

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ANALYSE DU SYSTEME-BARRAGE
RESERVOIR PAR LA METHODE DES
EQUATIONS INTEGRALES
AUX FRONTIERES

Proposé par :

Mr. O. BELHADJ

Etudié par :

Mr. BECIS Toufik
&
Mr. BELABED Salim

Dirigé par :

Mr. O. BELHADJ

PROMOTION

1995 - 1996

Titre :

Analyse du système barrage-réservoir par la méthode
des équations intégrales aux frontières

ملخص :

هذا العمل يهدف إلى دراسة نظرية حول الفعل المتبادل بين الماء ونشأة
وكذا دراسة للتصوت الهيدرو ديناميكية على السور الثقيلة الصلبة وفي داخل
خزاناتها بفعل زلزال، ولهذا الغرض لقد استعملنا طريقة المعادلات
التكاملية على الحدود.

بعض النتائج المتحصل عليها قويت تشبهاً لنتائجنا السابقة عن دراسات
سابقة، لقد بينت هذه المقارنة بأن النتائج جد متقاربة.

RESUME

Ce travail fait l'objet d'une étude théorique sur l'interaction fluide-structure, ainsi que l'étude des pressions hydrodynamiques sur les barrages poids rigide et à l'intérieur de leurs réservoirs dues à l'action d'un séisme. Pour cela, on utilise la méthode des équations intégrales aux frontières.

Quelques résultats obtenus ont été comparés avec d'autres résultats obtenus par des études précédentes.

La comparaison a montré que les résultats sont très proches.

ABSTRACT

The object of this work is the theoretical study of fluid-structure interaction, with of hydrodynamic pressures on rigid gravity dams and in their tanks due to earthquake action, using the boundary element method.

Some results obtained are compared with other results of previous studies.

The agreement between these results is fairly good

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail en terme de respect et de reconnaissance à :

- *mes chers parents,*
- *ma grand-mère,*
- *mes frères et soeurs,*
- *toute ma famille,*
- *tous mes amis.*

Toufik

Je dédie ce travail à :

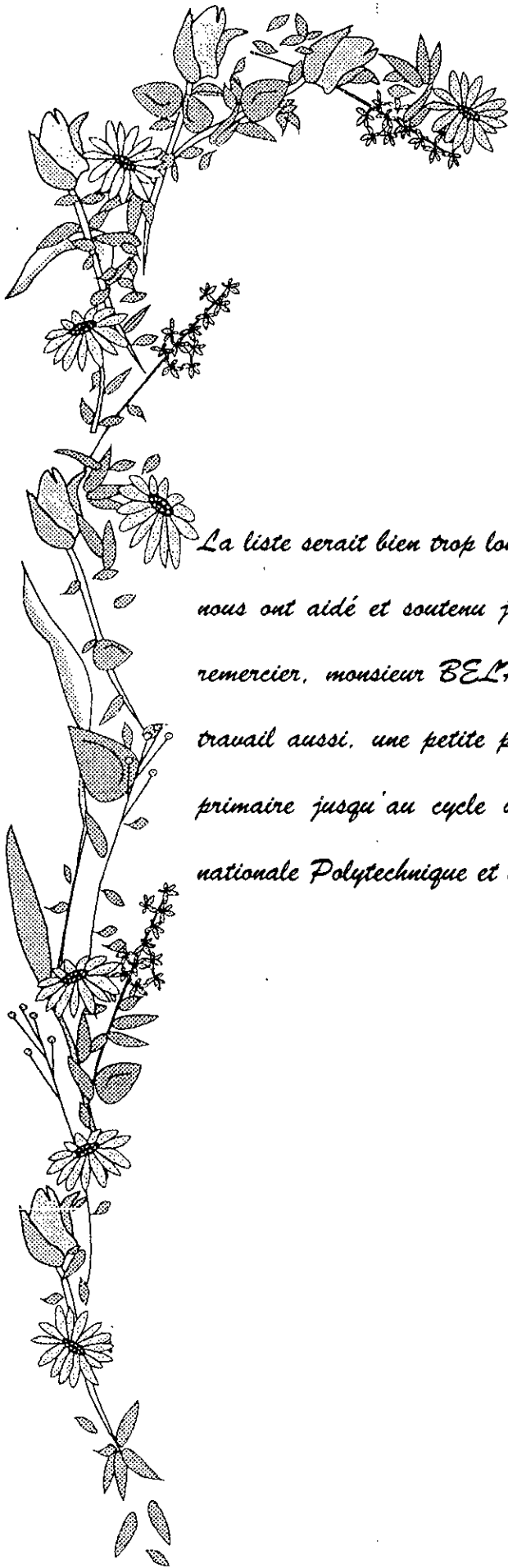
- *mon père Ahmed, ma mère Nadira,*
- *mon frère Karim que je trouve toujours à mes côtés,*
- *mes deux soeurs Zohra et Rima, ainsi qu'à mon beau frère Fahd,*
- *tous mes amis.*

Salim



REMERCIEMENTS

La liste serait bien trop longue, si on commence à citer les noms des personnes qui nous ont aidé et soutenu jusqu'à la fin. Mais, particulièrement, nous tenons à remercier, monsieur BELHADJ, pour nous avoir guidé toute au long de notre travail aussi, une petite pensée et un grand merci pour tous les enseignants du primaire jusqu'au cycle universitaire, ainsi que tous le personnel de l'École nationale Polytechnique et encore merci à tous.



SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : GENERALITES	
I.1 - Le séisme	3
I.2 - Types d'ondes	3
I.2.1 - Ondes de volumes (ondes P, ondes S)	3
I.2.2 - Ondes de surfaces (ondes de Rayleigh, ondes de Love)	4
I.3 - Notion sur le comportement dynamique d'un barrage	4
I.3.1 - Interaction sol-structure	5
I.3.2 - Interaction fluide-structure	5
CHAPITRE II : MODELISATION MATHEMATIQUE	
II.1 - Introduction	9
II.2 - Lois fondamentales de la dynamique	9
II.3 - Partie solide	12
II.3.1 - Notion d'élasticité	12
II.3.2 - Equations gouvernantes	12
II.3.3 - Elasticité plane	14
II.3.4 - Formulation en déplacement des problèmes de l'élastodynamique	16
II.4 - Partie fluide	18
II.4.1 - Hypothèse fondamentale du problème	18
II.4.2 - Equations gouvernantes	18
II.4.3 - Résolution des équations d'ondes	22
II.5 - Conditions aux limites	25

CHAPITRE III : METHODE DES RESIDUS PONDERES

III.1 - Introduction	30
III.2 - Méthode des résidus pondérés	30
III.2.1 - Méthode des moments	31
III.2.2 - Méthodes de colocation par points	32
III.2.3 - Méthodes de colocation par sous domaine	33
III.2.4 - Méthodes de Galerkin	33

CHAPITRE IV : CONCEPTS DE BASE ET REPRESENTATION DE LA M.E.I.F.

IV.1 - Introduction	35
IV.2 - Historique	35
IV.3 - Philosophie de la méthode	36
IV.4 - Formulation de l'équation intégrale	37
IV.4.1 - Solution fondamentale	39
IV.4.2 - Equation intégrale aux frontières	40
IV.5 - Descritisation de l'équation intégrale aux frontières	42
IV.6 - Formulation du système d'équations	47
IV.7 - Problème de coin	48
IV.7.1 - Concept du noeud unique	49
IV.7.2 - Concept du double noeud	49
IV.8 - Combinaison des régions	49

CHAPITRE V : APPLICATION DE LA M.E.I.F. AU PROBLEME ETUDIE

V.1 - Introduction	52
V.2 - Cas où l'eau est considérée incompressible	
V.2.1 - Solution fondamentale	52
V.2.2 - Formation de l'équation intégrale	54
V.2.3 - Descritisation de l'équation intégrale aux frontières	56
V.2.4 - Evaluation des intégrales	62
V.2.5 - Points internes	72

V.3 - Cas où l'eau est considérée compressible	74
V.3.1 - Solution fondamentale	74
V.3.2 - Formation de l'équation intégrale	75
V.3.3 - Discrétisation de l'équation intégrale aux frontières	76
V.3.4 - Evaluation des intégrales	76
V.3.5 - Points internes	83
V.4 - Cas du solide	83
V.4.1 - Solution fondamentale	83
V.4.2 - Formation de l'équation intégrale aux frontières	84
V.4.3 - Discrétisation de l'équation intégrale	86
V.5 - Couplage (fluide-structure)	87

CHAPITRE VI : MODELISATION NUMERIQUE

VI.1 - Introduction	89
VI.2 - Programme D.E.S.C.E. (C, L)	89
VI.3 - Etapes de résolution	91
VI.4 - Structure des programmes	92
VI.4.1 - Cas où l'eau est incompressible	92
VI.4.2 - Cas où l'eau est compressible	94
VI.5 - Présentation des programmes	96

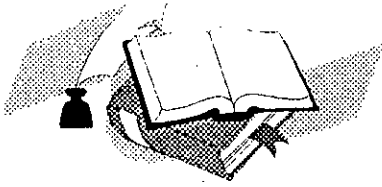
CHAPITRE VII : APPLICATIONS ET INTERPRETATION DES RESULTATS

Interprétation des résultats	99
------------------------------	----

CONCLUSION	102
------------	-----

ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE



Introduction

Le comportement dynamique d'une structure telle que les barrages, est influencé par la présence du fluide. En sa présence, le mouvement du solide, les déformations et contraintes qu'il subit, ne sont pas les mêmes que pour le solide seul en raison du couplage fluide-structure. Il est donc essentiel, pour la conception de telles structures de prendre en compte ce phénomène, notamment pour les excitations sismiques;

Les applications du calcul dynamique dans le domaine des séismes, ont pendant longtemps été freinées par:

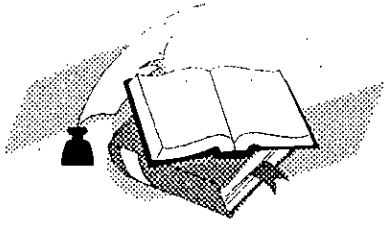
- Le faible nombre des données d'enregistrements disponibles pour les mouvements forts, correspondants à des intensités notables.
- L'allure extrêmement irrégulière des mouvements sismiques.
- L'importance des effets non-linéaires dans les structures (barrages) soumises à des excitations sismiques de fort niveau (fissurations, chocs, frottements) qui impliquent pour des études détaillées, l'utilisation et l'implantation dans les codes de calcul des lois complexes (équations aux dérivées partielles) pour décrire le comportement des matériaux.

L'analyse de la réponse du barrage au séisme, est très compliquée du fait qu'elle doit tenir compte non seulement de l'action sismique sur le barrage proprement dit, mais aussi d'autres facteurs qui influent sur la réponse au séisme, à savoir :

- L'interaction entre le barrage et l'eau du réservoir.
- L'interaction entre le barrage et la fondation sur laquelle il repose.
- L'interaction entre l'eau et le fond de la retenue.

Un ensemble de méthodes et de codes de calcul, ainsi que les critères et conditions pratiques de bonne utilisation sont maintenant disponibles pour effectuer l'analyse sismique des barrages.

Le but principal recherché est la détermination de la répartition des pressions hydrodynamiques sur la frontière et à l'intérieur du réservoir d'eau, ainsi qu'une étude théorique brève sur l'élastodynamique et enfin le couplage Fluide-structure (barrage) sans application.



Chapitre **1**

Généralités

I-1 LE SEISME:

Qu'est ce qu'un séisme?

L'ébranlement de la croûte terrestre en un point quelconque, provoque des vibrations qui se transmettent à travers le globe terrestre. Le passage de ces vibrations constitue un tremblement de terre ou séisme. En réalité le séisme ne se produit pas en surface, il prend toujours naissance à partir d'un point appelé hypocentre ou foyer (l'épicentre est la projection en surface de l'hypocentre).

Les tremblements de terre provoquent des accélérations qui engendrent dans le barrage des efforts supplémentaires consécutifs aux forces d'inerties. Ces accélérations peuvent se développer dans toutes les directions, mais ce sont évidemment les ondes longitudinales qui sont les plus dangereuses pour les barrages, dont voici un aperçu sur ces types d'ondes :

I-2 TYPES D'ONDES :

I-2-1 Ondes de volumes:

Elles se forment souvent dans le foyer et se propagent à l'intérieur de la terre sous 2 formes.

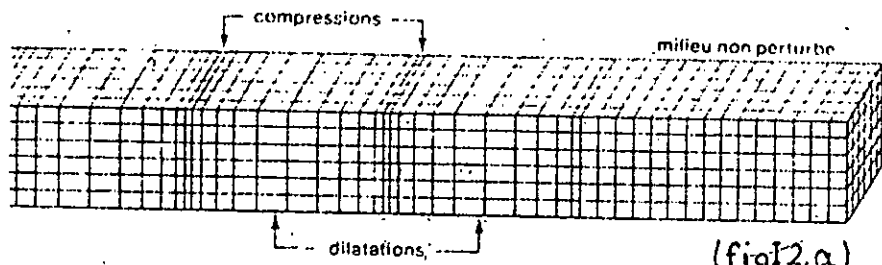
I-2-1-1 Ondes P (ou ondes longitudinales):

Ces ondes se propagent avec une vitesse de 7 à 8 Km/s et s'accompagnent d'un changement de volume (compression et dilatation alternées) comme le montre la figure (I. 2. a)

I-2-1-2 ondes S (ou ondes transversales) :

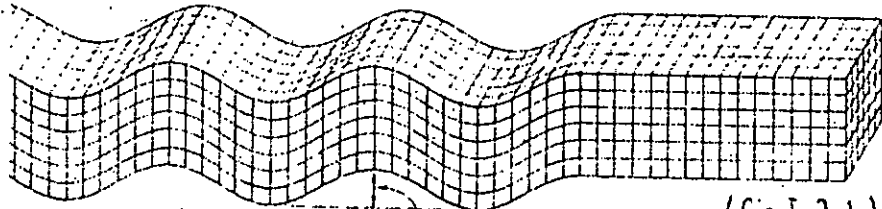
Ces ondes se déplacent avec une vitesse de 4 à 5 Km/s et s'accompagnent d'une distorsion dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation, provoquant un cisaillement sans changement de volume. A la différence des ondes longitudinales, les ondes transversales ne peuvent se propager dans les milieux liquides ou gazeux, en

onde P



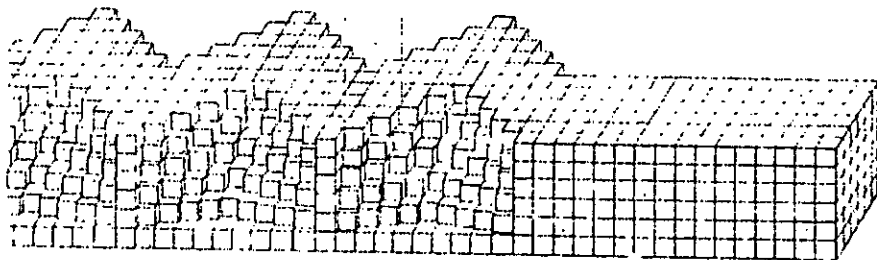
(fig I.2.a)

a
onde S



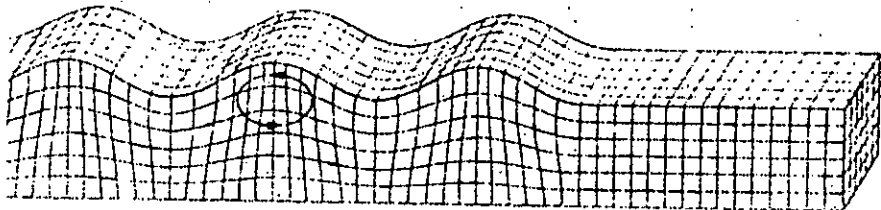
(fig I.2.b)

b
onde de Love



(fig I.2.c)

c
onde de Rayleigh



(fig I.2.d)

raison de l'inaptitude de ces milieux à transmettre les efforts de cisaillement comme le montre la figure (I. 2 .b).

I-2-2 Ondes de surface :

Les ondes de volumes qui arrivent à la surface de la terre produisent des ondes de surface qui intéressent le sol que sur une profondeur extrêmement faible.

On distingue principalement:

I-2-2-1 Ondes Q (ou ondes Love) :

Ce sont des ondes pour lesquelles les points du sol se déplacent dans un plan tangent à la surface, perpendiculairement à la direction de propagation; elles n'engendrent que des contraintes de cisaillement comme le montre la figure (I.2.c).

I-2-2-2 Ondes R (où ondes de Rayleigh):

Ce sont des ondes pour lesquelles les points du sol décrivent des ellipses dans le plan vertical de propagation. Ce mouvement est semblable au mouvement de la houle et entraîne des compressions (ou des tractions) ainsi que des cisaillement dans le sol comme le montre la figure (I.2.d).

I-3 NOTION SUR LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN BARRAGE :

Sous l'action d'une charge dynamique qui varie en fonction du temps. A chaque instant le barrage a un état de contrainte, cette variation de la charge est le facteur majeur de la complexité. En effet dans le calcul dynamique, les accélérations produisent des forces d'inertie opposées aux accélérations, par conséquent la structure doit résister non seulement aux forces dynamiques mais aussi aux forces d'inertie.

Le comportement dynamique du barrage présente un certain nombre de traits spécifiques. En effet, il en résulte lors d'un séisme:

- Une interaction sol-structure.
- Une interaction fluide-structure.

I-3-1 Interaction sol-structure :

L'interaction sol-structure est l'étude du comportement d'un barrage soumis à une sollicitation sismique, lors du séisme les perturbations du mouvement du sol modifient la réponse du barrage. La démarche actuelle est de traiter le barrage et la fondation séparément du couple fluide-structure.

La fondation est considérée comme un espace continu homogène élastique et semi-infini à comportement linéaire.

I-3-2 Interaction fluide-structure :

L'effet hydrodynamique est un aspect très important dans la conception sismique des barrages en béton et structures associées.

En effet le comportement dynamique d'une structure en particulier le barrage se trouve modifié lorsque celle-ci se trouve en contact d'un fluide. Du fait que la fréquence propre de vibration d'une structure qui doit être constante (dépend de la masse et de la rigidité). Se trouve modifiée pour une telle structure en contact de l'eau (barrage) durant le tremblement de terre, chose qu'on ne voit pas dans d'autres types de structures (bâtiments, ponts, etc.).

A présent nous présentons quelques approches anciennes et récentes réalisées dans le but d'une analyse des pressions hydrodynamiques sur les barrages rigides.

I-3-2-1 Formulation de la grange :

L'approche consiste à modéliser ensemble le fluide et la structure. Le mouvement de l'eau est gouverné par les équations de Lagrange ainsi que le solide. La modélisation du fluide est représenté par une largeur égale à trois fois celle du barrage.

I-3-2-2 Formulation d'Euler :

Dans cette formulation le mouvement de la structure est exprimé par les équations de Lagrange. L'interaction se fera par itérations qui nécessitent beaucoup de calcul et de temps, ce qui rend la méthode difficile bien qu'elle présente une bonne précision.

I-3-2-3 Formulation par masses ajoutées : (Westergaard)

La première approche a été donnée par Westergaard en 1933 qui a calculé la répartition des pressions sur un écran vertical limitant un réservoir semi-infini de profondeur constante. Dans l'hypothèse d'un mouvement horizontal harmonique de l'écran de période T. L'accroissement de la pression hydraulique s'exerçant sur un barrage à la suite d'un séisme est calculé suivant la formule de Westergaard.

$$P(y) = 7/8 K \cdot \gamma_w (H \cdot y)^{1/2}$$

avec :

P : Accroissement de la pression sur l'écran.

K : Coefficient sismique.

γ_w : Poids volumique de l'eau

H : Profondeur maximale de l'eau.

y : Profondeur du point considéré.

Les forces hydrodynamiques F agissant sur un barrage poids, sont similaires à celles d'eau soumise à une accélération dans une figure parabolique comme le montre la figure (I.3 . a).

Cette parabole est définie par l'équation :

$$X = 7/8 (H \cdot y)^{1/2}$$

(Westergaard suppose qu'une certaine partie de l'eau se déplace avec le barrage alors que le reste du réservoir reste inactif).

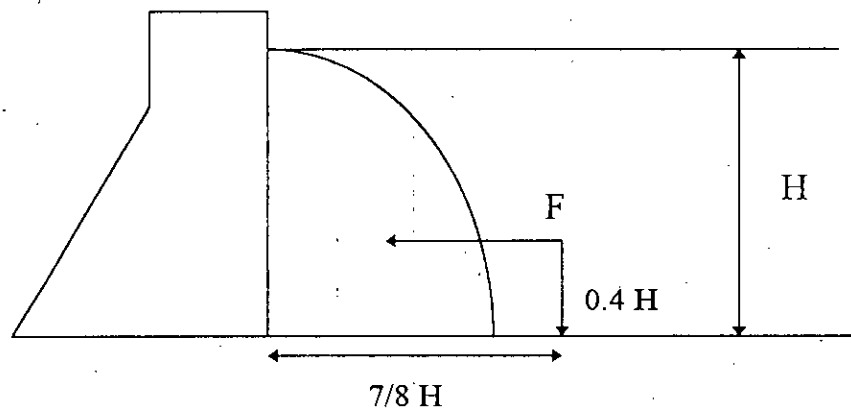


FIG. (I. 3 . a)

Pour déterminer la force résultante sur l'écran on procède comme suit :

$$dF = p ds$$

$$\text{sachant que } P = 7/8 K \cdot \gamma_w (H \cdot y)^{1/2}$$

$$ds = dx dy$$

en prenant l'unité de largeur de l'écran on aura :

$$ds = dy$$

par conséquent :

$$dF = 7/8 K \cdot \gamma_w (H \cdot y)^{1/2} dy$$

$$\text{d'où } F = 7/8 K \cdot \gamma_w H^{1/2} \int_0^H y dy$$

après intégration on trouve :

$$F = 7/12 k \cdot \gamma_w H^2$$

Elle s'applique en un point situé au 2/5 de la hauteur du réservoir du bas comme le montre la figure (I. 3 . a)

I-3-2-4 Formulation de Zangar (1951)

Zangar a étudié l'influence de l'écran amont sur l'interaction barrage-eau est cela en se référant à la méthode de l'analogie électrique dont le but de résoudre l'équation de Laplace régissant l'évolution de la pression dans le réservoir due à un

tremblement de terre engendrant des ondes horizontales. la pression hydrodynamique sur le parement est donnée par :

$$P = C \cdot K \cdot \gamma_w \cdot H$$

C : Coefficient de pression, qui dépend seulement de la forme du barrage.

