différence	<u>Thiessen</u> Triangulaire
Quantité de pluie en cm.km ²	229786.14	233109.68	3323.54	0.9857
Précipitation moyenne (cm)	86.92	88.17	1.25	0.9716

La méthode Thiessen peut engendrer une surface plus importante que celle ci mais les deux discrétisation non, en raison du manque de stations. Il est à signaler aussi que la méthode des polygones de Thiessen qui est d'une approche géométrique est d'autant plus proche à la discrétisation quadrilatérale que triangulaire avec un rapport toujours proche de 1

2.4. Avec la méthode des isohyètes

	Méthode isohyètes	M.E.F Quadrilatérale	Différence	<u>Isohyètes</u> Quadrilatérale
Quantité de pluie en cm.km ²	238194.70	229950.71	8243.99	1.0358
Précipitation moyenne (cm)	90.10	86.98	3.12	1.0359

	Méthode isohyètes	M.E.F Triangulaire	Différence	<u>Isohyètes</u> Triangulaire
Quantité de pluie en cm.km ²	238194.70	233109.68	5085.02	1.0218
Précipitation moyenne (cm)	90.10	88.17	1.93	1.0219

Cette méthode très répondeuse pour le calcul de la quantité de pluie dans une région donnée, fait un rapport plus proche de 1 pour la discrétisation triangulaire que pour la quadrilatérale et marque aussi la possibilité d'extension de surface avec les méthodes appropriées

Il vient de ce fait que la méthode d'approximation en éléments finis ne présente pas uniquement l'approche géométrique du problème mais aussi une dimension hydrologique

2.5. Avec la méthode des deux axes

	Méthode deux axes	M.E.F Quadrilatérale	Différence	<u>Deux axes</u> Quadrilatérale
Quantité de pluie en cm.km ²	229700.08	229950.71	250.63	0.9989
Précipitation moyenne (cm)	86.88	86.98	0.10	0.9988

	Méthode deux axes	M.E.F Triangulaire	Différence	<u>Deux axes</u> Triangulaire
Quantité de pluie en cm.km ²	229700.08	233109.68	3409.6	0.9854
Précipitation moyenne (cm)	86.88	88.17	1.19	0.9865

Cette méthode aussi, fait un rapport très proche de 1 pour les différentes discrétisations mais vue qu'elle est aussi d'une construction géométrique elle s'approche plus aux éléments quadrilatéraux que triangulaires

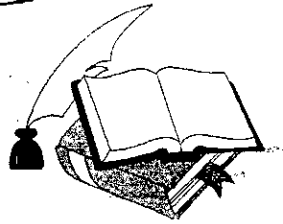
On doit aussi noter que cette méthode accepte l'extension de surface sans pour autant rajouter des stations pluviométriques

3. CONCLUSION

De tous ce qui précède on conclut que notre modèle mathématique des éléments finis avec ses différentes discrétisations surtout triangulaire, est largement applicable et serviable pour les problèmes physiques régis par des conditions aux limites. Cela s'appuie évidemment sur les résultats très satisfaisants obtenus lors de la confrontation du modèle avec la totalité des méthodes classiques utilisables depuis des années et par la majorité des bureaux d'étude, nous pouvons ainsi confirmer et valider notre modèle sans aucune crainte quant à son application pour la détermination de la quantité de pluie .

Il est à noter bien sûr que ce modèle prendra une dimension réelle et physique surtout pour les discrétisation triangulaire et dans le cas où la densité du réseau pluviométrique est importante.

CONCLUSION



CONCLUSION :

Aujourd'hui, à côté du stockage et du transport des eaux, la mesure exacte des précipitations constitue un nouvel élément des stratégies d'aménagement qui, s'il ne permet pas de résoudre tous les problèmes, y introduit explicitement une nouvelle dimension, celle de la sécurité et de l'exactitude. L'hydrologie telle qu'elle est pratiquée aujourd'hui et telle qu'on peut la souhaiter reste donc à construire.

On s'aperçoit que la maîtrise sociale de l'eau n'est pas de la compétence de l'hydrologue uniquement, mais des gestionnaires de l'eau, qui ont le plus grand besoin des concepts et des connaissances hydrologiques pour résoudre les problèmes qui leur sont posés. Signalons de plus que les données sous une forme élaborée, celle de modèle mathématique, pour indispensables qu'elles soient, ne sauraient suffire pour élaborer des réponses aux questions relatives à l'aménagement et à la gestion des eaux

Nous avons essayé tout au long de notre travail de proposer dans ce domaine le modèle éléments finis synthétisant des résultats de mesures particulières très satisfaisantes, nous avons remarqué que dans sa globalité, le modèle ne tente pas de représenter le mécanisme physique du phénomène. Pour le faire et vu que les applications pratiques se multiplient et exigent la rationalisation des techniques de l'hydrologie, une étude complémentaire est proposée dans l'annexe 2 tenant compte pour le problème étudié du paramètre altitude

Nous avons su que l'évolution de l'hydrologie au cours des dernières décennies a été marquée par l'introduction de l'informatique. Cette dernière a d'abord permis, et permet toujours, la réalisation rapide, économique et sûre de tâches traditionnelles de collecte, de stockage, d'édition et de traitement des volumineuses données hydrologiques. Mais grâce à la construction de ce modèle mathématique nous avons pu mettre en scène et animer l'information hydrologique de façon nouvelle. Nous l'avons fait grâce à un programme fortran exécuté par un ordinateur, auquel nous avons pu si nécessaire attribuer une valeur de précipitation pour chacune des méthodes citées au paravent.

Dans la plupart des cas, le modèle devra être validé. Il faut cependant être conscient du fait que les paramètres sans signification physique offrent au modélisateur une liberté de manœuvre dont il peut être tenté d'abuser. La plus grande parcimonie devrait donc être de rigueur dans l'introduction de tels paramètres. Nous l'avons fait avec cinq des méthodes classiques les plus utilisées, les résultats étaient très satisfaisants, ce qui nous permet de valider relativement notre modèle mathématique.

Le principal avantage touché lors de la réalisation de ce travail est la flexibilité de la méthodes des éléments finis : on a pu l'appliquer de façon quasi automatique au problème des précipitations mis sous forme variationnelle. On a aussi varier le type d'éléments choisi entre triangulaires et quadrilatéraux pour savoir lequel des éléments sera le mieux adapté au problème. On a surtout touché une très grande souplesse dans le découpage en éléments, que l'on pourra faire beaucoup plus serré dans certaines parties du domaine

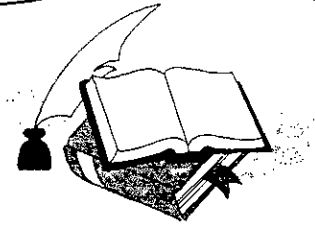
Pour nous, ce modèle mathématique donc est un moyen d'organiser, de vérifier et d'animer l'information hydrologique en vue d'atteindre un objectif de gestion et/ou de connaissance, mais il ne faut pas oublier que pour la plupart des objets hydrologiques , la gamme des modèles possibles est pratiquement infinie. Le choix d'un modèle et le mode d'estimation de ses paramètres représentent donc toujours un compromis entre l'objectif affiché, souvent ambitieux, et l'information disponible, toujours insuffisante.

Revenons, pour conclure après cette présentation sommaire du problème, sur le rapport entre l'analyse numérique des équations et les ordinateurs. Les problèmes de volume de mémoire, d'erreurs d'arrondi , de techniques d'approches et de programmation ont constitué tour à tour le goulet d'étranglement et le centre de l'attention, selon les changements de la technologie et l'appréhension des techniques par les ingénieurs.

Il convient de souligner que le développement récent des moyens de calcul scientifique a ouvert de nouvelles perspectives dans les domaines variés de la vie. L'adaptation des radars à la détection puis à la mesure est une technique coûteuse certes au départ, mais finalement rentable, pour la mesure des précipitations. On ne peut pas oublier encore beaucoup d'autres techniques modernes d'interpolation et d'estimation de la pluviométrie, notre souhait donc serais que ce travail permette de sensibiliser les bureaux d'études algériens à concevoir encore des modèles mathématiques pour la résolution des problèmes physiques, et que ce modèle soit développé numériquement dans le futur en tenant compte et de l'altitude des stations et de l'approche statistique moderne de la précipitation.



