

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

4/96

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

HYDRAULIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

### SUJET

ANALYSE DE L'INTERACTION DYNAMIQUE  
PAR ELEMENTS FINIS

Application aux systèmes barrage - reservoir

Proposé par :

Mr. O BELHADJ

Etudié par :

Mr. Abed L. BENHADJ

Mr. S. M. MOULOUDI

Dirigé par :

Mr. O BELHADJ

PROMOTION

1996

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTRE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

HYDRAULIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

ANALYSE DE L'INTERACTION DYNAMIQUE  
PAR ELEMENTS FINIS

Application aux systèmes barrage - reservoir

Proposé par :

Mr. O BELHADJ

Etudié par :

Mr. Abed L. BENHADJ

Mr. S. M. MOULOUDI

Dirigé par :

Mr. O BELHADJ

PROMOTION

1996

## RESUME

La présente étude traite de la modélisation par éléments finis de l'interaction fluide-structure dans les barrages gravité . Plusieurs applications sont développées en tenant compte des propriétés physiques et mécaniques des milieux solide et fluide .  
Pour cela un programme FORTRAN a été élaboré .

## ABSTRACT

The present study treats of structures and fluids interactions in gravity dams , by using the finite elements method . In the following many applications are developed in consideration of physical and mechanical properties of the solid and fluid elements.

To achieve this purpose a FORTRAN Computer program has been written .

## الملخص

الأطروحة المقدمة تعالج بطريقة العناصر المنتهية تفاعل الموائع مع الأجسام الصلبة ، وبالأخص السدود الثقيلة . عدة تطبيقات أجريت بأخذ بعين الاعتبار الخواص الفيزيائية والميكانيكية للوسطين الصلب والمائع .  
برنامج FORTRAN أنشأ لهذه الغاية .

## *Dédicace*

*J'aurais aimé qu'il soit présent en ce jour, il ne l'aura pas pu, le destin en aura décidé autrement. Il s'agit de mon père, à qui je dédie particulièrement ce travail .*

*Je le dédie également à ma mère qui a toujours été présente pour m'encourager dans les moments difficiles.*

*A mes frères et soeurs qui ont toujours cru en moi.*

*A tous ceux qui partagent mes souvenirs les meilleurs, mes principes, mes ambitions.*

*A tous mes amis.*

*A tous ceux qui croient en leur pays et qui luttent pour son bien.*

*L.Benhadj-Abed*

*Je dedie ce mémoire à toute ma famille et plus particulièrement*

*à mes parents sans qui je n'en serais pas là,*

*à mes soeurs qui ont toujours cru en moi,*

*à mes deux grands-mères.*

*Je le dedie également à mes amis de toujours qui se reconnaîtront sûrement.*

*S.Mouloudi*

## Avant-propos

*Nous adressons nos remerciements à Monsieur Belhadj, à la fois pour sa contribution entant qu'enseignant à notre formation d'ingénieur durant les années passées au sein du département d'hydraulique, et en particulier entant que promoteur de notre projet de fin d'études, pour lequel il nous a fourni une aide considérable sans laquelle il nous auraient pas été possible de le mener à bien. Nos remerciements vont également à tous les enseignants qui ont participé à notre formation.*

*Un hommage particulier est rendu à tout le personnel de la bibliothèque de l'école nationale polytechnique et à leur tête son conservateur.*

*Un grand coup de chapeau est également à donner à nos familles, et plus particulièrement à nos parents, pour tous les sacrifices qu'ils duent faire afin de nous offrir les meilleurs conditions qui nous ont permis d'en arriver là.*

*A tous nos amis, cette deuxième famille qui a toujours su être présente quand il le fallait et que nous remercions vivement.*

*En somme, nous rendons un hommage à toutes ces personnes qui, chacune à sa mesure, ont donné quelque chose pour faire de nous de jeunes cadres qui, nous l'espérons, seront à la hauteur des exigences de leur temps, mais surtout et avant tout, du rôle que l'on devra tous jouer dans l'édification d'un avenir prospère à notre Algérie qui nous a tant donné et pour qui nous en ferons jamais assez.*

*L. Benhadj-Abed.*

*S.M Mouloudi.*

## Sommaire

### **Chapitre 1 : A propos des barrages-poids...**

<b>1.1 Introduction.....</b>	<b>3</b>
<b>1.2 Origine et développement.....</b>	<b>4</b>
<b>1.3 Caractéristiques principales.....</b>	<b>5</b>
1.3.1 Etanchéité du parement amont.....	5
1.3.2 La fondation.....	7
1.3.3 Les réseaux de drainage.....	7
1.3.4 Les joints de contraction.....	8

### **Chapitre 2 : Analyse de stabilité des barrages-poids**

<b>2.1 Analyse statique des barrages-poids.....</b>	<b>9</b>
2.1.1 Ensemble des forces agissantes.....	9
2.1.2 Conditions de stabilité externe.....	10
2.1.3 Conditions de stabilité interne.....	11
2.1.4 Condition de Maurice-Levy.....	22
2.1.5 Condition de non-extension.....	23
<b>2.2 Analyse dynamique des barrages-poids.....</b>	<b>23</b>
2.2.1 Notions de dynamique.....	23
2.2.2 Systèmes couplés et interaction.....	25
<b>2.3 Lignes caractéristiques.....</b>	<b>29</b>
2.3.1 Courbes d'égal compression maximale.....	29
2.3.2 Courbes d'égal cisaillement effectif.....	29
2.3.3 Lignes isostatiques.....	30

### **Chapitre 3 : Concept d'éléments finis**

<b>3.1 Introduction.....</b>	<b>31</b>
<b>3.2 Développement des étapes de la méthode.....</b>	<b>32</b>
3.2.1 Le maillage de la structure.....	32
3.2.2 Transformation géométrique et élément de référence.....	33
3.2.3 Approximation sur l'élément de référence.....	37
3.2.4 Formulation intégrale.....	42
3.2.5 Critères de convergence de la méthode.....	46

## **Chapitre 4 : Application de la MEF aux barrages-poids**

<b>4.1 Introduction.....</b>	<b>48</b>
<b>4.2 Développement des équations.....</b>	<b>48</b>
4.2.1 Equations gouvernantes du solide.....	48
4.2.2 Equations gouvernantes du fluide.....	49
4.2.3 Formulation variationnelle des equations du solide.....	52
4.2.4 Formulation variationnelle des equations du fluide.....	57
4.2.5 Couplage des systèmes différentiels.....	59
4.2.6 Symétrisation des systèmes.....	60

## **Chapitre 5: Méthodes de résolution des systèmes**

<b>5.1 Résolution des systèmes linéaires.....</b>	<b>62</b>
5.1.1 Résolution du système linéaire.....	63.
<b>5.2 Résolution des systèmes différentiels.....</b>	<b>64</b>
5.2.1 Méthode de superposition modale.....	65
5.2.2 Méthode d'intégration directe.....	66

## **Chapitre 6 : Description du programme**

<b>6.1 Introduction.....</b>	<b>69</b>
<b>6.2 Description du programme.....</b>	<b>69</b>
6.2.1 Unité de maillage.....	69
6.2.2 Unité de calcul matriciel.....	70
6.2.3 Unité de mise en forme.....	79
6.2.4 Unité de résolution des systèmes.....	79.

## **Chapitre 7 : Analyse des résultats**

### **Conclusion**

### **Bibliographie**

## *Introduction*

*Pour que la terre ne fasse plus trembler.*

*Victor Davidovici*

## Introduction Générale



L'étude de la stabilité des structures face aux sollicitations auxquelles elles sont soumises constitue la phase la plus importante et la plus délicate de leur conception.

La plus importante, car au-delà des exigences de fonctionnement, l'ouvrage doit rester stable et résister à un ensemble de sollicitations combinées de différentes natures, provoquées d'une part par son fonctionnement propre, et d'autre part par les différentes interactions avec son environnement.

Quant à son caractère délicat, il reside en le fait que l'évaluation de ces efforts et leur évolution dans le temps ne peut se faire que compte-tenu de certaines hypothèses dont la validité doit être rigoureusement établie.

Les barrages ne sont pas des ouvrages de moindre importance, ils revêtent un caractère particulier du à leur aspect massif et 'démessuré'. Il en existe plusieurs types, de différentes tailles construits à la base de matériaux multiples, cependant, le barrage en béton dit 'poids', reflète particulièrement cet aspect massif, et fait l'objet d'innombrables études traitant tant de sa réalisation que de son comportement une fois opérationnel.

Avant tout, il parait essentiel de définir, et de la manière la plus adéquate le terme 'barrage'. En fonction du contexte, plusieurs définitions peuvent lui être associées, cela dépend de celles de ses caractéristiques que l'on voudra mettre en évidence. Nous concernant, nous opterons pour la définition suivante :

*"Un barrage est un ouvrage d'art construit en travers d'un cours d'eau , destiné à former une retenue d'accumulation afin d'y récolter les eaux du bassin versant qui lui est associé."*

Cette définition nous a semblé la plus appropriée par rapport au contexte de l'étude. Elle met en évidence deux aspects importants caractérisant ce type d'ouvrage à savoir, la présence de deux milieux physiques différents en contact permanent à travers une interface. L'ensemble ainsi formé est un système couplé dont le comportement face aux sollicitations extérieures sera caractérisé par l'interaction entre les deux milieux dont on doit nécessairement tenir compte.

Dans notre étude, il s'agira d'analyser le comportement de ce type de système d'un point de vue statique d'une part, et d'autre part d'un point de vue dynamique en mettant l'accent sur l'aspect **interaction fluide-structure**.

Pour se faire, les principes de base de la mécanique serviront à obtenir les équations d'équilibre puis les équations différentielles du mouvement dans le cas dynamique.

De manière générale, les comportements de tels systèmes sont régis par des équations complexes difficiles à résoudre analytiquement. Ce problème a pu être résolu avec l'avènement et le développement de méthodes de discrétisation des systèmes continus, en les transformant en des systèmes discrets comportant un nombre fini de variables inconnues. Parmi celles-ci, la discrétisation en éléments finis reste l'une des méthodes des plus utilisées, elle constitue un outil puissant pour l'analyse statique et dynamique des structures continues.

Une des premières applications de ce procédé en génie civil fut l'analyse statique des barrages poids, puis elle fut plus tard étendue à leur analyse dynamique. Le développement des applications de la MEF (méthode des éléments finis) fut étroitement lié à celui de l'outil informatique, celui-ci ayant fortement gagné en capacité et en temps de calcul.

Dans le cadre de cette étude, il s'agira de développer un programme d'application de la méthode des éléments finis à un système couplé barrage-réservoir compte-tenu de l'interaction fluide-structure, aspect important sur lequel notre attention sera particulièrement focalisée.

En définitif, un esprit efficace s'inquiéterait de l'objet et de l'intérêt d'un tel travail ! Certes, mais simuler sur un engin de la taille d'un ordinateur, le comportement d'un ouvrage de l'importance d'un barrage, n'est ce pas convaincant. Ne serait t-il pas intéressant de simuler pour mieux prévoir !!!!

# *Chapitre 1*

## *A propos des barrages-poids...*

*Le genie est fait de un pour cent d'inspiration et  
Quatre vingt dix neuf pour cent  
de transpiration*

*Thomas Edison*

## *A propos des barrages-poids...*

### *1.1. Introduction :*

Dans l'histoire, dès qu'il fût nécessaire d'élever les barrages de hauteurs relativement fortes et quand les conditions de fondations s'y prêtaient, c'est à la maçonnerie et au béton qu'il fallût faire appel.

Le barrage-poids ou barrage-gravité est une structure en béton, dimensionnée de manière à résister, par son poids, aux forces qui s'exercent sur elle et qui proviennent de la poussée de l'eau qu'elle est destinée à contenir. Le corps du barrage est le résultat de l'assemblage d'une partie en forme de trapèze reposant sur le sol, et d'une autre ayant une forme rectangulaire constituant la crête. Leurs profils amont et aval sont en réalité délimités par des courbes, destinées assurer plus de stabilité à l'ouvrage.

Les barrages-poids doivent être conçus sur des sols de fondation de très bonne qualité, les efforts étant entièrement repris par ces derniers.

### *1.2. Origine et développement :*

De toute l'antiquité, l'Homme s'inspirant peut être de la technique du castor pour la protection de ses cités lacustres, a dû constituer des réserves d'eau, pour son alimentation, pour l'arrosage de ses cultures ou encore afin de se protéger des inondations.

Le plus ancien barrage connu a été construit en Égypte voici plus de 4000 ans avant J-C. Quoiqu'on ait pas pu déterminer avec exactitude les proportions de cet ouvrage, les ruines d'autres barrages construits à la même époque indiquent que le rapport de la largeur de la base à la hauteur était de l'ordre de 4.

Les romains qui ont perfectionné les techniques de réalisation des barrages, ont réalisé des ouvrages présentant des rapports  $\frac{1}{h}$  plus réduits, de l'ordre de 3. Les ouvrages n'étaient pas cimentés ce qui limitait leur hauteur à de faibles valeurs. Mais bientôt, les constructeurs se mirent à utiliser des maçonneries cimentées, d'abord à l'argile, puis à l'aide de mortiers à la chaux.

De nombreux barrages de ce type furent construits en Espagne au XVI et XVII siècles, leur hauteur avoisinait la vingtaine de mètres. Leur profil se rapprochait plutôt du rectangle avec un parement amont vertical et un parement aval en gradins. Ils s'écartaient donc beaucoup du profil triangulaire connu actuellement correspondant à un maximum d'économie de matériaux qui pour cela est appelé profil rationnel. Les barrages d'Alicante 1500, de pûntes 1790 et de Nidjar 1850 sont des exemples parmi les ouvrages construits en Espagne.

En France, un certain nombre de barrages furent érigés entre 1830 et 1850 notamment Chazilly, Grosbois, Glomel, Settons. Ils eurent des profils divers dont certains ont provoqué des accidents dus à leur instabilité.

Vers 1855, les recherches de Sazilly ont conduit à l'établissement d'un profil rationnel ou profil d'égale résistance. La théorie était basée sur l'équilibre du profil au renversement autour de l'arête avale, sur l'équilibre au glissement sur la base ou une assise quelconque et la loi du trapèze. Le barrage de Furens, construit de 1861 à 1866 à 9 km en amont de Saint-Etienne, doit être considéré comme le prototype des barrages modernes. Plus tard, les barrages de Ternay et de Bouzey construits entre 1860 et 1900, eurent un profil concave à l'aval, vertical à l'amont et une légère concavité au pied amont.

Au barrage de Chartrain 1891 apparaît la condition de non-extension, et au barrage de Teillet-Argenty (1881-1908) le profil triangulaire.

De nombreuses innovations ont été apportées dans la conception et la construction des barrages-poids, à savoir, la réfrigération de la masse de béton pour dissiper la chaleur de prise, l'utilisation des ciments spéciaux, la construction par plots séparés. Ces innovations, ont permis la réalisation d'ouvrages colossaux dont :

- Hoover dam qui fait 220 m de haut.
- Le barrage de grande Dixence en Suisse qui fait plus de 280 m de haut.
- Grand-coulée dam qui a nécessité la mise en oeuvre de  $8.4 \cdot 10^6 \text{ m}^3$  de béton.

Pour tous ces barrages modernes, le rapport  $\frac{l}{h}$  est devenu très inférieur à 1.

### 1.3. Caractéristiques principales :

Le profil des barrages-poids a toujours évolué dans la perspective d'atteindre la forme géométrique idéale assurant à l'ouvrage un maximum de stabilité. Cependant, le profil à lui seul, ne suffit pas à satisfaire cette condition, le poids-propre du massif y joue un rôle capital. Ces deux facteurs doivent donc être pris en compte ensemble et simultanément si l'on veut réaliser un compromis entre l'aspect économique et technique de la mise sur pieds d'un tel ouvrage.

L'amélioration des caractéristiques du béton essentielle. Elle peut être réalisée en soignant la qualité et le dosage des matériaux rentrant dans sa composition. Ceci doit se faire d'une part, en diminuant sa porosité afin de le rendre le plus dense possible, et d'autre part en utilisant des matériaux sains ayant une bonne résistance mécanique.

Ces deux qualités sont inconditionnellement celles requises pour le béton d'un barrage-poids.

#### 1.3.1. Etanchéité du parement amont:

On soigne spécialement la granulométrie du béton de la face amont du barrage, pour le rendre le moins perméable possible. On peut également le surdoser dans le même but. Nous indiquons ci-contre les dosages du ciment adoptés par exemple pour le barrage de Genessiat.

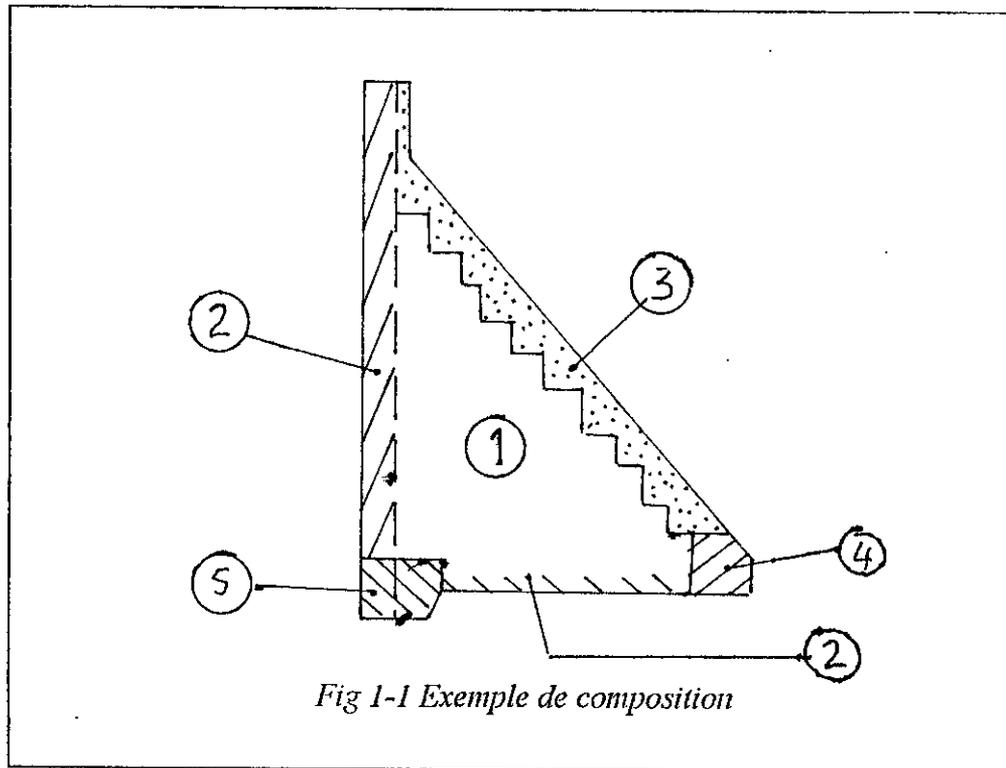


Fig 1-1 Exemple de composition

Zone 1: Béton ordinaire constituant le noyau du barrage (C)

Zone 2: Béton surdosé  $(C + C_2)$  pour assurer l'étanchéité du parement amont et résister eaux agressives .

Zone 3: Béton surdosé  $(C_4 + C_5)$  pour résister au gel.

Zone 4: Béton enrichi  $(C_1 + C_2)$  au contact de la structure avec le sol de fondation.

Zone 5: Béton enrichi  $(C_1 + C_4)$  au pied amont le plus fatigué.

Zone 6: Béton enrichi  $(C + C_5)$  au pied aval la plus fatigué.

C	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>	
175	100	25	25	100	100	en Kg/m <sup>3</sup>

### **1.3.2. La fondation :**

Les barrages poids, étant donné leur poids très important, ne peuvent être conçus que sur des sols rocheux de très bonne qualité, autrement dit, de très grande résistance mécanique.

En effet, sur un sol susceptible de subir des tassements, ces énormes ouvrages ne peuvent suivre ces déformations sans se fracturer. L'étude géologique s'avère nécessaire pour déterminer les caractéristiques mécaniques du sol de fondation, d'autant plus que les barrages-poids sont difficiles à visiter et ont le grand défaut de masquer le sol sur de grandes étendues.

Dans les régions de fondation où le sol est altéré, on peut procéder à un traitement de fondation afin d'améliorer les qualités physico-mécanique de ces zones. Le traitement de fondation peut se faire de plusieurs manières, on citera l'injection de mortiers ou matériaux étanchéisant.

### **1.3.3. Les réseaux de drainage :**

Deux sortes de réseaux de drainage sont prévus dans les barrages-poids :

- Un réseau vertical situé à l'amont
- Un réseau horizontal ou sub-horizontal.

#### **A. Les drains verticaux :**

On ménage dans le corps du barrage en aval du parement amont à 2 ou 3 mètres en arrière, un réseau de drains verticaux régulièrement espacés : leur rôle est de capter les eaux qui pourraient s'infiltrer à travers la face amont du barrage.

#### **B. Les drains horizontaux :**

Dans le cas où les eaux d'infiltration réussiraient à franchir le parement amont puis le réseau de drainage vertical, on installe des drains horizontaux traversant le corps du barrage pour capter ces eaux.

## *Chapitre 2*

# *Analyse de stabilité des barrages-poids .*

*Seule la théorie décide de ce que  
l'on peut observer .*

*Albert Einstein(1879-1955)*

## Analyse de stabilité des barrages-poids

### 2.1. Analyse statique des barrages poids :

Le barrage béton est une structure qui forme un bloc compact et solide soumis à des forces extérieures. Cet ouvrage doit être capable de demeurer en équilibre permanent sans risque de rupture. L'étude de stabilité consistera donc en la vérification de son équilibre externe et interne .

Le premier, introduira l'ensemble des efforts extérieurs auxquels est soumise la structure, alors que le second concernera les efforts internes développés en son sein même et liés aux propriétés rhéologiques et de résistance du matériau .

#### 2.1.1. Ensemble des forces agissantes :

Par soucis de rigueur, il conviendrait de définir préalablement à toute analyse, le bilan des forces qui agissent sur un barrage poids.

- Le poids propre: Le poids propre d'un barrage-poids est le facteur essentiel de stabilité, il est par conséquent très important.

- La poussée hydrostatique de l'eau: Celle-ci s'exerce sur le parement amont du barrage qui est en contact avec l'eau du réservoir. Elle agit perpendiculairement aux surfaces de contact. Sa répartition sur la hauteur du parement est linéaire.

- Les sous-pressions: Les sous-pressions créent des forces de soulèvement qui agissent sur la base du barrage et s'opposent à son poids propre. Elles proviennent des eaux d'infiltration qui échappent aux dispositions d'étanchéité.

Les sous-pressions compromettent dangereusement la stabilité du barrage puisqu'elles ont tendance à le soulever.

En plus de ces efforts, considérés comme prépondérants, il existe des sollicitations supplémentaires dues à la poussée des terres générée par les dépôts solides situés au fond de la retenue et charriés par l'eau durant son écoulement.

### 2.1.2. Les conditions de stabilité externe :

Le barrage-poids, tel que son nom l'indique, résiste à la poussée de l'eau par son poids propre. C'est un ouvrage de grande dimension dont on doit tout d'abord vérifier la stabilité externe dite d'ensemble.

#### -Hypothèses pour le calcul mécanique des barrages-poids

- 1- On se place dans les cas extrêmes
- 2- On calcule les barrages-poids par tranches verticales d'épaisseur unité, supposées indépendantes les unes des autres.

#### A. Stabilité au renversement :

La stabilité au renversement implique que le barrage ne pourra en aucun cas le renverser autour d'un point, quel qu'il soit. Cette stabilité se traduit mathématiquement par un équilibre des moments externes autour du point considéré.