Les résultats expérimentaux on fait l'objet d'une formulation analytique approchée :

$$P(y) = \frac{1}{2} C_m \cdot H \cdot \gamma_w \left[\frac{y}{H} \left(2 - \frac{y}{H} \right) + \left(\frac{y}{H} \left(2 - \frac{y}{H} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

avec C_m : Coefficient de pression maximale donné par la figure (I . 3 . b).

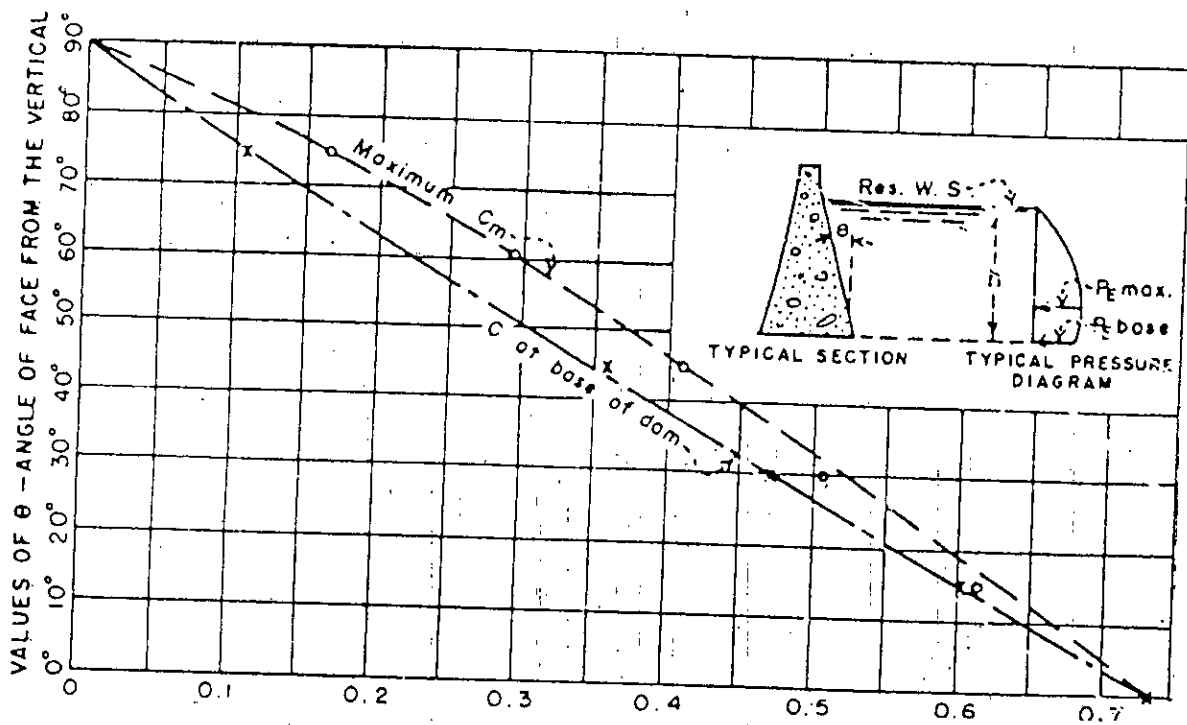


Fig. I.3.b Coefficient de pression maximale



Chapitre 2

Modélisation Mathématique

II-1 INTRODUCTION :

Le comportement d'un barrage en situation dynamique dépend essentiellement de :
L'interaction dynamique avec l'eau du réservoir, suite à une excitation sismique, les mouvements du sol et la déformation du barrage engendrent dans l'eau des ondes de pression qui contribuent en retour aux déformations de la structure et influencent ainsi la répartition du champ de pressions hydrodynamiques sur le parement amont.

Or la connaissance de ce champ de pressions hydrodynamiques et par conséquent du champs d'accélération qui en découlent est très important pour une analyse correcte de la réponse dynamique de l'ouvrage. On parle alors de couplage hydrodynamiques fluide - structure.

Le système couplé barrage - réservoir étant constitué par deux milieux continus à savoir :

- milieu I : Solide (Corps du barrage) .
- milieu II : Fluide (Réservoir) .

Ces deux derniers obéissent à la loi fondamentale de la dynamique .

II-2 LOI FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE :

L'énoncé classique de la loi de Newton se traduit par l'égalité des tenseurs des quantités d'accélération et celui des forces extérieures agissant sur une partie d'un système donné (solide - fluide) par conséquent pour un volume infinitésimale dv fig. (II.a), l'égalité des forces s'écrit :

$$\int_V \gamma \, dm = \int_V F_v \, dv + \int_S P(m, \vec{n}) \, ds \quad (\text{II.2.1})$$

avec :

- γ : Accélérations du volume dv .
- dm : La masse du volume dv .
- F_v : Forces volumiques.
- $P(m, \bar{n})$: Effort extérieur de cohésion.

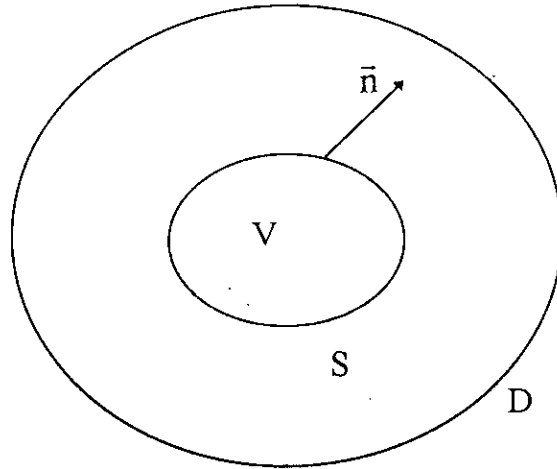


Fig. (II.a)

L'effort intérieur de cohésion s'exprime par la figure (II.b.1).

$$P(m, \bar{n}) = \sigma_{ij} \bar{n} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, 3 \\ j = 1, \dots, 3 \end{matrix} \quad (\text{II.2.2})$$

L'état de contrainte en un point du corps est défini par le tenseur de contrainte $[\sigma_{ij}]$, fig (II.b.2) tel que :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ou :} \quad \begin{matrix} \sigma_{12} = \sigma_{21} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \end{matrix}$$

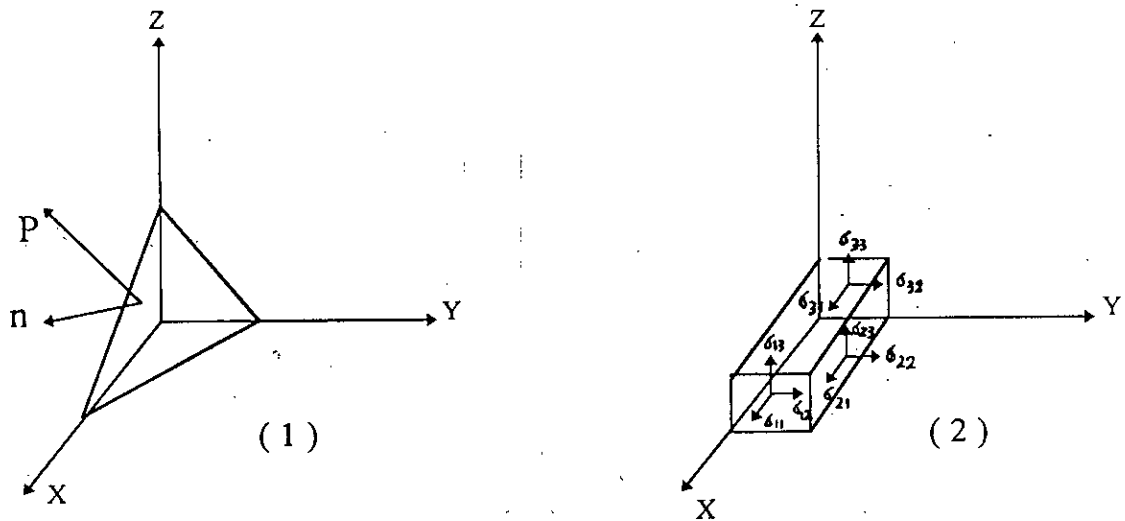


Fig. (II.b)

Donc l'équation (II.2.1) peut être écrite comme suit :

$$\int_V \gamma \rho \, dv = \int_S \sigma_{ij} n_j \, ds + \int_V F_v \, dv \quad (\text{II.2.3})$$

Ou encore :

$$-\int_V \gamma \rho \, dv + \int_V F_v \, dv + \int_V \sigma_{ij,j} \, dv = 0 \quad (\text{II.2.4})$$

et puisque

$$\int_V \phi \, dv = 0 \quad \forall v \in D$$

avec :

ϕ : Fonction quelconque

alors $\phi = 0$ dans D

L'équation du mouvement s'écrit alors sur x_i

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \gamma_i \quad (\text{II.2.5})$$

II-3 PARTIE SOLIDE :**II-3-1 Notion d'élasticité :**

La théorie de l'élasticité est une méthode directe de formulation des équations forces-déplacements. Pour un solide soumis à un chargement donné, cette théorie a pour but l'étude des contraintes et déformations qui en résultent avec pour hypothèse:

- Les déformations sont supposées petites.
- La loi de comportement reliant contraintes et déformations est linéaire.
- Le solide (barrage) est élastique, homogène et isotrope.

II-3-2 Equations gouvernantes :**II-3-2-1 Equations déformations - déplacement :**

L'état de déformation $[\varepsilon]$ tel que :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{avec :} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \end{array} \quad (\text{II.3.2.1.1})$$

Les relations déformations - déplacement pour la théorie linéaire sont :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad i = 1, \dots, 3; \quad j = 1, \dots, 3 \quad (\text{II.3.2.1.2})$$

avec :

u_i : Déplacement suivant la direction x_i .

II-3-2-2 Equations de compatibilité :

Il existe des relations qui expriment les restrictions sur la forme des déformations pour que le système d'équations soit intégrable. Ces conditions d'intégrabilité sont appelées conditions de compatibilité de déformations.

Elles sont exprimées par les relations suivantes :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} \right) \quad (\text{II.3.22.1})$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} \quad (\text{II.3.22.2})$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2}$$

avec : $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ pour $i \neq j$

II-3-2-3 Relation contraintes - déformations :

Les états de contraintes et de déformations sont reliés de la manière suivantes:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$$

qui s'écrit matriciellement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = [C] [\varepsilon] \quad (\text{II.3.2.3.1})$$

La matrice [C] étant symétrique, les coefficients C_{ij} sont des coefficients de réponse du matériau. Ils dépendent des propriétés de celui-ci par définition :

Un matériau isotrope est caractérisé par des propriétés élastiques inchangées dans toute les directions.

Les constantes élastiques sont alors réduites à deux constantes indépendantes dites coefficients de lame λ et μ . les relations contraintes - déformations, s'écrivent alors :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{II.32.3.2})$$

ou encore : $\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 1\mu \gamma_{ij}$

avec :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

(II.3.2.3.3)

avec :

E : Module de young (d'élasticité).

ν : Coefficient de poisson.

G : Module d'élasticité transversal (cisaillement).

II-3-3 Elasticite plane :

Les problèmes de la théorie d'élasticité sont simplifiés dans une large mesure lorsque les tensions ou les déformations sont toutes parallèles à un plan. On a donc affaire à des problèmes bidimensionnels.

II-3-3-1 Etat de contrainte plane :

Pour un matériau isotrope la loi de HOOKE donne :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu \frac{\sigma_{22}}{E} \\ \varepsilon_{22} &= -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\sigma_{22}}{E} \\ \varepsilon_{33} &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{12}\end{aligned}\tag{II.3.3.1}$$

D'ou l'on tire les relations contraintes – déformations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{33} \end{bmatrix}\tag{II.3.3.2}$$

II-3-3-2 Etat de déformation plane :

De la même manière qu'on contrainte plane on établie les relations contraintes- déformations en utilisant les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu \frac{\sigma_{33}}{E} \\ \varepsilon_{22} &= -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu \frac{\sigma_{33}}{E} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{12}\end{aligned}\tag{II.3.3.12}$$

Dont la contrainte σ_{33} peut être déterminée a partir de la loi de HOOKE :

$$\varepsilon_{33} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0 \quad (\text{II.3.3.2.2})$$

d'ou :

$$\sigma_{33} = \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (\text{II.3.3.2.3})$$

On obtient donc :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.3.2.4})$$

II-3-4 Formulation en déplacement des problèmes de l'elastodynamique :

Parfois pour résoudre certains problèmes particulier, il peut être utile de faire appel à des équations ne faisant intervenir que des déplacements.

l'élimination de ε_{ij} entre (II.3.2.1.2) et (II.3.2.3.2) conduit à :

$$\sigma_{ij} = \lambda (\bar{u}_{k,k}) \delta_{ij} + \mu (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \quad (\text{II.3.4.1})$$

si bien qu'en reportant ces équations dans l'équation d'équilibre (II.2.5) il vient :

$$\mu \bar{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \bar{u}_{j,ji} + f_i = \rho \bar{u}_i \quad (\text{II.3.4.2})$$

l'équation (II.3.4.2) peut être écrite sous forme vectorielle de la manière suivante :

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + f = \rho \ddot{\bar{u}} \quad (\text{II.3.4.3})$$

l'équation (II.3.4.3) est connue sous le nom de l'équation de lamé.

à l'équation (II.3.4.3) s'ajoutent les conditions initiales :

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{u}_0(x) \quad , \quad \dot{\bar{u}}(x, 0) = \bar{v}_0(x) \quad (\text{II.3.4.4})$$

et les conditions aux limites sur la frontière Γ .

Le vecteur traction $t_n(x,t)$ appliqué sur une facette de normale $n(x)$, s'exprime en fonction du vecteur déplacement par la relation : [Solomon]

$$t_{(n)} = \lambda \nabla \bar{u} n + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} + \mu n \wedge (\nabla \wedge \bar{u}) \quad (\text{II.3.4.5})$$

Dans tout notre travail on va considérer que les termes de " source " sont de nature harmonique, caractérisés par une pulsation ω . Il est alors intéressant de mettre les champs de déplacement sous la forme suivante :

$$\bar{u}(x,t) = u(x) e^{j\omega t} \quad (\text{II.3.4.6})$$

avec :

$$j^2 = -1$$

D'où l'équation (II.3.4.3) peut s'écrire comme suit :

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + f + \rho \omega^2 u = 0 \quad (\text{II.3.4.7})$$

II-4 PARTIE FLUIDE :

II-4-1 Hypothèse fondamentale du problème :

Assumons des a present les hypothèse suivantes :

- Les mouvements sismique de la structure et du fluide sont suffisamment petit pour permettre une description linéaire des phénomènes.
- Le fluide est considère sans écoulement permanent car ses effet n'interviennent pas sensiblement lors d'une analyse sismique.
- Le fluide est considère non visqueux, subit des faibles déplacements, et le reservoir est semi infini.

II-4-2 Equations gouvernantes :

Le tenseur de contraintes dans un fluide peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = - P_t \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{II.4.2.1})$$

avec :

P_t : Pression totale.

δ_{ij} : Symbole de kronecker.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

τ_{ij} : Contrainte de cisaillement

$$\tau_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.4.2.2})$$

où :

μ : Coefficient de viscosité dynamique.

ε_{ij} : Vitesse des déformations.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}) \quad (\text{II.4.2.3})$$

avec :

V_i : Vitesse du fluide dans la direction x_i .

Substituant les équations (II.4.2.1), (II.4.2.2), (II.4.2.3) dans l'équation (II.2.5) on aura :

$$-\frac{\partial P_t}{\partial x_i} + \mu (V_{i,j,j} + V_{j,i,i}) + F_i - \rho \gamma_i = 0 \quad (\text{II.4.2.4})$$

Soit en écriture condensée (les trois directions en même temps) :

$$-\nabla P_t + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{F} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (\text{II.4.2.5})$$

qui représente l'équation de Navier Stokes.

avec :

P_t : Pression totale.

\mathbf{V} : Vitesse linéaire.

μ : Viscosité dynamique du fluide.

\mathbf{F} : Force de volume.

ρ : Masse volumique du fluide.

Sachant que :

$$P_t = P_{st} + P_{hyd} \quad (\text{II.4.2.6})$$

où :

P_{st} : Pression statique.

P_{hyd} : Pression hydrodynamique.

en remplaçant l'équation (II.4.2.6) dans l'équation (II.4.2.5) on aura :

$$-\nabla(P_{st} + P_{hyd}) + \mu \nabla^2 v + F - \rho \frac{dv}{dt} = 0 \quad (\text{II.4.2.7})$$

a l'état inactif c. a. d. avant le début du tremblement de terre l'équation (II.4.2.7) se réduit :

$$F - \nabla P_{st} = 0 \quad (\text{II.4.2.8})$$

En remplaçant (II.4.2.8) dans (II.4.2.7) on aura :

$$-\nabla P_{hyd} + \mu \nabla^2 v - \rho \frac{dv}{dt} = 0 \quad (\text{II.4.2.9})$$

En divisant (II.4.2.9) par ρ on aura :

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P_{hyd} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v - \frac{dv}{dt} = 0 \quad (\text{II.4.2.10})$$

II-4-2-1 Cas où l'eau est considérée compressible :

l'équation (II.4.2.10) se réduit à :

$$\rho v = -\nabla P_{hyd} \quad (\text{II.4.2.1.1})$$

Puisque $\mu = 0 \Rightarrow \mu / \rho$ et les effets convectifs sont négligés $\nabla^2 v = 0$, l'application du principe de la conservation de la masse à un volume élémentaire de la cuve, permet d'écrire l'équation de continuité :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (\text{II.4.2.1.2})$$

et comme l'eau est considérée linéairement compressible c'est à dire suit la loi de Hooke :

$$d\rho = \frac{1}{k} \rho d\rho \quad (\text{II.4.2.1.3})$$

avec :

K : Module d'élasticité volumique

En remplaçant l'équation (II.4.2.1.3) dans l'équation (II.4.2.1.2) on aura :

$$\frac{\rho}{k} \dot{P} + \rho \nabla v = 0 \quad (\text{II.4.2.1.4})$$

qui représente l'équation de la pression dans le fluide.

multipliant l'équation (II.4.2.1.1) par ∇ et (II.4.2.1.4) par $\frac{\partial}{\partial t}$ on aura le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \rho \nabla \dot{V} + \nabla^2 P_{\text{hyd}} = 0 \\ \rho \nabla \dot{V} + \frac{\rho}{k} \ddot{P}_{\text{hyd}} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.4.2.1.5})$$

Et en faisant la soustraction des deux équations du système (II.4.2.1.5) on aura :

$$\nabla^2 P_{\text{hyd}} - \frac{1}{\left(\frac{\rho}{k}\right)^{-1}} \ddot{P}_{\text{hyd}} = 0$$

d'où

$$\nabla^2 P_{\text{hyd}} - \frac{1}{C^2} \ddot{P}_{\text{hyd}} = 0 \quad (\text{II.4.2.1.6})$$

l'équation (II.4.2.1.6) représente l'équation générale de propagation des ondes dans un milieu élastique compressible.

avec :

C : Représente la célérité (Vitesse des ondes dans l'eau) $C = 1440$ m/s.

II-4-2-2 Cas où l'eau est considérée incompressible :

Dans le cas où l'eau est considérée incompressible le module d'élasticité K tend vers zéro cela implique que C^2 tend vers l'infini d'où $\frac{1}{C^2} \ddot{P}_{\text{hyd}}$ tend vers 0.

Par conséquent l'équation (II.4.2.1.6) s'écrit comme suit :

$$\nabla^2 P_{\text{hyd}} = 0 \quad (\text{II.4.2.2.1})$$

L'équation (II.4.2.2.1) représente l'équation générale de propagation des ondes dans un milieu élastique incompressible.

II-4-3 Résolution des équations d'onde :**II-4-3-1 Cas où l'eau est considérée compressible :**

L'équation de propagation est :

$$\nabla^2 \bar{P} - \frac{1}{C^2} \ddot{\bar{P}} = 0 \quad (\text{II.4.3.1.1})$$

dans tous les cas qui vont suivre nous écrivons que :

$$\bar{P}_{\text{hyd}} = \bar{P} \quad (\text{pression hydrodynamique})$$

écrivants l'équation (II.4.3.1.1) en coordonnées cylindriques on aura :

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \theta^2} = \frac{1}{C^2} \ddot{\bar{P}}$$

comme notre fluide est considéré homogène et isotrope l'équation devient indépendante de θ on aura :

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} = \frac{1}{C^2} \ddot{\bar{P}}$$

posant $\bar{P} = P(r, \omega) e^{j\omega t}$; avec $j^2 = -1$.

ou :

$P(r, \omega)$: Amplitude d'onde.

ω : Pulsation d'onde.

on aura :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\omega^2}{C^2} P = 0$$

en posant : $\bar{K} = \omega/c$ et $Z = \bar{K} \cdot r$

on obtient :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial P}{\partial Z} + P = 0 \quad (\text{II.4.3.1.2})$$

Cette équation représente l'équation de Bessel d'ordre zéro.

Les solutions de cette équation de Bessel s'expriment par les fonctions de Bessel et de Newman d'ordre zéro $J_0(Z)$, $Y_0(Z)$

cela implique que :

$$P = C_1 j_0(Z) + j C_2 y_0(z) \quad (\text{II.4.3.1.3})$$

avec :

C_1 et C_2 sont des constantes.

Propriétés de y_0 et J_0

- Lorsque $r \rightarrow 0$ $\begin{cases} J_0 \approx 0 \\ y_0 \approx \infty \end{cases}$ *interprétation hydrodynamique ?*

- La dérivée de y_0 , J_0 :

$$J_0' = -J_1$$

$$y_0' = -y_1$$

avec :

J_1 : Fonction de Bessel d'ordre un.

y_1 : Fonction de Newmann d'ordre un.

II-4-3-2 cas où l'eau est considérée incompressible :

Dans le cas où l'eau est considérée incompressible l'équation de propagation est :

$$\nabla^2 \bar{P} = 0$$

Pour un milieu isotrope homogène l'équation précédente s'écrit en coordonnées cylindrique comme suit :

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} = 0$$

En nous bornant à l'étude des mouvement sinusoïdaux de forme : $\bar{P} = P(w,r) e^{j\omega t}$

nous aurons :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (\text{II.4.3.2.1})$$

la solution générale de ce type équation s'écrit :

$$P = C_1 \log\left(\frac{1}{r}\right) + C_2 \quad (\text{II.4.3.2.2})$$

avec :

C_1, C_2 : Sont des constantes.