BIBLIOGRAPHIE



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] : José, Lamas
hydrologie générale :
principes et applications

- [2] : G.réméniéras
l'hydrologie de l'ingénieur

- [3] : 1995 Encyclopædia Universalis France S.A

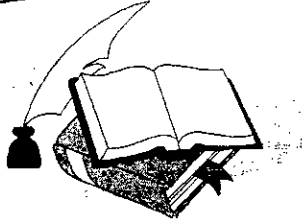
- [4] : J.P.Laborde
méthodes d'interpolation, géostatistique et cartographie
automatique à l'usage des géographes et de quelques autres

- [5] : J.P.Nougier
méthodes de calcul numérique

- [6] : Amar khenane
méthode des éléments finis
énoncé des principes de base O.P.U

- [7] : Dhatt et Touzot
une présentation de la méthode des éléments finis
deuxième édition

ANNEXES



ANNEXE N°1 :

1) INTEGRATION NUMERIQUE

1.1 INTRODUCTION

L'existence de certains problèmes où on est amené à évaluer des intégrales sans pour autant connaître exactement les fonctions qui les décrivent tel le cas pour le problème des précipitations, fait appel à l'intégration numérique

Pour la résolution de ces intégrales plusieurs sont les méthodes proposées:

1.2 Méthode de NEWTON-COTES [5]

Cette méthode procède par la subdivision régulière de l'intervalle d'intégration $[a, b]$ tout en supposant que la fonction est définie en des points bien précis de cet intervalle.

Les formules de Newton cotes faisant le cas générales de la méthode de trapèze et de Simpson ne sont applicables que pour des polynômes de degré n très petit.

La relation la plus couramment utilisée est celle de Gauss

1.3 Méthode de GAUSS [6]

1.3.1 GENERALITE

Pour mettre en application la méthode des éléments finis nous procéderons par la méthode de Gauss qui est de loin la plus utilisée vue la facilité qu'elle présente vis à vis de la programmation.

Cette méthode, très précise, utilise des points non régulièrement espacés, et convenablement choisis. Elle peut donc s'appliquer lorsque l'intégrale $f(x)$ est connue analytiquement, ou lorsqu'il est tabulé numériquement en ces points précis.

Dans cette méthode et en intégrant des polynômes d'ordre $m \leq 2r-1$, on pourra facilement déterminer les r poids W_i et les r abscisses ξ_i , dits facteurs de pondération, qui dépendent de la fonction par laquelle on approche $f(x)$.

1.3.2 DETERMINATION DES POIDS W_i ET DES ABSCISSES ξ_i

Toute fonction f de degré $m \leq 2r-1$ peut-être exactement intégrée par la méthode de Gauss sur l'intervalle $[-1, +1]$:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r w_i f(\xi_i) \quad (\text{A1.1})$$

Cette équation est vérifiée pour le polynôme suivant :

$$f(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + \dots + a_{2r} \xi^{2r-1} \quad (\text{A1.2})$$

En portant l'équation (A1.2) dans l'équation (A1.1) nous obtiendrons un système linéaire en W_i et non linéaire en ξ_i qui nous déterminera les $2r$ paramètres de l'équation (A1.1) sous les conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} W_i > 0 \\ 0 < \xi_i < 1 \end{array} \right\} i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{A1.3})$$

Les abscisses ξ_i seront alors les racines du polynôme de Legendre d'ordre r

$$P_r(\xi) = 0 \quad (\text{A1.4})$$

définie par la formule de récurrence suivante :

$$\left. \begin{array}{l} P_0(\xi) = 1 \\ P_1(\xi) = \xi \\ \vdots \\ P_k(\xi) = \frac{2k-1}{k} \xi \times P_{k-1}(\xi) - \frac{k-1}{k} \times P_{k-2}(\xi) \end{array} \right\} k = 0, 1, 2, \dots, r \quad (\text{A1.5})$$

Les poids W_i sont donnés par :

$$W_i = \frac{2(1-\varepsilon_i^2)}{(rP_{r-1}(\varepsilon_i))^2} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{A1.6})$$

L'erreur d'intégration est donnée par :

$$e = \frac{2^{2r+1}(r!)^4}{(2r+1)((2r)!)^3} \frac{d^{2r} f}{d\varepsilon^{2r}} \quad (\text{A1.7})$$

1.3.3 EXEMPLE DE CALCUL DES W_i ET DES ξ_i

Pour $r=3$ les polynômes de Legendre (A1.4) s'écrivent :

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = \xi$$

$$P_2 = (3/2)\xi^2 - 1/2$$

$$P_3 = (5/3)\xi((3/2)\xi^2 - 1/2) - 2/3 \xi = (5/2)\xi(\xi^2 - 3/5)$$

Les racines ξ_i de $P_3 = 0$ sont :

$$\xi_1 = 0$$

$$\xi_{2,3} = \pm 0,774596\ 669241\ 483377$$

et les valeurs des poids W_i correspondants sont obtenus à partir de l'équation (A1.6)

pour $r = 3$

$$\text{pour } \xi = \xi_1 = 0 \quad W_1 = 8/9 = 0.888888\ 888888\ 888888$$

$$\text{pour } \xi = \xi_2 = \pm 0.7746 \quad W_2 = W_3 = 0.555555\ 555555\ 555555$$

Ainsi nous allons rapporter les valeurs de ξ_i et W_i dans le tableau suivant pour les trois premières valeurs de r (1, 2, 3) que nous utiliserons:

R	ξ_i	W_i
1	0.000000 000000 000000	2.000000 000000 000000
2	0.577350 269189 625764 - 0.577350 269189 625764	1.000000 000000 000000 1.000000 000000 000000
3	0.000000 000000 000000 0.774596 669241 483377 - 0.774596 669241 483377	0.888888 888888 888888 0.555555 555555 555555 0.555555 555555 555555

Tableau 1 : racines et poids pour la méthode de gauss

1.3.4 INTEGRATION A DEUX DIMENSIONS :

Soit l'intégrale double suivante :

$$i = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \quad (A1.8)$$

Afin d'évaluer cette intégrale avec la méthode de gauss nous utilisons dans chaque direction (x et y) une intégration numérique à une dimension. Pour cela nous faisons le changement de variable suivant

$$\begin{cases} x = x(\xi) \\ y = y(\eta) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \\ \text{et} \\ -1 \leq \xi \leq 1 \\ -1 \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad (A1.9)$$

Alors :

$$x = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \quad (A1.10)$$

$$y = \frac{d-c}{2} \eta + \frac{d+c}{2}$$

Après on remplace x et y par leurs nouvelles expressions dans l'expression de l'intégrale (A1.8) nous trouverons le résultat suivant :

$$i = \left[\frac{b-a}{2} \right] \left[\frac{d-c}{2} \right] \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi), y(\eta)) d\xi d\eta \quad (A1.11)$$

$$i = \left[\frac{b-a}{2} \right] \left[\frac{d-c}{2} \right] \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} w_i w_j f(x(\xi_i), y(\eta_j)) \quad (A1.12)$$

Avec r_1 points dans le sens de x et r_2 points dans le sens de y , la méthode de gauss permet d'intégrer le produit de deux polynômes en x resp en y d'ordre $2r_1 - 1$ resp $2r_2 - 1$.

1.4 Conclusion :

A travers cette analyse qu'on vient de voir avec la méthode de gauss pour l'intégration numérique, nous avons découvert l'avantage que présente cette dernière à savoir qu'on l'a appliqué à un problème qui n'est pas décrit par une formulation analytique, mais numériquement en un certains nombre de valeurs discrètes

Cette méthode aussi bien que d'autres méthodes d'intégration numériques peut aussi traiter le problème si l'intégrale ne peut être évaluée analytiquement. Mais de plus, elle s'avère la plus précise vue qu'elle interpole par un polynôme de degré $2r-1$ ce qui expliquera aussi son exactitude pour les polynômes de degré $\leq 2r-1$.