#### - La résultante des forces hydrostatiques Q:

$$Q = \varpi \cdot \frac{Z^2}{2} \quad \text{où } Z : \text{profondeur}$$

$\varpi$  : poids spécifique de l'eau

#### - Le poids propre P:

$$P = \Delta \cdot m \cdot \frac{Z^2}{2} \quad \text{où } Z : \text{cote}$$

$\Delta$  : poids spécifique du béton  
m : fruit du talus aval

#### - Les forces de sous-pression:

Soit V la résultante des sous-pressions élémentaires (vdx)

Si la répartition est uniforme alors  $V = \rho \cdot m \cdot Z^2$

Si la répartition est linéaire alors  $V = \delta \cdot m \cdot \frac{Z^2}{2}$  où  $\delta$  : répartition des sous-pressions

Le bilan des forces effectué, la somme de leurs moments respectifs par rapport aux points choisis doit être nulle :

$$\sum M/n = 0 \Rightarrow M_Q + M_P + M_V = 0$$

### B. Stabilité au glissement :

Si l'on réduit l'ensemble des forces au centre de gravité de la structure, la résultante R aura pour composantes :

Q suivant l'horizontale et P-V suivant la verticale

La résultante R fera un angle  $\gamma$  avec la verticale tel que  $\text{tgy} = \frac{Q}{P - V}$

Pour qu'il n'y ait pas glissement, il faut que les forces de frottement du barrage avec le rocher de la fondation au niveau de la surface de contact soient supérieures aux forces de glissement Q

Soit  $f = \text{tg}\phi$  le coefficient de frottement, on doit avoir  $Q < f \cdot (P - V)$  d'où

$$\text{tgy} < \text{tg}\phi$$

## 2.1.3. Conditions de stabilité interne :

### A. Calcul d'un barrage-poids par la méthode RDM :

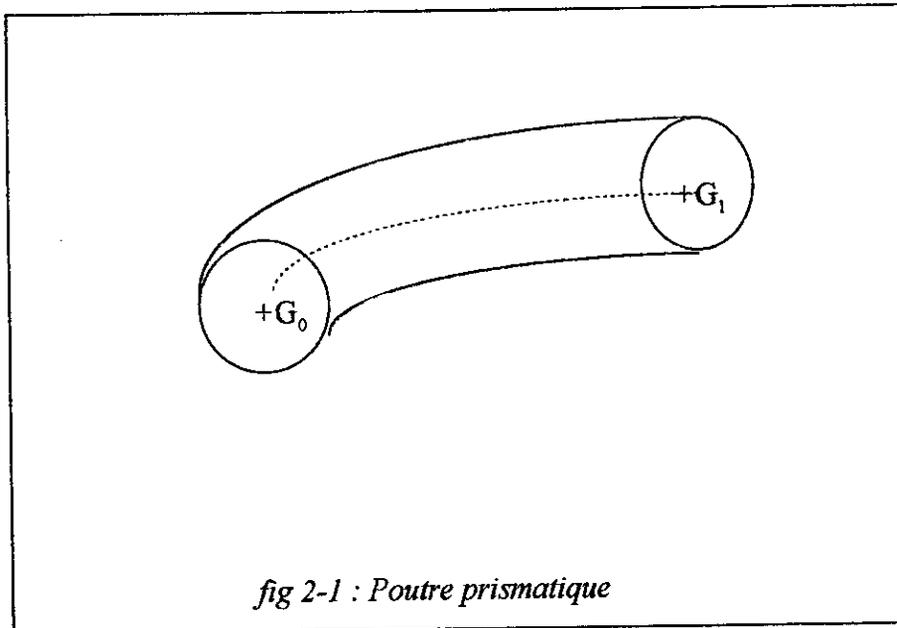
#### I-Hypothèses de calcul :

- 1- Le barrage est supposé en liaison parfaite avec le sol de fondation
- 2- Le barrage est un solide soumis à des forces extérieures et en équilibre
- 3- Les déformations sont très petites
- 4- Les déformations sont purement élastiques
- 5- La relation contrainte-déformation suit la loi de Hooke (élasticité linéaire)

### II- Rappel des règles de calcul de la RDM :

En résistance des matériaux, on considère des poutres prismatiques, c'est à dire des poutres engendrées par des sections planes (S) dont le centre de gravité G décrit une certaine courbe plane.

On considère généralement que les forces directement appliquées sur la poutre, agissent toutes suivant des lignes d'action situées dans le plan de l'axe longitudinal  $G_0G_1$ , plan de symétrie.



### III- Application de la méthode RDM sur un barrage-poids :

Les barrages-poids se calculent par tranches verticales de largeur unité. Chaque tranche est considérée comme une poutre console verticale encastree dans le sol. Ces poutres seront de profil vertical triangulaire dont les sections transversales sont des trapèzes.

Les formules de la RDM ne s'appliquent pas automatiquement à de telles poutres car les fibres externes ne sont pas parallèles à la fibre moyenne.

La formule classique de la RDM permettant de calculer la contrainte due à une sollicitation en flexion composée est la suivante :

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{M \cdot H}{I} \quad \text{où}$$

$\sigma$  : est contrainte développée dans la fibre.

$N$  : est l'effort normal interne.  $M$  : moment de flexion

$S$  : est l'aire de la section

H : est la hauteur de la fibre par rapport à la fibre moyenne

I : est le moment d'inertie de la section

Pour pouvoir appliquer cette formule, on doit supposer que les tranches verticales sont engendrées par un rectangle de largeur unité, de longueur MN par rapport à O.

Le poids propre : 
$$P = \frac{\Delta \cdot m \cdot y^2}{2}$$

La poussée hydrostatique : 
$$Q = \frac{\delta \cdot y^2}{2}$$

Le moment fléchissant : 
$$M = \frac{1}{12} \cdot \Delta \cdot y^3 \cdot (m^2 - n^2) + \frac{1}{6} \cdot \delta \cdot y^3 - \frac{1}{12} \cdot \delta \cdot y^3 \cdot n(3m + n)$$

L'application de la formule donne la contrainte normale suivante :

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{(\Delta + \delta n)}{m + n} + \frac{(\delta(2 - 3mn - n^2) - \Delta \cdot (m^2 - n^2))}{(m + n)^3} \cdot H \quad \text{où}$$

$\Delta$  et  $\delta$  : sont respectivement les poids spécifiques du béton et de l'eau

$y$  et  $H$  : sont respectivement la hauteur de la fibre et la hauteur totale du barrage

#### IV-Inconvénients de la méthode :

La méthode RDM n'offre pas la possibilité de calculer les valeurs des contraintes principales en un point quelconque de la structure. Cependant, cela reste possible pour les parements amont et aval .

### B. Calcul des barrages poids par la méthode élasticité :

Un modèle élastique linéaire est caractérisé par la correspondance directe entre les déformations et les contraintes. Cette correspondance induit la réversibilité des déformations, autrement dit, le corps élastique revient à son état initial une fois déchargé.

#### I- Hypothèses de la méthode :

La méthode élasticité est une méthode directe de formulation des équations forces-déplacements, elle est basée sur les hypothèses suivantes:

- 1- Les déformations sont supposées minimales.
- 2- La loi de comportement contraintes-déformations est linéaire.
- 3- Le solide est élastique, homogène et isotrope.

## II- Équations gouvernantes :

a- Équations d'équilibre : L'état de contrainte d'un solide en tout point est défini par le tenseur de contraintes  $[\sigma]$  tel que :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ avec } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ (réciprocité de cisaillement)}$$

Les composantes de ce tenseur doivent satisfaire les équations d'équilibre exprimées en notation indicelle comme suit:

$$\sigma_{ij,j} + F_j = 0 \quad j=1,3 \text{ et } i=1,3 \quad \text{où}$$

F représente les composantes des forces volumiques suivant la direction i

b- Équation déformation-déplacement : L'état de déformation en point d'un corps est défini par le tenseur déformation  $[\epsilon]$  tel que :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \text{ avec } \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$$

Les relations déformation-déplacement pour la théorie de l'élasticité linéaire s'écrivent comme suit:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{ij} + U_{ji}) \quad \text{où } U_{ij} : \text{composantes du champs de déplacement}$$

c- Équations de compatibilité : Il existe des relations qui expriment la restriction sur la forme de déformation, pour que le système d'équation soit intégrable. Ces conditions sont appelées conditions de compatibilité de déformation, elles sont exprimées par les relations suivantes :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) = 0$$

Le reste des équations est obtenu par permutation des indices.

d-Relation contrainte-déformation : Les états de contraintes et de déformation sont reliés de la manière suivante :  $\{\sigma_{ij}\} = [D_{ijkl}] \cdot \{\varepsilon_{kl}\}$  où  $[D_{ijkl}]$  est la matrice d'élasticité.

### III-Élasticité plane :

Les problèmes de la théorie de l'élasticité sont simplifiés dans une large mesure lorsque les tensions ou les déformations sont toutes parallèles à un plan, dans ce cas, on a affaire à des problèmes bidimensionnels.

a-Etat de contrainte plane : Considérons un cylindre de hauteur très petite par rapport aux dimensions dans le plan  $(X_1, X_2)$ . Le cylindre est chargé latéralement et indépendamment de l'axe  $(X_3)$ .

Le chargement est parallèle au plan moyen et est distribué symétriquement par rapport à celui-ci. Les hypothèses de base de ce modèle sont :

$$\sigma_{j3} = \sigma_{3j} = 0 \quad j=1,3$$

Pour un matériau isotrope, la loi de Hooke donne :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{(\sigma_{ii} - \nu \cdot \sigma_{jj})}{E} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{(1 + \nu) \cdot \sigma_{ij}}{E}$$

et on tire la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

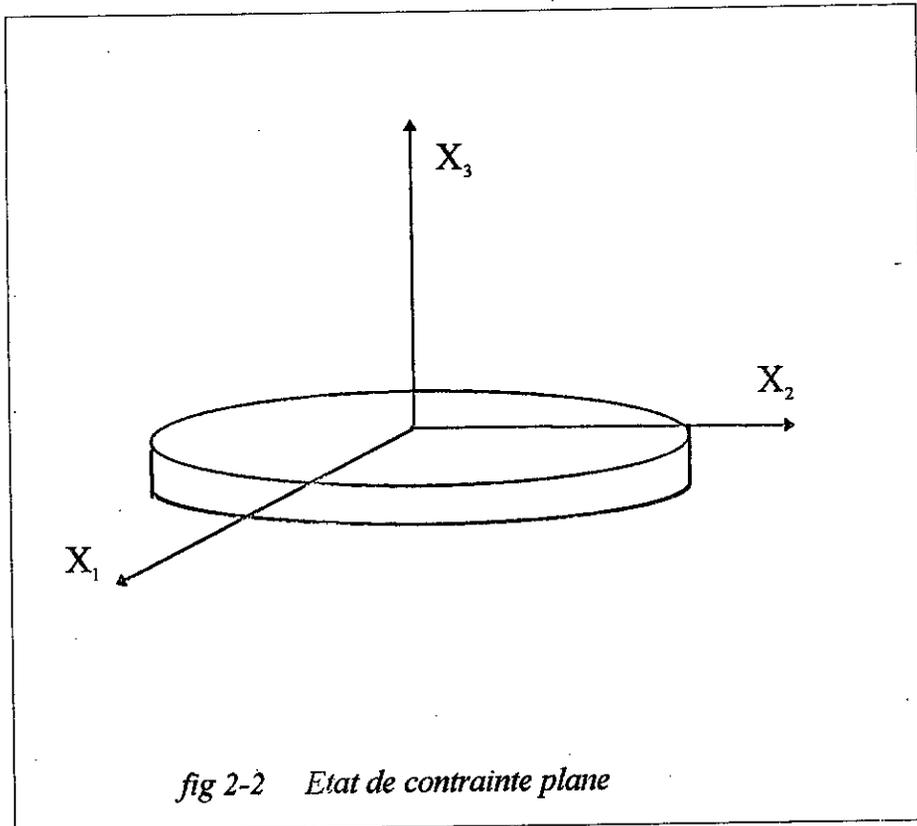
Les déplacements et les contraintes sont des fonctions de  $X_1$  et  $X_2$ .

$$U_1 = U_1(X_1, X_2)$$

$$U_2 = U_2(X_1, X_2)$$

L'effet de poisson donne naissance à une déformation  $\epsilon_{33}$  qui est calculée à partir des relations contrainte-déformation

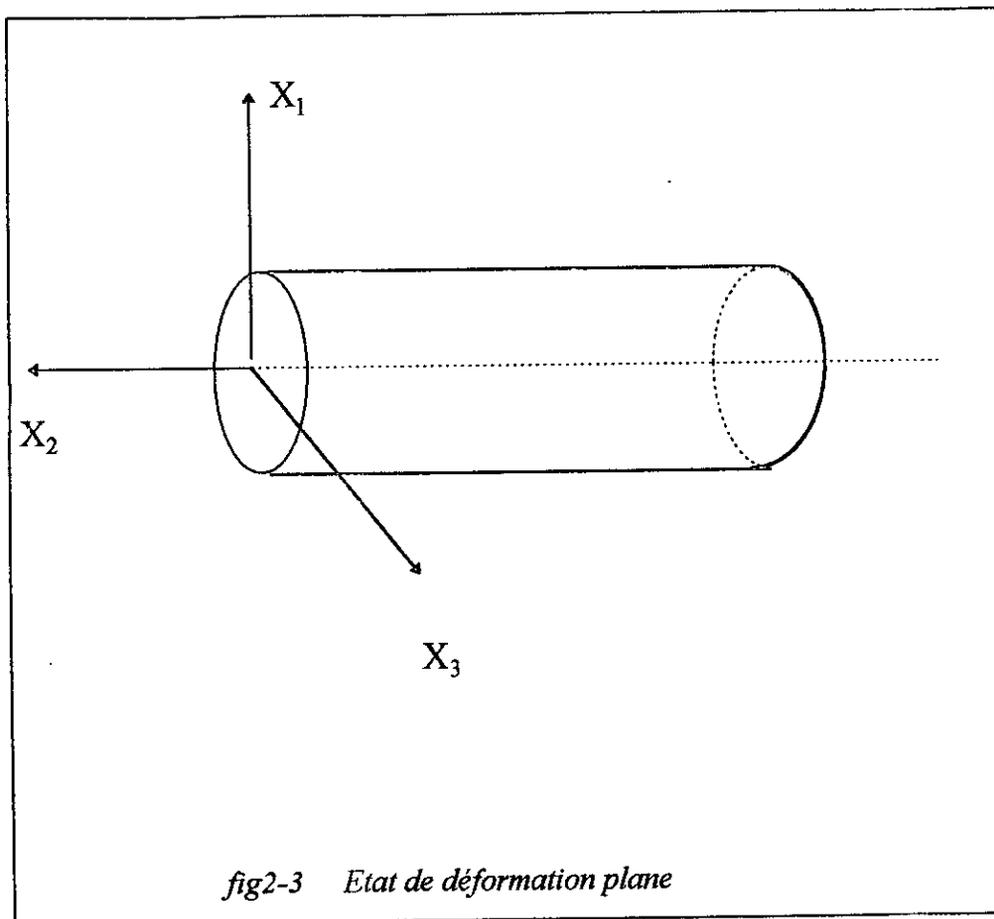
$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu \cdot (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2}$$



b- État de déformation plane : Considérons un cylindre élancé dont la dimension suivant la direction  $X_3$  perpendiculaire au plan, est très petite devant les deux autres suivant  $X_1 X_2$ . De manière similaire pour le cas de contrainte plane, la relation contrainte déformation s'écrira :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Ce modèle est considéré comme un état de déformation plane .



c- Méthode de Pigeaud : Considérons un massif triangulaire de sommet O, découpons autour d'un point quelconque du barrage un cube élémentaire de dimensions unité. L'ensemble est repéré par un système de coordonnées cartésiennes .

Les efforts appliqués sur ce volume unitaire sont :

-Sur les facettes opposées parallèles à OX :

-effort normal  $\pm\sigma_y$

-effort tangentiel  $\pm\tau_{xy}$

-Sur les facettes opposées parallèles à OY :

-effort normal  $\pm\sigma_x$

-effort tangentiel  $\pm\tau_{xy}$

Ecrivons maintenant les équations d'équilibre :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = F_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = F_y \end{cases} \quad \text{où } F_x \text{ et } F_y \text{ sont les composantes des forces de volume.}$$

- Dans le cas d'un barrage-poids, la composante des forces de volume suivant la direction X est nulle, alors que dans la direction Y n'est autre que le poids spécifique du béton. Ainsi, les équations d'équilibre auront la forme suivante.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \Delta \end{cases} \quad \text{où } \Delta \text{ est le poids spécifique du béton}$$

-Le barrage est de composition homogène ce qui nous amène à dire que les forces de volumes dérivent d'un potentiel qui serait le produit  $\Delta y$

-Les déformations sont élastiques et suivent la loi de Hooke. Par conséquent, le laplacien de  $\phi$  tel que  $\phi = (\sigma_x + \sigma_y)$  est égal à zéro.

$$\text{D'où} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Cette équation ajoutée aux deux doit permettre de déterminer les trois inconnues, à savoir,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ainsi que  $\tau_{xy}$ . De plus, la résolution peut être simplifiée en tenant compte de l'homothétie du centre O qui existe entre les foyes de surface d'une part, et les forces de volume d'autre part.

On en déduit que les contraintes sont proportionnelles à X et Y.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_1 x + b_1 y \\ \sigma_y &= a_2 x + b_2 y \\ \tau_{xy} &= c x + d y \end{aligned}$$

Les coefficients a,b,c,d sont déterminés à partir des conditions aux limites définies sur les parements.

En reportant ces résultats dans les équations générales, on obtiendra les relations suivantes :

$$\begin{aligned} d &= a_1 \\ c &= \Delta - b_1 \end{aligned}$$

Cela réduit le nombre de coefficients à 4, à déterminer à partir des conditions aux limites.

Calcul des contraintes en un point du barrage :

Rappelons l'allure des contraintes et examinons les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \sigma_x = a_1x + b_1y \\ \sigma_y = a_2x + b_2y \\ \tau_{xy} = (\Delta - b_2) \cdot x - a_1y \end{cases}$$

i- Dans le cas d'une retenue pleine :

- Sur le parement amont, considérons un point de coordonnées  $x = -ny$  et  $x$ .

Les composantes de la poussée hydrostatique qui s'exerce sur le parement sont

$$\begin{cases} F_x = y \cdot \delta \cdot \cos \alpha \\ F_y = y \cdot \delta \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

L'équilibre élastique du tétraèdre élémentaire s'écrit :

$$\begin{cases} F_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = y \cdot \delta \cdot \cos \alpha \\ F_y = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha = y \cdot \delta \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

Or,  $\text{tg} \alpha = n$  ce qui donne :

$$\begin{cases} \sigma_x + n\tau_{xy} = y\delta \\ \tau_{xy} + n\sigma_y = ny\delta \end{cases}$$

- Sur le parement aval, considérons un point de coordonnées  $x = my$  et  $y, m$  étant le fruit aval du barrage. La poussée hydrostatique de l'eau en ce point est nulle. La condition d'équilibre s'écrira:

$$\begin{cases} \sigma_x - m\tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xy} - m\sigma_y = 0 \end{cases}$$

Ainsi, le système à résoudre sera le suivant :

$$\begin{cases} \sigma_x + n\tau_{xy} = y\delta \\ \tau_{xy} + n\sigma_y = ny\delta \end{cases} \quad \begin{cases} d = a_1 \\ c = \Delta - b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x - m\tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xy} - m\sigma_y = 0 \end{cases}$$

Finalement, les coefficients a,b,c,d seront les suivants à l'issue de la résolution du système :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Delta mn(m-n)}{(m+n)^2} + \frac{\delta m(mn - m^2 - 2)}{(m+n)^3} \\ b_1 &= \frac{2 \cdot \Delta m^2 n^2}{(m+n)^2} - \frac{\delta m^2 (2mn^2 - 3n - m)}{(m+n)^3} \\ a_2 &= -\frac{\Delta(m-n)}{(m+n)^2} - \frac{\delta(3mn + n^2 - 2)}{(m+n)^3} \\ b_2 &= \frac{\Delta(m^2 + n^2)}{(m+n)^2} - \frac{\delta(m-n - 2m^2 n)}{(m+n)^3} \\ c &= \Delta - b_2 \\ d &= -a_1 \end{aligned}$$

ii-Dans le cas d'un parement vertical ( $n=0$ ) : On obtient la forme de contraintes suivante :

$$\begin{cases} \sigma_x = \delta y \\ \sigma_y = \left(-\left(\Delta - \frac{2\delta}{m^2}\right) \frac{x}{m}\right) + (\Delta - \delta) \frac{y}{m} \\ \tau_{xy} = \frac{\delta x}{m^2} \end{cases}$$

iii-Dans le cas d'une retenue vide : Pour une retenue vide, il est évident que  $\delta$  étant nul,

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = \frac{\Delta(y-x)}{m} \text{ et } \tau_{xy} = 0$$

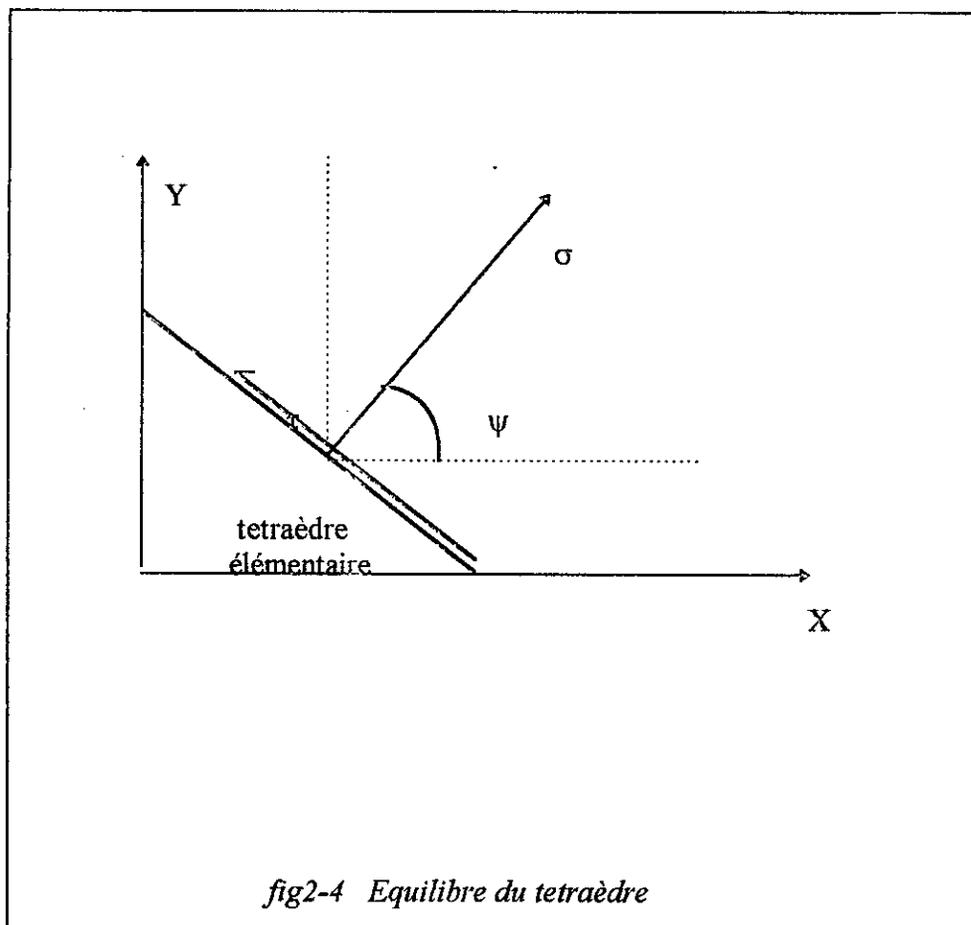
Calcul des contraintes principales : La recherche des contraintes et directions principales consiste à déterminer l'angle  $\varphi$  pour lequel la contrainte est maximale ou minimal .

-Équilibre d'un tétraèdre élémentaire :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_x \cos \psi + \tau_{xy} \sin \psi \\ \tau = \tau_{xy} \cos \psi + \sigma_y \sin \psi \end{cases}$$

et en faisant un transfert géométrique, on obtient :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\psi + \tau_{xy} \sin 2\psi \\ \tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\psi + \tau_{xy} \cos 2\psi \end{cases}$$



Afin de déterminer les contraintes maximales et la direction associée, on annule la dérivée par rapport à l'angle  $\psi$  :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\psi = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

Les valeurs particulières de  $\psi$  qui sont  $\beta$  et  $(\beta + \frac{\pi}{2})$ , appelées aussi directions principales correspondent aux contraintes élastiques principales suivantes :

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\beta + \tau_{xy} \sin 2\beta$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

En évaluant  $\cos 2\beta$  et  $\sin 2\beta$  à partir de  $\operatorname{tg} 2\beta$ , les contraintes principales sont les suivantes :

$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}$$

$$B = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}{2}$$

#### 2.1.4. Condition de Maurice-Levy :

L'infiltration de l'eau dans les fissures susceptibles de se produire dans le parement amont, conduit à l'apparition de sous-pressions capables d'engendrer la ruine de l'ouvrage. La condition de Maurice-Levy a en vue l'élimination de ce danger, et ce en imposant une contrainte de compression  $\sigma_y$  sur le parement amont, supérieure à la pression hydrostatique  $\delta y$ .

soit :  $\sigma_y > \delta y$

En remplaçant  $\sigma_y$  par sa valeur on obtient :

$$\Delta(m+n) - \delta(1+m^2) > 0$$

-Si  $n=0$  (parement vertical) :  $m \geq \sqrt{\frac{\delta}{\Delta - \delta}}$  où

$\Delta$  et  $\delta$  Sont les poids spécifiques respectifs du béton et de l'eau

$m$  Est le fruit du talus aval.