II-5 CONDITIONS AUX LIMITES :

a/ Pour la structure :

* Le long de la fondation :

A fin de simplifier l'interaction sol - structure, on suppose une liaison parfaite entre le corps du barrage et le sol de fondation, donc les déplacements relatifs le long de la fondation seront considérés nuls

$$\bar{U}(x, y, t) = 0$$

d'où:

$$U(x, y) = 0$$

* Le long du parement amonts :

C'est la zone interface où se fait l'interaction fluide - structure donc l'écran sera influencé par la présence de l'eau, d'où le chargement considère le long du parement amont étant la pression hydrodynamique :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial n}(St) = -\bar{P}(x, h, t)$$

d'où:

$$\sigma = \frac{\partial U}{\partial n} = -P(x, h)$$

avec :

h : La hauteur/maximale fig. (II.5.a)

S : La coordonnée curviligne le long du parement amont.

* Sur le reste du contour :

Le barrage est considéré libre sur tout le reste du contour d'où on a :

$$\sigma = 0.$$

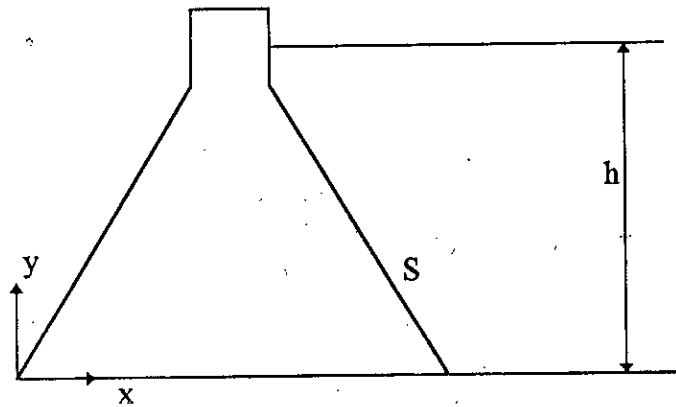


fig. (II.5.a)

b/ Pour le fluide :

* Le long de la surface libre :

Comme l'effet des ondes de surface est négligeable, cela implique que la pression hydrodynamique est nulle le long de la surface libre :

$$\bar{P}(x, H, t) = 0$$

d'où :

$$P(x, H) = 0$$

avec :

h : Est la hauteur maximale Fig. (II.5.b)

Si le barrage est considéré flexible la condition au limite s'exprime par

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial n}(St) = -\rho \ddot{u}_n e^{j\omega t}$$

avec :

\ddot{u}_n : La composante de l'accélération selon la normale \vec{n} du point considéré

d'où

$$q = \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \ddot{u}_n$$

Quand l'excitation est causé epar un seisme horizontale

$$\ddot{u}_n = -\cos(\alpha) \ddot{u}$$

d'où:

$$q = \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho \cos(\alpha) \ddot{u}$$

Quand l'excitation est causée par un séisme verticale:

$$q = \frac{\partial P}{\partial n} = \rho \sin(\alpha) \ddot{u}$$

* Le long du parement amont du barrage :

Si on considère que la fréquence du séisme est petite devant la fréquence propre du barrage cela implique que le barrage est considéré rigide et se déplace avec le fond de la retenue.

La condition au limite s'exprime par :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial n}(St) = -\rho \bar{a} \bar{n} e^{j\omega t}$$

d'où:

$$q = \frac{\partial P}{\partial n} = -\rho a_n$$

avec :

a_n : L'accélération du séisme.

Quand l'excitation est causée par un séisme horizontal

$$a_n = -\cos(\alpha). a$$

avec :

α : Etant l'angle entre le parement et la verticale.

d'où :

$$q = \frac{\partial P}{\partial n} = \rho a \cos(\alpha)$$

Quand l'excitation est causée par un séisme verticale:

$$q = \frac{\partial P}{\partial n} = \rho a \sin(\alpha)$$

** Le long du fond de la retenue :*

La condition au limite doit tenir compte de l'effet d'amortissement du sol qui provoque une absorption partielle des ondes de pression incidentes la condition au limite s'exprime par :

$$q = \frac{\partial P}{\partial n}(S', w) = -\rho a_n - jw C_a P(S', w)$$

avec :

S' : La coordonnée curviligne du fond.

C_a : Coefficient d'amortissement du sol.

W : Impulsion (fréquence) de l'excitation sismique.

La partie imaginaire de l'équation précédente représente le terme d'amortissement. Pour une fondation rigide $C_a = 0$ il y'aura une réflexion total des ondes.

Pour une excitation sismique horizontale :

$$a_n = a \sin(\beta')$$

Pour une excitation sismique verticale :

$$a_n = -a \cos(\beta')$$

avec :

β' : Etant l'angle entre le fond et l'horizontale.

** Le long de la limite du réservoir :*

Cette limite est définie après une certaine distance du parement amont au delà duquel il n'y a pas plus une réflexion d'ondes.

La condition au limite s' s'exprime par :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0$$

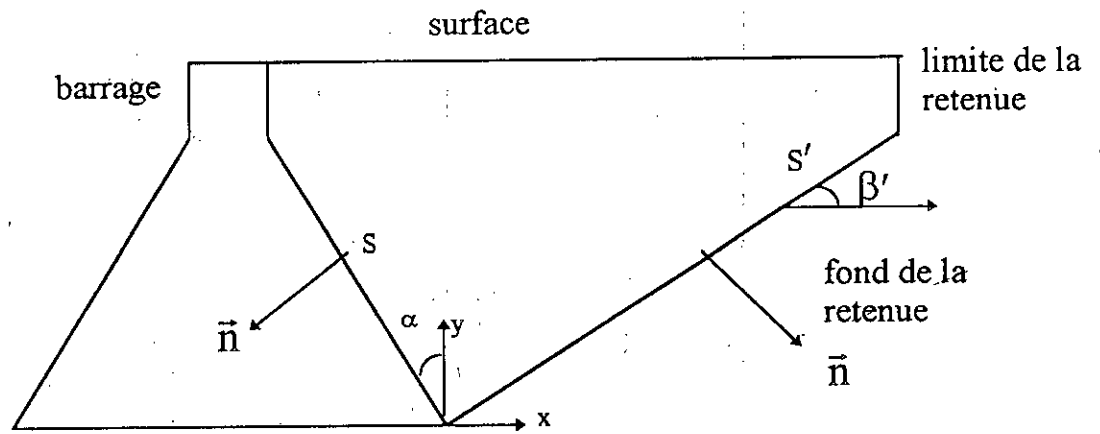
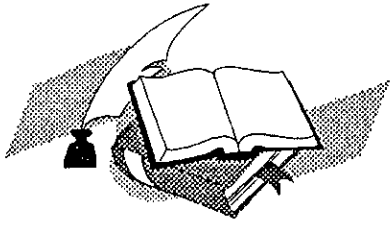


Fig. (II.5.b)



Chapitre 3

Méthode des résidus pondérés

III-1 INTRODUCTION :

Dans le cas où il devient difficile de déterminer la solution analytique d'un problème par le biais d'une résolution mathématique du système d'équations différentielles, Régissant le comportement du système physique, on fait recours à des techniques numériques basées sur des méthodes d'approximation.

III-2 METHODE DES RESIDUS PONDERES :

Les méthodes des résidus pondérés permettent, en utilisant des fonctions de pondérations, de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles, à une formulation intégrale.

Soit à résoudre le problème aux limites gouverné par l'équation aux dérivées partielles:

$$L(u_0) = b \quad \text{dans } \Omega$$

avec les conditions aux limites associées :

- Essentielles : $S(u_0) = s$ sur Γ_1
- Naturelles : $G(u_0) = g$ sur Γ_2

avec :

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$: Etant la frontière du domaine.

u_0 : Représente la solution exacte du problème.

Soit U l'approximation de U_0 qui s'écrit comme suit :

$$U = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$$

avec :

ϕ_k : Représente des fonctions d'approximation linéairement indépendantes.

On définit alors une fonction erreur appelé aussi résidu par la relation suivante :

$$R = L(u) - b = L\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k\right) - b \quad \text{sur } \Omega.$$

Si la fonction u ne satisfait pas toutes les conditions aux frontières, deux autres fonctions d'erreur sont à envisager :

a- Erreur sur les conditions essentielles (pression) :

$$R_1 = S(u) - s \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

b- Erreur sur les conditions naturelles (gradient de pression) :

$$R_2 = G(u) - g \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

Notre but est de minimiser l'erreur sur le domaine Ω et sa frontière Γ , on de définit alors les fonctions de pondération ψ_i et $\bar{\psi}_i$ appartenant a un espace linéairement indépendant on écrit alors :

$$\int_{\Omega} R \psi_i \, d\Omega + \int_{\Gamma} R' \bar{\psi}_i \, d\Gamma = 0$$

avec :

R' : Représente l'erreur sur la frontière Γ .

Cette dernière équation est équivalente a la satisfaction des équations différentielles et de leurs conditions aux frontière.

Selon la distribution de l'erreur, on définit des méthodes d'approximation différentes.

III-2-1 Méthode des moments :

La fonction ψ_i de pondération du résidu est telle que :

$$\psi_i = X_j \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_{\Omega} (L(u) - b) \psi_i \, d\Omega = \int_{\Omega} (L(u) - b) x_j \, d\Omega = 0$$

On suppose que u satisfait toutes les conditions aux frontières :

$$R1 = S(u) - s = 0$$

$$R2 = G(u) - g = 0$$

III-2-2 Méthode de collocation par points :

Dans cette méthode, on essaye de satisfaire les équations gouvernantes, en une série de points du domaine appelés points de collocation.

On a :

$$U = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$$

Le nombre de points de collocation est égale au nombre de paramètres α_k les fonctions de pondération ψ_i dans ce cas sont des fonctions DELTA DIRAK dont les propriétés sont les suivantes.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_i - \varepsilon}^{x_i + \varepsilon} \Delta(x_i) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \Delta(x_i) dx = f(x_i)$$

avec :

f : Etant la valeur de la fonction au point « i ».

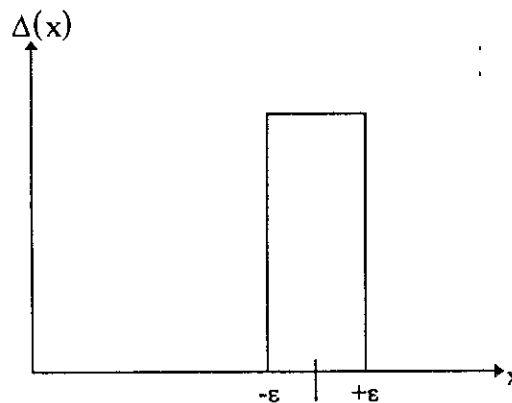


Fig. (III.a)

La distribution de l'erreur s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} (L(u) - b) \Delta_i \, d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

avec :

Δ_i : Représente la fonction DELTA Dirak au point de collocation « i », ce qui revient à poser :

$$R = L(u) - b = 0 \text{ en } n \text{ points du domaine.}$$

On détermine ainsi les différentes valeurs des paramètres α_k .

III-2-3 Méthode de collocation par sous domaines :

Cette méthode est similaire à la méthode de collocation par point, la fonction de pondération du résidu est telle que :

$$\Psi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega_i \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega_i \end{cases}$$

avec :

Ω_i : Etant des sous domaines de Ω .

On aura donc n équations de la forme :

$$\int_{\Omega_i} (L(u) - b) \, d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

L'intégrale de la fonction erreur est nulle sur les différentes régions Ω_i du domaine Ω .

III-2-4 Méthode de galerkine :

Contrairement aux autres méthodes de résidus pondérés, dans cette méthode les fonctions de pondérations du résidus sont les même que celles d'approximation de la fonction u, autrement dit :

$$\psi_i = \phi_i$$

On écrira donc :

$$\int_{\Omega} (L(u) - b) \psi_i \, d\Omega = \int_{\Omega} (L(u) - b) \phi_i \, d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

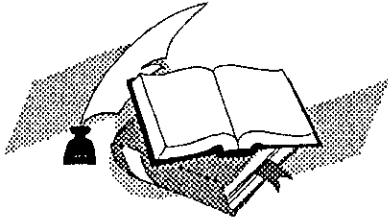
Etant donné que $U = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$

on peut définir une série de coefficients arbitraires telles que :

$$\delta u = \delta \alpha_1 \phi_1 + \delta \alpha_2 \phi_2 + \dots + \delta \alpha_n \phi_n$$

On écrit alors :

$$\int_{\Omega} (L(u) - b) \delta u \, d\Omega = 0$$



Chapitre 4

*Concepts de base et
représentation de la méthode
des équations intégrales
aux frontières*

IV-1 INTRODUCTION :

En physique, on s'intéresse forcément à ce qui se passe dans un domaine D , limité par une surface S s'appuyant sur un contour C .

En appliquant au problème considéré les principes généraux de la physique, on établit des équations, aux mieux différentielles, souvent aux dérivées partielles. Leur intégration comporte toujours des conditions aux limites, l'équation ainsi établie, sera dite équation gouvernante, elle concerne essentiellement le domaine. Sa solution est dite solution fondamentale.

Cette équation tenant compte des conditions aux limites, donnera les lois de comportement des fonctions à l'intérieur du domaine et sur ses limites (frontière).

Les solutions analytiques sont très délicates à obtenir. Ainsi les ingénieurs ont-ils cherchés des méthodes purement numériques : différences finies puis éléments finis. leur inconvénient est de devoir traiter dans de nombreux cas, des problèmes à trois dimensions, ce qui exige souvent de grandes capacités de mémoire des ordinateurs. La méthode des équations intégrales aux frontières permet de réduire ces problèmes à deux dimensions.

IV-2 HISTORIQUE :

Alors que les propriétés majeures, des équations différentielles ont été établies au 19^{ème} siècle, le premier à avoir étudié les équations intégrales aux frontières est FREDHOLM (1905) puis SMIRNOV (1929), VOLTERA (1959), MIKHLIN (1957 et 1967) et d'autres.

Les premières publications sur le traitement numérique de l'équation de la place sont celles de SYM (1963), JAWSON et POINTER (1963).

C'est à RIZZO (1967) que revient les premières approches numériques de l'élasticité par la méthode directe. CRUSE (1969) étant le procède aux domaines tridimensionnels. WOOD (1975) a établie une approche par éléments aux frontières pour la prédiction des tassements des structures.

En ce qui concerne l'application de la méthode pour l'analyse des pressions hydrodynamiques dans les barrages, HUMAR et HANNA (1982) ont appliqués la méthode en considérant un réservoir infini et un écoulement bidimensionnel. III (1986) a étudié le problème pour les barrages rigides dans le cas des écoulements potentiels bidimensionnels.

TSEE et LEE (1987) ont appliqués la méthode pour d'analyse en tridimensionnel des pressions hydrodynamiques sur les barrages. HUMMAR et JABLONSKI (1988) ont étudiés le problème en bidimensionnel et tridimensionnel avec la méthode des équations intégrales aux frontières associée à la méthode des élément finis.

IV-3 PHILOSOPHIE DE LA METHODE :

Le principe de la méthode des équations intégrales aux frontières consiste à transformer les équations d'évolution des phénomènes considérés (équations aux dérivées partielles dans le domaines et des conditions aux limite sur la frontières) en équations intégrales liants des fonctions connues et inconnues sur la frontières du domaine exclusivement. On a aussi une diminution de la dimension de l'espace ou l'on résoud les équations, puis qu'on remplace un problème bidimensionnel; par exemple un par un problème posé uniquement sur la frontière. La résolution ou le traitement numérique en sont grandement simplifiés.

IV-4 FORMULATION DE L'EQUATION INTEGRALE :

Actuellement, le principe des travaux virtuels est bien connu et très répondu. Il est souvent formulé en terme d'égalité des travaux effectués par les forces extérieures et intérieures lors d'un déplacement virtuel quelconque. Ce concept est essentiel pour la résolution des équations aux dérivées partielles. En effet, les déplacements sont remplacés par une fonction arbitraire continue sur le domaine (fonction de pondération voir chapitre III) et l'équation est réécrite sous forme intégrale.

Considérons un phénomène classique défini dans un domaine Ω limité par une frontière Γ comme le montre la figure (IV.4.a), et régi par l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$L(u) = 0 \quad (IV.4.1)$$

avec :

L : Operateur différentiel.

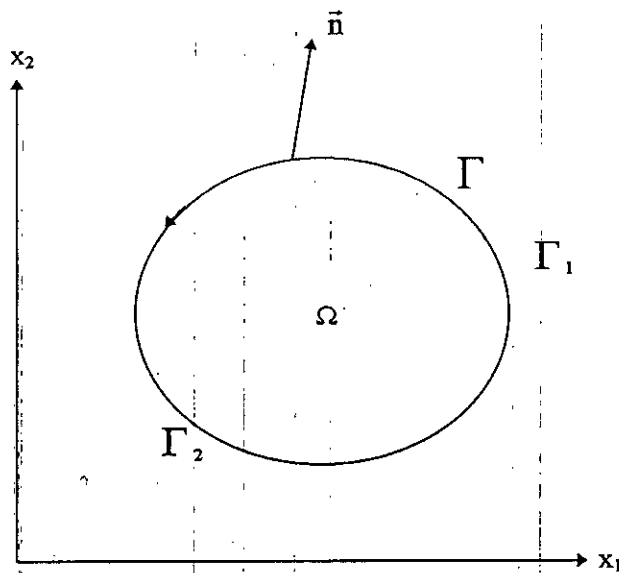


Fig. (IV.4.a)

Les conditions aux limites du problème sont :

- Conditions essentielles :

$$U = \bar{U} \quad \text{sur } \Gamma_1$$

- Conditions naturelles :

$$Q = \frac{\partial U}{\partial n} = \bar{Q} \quad \text{sur } \Gamma_2$$

avec : $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

Et \bar{n} est la normale sortante de la frontière. bien entendu la fonction U peut être un scalaire (température, pression, ... etc.) ou un vecteur (déplacement). L'équation intégrale associée a l'équation (IV.4.1) s'écrit :

$$\int_{\Omega} L(U) \cdot U^* \, d\Omega = 0 \quad \text{(IV.4.2)}$$

avec :

U^* : Est une fonction de pondération qui permet de diminuer l'erreur .

Cette équation est appelée forme intégrale forte de l'équation différentielle. Elle est analogue à l'expression des travaux virtuels. Dans toute notre étude nous considérons un cas particulier où le domaine Ω est bidimensionnel et L est l'opérateur de Laplace ou de d'Alembert avec :

1)- Opérateur de laplace :

$$L(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}$$

2)- Opérateur de d'alembert :

$$L(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \alpha^2 U$$

avec :

α : Est une constante réelle.

3)- Opérateur d'élasticité :

$$L(U) = \mu \nabla^2 U + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot U) + \rho \omega^2 U$$

L'application du théorème de Green (Annexe 1) permet d'écrire la formulation intégrale (IV.4.2) sous la forme :

$$\int_{\Omega} L(U) U^* d\Omega = \int_{\Omega} L(U^*) U d\Omega + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} U^* - \frac{\partial u^*}{\partial n} U \right) d\Gamma = 0$$

D'où :

$$\int_{\Omega} L(U^*) U d\Omega = \int_{\Gamma} Q^* U d\Gamma + \int_{\Gamma} Q U^* d\Gamma \quad (IV.4.3)$$

IV-4-1 Solution fondamentale :

Les fonctions Delta de Dirac sont souvent employées pour représenter les excitations uniques concentrées intervenant dans les équations différentielles, car elle donnent simplement une valeur en un point quand on intègre sur tout le domaine pour cela la fonction de pondération doit satisfaire l'équation suivante :

$$L(U^*) + \Delta^i = 0 \quad (IV.4.1.1)$$

avec :

Δ^i : Représente la fonction Delta de Dirac.

Substituant maintenant l'équation (IV.4.1.1) dans l'équation (IV.4.3) on aura :

$$\int_{\Omega} \Delta^i U d\Omega = \int_{\Gamma} Q_i^* U d\Gamma + \int_{\Gamma} Q U_i^* d\Gamma \quad (IV.4.1.2)$$

en appliquant les propriétés de la fonction Delta de Dirac (Voir Ch III) à l'équation (IV.4.1.2) on aura :

$$U_i + \int_{\Gamma} Q_i^* U \, d\Gamma - \int_{\Gamma} Q U_i^* \, d\Gamma = 0 \quad (\text{IV.4.1.3})$$

avec :

U_i : Est la valeur de la fonction au point « i » d'application de l'excitation unitaire.

L'équation (IV.4.1.3) est dite équation intégrale associée à l'équation (IV.4.1).

IV-4-2 Equation intégrale aux frontières:

L'équation (IV.4.1.3) est valable pour un point « i » situé à l'intérieur du domaine puisque les inconnues dans les points internes du domaine ne peuvent être déterminées que si les inconnues sur la frontière sont connues, il est donc intéressant d'examiner la forme limite de l'équation (IV.4.1.3) dans le cas où le point source « i » appartient à la frontière Γ du domaine. Quand « i » est pris sur la frontière, l'intégrale aura une singularité. Pour résoudre ce problème on procède comme suit :

- Si le point « i » appartient à une frontière régulière (lisse), on suppose que le domaine Ω est augmenté d'un secteur de disque centré au point « i » et de rayon ϵ tendant vers zéro comme le montre la figure (IV.4.b).