ANNEXE N°2 :

2) EFFET DE L'ALTITUDE AVEC LA METHODE DES ELEMENTS FINIS [1]

2.1. INTRODUCTION :

Nous essayerons à travers ces quelques pages de poser les équations de base, permettant de tenir compte en plus des coordonnées (x , y) d'une station pluviométrique, de l'altitude z de celle ci. Pour cela on propose les différentes formules régissant le phénomène en tenant compte de ce nouveau paramètre pour évaluer la quantité de pluie tombée sur une région donnée.

2.2. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME :

Pour calculer la quantité de pluie totale il s'agira toujours d'évaluer l'intégrale :

$$Q = \int_V p(x, y) dV \quad (\text{A2.1})$$

Afin d'inclure dans les calculs l'effet de variation des précipitations avec l'altitude, on considère que la hauteur de pluie sur un point est égale à la hauteur réduite à une élévation de référence z_0 , plus une certaine correction qui est fonction de l'altitude :

$$P = p_0 + \varepsilon z \quad (\text{A2.2})$$

Tel que :

P : précipitation à l'élévation z.

P_0 : précipitation à l'élévation z_0 (niveau de la mer par exemple).

ε : coefficient d'altitude.

z : élévation de la station.

La variation du coefficient d'altitude ε est fonction de la position synoptique produisant les précipitations et fonction aussi de l'intensité de celle ci :

$$\varepsilon = \beta p_0 + \gamma \quad (\text{A2.3})$$

ou β et γ sont les contraintes pour chaque position synoptique, l'approximation de ε se fait par la pente de la courbe (précipitation – élévation) et par la condition ($\beta = 0$ si $\varepsilon = \gamma$).

Pour une discrétisation du bassin versant V en éléments quadrilatéraux, on construit la fonction des précipitations $p(\varepsilon, \eta)$ sur l'élément de référence comme suit :

On considère que $P = p(\varepsilon, \eta)$ et $N = N(\varepsilon, \eta)$

On a alors :

$$P_0 = \langle N \rangle \{V_n\} \quad (\text{A2.4})$$

Tel que :

$\langle N \rangle$: sont les fonctions nodales.

$\{V_n\}$: vecteur des valeurs nodales ou précipitations pour un élément donné.

De la même manière on exprime la fonction altitude sur l'élément de référence par :

$$Z = \langle N \rangle \{Z_n\} \quad (\text{A2.5})$$

$\{Z_n\}$ vecteur des stations pluviométriques pour un élément donné

Donc la quantité de pluie pour un élément sera :

$$Q_e = \int_{V_e} p(x, y) dV_e$$

on peut écrire alors :

$$Q_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p(\varepsilon, \eta) \det J(\varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta \quad (\text{A2.6})$$

Idéalement, il devrait exister des stations pluviométriques à l'intérieur et sur tout le périmètre du bassin, de manière à minimiser l'erreur de discrétisation physique résultant de l'assimilation des limites curvilignes du bassin en segments de droite.

En pratique, cependant ce n'est pas le cas, et pour parer à cette difficulté, on introduit des stations pluviométriques virtuelles sur le périmètre. Dans le cas d'un élément possédant des nœuds qui représentent des pluviomètres virtuels, on aura :

$$Q_e = Q_{er} + Q_{ev}$$

Q_{er} : quantité de pluie aux pluviomètres réels.

Q_{ev} : quantité de pluie aux pluviomètres virtuels.

On exprime la hauteur des précipitations p_v en fonction de p_r grâce à la fonction d'interpolation :

$$P_v = \langle N \rangle \{P_r\}$$

Donc :

$$Q_{ev} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_v(\varepsilon, \eta) \det J \, d\varepsilon d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \langle N \rangle \{p_r\} \det J \, d\varepsilon d\eta$$

$\{p_r\}$: représente le vecteur des précipitations aux stations réelles.

On appliquant la quadrature de gauss, on conclut que :

$$Q_{ev} = \sum_i \sum_j^{n_i=2, n_j=2} W_i W_j \langle N(\varepsilon_i, \eta_j) \rangle \det J(\varepsilon_i, \eta_j)$$

On combinant (A2.2) et (A2.3), on trouve :

$$P = p_0 + (\beta p_0 + \gamma) z$$

$$P = p_0 (1 + z\beta) + \gamma z \quad (\text{A2.7})$$

Aussi (A2.5) et (A2.7) avec (A2.4) donnent :

$$P(\varepsilon, \eta) = \langle N(\varepsilon, \eta) \rangle [\{V_n\} + (\beta \langle N(\varepsilon, \eta) \rangle \{V_n\} + \gamma) \{Z_n\}] \quad (\text{A2.8})$$

Il résulte que (A2.6) sera :

$$Q_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \langle N \rangle [\{V_n\} + (\beta \langle N \rangle \{V_n\} + \gamma) \{Z_n\}] \det J \, d\varepsilon d\eta \quad (\text{A2.9})$$

tel que :

$$\langle N \rangle = \langle N(\varepsilon, \eta) \rangle \quad \text{et } J = J(\varepsilon, \eta)$$

on pose que la quantité de pluie obtenue à l'élévation de référence Z_0 est :

$$Q_0 = \int p_0(\varepsilon, \eta) \det J \, d\varepsilon d\eta$$

(A2.9) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Q_e = Q_0 &+ \beta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \langle N \rangle \{V_n\} \langle N \rangle \{Z_n\} \det J \, d\varepsilon d\eta \\ &+ \gamma \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \langle N \rangle \{Z_n\} \det J \, d\varepsilon d\eta \end{aligned} \quad (\text{A2.10})$$

En appliquant l'intégration numérique par la formule de gauss, on obtient :

$$\begin{aligned} Q_e = \sum_i^n \sum_j^{r_2} \beta N(\varepsilon_i, \eta_j) W_i W_j \det J(\varepsilon_i, \eta_j) \{V_n\} \langle N(\varepsilon_i, \eta_j) \rangle \{Z_n\} \\ + \gamma \sum_i^n \sum_j^{r_2} N(\varepsilon_i, \eta_j) \{Z_n\} \det J(\varepsilon_i, \eta_j) W_i W_j + Q_0 \end{aligned} \quad (\text{A2.11})$$

la quantité totale est donnée par :

$$Q_T = \sum_e Q_e \quad (\text{A2.12})$$

ANNEXE N°3 :**3) LISTING DES FICHIERS ET DES PROGRAMMES****3.1. INTRODUCTION :**

Vue l'intérêt que présente le programme informatique dans la vie professionnelle et scientifique, et dans le but de rendre courante la technique de programmation et pour compléter la modélisation informatique du phénomène des précipitations, nous allons présenter dans cette annexe le listing des deux programmes développés ainsi que leurs fichiers de données et de résultats.