### 2.1.5. Condition de non-extension :

Cette condition est issue du fait que le béton ne résiste quasiment pas aux efforts de traction, on doit donc toujours vérifier que les contraintes principales restent celles de compression. Après un ensemble de calculs que l'on ne détaillera pas ici, la condition de non-extension s'écrira comme suit :

$$m \geq \sqrt{\frac{\delta}{\Delta}} \quad \text{pour un parement vertical (n=0)}$$

La stabilité interne du barrage n'est assurée que si les trois conditions sont satisfaites, à savoir :

- La condition de non-extension
- La condition de Maurice-Levy
- Les contraintes n'excédant pas les limites de résistance du matériau(béton).

## 2.2. Analyse dynamique des barrages-poids :

### 2.2.1. Notions de dynamique :

#### A. Définitions :

Le concept "dynamique" est associé à la notion de temps, il caractérise la variation temporelle d'une grandeur quelconque. De fait, on pourra qualifier de dynamique, tout chargement ou toute sollicitation dont la position, la direction ou encore le module ,varie dans le temps.

Une analyse dynamique consistera donc à évaluer la réponse d'une structure lorsqu'elle est soumise à un chargement variant dans le temps, et qui aura également un caractère dynamique, et ce, indépendamment de sa formulation (formulation en contraintes ou en déformations).

Généralement, la réponse dynamique d'une structure à un historique de chargement donné, est formulée en terme de déplacement, et plus précisément en terme d'historique de déplacement. Les autres inconnues, à savoir les contraintes et les déformations sont déterminées dans un second temps à partir des déplacements obtenus.

Dans l'histoire, les premières analyses de structures considéraient que celles-ci étaient parfaitement rigides de telle sorte qu'on pouvait assimiler les sollicitations sismiques à des forces statiques équivalentes. Puis, vinrent plus tard les premiers modèles dynamiques qui tenaient compte des caractéristiques vibratoires des structures sous forme de coefficients, pour qu'ensuite apparaissent les méthodes spectrales qui consistent à établir le spectre de réponse de la structure à un accélérogramme donné.

La différence fondamentale qui distingue l'approche statique de l'approche dynamique dans l'analyse d'une structure, se manifeste à travers deux aspects :

- Le chargement et la réponse étant tous deux fonction du temps, il n'existe pas de solution unique comme il est le cas en statique, car à tout moment, correspond une réponse de la structure à un chargement. La solution doit donc être évaluée à chaque instant, ce qui rend le problème plus complexe.

- Dans le cas statique, les efforts internes ainsi que les déformations ne dépendent que du chargement, ils peuvent donc être déterminés à partir de celui-ci en posant simplement les équations d'équilibre.

Par contre, en dynamique, apparaîtront au sein de la structure un ensemble de forces d'inertie faisant opposition aux forces d'accélération, et les efforts internes équilibreront non seulement le chargement extérieur mais aussi ces forces supplémentaires dues à l'inertie de la structure.

La présence des forces d'inertie constitue l'élément de distinction essentiel entre le cas statique et le cas dynamique. Cependant, lorsque le mouvement est assez lent pour que l'on puisse négliger les forces d'inertie, le problème peut être traité à chaque instant comme un cas statique. Lorsqu'au contraire ce n'est pas le cas, une analyse dynamique s'impose.

### *B. Le séisme et son influence sur la structure :*

Le séisme est un phénomène de propagation d'ondes de déformation véhiculant une énergie importante. Il est généré à partir d'un point dit foyer. Les séismes peuvent être d'origine naturelle ou provoqués par l'homme de différentes manières. Il peut être dû à une très forte explosion, ou encore dans le cas des barrages, il peut être provoqué par une vidange ou un remplissage rapide de la retenue. Ce dernier provoquerait une augmentation de la pression

interstitielle dans le rocher qui peut dépasser l'ultime charge sismique et provoquer une rupture brusque d'un point fatigué générant ainsi des ondes de déformation qui entraînerait la destruction de l'ouvrage ( cas du barrage de KOYNA en Inde ).

Voici quelques exemples de coefficients sismiques ayant été pris en compte lors de la conception des barrages. Le coefficient sismique est le rapport de l'accélération sismique à celle de la gravité.

Nom du barrage	pays	Hauteur(m)	coef horiz	coef vertical
Avie-more	N.Zéaland	57	0.1	-
Bajina Basta	ex-Yugoslavie	89	0.05	-
Bhakra	Inde	222.5	0.15	0.075
Tago Kura	Japon	150	0.12	-
Toktogul	ex-URSS	215	0.4	0.2

### 2.2.2. Systèmes couplés et interaction :

L'analyse du comportement dynamique de tout type d'ouvrages et plus spécialement des barrages, ne peut être rigoureusement menée que si l'on tient compte de leurs dépendances permanentes avec leur environnement.

Le comportement du barrage proprement dit, dépend tout d'abords des propriétés de sa fondation. Il résulte systématiquement, lors d'un séisme, une interaction dynamique importante qui traduit un phénomène de couplage entre les deux milieux physiques. C'est un couplage **solide-solide**

Dans le cas du barrage et en plus de l'interaction avec sa fondation, sa particularité de contenir un réservoir engendre un deuxième type de couplage. Celui-ci s'opère entre l'eau de la réserve qui a un comportement fluide, et la structure qui elle, a un comportement solide.

Ici encore, il est nécessaire de prendre en compte ce type d'interaction résultant d'un couplage **fluide-structure**. Ce phénomène est particulièrement significatif pour les barrages en béton mais généralement négligeable pour l'étude des barrages en remblais.

Les systèmes couplés ont les particularités suivantes :

- Aucun domaine ne peut être résolu séparément des autres.
- Aucune des variables dépendantes ne peut être explicitement éliminée au niveau des équations différentielles du système.

En fonction de la nature du contact entre les deux milieux, les systèmes couplés peuvent être distingués en deux groupes.

-Les systèmes dits de **classe I** qui sont des problèmes dans lesquels le couplage se fait sur un domaine interface sur lequel les conditions aux limites sont imposées.

-Les systèmes dits de **classe II** concernant tous les problèmes où les deux milieux en jeu se chevauchent totalement ou en partie.

Dans le cadre de cette étude, nous nous contenterons de traiter l'interaction de type fluide-structure et ce, non pas parcequ'elle est d'une plus grande importance, mais par soucis d'efficacité. La prise en charge des deux aspects nécessiterait un volume de travail que le temps qui nous est compté ne permettrait pas de mener à bien.

#### A. Interaction fluide-structure :

Pendant la secousse sismique, les parois du réservoir (parement amont, fond du réservoir) sont soumises à des mouvements qui génèrent des ondes de pression dans l'eau.

La première approche de ce phénomène a été entreprise par Westergaard . Il a calculé la répartition des pressions sur un écran vertical limitant un réservoir semi-fini, de profondeur constante dans l'hypothèse d'un mouvement horizontal harmonique de l'écran, de période T.

Il a montré que les pressions hydrodynamiques étaient en opposition de phase avec le mouvement du sol et pouvaient donc être quantifiées comme des forces d'inertie équivalentes, sous forme de masse ajoutée.

Les résultats obtenus par Westergaard à partir de 1933 ont fourni d'excellentes bases aux ingénieurs de l'époque pour le calcul des forces hydrodynamiques créées dans un réservoir lors d'un séisme. Le pas ainsi franchi a fortement influencé les méthodes de conception des barrages et ce, malgré le nombre important d'hypothèses émises par Westergaard.

### A-2 Solution analytique de Westergaard

La solution analytique mise au point par Westergaard pour déterminer la distribution des pressions sur un écran vertical avec la série d'hypothèses citée ci-dessus, est donnée sous forme d'un développement en série de sinus dont l'expression est la suivante :

$$P(y) = \frac{8 \cdot \alpha \cdot \rho \cdot h}{\pi^2} \cdot \sum_{1,3,5,\dots}^n \frac{1}{n^2 \cdot C_n} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{2h} \quad \text{avec}$$

$$C_n = \sqrt{1 - \frac{16 \cdot \rho \cdot h^2}{n^2 \cdot K \cdot T^2}} \quad \text{où}$$

$\rho$  : Masse volumique de l'eau .

$h$  : Profondeur du réservoir.

$K$ : Module de compressibilité de l'eau .

$T$  : Période d'oscillation du mouvement harmonique .

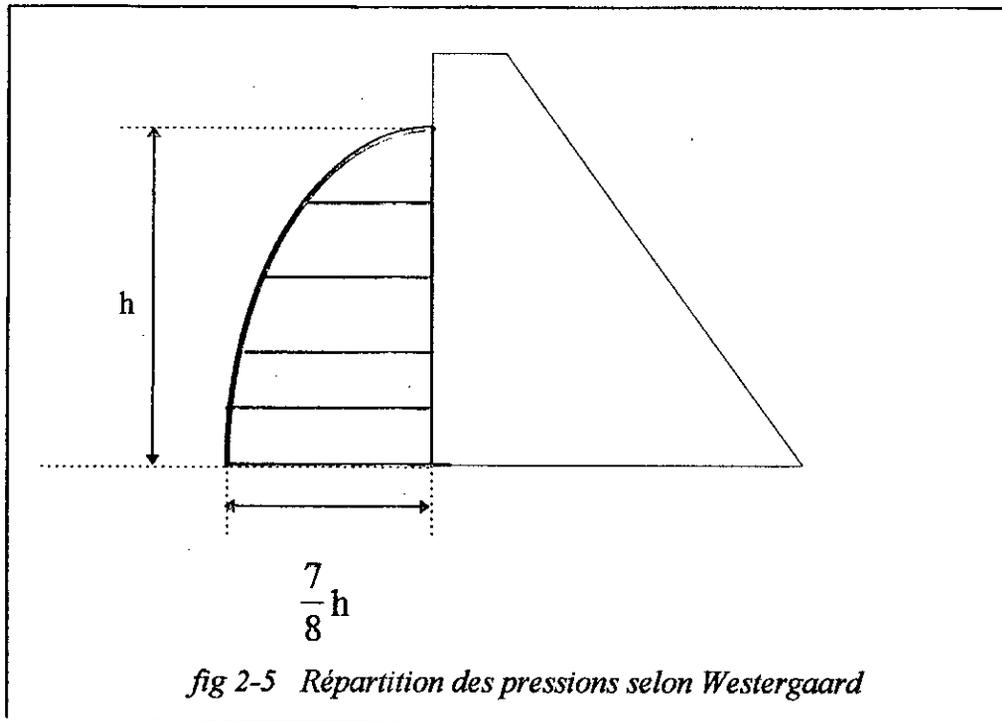
$\alpha$  : Rapport de l'accélération sismique à la pesanteur .

Dans le cas où la compressibilité de l'eau peut être légitimement négligée, on peut établir une expression parabolique approchée du *résultat*, indépendante de la période de vibration de l'écran.

$$P(y) = \frac{7}{8} \cdot \alpha \cdot \rho \cdot g \sqrt{hy}$$

La force totale appliquée sur l'écran est égale à :

$$F = \frac{7}{12} \alpha \cdot \rho \cdot g \cdot h^2$$



#### A-2 Solution analogique de Zangar :

L'influence du frottement du parement amont a été étudiée par Zangar, et ce par la méthode d'analogie électrique pour la résolution de l'équation de Laplace régissant l'évolution de la pression dans le réservoir.

La pression à une profondeur  $y$  est donnée par la formule :

$$P(y) = \frac{1}{2} \alpha \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot C_m \cdot \left[ \frac{y}{h} \left( 2 - \frac{y}{h} \right) + \sqrt{\frac{y}{h} \left( 2 - \frac{y}{h} \right)} \right] \text{ où}$$

$C_m$  est une fonction de l'angle d'inclinaison du parement amont .

Plus tard, d'autres auteurs publièrent des études complémentaires à celles entreprises par Westergaard et Zangar. Introduisant de nouveaux facteurs n'ayant pas été pris en compte par ces derniers, d'importantes conclusions ont été tirées quant à leur influence sur les valeurs des pressions hydrodynamiques dans le réservoir.

Ces études ont montré pour les retenues de moyenne à grande profondeur, que les forces hydrodynamiques dues à la composante verticale du mouvement de la terre sont comparables à celles engendrées par la composante horizontale. Par contre pour les retenues à faible profondeur, les composantes verticales des séismes engendrent des effets nettement plus importants que ceux dus aux composantes horizontales.

D'un autre côté, concernant la compressibilité du fluide, il a été conclu que lorsqu'elle est négligée, elle constitue une source importante d'erreurs. Il a été de même en ce qui concerne le rôle de la déformabilité du fond du réservoir et celle du barrage, car elles participent toutes deux à la réduction des pressions hydrodynamiques dans le fluide, phénomène particulièrement important dans les retenues de faible profondeur.

### 2.3. Lignes caractéristiques :

Les lignes caractéristiques ou d'isocontraintes nous permettent de repérer les points du barrage où le matériau travaille le plus afin que l'on puisse les renforcer.

#### 2.3.1. Courbes d'égal compression maximale :

Reprenons l'équation donnant la contrainte maximale A :

$$A = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Afin de connaître la répartition des contraintes maximales, on trace les courbes reliant les points d'égal compression A. Les autres courbes sont déduites par homothétie par rapport au sommet O.

#### 2.3.2. Courbes d'égal cisaillement effectif :

On peut également tracer les courbes d'égal cisaillement effectif en prenant l'expression suivante :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\cos 2\phi} [(A - B) - (A + B) \sin \phi] = \text{constante}$$

### 2.3.3. Lignes isostatiques :

Les lignes isostatiques sont des lignes tangentes en chaque point à l'une de deux contraintes principales qui y règnent. L'intérêt de ces courbes est de montrer comment se propagent les compressions principales dans le corps du barrage. Elles sont de deux sortes :

-Lignes tangentes aux compressions maximales qui s'appellent courbes isostatiques de première espèce.

-Lignes tangentes aux compressions minimales qui elles, sont des courbes isostatiques de seconde espèce.

Ces courbes sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\tau_{xy} \left( \frac{dx}{dy} \right)^2 + \frac{dx}{dy} (\sigma_x - \sigma_y) = \tau_{xy}$$

Elles sont orthogonales entre elles.

-Dans le cas d'une retenue pleine et lorsque la condition de M.L est satisfaite, les parements amont et aval sont des isostatiques de première espèce. Parcontre, lorsque la condition de M.L n'est pas satisfaite, les isostatiques de première espèce sont perpendiculaires au parement amont, alors que le parement aval reste une isostatique de première espèce.

-Dans le cas d'une retenue vide, le parement amont est une isostatique de première espèce et il en sera de même pour le parement aval. Les lignes isostatiques de seconde espèce les coupent perpendiculairement .

## *Chapitre 3*

### *Concept d'éléments finis .*

*J'admire la beauté de cette simplicité logique en laquelle je crois,  
faite d'ordre et d'harmonie que nous ne pouvons appréhender  
qu'avec humilité et de façon seulement imparfaite .*

*Albert Einstein(1879-1955)*

## Concept d'éléments finis

### 3.1. Introduction :

Lors de l'analyse du comportement d'un système physique continu, l'ingénieur se trouve généralement confronté à la complexité des systèmes différentiels le régissant. Ces derniers sont généralement formés d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles dont la résolution nécessite un outil mathématique extrêmement puissant que l'ingénieur n'a pas forcément en main.

Pour cela, des procédés numériques d'analyse de plus en plus efficaces ont été développés et ce, sur la base de la transformation des systèmes continus en systèmes discrets moyennant certaines hypothèses et approximations.

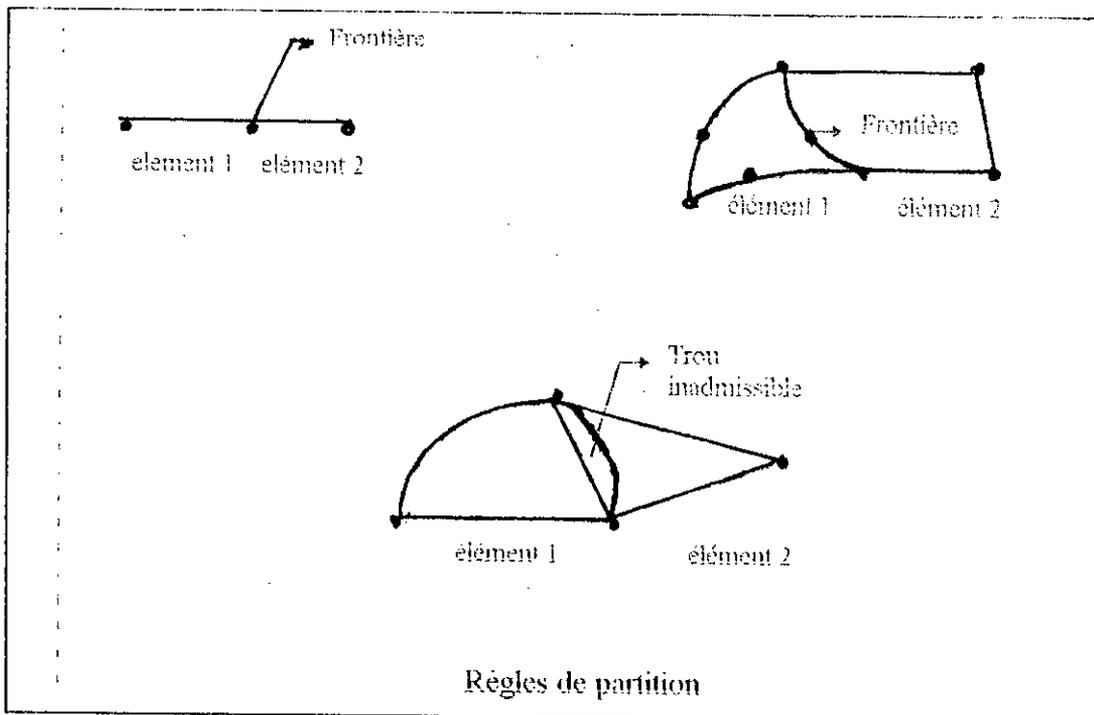
Parmi ces méthodes, La discrétisation en éléments finis est des plus utilisées, en particulier dans le domaine de calcul des structures. Elle consiste en le découpage des structures étudiés en un ensemble d'éléments ayant des dimensions finis et de formes géométriques diverses, mais le plus souvent adaptées au type de problème traité. Les éléments ainsi définis sont considérés comme reliés par des points nodaux situés sur leurs frontières. Les valeurs inconnues du problème seront calculées en ces points et constitueront ses paramètres de base.

Des fonctions d'interpolation sont posées afin de déterminer les inconnues aux autres points de la structure en fonction des paramètres nodaux. Ces fonctions d'approximation peuvent être linéaires, polynomiales ou autres. Leur choix se fait en fonction du nombre de noeuds des éléments.

Une fois la discretisation géométrique de la structure faite, la formulation du système d'équations qui lui est associé se fait au moyen de principes variationnels. Le travail se fait dans un premier temps à un niveau élémentaire, puis global dans un second temps. Entre les deux phases se situe évidemment une étape intermédiaire d'assemblage des éléments pour former la structure entière.

-La frontière d'un élément à 2 ou 3 dimensions est formée par un ensemble de courbes ou de surfaces. Chaque frontière commune à plusieurs éléments doit être définie de la même manière pour chacun d'eux.

Les éléments sont généralement choisis parmi ceux ayant des formes géométriques simples, il peuvent être à une, deux ou trois dimensions selon le problème. Dans notre cas, le travail sera effectué dans le cadre de l'élasticité plane (contraintes ou déformations planes), ce qui supposera une discretisation dans le plan. Les éléments définis par leurs noeuds seront repérés par un système d'axes bidimensionnel.



### 3.2.2. Transformation géométrique et élément de référence :

L'analyse d'une structure par élément finis est basée sur des approximations grâce auxquelles nous pourrions remplacer le système continu par un système discret. La procédure consiste à poser des fonctions d'interpolation qui nous permettront de déterminer les valeurs des inconnues en chaque point de l'élément à partir des valeurs aux noeuds. C'est une approximation nodale qui est caractérisée par les aspects suivants :

-L'approximation sur chaque sous-domaine ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des noeuds situés généralement sur les frontières.

-Les fonctions approchées sur chaque sous-domaine sont construites de manière à être continues sur celui-ci et satisfont les conditions de continuité entre les sous-domaines.

Les fonctions d'interpolation sont généralement polynomiales dont le degré dépendra du nombre de noeuds. Généralement, les polynômes sont du premier, second ou troisième degré.

Les éléments peuvent être de géométries diverses, mais dans le cas bidimensionnel les éléments quadrilatéraux et triangulaires sont considérés comme des éléments de base. De plus, selon le nombre de noeuds sur la frontière, il peuvent être linéaire, quadratiques ou cubiques.

Dans certains problèmes, on peut se trouver confrontés lors de la discretisation de la structure, à des éléments géométriques ayant des formes complexes pour lesquels les expressions analytiques seraient difficiles à exprimer. Pour simplifier ces problèmes, on a recours aux éléments dits de référence de formes très simples, repérés dans un espace de référence et dont les expressions analytiques sont facilement déterminées. Le passage entre les formes de référence et les formes réelles se fera au travers d'une transformation géométrique qui liera les coordonnées de l'élément dans l'espace de référence à ses coordonnées dans l'espace réel.

La transformation géométrique définit les coordonnées  $X$  de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées  $\xi$  du point correspondant de l'élément de référence.

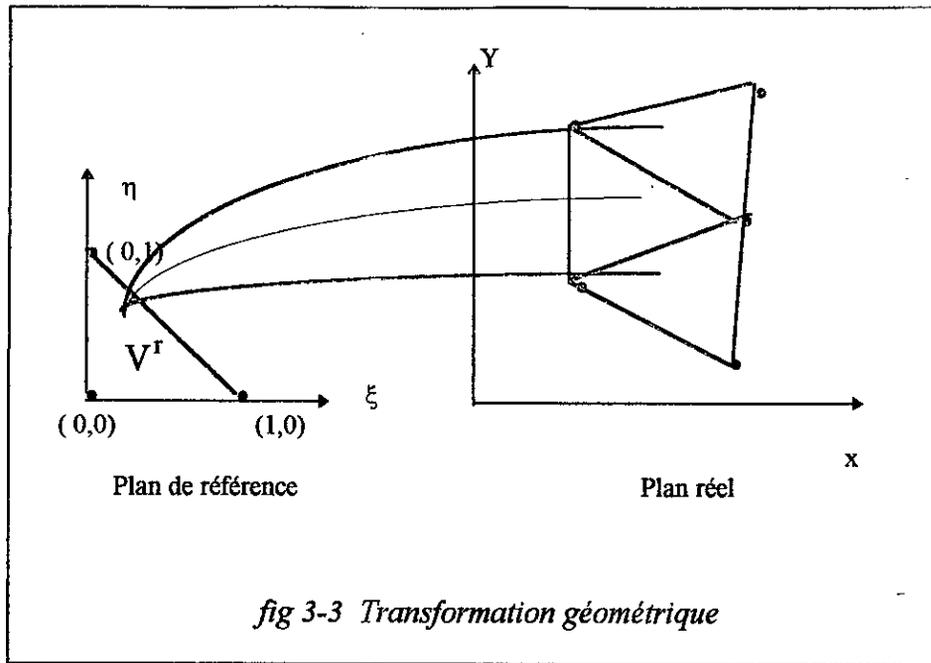
$$T : \xi \longrightarrow X = X(\xi) \text{ où}$$

$T$  est la transformation géométrique

Cette transformation dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées des noeuds qui le définissent. Il y a donc une transformation  $T$  différente pour chaque élément réel.

$$T : \xi \longrightarrow X = X(\xi, X_i, X_j, X_k, \dots)$$

où les  $X_i$  sont les coordonnées des noeuds de l'élément.



$$T : \xi \longrightarrow X(\xi) = [\bar{N}(\xi)] \{X_n\} \quad (1)$$

Les fonctions  $\bar{N}_i$  sont habituellement des polynômes en  $\xi$  appelés **fonctions de transformation géométrique**.