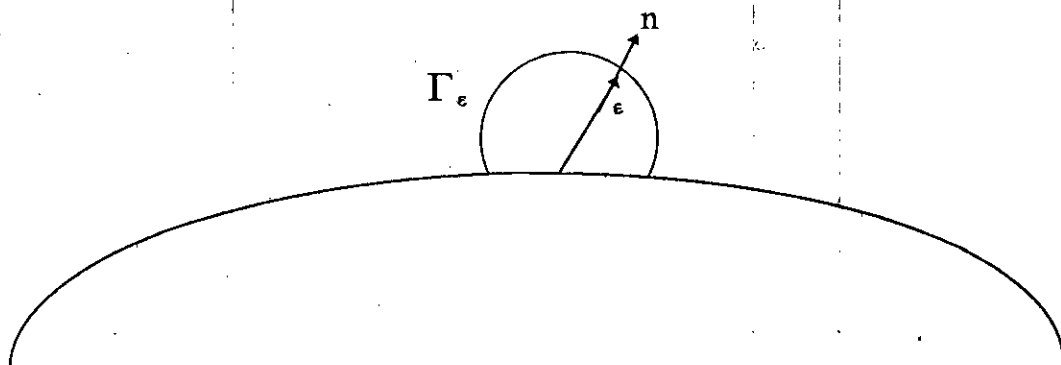


Fig. (IV.4.b)

- Lorsque le point « i » est localisé dans une surface non lisse de la frontière (coin), on suppose que le domaine est augmenté d'une région circulaire centré au point « i » et de rayon ε tendant vers 0. La frontière du domaine augmente de Γ_ε avec $\Gamma_\varepsilon = \theta\varepsilon$, ou θ est l'angle extérieur au niveau du coin exprimé en radian comme le montre la figure (IV.4.c).

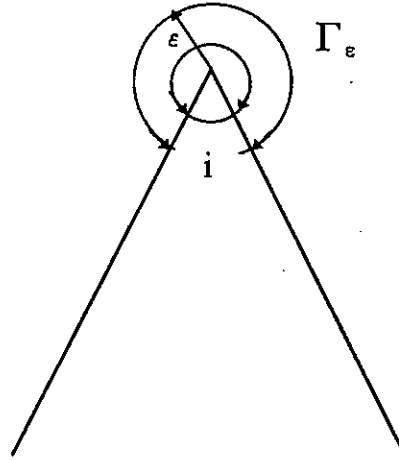


Fig. (IV.4.c)

Dans ce cas l'équation (IV.4.1.3) peut s'écrire :

$$U_i = \int_{\Gamma} U^* Q \, d\Gamma - \int_{\Gamma} Q^* U \, d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} U^* Q \, d\Gamma_\varepsilon - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} Q^* U \, d\Gamma_\varepsilon \quad (\text{IV.4.2.1})$$

On démontrera dans le prochain chapitre que l'équation (IV.4.2.1) prend la forme générale suivante (après calcul des limites) :

$$C_i U_i = \int_{\Gamma} Q U^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma} Q^* U \, d\Gamma \quad (\text{IV.4.2.2})$$

Où C_i est un coefficient qui dépend de la position du point « i » (à l'intérieur du domaine, sur la frontière) et de la géométrie de la frontière au niveau du point « i » (coin lisse).

IV-5 DISCRETISATION DE L'ÉQUATION INTEGRALE AUX FRONTIÈRES :

La résolution analytique de l'équation (IV.4.2.2) est difficile à mener, il a été montré qu'une telle résolution ne peut être adoptée que si les problèmes étudiés présentent une géométrie et des conditions aux frontières très simples, cependant, les problèmes rencontrés en pratique sont plutôt complexes. C'est pour cette raison, la méthode des éléments de frontière utilise une approche numérique pour la résolution de l'équation (IV.4.2.2); Cette approche consiste à diviser la frontière en une série d'éléments sur lesquels la fonction U et sa dérivée Q sont supposées varier selon un choix appropriés des fonctions d'interpolation ce qui permet d'écrire pour chaque élément :

$$U = \sum_{k=1}^l \phi_k U_k = \langle \phi \rangle \{ U \}$$

$$Q = \sum_{k=1}^l \phi_k Q_k = \langle \phi \rangle \{ Q \}$$

avec :

l : Nombre de points nodaux dans l'élément.

ϕ : Fonction de forme.

U_k et Q_k : Les valeurs de U et Q au nœud k .

Pour chaque nœud, l'équation (IV.4.2.2) s'écrit après discrétisation :

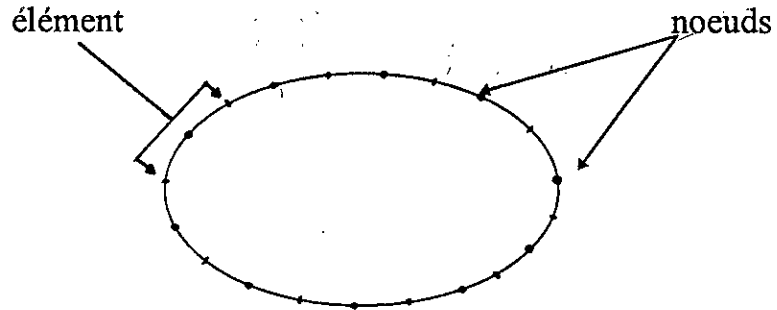
$$C_i U_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} Q^* d\Gamma \right) U_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} U^* d\Gamma \right) Q_j$$

$$\Rightarrow C_i U_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \langle \phi \rangle \{ U \} Q^* d\Gamma_j \right) = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} \langle \phi \rangle \{ Q \} U^* d\Gamma_j \right) \quad (\text{IV-5-1})$$

IV-5-1 FONCTION D'INTERPOLATION :

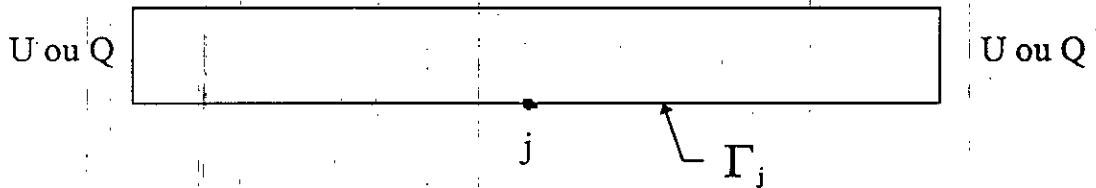
IV-5-1-1 Eléments constants :

Les noeuds se trouvent au milieu de chaque élément comme le montre la figure(IV.5.a) :



Elément constant **Fig. (IV.5.a)**

Sur chaque élément, on suppose une variation constante de U et sa dérivée Q comme le montre la figure (IV.5.b) :



Variation constante **Fig. (IV.5.b)**

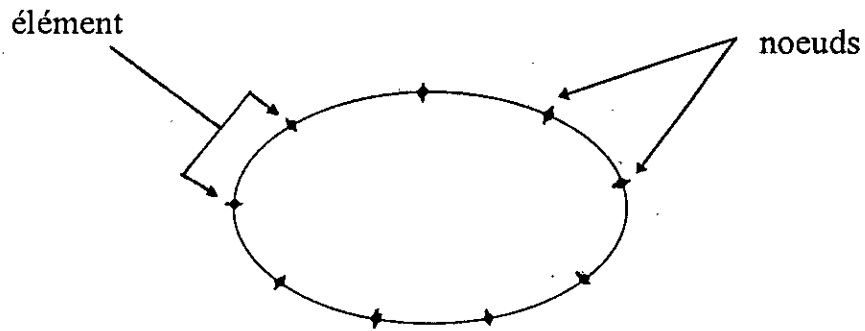
La fonction de forme correspondante est telle que :

$$\phi = 1 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} U = U_j \\ Q = Q_j \end{cases}$$

en tout point de l'élément de fonction Γ_j .

IV-5-1-2 Elément linéaires (1^{er} ordre) :

Les noeuds se trouvent à l'intersection de deux éléments adjacentes comme le montre la figure (IV.5.C) :

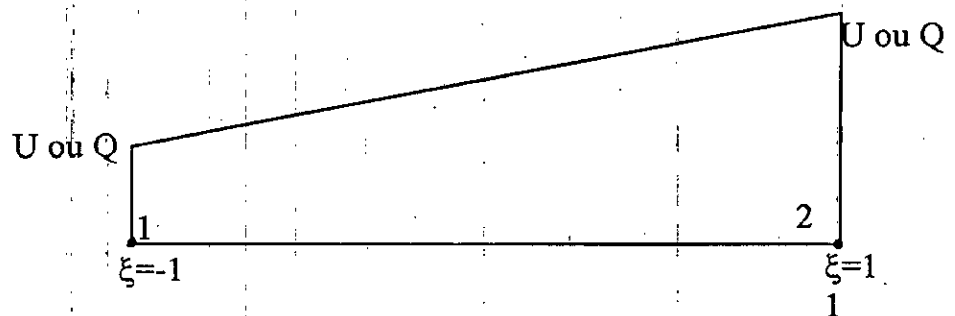


Elément linéaire **Fig. (IV.5.c)**

La variation des fonctions u et Q sur un élément est linéaire fig (IV.5.d). Les valeurs de U et Q en un point quelconque de l'élément sont définies en fonction des valeurs nodales et des fonctions d'interpolation ϕ_1 et ϕ_2 telle que :

$$U = \phi_1 U_1 + \phi_2 U_2 = [\phi_1, \phi_2] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

$$Q = \phi_1 Q_1 + \phi_2 Q_2 = [\phi_1, \phi_2] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$



Variation linéaire **Fig. (IV.5.d)**

La coordonnée a dimensionnelle ξ est définie par :

$$\xi = \frac{X}{\left(\frac{L}{2}\right)} \text{ et } \phi_1 \text{ et } \phi_2 \text{ sont donnée par :}$$

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \phi_2 = \frac{1}{2}(1+\xi) \end{cases}$$

Voir figure (IV.5.E) :

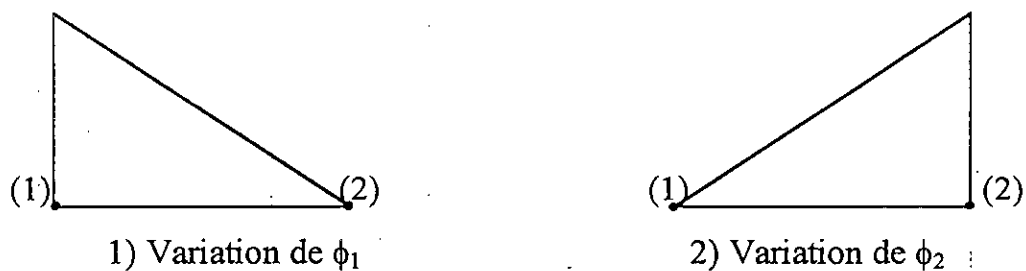
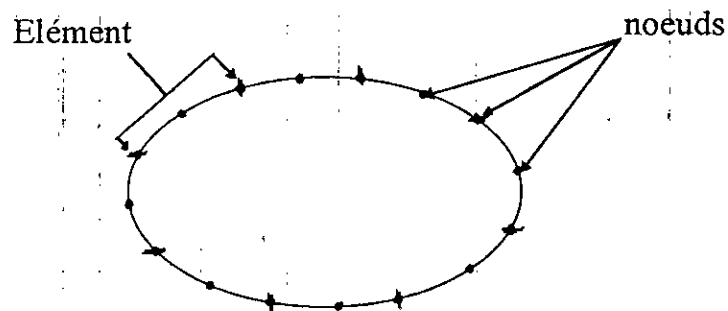


Fig. (IV.5.e)

IV-5-1-3 Elément quadratiques (2ème ordre) :

Chaque élément possède 3 noeuds : à l'origine, au milieu et à l'extrémité comme le montre la figure (IV.5.F) :



Elément quadratique **Fig. (IV.5.f)**

La variation de U et Q sur un élément est parabolique. Les fonctions U et Q sont exprimées moyennant des fonctions de forme comme suit Fig. (IV.5.G).

$$U = \phi_1 U_1 + \phi_2 U_2 + \phi_3 U_3 = [\phi_1, \phi_2, \phi_3] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

$$Q = \phi_1 Q_1 + \phi_2 Q_2 + \phi_3 Q_3 = [\phi_1, \phi_2, \phi_3] \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{2} \xi (1 - \xi) \\ \phi_2 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \\ \phi_3 = (1 - \xi)(1 + \xi) \end{cases}$$

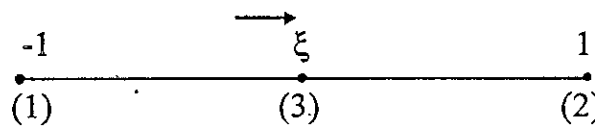


Fig. (IV.5.G)

La figure (IV.5.H) montre la variation des fonctions ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 en fonction de ξ .

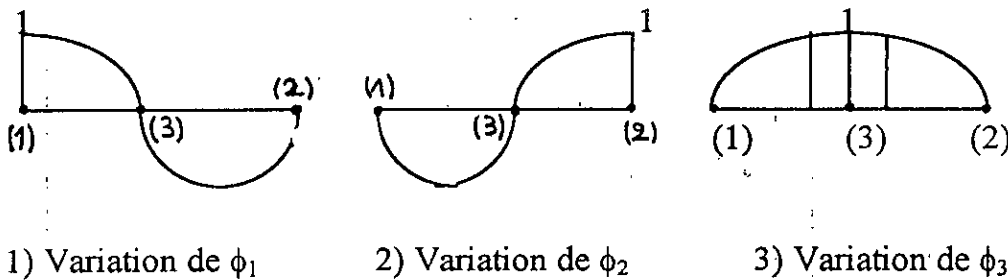


Fig. (IV.5.H) Variation des fonctions de forme ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3

IV-6 FORMATION DU SYSTEME D'EQUATION :

On remarque que l'équation (IV.5.1) contient deux types d'intégrales qui doivent être évaluées sur chaque élément et par conséquent pour chaque noeud :

$$\int_{\Gamma_j} \langle \phi \rangle \{ U \} Q_i^* d\Gamma_j$$

$$\int_{\Gamma_j} \langle \phi \rangle \{ Q \} U_i^* d\Gamma_j$$

Introduisons les notations suivantes :

$$H_{ij} = C_i + \hat{H}_{ij} = C_i + \int_{\Gamma_j} \langle \phi \rangle Q_i^* d\Gamma_j \quad \text{Pour } i = j$$

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \langle \phi \rangle Q_i^* d\Gamma_j \quad \text{Pour } i \neq j$$

Par conséquent l'équation (IV.5.1) peut être s'écrire :

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} U_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} Q_j \quad (IV.6.1)$$

avec :

n : Nombre de noeud.

Cette équation peut être écrite matriciellement sous la forme suivantes :

$$H U = G Q \quad (IV.6.2)$$

Après introduction des conditions aux limites (conditions essentielles, conditions naturelles) et après réarrangement de ce système on aura un système sous la forme :

$A X = F$ (IV.6.3) qui peut être résolu par une méthode numérique (élimination de Gauss, Pivotation, etc.).

avec :

X : Vecteur des inconnues du problème contenant U et Q.

A : Matrice contenant les coefficients H_{ij} et G_{ij} correspondant aux inconnues du problème.

F : Vecteur contenant les connues du problème avec leur H_{ij} et G_{ij} correspondant.

IV-7 PROBLEME DE COIN :

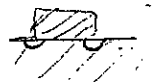
Pour un problème quelconque la fonction U à une valeur unique en un point quelconque du domaine, alors que la fonction Q qui est une dérivée par rapport à la normale du point considéré du domaine peut avoir 2 valeurs au coin. Ce qui rend impossible de résoudre le système (IV.6.2) directement dans ce cas pareil on peut avoir 4 types de conditions aux limites dans un coin.

- a)
 - Valeurs connues: La dérivée de la fonction U avant et après le noeud du coin.
 - Valeurs inconnues : La fonction U.

- b)
 - Valeurs connues : La fonction U et sa dérivée avant le noeud du coin.
 - Valeurs inconnues : La dérivée de U après le noeud du coin.

- c)
 - Valeurs connues : La fonction U et sa dérivée après le noeud du coin.
 - Valeurs inconnues : La dérivée de U avant le noeud du coin.

- d)
 - Valeurs connues : La fonction U.
 - Valeurs inconnues : La dérivée avant et après le noeud du coin.



Pour les trois premiers cas le système (IV.6.3) peut être résolu par le concept du double noeuds par contre pour le dernier cas le système (IV.6.3) ne peut pas être résolu que par le concept du noeud unique.

IV-7-1 Concept du noeud unique :

Une procédure de traiter le problème lorsque seulement les fonctions U sont prescrits aux coins, consiste à supposer que les multivaleurs de la dérivée par rapport à la normale des fonctions U (inconnues) au niveau du coin considéré sont égale.

IV-7-2 Concept du double noeuds :

Dans notre étude nous avons adopté une autre procédure pour contourner le problème posé par les coins. Procédure développée par Brebbia (1984). Elle consiste non seulement à dédoubler le noeud (coin) mais à considérer un segment de longueur L_j reliant les deux noeuds (Voir figure (IV.7.a)) (après dédoublement) ceci permet de traiter le problème comme si que le problème de coin n'existe plus.

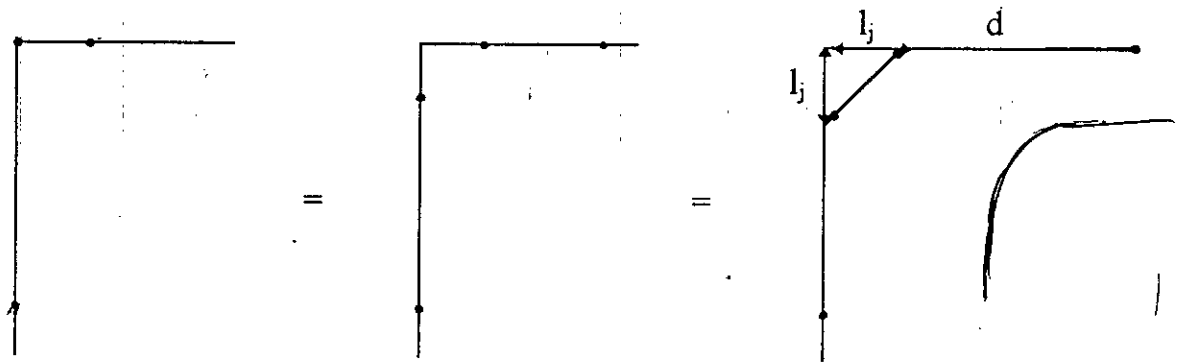


Fig. (VI.7.a) Dédoublement plus segment supplémentaire

IV-8 COMBINAISON DES REGIONS :

De nombreuses applications pratique nécessitent une division d'un système donné en plusieurs régions. Cela est due à la non homogénéité du système.

Considérant maintenant le cas d'un problème bidimensionnel divisé en deux régions différentes comme le montre la figure (IV.8.a) désignant par Γ_1 l'interface entre les deux milieux et 1, 2 les deux régions différentes.

Faisant une analyse des deux milieux séparément :

Milieu (1) :

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_1^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_1^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & G_1^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_1^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.8.1})$$

avec :

U^1 et Q^1 : La variable considérée et sa dérivée a la frontière de la région 1.

U_1^1 et Q_1^1 : La variable considérée et sa dérivée à l'interface Γ_1 .

Milieu (2) :

$$\begin{bmatrix} H^2 & H_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^2 \\ U_1^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^2 & G_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^2 \\ Q_1^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.8.2})$$

avec :

U^2 et Q^2 : La variable considérée et sa dérivée a la frontière de la région 2.

U_1^2 et Q_1^2 : La variable considérée et sa dérivée à l'interface Γ_1 .

Si nous appelons U_I et Q_I la variable et sa dérivée a l'interface Γ_1 , nous pouvons écrire les conditions suivante :

$$U_I = U_1^1 = U_1^2 \quad (\text{IV.8.3})$$

$$Q_I = Q_1^1 = -Q_1^2$$

Par conséquent l'équation (IV.8.1) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_1^1 - G_1^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U_I \end{Bmatrix} = G^1 Q^1 \quad (\text{IV.8.4})$$

de la même manière pour l'équation (IV.8.2) on aura :

$$\begin{bmatrix} H^2 & H_1^2 - G_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^2 \\ U_I \end{Bmatrix} = G^2 Q^2 \quad (\text{IV.8.5})$$

en couplant les équations (IV.8.4) et (IV.8.5) on aura :

$$\begin{bmatrix} H^1 & H_1^1 & -G_1^1 & 0 \\ 0 & H_1^2 & G_1^2 & H^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1 \\ Q_1 \\ U^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & G^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

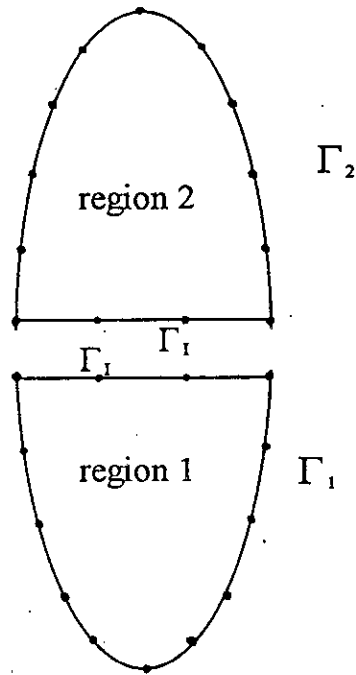
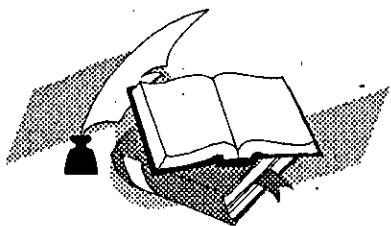


Fig. (IV.8.a)



Chapitre 5

*Application de la méthode
des équations intégrales
aux frontières au
problème étudié*

V-1 INTRODUCTION :

Ce chapitre comporte deux parties:

* La première partie consiste à l'utilisation des équations intégrales aux frontières pour le milieu fluide (réservoir) afin d'obtenir un système d'équations permettant, après résolution, de déterminer les pressions hydrodynamiques qui s'exercent sur le parement amont d'un barrage rigide, ainsi qu'à l'intérieur d'un réservoir.

Pour voir l'influence de la compressibilité de l'eau sur les résultats, on considère en premier lieu l'eau incompressible puis compressible.

* La deuxième partie consiste à compléter la précédente, en utilisant la méthode des équations intégrales aux frontières pour le milieu solide (barrage) tout en considérant un barrage flexible, puis on fera un couplage entre les deux milieux (fluide - solide) afin d'obtenir un système d'équations, permettant après résolution, les pressions hydrodynamiques et les déplacements à l'interface, mais seulement dans notre étude le système obtenu ne sera pas résolu.