3.2. LISTING DES FICHIERS DE DONNEES :**3.2.1. Fichiers communs entre les deux programmes:**□ **P-s-iso.txt**

67	
60.5	5.0
61.5	6.6
62.5	9.8
63.5	13.7
64.5	32.8
65.5	102.6
66.5	83.2
67.5	70.2
68.5	64.7
69.5	53.8
70.5	111.6
71.5	34.4
72.5	32.7
73.5	34.6
74.5	38.8
75.5	41.5
76.5	44.3
77.5	4.8
78.5	46.2
79.5	48.2
80.5	47.2
81.5	51.8
82.5	49.7
83.5	46.5

84.5	46.2
85.5	61.2
86.5	55.5
87.5	60.2
88.5	63.0
89.5	49.9
90.5	64.6
91.5	58.7
92.5	57.8
93.5	62.3
94.5	59.4
95.5	39.9
96.5	41.1
97.5	33.4
98.5	26.2
99.5	20.7
100.5	18.3
101.5	19.1
102.5	18.6
103.5	18.3
104.5	19.3
105.5	18.2
106.5	60.3
107.5	19.5
108.5	17.3
109.5	18.5
110.5	18.3
111.5	15.4
112.5	16.2
113.5	33.2
114.5	28.4
115.5	92.3
116.5	85.2
117.5	66.3
118.5	56.7
119.5	37.2
120.5	34.3
121.5	23.5
122.5	16.9
123.5	11.4
124.5	2.4
125.5	3.1
126.5	0.8

□ Prec-x-y.txt

36

1	64.71	591.000	390.250
2	65.07	589.275	371.300
3	59.91	594.800	353.450
4	65.53	606.900	356.100
5	103.49	617.000	353.700
6	94.58	621.450	356.850
7	126.33	643.300	354.850
8	106.55	661.775	373.925
9	106.94	670.500	382.000
10	127.40	654.600	389.450
11	116.14	642.550	391.850
12	84.35	625.050	398.550
13	73.37	603.650	390.000
14	64.67	599.200	389.325
15	71.22	596.300	366.100
16	73.80	595.800	363.200
17	66.50	600.950	359.200
18	63.35	604.650	360.550
19	86.22	612.350	357.900
20	76.22	612.550	361.150
21	81.95	625.300	362.500
22	88.69	635.000	365.250
23	89.99	634.900	370.800
24	113.52	650.900	372.090
25	106.25	660.250	382.950
26	117.36	655.280	382.930
27	97.38	649.600	383.900
28	78.04	641.900	383.500
29	100.00	640.300	391.800
30	90.12	644.350	377.750
31	93.36	622.650	390.125
32	78.73	615.100	382.300
33	70.81	608.900	375.800
34	69.73	607.100	363.500
35	85.34	620.000	371.500
36	85.75	620.850	380.300

□ P-s-thie.txt

36

1	64,71	43,5
2	65,07	82,3
3	59,91	20,1
4	65,53	34,5
5	103,49	21,6
6	94,58	63,2
7	126,33	84,7
8	106,55	46,6
9	106,4	17,5
10	127,4	24,1
11	116,14	26,2
12	84,35	52,7
13	73,37	111,2
14	64,67	94,2
15	71,22	82,7
16	73,8	45,1
17	66,5	45,2
18	63,35	25
19	86,22	32,3
20	76,22	63,8
21	81,95	107,9
22	88,69	132,2
23	89,99	135,6
24	113,52	150,2
25	106,25	55,9
26	117,36	53,2
27	97,38	61,8
28	78,04	99,8
29	100	78,6
30	90,12	83,2
31	93,36	156,2
32	78,73	101,5
33	70,81	158,1
34	69,73	28,1
35	85,34	107,3
36	85,75	117,7

□ Deuxaxes.txt

36

1	64.71	591.000	390.250	637.5	394.0	650.3	361.9
2	65.07	589.275	371.300	637.5	394.0	650.3	361.9
3	59.91	594.800	353.450	637.5	394.0	650.3	361.9
4	65.53	606.900	356.100	637.5	394.0	650.3	361.9
5	103.49	617.000	353.700	637.5	394.0	593.7	391.0
6	94.58	621.450	356.850	637.5	394.0	593.7	391.0
7	126.33	643.300	354.850	637.5	394.0	593.7	391.0
8	106.55	661.775	373.925	393.7	391.0	616.5	354.0
9	106.94	670.500	382.000	393.7	391.0	616.5	354.0
10	127.40	654.600	389.450	393.7	391.0	616.5	354.0
11	116.14	642.550	391.850	393.7	391.0	616.5	354.0
12	84.35	625.050	398.550	616.5	354.0	650.3	361.9
13	73.37	603.650	390.000	616.5	354.0	650.3	361.9
14	64.67	599.200	389.325	616.5	354.0	650.3	361.9
15	71.22	596.300	366.100	637.5	394.0	650.3	361.9
16	73.80	595.800	363.200	637.5	394.0	650.3	361.9
17	66.50	600.950	359.200	637.5	394.0	650.3	361.9
18	63.35	604.650	360.550	637.5	394.0	650.3	361.9
19	86.22	612.350	357.900	637.5	394.0	650.3	361.9
20	76.22	612.550	361.150	637.5	394.0	650.3	361.9
21	81.95	625.300	362.500	637.5	394.0	593.7	391.0
22	88.69	635.000	365.250	637.5	394.0	593.7	391.0
23	89.99	634.900	370.800	593.7	391.0	616.5	354.0
24	113.52	650.900	372.090	593.7	391.0	616.5	354.0
25	106.25	660.250	382.950	593.7	391.0	616.5	354.0
26	117.36	655.280	382.930	593.7	391.0	616.5	354.0
27	97.38	649.600	383.900	593.7	391.0	616.5	354.0
28	78.04	641.900	383.500	593.7	391.0	616.5	354.0
29	100.00	640.300	391.800	593.7	391.0	616.5	354.0
30	90.12	644.350	377.750	593.7	391.0	616.5	354.0
31	93.36	622.650	390.125	650.3	361.9	616.5	354.0
32	78.73	615.100	382.300	650.3	361.9	616.5	354.0
33	70.81	608.900	375.800	637.5	394.0	650.3	361.9
34	69.73	607.100	363.500	637.5	394.0	650.3	361.9
35	85.34	620.000	371.500	637.5	394.0	650.3	361.9
36	85.75	620.850	380.300	650.3	361.9	616.5	354.0

3.2.2. Fichier du programme progquad.for :□ **Connect4.txt**

30	4	3		
1	1	2	33	14
2	2	15	34	33
3	2	3	16	15
4	16	3	4	17
5	18	17	4	19
6	15	16	17	18
7	34	15	18	19
8	33	34	19	20
9	13	14	33	32
10	12	13	32	31
11	32	33	35	36
12	35	33	20	21
13	22	21	20	6
14	6	20	19	5
15	22	6	5	7
16	23	35	21	22
17	28	36	35	23
18	31	32	36	28
19	29	12	31	28
20	11	12	29	27
21	27	29	28	30
22	28	23	24	30
23	24	23	22	7
24	8	26	24	7
25	10	11	27	26
26	9	10	26	25
27	26	27	30	24
28	9	25	26	8
29	5	19	4	3
30	12	1	14	13

3.2.3. Fichier du programme progtria.for :□ **Connect3.txt**

60	3		
1	1	2	14
2	14	2	15
3	2	16	15
4	2	3	16
5	16	3	17
6	17	3	4
7	4	3	5
8	18	17	4
9	15	16	17
10	13	14	15
11	13	15	33
12	33	15	18
13	15	17	18
14	34	18	4
15	34	4	19
16	19	4	5
17	20	19	5
18	20	34	19
19	33	18	34
20	32	13	33
21	31	13	32
22	12	13	31
23	31	32	36
24	36	32	35
25	32	33	35
26	35	33	21
27	21	33	6
28	6	33	20
29	33	34	20
30	6	20	5

31	6	5	7
32	21	6	7
33	35	21	7
34	22	35	7
35	36	35	22
36	23	36	22
37	31	36	23
38	29	31	23
39	29	12	31
40	11	12	29
41	11	29	23
42	11	23	28
43	28	23	30
44	30	23	24
45	24	23	7
46	8	24	7
47	28	30	24
48	27	28	24
49	11	28	27
50	10	11	27
51	10	27	26
52	26	27	8
53	27	24	8
54	25	26	8
55	10	26	25
56	9	10	25
57	9	25	8
58	23	22	7
59	14	13	12
60	1	14	12