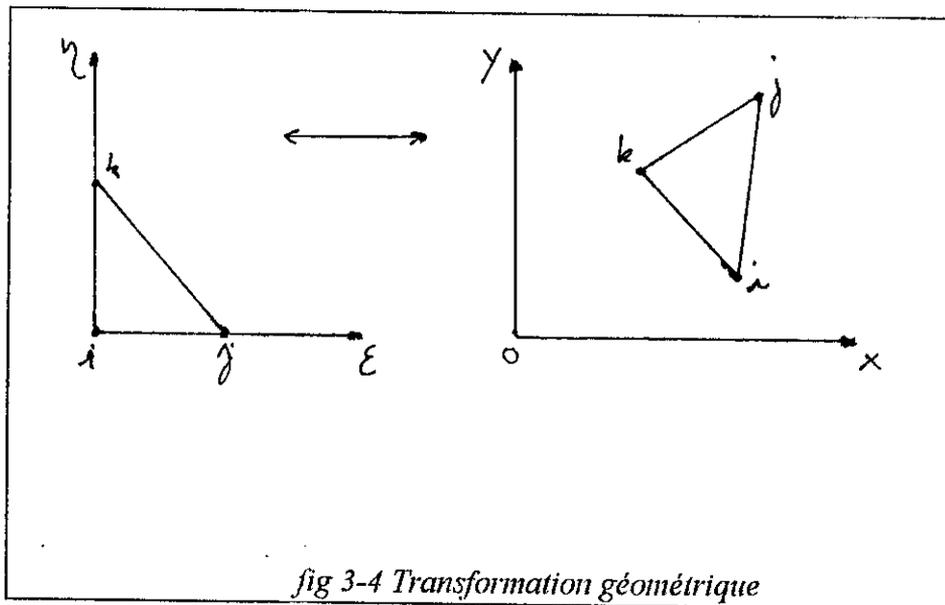
A titre d'exemple, pour un élément triangulaire linéaire dont les coordonnées du noeud  $i$  sont  $(X_i, Y_i)$ , la transformation s'écrira de la façon suivante :

$$X(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)X_i + \bar{N}_2(\xi, \eta)X_j + \bar{N}_3(\xi, \eta)X_k = \langle \bar{N} \rangle \begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \\ X_k \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$Y(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta)Y_i + \bar{N}_2(\xi, \eta)Y_j + \bar{N}_3(\xi, \eta)Y_k = \langle \bar{N} \rangle \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \\ Y_k \end{Bmatrix}$$

A présent, grâce à cette transformation géométrique, l'élément pourra être défini analytiquement de manière plus simple dans l'espace de référence  $(\xi, \eta)$  au lieu de l'être dans l'espace réel  $(X, Y)$ . Il en sera de même pour toutes les variables associées à l'élément (température, déplacement, contrainte, ...).

Par conséquent, nous travaillerons systématiquement dans l'espace de référence et nous utiliserons les fonctions  $U(\xi, \eta)$  à la place des fonctions  $U(X, Y)$ , les relations entre  $X, Y$  et  $\xi, \eta$  étant connues.



### 3.2.3. Approximation sur un élément de référence :

#### A. Expression de la fonction approchée :

Nous choisissons sur le domaine  $V$  un ensemble de  $n$  noeuds d'interpolation de coordonnées  $(X_i, Y_i)$  confondus ou non avec les noeuds géométriques.

Sur chaque élément  $V^e$ , on utilisera une approximation nodale de type suivant :

$$U_{ex} \approx U(x) = \langle N_1(x) \dots N_n(x) \rangle \cdot \{U_n\} = \langle N(x) \rangle \cdot \{U_n\} \quad (3)$$

où  $\{U_n\}^T = \langle U_1 \dots U_n \rangle$

avec  $U_1 \dots U_n$ : valeurs de la fonction aux noeuds d'interpolation, aussi appelées valeurs nodales

$N_i$  sont les fonctions d'interpolation sur l'élément réel.

En remplaçant l'approximation sur l'élément réel par celle sur l'élément de référence, on obtient ceci :

$$U_{\text{ex}} \approx U(\xi) = \langle N_1(\xi) \dots N_n(\xi) \rangle \cdot \{U_n\} = \langle N(\xi) \rangle \cdot \{U_n\} \quad (4)$$

tel que :

$$T : \xi \longrightarrow X(\xi) = [\bar{N}(\xi)] \{X_n\} \quad \text{où}$$

$\langle N(\xi) \rangle$  sont les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence

$\langle \bar{N}(\xi) \rangle$  sont les fonctions de transformation géométrique

Dans l'expression (3), les fonctions  $N(x)$  dépendent des coordonnées des noeuds de l'élément et sont donc différentes pour chaque élément. Par contre, dans l'expressions (4), les fonctions  $N(\xi)$  sont indépendantes de la géométrie de l'élément réel  $V^e$ .

Les mêmes fonctions  $N(\xi)$  peuvent par conséquent, être utilisées pour tous les éléments possédant le même élément de référence .

Le plus souvent, et particulièrement pour les élément complexes, les fonctions  $N(x)$  sont remplacées par les fonctions  $N(\xi)$ , compte tenu de la transformation géométrique liant  $X$  à  $\xi$ , déjà définies.

### B. Propriétés fondamentales de la fonction approchée :

a- Les fonctions approchées  $U(x)$  coïncident avec la fonction exacte  $U_{\text{ex}}(x)$  en tous les noeuds d'interpolation de l'élément.

$$U_{\text{ex}}(X_i) = U(X_i) = U_i = \langle N_1(X) \dots N_n(X) \rangle \{U_n^e\} \quad (5)$$

D'où  $N_j(x_i) = 0$  si  $i \neq j$

$$N_j(x_i) = 1 \quad \text{si } i = j$$

b- Continuité sur l'élément : Si nous désirons obtenir une fonction approchées  $U(x)$  continue sur l'élément ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n$ , nous devons utiliser des fonctions  $N(x)$  continues et dérivables jusqu'à l'ordre  $n$ .

c- Continuité entre les éléments : Pour que la fonction  $U(x)$  et ses dérivées soient continues sur les frontières communes à deux éléments, il faut que  $U(x)$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $n$

dépendent de manière unique des seules variables nodales associées aux noeuds de cette frontière. Ces conditions satisfaites, on dira de l'élément qu'il est conforme.

Les produits  $N_i(\mathbf{x})U_i$  doivent être nuls si  $U_i$  n'est pas une variable nodale associée à un noeuds de cette frontière. Par conséquent  $N_i(\mathbf{x}) = 0$  lorsque  $\mathbf{x}$  est situé sur une frontière et  $u$  n'est pas une variable nodale de cette frontière et il en sera de même pour les éléments de référence.

La condition de continuité sur la frontière pour les dérivées s'écrit de manière similaire :

$$\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left\langle \frac{\partial N_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dots \frac{\partial N_n}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle \{U_n\} \quad \text{où} \quad \frac{\partial N_i}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (6)$$

Lorsque  $\mathbf{x}$  est situé sur la frontière et  $u$  n'est pas une variable nodale de celle-ci.

Pour un élément de référence à plusieurs dimensions, les conditions s'écriront comme suit :

$$\frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (7)$$

d- Fonction d'interpolation polynomiale : Nous pouvons diminuer l'erreur d'approximation en augmentant le nombre d'éléments, ou en diminuant la taille de chacun des éléments. Pour que sur chaque élément l'erreur entre les valeurs approchée et exacte tendent vers 0, il faut que l'expression (6) contienne un terme non-nul .

### C. Construction des fonctions d'interpolation :

Les fonctions de transformation géométrique et les fonctions d'interpolation sur l'élément qui sont identiques lorsqu'il s'agit d'une formulation isoparamétrique, peuvent être construites directement à partir des polynômes qui possèdent les propriétés décrites dans le paragraphe (B).

Cependant, il n'existe pas de techniques manuelles systématiques pour les construire. Seule l'expérience a permis de trouver les fonctions  $N(\xi)$  correspondant à un certain nombre d'éléments classiques.

a- Choix de la base polynomiale :

Exprimons  $U(\xi)$  sur l'élément de référence sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions connues indépendantes  $\langle P_i(\xi) \rangle$  qui sont le plus souvent des monômes. Le choix de ces fonctions est l'une des opérations de base de la MÉF.

$$U(\xi) = \langle P_i(\xi) \rangle \{a_n\} \quad (8)$$

où  $\{a_n\}$  est le vecteur des variables généralisées de l'élément par opposition aux variables nodales.

Les fonctions  $P(\xi)$  constituent la **base polynomiale** de l'approximation.

L'expression (8) définit l'approximation généralisée par opposition à l'approximation nodale .

b- Relation entre variables généralisées et variables nodales

Exprimons qu'en chaque noeud d'interpolation de coordonnées  $\{\xi_i\}$ , la fonction  $U(\xi)$  prend la valeur nodale  $U_i = U_{ex}(\xi_i)$

$$\{U_n\} = \begin{bmatrix} \langle P_1(\xi_1) \dots P_n(\xi_1) \rangle \\ \langle P_1(\xi_i) \dots P_n(\xi_i) \rangle \\ \langle P_1(\xi_n) \dots P_n(\xi_n) \rangle \end{bmatrix} \cdot \{a_n\} \Leftrightarrow \{U_n\} = [P_n] \cdot \{a_n\} \quad (9)$$

soit en inversant la matrice nodale  $[P_n]$  :

$$\{a_n\} = [P_n]^{-1} \{U_n\} \quad (10)$$

c- Expression des fonctions d'interpolation N

En rapportant l'équation (10) dans (8), on obtient :

$$U(\xi) = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \{U_n\}$$

Soit:  $U(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{U_n\}$  d'où

$$\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \quad (11)$$

d-Matrice Jacobienne

L'existence de deux repères, l'un de référence et l'autre réel, nécessite l'introduction d'un opérateur de changement de variable appelé opérateur Jacobien. Celui-ci permet le passage d'une base à une autre.

Soient les deux repères  $(x,y)$  et  $(\xi,\eta)$ , la matrice Jacobienne s'exprimera de la manière suivante:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \rangle \\ \langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \rangle \end{bmatrix} \cdot [\{x_n\}, \{y_n\}] \quad (12)$$

e-Dérivation de la fonction  $U(\xi)$ 

Par dérivation de l'équation (4), nous obtenons:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \rangle \\ \langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \rangle \end{bmatrix} \cdot \{U_n\} \quad (13)$$

f-Intégration sur un élément

Le changement de variable exprimé par la transformation géométrique T permet de passer de l'intégration d'une fonction sur l'élément réel  $V^e$  à une intégration plus simple sur l'élément de référence  $V^r$ .

$$\int_{V^e} N(x) \cdot dx \cdot dy = \int_{V^r} N(\xi) \cdot \det(J) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad \text{où} \quad (14)$$

$\det(J)$  est le déterminant de la matrice Jacobienne.

D. Formulation isoparamétrique :

Dans le cas où les noeuds géométriques sont confondus avec les noeuds d'interpolation, les fonctions de transformation géométriques  $\bar{N}(\xi)$  sont identiques aux fonction d'interpolation  $N(\xi)$  :

$$\bar{N}(\xi) = N(\xi) \quad (15)$$

### 3.2.4. Formulation intégrale :

Un système physique est caractérisé par un ensemble de variables qui peuvent dépendre des coordonnées d'espace (x,y) et du temps (t). Certaines de ces variables  $d$  sont connues a priori : Propriétés physiques, dimensions du système, les sollicitations extérieures et les conditions aux limites, alors que d'autres  $u$ , telles que les déplacements, les vitesses ou encore les températures ne le sont pas.

Le but du problème étant de les déterminer, un modèle mathématique du système permet d'écrire les relations entre  $d$  et  $u$  en utilisant les lois physiques. Ces lois physiques constituent un système d'équations en  $u$  que l'on se propose de résoudre .

Le comportement d'un système physique discret est représenté par des équations algébriques, alors que celui d'un système continu est le plus souvent régi par un système d'équations aux dérivées partielles associé à des conditions aux limites spatiales et temporelles .

Les équations aux dérivées partielles ne peuvent généralement pas être résolues directement. Il est donc nécessaire de les discretiser, c'est à dire de les remplacer par des équations algébriques. La méthode des éléments finis est une méthode parmi d'autres, servant d'outil de discretisation des équations aux dérivées partielles.

#### A. Les différents types de problèmes :

Les problèmes qui concernent les systèmes continus peuvent être classés en trois catégories que nous définirons brièvement par le type d'équations correspondant à chacun d'eux.

a- Problèmes d'équilibre ou de valeurs aux limites : Le comportement d'un système continu est décrit par les équations aux dérivées partielles ayant la forme suivante :

$$\begin{aligned} L(u) + F_V &= 0 \quad \text{sur un domaine } V & (16-1) \\ E(u) &= F_S \quad \text{sur la frontière } S \text{ du domaine } V \text{ où} \end{aligned}$$

L et E : sont des opérateurs différentiels caractérisant le système

$u$  : est la fonction inconnue

$F_V$  et  $F_S$  sont respectivement les sollicitations de volume et de surface

En utilisant la MEF, on peut parvenir à un système d'équations algébriques qui, matriciellement s'écrit :

$$[K]\{u\}=\{F\} \quad \text{où} \quad (16-2)$$

$[K]$  Matrice caractérisant le système

$\{u\}$  Variables inconnues

$\{F\}$  Vecteur de sollicitation

b- Problèmes aux valeurs propres ou valeurs critiques : Ils constituent une extension d'un problème d'équilibre dans lequel nous évaluons les inconnues  $u$  correspondant à des valeurs critiques d'un certain paramètre noté  $\lambda$ , appelé valeur propre.

Les équations correspondantes s'écrivent :  $L_1(u) = \lambda \cdot L_2(u)$  sur le domaine  $V$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont des opérateurs différentiels.

En discretisant le système par la MEF, le système discret s'écrit comme suit :

$$[K]\{u\}=\lambda[M]\{u\} \quad \text{où } [M] \text{ est la matrice masse.} \quad (17)$$

c- Problèmes de propagation ou valeurs initiales : Ils consistent à évaluer  $u(x,t)$  pour dans un système non-stationnaire,  $u(x, t_0)$  étant connue et appelée condition initiale.

Dans le cas d'un système continu, l'équation aux dérivées partielles correspondante est celle-ci:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + Lu + F_V = 0 \quad \text{sur un domaine } V \text{ avec les conditions initiales}$$

connues

$$u(x, t_0) = u_0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0) = \dot{u}_0$$

Après discrétisation du système, celui-ci s'écrira sous la forme suivante :

$$M\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F(t)\} \quad \text{pour } t > t_0 \quad (18)$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$\{U\} = \{U_0\} \quad \text{et} \quad \{\dot{U}\} = \{\dot{U}_0\} \quad \text{à } t = t_0$$

### B. Méthode des résidus pondérés :

Considérons un système physique continu stationnaire, dont le comportement est régi par un système d'équations aux dérivées partielles linéaires ou non-linéaires d'ordre  $m$ .

$$L(u) + F_V = 0 \quad \text{sur le domaine } V$$

Les conditions aux limites s'écrivent  $E(u) = F_S$  sur la frontière  $S$

Nous appellerons résidu la quantité  $R(u)$  définie par  $R(u) = L(u) + F_V$  qui (19)  
s'annule évidemment lorsque  $u$  est solution de l'équation.

La méthode des résidus pondérés consiste à rechercher les fonctions  $u$  qui annulent la forme intégrale  $W(u)$ .

$$W(u) = \int_V \langle \psi \rangle \cdot \{R(u)\} \cdot dv = \int_V \langle \psi \rangle \cdot \{L(u) + F_V\} \cdot dv = 0 \quad (20)$$

Pour un système stationnaire de type Galerkin, la fonction  $W$  s'écrira

$$W = \int \delta u \cdot (L(u) + F_V) \cdot dV = 0 \quad \text{où} \quad (21)$$

$\psi = \delta u$  sont les fonctions de pondération de type Galerkin.

Remplaçons cette intégrale par une somme d'intégrales sur l'élément  $V^e$  :

$$W = \sum_{e=1}^{net} W^e \quad \text{avec} \quad W^e = \int_{V^e} \delta u^e [L(u^e) + F_V] \cdot dv \quad (22)$$

$$\text{or, } u^e = \langle N \rangle \cdot \{u_n\} \quad \text{et} \quad \delta u^e = \langle N \rangle \cdot \{\delta u_n\} \quad (23)$$

$$\text{d'où } W^e = \langle \delta u_n \rangle \cdot \left[ \int_{V^e} \{N\} \cdot L(\langle N \rangle) \cdot dv \cdot \{u_n\} + \int_{V^e} \{N\} \cdot F_V \cdot dv \right] \quad (24)$$

## ***Chapitre 4***

### ***Application de la méthode des éléments finis aux barrage-poids .***

## Application de la MEF aux barrages-poids

### 4.1. Introduction :

Le comportement du système barrage-réservoir tel qu'il a été défini est décrit par un ensemble d'équations aux dérivées partielles, associé à des conditions aux limites. Ce type de problème ne peut généralement pas être résolu directement sous sa forme continue, une discretisation substituera aux équations continues (équations aux dérivées partielles), un ensemble d'équations algébriques plus facilement résolubles. C'est ce que nous nous proposons de faire lors du présent chapitre.

### 4.2. Développement des équations :

Le système couplé barrage-réservoir est composé de deux milieux physiques continus, à savoir un milieu solide représenté par le corps en béton du barrage, ainsi qu'un milieu fluide constitué par le réservoir d'eau.

Les deux milieux obéissent évidemment aux lois fondamentales de la mécanique, notamment les lois de Newton.

#### 4.2.1. Équations gouvernantes du solide :

L'énoncé classique de la loi de Newton se traduit par l'égalité entre les tenseurs de quantité d'accélération et les forces extérieures agissant sur le système donné. Par conséquent, pour un volume infinitésimal  $d\Omega$ , la loi s'écrira de la manière suivante :

$$\int_{V^e} \gamma dm = \int_{V^e} f_V d\Omega + \int_S T(M, \bar{n}) ds \quad \text{où} \quad (1)$$

$f_V$  : Sont les forces de volume

$T$  : Tenseur des forces intérieures

$\gamma$  : Accélération de l'unité de masse  $d\Omega$

L'expression du tenseur des efforts intérieurs  $T$  est la suivante :

$$T(M, \vec{n}) = \sigma_{ij} \cdot n_j \quad \text{où} \quad (2)$$

$\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes et  $n_j$  la normale à la surface considérée.

Développons chaque terme de cette expression (1):

$$\int_{V^e} \gamma dm = \int_{V^e} \gamma \cdot \rho \cdot dv \quad (3-1)$$

$$\int_S T(M, n) ds = \int_S \sigma_{ij} \cdot n_j ds = \int_V \sigma_{ij,j} dv \quad (3-2)$$

Nous obtenons :

$$\int_{V^e} \gamma \cdot \rho \cdot dv = \int_{V^e} f_v dv + \int_{V^e} \sigma_{ij,j} dv \Leftrightarrow \sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i \quad (4)$$

Équation d'équilibre interne d'une structure soumise à des forces extérieures.

#### 4.2.2. Équations gouvernantes du fluide :

Le fluide est considéré comme un milieu continu, à comportement Newtonien. C'est un milieu qui répond donc aux lois de la mécanique des milieux continus et de l'élasticité.

Pour un fluide, le tenseur de contrainte s'écrit de la manière suivante :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \text{où} \quad (5)$$

$P$  est la pression régnante.

$\delta_{ij}$  sont les symboles de Kronecker ( $= 0$  si  $i \neq j$ ,  $= 1$  si  $i = j$ ).

$\tau_{ij}$  contrainte de cisaillement dues à la viscosité du fluide.

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{où} \quad \mu \quad \text{est le coefficient de viscosité dynamique, et}$$

$\varepsilon_{ij}$  la vitesse de déformation

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}) \quad \text{où} \quad V_i \quad \text{vitesse du fluide dans la direction } i$$

Remplaçons ces termes dans l'équation d'équilibre interne :

$$-P_{,i} + \mu(V_{i,jj} + V_{j,ij}) + f_i - \rho\gamma_i = 0 \quad (6-1)$$

Cette expression étendue à toutes les directions, on obtient l'équation de Navier-stokes.

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla P + \mu \Delta^2 V + F \quad (6-2)$$

Dans le cadre de cette étude, les hypothèses que l'on se propose d'émettre sont les suivantes :

- 1- Le fluide est considéré comme étant sans écoulement.
- 2- On considérera qu'il ne subit que de petites déformations.
- 3- IL sera considéré comme non-visqueux.
- 4- Le réservoir est considéré comme semi-fini.
- 5- Le fluide est considéré comme linéairement compressible.

-La deuxième hypothèse transformera l'équation de Navier-stokes en celle-ci :

$$-\nabla P = \rho \dot{V} = \rho \frac{dV}{dt} \quad (7)$$

-L'équation de la conservation de la masse :

$$d\rho + \rho \nabla V = 0 \quad (8)$$

-L'équation de compressibilité :

$$d\rho = \frac{\rho}{k} dP \quad (9)$$

-Les équations (8) et (9) donneront :

$$\frac{\rho}{k} \dot{P} + \rho \nabla V = 0 \quad (10)$$

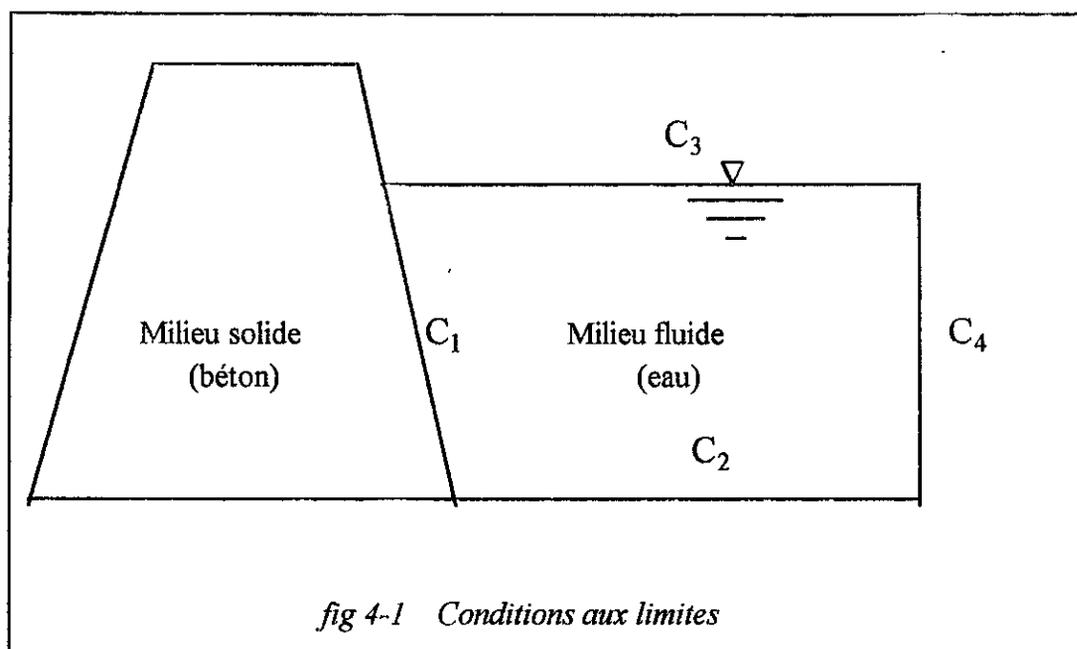
Après certaines transformations effectuée entre (7) et (10), on obtient :

$$\nabla^2 P - \frac{\rho}{k} \dot{P} = 0 \Leftrightarrow \nabla^2 P - \frac{1}{C^2} \dot{P} = 0 \quad (11)$$

$$\text{avec } C = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \quad (12)$$

L'équation ainsi obtenue, régit la propagation d'ondes de pression dans un milieu ayant une célérité C. Dans notre cas les ondes de pression se propagent dans l'eau du réservoir.

Cette équation de propagation est évidemment associée à un certain nombre de conditions aux limites imposées par le problème.



Les conditions aux limites :

- Sur la limite  $C_1$  les pressions des points fluides aux abords du parement amont et les déplacements de celui-ci, sont liés. Les équations de la mécanique des fluides donnent la relation suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \dot{V}_n \bar{n} = -\rho \ddot{U} \bar{n} \quad (13)$$

- Sur la limite  $C_2$  qui est décrite par le fond du réservoir, lorsque un séisme agit, l'équation de Navier-stokes donne ceci :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \ddot{x} \cdot \bar{n} \quad \text{où } \ddot{x} \text{ est l'accélération du séisme.} \quad (14)$$

- Sur la surface libre  $C_3$  règne la pression atmosphérique  $P = 0$ . (15)

- Sur la limite de troncature  $C_4$  : A priori, la discretisation du domaine fluide pose un problème pratique car en réalité, le réservoir est géométriquement indéfini.

Par conséquent afin de pallier à ce problème, une approximation s'impose en posant une limite fictive à l'amont du réservoir que l'on appellera limite de troncature. Cette limite doit être suffisamment éloignée du corps du barrage pour qu'au delà, on puisse considérer que les effets sont nuls ou quasiment nuls.