Cette dernière partie a été faite pour enrichir notre thèse, et donner un aperçu sur l'étude du problème d'interaction fluide - structure par la méthode des équations intégrales aux frontières

V-2 CAS OU L'EAU EST CONSIDEREE INCOMPRESSIBLE :

V-2-1 Solution fondamentale :

D'après l'équation (IV. 4.1.1) la solution fondamentale du problème s'écrit:

$$\nabla^2 p + \Delta t = 0 \quad (V.2.1)$$

La solution générale de l'équation (V.2.1) est de la forme suivante:

$$p^* = c_1 L_n(r) + C_2 \quad (\text{V.2.2})$$

Intégrant l'équation (V.2.1) dans un domaine Ω on aura:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 P^* + \Delta_i) d\Omega = 0$$

d'où
$$\int_{\Omega} \nabla^2 p^* d\Omega = -\int_{\Omega} \Delta_i d\Omega$$

On utilise les propriétés de la fonction Delta de Dirac (voir Ch III), on aura:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 p^* d\Omega = -1 \quad (\text{V.2.3})$$

D'après le théorème de Green, voir annexe 1,

$$\int_{\Omega} \nabla^2 p^* d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial n} d\Gamma \quad (\text{V.2.4})$$

Comme le domaine est supposé infini, donc le domaine Ω , aura par exemple une

forme circulaire, cela implique que les vecteurs \vec{n} et \vec{r} sont colinéaires (fig. V.2.a)

D'où on peut écrire:
$$\frac{\partial P^*}{\partial n} = \frac{\partial P^*}{\partial r} \quad (\text{V.2.5})$$

Substituant (V.2.5) dans (V.2.4), on aura:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 p^* d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial p^*}{\partial r} d\Gamma$$

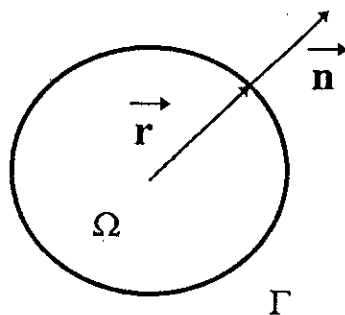


fig. (V.2.a)

D'où l'équation (V.2.3) peut s'écrire comme suit:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial r} d\Gamma = -1 \quad (\text{V.2.6})$$

Comme le domaine Ω est considéré circulaire, on a:

$$d\Gamma = r d\theta$$

d'où l'équation (V.2.6) peut s'écrire:

$$\int_0^{2\pi} \frac{C_1}{r} r d\theta = -1 \Rightarrow 2\pi c_1 = -1$$

d'où $C_1 = -\frac{1}{2\pi}$

Quand $r \rightarrow \infty$, on a $P^* \rightarrow 0$

d'où $C_2 = 0$

En remplaçant C_1 et C_2 dans l'équation (V.2.2), on aura:

$$P^* = \frac{1}{2\pi} \text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (\text{V.2.7})$$

L'équation (V . 2 . 7) s'appelle la solution fondamentale en bidimensionnelle de l'équation de poisson qui à la forme suivante:

$$\nabla^2 P + b = 0$$

V-2-2 Formation de l'équation intégrale :

a) A l'intérieur du domaine :

L'équation intégrale (V . 4 . 1 . 3) s'écrit:

$$p_i + \int_{\Gamma} P q_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q p_i^* d\Gamma \quad (\text{V.2.2.1})$$

avec:

- P_i pression hydrodynamique au point source « i »

- $q = \frac{\partial P}{\partial n}$

- $q^* = \frac{\partial p^*}{\partial n}$

b) Aux frontières :

Si le point source « i » se trouve sur une frontière lisse cela implique que la frontière Γ sera augmentée d'un demi cercle de rayon Σ qui tend vers zéro comme le montre la figure (IV . 4 . b), ainsi l'équation (V . 2 . 2 . 1) s'écrit:

$$p_i + \int_{\Gamma} p q_i^* d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p q_i^* d\Gamma_\varepsilon = \int_{\Gamma} q p_i^* d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q p_i^* d\Gamma \quad (V.2.2.2)$$

avec

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p q_i^* d\Gamma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma_\varepsilon} p \frac{1}{2\pi\varepsilon} d\Gamma_\varepsilon \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - p_i \frac{\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \right\} = -\frac{1}{2} p_i$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p q_i^* d\Gamma_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi} \text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right) q d\Gamma_\varepsilon \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} -q \frac{1}{2\pi} \text{Ln}(r) d\Gamma_\varepsilon \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2} q_i \varepsilon \text{Ln}(\varepsilon) \right\} = 0 \end{aligned}$$

En remplaçant les valeurs des limites précédentes dans l'équation (V.2.2.2), on a

$$\frac{1}{2} p_i + \int_{\Gamma} p q_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q p_i^* d\Gamma \quad (V.2.2.3)$$

- si le point source « i » se trouve sur un coin de la frontière comme le montre la figure (IV . 4 . C) on procédera de la même manière, mais dans ce cas : $\Gamma_\varepsilon = \theta \varepsilon$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p q_i^* d\Gamma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^\theta -p \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon d\theta \right\} = -\frac{\theta}{2\pi} p_i$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q p_i^* d\Gamma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^\theta q \frac{1}{2\pi} \text{Ln}(\varepsilon) \varepsilon d\theta \right\} = 0$$

donc l'équation Intégrale (V.2.2.2) s'écrit :

$$\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) p_i + \int_{\Gamma} p q_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q p_i^* d\Gamma \quad (V.2.2.4)$$

Enfin, l'équation intégrale s'exprime par:

$$c_i p_i + \int_{\Gamma} q p_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q p_i^* d\Gamma \quad (V.2.2.5)$$

Avec :

- $C_i = 1/2$ pour un point situé sur une frontière lisse (plane)
- $= 1$ pour un point situé à l'intérieur du domaine
- $= (1 - \theta/2\pi)$ pour un point appartenant à un coin.

V-2-3 Discrétisation de l'équation intégrale aux frontières :

Considérons la frontière du réservoir discrétisée en N éléments.

a) **Eléments constants :**

Les valeurs de q_j et p_j sont constants sur tout l'élément « j » et sont égales à leurs valeurs aux noeuds situés au milieu de ce dernier (fig.V.2.b), pour cette raison le problème du coin ne se pose pas.

L'équation intégrale (V.2.2.5) s'écrit:

$$\frac{1}{2} p_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} p q_i^* d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q p_i^* d\Gamma_j \quad (\text{V.2.3.1})$$

Les valeurs de p et q sont constants sur chaque élément donc l'équation (V.2.3.1) devient:

$$\frac{1}{2} p_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} q_i^* d\Gamma_j \right) p_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} p_i^* d\Gamma_j \right) q_j \quad (\text{V.2.3.2})$$

On remarque qu'on a deux types d'intégrales:

$$\int_{\Gamma_j} q_i^* d\Gamma_j \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_j} p_i^* d\Gamma_j$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\hat{H}_{i,j} = \int_{\Gamma_j} q_i^* d\Gamma_j \quad (\text{V.2.3.3})$$

$$G_{i,j} = \int_{\Gamma_j} p_i^* d\Gamma_j$$

Donc l'équation (V.2.3.2) prend la forme suivante:

$$\frac{1}{2} p_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{i,j} p_j = \sum_{j=1}^N G_{i,j} q_j \quad (\text{V.2.3.4})$$

Posons encore:

$$H_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \hat{H}_{i,j} & \text{pour } i = j \\ \hat{H}_{i,j} & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (\text{V.2.3.5})$$

Donc par conséquent l'équation (V.2.3.4) s'écrit pour chaque noeud:

$$\sum_{j=1}^N p_j H_{ij} = \sum_{j=1}^N q_j G_{ij} \quad \text{avec } i = 1, \dots, N \quad (\text{V.2.3.6})$$

L'équation (V.2.3.5) peut s'exprimer sous forme matricielle comme suit:

$$[H] \{p\} = [G] \{q\} \quad (\text{V.2.3.7})$$

Avec [H] et [G] sont des matrices de dimension NxN

{p} et {q} sont des vecteurs de dimension N

Le système (V.2.3.7) après introduction des conditions aux limites prendra la forme suivante:

$$[A] \{X\} = \{F\} \quad (\text{V.2.3.8})$$

Avec [A]: matrice qui comporte des termes des matrices H et G et elle est de dimension NxN

{X}: vecteur comportant N inconnues

{F}: vecteur comportant N connues

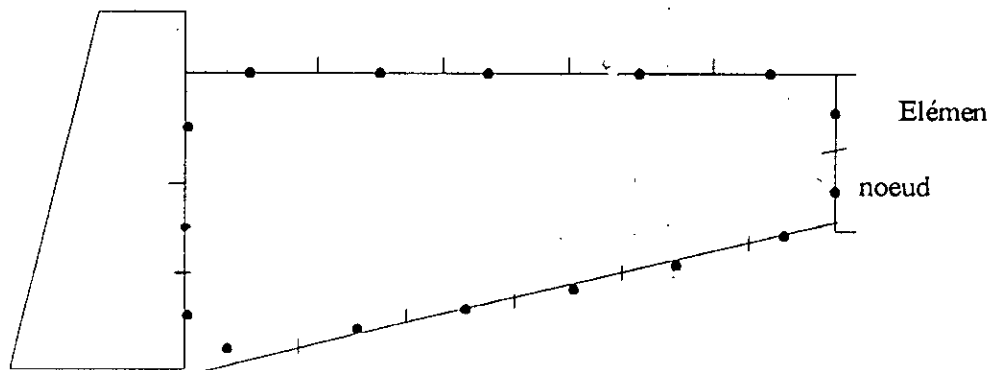


fig. (V.2.b)

b) Élément linéaire

Dans ce cas, le nœud peut appartenir à une frontière lisse, comme il peut aussi être dans un coin. Dans ce cas d'équation (V.2.2.5) peut s'écrire après discrétisation sous la forme suivante:

$$\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) p_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} [\Phi_1 \Phi_2] \begin{Bmatrix} p_j \\ p_{j+1} \end{Bmatrix} q_i^* d\Gamma_j \right) = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} [\Phi_1 \Phi_2] \begin{Bmatrix} q_{2j-1} \\ q_{2j} \end{Bmatrix} p_i^* d\Gamma_j \right) \quad (\text{V.2.3.9})$$

Les valeurs de p et q varient linéairement le long de l'élément.

Avec Φ_1 et Φ_2 sont des fonctions d'interpolation ou (de forme) définie au chapitre précédent, voir figure (IV . 5 . E).

Si on pose :

$$\begin{aligned} h_{ij}^{(1)} &= \int_{\Gamma_j} \Phi_1 q_i^* d\Gamma_j \\ h_{ij}^{(2)} &= \int_{\Gamma_j} \Phi_2 q_i^* d\Gamma_j \\ g_{ij}^{(1)} &= \int_{\Gamma_j} \Phi_1 p_i^* d\Gamma_j \\ g_{ij}^{(2)} &= \int_{\Gamma_j} \Phi_2 p_i^* d\Gamma_j \end{aligned} \quad (\text{V.2.3.10})$$

Substituant (V.2.3.10) dans (V.2.3.9), on aura:

$$\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) p_i + \sum_{j=1}^N \left(h_{ij}^{(1)} p_j + h_{ij}^{(2)} p_{j+1} \right) = \sum_{j=1}^N \left(g_{ij}^{(1)} q_{2j-1} + g_{ij}^{(2)} q_{2j} \right) \quad i= 1, \dots, N \quad (\text{V.2.3.11})$$

Comme chaque nœud sur la frontière appartient à deux éléments à la fois (figure V.2.c) on a:

$$H_{i,j} = h_{i,j}^{(1)} + h_{i,j-1}^{(2)} \quad (\text{V.2.3.12})$$

$$H_{i,i} = \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) + h_{i,i}^{(1)} + h_{i,i-1}^{(2)}$$

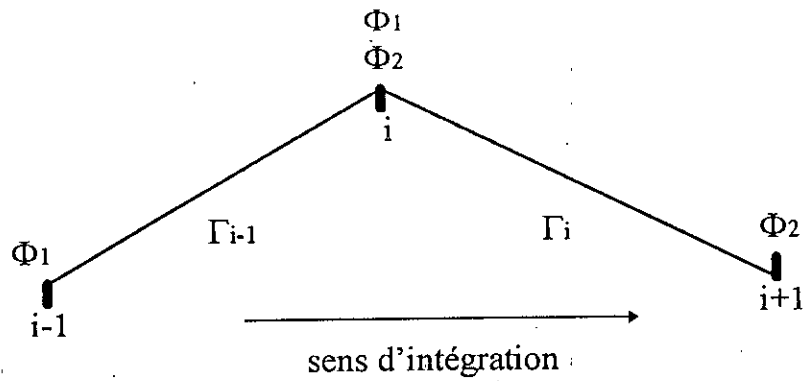


fig. (V.2.C)

Un noeud appartenant à un coin possède deux normales, donc deux valeurs de q , l'une avant le noeud et l'autre après le noeud. D'où:

$$G_{i,2j-1} = g_{i,j}^{(1)} \quad (V.2.3.13)$$

$$G_{i,2j} = g_{i,j}^{(2)}$$

dans le cas où le noeud n'appartient pas à un coin, on a :

$$G_{i,2j-1} = G_{i,2(j-1)} = g_{i,j}^{(1)} + g_{i,j-1}^{(2)} \quad (V.2.3.14)$$

d'où l'équation (V.2.3.11) prend la forme matricielle suivante :

$$[H] \{P\} = [G] \{Q\} \quad (V.2.3.15)$$

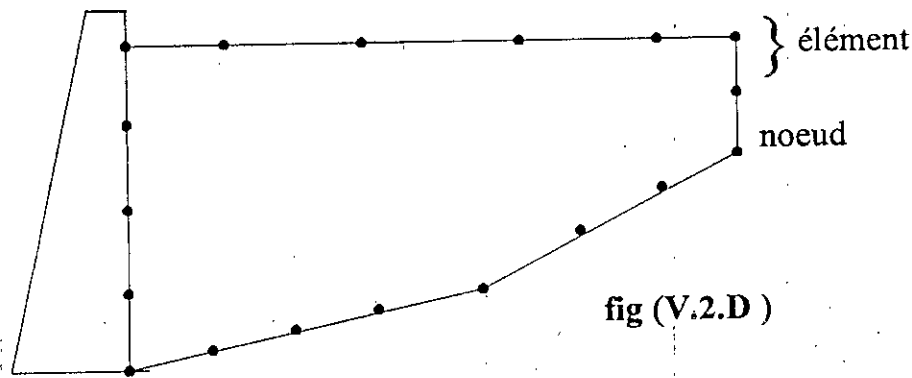
avec:

- * $[H]$: est une matrice de dimension $N \times N$
- * $\{G\}$: est une matrice de dimension $N \times 2N$
- * $\{p\}$: c'est un vecteur de dimension N
- * $\{q\}$: c'est un vecteur de dimension $2N$

Après introduction des conditions aux limites, le système d'équations (V.2.3.15) prend la forme suivante:

$$[A] \{X\} = \{F\}$$

$$(V.2.3.16)$$



c) Élément quadratique

Dans ce cas, il y a des noeuds qui peuvent appartenir à une frontière lisse, ou un coin. Comme il y a d'autres noeuds situés au milieu de chaque élément donc ils ne peuvent pas appartenir à un coin (fig. V.2.E). Dans ce cas l'équation (V.2.2.5) peut s'écrire après discrétisation sous la forme suivante:

$$\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) p_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3] \begin{Bmatrix} p_{2j-1} \\ p_{2j} \\ p_{2j+1} \end{Bmatrix} q_i^* d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3] \begin{Bmatrix} q_{3j-2} \\ q_{3j-1} \\ q_{3j} \end{Bmatrix} p_i^* d\Gamma_j$$

$$(V.2.3.17)$$

Les valeurs de p et q varient paraboliquement le long de l'élément. Avec $\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3$, sont des fonctions d'interpolation ou (de forme) définie au chapitre précédent voir (fig.V.2.E).

Introduisons les notations suivantes:

$$h_{i,j}^{(1)} = \int_{\Gamma_j} \Phi_1 q_i^* d\Gamma_j$$

$$g_{i,j}^{(1)} = \int_{\Gamma_j} \Phi_1 p_i^* d\Gamma_j$$

$$h_{i,j}^{(2)} = \int_{\Gamma_j} \Phi_2 q_i^* d\Gamma_j$$

$$g_{i,j}^{(2)} = \int_{\Gamma_j} \Phi_2 p_i^* d\Gamma_j$$

$$(V.2.3.18)$$

$$h_{i,j}^{(3)} = \int_{\Gamma_j} \Phi_3 q_i^* d\Gamma_j$$

$$g_{i,j}^{(3)} = \int_{\Gamma_j} \Phi_3 p_i^* d\Gamma_j$$

substituant le système d'équation (V.2.3.18) dans l'équation (V.2.3.17) on aura:

$$\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) p_i + \sum_{j=1}^N \left(h_{i,j}^{(1)} p_{2j-1} + h_{i,j}^{(2)} p_{2j} + h_{i,j}^{(3)} p_{2j+1} \right) = \sum_{j=1}^N \left(g_{i,j}^{(1)} q_{3j-2} + g_{i,j}^{(2)} q_{3j-1} + g_{i,j}^{(3)} q_{3j} \right)$$

$i = 1, \dots, N$ (V.2.3.19)

pour des noeuds situés aux extrémités de chaque élément (fig. V.2.E) on a:

$$H_{i,2j-1} = h_{i,j}^{(1)} + h_{i,j-1}^{(3)}$$

(V.2.3.20)

$$H_{i,2i-1} = \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) + h_{i,i}^{(1)} + h_{i,i-1}^{(3)}$$

pour contourner le problème du coin, on considère dans un coin:

$$G_{i,3j-2} = g_{i,j}^{(1)}$$

(V.2.3.21)

$$G_{i,3j} = g_{i,j}^{(3)}$$

et pour des noeuds situés au milieu de chaque élément (fig. V.2.E) on a :

$$H_{i,2j} = h_{i,j}^{(2)}$$

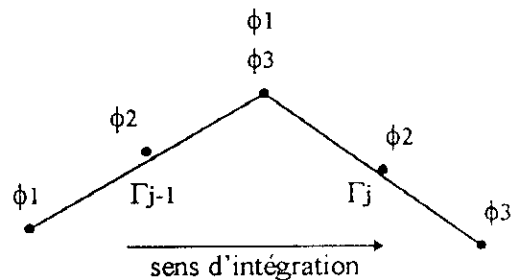
$$H_{i,2i} = \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) + h_{i,i}^{(2)}$$

(V.2.3.22)

$$G_{i,3j-1} = g_{i,j}^{(2)}$$

dans le cas où on a un noeud situé sur l'une des extrémités de l'élément et n'appartient pas à un coin, on a:

$$G_{i,3j-2} = G_{i,3(j-1)} = g_{i,j}^{(1)} + g_{i,j-1}^{(3)}$$



d'où l'équation (V.2.3.19) peut s'exprimer sous forme matricielle

fig.(V.2.E)

comme suit :

$$[H] \{p\} = [G] \{q\} \quad (V.2.3.23)$$

avec:

- * [H] : est une matrice carrée de dimension $2N \times 2N$
- * [G] : est une matrice rectangulaire de dimension $2N \times 3N$
- * {p} : est un vecteur de dimension $2N$
- * {q} : est un vecteur de dimension $3N$

après introduction des conditions aux limites, le système d'équations (V.2.3.23) prend la forme suivante:

$$[A] [X] = \{F\} \quad (V.2.3.24)$$

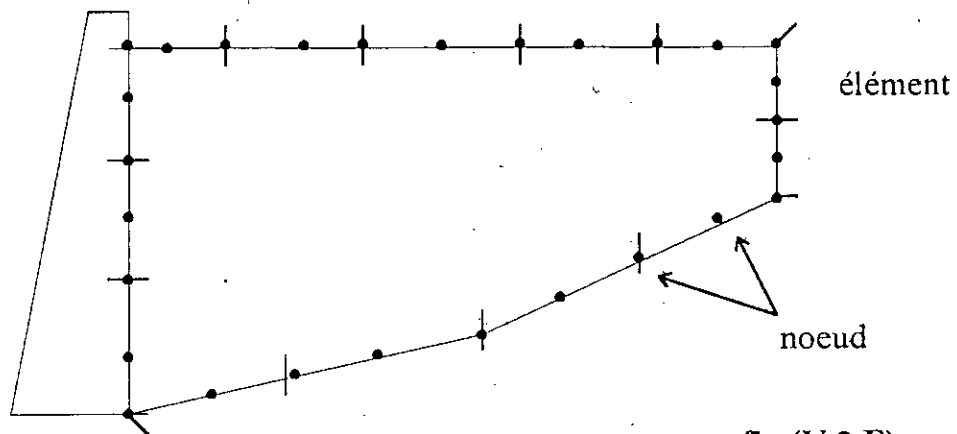


fig (V.2.F)

V-2-4 Evaluation des intégrales :

a) Cas d'élément constant :

les intégrales G_{ij} et $\hat{H}_{i,j}$ doivent être calculés par des méthodes d'intégration numérique, parmi ces méthodes, il y a la quadrature de GAUSS (voir annexe 2) qui est la plus répandue:

l'emploi de la quadrature de GAUSS avec 'm' points d'intégration (fig. V.2.G) permet d'exprimer les termes $\hat{H}_{i,j}$ et G_{ij} donnés par l'équation (V.2.3.3)

$$\hat{H}_{i,j} = \int_{\Gamma_j} q_i^* d\Gamma_j = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial p_i^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_j = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{r} \cos(\beta) |J| d\xi$$

avec $|J|$: le Jacobien de la transformation du système des coordonnées. pour un élément à géométrie linéaire, on a: $|J| = l/2$ avec 'l' : longueur de l'élément.