3.3. LISTING DES PROGRAMMES :

3.3.1. progquad.for :

```

c
c *****
c *          Ce programme utilise l'approximation par éléments finis          *
c *          *                                                                    *
c *          pour évaluer la quantité de pluie tombé sur une région donnée.    *
c *          *                                                                    *
c *          Celle ci est discrétisée par des éléments quadrilatéraux         *
c *          *                                                                    *
c *          isoparamétrique bilinéaires.                                       *
c *          *                                                                    *
c *          Ce programme permet aussi la calcul de cette quantité de pluie   *
c *          *                                                                    *
c *          en utilisant les méthodes classiques appropriées                 *
c *          *                                                                    *
c *****
c
c signification des variables utilisées:
c -----
c
c variables entières:
c -----
c
c nnt:          nombre de nœuds ou de stations.
c nel:          nombre d'éléments .
c nne:          nombre de nœuds par élément.
c ngp:          nombre de points d'intégration de gauss .
c num(nne):     vecteur contenant les numéros des nœuds d'un élément .
c connec(nel,nne): matrice contenant les numéros des nœuds correspondants
c               à chaque élément, et qui expliquera la manière dont les
c               éléments sont connectés entre eux .
c
c Variabes réelles:
c -----
c
c aire:         aire d'un élément
c airet:        aire totale
c qel:          quantité de pluie calculée pour un élément .
c qtot:         quantité de pluie totale .
c somp:         somme des précipitations de toutes les stations
c P4moy:        précipitation moyenne en vue de la discrétisation
c               quadrilatérale

```

c	arithmoyp:	moyenne arithmétique des précipitation enregistrées
c		sur chaque station (méthode de la moyenne arithmétique):
c	arithmtot:	quantité de pluie totale par la méthode
c		de la moyenne arithmétique
c	thiemoyp:	moyenne des précipitations par la méthode de Thiessen
c	thieqtot:	quantité de pluie totale par la méthode de Thiessen
c	ysomoyp:	moyenne des précipitations par les isohyètes
c	ysotot:	quantité de pluie totale par les isohyètes
c	axeqtot:	quantité totale de pluie tombée par des les deux axes
c	det:	déterminant du Jacobien .
c	xi:	abscisse du point d'intégration
c	eta:	ordonnée du point d'intégration
c	wi et wj:	poids d'intégration
c	geom(nnt,2):	matrice contenant les coordonnées x, y des nœuds en (km) .
c	prec(nnt):	vecteur contenant les précipitations enregistrées en
c		chaque nœud en (cm) .
c	coord(nne,2):	matrice contenant les coordonnées des nœuds d'un
c		même élément .
c	deriv(2,nne):	matrice contenant les dérivés des fonctions de
c		forme par rapport à xi et eta .
c	qjac(2,2):	matrice jacobienne
c	vn(nne):	vecteur contenant les précipitations d'un élément
c		(valeurs nodales)
c	fn(nne):	vecteur contenant les valeurs des fonctions de forme .
c	gauss(ngp,2):	matrice contenant les abscisses des points
c		d'intégration de gauss ainsi que les poids
c		correspondants .
c	surfthie(nnt):	vecteur contenant les surfaces en km ² relatives à chaque
c		station par la méthode de Thiessen
c	surfiso(nbr):	vecteur contenant les surfaces comprises entre deux
c		isohyètes consécutives. et tel que nbr = nombre de pas
c	preciso(nbr):	vecteur contenant les précipitations moyennes entres
c		deux isohyètes consécutives
c	geoE(nnt,2):	matrice des coordonnées du point E pour chaque station
c	geoC(nnt,2):	matrice des coordonnées du point C pour chaque station
c	MEcare(nnt):	vecteur contenant les valeurs de ME ² pour chaque station
c	MCcare(nnt):	vecteur contenant les valeurs de MC ² pour chaque station
c	ECcare(nnt):	vecteur contenant les valeurs de EC ² pour chaque station
c	omega(nnt):	vecteur contenant les valeurs du facteur de pondération
c		pour chaque station

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, Q-Z)

write(6,10)

```
10 format (/////,25x, '    BONJOUR ',////,
* 15x,' CE PROGRAMME VA VOUS CALCULER LA QUANTITE',//,
* 15x,' DE PLUIE TOTALE TOMBEE SUR UNE REGION',//,
* 15x,'EN UTILISANT LA DISCRETISATION QUADRILATERALE',//,
* 15x,'DES ELEMENTS ..... ET LES METHODES CLASSIQUES',////,
* 15x,' S.V.P APPUYER SUR ENTREE',//,
* 15x,' PUIS EDITEZ LE FICHER RESULT4.TXT',//,
* 15x,'    POUR VOIR LES RESULTATS',/)
read(5,*)
call quadr(nnt)
stop
end
```

C

C

C

* **Bloc des sous programmes** *

C

C

subroutine quadr(nnt)

C

C

C

cette subroutine évalue la quantité de pluie en utilisant
les méthodes classiques puis les éléments quadrilatéraux bilinéaire

C

C

implicit double precision (A-H,O-Z)

C

C

dimensionnement des matrices et vecteurs

C

common geom(40,2),prec(40),surfthie(36),surfiso(67),preciso(67),

* geoE(36,2),geoC(36,2),MEcare(36),MCcare(36),ECcare(36),

* alpha(36),omega(36)

dimension coord(4,2),vn(4),fn(4),deriv(2,4),gauss(3,2),qjac(2,2)

integer connec(30,4),num(4)

open(unit=3, file = 'prec-x-y.txt',status = 'old')

read(3,*) nnt

somp=0.d0

do 20 i = 1, nnt

read(3,*) k, prec(i), (geom(i,j), j=1,2)

somp=somp+prec(i)

20 continue

close(3)

arithmmoyp=somp/nnt


```

c
c   évaluer la quantité de pluie totale par Thiessen puis la moyenne
c
  open(unit=5, file = 'p-s-thie.txt',status = 'old')
  read(5,*) nnt
  thieqtot=0.d0
  somsurf=0.d0
  do 15 i = 1, nnt
  read(5,*) k, prec(i),surfthie(i)
  thieqtot=thieqtot+prec(i)*surfthie(i)
  somsurf=somsurf+surfthie(i)
15  continue
  close(5)
  thiemoyp=thieqtot/somsurf

c
c   quantité de pluie totale par la méthode des deux axes puis la moyenne
c
  open(unit=7, file = 'deuxaxes.txt',status = 'old')
  read(7,*) nnt
  somalphai=0.d0
  do 17 i = 1, nnt
  read(7,*) k, prec(i),(geoM(i,j),j=1,2),(geoE(i,j),j=1,2),
*      (geoC(i,j),j=1,2)
  MEcare(i)=(geoM(i,1)-geoE(i,1))**2+(geoM(i,2)-geoE(i,2))**2
  MCcare(i)=(geoM(i,1)-geoC(i,1))**2+(geoM(i,2)-geoC(i,2))**2
  ECcare(i)=(geoE(i,1)-geoC(i,1))**2+(geoE(i,2)-geoC(i,2))**2
  alpha(i)=1/cos(abs((MEcare(i)+MCcare(i)-ECcare(i))/
* (2*sqrt(MEcare(i)*MCcare(i))))))
  somalphai=somalphai+alpha(i)
17  continue
  axepmoy=0.d0
  do 18 i=1,nnt
  omega(i)=alpha(i)/somalphai
  axepmoy=axepmoy+omega(i)*prec(i)
18  continue
  close(7)

c
c   quantité de pluie totale par les isohyètes puis la moyenne
c
  open(unit=6, file = 'p-s-iso.txt',status = 'old')
  read(6,*) nbr
  ysoqtot=0.d0
  somsurfiso=0.d0
  do 16 i = 1, nbr
  read(6,*) preciso(i),surfiso(i)
  ysoqtot=ysoqtot+preciso(i)*surfiso(i)