Au niveau de cette surface, on considérera que les ondes ne subissent pas de réflexion et que la solution de l'équation de propagation d'ondes n'est composée que de la partie incidente.

Sur cette limite, la condition s'écrira de la manière suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{1}{C} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \quad (16)$$

#### 4.2.3. Formulation variationnelle des équations du solide :

L'équation gouvernant l'équilibre du solide est celle de l'élasticité, développée lors du chapitre(2). Le matériau solide considéré comme Hookéen (élastique linéaire), la relation entre les contraintes et les déformation s'écriront :

$$[\sigma_{ij}] = [D] \cdot [\epsilon_{ij}] \quad \text{où} \quad (17)$$

$[\sigma_{ij}]$  Est le tenseur des contraintes

$[\epsilon_{ij}]$  Est le tenseur des déformations

$[D]$  Est la matrice élasticité

Lorsque l'on a affaire à une approche déplacement où l'on suppose un champs de déplacement, la relation entre les déformations et les déplacements s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{ii} \\ \epsilon_{jj} \\ 2 \cdot \epsilon_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [S] \cdot [U] \quad (18)$$

S étant un opérateur de dérivation, la relation contraintes-déplacements devient :

$$[\sigma] = [D][S][U] \tag{19}$$

En appliquant le principe des travaux virtuels à ce système, on obtient :

$$W = \int_{V^e} \delta u_i (\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \gamma_i) dv = 0 \tag{20}$$

et, après développement :

$$W = \int_V \delta \epsilon^T \sigma \cdot dv + \int_V \delta u \cdot f dv - \int_V \delta u \rho \ddot{u} \cdot dv + \int_S \delta u \sigma \cdot \bar{n} ds \quad (*) \tag{21}$$

$$W = W_c + W_v + W_i + W_s$$

Avec :

$$W_c = \int_V \delta \epsilon^t \sigma \cdot dv \quad \text{expression de l'énergie de déformation ou réaction du milieu .}$$

$$W_v = \int_V \delta u \cdot f dv \quad \text{expression du travail des forces de volume}$$

$$W_i = - \int_V \delta u \cdot \rho \ddot{u} dv \quad \text{expression du travail des forces d'inertie}$$

$$W_s = \int_S \delta u \cdot \sigma \cdot \bar{n} ds \quad \text{expression du travail des forces de surface}$$

### A. Matrice rigidité :

-L'énergie de déformation ou de du milieu est exprimée par le terme :

$$W_c = \int_V \delta \epsilon \sigma \cdot dv = \int_V \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dv \tag{22}$$

-Les relations contraintes-déformations(17) et deformation-deplacement (18):

$$[\sigma] = [D][\epsilon]$$

$$[\epsilon] = [S][U]$$

d'où la relation :  $[\sigma] = [D][S][U]$  et en notant U en fonctions des variables nodales

$$U = [N]\{U_n\}, \text{ on obtient ceci :} \tag{23}$$

$$[\sigma] = [D][B]\{U_n\} \tag{24}$$

avec  $[B] = [S][N] \tag{25}$

Exprimons à présent la déformation en tenant compte des fonctions d'interpolation :

$$\delta u_{i,j} = [B] \{\delta u_n\} = \{\delta u_n\}^T \cdot [B]^T \quad (26)$$

$$W_c = \int_V \{\delta u_n\}^T [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \{\delta u_n\} \cdot dv = \{\delta u_n\}^T [K] \{\delta u_n\} \quad (27)$$

$$[K] = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dv \quad \text{est l'expression de la matrice rigidité de la structure} \quad (28)$$

Lorsque le travail se fait dans un élément de référence l'expression de K s'écrit :

$$[K] = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad \text{par une unité de longueur.} \quad (29)$$

### **B. Matrice de masse :**

Le travail des forces d'inertie est exprimé par :

$$W_i = \int_V \delta u \cdot \rho \ddot{U} dv \quad (30)$$

$$\text{Le déplacement élémentaire : } \delta u = \{\delta u_n\}^T [N]^T \quad (31)$$

$$\text{La dérivée seconde de } U : \ddot{U} = [N] \{\ddot{U}_n\} \quad (32)$$

$$\text{d'où } W_i = \int_V \{\delta u_n\}^T [N]^T \rho [N] \{\ddot{U}_n\} dv \quad (33)$$

Pour un élément de référence, l'intégrale se calculera comme suit :

$$W_i = \int_V \{\delta u_n\}^T [N]^T \rho [N] \{\ddot{U}_n\} \cdot \det(J) d\xi d\eta \quad (34)$$

$$W_i = \{\delta u_n\}^T \cdot [M] \cdot \{\ddot{U}_n\} \quad \text{où } [M] = \int_V [N]^T \rho [N] \cdot \det(J) \cdot d\xi d\eta \quad (35)$$

[M] est la matrice caractérisant l'inertie de la structure.

La forme explicite :

-Si on opte pour le principe de la masse répartie

$$M_{ij} = \int_V N_i \rho N_j \cdot \det(J) d\xi d\eta \quad (35-1)$$

-Si on opte pour le principe de la masse concentrée aux noeuds

$$M_{ii} = \int_V N_i \rho N_i \cdot \det(J) d\xi d\eta \quad \text{et} \quad M_{ij} = 0 \quad (35-2)$$

### C. Matrice amortissement :

Le travail des forces de viscosité s'exprime comme suit :

$$W_a = \int_V \delta u \cdot \mu \cdot \dot{U} dv \quad \mu \text{ étant la viscosité du matériau (béton)} \quad (36)$$

Pour un élément de référence l'expression s'écrira de la façon suivante :

$$W_a = \int_{V^r} \{\delta u_n\} \cdot [N]^T \mu [N] \cdot \{\dot{U}_n\} \cdot \det(J) d\xi d\eta = \{\delta u_n\}^T \cdot C \cdot \{\dot{U}_n\} \quad (37)$$

où

$$[C] = \int_{V^r} [N]^T \mu [N] \cdot \det(J) d\xi d\eta \quad (38)$$

[C] est l'expression de l'amortissement dans l'élément de référence.

Les valeurs d'amortissement à introduire sont depuis longtemps un sujet d'étude. De nombreux documents, de conférences, ont traité ce problème.

Les phénomènes physiques intervenant dans la dissipation d'énergie sont nombreux : frottements, chocs, viscosité.... Leurs lois sont souvent mal connues, il n'est donc pas possible d'introduire l'amortissement dans les calculs sous une forme mathématique strictement représentative de la physique du phénomène. C'est pourquoi, les modèles utilisés sont simples, permettant de reproduire à l'échelle macroscopique les principaux effets sur le comportement des structures, et dont les paramètres sont déduits de résultats expérimentaux.

L'expérience a montré que l'amortissement pouvait être approché par une combinaison linéaire des matrices rigidité et de masse.

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad \text{où} \quad (39)$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients déterminés par l'expérience.

D. Matrice interaction :

L'échange d'énergie entre les deux milieux physiques en contact au niveau de l'interface (parement amont), est caractérisé par une matrice d'interaction dont la forme est déterminée à partir de l'expression du travail des forces de pression agissant sur le parement.

$$W = \int_S \delta u \cdot \sigma \cdot \bar{n} ds \quad (40)$$

Sur le parement amont du barrage en contact avec le réservoir, la contrainte  $\sigma = -P$ , où  $P$  est la pression de l'eau au point considéré du parement.

Or, dans le cas dynamique, cas où l'on peut parler d'interaction entre les deux milieux, la pression dans le fluide est une inconnue, on devra donc, comme pour les déplacement de la structure, choisir une fonction d'approximation pour les pressions dans le réservoir. Cette fonction, liera les valeurs des pressions en un point d'un domaine aux valeurs nodales qui seront, dans le cas du fluide, des pressions.

On écrira:  $\{P\} = \langle N_p \rangle \{P_n\}$  où (41)

$P$  Est la pression au point considéré.

$N_p$  Sont les fonctions d'interpolation (fonctions de forme) choisies pour le fluide. Dans notre étude, ces fonctions seront les mêmes que celles utilisées pour le solide

$P_n$  Sont les pressions aux noeuds d'interpolation.

$$W = - \int_{\Gamma} \{\delta u_n\}^T [N_u]^T \cdot \bar{n} \cdot [N_p] \{P_n\} d\Gamma = \{\delta u_n\}^T \cdot Q \cdot \{P_n\} \quad (42)$$

Avec  $Q = - \int_{\Gamma} [N_u]^T \cdot \bar{n} \cdot [N_p] d\Gamma$  (43)

$[Q]$  est la matrice caractérisant l'interaction entre les deux milieux.

L'équation (20) se transformera en un système d'équations différentielles que voici :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} - [Q]\{P\} = \{F\} \quad (1)$$

#### 4.2.4. Formulation variationnelle des équations du fluide :

Comme déterminé, le problème dans le fluide est celui de propagation d'ondes de pression régi par l'ensemble d'équations suivantes :

$$\nabla^2 P - \frac{1}{C^2} \ddot{P} = 0 \quad \text{sur le domaine } V \quad (44)$$

Les conditions aux limites :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \ddot{U} \bar{n} \end{array} \right\} \text{ sur le contour } C_1 \quad (45)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \ddot{x} \cdot \bar{n} \end{array} \right\} \text{ sur le contour } C_2 \quad (46)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \end{array} \right\} \text{ sur le contour } C_3 \quad (47)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{1}{C} \frac{\partial P}{\partial t} \end{array} \right\} \text{ sur le contour } C_4 \quad (48)$$

La formulation variationnelle de l'équation de propagation d'ondes s'écrit, en utilisant la fonctions de pondération de Galerkin, de la façon suivante :

$$W = \int_V \delta P \left[ \nabla^2 P - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right] dv + \int_{\Gamma} \delta P \frac{\partial P}{\partial n} d\Gamma \quad (49)$$

En développant les intégrales, on obtient :

$$\begin{aligned} W = & \int_V \delta P \cdot \nabla^2 P dv - \int_V \delta P \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} dv + \int_{C_1} \delta P (-\rho \ddot{U} \bar{n}) d\Gamma + \int_{C_3} \delta P \frac{1}{g} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} d\Gamma \\ & + \int_{C_4} \delta P \left(-\frac{1}{C} \frac{\partial P}{\partial t}\right) d\Gamma + \int_{C_2} \delta P (-\rho \ddot{x} \bar{n}) d\Gamma \end{aligned} \quad (50)$$

A présent si on discretise ces équations en utilisant les fonctions d'interpolation, choisie pour la pression dans le fluide, on obtiendra ce qui suit :

$$\begin{aligned}
 W = & \int_V \{\delta P_n\}^T \cdot [\nabla N_p]^T [\nabla N_p] \{P_n\} dv - \int_V \{\delta P_n\}^T [N_p]^T \frac{1}{C^2} [N_p] \{\ddot{P}_n\} dv \\
 & + \int_{C_1} \{\delta P_n\}^T [N_p]^T \rho [N_u] \cdot \tilde{n} \{U_n\} d\Gamma + \int_{C_3} \{\delta P_n\}^T [N_p]^T \frac{1}{g} [N_p] \{\ddot{P}_n\} d\Gamma \\
 & + \int_{C_4} \{\delta P_n\}^T [N_p]^T \frac{1}{C} [N_p] \{\dot{P}\} d\Gamma - \int_{C_2} \{\delta P_n\}^T [N_p]^T \rho \ddot{x} \cdot \tilde{n} d\Gamma = 0 \quad (51)
 \end{aligned}$$

En simplifiant par  $\{\delta P_n\}$  et en regroupant les termes de même nature, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \int_V [N_p]^T \frac{1}{C^2} [N_p] dv + \int_{C_3} [N_p]^T \frac{1}{g} [N_p] d\Gamma \right] \{\ddot{P}_n\} + \left[ \int_{C_4} [N_p]^T \frac{1}{C} [N_p] d\Gamma \right] \{\dot{P}_n\} \\
 & + \left[ \int_V [\nabla N_p]^T [\nabla N_p] dv \right] \{P_n\} + \left[ \int_{C_1} [N_p]^T \rho [N_u] \cdot \tilde{n} d\Gamma \right] \{\ddot{U}_n\} = \int_{C_2} [N_p]^T \rho \ddot{x} \cdot \tilde{n} d\Gamma \quad (52)
 \end{aligned}$$

Ce même système peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[S]\{\ddot{P}\} + [D]\{\dot{P}\} + [H]\{P\} + [Q_p]\{\ddot{U}\} = \{q\} \quad \text{où} \quad (\text{II})$$

- Matrice [S]: C'est la matrice représentant l'énergie cinétique du fluide, elle caractérise ses forces d'inertie.

$$[S] = \int_V [N_p]^T \frac{1}{C^2} [N_p] dv + \int_{C_3} [N_p]^T \frac{1}{g} [N_p] d\Gamma \quad (54)$$

Forme explicite : 
$$S_{ij} = \int_V N_i \frac{1}{C^2} N_j dv + \int_{\Gamma_3} N_i \frac{1}{g} N_j d\Gamma \quad (55)$$

- Matrice [D] : C'est la matrice de dissipation d'énergie.

$$[D] = \int_{C_4} [N_p]^T \frac{1}{C} [N_p] d\Gamma \quad (56)$$

Forme explicite : 
$$D_{ij} = \int_{C_4} N_i \frac{1}{C} N_j d\Gamma \quad (57)$$

- Matrice [H] : C'est la matrice de l'énergie potentielle du fluide.

$$[H] = \int_V [\nabla N_p]^T [\nabla N_p] dv \quad (58)$$

Forme explicite : 
$$H_{ij} = \int_V \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial \xi^2} & \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} & \frac{\partial^2 N_j}{\partial \eta^2} \end{bmatrix} \det(J) d\xi d\eta \quad (59)$$

- Matrice [Q<sub>p</sub>] : C'est la matrice qui exprime l'échange d'énergie entre les deux milieux au niveau de la surface de contact, matérialisée par le parement amont.

$$Q_p = \int_{C_1} [N_p]^T \rho [N_u] \cdot \bar{n} d\Gamma \quad (60)$$

Forme explicite : 
$$Q_{p_{ij}} = \int_{C_1} N_i \rho N_j \cdot \bar{n} d\Gamma \quad (61)$$

#### 4.2.5. Couplage des systèmes différentiels :

L'étude du comportement des deux milieux, revient à résoudre le système d'équation couplé, déterminé à l'issue de la formulation variationnelle des équations du solide ainsi que celles du fluide.

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} - [Q]\{P\} = \{F\} \\ [S]\{\ddot{P}\} + [D]\{\dot{P}\} + [H]\{P\} + \rho[Q]^T\{\ddot{U}\} = \{q\} \end{cases} \quad (62)$$

En groupant les deux systèmes, l'écriture matricielle sera la suivante :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho Q^T & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -Q \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ q \end{Bmatrix} \quad (63)$$

Selon l'hypothèse émise, le fluide peut être considéré comme compressible ou non, cependant, l'expérience a montré que lorsqu'il est pas tenu compte de la compressibilité lors de la modélisation du système barrage-réservoir, l'erreur engendrée pourrait être significative. Ceci dit, lorsque la compressibilité du fluide est négligée, le système aura la forme qui suit :

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} - [Q]\{P\} = \{F\} \\ [H]\{P\} = -\rho[Q]^T\{\ddot{U}\} \Rightarrow \{P\} = -\rho[Q]^T[H]^{-1}\{\ddot{U}\} \end{cases} \quad (64)$$

Le système sera équivalent à celui-ci :

$$\begin{cases} [M + M_a]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \\ [M_a] = \rho[Q][H]^{-1}[Q]^T \end{cases} \quad \text{où} \quad (65)$$

$[M_a]$  est équivalente à une masse ajoutée à celle de la structure concentrée aux noeuds du parement amont.

#### 4.2.6. Symétrisation du système :

La résolution du système différentiel (63) ne peut se faire par l'analyse modale, le système n'étant pas symétrique après couplage. Sachant que chaque système physique possède ses modes propres de vibration, on peut appliquer cette méthode en prenant le soin de faire de sorte que le système différentiel obtenu soit symétrique. Pour cela, on doit suivre les étapes suivantes :

Considérons tout d'abord le cas de vibration libre où l'amortissement et la dissipation sont négligeables. Le système à résoudre s'écrira alors :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} - [Q]\{P\} = 0 \quad (64-1)$$

$$[S]\{\ddot{P}\} + [H]\{P\} + \rho[Q]^t\{\ddot{U}\} = 0 \quad (64-2)$$

Après transformation, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \rho[M] + [Q][H]^{-1}[Q]^t & \rho[Q][H]^{-1}[S] \\ \rho[S][H]^{-1}[Q]^t & [S][H]^{-1}[S] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho[K] & 0 \\ 0 & [S] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (65)$$

Les matrices  $[M], [K], [S], [H]$  sont symétriques, les combinaisons obtenues le seront également.

## *Chapitre 5*

# *Méthodes de résolution des systèmes différentiels .*

## Méthodes de résolution des systèmes différentiels

### 5.1. Résolution des systèmes linéaires :

L'étude statique du système barrage-réservoir revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$[K]\{U\}=\{F\} \text{ où}$$

$[K]$  est la matrice rigidité.

$\{U\}$  Le vecteur des déplacements nodaux dans le corps du barrage

$\{F\}$  Les forces extérieures résultant de la poussée hydrostatique sur le parement en contact avec l'eau.

La pression en chaque noeud fluide est facilement déterminée, la répartition étant hydrostatique.

Deux types de méthodes sont utilisées pour résoudre ce système d'équations. On citera :

#### Les méthodes directes :

- La méthode de factorisation de Croût.
- La méthode d'élimination de Gauss.

#### Les méthodes indirectes : (itératives)

- La méthode de Jacobi.
- La méthode de Gauss-Seidel.

En ce qui nous concerne, nous avons opté pour la méthode de décomposition en produit LU qui est une méthode directe. Elle consiste à décomposer la matrice du système en un produit de deux matrices triangulaires, l'une triangulaire supérieure et l'autre triangulaire inférieure.

**5.1.1. Résolution du système linéaire :**

Le système à résoudre est linéaire et s'écrit comme suit :

$$[K]\{X\}=\{F\}$$

La décomposition LU nous amène à réécrire le système sous la nouvelle forme que voici :

$$[K]\{X\} = \{F\} \Leftrightarrow ([L][U])\{X\} = \{F\} \quad \text{où}$$

[L] est une matrice triangulaire inférieure.

[U] est une matrice triangulaire supérieure.

$$[K] = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & L_{ii} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdot & \cdot & L_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdot & \cdot & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \cdot & \cdot & U_{2n} \\ 0 & 0 & U_{ii} & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[K] = [L] \otimes [U]$$

En posant  $Y=[U]\{X\}$ , le système précédant s'écrira :

$$[L]\{Y\}=\{F\} \text{ dont la résolution est celle d'un système triangulaire inférieur simple.}$$

et

$$[U]\{X\}=\{Y\} \text{ dont la résolution est celle d'un système triangulaire supérieur simple.}$$

Les résultats obtenus constitueront les conditions initiales pour le système dynamique.

**A. Algorithme de décomposition :**

Comme cité précédemment, la décomposition LU consiste à transformer la matrice K du système en un produit de deux matrices triangulaires.

Soit à décomposer une matrice K en deux matrices L et U tel que  $K=LU$ .

L : Matrice triangulaire inférieure.

U : Matrice triangulaire supérieure.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n L_{ik} \cdot U_{kj}$$

La partie triangulaire supérieure de A s'écrit comme suit :

$$A_{rj} = \sum_{k=1}^r L_{rk} U_{kj} \quad j = \overline{r, n}$$

La partie triangulaire inférieure de A s'écrit comme suit :

$$A_{ir} = \sum_{k=1}^r L_{ik} U_{kr} \quad i = \overline{r, n}$$

D'où

$$L_{rj} = \left( A_{rj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{rk} U_{kj} \right) / U_{jj} \quad j = \overline{1, r-1}$$

$$U_{rj} = A_{rj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{rk} U_{kj} \quad j = \overline{r+1, n}$$

Avec

$$L_{ii} = 1 \quad L_{i1} = \frac{A_{i1}}{A_{11}} \quad i = \overline{1, n}$$

$$U_{1i} = A_{1i}$$

Cet algorithme a été utilisé à maintes reprises tout au long de notre travail et a permis de résoudre bon nombre de problèmes de taille relativement importante dans un temps assez court.

### 5.2. Résolution des systèmes différentiels :

La formulation matricielle obtenue à issue de la discretisation des équations aux dérivées partielles décrivant le comportement dynamique du système couplé barrage-réservoir, est ainsi exprimée :

$$[M]\{\ddot{U}_t\} + [C]\{\dot{U}_t\} + [K]\{U_t\} = \{F_t\} \text{ où } \{U\} \text{ et } \{\dot{U}\} \text{ sont connus à } t = t_0.$$

Les accélérations du système à l'instant initial sont obtenues à partir de l'équation du mouvement.

$$\{\ddot{U}_0\} = [M]^{-1} (F_0 - [C]\{\dot{U}_0\} - [K]\{U_0\})$$

Là aussi, plusieurs méthodes sont proposées, distinguées en deux grandes catégories :

- La méthode d'analyse modale ou méthode de superposition modale.
- Les méthodes directes d'intégration.

### **5.2.1. Méthode de superposition modale :**

La méthode d'analyse modale consiste à trouver les modes propres de vibration du système en supposant une solution harmonique. Cependant, cette méthode n'est applicable qu'aux systèmes symétriques, dans le cas contraire, une opération de symétrisation doit être préalablement exécutée.

La méthode est en fait un processus de découplage des équations différentielles et ce, en les réécrivant dans une base principale par un changement de variable. Ce dernier s'opère au moyen d'une matrice de passage composée des vecteurs propres du système que l'on obtient après calcul des valeurs propres.

- Les valeurs propres sont les solutions du système suivant :

$$\det[K - \omega^2 M] = 0$$

La solution sera le vecteur des valeurs propres du système, classées dans un ordre croissant.

- Les vecteurs propres correspondants sont obtenus en remplaçant les valeurs propres dans le système et en le résolvant. Ce dernier étant singulier, on remplacera la première équation par l'équation de normalisation.

Soit  $P$  la matrice de passage. Le système s'écrira dans la nouvelle base :

$$[P]^t [M] [P] \{\ddot{U}\} + [P]^t [C] [P] \{\dot{U}\} + [P]^t [K] [P] \{U\} = [P]^t \{F\} \quad \text{où}$$

$[P]^t [M] [P]$  et  $[P]^t [K] [P]$  sont des matrices diagonales .

Quant à l'amortissement, il est généralement estimé à partir de ces deux dernières matrices diagonales.

Le système est maintenant découplé, sa résolution consistera à résoudre les équations découplées une par une. La solution entière du système est obtenue en superposant tous les modes.

### 5.2.2. Méthode d'intégration directe :

Leur principe de base est de résoudre l'équation d'équilibre en série de temps, en supposant une variation des accélérations ou des vitesses sur l'intervalle considéré. Ces méthodes transforment le système (1) en un système ayant la forme (2) :

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{F\} \quad (1)$$

$$[\bar{K}]\{U\} = \{\bar{R}(t)\} \quad \text{tel que} \quad (2)$$

$$[\bar{K}] = f(K, M, C) \quad \text{et} \quad \{\bar{R}(t)\} = g(K, M, C)$$

Le système (2) est linéaire et est facilement résoluble par les méthodes classiques.

La manière d'exprimer les matrices  $[\bar{K}]$  et  $\{\bar{R}\}$ , distingue les méthodes entre-elles. Lors de notre étude, la méthode de Newmark sera celle utilisée. C'est donc elle que l'on décrira.

#### A. La méthode de Newmark :

Cette méthode relie les variables (déplacement, pression...), leurs dérivées premières (vitesse...) et leurs dérivées secondes (accélération...) à l'instant  $(t+\Delta t)$ , à leurs valeurs à l'instant précédent  $(t)$ . C'est un processus d'incrémentatation dans lequel le pas de temps est choisi.