Donc:

$$\hat{H}_{i,j} = -\frac{l_j}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{r} \cos(\beta) d\xi \quad (V.2.4.1)$$

d'où:

$$\hat{H}_{i,j} = -\frac{l_j}{4\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{r_k} \cos(\beta_k) W_k$$

où:

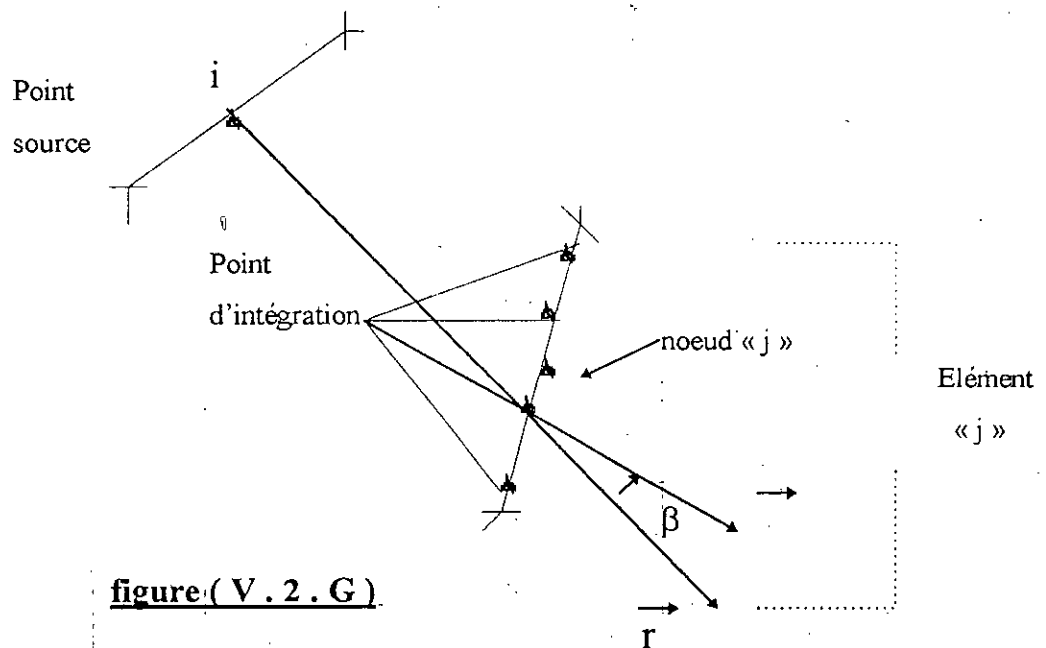
β : angle entre la normale sortante à l'élément et le vecteur \vec{r} (fig. V.2.6)

W_k : les facteurs de pondération utilisés dans la quadrature de Gauss (voir annexe 1)

l_j : longueur de l'élément

r_k : la distance entre le point source « i » et le point d'intégration « k »

m : nombre de points d'intégration



$$\hat{H}_{i,j} = -\frac{1_j}{4\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{r_k} \cos(\beta_k) \cdot W_k = 0 \quad (\text{V.2.4.2})$$

à cause de l'orthogonalité des vecteurs \vec{n} et $\vec{r} \Rightarrow \cos(\beta_m) = 0$

substituant les équations (V.2.4.1) et (V.2.4.2) dans l'équation (V.2.3.5) on aura:

$$H_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pour } i = j \\ -\frac{1_j}{4\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{r_k} \cos(\beta_k) W_k & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (\text{V.2.4.3})$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} p_i d\Gamma_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right) |J| d\xi$$

d'où (V.2.4.4)

$$G_{i,j} = \frac{1_j}{4\pi} \sum_{k=1}^m \text{Ln}\left(\frac{1}{r_k}\right) \cdot W_k$$

le terme G_{ij} se calculera analytiquement, pour cela considérons la nouvelle coordonnée ξ (fig. V.2.H):

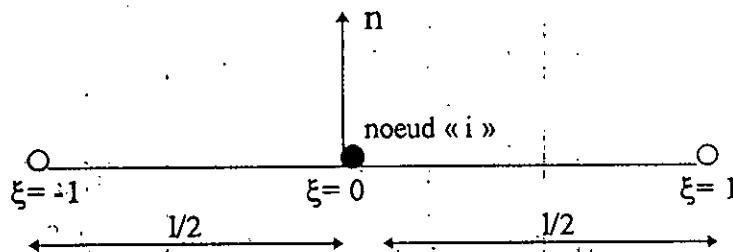


figure. (V . 2 . H)

donc:

$$r = \left| \xi - \frac{1}{2} \right|$$

d'où

$$G_{i,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{point1}}^{\text{point2}} \text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right) dr = \frac{1}{\pi} \int_{\text{noeud1}}^{\text{noeud2}} \text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right) dr$$

$$G_{i,j} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 \text{Ln}\left(\frac{1}{\xi - 1/2}\right) d\xi = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2}\right) \left[\text{Ln}\left(\frac{1}{1/2}\right) + \int_0^1 \text{Ln}\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi \right]$$

$$\text{d'où} \quad G_{i,j} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2}\right) \left[\text{Ln}\left(\frac{1}{1/2}\right) + 1 \right]$$

(V.2.4.5)

b) Cas d'élément linéaire

De la même manière que l'élément constant, on calcule les intégrales de l'élément linéaire:

les intégrales données par (V.2.3.10) sont calculées comme suit:

$$h_{i,j}^{(1)} = \int_{\Gamma_j} \Phi_i q_i d\Gamma_j = \int_0^1 \Phi_i \frac{\partial p_i}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} |J| d\xi = -\frac{l_j}{8\pi} \int_{-1}^1 (1-\xi) \frac{1}{r} \cos(\beta) d\xi$$

en appliquant la quadrature de GAUSS avec (m) points, on aura:

$$h_{i,j}^{(1)} = -\frac{l_j}{8\pi} \sum_{k=1}^m (1-\xi_k) \frac{1}{r_k} \cos(\beta_k) W_k \quad (\text{V.2.4.6})$$

la même chose pour:

$$h_{i,j}^{(2)} = -\frac{l_j}{8\pi} \sum_{k=1}^m (1+\xi_k) \frac{1}{r_k} \cos(\beta_k) W_k \quad (\text{V.2.4.7})$$

$$g_{i,j}^{(1)} = -\frac{l_j}{8\pi} \sum_{k=1}^m (1-\xi_k) \text{Ln} \frac{1}{r_k} W_k \quad (\text{V.2.4.8})$$

$$g_{i,j}^{(2)} = -\frac{l_j}{8\pi} \sum_{k=1}^m (1 + \xi_k) \operatorname{Ln} \frac{1}{r_k} W_k \quad (\text{V.2.4.9})$$

Les termes singuliers sont calculés analytiquement en se référant à la figure (V.2.I):

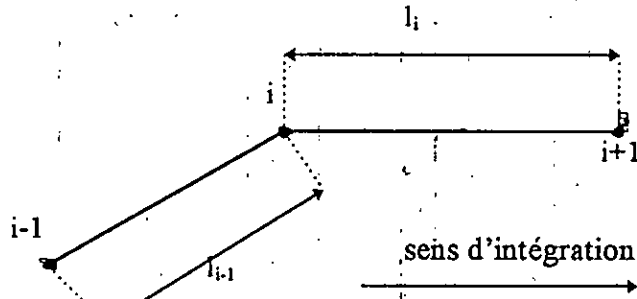


fig (V.2.I)

$$g_{i,i}^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \operatorname{Ln}(x) dx = \frac{l_i}{4\pi} (1,5 - \operatorname{Ln}(l_i)) \quad (\text{V.2.4.10})$$

$$g_{i,i}^{(2)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l_i} \left(\frac{x}{l_i}\right) \operatorname{Ln}(x) dx = \frac{l_i}{4\pi} (0,5 - \operatorname{Ln}(l_i)) \quad (\text{V.2.4.11})$$

$$h_{i,i}^{(1)} = h_{i,i}^{(2)} = 0 \quad (\text{V.2.4.12})$$

les termes $h_{i,i}^{(1)}$ et $h_{i,i}^{(2)}$ sont nuls à cause de l'orthogonalité de $\vec{\Gamma}$ et $\vec{\Pi}$ ($\cos \beta = 0$).

Substituant les équations (V.2.4.6), (V.2.4.7), (V.2.4.12) dans le système d'équation (V.2.3.13), on aura:

$$H_{i,j} = -\frac{l_j}{8\pi} \sum_{k=1}^m (1 - \xi_k) \frac{1}{r_k} W_k - \frac{l_{j-1}}{8\pi} \sum_{k=1}^m (1 + \xi_k) \frac{1}{r_k} W_k \quad (\text{V.2.4.13})$$

$$H_{i,i} = \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)$$

la même chose pour les équations (V.2.4.8), (V.2.4.9), (V.2.4.10) et (V.2.4.11) dans le système d'équations (V.2.3.13) on aura:

$$G_{1,2j-1} = \frac{l_j}{8\pi} \sum_{k=1}^m (1 - \xi_k) \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{r_k}\right) \cdot W_k$$

$$G_{1,2j} = \frac{l_j}{8\pi} \sum_{k=1}^m (1 + \xi_k) \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{r_k}\right) \cdot W_k$$

(V.2.4.14)

$$G_{1,2i-1} = \frac{l_i}{4\pi} (1,5 - \operatorname{Ln}(l_i))$$

$$G_{1,2i} = \frac{l_i}{4\pi} (0,5 - \operatorname{Ln}(l_i))$$

c) Cas d'éléments quadratiques

De la même manière que les deux cas précédents, on calcul les intégrales de l'élément quadratique.

Les intégrales données par (V.2.3.18) sont calculées comme suit:

$$h_{i,j}^{(1)} = \int_{\Gamma_j} \Phi_{1,q_i}^* d\Gamma_j = \int_{-1}^1 \Phi_1 \frac{\partial p_i^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} |J| d\xi = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \xi(\xi - 1) \frac{1}{r} \cos(\beta) |J| d\xi$$

avec: $|J|$ est le jacobien de transformation coordonnées cartésiennes, coordonnées intrinsèques, et il est donné comme suit:

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \quad (\text{V.2.4.15})$$

avec:

$$x = \Phi_1 x_1 + \Phi_2 x_2 + \Phi_3 x_3$$

$$y = \Phi_1 y_1 + \Phi_2 y_2 + \Phi_3 y_3$$

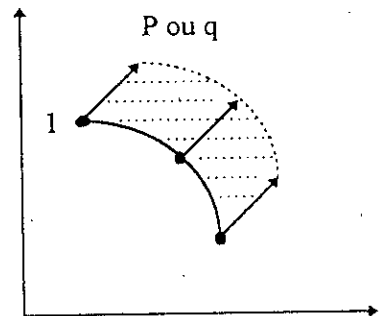
ou encore:

$$x = \frac{1}{2} \xi^2 (x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{1}{2} \xi (x_3 - x_1) + x_2$$

$$y = \frac{1}{2} \xi^2 (y_1 - 2y_2 + y_3) + \frac{1}{2} \xi (y_3 - y_1) + y_2$$

(V.2.4.16)

fig. (V.2.J)



substituant (V.2.4.16) dans (V.2.4.15), on aura:

$$|J| = \left[\left\{ (x_3 - 2x_1 + x_1)\xi + \frac{1}{2}(x_3 - x_1) \right\}^2 + \left\{ (y_3 - 2y_1 + y_1)\xi + \frac{1}{2}(y_3 - y_1) \right\}^2 \right]^{1/2}$$

dans le cas où $i \neq j$ on utilise la quadrature de GAUSS classique avec une fonction de poids égale à 1, on aura:

$$h_{i,j}^{(1)} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^m \xi_k (\xi_k - 1) \frac{1}{r_k} \cos(\beta_k) |J| \cdot W_k \quad (V.2.4.17)$$

la même chose pour:

$$h_{i,j}^{(2)} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m (1 - \xi_k^2) \frac{1}{r_k} \cos(\beta_k) |J| \cdot W_k \quad (V.2.4.18)$$

$$h_{i,j}^{(3)} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^m \xi_k (1 + \xi_k) \frac{1}{r_k} \cos(\beta_k) |J| \cdot W_k \quad (V.2.4.19)$$

$$g_{i,j}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^m \xi_k (\xi_k - 1) \text{Ln} \frac{1}{r_k} \cdot W_k \quad (V.2.4.20)$$

$$g_{i,j}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m (1 - \xi_k^2) \text{Ln} \frac{1}{r_k} \cdot W_k \quad (V.2.4.21)$$

$$g_{i,j}^{(3)} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^m \xi_k (1 + \xi_k) \text{Ln} \frac{1}{r_k} \cdot W_k \quad (V.2.4.22)$$

$$h_{i,i}^{(1)} = h_{i,i}^{(2)} = h_{i,i}^{(3)} = 0 \quad \text{à cause de l'orthogonalité des vecteurs } \vec{r} \text{ et } \vec{n} \text{ (cos } \beta = 0)$$

$$H_{i,2i-1} = 1 - \frac{\theta}{2\pi} \quad (V.2.4.23)$$

d'où:

$$H_{i,2i} = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$$

pour les termes singuliers: $(g_{i,j}^{(k)}) \quad k = 1, \dots, 3$

autrement dit: lorsque le point source « i » est un noeud de l'élément sur lequel on intègre $i \neq L$ (L: point d'intégration), on peut encore utiliser la procédure précédente. Celle-ci est en défaut lorsque $i = L$, car la fonction à intégrer varie rapidement.

Pour contourner ce problème, nous utiliserons une formule de GAUSS avec une fonction de poids en $\text{Ln } 1/\eta$ (annexe 2).

Dans l'application de cette formule, il est nécessaire de faire une transformation linéaire sur les coordonnées intrinsèques, de façon à ramener l'intervalle d'intégration à $[0 , 1]$.

Donc trois cas se présentent, chaque cas dépend de la position des points de collocation, c'est à dire Noeud = 1 , 2 ou 3 (figure V . 2 . K);

* le point de collocation est au noeud (1):

pour ramener l'intervalle d'intégration à $[0 , 1]$ on pose:

$$\eta = (\xi + 1) / 2$$

d'où on aura:

$$\Psi_1 = (2\eta - 1)(\eta - 1) \quad ; \quad \Psi_2 = 4\eta(1 - \eta) \quad ; \quad \Psi_3 = \eta(2\eta - 1)$$

avec : Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 sont des fonctions de forme.

On a:
$$g_{i,i}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \Psi_1 \text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right) |G| d\eta$$

avec $|G|$ est le jacobien de la transformation des coordonnées intrinsèques afin de ramener l'intervalle d'intégration à $[0 , 1]$.

Après avoir écrit r en fonction de η et ξ l'intégrale précédente peut s'écrire comme suit:

$$g_{i,i}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^1 \Psi_1 \text{Ln}\left(\frac{1}{\eta}\right) |G| d\eta + \int_{-1}^1 \Phi_1 \text{Ln}\left(\frac{1}{Z}\right) |J| d\xi \right]$$

avec:
$$Z = 2 \left\{ \left[\frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi - (x_2 - x_1) \right]^2 + \left[\frac{1}{2}(y_1 - 2y_2 + y_3)\xi - (y_2 - y_1) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

dans lequel on a:

$$\int_0^1 \Psi_1 \text{Ln}\left(\frac{1}{\eta}\right) |G| d\eta = \sum_{k=1}^m |G|(2\eta_k - 1)(\eta_k - 1) V_k$$

avec : V_k , les facteurs de pondération utilisés dans la quadrature de GAUSS avec une fonction de pondération en $\text{Ln } 1/\eta$.

$$\int_{-1}^1 \Phi_1 L_n \left(\frac{1}{r_1} \right) |J| d\xi = \sum_{k=1}^m |J| \frac{1}{2} \xi_k (\xi_k - 1) L_n \left(\frac{1}{Z_k} \right) W_k$$

d'où:

$$g_{i,i}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G| (2\eta_k - 1)(\eta_k - 1) V_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |J| \xi_k (\xi_k - 1) L_n \left(\frac{1}{Z_k} \right) W_k \right] \quad (V.2.4.24)$$

De la même manière:

$$g_{i,i}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \left[4 \sum_{k=1}^m |G| \eta_k (1 - \eta_k) V_k + \sum_{k=1}^m |J| (1 - \xi_k^2) L_n \left(\frac{1}{Z_k} \right) W_k \right] \quad (V.2.4.25)$$

$$g_{i,i}^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \left[4 \sum_{k=1}^m |G| \eta_k (2\eta_k - 1) V_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |J| \xi_k (1 + \xi_k) L_n \left(\frac{1}{Z_k} \right) W_k \right] \quad (V.2.4.26)$$

** le point de collocation est au noeud (2):

$$g_{i,i}^{(L)} = \int_{\text{noeud}(1)}^{\text{noeud}(3)} \Phi_L q_i^* |J| d\xi = \int_{\text{noeud}(1)}^{\text{noeud}(2)} \Phi_L q_i^* |J| d\xi + \int_{\text{noeud}(2)}^{\text{noeud}(3)} \Phi_L q_i^* |J| d\xi \quad (V.2.4.27)$$

Avec $l = 1, \dots, 3$

pour le premier terme du membre droit de l'équation (V . 2 . 4 . 27) on pose:

$\eta' = -\xi$ et pour le deuxième terme on pose: $\xi = \eta$ d'où on aura:

$$\Psi_1' = \frac{1}{2} \eta' (1 + \eta') \quad ; \quad \Psi_2' = (1 - \eta') (1 + \eta') \quad ; \quad \Psi_3' = \frac{1}{2} \eta' (\eta' - 1)$$

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} \eta (1 - \eta) \quad ; \quad \Psi_2 = (1 - \eta) (1 + \eta) \quad ; \quad \Psi_3 = \frac{1}{2} \eta (1 + \eta)$$

on pose:

$$I_L' = \int_{\text{noeud}(1)}^{\text{noeud}(2)} \Phi_L q_i^* |J| d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \Psi_L' L_n \left(\frac{1}{r'} \right) |G'| d\eta'$$

$$I_L = \int_{\text{noeud}(2)}^{\text{noeud}(3)} \Phi_L q_i^* |J| d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \Psi_L L_n \left(\frac{1}{r} \right) |G| d\eta$$

Après avoir écrit (r') en fonction de (η' , ξ) et (r) en fonction de (ξ , η) on aura:

$$g_{i,i}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^1 \Psi_L' \text{Ln} \left(\frac{1}{\eta'} \right) |G'| d\eta' + \int_0^1 \Psi_L \text{Ln} \left(\frac{1}{\eta} \right) |G| d\eta + \int_{-1}^1 \Phi_L \text{Ln} \left(\frac{1}{Z} \right) |J| d\xi \right]$$

avec:

$$Z = \left\{ \left[\frac{1}{4}(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi + \frac{1}{2}(x_3 - x_1) \right]^2 + \left[\frac{1}{4}(y_1 - 2y_2 + y_3)\xi + \frac{1}{2}(y_3 - y_1) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

on applique la quadrature de GAUSS avec une fonction de pondération en $\text{Ln} (1/\eta)$, en $\text{Ln} (1/\eta)$ et (1) , avec m points d'intégration, on aura:

$$g_{i,i}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G'| \eta'_k (\eta'_k + 1) V'_k + \sum_{k=1}^m |G| \eta_k (\eta_k - 1) V_k + \sum_{k=1}^m |J| \xi_k (\xi_k - 1) \text{Ln} \left(\frac{1}{Z_k} \right) W_k \right] \quad (\text{V.2.4.28})$$

$$g_{i,i}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G'| (1 - \eta_k'^2) V'_k + \sum_{k=1}^m |G| (1 - \eta_k^2) V_k + \sum_{k=1}^m |J| (1 - \xi_k^2) \text{Ln} \left(\frac{1}{Z_k} \right) W_k \right] \quad (\text{V.2.4.29})$$

$$g_{i,i}^{(3)} = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G'| \eta'_k (\eta'_k - 1) V'_k + \sum_{k=1}^m |G| \eta_k (\eta_k + 1) V_k + \sum_{k=1}^m |J| \xi_k (1 + \xi_k) \text{Ln} \left(\frac{1}{Z_k} \right) W_k \right] \quad (\text{V.2.4.30})$$

*** le point de collocation est au point (3)

c'est la même chose qu'au cas où le point de collocation est au noeud (1) seulement dans ce cas on a:

$$\eta = \frac{1 - \xi}{2}$$

donc

$$\Psi_1 = \eta(2\eta - 1) \quad , \quad \Psi_2 = 4\eta(1 - \eta) \quad , \quad \Psi_3 = (2\eta - 1)(\eta - 1)$$

$$Z = 2 \left\{ \left[\frac{1}{2} (x_1 - 2x_2 + x_3) \xi - (x_2 - x_3) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} (y_1 - 2y_2 + y_3) \xi - (y_2 - y_3) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

d'où:

$$g_{i,j}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G| \eta_k (2\eta_k - 1) V_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |J| \xi_k (\xi_k - 1) L_n \left(\frac{1}{Z_k} \right) W_k \right] \quad (V.2.4.31)$$

$$g_{i,j}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \left[4 \sum_{k=1}^m |G| \eta_k (1 - \eta_k) V_k + \sum_{k=1}^m |J| (1 - \xi_k^2) L_n \left(\frac{1}{Z_k} \right) W_k \right] \quad (V.2.4.32)$$

$$g_{i,j}^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G| (2\eta_k - 1) (\eta_k - 1) V_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |J| \xi_k (1 + \xi_k) L_n \left(\frac{1}{Z_k} \right) W_k \right] \quad (V.2.4.33)$$

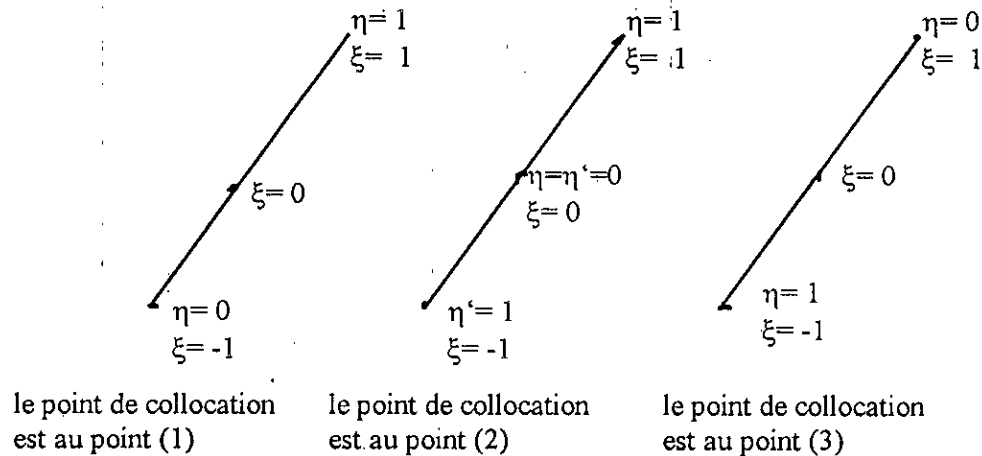


fig (V.2.K)

V-2-5 Points internes :

La détermination de la pression hydrodynamique en des points que l'on choisit à l'intérieur du domaine (réservoir) constitue un des avantages de la méthode des équations intégrale aux frontières comparé aux autres méthodes numériques comme la MEF et la méthode des différences finies.