```

```

somsurfiso=somsurfiso+surfiso(i)
16 continue
close(6)
ysomoyp=ysoqtot/somsurfiso
c
c calcul pour la discrétisation quadrilatérale
c
open(unit=4, file= 'connect4.txt',status = 'old')
open(unit=8, file= 'result4.txt',status = 'new')
read(4,*) nel, nne, ngp
do 30 i=1,nel
30 read(4,*) k, (connec(k,j), j=1,nne)
close(4)
c
c déterminer les abscisses et poids de gauss pour l'intégration numérique
c
call samp(gauss,ngp)
c
c évaluer la quantité de pluie pour chaque élément puis totale
c
airet = 0.D0
qtot = 0.D0
write(8,104)
do 60 ie = 1,nel
do 40 in = 1,nne
num(in) = connec(ie,in)
coord(in,1) = geom(num(in),1)
coord(in,2) = geom(num(in),2)
vn(in) =prec(num(in))
40 continue
qel =0.d0
aire =0.d0
do 50 ig =1,ngp
do 50 jg =1,ngp
xi = gauss(ig,1)
wi = gauss(ig,2)
eta = gauss(jg,1)
wj = gauss(jg,2)
call func(xi,eta,fn)
call deriva(xi,eta,deriv)
call pscal(fn,vn,nne,fonc)
call matmul(deriv,2,nne,coord,nne,2,qjac)
det =qjac(1,1)*qjac(2,2) - qjac(1,2)*qjac(2,1)
aire = aire +wi*wj*det
qel = qel + wi*wj*det*fonc
50 continue

```

```
write(8,103) ie, aire , qel
airet = airet + aire
qtot = qtot + qel
60 continue
P4moy=qtot/airet
arithmqtot=arithmmoyp*airet
axeqtot=axepmoy*airet

write(8,107)
107 format(//,1x,'MEF DISCRETISATION QUADRILATERALE : ',/)
WRITE(8,101) airet
101 format(1x,'superficie totale ... = ',f10.2,' km2,/)
write(8,102) qtot
102 format(1x,'quantite de pluie totale ... = ',f10.2,' cm.km2,/)
write(8,105) P4moy
105 format(1x,'la précipitation moyenne ... = ',f10.2,' cm')

write(8,108)
108 format(//,1x,'METHODE DE LA MOYENNE ARITHMETIQUE : ',/)
write(8,125) airet
125 format(1x,'superficie totale ... = ',f10.2,' km2,/)
write(8,109) arithmqtot
109 format(1x,'quantite de pluie totale ... = ',f10.2,' cm.km2,/)
write(8,110) arithmmoyp
110 format(1x,'la précipitation moyenne ... = ',f10.2,' cm')

write(8,111)
111 format(//,1x,'METHODE DE THIESSEN : ',/)
write(8,112) somsurf
112 format(1x,'superficie totale ... = ',f10.2,' km2,/)
write(8,113) thieqtot
113 format(1x,'quantite de pluie totale ... = ',f10.2,' cm.km2,/)
write(8,114) thiemoyp
114 format(1x,'la précipitation moyenne ... = ',f10.2,' cm')

write(8,126)
126 format(//,1x,'METHODE DES DEUX AXES ',/)
write(8,127) airet
127 format(1x,'superficie totale ... = ',f10.2,' km2,/)
write(8,128) axeqtot
128 format(1x,'quantite de pluie totale ... = ',f10.2,' cm.km2,/)
write(8,129) axepmoy
129 format(1x,'la précipitation moyenne ... = ',f10.2,' cm')
```

```

write(8,118)
118 format(//,1x,'METHODE DES ISOHYETES : ',//)
write(8,115) somsurfiso
115 format(1x,'superficie totale ... = ',f10.2,' km2,/)
write(8,116) ysoqtot
116 format(1x,'quantite de pluie totale ... = ',f10.2,' cm.km2,/)
write(8,117) ysomoyp
117 format(1x,'la précipitation moyenne ... = ',f10.2,' cm')

103 format(2x,i3,6x,f10.2,6x,f10.2)
104 format(/,'RESULTATS OBTENUS : ',//,
* 1x,'élément',4x,' aire (km2) ',4x,' qel (cm.km2)',//)
close(8)
return
end

```

```

c -----
c SUBROUTINE SAMP(GAUSS,NGP)
c -----
c
c -----
c CETTE SUBROUTINE CALCUL LES ABSCISSES ET LES POIDS
c CORRESPONDANTS POUR L'INTEGRATION AVEC LA METHODE DE
c GAUSS
c -----
c

```

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (a-h,O-Z)
DIMENSION GAUSS(3,*)
GOTO(1,2,3) NGP
1 GAUSS(1,1)=0.d0
GAUSS(1,2)=2.D0
GOTO 70
2 GAUSS(1,1)=.5773502691896
GAUSS(2,1)=-GAUSS(1,1)
GAUSS(1,2)=1.d0
GAUSS(2,2)=1.d0
GOTO 70
3 GAUSS(1,1)= 0.77459666924
GAUSS(2,1)= 0.d0
GAUSS(3,1)= -GAUSS(1,1)
GAUSS(1,2)= 0.555555555555
GAUSS(2,2)= 0.888888888888
GAUSS(3,2)= GAUSS(1,2)
70 RETURN
END

```

```
c
c -----
c SUBROUTINE FUNC(XI,ETA,FN)
c -----
c
c -----
c CETTE SUBROUTINE CALCUL LES VALEURS DES FONCTIONS
c NODALES AUX POINTS D'INTEGRATION(XI, ETA)
c -----

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION FN(4)
FN(1)=(1-XI)*(1-ETA)/4
FN(2)=(1+XI)*(1-ETA)/4
FN(3)=(1+XI)*(1+ETA)/4
FN(4)=(1-XI)*(1+ETA)/4
RETURN
END

c -----
c SUBROUTINE DERIVA(XI,ETA,DERIV)
c -----
c
c -----
c CETTE SUBROUTINE CALCUL LES DERIVEES DES FONCTION
c NODALES PAR RAPPORT A XI ET ETA
c -----

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION DERIV(2,4)
DERIV(1,1)=-(1-ETA)/4
DERIV(1,2)=(1-ETA)/4
DERIV(1,3)=(1+ETA)/4
DERIV(1,4)=-(1+ETA)/4
DERIV(2,1)=-(1-XI)/4
DERIV(2,2)=-(1+XI)/4
DERIV(2,3)=(1+XI)/4
DERIV(2,4)=(1-XI)/4
RETURN
END
```

```
c
c -----
SUBROUTINE PSCAL (V,W,IV,SCAL)
c -----
c -----
c
c CETTE SUBROUTINE CALCUL LE PRODUIT SCALAIRE DE 2 VECTEURS
c -----

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION V(*),W(*)
SCAL=0.d0
DO 80 I=1,IV
SCAL=SCAL+V(I)*W(I)
80 CONTINUE
RETURN
END

c -----
SUBROUTINE MATMUL(A,IA,JA,B,IB,JB,C)
c -----
c -----
c
c CETTE SUBROUTINE CALCUL LE PRODUIT DE DEUX MATRICES
c -----

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION A(IA,JA),B(IB,JB),C(IA,JB)
DO 100 i=1,ia
DO 100 j=1,jb
C(i,j)=0.d0
DO 90 K=1,ja
c(i,j)=c(i,j)+A(L,K)*B(K,J)
90 CONTINUE
100 CONTINUE
RETURN
END
```

3.3.2. progtria.for :

```

c
c *****
c *          Ce programme utilise l'approximation par éléments finis          *
c *                                                                                   *
c *          Cas de discrétisation triangulaire des éléments                   *
c *                                                                                   *
c *          pour évaluer la quantité de pluie tombée sur une région donnée.    *
c *                                                                                   *
c *          Il permet ensuite de calculer cette quantité de pluie en          *
c *                                                                                   *
c *          utilisant les méthodes classiques appropriées                     *
c *                                                                                   *
c *****
c
c signification des variables utilisées:
c -----
c
c Variables entières:
c -----
c
c nnt:          nombre totale de nœuds ou de stations.
c nel:          nombre d'éléments obtenus lors de la discrétisation triangulaire
c nne:          nombre de nœuds par élément.
c num(nne):     vecteur contenant les numéros des nœuds d'un élément .
c connec(nel,nne): matrice contenant les numéros des nœuds correspondants
c                à chaque élément ,et qui expliquera la manière dont les
c                éléments sont connectés entre eux .
c
c Variables réelles:
c -----
c
c aire:         aire d'un élément
c airt:         aire totale
c qel:          quantité de pluie calculée pour un élément .
c qtot:         quantité de pluie totale .
c somp:         somme des précipitations de toutes les stations
c P3moy:        précipitation moyenne en vue de la discrétisation
c                triangulaire
c arithmmoyp:   moyenne arithmétique des précipitation enregistrées
c                sur chaque station (méthode de la moyenne arithmétique)
c arithmqtot:   quantité de pluie totale par la méthode de la
c                moyenne arithmétique
c thiemoyp:     moyenne des précipitations par la méthode de Thiessen
c thieqtot:     quantité de pluie totale par la méthode de Thiessen

```