Les différentes relations entre ces variables sont paramétrées par deux constantes dont la convergence du système dépendra. Elle s'expriment comme suit :

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \Delta t[(1-a)\ddot{U}_t + a\ddot{U}_{t+\Delta t}]$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t\dot{U}_t + \frac{\Delta t^2}{2}[(1-b)\ddot{U}_t + b\ddot{U}_{t+\Delta t}]$$

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \frac{2}{b}\Delta t^2(U_{t+\Delta t} - U_t) - \frac{2}{b}\Delta t\dot{U}_t - \left(\frac{1}{b} - 1\right)\ddot{U}_t$$

Les expressions des matrices sont les suivantes :

$$[\bar{K}] = [M] + a\Delta t[C] + b\frac{\Delta t^2}{2}[K]$$

$$\{\bar{R}_{t+\Delta t}\} = b\frac{\Delta t^2}{2}\{F_{t+\Delta t}\} + [M][U_t + \Delta t\dot{U}_t + (1-b)\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{U}_t] + \\ [C][a\Delta t U_t + (2a-b)\frac{\Delta t^2}{2}\dot{U}_t + (a-b)\frac{\Delta t^3}{2}\ddot{U}_t]$$

On aura à résoudre le système linéaire suivant :

$$[\bar{K}]\{U_{t+\Delta t}\} = \{\bar{R}_{t+\Delta t}\}$$

Les conditions initiales :  $\{U_0\}$  et  $\{\dot{U}_0\}$  sont connues et on déterminera  $\{\ddot{U}_0\}$  comme suit :

$$\{\ddot{U}_0\} = [M]^{-1}(F_0 - [C]\{\dot{U}_0\} - [K]\{U_0\}) \quad \text{où}$$

$F_0$  est la force d'excitation à l'instant initial.

• Lorsque  $a \geq \frac{1}{2}$  et  $b \geq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$ , le schéma proposé par Newmark est inconditionnellement stable .

• Pour  $a = b = 0.5$ , le schéma suppose une accélération d'excitation moyenne sur l'intervalle du pas de temps  $\Delta t$ .

• Pour  $a = 0.5$  et  $b = \frac{1}{3}$ , la variation de l'accélération est linéaire sur l'intervalle de pas de temps  $\Delta t$ .

## *Chapitre 6*

### *Déscription du programme .*

## Description du programme

### 6.1. Introduction :

La programmation de la méthode s'est faite sur micro-ordinateur, avec le FORTRAN IV comme langage de programmation. Il se compose de quatre unités principales :

- Unité de maillage.
- Unité de calcul matriciel.
- Unité de mise en forme des systèmes.
- Unité de résolution des systèmes.

La description de toutes ces méthodes sera faite tout au long de ce chapitre.

### 6.2. Description du programme :

#### 6.2.1. Unité de maillage :

Le maillage des deux systèmes, structure et réservoir, s'est fait automatiquement au moyen de deux programmes FORTRAN, l'un procédant au maillage du fluide et l'autre à celui de la structure.

• Les entrées du programme sont :

- les coordonnées géométriques des sommets de l'espace à discretiser.
- Les pas de discretisation, horizontal et vertical.

• Les sorties : En sortie, le programme donne les résultats suivants pour chaque élément :

- Les coordonnées de chaque noeud .
- Leurs connectivités.

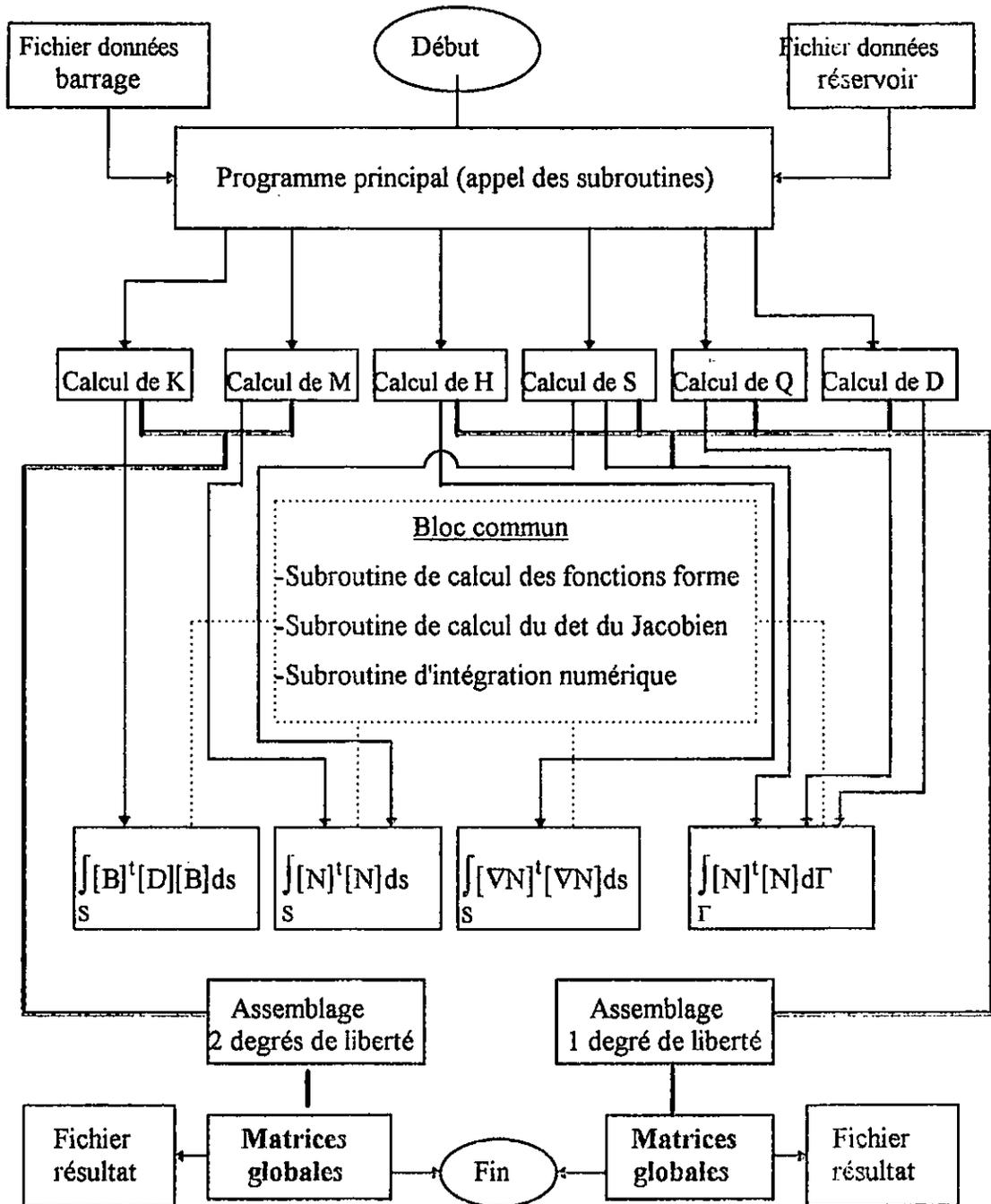
La lecture des données du maillage se fait à partir d'un fichier données. Les résultats sont également disposés dans un fichier.

Certains calculs liés au maillage du réservoir ont été effectués dans ce programme, notamment les forces hydrostatiques aux noeuds du parement ainsi que les pressions hydrostatiques en chaque noeud du domaine.

Le programme comporte une option pour un maillage basé sur l'élément quadrilatéral, et une autre pour un élément triangulaire, tous deux étant linéaires.

6.2.2. Unité de calcul matriciel :

Le rôle de ce programme est de former les matrices élémentaires et globales du système [K],[M],[C],[S],[H],[D],[Q]. Le déroulement s'effectue selon l'organigramme suivant :



A. Formulation des variables du programme :

Dans le programme, la formulation des différentes variables du problème s'est faite de la manière suivante :

- Les résultats du maillage :

NNE : Nombre de noeuds par élément.

Coor (4,2) : Tableau contenant les coordonnées des noeuds de chaque élément.

Kon (4) : Tableau des connectivités pour chaque élément.

LOC(8) : Table de localisation des degrés de liberté de la matrice globale.

- Constantes communes à tous les calculs élémentaires :

NPG : Nombre de points de Gauss.

NPG = 2 pour les intégrations sur les contours.

NPG = 4 pour les intégrations sur les surfaces.

PG(4,3) : Tableau contenant les coordonnées des points de Gauss et leurs poids respectifs.

$$\xi = PG(1,i), \eta = PG(2,i), W = PG(3,i) \quad i = 1, NPG$$

D(3,3) : Tableau contenant les éléments de la matrice élasticité, en contraintes ou déformations planes.

FF(4,3) : Tableau contenant les fonctions de formes ainsi que leurs dérivées premières.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = FF(1,i), \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = FF(2,i), N_i = FF(3,i) \quad i = 1, NNE.$$

XJ(2,2) : Tableau contenant les éléments de la matrice Jacobienne.

- Différentes matrices calculées :

SE(4,4) : Matrice élémentaire des éléments fluides.

QE(8,8) : Matrice élémentaire des éléments solides.

GG(m,m) : Matrice globale. m : Degré de liberté du système.

### B. Les sous-routines communes :

Au niveau élémentaire, toutes les sous-routines font appel à un bloc commun composé des procédures suivantes :

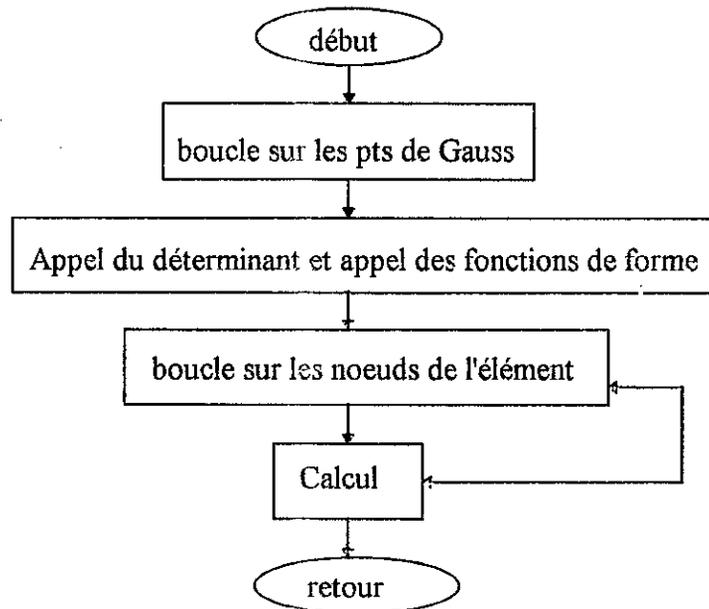
- Sous-routine de calcul des fonctions de forme : Cette procédure effectue le calcul des fonctions de forme  $N$  et leurs dérivées. Le calcul est possible pour les deux types d'éléments linéaires, triangulaire à 3 noeuds et rectangulaire à 4 noeuds.

- Sous-routine de calcul du déterminant Jacobien : Cette procédure effectue le calcul des éléments de la matrice Jacobienne qui est fonction des coordonnées des noeuds. Elle calcule son déterminant ensuite.

- Sous-routine d'intégration numérique de Gauss : Cette procédure déroule l'algorithme d'intégration de Gauss, à 2 points pour les intégration sur les contours et à 4 points pour celles sur les surfaces.

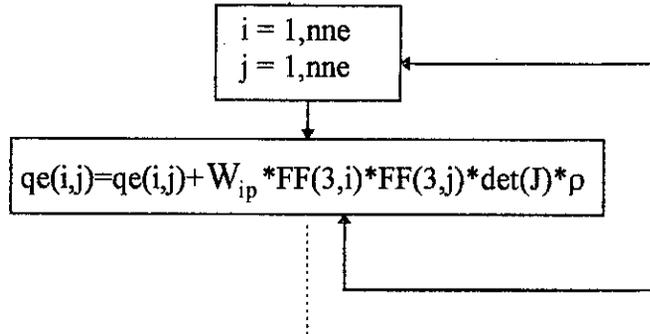
### C. Algorithme type de calcul élémentaire :

Toutes les matrices élémentaires sont calculées selon l'organigramme type suivant :

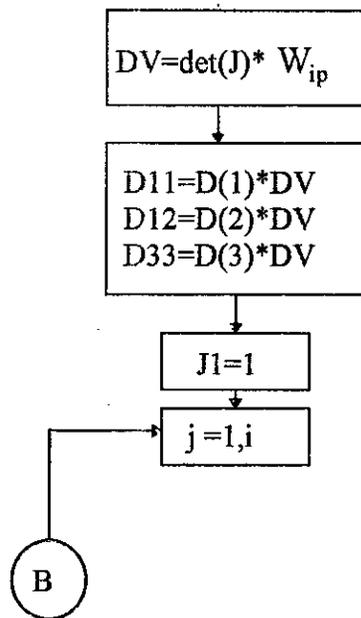


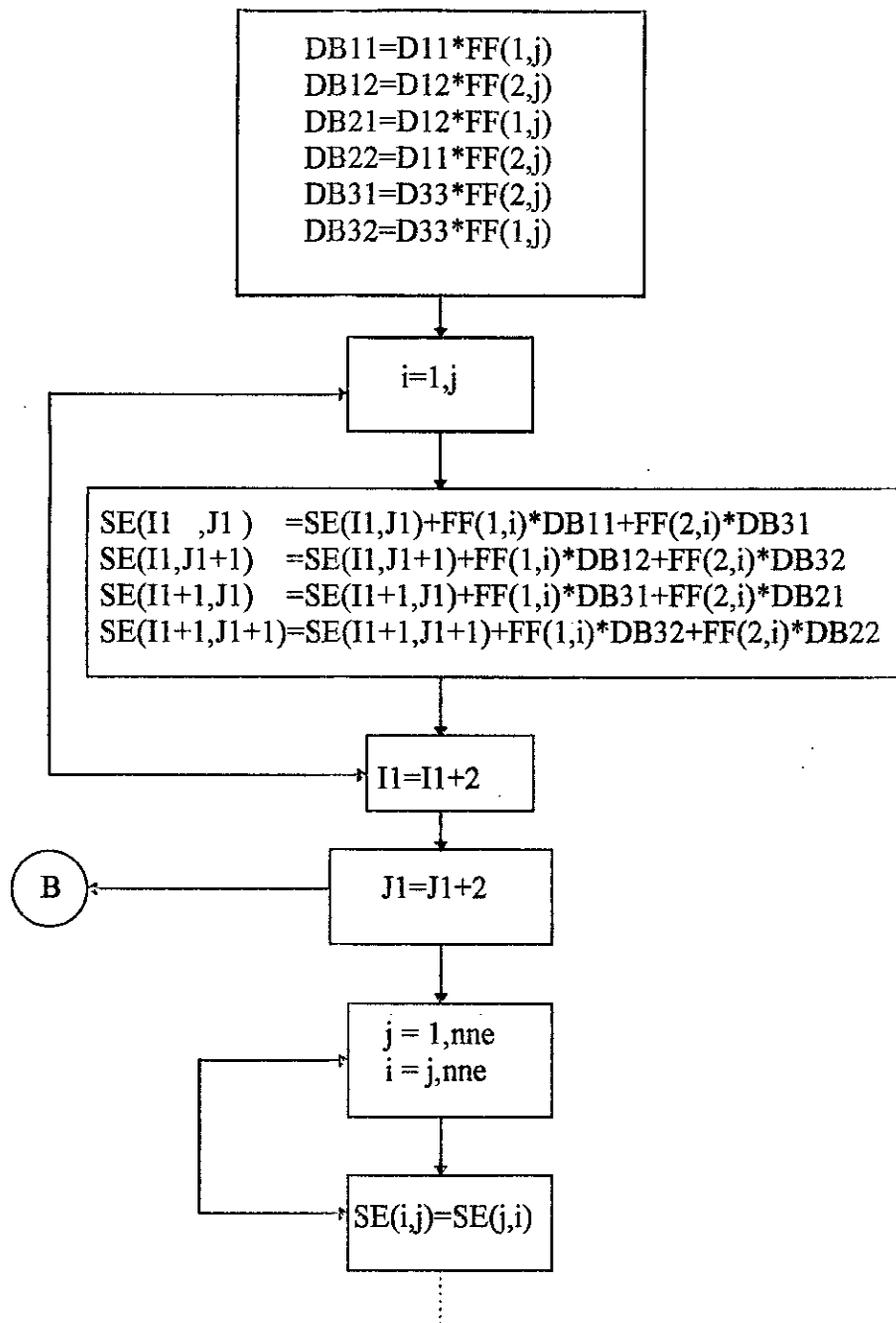
D. Calcul des matrices élémentaires :

Matrice M :  $M_{ij} = \int_S \rho N_i N_j \det(J) ds$



Matrice K :  $K_{ij} = \int_S \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 & N_{i,\eta} \\ 0 & N_{i,\eta} & N_{i,\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 \\ 0 & N_{i,\eta} \\ N_{i,\eta} & N_{i,\xi} \end{bmatrix} \det(J) ds$

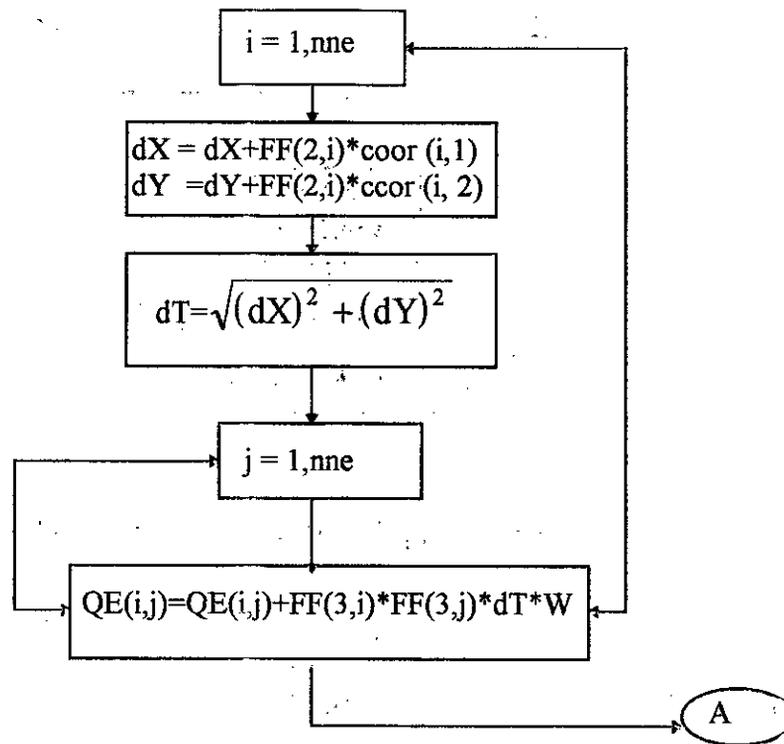




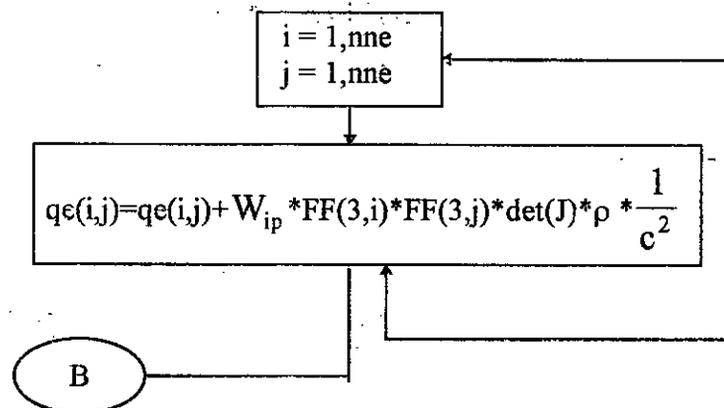
Matrice S : 
$$S_{ij} = \frac{1}{C^2} \int_S N_i N_j \det(J) ds + \frac{1}{g_\Gamma} \int_\Gamma N_i N_j d\Gamma$$

La matrice S élémentaire s'obtient après sommation de deux formes d'intégrales, l'une sur un contour et l'autre sur une surface. L'usage des deux sous-routines d'intégration s'avère donc nécessaire.

- Intégration sur le contour de la surface libre, dans l'hypothèse de l'existence des ondes de surface.



- Intégration sur tous le domaine fluide.



## *Chapitre 7*

# *Experimentation numérique .*

*Si j'ai appris une chose au cours de ma longue vie,  
c'est que toute notre science confronté à la réalité  
apparaît comme primitive et enfantine, et pourtant  
c'est ce que nous possédons de plus précieux .*

*Albert Einstein(1879-1955)*

### **7.1. Introduction :**

Le programme que nous avons conçu nous a permis de développer plusieurs applications traitant de l'interaction barrage-réservoir. Ce chapitre sera consacré à l'analyse des résultats obtenus.

Plusieurs cas de figure basés sur la compressibilité du fluide d'une part, et la rigidité du barrage d'autre part, ont été envisagés, et une application a été développée pour chacun d'eux.

- En ce qui concerne le barrage qui est en réalité déformable, il peut être considéré comme rigide en supposant un module de rigidité infini. Cette hypothèse est entre-autre celle sur laquelle s'est basé Westergaard lors de ses premiers travaux traitant de l'interaction dynamique fluide-structure.

- Concernant le réservoir fluide, les équations posées font intervenir des termes liés à sa compressibilité. Celle-ci peut ne pas être prise en compte comme il a été le cas dans les travaux de Westergaard, de Zangar, et ceux publiés par d'autres auteurs.

### **7.2. Validation du programme :**

Afin d'éviter de se lancer dans des critiques et conclusions hasardeuses, nous avons estimé nécessaire de valider notre programme.

Les travaux de Westergaard constituent une référence reconnue, c'est pour cette raison que nous les utiliserons comme éléments de comparaison.

La distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont du barrage selon Westergaard, a une forme parabolique par rapport à la hauteur d'eau. Elle atteint sa valeur maximale près du pied amont du barrage. Cette distribution est illustrée par la figure (7-0) représentant la variation du coefficient de pression  $C_p$  en fonction de  $Y/H$ .

Afin d'approcher le mieux possible les conditions expérimentales de Westergaard, nous avons introduit les données suivantes :

- Le fond de la retenue est considéré comme horizontal.
- Le parement amont est pris comme vertical.
- La surface libre est prise comme horizontale (absence d'ondes de surface).
- Le barrage est considéré rigide : Nous avons éliminé tous les termes faisant intervenir la rigidité de la structure à savoir, les matrices [K] et [C].
- Le fluide est supposé incompressible : Nous avons également éliminer les termes liés à la compressibilité notamment, les matrices [S] et [D].
- L'excitation est harmonique de période proche de la période fondamentale du barrage.

Le barrage sur lequel s'est faite la validation du programme est le Pine Flat dam qui est un barrage situé en Californie (USA). Ses données géométriques sont représentées dans le tableau suivant :

Hauteur (m)	Largeur à la base (m)	Largeur en crête (m)	NNR (m)	Fruit amont
122	96	9.75	116	n = 0.05

Caractéristiques mécaniques :

Masse vol (kg/m <sup>3</sup> )	Module de Young (N/m <sup>2</sup> )	Coefficient de Poisson
2360	2.8E+10	0.2

En comparant nos résultats illustrés dans la figure (7-0) à ceux de Westergaard, les remarques suivantes sont à faire :

- Du point de vue de l'allure, on remarque que les valeurs des surpressions sur les noeuds du parement augmentent dans le sens de la profondeur en prenant une forme semblable à celle de Westergaard ce qui est déjà bon signe.

- Dans la partie supérieure du graphique, les résultats laissent apparaître une bonne concordance avec la courbe de référence de Westergaard, cette fois-ci du point de vue quantitatif, les valeurs étant très proches.

- Dans la partie inférieure, un notable décalage vient s'insérer entre les deux courbes, spécialement aux points situés aux alentours du pied amont de l'ouvrage. Ceci était prévisible dans le sens où les exigences pratiques de programmation ne nous ont pas permis de faire intervenir les noeuds de la base dans les calculs, alors que c'est avec eux que les noeuds fluides du fond, interagissent. Cependant, se basant sur l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie du milieu fluide, et de la continuité des déformations, on pourra avancer que la pression effective au fond est comparable à celle des noeuds situés dans un proche voisinage, lesquels subissent des pressions proches de celles évaluées par Westergaard.

En conséquence, et s'agissant de la validité du programme, des conclusions positives peuvent être tirées de cette expérience. On peut conclure sans prétention que le programme élaboré est fiable et peut être utilisé pour le reste des applications en dehors de celle ayant servi à sa validation.

Concernant l'interaction entre les deux milieux, et en ne se référant qu'à nos résultats comme première approche, la conclusion que l'on peut tirer est que, à titre d'exemple, le pied amont du barrage qui, dans un cas statique, ne subirait que la pression hydrostatique de l'eau ( $\rho gH$ ), se retrouve sollicité par une pression pratiquement deux fois plus importante  $C_p \max = 0.94$  d'après nos résultats, et  $C_p \max = 0.735$  d'après ceux de Westergaard.