Une fois les inconnues physiques « pression et gradient de pression » sur la frontière du domaine sont déterminées, il est donc possible de déterminer les pressions hydrodynamiques dans le domaine en utilisant l'équation intégrale (V.2.2.1):

$$P_i + \int_{\Gamma_j} q_i p d\Gamma = \int_{\Gamma_j} p_i q d\Gamma$$

en considérant la forme discrétisée, l'équation intégrale précédente s'écrit:

$$P_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q_i^* p \, d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} p_i^* q \, d\Gamma_j \quad (\text{V.2.5.1})$$

avec:

$$P = \sum_{k=1}^I \Phi_k p_k = \langle \Phi \rangle \{p\} \quad (\text{V.2.5.2})$$

$$q = \sum_{k=1}^I \Phi_k q_k = \langle \Phi \rangle \{q\}$$

substituant (V.2.5.2) dans (V.2.5.1) on aura:

$$P_i = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \langle \Phi \rangle \{q\} p_i^* \, d\Gamma - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \langle \Phi \rangle \{p\} q_i^* \, d\Gamma \quad (\text{V.2.5.3})$$

d'où pour les trois cas de discrétisation on aura:

a- Élément constant:

$$P_i = \sum_{j=1}^N q_i \int_{\Gamma_j} p_i^* \, d\Gamma_j - \sum_{j=1}^N p_j \int_{\Gamma_j} q_i^* \, d\Gamma_j \quad (\text{V.2.5.4})$$

b- Élément linéaire:

$$P_i = \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Gamma_j} \Phi_1 q_{2j-1} p_i^* \, d\Gamma_j + \int_{\Gamma_j} \Phi_2 q_{2j} p_i^* \, d\Gamma_j \right] - \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Gamma_j} \Phi_1 p_j q_i^* \, d\Gamma_j + \int_{\Gamma_j} \Phi_2 p_{j+1} q_i^* \, d\Gamma_j \right] \quad (\text{V.2.5.5})$$

c- Élément quadratique:

$$P_i = \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Gamma_j} \Phi_1 q_{3j-2} p_i^* \, d\Gamma_j + \int_{\Gamma_j} \Phi_2 q_{3j-1} p_i^* \, d\Gamma_j + \int_{\Gamma_j} \Phi_3 q_{3j} p_i^* \, d\Gamma_j \right] - \sum_{j=1}^N \left[\int_{\Gamma_j} \Phi_1 p_{2j-1} q_i^* \, d\Gamma_j + \int_{\Gamma_j} \Phi_2 p_{2j} q_i^* \, d\Gamma_j + \int_{\Gamma_j} \Phi_3 p_{2j+1} q_i^* \, d\Gamma_j \right] \quad (\text{V.2.5.6})$$

pour l'évaluation des intégrales données aux équations (V.2.5.4), (V.2.5.5) et (V.2.5.6), voir le paragraphe (V.2.4).

V-3 CAS OU L'EAU EST CONSIDEREE COMPRESSIBLE :

V-3-1 Solution fondamentale :

D'après le chapitre II (partie fluide). l'équation de propagation d'onde dans un fluide compressible s'écrit:

$$\nabla^2 \bar{P} - \frac{1}{C^2} \ddot{\bar{P}} = 0 \tag{V.3.1.1}$$

pour éliminer le facteur temps de cette équation, considérant une excitation harmonique d'impulsion (ω), par conséquent on peut écrire:

$$\bar{P} = P e^{j\omega t} \quad \text{avec } j^2 = -1 \tag{V.3.1.2}$$

En remplaçant dans l'équation (V.3.1.1) la valeur de \bar{P} par son équivalent donné par (V.3.1.2), on aura:

$$e^{j\omega t} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + e^{j\omega t} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{1}{C^2} j^2 \omega^2 e^{j\omega t} P = 0$$

en divisant l'équation précédente par ($e^{j\omega t}$) et en posant ($\lambda = \omega / c$), on aura:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \lambda^2 P = 0 \tag{V.3.1.3}$$

d'où $\nabla^2 P + \lambda^2 P = 0$

avec λ : nombre d'ondes

La solution fondamentale du problème est celle qui satisfait l'équation suivante:

$$\nabla^2 P^* + \lambda^2 P + \Delta_i = 0 \tag{V.3.1.4}$$

avec Δ_i : c'est la fonction Delta de Dirac

La solution homogène de ce type d'équations exprimé en coordonnées cylindriques s'exprime comme suit: (voir Ch. II)

$P^* = C_1 J_0(\lambda r) + j C_2 Y_0(\lambda r)$ *fonction*

i) P ne depend pas de z*

+ O(1/λr) ^{ii) formule asymptotique}

ou: $P^* = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} \left[C_1 \cos\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) + j C_2 \sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) \right] \tag{V.3.1.5}$

on pose: $\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) = \theta$

sachant que: $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

d'où l'équation (V . 3 . 1 . 5) devient:

$$P^* = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}} \left[C_1 \left(\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \right) + jC_2 \left(\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2} \right) \right]$$

$$P^* = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}} \left[\frac{C_1 + jC_2}{2} e^{j\theta} + \frac{C_1 - jC_2}{2} e^{-j\theta} \right]$$

en remplaçant θ par son équivalent dans l'équation précédente, on aura:

$$P^* = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}} \left[\frac{C_1 + jC_2}{2} e^{j(\lambda r - \pi/4)} + \frac{C_1 - jC_2}{2} e^{-j(\lambda r - \pi/4)} \right] \quad (V.3.1.6)$$

si l'onde étudiée se réduit à l'une ou l'autre de ces ondes, pour cela on doit poser:

$$C_1 = \pm j C_2$$

posons par exemple : $C_1 = j C_2$

d'où l'équation (V.3.1. 6) devient:

$$P^* = \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda r}} C_1 e^{j(\lambda r - \pi/4)}$$

où:

$$P^* = C_1 H_0^{(1)}(\lambda r) = J_0 + i Y_0 \quad (V.3.1.7)$$

avec: $H_0^{(1)}$ la fonction de Henkel d'ordre zéro de premier espèce.

Pour déterminer la valeur de C_1 on intègre l'équation (V.3.1.4) dans un domaine infini.

La solution générale de l'équation (V.3.1. 4) exprimée en coordonnées polaires est:

$$P^* = \frac{J}{4} H_0^{(1)}(\lambda r) \quad (V.3.1.8)$$

avec $j^2 = -1$

V-3-2 Formation de l'équation intégrale :

De la même manière que le cas, où l'eau est considérée incompressible , l'équation intégrale aux frontières est donnée par (V.2.2.2) tout en considérant la

solution fondamentale donnée par l'équation (V.3.1.8) et en calculant les limites qui lui correspondent. On peut établir une équation identique à (V.2.2.5).

V-3-3 Discrétisation de l'équation intégrale aux frontières :

La discrétisation reste la même que dans le cas du fluide incompressible. Toutes les équations établies au paragraphe (V.2.3) restent valables ici, en considérant dans ces équations la solution fondamentale donnée par (V.3.1.8).

V-3-4 Evaluation des intégrales :

a) Cas d'éléments constants :

Les intégrales données par (V.2.3.3) dans la paragraphe (V.2.3) sont évaluées comme suit:

$$\hat{H}_{i,j} = \int_{\Gamma_j} q_i d\Gamma_j = -\frac{j}{4} \int_{-1}^1 \frac{\partial H_0^{(1)}(\lambda r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} |J| d\xi = -\frac{j l_j}{4} \lambda \int_{-1}^1 H_1^{(1)}(\lambda r) \cos(\beta) d\xi$$

avec: $H_1^{(1)}$ la dérivée de la fonction de Henkel.

D'où:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{i,j} &= -\frac{\lambda j l_j}{8} \sum_{k=1}^m H_1^{(1)}(\lambda r_k) \cos(\beta_k) W_k \\ &= -\frac{\lambda j l_j}{8} \sum_{k=1}^m \left[(J_1(\lambda r_k) + j Y_1(\lambda r_k)) \cos(\beta_k) W_k \right] \quad \text{avec } j^2 = -1 \\ &= +\frac{\lambda l_j}{8} \sum_{k=1}^m \left[(Y_1(\lambda r_k) - j J_1(\lambda r_k)) \cos(\beta_k) W_k \right] \end{aligned} \quad (\text{V.3.4.1})$$

où : J_1 et Y_1 sont des fonctions de Bessel de premier et deuxième ordre, on remarque que :

$$\hat{H}_{i,j} = R\hat{H}_{i,j} - j\text{IM}\hat{H}_{i,j}$$

avec: $R\hat{H}_{i,j}$ = partie réelle de $\hat{H}_{i,j}$

$$\text{IM}\hat{H}_{i,j} = \text{partie imaginaire de } \hat{H}_{i,j}$$

à cause de l'orthogonalité de \vec{r} et \vec{n} on a $\cos(\beta) = 0$, donc:

d'où:
$$RH_{i,i} = IM\hat{H}_{i,i} = 0$$

$$H_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} & \text{pour } i = j \\ R\hat{H}_{i,j} - jIM\hat{H}_{i,j} & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (V.3.4.2)$$

$$G_{i,j} = \int_{\Gamma_j} p_i^* d\Gamma_j = \frac{j}{4} \int_{-1}^1 H_0^{(1)}(\lambda r) |J| d\xi = \frac{j l_j}{8} \sum_{k=1}^m H_0^{(1)}(\lambda r_k) W_k$$

$$= \frac{j l_j}{8} \sum_{k=1}^m \left[(J_0(\lambda r_k) + jY_0(\lambda r_k)) W_k \right]$$

$$= \frac{j}{8} \sum_{k=1}^m \left[(-Y_0(\lambda r_k) + jJ_0(\lambda r_k)) W_k \right] \quad (V.3.4.3)$$

On remarque que:

$$G_{i,j} = R G_{i,j} + IM G_{i,j}$$

avec: $R G_{i,j}$: la partie réelle de $G_{i,j}$

$IM G_{i,j}$: la partie imaginaire de $G_{i,j}$

En ce qui concerne les termes $G_{i,j}$ ils sont calculés analytiquement à cause de leur singularité, en utilisant l'approximation suivante de ^{la solution} l'équation fondamentale:

Lorsque r tend vers zéro on a:

$$Y_0(\lambda r) \approx \frac{2}{\pi} \text{Ln}(\lambda r) \quad r \rightarrow 0$$

$$J_0(\lambda r) \approx 1$$

$$G_{i,i} = \int_{\Gamma_j} p_i^* d\Gamma_j = \frac{j}{4} \int_{\Gamma_j} (J_0(\lambda r) + jY_0(\lambda r)) d\Gamma_j$$

d'où:

$$G_{i,i} = -\frac{1}{4} \int_{\Gamma_j} Y_0(\lambda r) d\Gamma_j + \frac{j}{4} \int_{\Gamma_j} J_0(\lambda r) d\Gamma_j$$

ou encore:

$$G_{i,i} = R G_{i,i} + IM G_{i,i}$$

avec:

$$R G_{i,i} = -\frac{1}{4} \frac{2}{\pi} \int_{\Gamma_j} \text{Ln}(\lambda r) d\Gamma_j = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{l_j} \text{Ln}\left(\frac{\lambda \xi}{2}\right) d\xi \int_0^{l_i}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left[l_i \text{Ln}\left(\frac{\lambda l_i}{2}\right) - l_i \right] = \frac{l_i}{2\pi} \left[1 - \text{Ln}\left(\frac{\lambda l_i}{2}\right) \right]$$

$$\text{IMG}_{i,j} = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_j} d\Gamma_j = \frac{1}{4} \int_0^{l_j} d\xi = \frac{l_j}{4}$$

$$\text{d'où:} \quad G_{i,i} = \frac{l_j}{2\pi} \left[1 - \text{Ln} \left(\frac{\lambda l_j}{2} \right) \right] + j \frac{l_j}{4} \quad (\text{V.3.4.4})$$

b) Cas d'élément linéaire

Les intégrales données par (V.2.3.10) dans le paragraphe (V.2.3) sont évaluées comme suit:

$$\begin{aligned} h_{i,j}^{(1)} &= \int_{\Gamma_j} \Phi_i q_i^* d\Gamma_j = -\frac{j}{4} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1-\xi) \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} |J| d\xi \\ &= -\frac{j l_j \lambda}{16} \int_{-1}^1 (1-\xi) H_1^{(1)}(\lambda r) \cos(\beta) d\xi \\ &= -\frac{j l_j \lambda}{16} \sum_{k=1}^m [(1-\xi_k) H_1^{(1)}(\lambda r_k) \cos(\beta_k) W_k] \\ &= -\frac{\lambda l_j j}{16} \sum_{k=1}^m [(J_1(\lambda r_k) + j Y_1(\lambda r_k))(1-\xi_k) \cos(\beta_k) W_k] \\ &= \frac{\lambda l_j}{16} \sum_{k=1}^m [(Y_1(\lambda r_k) - j J_1(\lambda r_k))(1-\xi_k) \cos(\beta_k) W_k] \end{aligned} \quad (\text{V.3.4.5})$$

on remarque que:

$$h_{i,j}^{(1)} = R h_{i,j}^{(1)} - j I M h_{i,j}^{(1)}$$

avec:

$R h_{i,j}^{(1)}$: la partie réelle de $h_{i,j}^{(1)}$

$I M h_{i,j}^{(1)}$: la partie imaginaire de $h_{i,j}^{(1)}$

de la même manière on a:

$$\begin{aligned} h_{i,j}^{(1)} &= \frac{\lambda l_j}{16} \sum_{k=1}^m [(Y_1(\lambda r_k) - j J_1(\lambda r_k))(1+\xi_k) \cos(\beta_k) W_k] \quad (\text{V.3.4.6}) \\ h_{i,j}^{(1)} &= R h_{i,j}^{(1)} - j I M h_{i,j}^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{i,j}^{(1)} &= \int_{\Gamma_j} \Phi_i p_i^* d\Gamma_j = \frac{j}{4} \int_{-1}^1 \Phi_i H_0^{(1)}(\lambda r) |J| d\xi = \frac{j l_j}{16} \int_{-1}^1 (1-\xi) H_0^{(1)}(\lambda r) d\xi \\
 &= \frac{j l_j}{16} \sum_{k=1}^m [(1-\xi_k) H_0^{(1)}(\lambda r_k) W_k] = \frac{l_j}{16} \sum_{k=1}^m [(-Y_0(\lambda r_k) + jJ_0(\lambda r_k))(1-\xi_k) W_k]
 \end{aligned}
 \tag{V.3.4.7}$$

on remarque que:

$$g_{i,j}^{(1)} = R g_{i,j}^{(1)} + jIM g_{i,j}^{(1)}$$

avec:

$Rg_{i,j}^{(1)}$: la partie réelle de $g_{i,j}^{(1)}$

$IMg_{i,j}^{(1)}$: la partie imaginaire de $g_{i,j}^{(1)}$

de la même manière on a:

$$g_{i,j}^{(2)} = \frac{l_j}{16} \sum_{k=1}^m [(-Y_0(\lambda r_k) + jJ_0(\lambda r_k))(1+\xi_k) W_k] \tag{V.3.4.8}$$

$$g_{i,j}^{(2)} = Rg_{i,j}^{(2)} + jIMg_{i,j}^{(2)}$$

En ce qui concerne les termes $g_{i,j}^{(1)}$ et $g_{i,j}^{(2)}$ sont calculés analytiquement à cause de leurs singularité en utilisant la même approximation que celle dans le cas des éléments constants: on aura:

* Pour la partie réelle:

$$R g_{i,i}^{(1)} = \frac{l_i}{4\pi} (1,5 - \text{Ln}(l_i)) \tag{V.3.4.9}$$

$$R g_{i,i}^{(2)} = \frac{l_i}{4\pi} (0,5 - \text{Ln}(l_i)) \tag{V.3.4.10}$$

* Pour la partie imaginaire:

$$IM g_{i,i}^{(1)} = \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int_0^{l_i} (1 - \frac{x}{l_i}) dx = \frac{l_i}{8} \tag{V.3.4.11}$$

$$IM g_{i,i}^{(2)} = \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int_0^{l_i} (\frac{x}{l_i}) dx = \frac{l_i}{16} \tag{V.3.4.12}$$

les termes $Rh_{i,j}^{(1)}$, $Rh_{i,j}^{(2)}$, $IMh_{i,j}^{(1)}$ et $IMh_{i,j}^{(2)}$ sont nuls à cause de l'orthogonalité des vecteurs \vec{r} et \vec{n} , $\cos(\beta) = 0$. D'où:

$$H_{i,i} = \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) - j\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) \quad (\text{V.3.4.13})$$

avec θ l'angle extérieure au niveau du noeud.

c) Cas d'élément quadratique

Les intégrales données par (V.2.3.18) dans le paragraphe (V.2.3) sont évaluées comme suit:

$$\begin{aligned} h_{i,j}^{(1)} &= \int_{\Gamma_j} \Phi_i q_i^* d\Gamma_j = \frac{j}{4} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \xi(\xi-1) \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} |J| d\xi \\ &= \frac{j\lambda}{8} \int_{-1}^1 \xi(\xi-1) H_1^{(1)}(\lambda r) \cos(\beta) |J| d\xi \\ &= \frac{j\lambda}{8} \sum_{k=1}^m \left[\left(\xi_k (\xi_k - 1) H_1^{(1)}(\lambda r_k) \cos(\beta_k) |J| W_k \right) \right] \\ &= \frac{j\lambda}{8} \sum_{k=1}^m \left[\left(J_1(\lambda r_k) + jY_1(\lambda r_k) \right) \xi_k (\xi_k - 1) \cos(\beta_k) |J| W_k \right] \\ &= -\frac{\lambda}{8} \sum_{k=1}^m \left[\left(Y_1(\lambda r_k) - jJ_1(\lambda r_k) \right) \xi_k (\xi_k - 1) \cos(\beta_k) |J| W_k \right] \end{aligned} \quad (\text{V.3.4.14})$$

On remarque que:

$$h_{i,j}^{(1)} = Rh_{i,j}^{(1)} + jIMh_{i,j}^{(1)}$$

avec: $Rh_{i,j}^{(1)} = \text{partie réelle de } h_{i,j}^{(1)}$

$$IMh_{i,j}^{(1)} = \text{partie imaginaire de } h_{i,j}^{(1)}$$

de la même manière on

$$h_{i,j}^{(2)} = -\frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^m \left[\left(Y_1(\lambda r_k) - jJ_1(\lambda r_k) \right) (1 - \xi_k^2) \cos(\beta_k) |J| W_k \right] \quad (\text{V.3.4.15})$$

$$h_{i,j}^{(2)} = Rh_{i,j}^{(2)} + jIMh_{i,j}^{(2)}$$

$$h_{i,j}^{(3)} = -\frac{\lambda}{8} \sum_{k=1}^m \left[\left(Y_1(\lambda r_k) - jJ_1(\lambda r_k) \right) \xi_k (1 + \xi_k) \cos(\beta_k) |J| W_k \right] \quad (\text{V.3.4.16})$$

$$h_{i,j}^{(3)} = Rh_{i,j}^{(3)} + jIMh_{i,j}^{(3)}$$

$$\begin{aligned}
 g_{i,j}^{(1)} &= \int_{\Gamma_j} \Phi_i p_i^* d\Gamma_j = \frac{j}{4} \int_{-1}^1 \Phi_i H_0^{(1)}(\lambda r) |J| d\xi \\
 &= \frac{j}{8} \int_{-1}^1 \xi (\xi - 1) H_0^{(1)}(\lambda r) |J| d\xi \\
 &= \frac{j}{8} \sum_{k=1}^m \left[\xi_k (\xi_k - 1) H_0^{(1)}(\lambda r_k) |J| W_k \right] \\
 &= \frac{j}{8} \sum_{k=1}^m \left[(-Y_0(\lambda r_k) + jJ_0(\lambda r_k)) \xi_k (\xi_k - 1) |J| W_k \right] \quad (V.3.4.17)
 \end{aligned}$$

on remarque que:

$$g_{i,j}^{(1)} = Rg_{i,j}^{(1)} + jIMg_{i,j}^{(1)}$$

avec: $Rg_{i,j}^{(1)} =$ partie réelle de $g_{i,j}^{(1)}$

$IMg_{i,j}^{(1)} =$ partie imaginaire de $g_{i,j}^{(1)}$

de la même manière on a:

$$g_{i,j}^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \left[(-Y_0(\lambda r_k) + jJ_0(\lambda r_k)) (1 - \xi_k^2) |J| W_k \right] \quad (V.3.4.18)$$

$$g_{i,j}^{(2)} = Rg_{i,j}^{(2)} + IMg_{i,j}^{(2)}$$

$$g_{i,j}^{(3)} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^m \left[(-Y_0(\lambda r_k) + jJ_0(\lambda r_k)) \xi_k (1 + \xi_k) |J| W_k \right] \quad (V.3.4.19)$$

$$g_{i,j}^{(3)} = Rg_{i,j}^{(3)} + IMg_{i,j}^{(3)}$$

***calcul des intégrales dans les singularités:**

En utilisant la même approximation que celle que dans le cas des éléments constants et linéaires et en procédant de la même manière qu'au cas où l'eau est considérée incompressible on aura:

Pour la partie réelle:

(i) le point de collocation est au noeud (1):

$$Rg_{i,i}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G|(2\eta_k - 1)(\eta_k - 1)V_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |J|\xi_k(\xi_k - 1)Ln\left(\frac{1}{Z_k}\right)W_k \right] \quad (V.3.4.20)$$

$$Rg_{i,i}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \left[4 \sum_{k=1}^m |G|\eta_k(1 - \eta_k)V_k + \sum_{k=1}^m |J|(1 - \xi_k^2)Ln\left(\frac{1}{Z_k}\right)W_k \right] \quad (V.3.4.21)$$

$$Rg_{i,i}^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G|\eta_k(2\eta_k - 1)V_k + \sum_{k=1}^m |J|\xi_k(\xi_k + 1)Ln\left(\frac{1}{Z_k}\right)W_k \right] \quad (V.3.4.22)$$

(i i) le point de collocation est au noeud (2) :

$$Rg_{i,i}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G'|\eta'_k(\eta'_k + 1)V'_k + \sum_{k=1}^m |G|\eta_k(\eta_k - 1)V_k + \sum_{k=1}^m |J|\xi_k(\xi_k - 1)Ln\left(\frac{1}{Z_k}\right)W_k \right] \quad (V.3.4.23)$$

$$Rg_{i,i}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G|(1 - \eta_k'^2)V'_k + \sum_{k=1}^m |G|(1 - \eta_k^2)V_k + \sum_{k=1}^m |J|(1 - \xi_k^2)Ln\left(\frac{1}{Z_k}\right)W_k \right] \quad (V.3.4.24)$$

$$Rg_{i,i}^{(3)} = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G'|\eta'_k(\eta'_k + 1)V'_k + \sum_{k=1}^m |G|\eta_k(\eta_k + 1)V_k + \sum_{k=1}^m |J|\xi_k(1 + \xi_k)Ln\left(\frac{1}{Z_k}\right)W_k \right] \quad (V.3.4.25)$$

(i i i) le point de collocation est au noeud (3) :

$$Rg_{i,i}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G|\eta_k(2\eta_k - 1)V_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |J|\xi_k(\xi_k - 1)Ln\left(\frac{1}{Z_k}\right)W_k \right] \quad (V.3.4.26)$$

$$g_{i,i}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \left[4 \sum_{k=1}^m |G|\eta_k(1 - \eta_k)V_k + \sum_{k=1}^m |J|(1 - \xi_k^2)Ln\left(\frac{1}{Z_k}\right)W_k \right] \quad (V.3.4.27)$$

$$g_{i,i}^{(3)} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=1}^m |G|(2\eta_k - 1)(\eta_k - 1)V_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m |J|\xi_k(1 + \xi_k)Ln\left(\frac{1}{Z_k}\right)W_k \right] \quad (V.3.4.28)$$

Pour la partie imaginaire :

$$IM g_{i,i}^{(1)} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^m \left[\xi_k(\xi_k - 1)|J|W_k \right] \quad (V.3.4.29)$$

$$IM g_{i,i}^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^m \left[(1 - \xi_k^2)|J|W_k \right] \quad (V.3.4.30)$$

$$IM g_{i,i}^{(3)} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^m \left[\xi_k(\xi_k + 1)|J|W_k \right] \quad (V.3.4.31)$$

V.3.5 - Points internes

La détermination des inconnues physiques (pressions hydrodynamiques) en des points que l'on choisit à l'intérieur du domaine reste le même que dans le cas du fluide incompressible. Toutes les équations établies au paragraphe (V.2.5) restent valables ici, mais seulement dans ce cas là, pour l'évaluation des intégrales données aux équations (V.2.5.4), (V.2.5.5) et (V.2.5.6), voir le paragraphe (V.3.4).