```

c   ysomoy:      moyenne des précipitations par les isohyètes
c   ysoqtot:     quantité de pluie totale par les isohyètes
c   axepmoy:     moyenne des précipitations par la méthode des deux axes
c   axeqtot:     quantité totale de pluie tombée par des les deux axes
c   geom(nnt,2): matrice contenant les coordonnées x, y des nœuds en km.
c   prec(nnt):   vecteur contenant les précipitations enregistrées sur
c               chaque station en (cm).
c   coord(nne,2): matrice contenant les coordonnées des nœuds d'un
c               même élément
c   vn(nne):     vecteur contenant les précipitations d'un élément
c               (valeurs nodales)
c   surfthie(nnt): vecteur contenant les surfaces en km2 relatives à chaque
c               station par la méthode de Thiessen
c   surfiso(nbr): vecteur contenant les surfaces comprises entre deux
c               isohyètes consécutives. et tel que nbr = nombre de pas
c   preciso(nbr): vecteur contenant les précipitations moyennes entres
c               deux isohyètes consécutives
c   geoE(nnt,2): matrice des coordonnées du point E pour chaque station
c   geoC(nnt,2): matrice des coordonnées du point C pour chaque station
c   MEcare(nnt): vecteur contenant les valeurs de ME2 pour chaque station
c   MCcare(nnt): vecteur contenant les valeurs de MC2 pour chaque station
c   ECcare(nnt): vecteur contenant les valeurs de EC2 pour chaque station
c   omega(nnt):  vecteur contenant les valeurs du facteur de ponderation
c               pour chaque station
c
c   *****
c
c   IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, Q-Z)
c   write(6,10)
10  format (/////,25x, '    BONJOUR ',///,
*    15x,' CE PROGRAMME VA VOUS CALCULER LA QUANTITE',//,
*    15x,' DE PLUIE TOTALE TOMBEE SUR UNE REGION',//,
*    15x,'EN UTILISANT LA DISCRETISATION TRIANGULAIRE',//,
*    15x,'DES ELEMENTS ... ET LES METHODES CLASSIQUES',///,
*    15x,'    S.V.P APPUYER SUR ENTREE',//,
*    15x,'    PUIS EDITEZ LE FICHIER RESULT3.TXT',//,
*    15x,'    POUR VOIR LES RESULTATS',/)
c   read(5,*)
c   call triang(nnt)
c   stop
c   end

```



```

c
c *****
c *   liste des sous programmes   *
c *****
c -----
c subroutine triang(nnt)
c -----
c
c -----
c Cette subroutine évalue la quantité de pluie en utilisant
c des éléments triangulaires et les méthodes classiques
c -----
c
c implicit double precision (a-h,o-z)
c
c dimensionnement des matrice et vecteurs
c
c common geom(36,2),prec(36),surfthie(36),surfiso(67),preciso(67),
* geoE(36,2),geoC(36,2),MEcare(36),MCcare(36),ECcare(36),
* alpha(36),omega(36)
c dimension coord(3,2) ,vn(3)
c integer connec(60,3),num(3)
c
c open(unit=3, file = 'prec-x-y.txt',status = 'old')
c read(3,*) nnt
c somp=0.d0
c do 10 i = 1, nnt
c read(3,*) k, prec(i), (geom(i,j) ,j=1,2)
c somp=somp+prec(i)
10 continue
c close(3)
c arithmmoyp=somp/nnt
c
c quantité de pluie totale par Thiessen puis la moyenne
c
c open(unit=6, file = 'p-s-thie.txt',status = 'old')
c read(6,*) nnt
c thieqtot=0.d0
c somsurf=0.d0
c do 15 i = 1, nnt
c read(6,*) k, prec(i),surfthie(i)
c thieqtot=thieqtot+prec(i)*surfthie(i)
c somsurf=somsurf+surfthie(i)
15 continue
c close(6)
c thiemoyf=thieqtot/somsurf

```

c
c **quantité de pluie totale par la méthode des deux axes puis la moyenne**

```
c
open(unit=7, file = 'deuxaxes.txt',status = 'old')
read(7,*) nnt
somalphai=0.d0
do 16 i = 1, nnt
read(7,*) k, prec(i),(geoM(i,j),j=1,2),(geoE(i,j),j=1,2),
*   (geoC(i,j),j=1,2)
MEcare(i)=(geoM(i,1)-geoE(i,1))**2+(geoM(i,2)-geoE(i,2))**2
MCcare(i)=(geoM(i,1)-geoC(i,1))**2+(geoM(i,2)-geoC(i,2))**2
ECcare(i)=(geoE(i,1)-geoC(i,1))**2+(geoE(i,2)-geoC(i,2))**2
alpha(i)=1/cos(abs((MEcare(i)+MCcare(i)-ECcare(i))/
* (2*sqrt(MEcare(i)*MCcare(i))))))
somalphai=somalphai+alpha(i)
16 continue
axepmoy=0.d0
do 18 i=1,nnt
omega(i)=alpha(i)/somalphai
axepmoy=axepmoy+omega(i)*prec(i)
18 continue
close(7)
```

c
c **quantité de pluie totale par les isohyètes puis la moyenne**

```
c
open(unit=9, file = 'p-s-iso.txt',status = 'old')
read(9,*) nbr
ysoqtot=0.d0
somsurfiso=0.d0
do 17 i = 1, nbr
read(9,*) preciso(i),surfiso(i)
ysoqtot=ysoqtot+preciso(i)*surfiso(i)
somsurfiso=somsurfiso+surfiso(i)
17 continue
close(9)
ysomoyp=ysoqtot/somsurfiso
```

c
c **cas des discrétisation triangulaires**

```
c
open(unit=4, file = 'connect3.txt',status = 'old')
open(unit=8, file = 'result3.txt',status = 'new')
read(4,*) nel, nne
do 20 i=1, nel
read(4,*) k, (connec(k,j), j=1,nne)
20 continue
close (4)
```

```

c
c  quantité de pluie pour les éléments triangulaires puis totale
c
  airet=0.D0
  qtot=0.D0
  write (8,104)
  do 30 ie=1,nel
  do 40 in=1,nne
  num(in) = connec(ie,in)
  coord(in,1)=geom(num(in),1)
  coord(in,2)=geom(num(in),2)
  vn(in) = prec(num(in))
40  continue
  qel = 0.0D0
  call qupltr(coord, 3, 2, vn, aire, qel)
  write(8,103) ie,aire,qel
  airet=airet+aire
  qtot=qtot+qel
30  continue
  P3moy=qtot/airet
  arithmqtot=arithmmoyp*airet
  axeqtot=axepmoy*airet

  write(8,111)
111 format(//,1x,'MEF DISCRETISATION TRIANGULAIRE ',/)
  write(8,101) airet
101 format(1x,'superficie totale      ... =',f10.2,' km²,/)
  write(8,102) qtot
102 format(1x,'quantite de pluie totale ... =',f10.2,' cm.km²,/)
  write(8,105) P3moy
105 format(1x,'la précipitation moyenne ... =',f10.2,' cm')

  write(8,131)
131 format(//,1x,'METHODE DES FACETTES PLANES ',/)
  write(8,132) airet
132 format(1x,'superficie totale      ... =',f10.2,' km²,/)
  write(8,133) qtot
133 format(1x,'quantite de pluie totale ... =',f10.2,' cm.km²,/)
  write(8,134) P3moy
134 format(1x,'la précipitation moyenne ... =',f10.2,' cm')

```