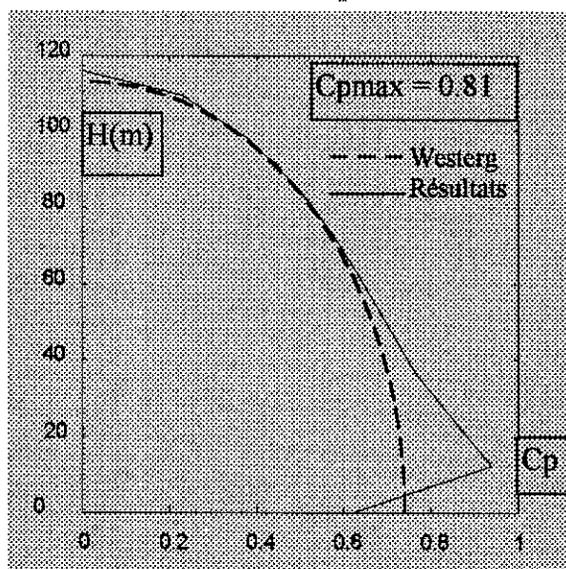


Fig 7-0 Pine Flat dam : Répartition des pressions sur le parement

### 7.3. Expérimentation numérique :

Maintenant que le programme est validé, cette partie consiste à étudier l'influence des propriétés physiques des deux milieux, à savoir la rigidité du barrage et la compressibilité du fluide. A cet effet, plusieurs cas de figure sont envisageables :

- Premier cas : Le fluide est considéré comme incompressible et le barrage rigide.
- Seconde cas : Le fluide est considéré comme incompressible et le barrage déformable.
- Troisième cas : Le fluide supposé compressible et le barrage déformable.

Ces différentes applications ont été réalisées sur trois barrages, dont un fictif, un deuxième situé en Algérie dans la région Ouest qui est le barrage de Cheurfa 2 et enfin un troisième ouvrage de hauteur relativement importante situé en Californie (USA) qui est le "Pine Flat dam". Les caractéristiques de chacun de ces trois ouvrages sont consignées dans le tableau qui suit :

Caractéristiques	Barrage de Cheurfa 2	Barrage fictif	Pine Flat dam
Hauteur totale (m)	69	90	122
Largeur à la base (m)	52.8	75	96
Hauteur de la crête (m)	7	8	09
Largeur de la crête (m)	5	7	9.75
Hauteur de la retenue (m)	46.26	75	116
Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	2300	2330	2360
Module de Young (N/m <sup>2</sup> )	0.30581E11	2.9E10	2.8E10
Coefficient de Poisson	0.167	0.185	0.2
Masse volumique de l'eau	1100	1100	1100
Célérité des ondes	1440	1440	1440
Profondeur	116	75	62
Longueur de tronçature	90	75	70

### **7.3.1. Interprétation des résultats :**

Les différentes applications de notre programme sur le barrage de Cheurfa, et sur le Pine Flat dam subissant respectivement les répliques du séisme d'El Asnam (figure 7-7), et celle de Loma Preita (figure 7-1), montrent distinctement que le cas le plus défavorable est celui où le barrage est supposé rigide et le fluide incompressible.

#### **A. Réponse de la structure et du réservoir a un chargement dynamique :**

L'historique du déplacement de la crête et celui de la pression hydrodynamique au pied amont du barrage sont illustrés sur les figures (7-2) et (7-3) pour le Pine Flat dam, et les figures (7-8) et (7-9) pour le barrage de Cheurfa 2.

Les graphiques montrent bien que ces valeurs oscillent autour de leurs positions d'équilibre en atteignant leurs maximums à un instant situé aux environs de celui du pic de l'accélérogramme d'excitation.

La réponse de la structure à l'excitation sismique formulée en terme de déplacement, prend des valeurs importantes en comparaison à celles obtenues sous la seule action des forces hydrostatiques. A titre d'exemple, les déplacements de la crête du Pine Flat dam sous l'action du séisme de Loma Preita, est d'après nos résultats 7 fois plus important que dans le cas statique. En ce qui concerne la surpression, sa valeur au pied amont du même barrage est de l'ordre de 60% de la pression hydrostatique ce qui est considérable.

#### **B. Influence du coefficient sismique :**

On constate sur les figures (7-2) et (7-8) ) un décalage notable entre la valeur de la surpression atteinte au pied amont du Pine Flat dam. et celui du barrage de Cheurfa

La même observation est à faire à propos des déplacements des points des crêtes de ces deux barrages. Voir figures (7-3) et (7-9).

En effet, la pression dans le réservoir et le déplacement du barrage sont influencés par la forme du séisme. Cette observation trouve son explication dans la différence entre les coefficients sismiques des sites correspondant à chaque barrage :

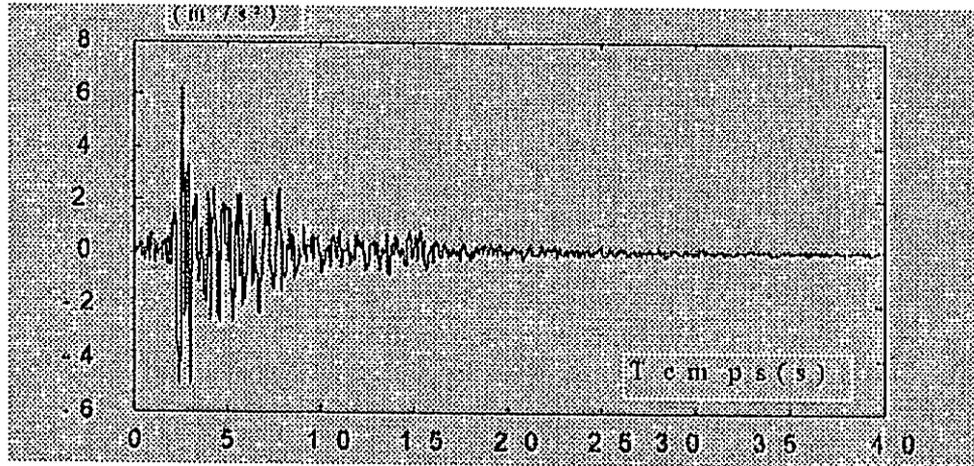


Fig 7-1 Accélérogramme de Loma-preita

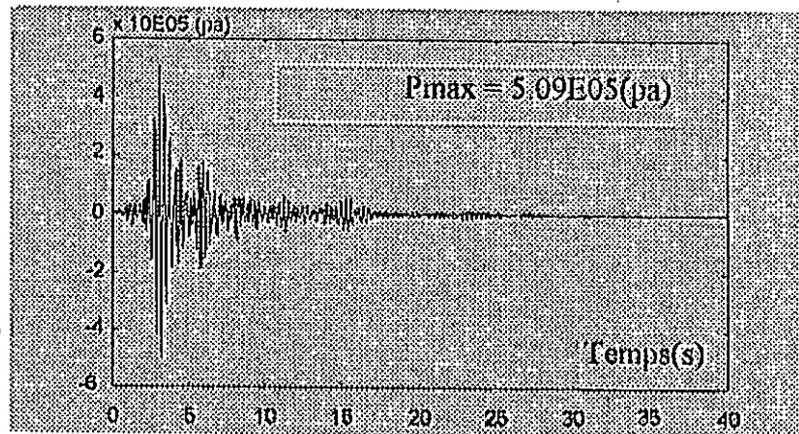


Fig 7-2 : Pine Flat dam : Pression au pied amont du barrage

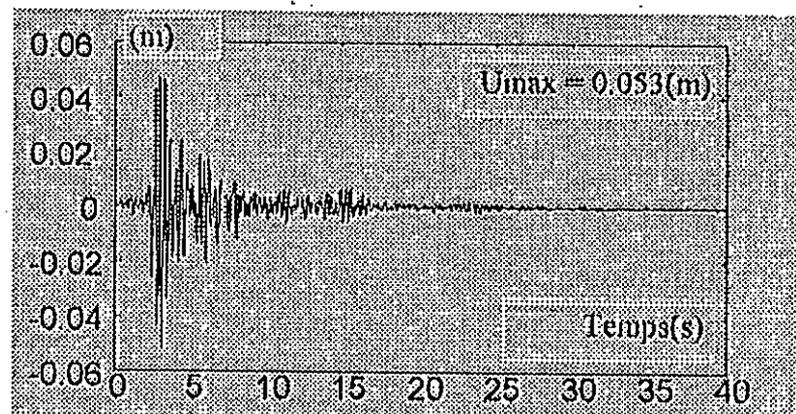


Fig 7-3 : Pine Flat dam : Déplacement de la crête du barrage

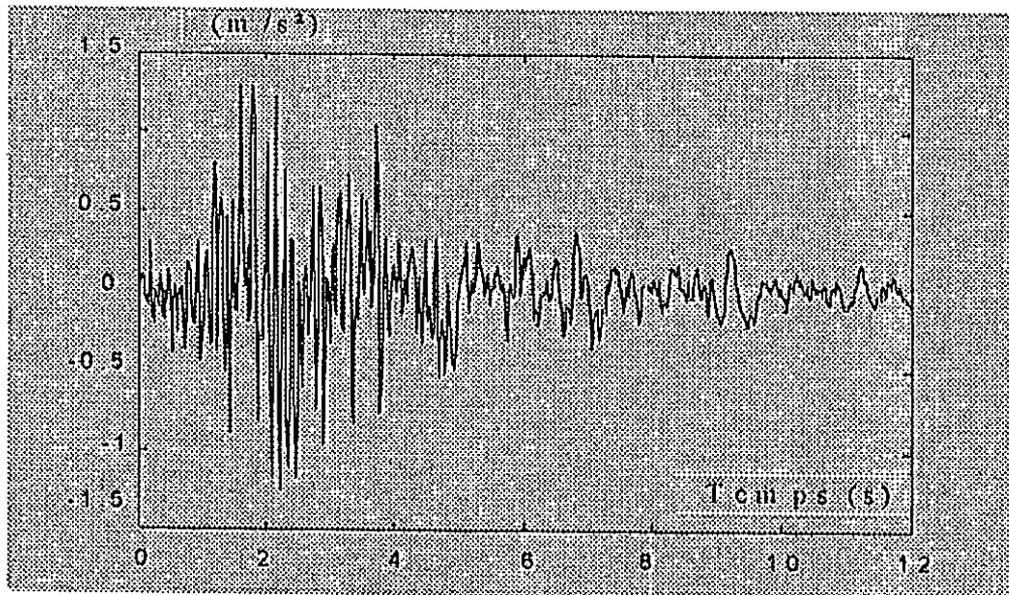


Fig 7-7 : Accélérogramme d'EL ASNAM

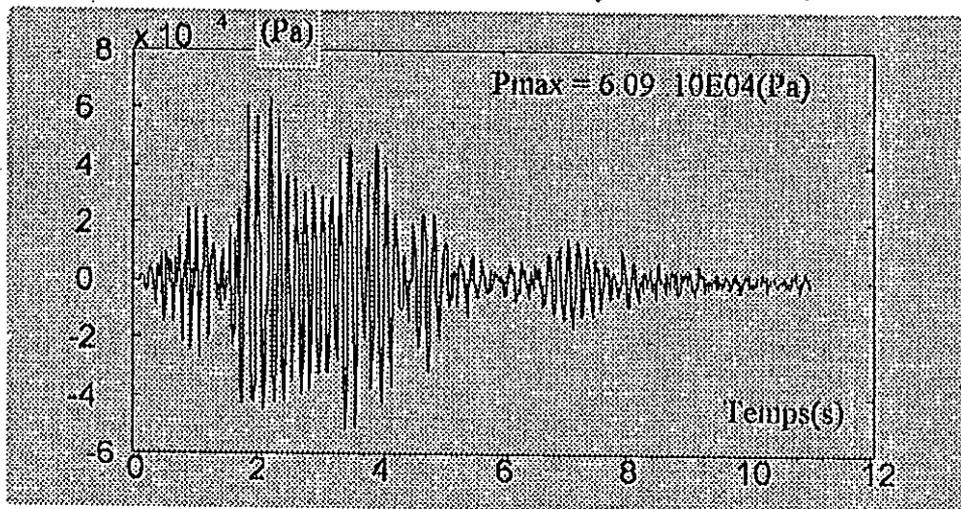


Fig 7-8 : Barrage de Cheurfa : Pression au pied amont du barrage

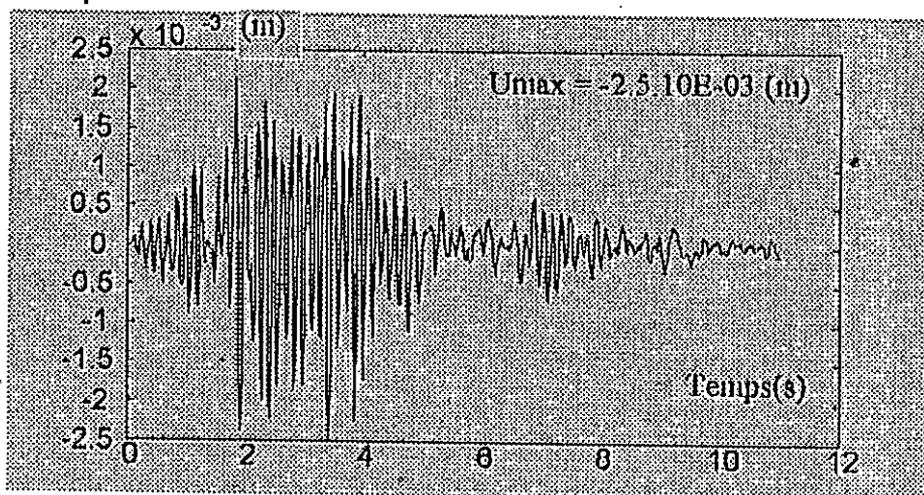


Fig 7-9 : Barrage de Cheurfa : Déplacement de la crête.

- Réplique du séisme d'El Asnam :  $\alpha_{\max} = 0.133\text{m/s}$
- Réplique du séisme de Loma Preita :  $\alpha_{\max} = 0.63 \text{ m/s}^2$

En conséquence, les contraintes développées dans le Pine Flat dam pour équilibrer les forces sismiques sont plus importante que celles développées dans le barrage de Cheurfa 2 (relation contraintes-déformations de l'élasticité).

### C. Influence de la compressibilité et de la rigidité :

Dans la première application, la compressibilité de l'eau et la déformabilité du barrage n'ont pas été prises en compte. Le travail du chargement extérieur est équilibré par la seule action des forces d'inertie. Cela suppose que tous les points de l'ouvrage sont animés d'une accélération égale à celle de l'excitation. Voir figures (7-4) pour le barrage de Pine Flat et (7-12) pour celui de Cheurfa 2.

A l'issue de la deuxième application où la déformabilité de la structure n'est plus négligée, les résultats montrent une réduction significative de la pression au pied amont du parement. Celle-ci qui est de l'ordre de 10% par rapport au premier cas, est due au fait qu'une partie de l'énergie est absorbée sous forme d'énergie potentielle de déformation, provenant des forces élastiques intérieures développées au sein du matériau . Voir figures (7-5) concernant le Pine Flat dam et (7-11) pour le barrage de Cheurfa 2.

Le troisième cas qui est celui se rapprochant le plus des conditions réelles, la valeur de la pression au pied amont affiche une diminution encore plus nette. Cela s'explique par le fait qu'une autre partie de l'énergie est absorbée par l'amortissement du barrage , la dissipation au niveau de la troncature ainsi que la fluctuation de la surface libre. Voir figures (7-6) et (7-10).

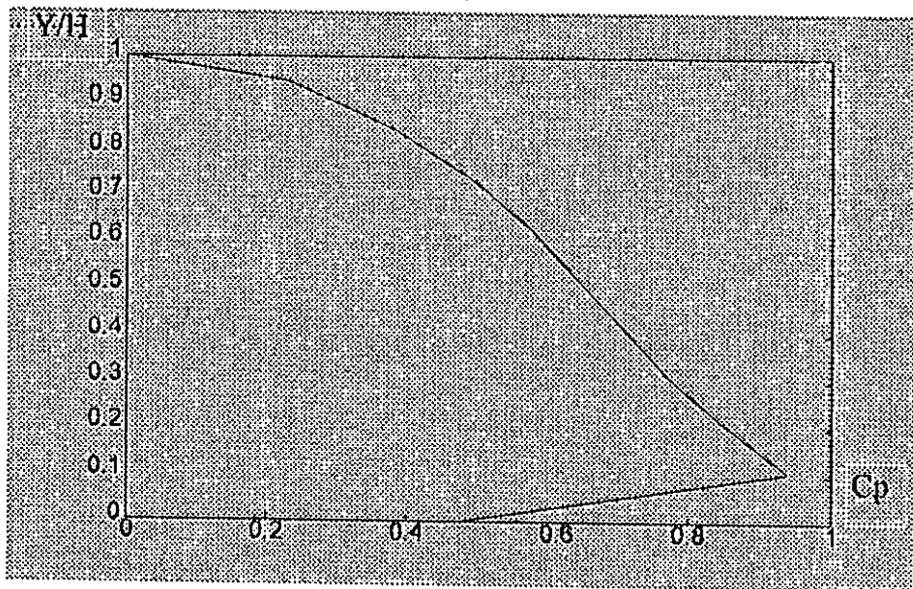


Fig 7-4 : Pine Flat dam : Répartition des pression sur le parement amont  
Barrage indéformable et fluide incompressible

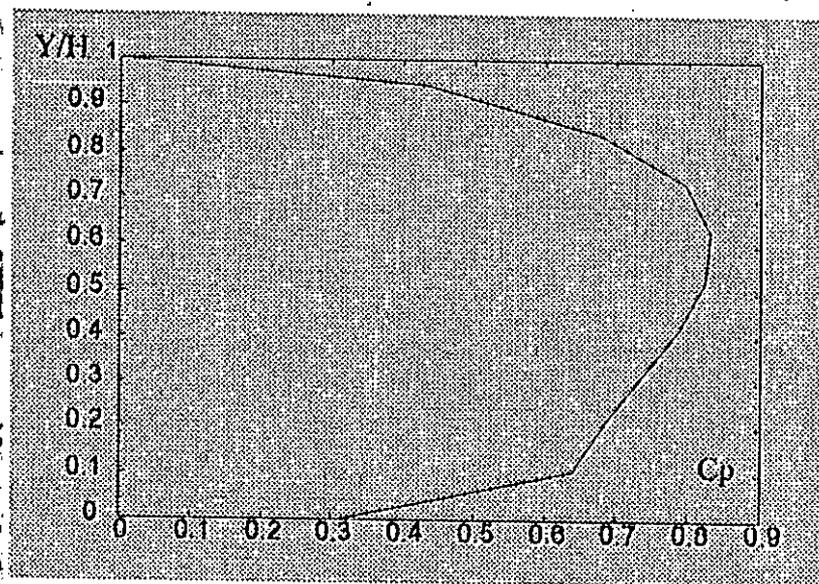


Fig 7-5 : Pine Flat dam : Barrage déformable et fluide incompressible

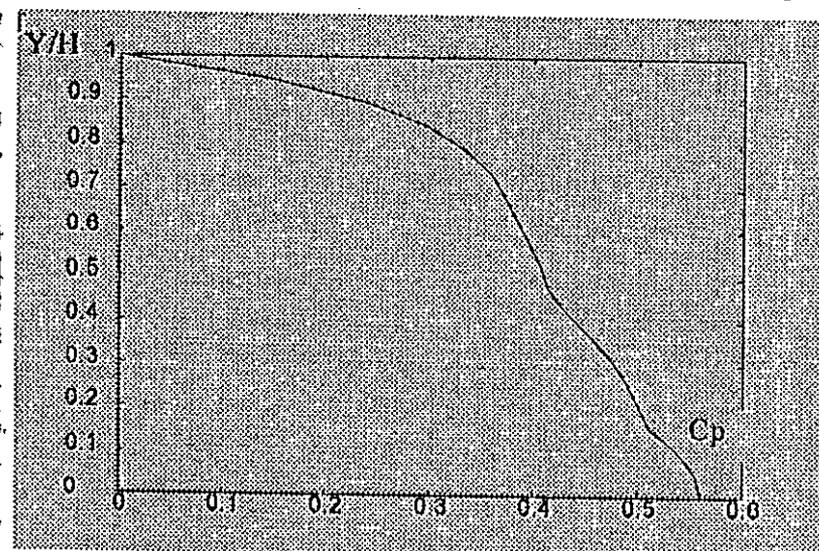


Fig 7-6 : Pine flat dam : Barrage déformable et fluide compressible

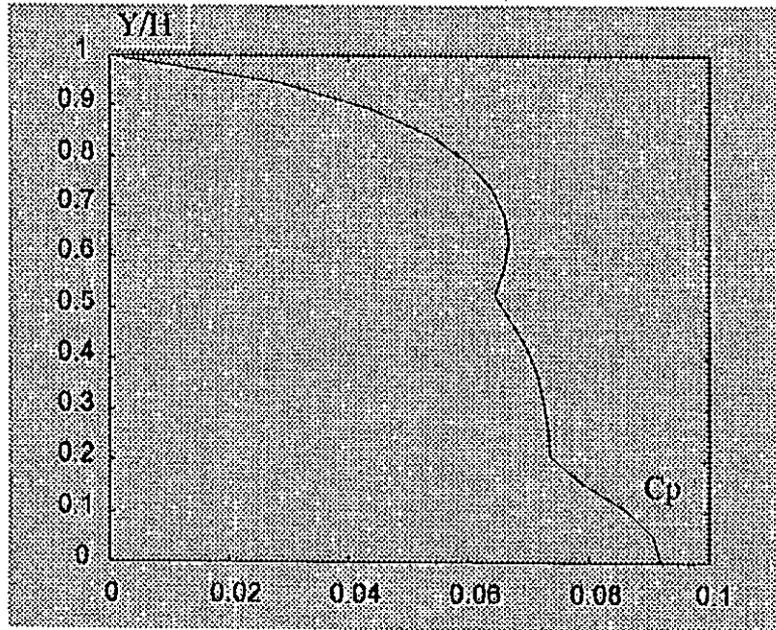


Fig 7-10 : Barrage de Cheurfa : Répartition des pressions sur le parement Barrage déformable et fluide compressible.

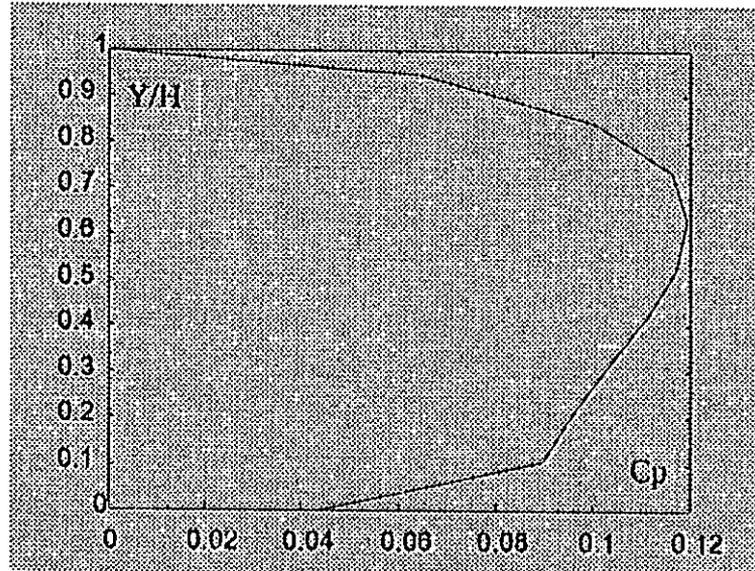


Fig 7-11 : Barrage de Cheurfa : Répartition des pressions sur le parement Barrage déformable et fluide incompressible.

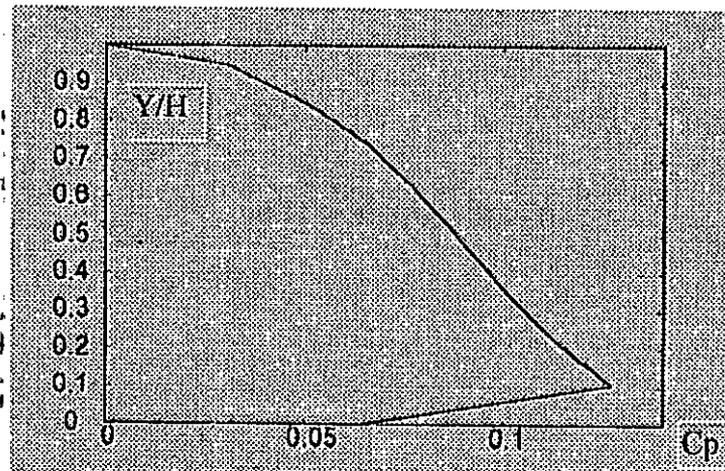


Fig 7-12 : Barrage de Cheurfa : Barrage rigide et fluide incompressible

#### D. Influence de la Hauteur du barrage :

Pour ce qui est de l'influence de la hauteur du barrage sur la surpression au pied amont, on constate d'après les figures (7-13a), (7-13b) et (7-13c) concernant les coefficients de pression enregistrés sur le parement du barrage de Cheurfa, du barrage fictif et celui du Pine Flat dam, que sa valeur augmente sensiblement avec la profondeur des réservoirs. La comparaison s'est faite entre les trois barrages en leur faisant subir le séisme de Loma Preita.

En conclusion, pour une même profondeur de la retenue, les surpressions sont plus importantes pour les barrages de dimensions importantes .

#### E. répartition des lignes piézométriques dans le réservoir :

La figure (7-14a) illustre la répartition des courbes joignant les points d'égaux surpressions maximales développées dans le réservoir. La figure (7-14b) décrit celles joignant les points d'égaux dépressions maximales. Les observations suivantes sont à faire :

- La répartition des pressions dans le réservoir : Dans le cas hydrostatique la variation de la pression se fait linéairement dans le sens de la profondeur. D'après le tracé des courbes isobares dans le réservoir, on voit bien que la variation dans le cas dynamique n'est plus linéaire mais se fait tout de même dans le sens de la profondeur.

On note également que la variation des pressions maximales dans le réservoir se fait le plus ressentir dans la partie supérieure du réservoir. En effet, les isobares sont très rapprochées dans cette région.

- Au niveau de la surface libre : La configuration des courbes isobares proches du niveau normal de retenue, laisse entrevoir une ondulation qui se propage le long de la surface libre. Cela rappelle à tout un chacun les vagues qui se forment à la surface d'un plan d'eau lorsqu'il est perturbé. Les courbes isobares montre que la surface libre subit des abaissements (figure 7-14a) et des élévations (figure 7-14b) de niveau atteignant 3 à 3,5 mètres. Le niveau normal de retenue ne constituera plus qu'un niveau moyen.

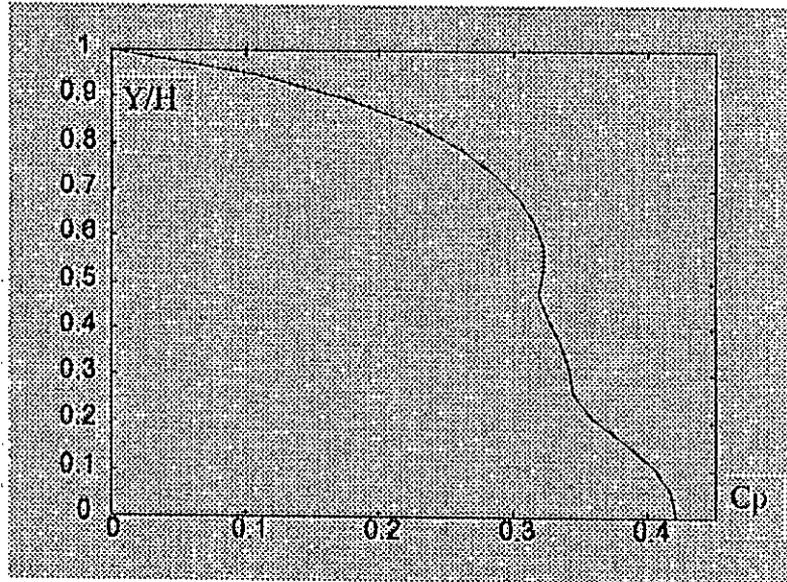


Fig 7-13a : Barrage de Cheurfa(NNR=62 m) : Répartition des pressions sur le parement

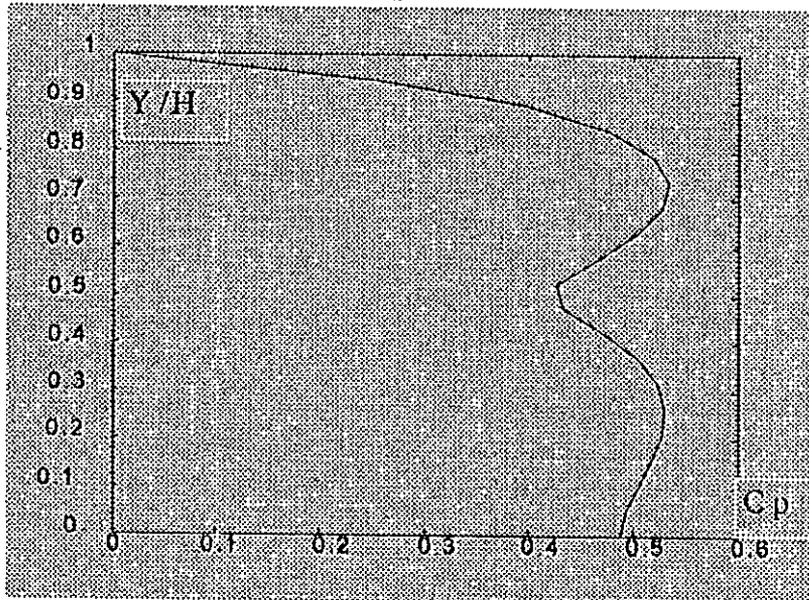


Fig 7-13b : Barrage fictif(NNR=75 m) : Répartition des pressions sur le parement

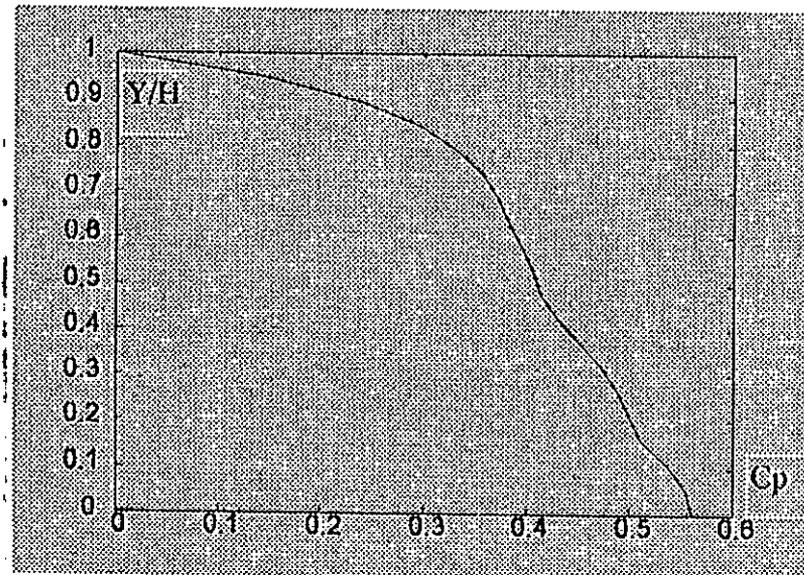


Fig 7-13c : Pine Flat dam(NNR=116 m) : Répartition des pressions sur le parement

• Au niveau du parement amont : Le calcul des pressions totales au niveau des noeuds du parement amont résultant de la somme des effets hydrostatique et hydrodynamique (figure 7-14b), montre que le tiers supérieur du parement court un risque de cavitation pendant l'action du séisme. Les pressions totales calculées étant négatives.

#### F. Répartition des forces :

Dans le cas d'un barrage considéré comme déformable et d'un fluide comme compressible, la répartition des forces de cisaillement qui se développent sur le parement amont atteignent la valeur maximale au pied amont et sera égale à 4346.77 (KN) (figure 7-16a ). Avec cette valeur, on peut approcher le coefficient de frottement sol-structure comme suit :

$$\text{tg } \varphi = T / Q \quad \text{où } T \text{ est la force de cisaillement au pied du barrage}$$

Q est le poids-propre de l'ouvrage.

$$\text{tg} \varphi = 0.308 \quad \text{soit l'angle de frottement } \varphi = 17.12^\circ$$

Pour que le barrage vérifie la condition de stabilité au glissement, il faut que le sol ait un angle de frottement supérieur à  $17,12^\circ$ . Comme première approche, cette condition éliminera beaucoup de sols ne pouvant pas satisfaire cette condition.

La figure (7-16b) nous indique que le moment maximum est obtenu au pied amont est a pour valeur 262000 (KN.m)

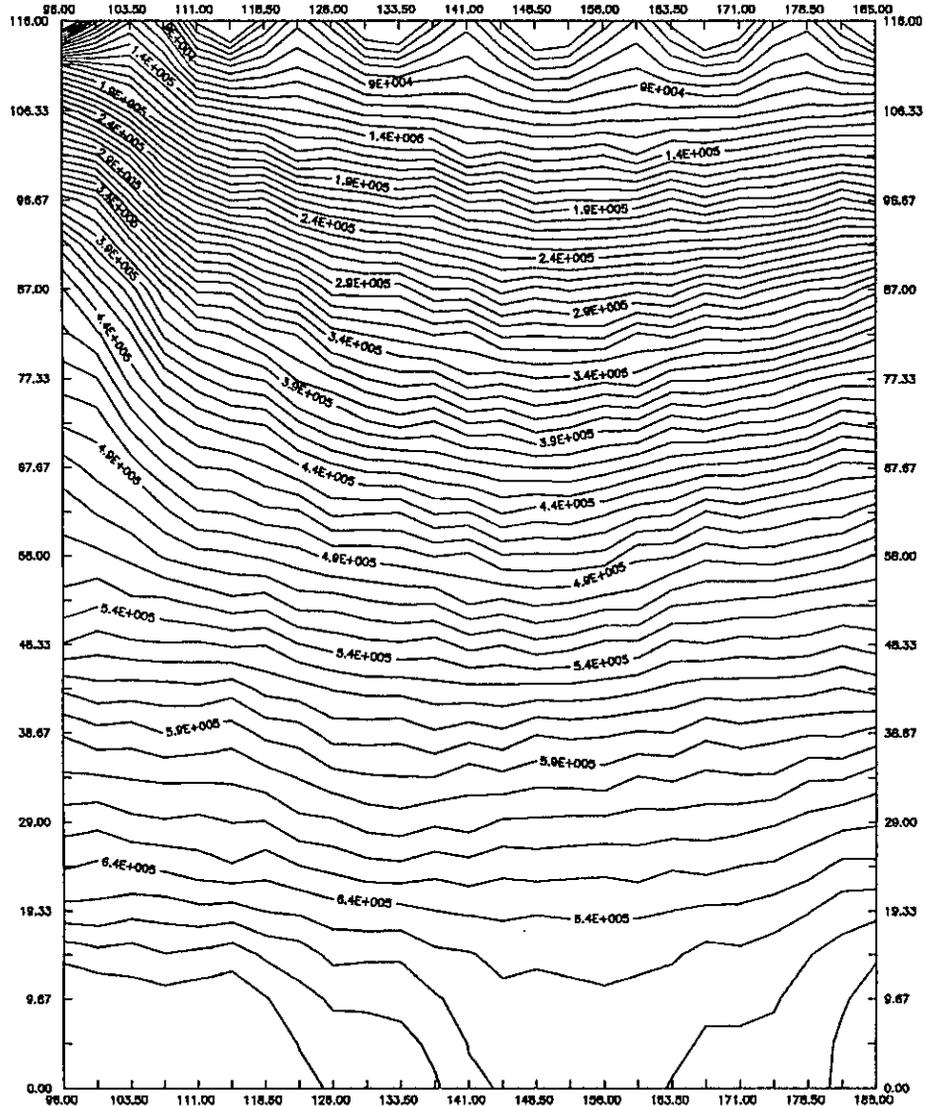


Fig 7-14a :Isobares des surpressions maximales dans le réservoir du Pine Flat dam

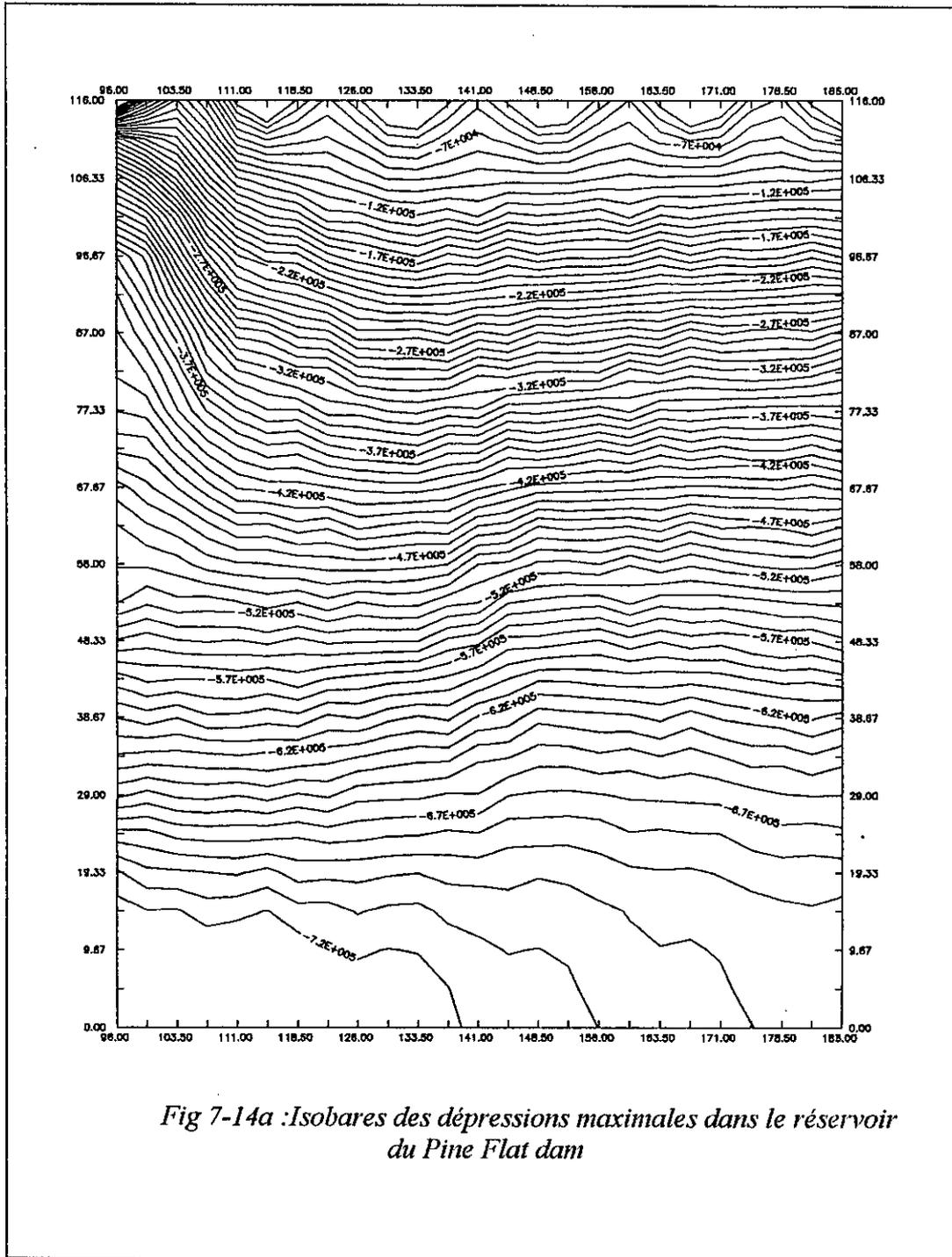


Fig 7-14a :Isobares des dépressions maximales dans le réservoir du Pine Flat dam

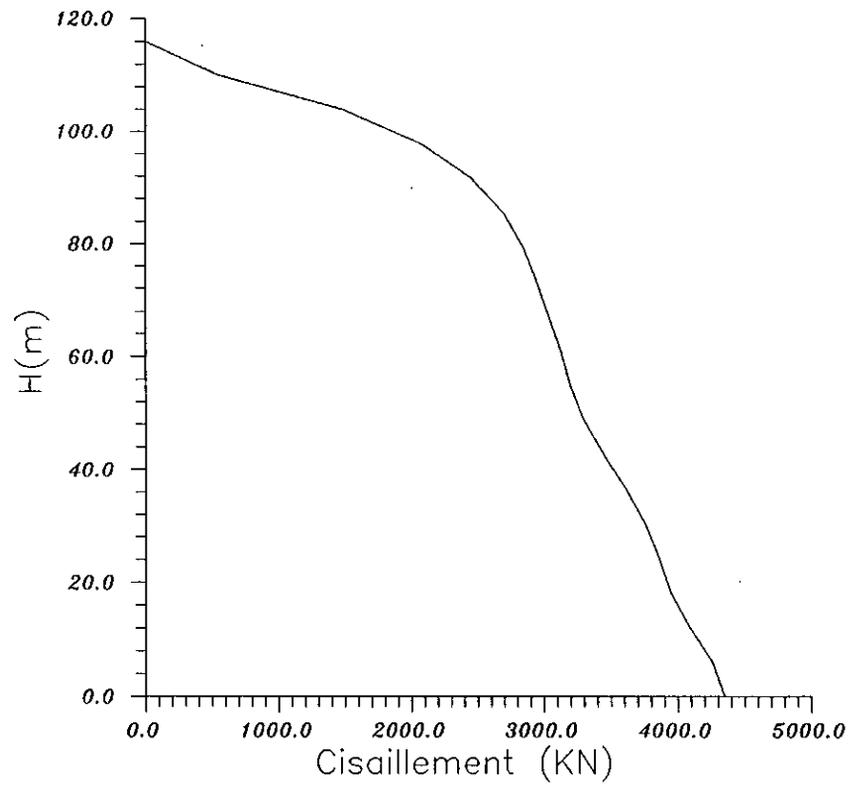


Fig 7-16a : Répartition des forces de cisaillement maximum sur le parement

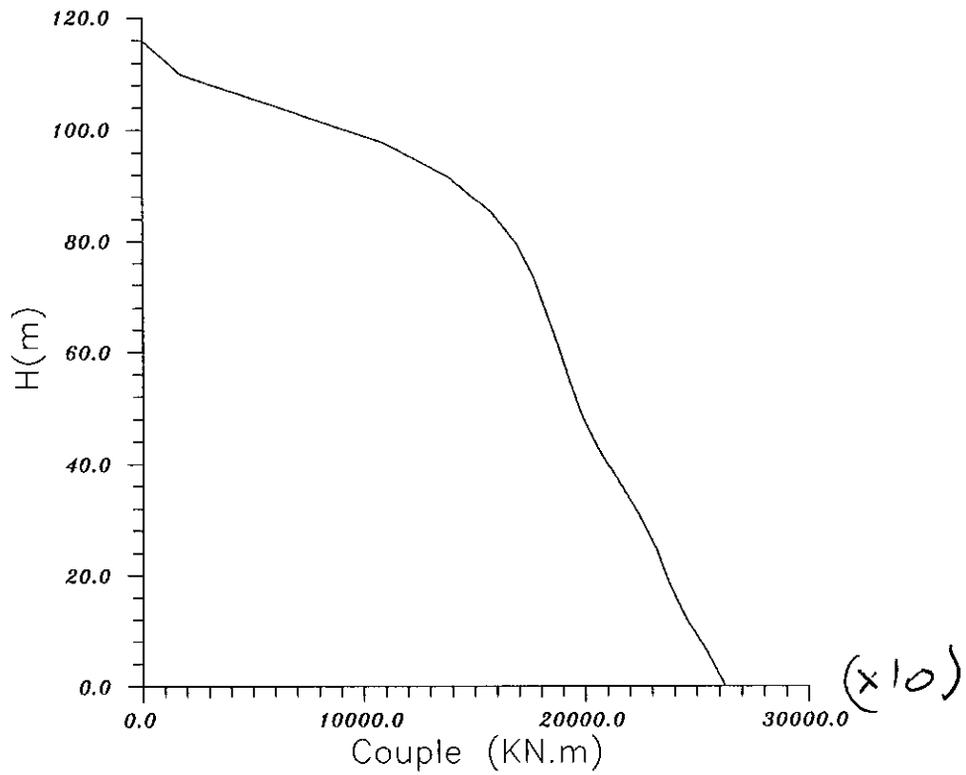


Fig 7-16b : Répartition du couple maximum sur le parement

## *Conclusion Générale*

*Je me fais l'impression de n'avoir été qu'un enfant jouant sur la plage  
et s'y amusant à y trouver de temps en temps un galet particulièrement lisse,  
ou un coquillage plus joli que les autres, tandis que s'étendait  
devant moi, inconnu, le grand océan de la vérité .*

*Issac Newton(1642-1727)*

### Conclusion générale:

Le travail étant à présent achevé, notre conclusion sera axée sur les trois points estimés essentiels :

- L'influence d'un séisme sur un barrage-poids s'avère d'une importance capitale dans son dimensionnement, ce qui ne fait que confirmer les conclusions des nombreuses études menées à ce sujet. Nous nous sommes rendus compte dès les premières applications que des sollicitations dynamiques peuvent provoquer des déformations importantes de l'ouvrage et créer des surpressions dans le réservoir constituant ainsi des sollicitations supplémentaires pour la structure et dont on doit absolument tenir compte .

L'analyse de nos résultats a montré que l'effet de l'interaction ou plus précisément l'échange d'énergie entre les deux milieux, barrage et réservoir, a une incidence sur la quantification des sollicitations entrant dans le dimensionnement et la conception du barrage.

Le degré d'importance que l'on doit accorder à ce phénomène d'interaction dépend de certains paramètres liés aux propriétés des milieux. La compressibilité du fluide et la rigidité du barrage selon qu'elles sont prises en compte ou pas dans les calculs, ont un effet remarquable sur les surpressions développées dans le réservoir et les déformations et contraintes créées dans le corps du barrage. Il est donc nécessaire d'en tenir compte pour approcher les conditions réelles du phénomène. Les hypothèses sur ces paramètres doivent être manipulées avec beaucoup de précautions.

- Comme toutes les méthodes modernes de traitement dont la mise en oeuvre passe par l'outil informatique, celle des éléments finis présente beaucoup d'attraits :

- 1- Prise en compte de modèles complexes intégrant un grand nombre de paramètres.
  - Géométrie compliquées des domaines.
  - Hétérogénéité des caractéristiques.

2- Possibilité de multiplier les scénarios de comportement d'un modèle physique, rapidement et à moindre frais.

Cependant, la programmation de la méthode nécessite une bonne maîtrise des langages et techniques de programmation car elle ne devient d'un grand intérêt pratique que lorsque le programme est conçu de manière à être très souple face aux calculs colossaux qu'elle engendre.

Adopter cette méthode pour traiter des problèmes de la dynamique des structures et de l'interaction des milieux, fournit beaucoup de facilités pour faire des calculs précis.

En contre partie, il faut noter que la méthode dégrade quelque peu l'information à quoi elle n'apporte pas de plus value significative.

Par ailleurs, l'utilisation de la MEF requiert la définition et l'intégration préalable dans la modélisation de toutes les décisions qui relèvent de la connaissance et du savoir-faire, car en tant que méthode pure de calcul précis, elle est neutre au regard du caractère sensé ou abérrant du modèle auquel elle s'applique.

- Ce projet de fin d'études a constitué pour nous, élèves-ingénieur, la première occasion qui nous ait été offerte de toute notre formation pour expérimenter et développer nos aptitudes à travail "produire" en équipe. Ce parcours de quelques mois a été un terrain d'échange fructueux des connaissances scientifiques entre nous étudiants chargés de cette étude, et tous ceux que nous avons consulté.

# *Bibliographie*

*Pour faire de grandes choses, il ne faut pas être un si grand génie,  
il ne faut pas être au dessus des hommes, il faut être avec eux .*

*Charles de Secondat Montesquieu*



- 10- 'Numerical methods in finite element analysis'  
 K.J.BATHE et E.L.WILSON  
 Prentice Hall (1976)
- 11- 'Modelisation des structures par éléments finis'  
 TOUZOT.DHATT et J.L.BATOZ  
 Hermes (1990)
- 12- 'Earthquake analysis of gravity dams including hydrodynamic interaction'  
 P.CHAKRABARTI et ANIL.K.CHOPRA  
 Earthquake. Eng and structural dynamics, vol 2 143-160 (1973)
- 13- 'Hydrodynamic pressure on dams'  
 Y.C DAS and F.A AKL  
 International journal of modelling and simulation, vol .8, no.1,(1988)
- 14- 'A nonlinear formulation for the earthquake responses of dam-reservoir systems'  
 C.S.TSAI and G.C.LEE Sixth canadian conf.earthquake engineering. Toronto(1991)
- 15- 'A non-reflecting boundary in fluid-structure interaction'  
 S.K.SHARAN computers and structures vol 26 no 5 pp 841-846, (1987)
- 16- 'Interaction fluide-structure cas des barrages-poids en béton'  
 A. Soufari A.Seghir Ecole nationale polytechnique juin 1995
- 17- 'Investigation en calcul dynamique des structures par la MEF'  
 M.S.Si Abderrahmane, M.A.Athmane ENP juin 1994
- 18- 'Analyse des barrages-poids par la méthode des éléments finis'  
 Y.Amitouche,S.Messaoudene, M.Hamadene USTHB 1992