```

write(8,112)
112 format(//,1x,'METHODE DE LA MOYENNE ARITHMETIQUE ',/)
write(8,152) airet
152 format(1x,'superficie totale ... = ',f10.2,' km2,/)
write(8,107) arithmqtot
107 format(1x,'quantite de pluie totale ... = ',f10.2,' cm.km2,/)
write(8,106) arithmmoy
106 format(1x,'la precipitation moyenne ... = ',f10.2,' cm')

write(8,113)
113 format(//,1x,'METHODE DE THIESSEN ',/)
write(8,108) somsurf
108 format(1x,'superficie totale ... = ',f10.2,' km2,/)
write(8,109) thieqtot
109 format(1x,'quantité de pluie totale ... = ',f10.2,' cm.km2,/)
write(8,110) thiemoy
110 format(1x,'la précipitation moyenne ... = ',f10.2,' cm')

write(8,114)
114 format(//,1x,'METHODE DES DEUX AXES ',/)
write(8,142) airet
142 format(1x,'superficie totale ... = ',f10.2,' km2,/)
write(8,116) axeqtot
116 format(1x,'quantite de pluie totale ... = ',f10.2,' cm.km2,/)
write(8,117) axepmoy
117 format(1x,'la précipitation moyenne ... = ',f10.2,' cm')

write(8,120)
120 format(//,1x,'METHODE DES ISOHYETES ',/)
write(8,121) somsurfiso
121 format(1x,'superficie totale ... = ',f10.2,' km2,/)
write(8,122) ysoqtot
122 format(1x,'quantite de pluie totale ... = ',f10.2,' cm.km2,/)
write(8,123) ysomoy
123 format(1x,'la precipitation moyenne ... = ',f10.2,' cm')

103 format(2x, I3, 6x, f10.2, 6x, f10.2)
104 format(/,'RESULTATS OBTENUS ',//,
* 1x,'élément',4x,' aire (km2) ',4x,' qel (cm.km2)',/)
close(8)
return
end

```

```
c
c -----
c  subroutine qpltr(coord, icoord, jcoord, vn, aire, qel)
c -----
c
c -----
c  cette subroutine calcule l'aire d'un triangle à partir de ses
c  coordonnées nodales, et par la suite évalue la quantité
c  de pluie sur le triangle.
c -----
c
c  implicit double precision (A-H , O-Z)
c  dimension coord(icoord, jcoord),vn(icoord)
c
c  calcul de l'aire
c
c  xi=coord(1,1)
c  yi=coord(1,2)
c  xj=coord(2,1)
c  yj=coord(2,2)
c  xk=coord(3,1)
c  yk=coord(3,2)
c  aire = 0.5D0*((xj*yk-xk*yj)-(xi*yk-xk*yi)+(xi*yj-xj*yi))
c
c  calcul de la quantité de pluie
c
c  qel=aire*(vn(1)+vn(2)+vn(3))/(3.D0)
c  return
c  end
```

3.4. LISTING DES FICHIERS RESULTATS :**3.4.1. Result4.txt :****RESULTATS OBTENUS :**

élément aire (km²) qel (cm.km²)

1	233.03	15496.54
2	135.59	9381.34
3	47.35	3136.98
4	53.75	3537.05
5	23.90	1690.64
6	24.37	1669.29
7	33.72	2450.32
8	44.72	3337.33
9	94.45	6811.72
10	153.75	12498.70
11	75.56	6041.55
12	134.41	10506.97
13	55.53	4809.74
14	31.56	2859.45
15	144.18	15175.71
16	92.25	7961.84
17	188.33	15933.81
18	130.58	11004.77
19	146.93	13049.00
20	17.10	1802.24
21	54.90	5095.75
22	85.19	7955.07
23	155.53	16703.89
24	141.69	16365.44
25	57.63	6648.32
26	46.84	5441.05
27	67.91	7135.67
28	67.97	7409.07
29	43.53	3563.83
30	61.58	4477.62

MEF DISCRETISATION QUADRILATERALE :

superficie totale ... = 2643.82 km²
 quantité de pluie totale ... = 229950.71 cm.km²
 la précipitation moyenne ... = 86.98 cm

METHODE DE LA MOYENNE ARITHMETIQUE :

superficie totale ... = 2643.82 km²
 quantité de pluie totale ... = 230846.98 cm.km²
 la précipitation moyenne ... = 87.32 cm

METHODE DE THIESSEN :

superficie totale ... = 2643.80 km²
 quantité de pluie totale ... = 229786.14 cm.km²
 la précipitation moyenne ... = 86.92 cm

METHODE DES DEUX AXES

superficie totale ... = 2643.82 km²
 quantité de pluie totale ... = 229700.08 cm.km²
 la précipitation moyenne ... = 86.88 cm

METHODE DES ISOHYETES :

superficie totale ... = 2643.80 km²
 quantité de pluie totale ... = 238194.70 cm.km²
 la précipitation moyenne ... = 90.10 cm

3.4.2. result3.txt :**RESULTATS OBTENUS**

élément	aire (km ²)	qel (cm.km ²)
1	78.49	5087.64
2	89.12	5969.71
3	11.49	804.38
4	35.86	2376.04
5	27.11	1808.98
6	26.64	1704.35
7	27.90	2129.24
8	9.75	635.07
9	8.47	597.02
10	50.70	3536.28
11	114.92	8251.44
12	75.46	5166.16
13	15.90	1065.92
14	8.77	580.60
15	19.99	1475.43

16	15.63	1329.80
17	7.98	707.04
18	9.09	703.57
19	12.41	843.59
20	61.08	4538.63
21	73.87	6043.69
22	79.89	6686.05
23	30.05	2582.43
24	26.15	2177.60
25	49.41	3868.08
26	38.56	3059.98
27	71.93	5930.59
28	57.35	4618.38
29	35.63	2574.57
30	23.59	2156.38
31	38.86	4202.47
32	65.58	6620.14
33	60.73	5943.60
34	52.06	5212.50
35	68.66	5945.17
36	38.51	3394.73
37	77.57	6958.09
38	180.80	17076.80
39	72.34	6696.57
40	7.98	798.80
41	23.49	2397.00
42	25.10	2377.32
43	35.68	3070.48
44	49.50	4845.36
45	133.02	14624.89
46	86.77	10018.98
47	11.90	1117.12
48	45.73	4404.26
49	32.02	3111.67
50	39.44	4481.82
51	18.19	2074.17
52	22.42	2401.55
53	65.41	6921.43
54	22.44	2469.86
55	16.21	1896.51
56	30.63	3477.28
57	45.53	4852.45
58	22.51	2288.85
59	11.80	874.83
60	49.78	3546.36

MEF DISCRETISATION TRIANGULAIRE

superficie totale ... = 2643.82 km²
quantité de pluie totale ... = 233109.68 cm.km²
la précipitation moyenne ... = 88.17 cm

METHODE DES FACETTES PLANES

superficie totale ... = 2643.82 km²
quantité de pluie totale ... = 233109.68 cm.km²
la précipitation moyenne ... = 88.17 cm

METHODE DE LA MOYENNE ARITHMETIQUE

superficie totale ... = 2643.82 km²
quantité de pluie totale ... = 230846.96 cm.km²
la précipitation moyenne ... = 87.32 cm

METHODE DE THIESSEN

superficie totale ... = 2643.80 km²
quantité de pluie totale ... = 229786.14 cm.km²
la précipitation moyenne ... = 86.92 cm

METHODE DES DEUX AXES

superficie totale ... = 2643.82 km²
quantité de pluie totale ... = 229700.06 cm.km²
la précipitation moyenne ... = 86.88 cm

METHODE DES ISOHYETES

superficie totale .. = 2643.80 km²
quantité de pluie totale ... = 238194.70 cm.km²
la précipitation moyenne ... = 90.10 cm