V-4 CAS DU SOLIDE

V-4-1 Solution fondamentale

Dans le but de l'obtention des équations intégrales, on aura besoin des solutions fondamentales singulières (fonctions de Green), dans un espace infini représentant la réponse à une force volumique concentrée unitaire en un point « i » et agissant dans une direction « e ». Dans le domaine des fréquences la fonction de Green du milieu infini correspond à une source unitaire et doit satisfaire l'équation suivante :

$$\rho (\Delta^* + \omega^2) u + \Delta_i e = 0$$

avec : Δ_i représente la fonction Delta de Dirac qui est en effet une impulsion unitaire appliquée au point source « i » suivant la direction du vecteur « e », et :

$$\Delta^* = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \text{grad div} : \text{représente l'opérateur de l'élasticité.}$$

La solution fondamentale est notée U_{LK}^* et exprime le déplacement complexe dans le sens j au point x dû à une force unitaire concentrée au point « i » et dirigée dans le sens e_L .

La traction sur une facette de normale n associée à U_{LK}^* est T_{LK}^* .

Les fonctions de Green du milieu infini sont données comme suit : [12]

$$U_{ik}^*(x, y) = \frac{1}{2\mu\pi} \left\{ \left[\left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 J_2 \left(\frac{Sr}{C_1} \right) - J_2 \left(\frac{Sr}{C_2} \right) \right] r_i r_k - \left[\left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 \frac{C_1}{Sr} J_1 \left(\frac{Sr}{C_1} \right) - \frac{C_2}{Sr} J_1 \left(\frac{Sr}{C_2} \right) - J_0 \left(\frac{Sr}{C_2} \right) \right] \delta_{L,k} \right\}$$

(V.4.1.1)

$$\begin{aligned}
 T_{ik}^*(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{S}{C_1} \left[\left(2 \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 - 1 \right) r_{,i} n_{,k} - 2 \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 r_{,i} r_{,k} r_{,n} \right] J_1 \left(\frac{Sr}{C_1} \right) \right. \\
 & + \frac{S}{C_2} \left(2 r_{,i} r_{,k} r_{,n} - \delta_{i,k} r_{,n} - r_{,i} r_{,k} \right) J_1 \left(\frac{Sr}{C_2} \right) \\
 & \left. - \frac{2}{r} \left[J_2 \left(\frac{Sr}{C_2} \right) - \left(\frac{C_2}{C_1} \right)^2 J_2 \left(\frac{Sr}{C_1} \right) \right] \left(r_{,k} n_{,i} + r_{,i} n_{,k} + \delta_{ik} r_{,n} r_{,j} r_{,n} \right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{V.4.1.2}$$

Où C_1 et C_2 sont respectivement les vitesses des ondes de dilatation et de cisaillement, μ est le module de cisaillement du milieu, $s = iw$ est un paramètre complexe, $J_0(Z)$, $J_1(Z)$, $J_2(Z)$, sont les fonctions de Bessel de seconde espèce d'ordre zéro, un et deux respectivement et enfin r représente la distance entre le point source « i » et le point où s'effectue l'intégration.

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ainsi U_{1k}^* et T_{1k}^* sont les solutions fondamentales en deux dimensions pour des domaines infinis que nous utiliserons dans la formulation du problème par la méthode des équations intégrales aux frontières.

Remarque :

Les solutions fondamentales exprimées par les équations (V.4.1.1) et (V.4.1.2) ont été établies pour un état de déformation plane. Ces mêmes expressions sont valides pour un état de contraintes planes, en remplaçant tout simplement le coefficient de poisson ν par son équivalent $\bar{\nu}$ tel que

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu}$$

Rappelons que : $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$

V-4-2 Formulation de l'équation intégrale aux frontières

L'équation (IV.4.2.2) s'écrit dans l'état élastodynamique comme suit :

$$C_{i,k}^i U_k^i + \int_{\Gamma} \langle \Phi \rangle \{ U_k \} T_{i,k}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \langle \Phi \rangle U_{i,k}^* \{ t_k \} d\Gamma + \int_{\Omega} \langle \Phi \rangle f_k \{ U_{i,k}^* \} d\Omega
 \tag{V.4.2.1}$$

en négligeant les forces volumiques, l'équation (V.4.2.1) s'écrit :

$$C_{ik}^i U_k^i + \int_{\Gamma} \langle \Phi \rangle \{U_k\} T_{ik}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} \langle \Phi \rangle U_{kk}^* \{t_k\} d\Gamma \quad (\text{V.4.2.2})$$

l'équation intégrale (V.4.2.2) est valable pour un point se situant sur la frontière ou à l'intérieure du domaine, les valeurs de C_{ik}^i pour de différents endroits sont données comme suit : [5]

$$C_{i,k}^i = \begin{cases} \delta_{i,k} & \text{Pour un point situé à l'intérieur du domaine} \\ \frac{1}{2} \delta_{i,k} & \text{Pour un point source « i » appartenant à une frontière lisse} \\ \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) \delta_{i,k} & \text{Pour un point source « i » appartenant à un coin} \end{cases}$$

En écrivant C_{ik}^i sous forme matricielle, on aura :

* si le point « i » se situe à l'intérieur du domaine :

$$C_{i,k}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* si le point « i » appartient à une frontière lisse :

$$C_{i,k}^i = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

* si le point « i » appartient à un coin :

$$C_{i,k}^i = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) \end{bmatrix}$$

avec θ : l'angle extérieur au niveau du coin.

Les termes U_{1k}^* , T_{1k}^* , sont des matrices de dimension (2 x 2) :

$$U_{i,k}^* = \begin{bmatrix} U_{1,1}^* & U_{1,2}^* \\ U_{2,1}^* & U_{2,2}^* \end{bmatrix}, \quad T_{i,k}^* = \begin{bmatrix} T_{1,1}^* & T_{1,2}^* \\ T_{2,1}^* & T_{2,2}^* \end{bmatrix}$$

avec : U_{1k}^* , T_{1k}^* sont les solutions fondamentales.

Les déplacements et tractions sont donnés sous forme vectorielle comme suit :

$$u_k = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad t_k = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix}$$

V-4-3 Discrétisation de l'équation intégrale

Supposons que la frontière soit discrétisée en N éléments, l'équation intégrale (V.4.2.1) se met sous la forme suivante :

$$C_{i,k}^i U_k + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \langle \Phi \rangle T_{i,k}^* U_k^j d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \langle \Phi \rangle U_{i,k}^* T_k^j d\Gamma_j \quad (V.4.3.1)$$

*U_k^j?
T_k^j?
éléments j → système d'équations
Méthode*

où U_k^j et T_k^j sont des composantes des déplacements et des tensions au sein de l'élément « j ».

$$\text{Et : } \hat{H}_{i,k}^j = \int_{\Gamma_j} \langle \Phi \rangle T_{i,k}^* d\Gamma_j, \quad G_{i,k}^j = \int_{\Gamma_j} \langle \Phi \rangle U_{i,k}^* d\Gamma_j$$

d'où l'équation (V.4.3.1) devient :

$$C_i U_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{i,k}^{i,j} U_k^j = \sum_{j=1}^N G_{i,k}^{i,j} t_k^j \quad (V.4.3.2)$$

avec : $H_{i,k}$, $G_{i,k}$ sont des matrices de dimensions (2 x 2) :

$$\hat{H}^{i,j} = \begin{bmatrix} H_{1,1}^j & H_{1,2}^j \\ H_{2,1}^j & H_{2,2}^j \end{bmatrix}, \quad G^{i,j} = \begin{bmatrix} G_{1,1}^j & G_{1,2}^j \\ G_{2,1}^j & G_{2,2}^j \end{bmatrix}$$

et u_k^j , t_k^j sont des vecteurs de dimension (2) :

$$u^j = \begin{Bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \end{Bmatrix}, \quad t^j = \begin{Bmatrix} t_1^j \\ t_2^j \end{Bmatrix}$$

on peut écrire encore :

$$H^{i,j} = \hat{H}^{i,j} \quad \text{pour } i \neq j$$

$$H^{i,j} = C_i + \hat{H}^{i,j} \quad \text{pour } i = j$$

d'où l'équation (V.4.3.2) devient :

$$\sum_{j=1}^N H^{i,j} u^j = \sum_{j=1}^N G^{i,j} t^j \quad (\text{V.4.3.3})$$

d'où l'équation (V.4.3.3) prend la forme matricielle suivante :

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (\text{V.4.3.4})$$

Après introduction des équations aux limites , le système d'équation (V.4.3.4) prend la forme suivante :

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (\text{V.4.3.5})$$

V-5 COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE (eau - barrage)

Après avoir déterminé les deux formes matricielles (fluide - structure) nous ferons maintenant un couplage entre eux, afin de déterminer les inconnues à l'interface des deux milieux.

$$\text{Pour le fluide : } [H_f]\{p\} = [G_f]\{q\}$$

$$\text{Pour le solide : } [H_s]\{u\} = [G_s]\{t\}$$

les conditions d'équilibre :

$$\overline{p}_{int} = -\overline{t}_{int} \quad (\text{V.5.1})$$

les conditions de compatibilité :

$$\overline{q}_{int} = \frac{\partial^2 \overline{u}_{int}}{\partial t^2} \quad (\text{V.5.2})$$

sachant que le mouvement est sinusoïdale , on peut écrire :

$$\overline{u}_{int} = u_{int} e^{j\omega t} \quad (\text{V.5.3})$$

en remplaçant (V.5.3) dans (V.5.2) , on aura :

$$-u_{int} \omega^2 e^{j\omega t} = q_{int}$$

où $u_{int} = -\frac{q_{int}}{\omega^2}$ avec $j^2 = -1$

en posant : $B = -\frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2}$

on aura : $u_{int} = q_{int} B$ (V.5.4)

d'après le chapitre précédent , le système matriciel s'écrit :

$$\begin{bmatrix} H_f & H_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_s & H_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ P_{int} \\ U_{int} \\ U \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_f & \frac{1}{B}G_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_s & G_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ U_{int} \\ P_{int} \\ t \end{Bmatrix}$$

fluide interface solide

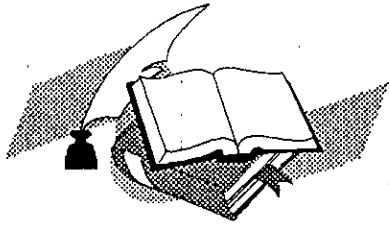
(V.5.5)

Avec P_{int} , U_{int} : sont les pressions et les déplacements à l'interface après réarrangement du système (V . 5 . 5), on aura :

$$\begin{bmatrix} H_f & H_f & -\frac{1}{B}G_f & 0 \\ 0 & G_s & H_s & H_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ P_{int} \\ U_{int} \\ U \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_f & 0 \\ 0 & G_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ t \end{Bmatrix}$$

fluide interface solide

(V.5.6)



Chapitre 6

Modélisation numérique

VI - INTRODUCTION

Les solutions analytiques des équations intégrales relatives aux problèmes de potentiels (équation de Laplace) et à celles de l'élasticité (équation de Navier), sont extrêmement rares et n'existent que pour quelques géométries et conditions aux limites excessivement simples. Pour être en mesure de traiter des cas un peu plus complexes et correspondants à ceux rencontrés dans la pratique, il a fallu attendre l'essor des techniques numériques et le développement des ordinateurs.

Dans ce chapitre, on va décrire les programmes numériques établis, qui permettent de déterminer les inconnues dans les deux cas :

- * cas où l'eau est considérée incompressible
- * cas où l'eau est considérée compressible

deux formulations sont utilisées dans chaque cas :

- * formulation en éléments constants (C)
- * formulation en éléments linéaires (L)

VI-2 PROGRAMME DE DESCE (C , L)

Ce programme permet de discrétiser la frontière du domaine en une série d'éléments (éléments constants , éléments linéaires).

Il permet aussi de déterminer :

- * le nombre total des noeuds de discrétisation (N) sur la frontière
- * le nombre des points intérieurs
- * les coordonnées des extrémités des éléments $X (j)$, $Y (j)$ qui sont aussi les coordonnées des noeuds dans le cas des éléments linéaires
- * les conditions aux limites $Q (I)$ pour chaque noeud selon le type de séisme (horizontal , vertical)

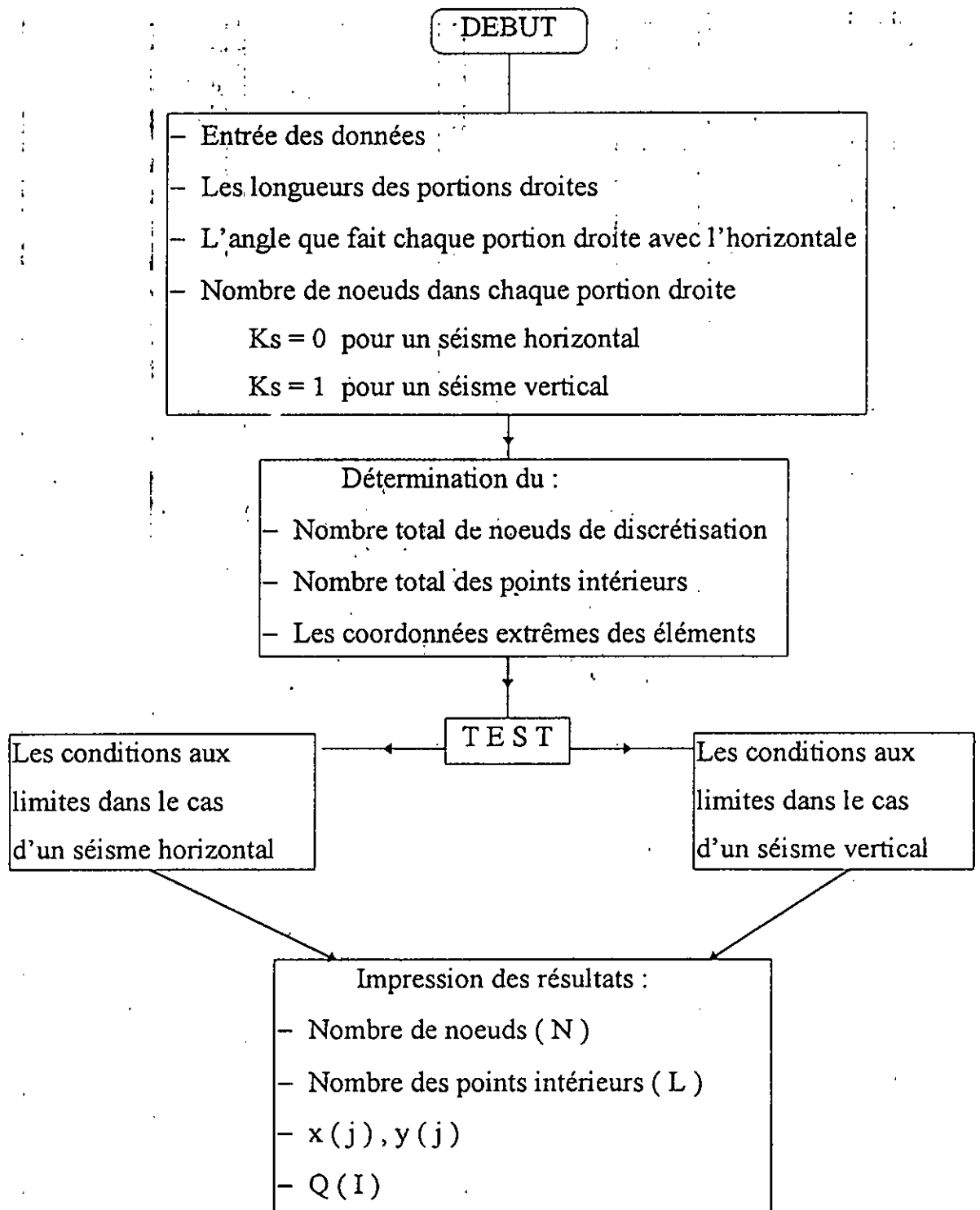


fig. (VI.1) Organigramme du programme de discrétisation en éléments constants et linéaires

VI-3 ETAPES DE RESOLUTION

Les grandes étapes pour la résolution de notre problème par la méthode des équations intégrales aux frontières sont représentées par la figure (VI . 2)

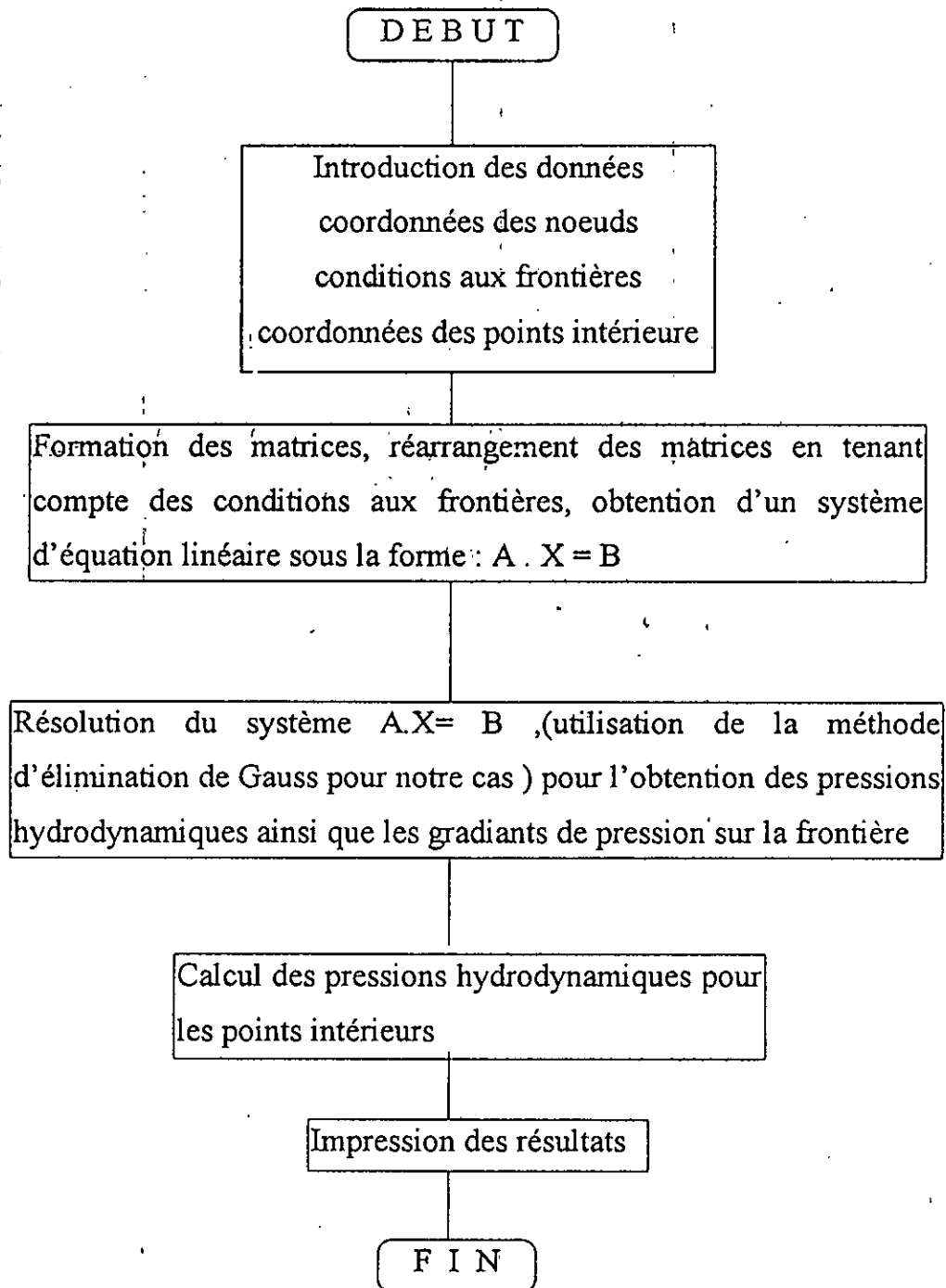


Fig. (VI.2) : Etapes de résolution par la B E M

VI-4 STRUCTURE DES PROGRAMMES

A présent nous présentons les structures principales des programmes établis :

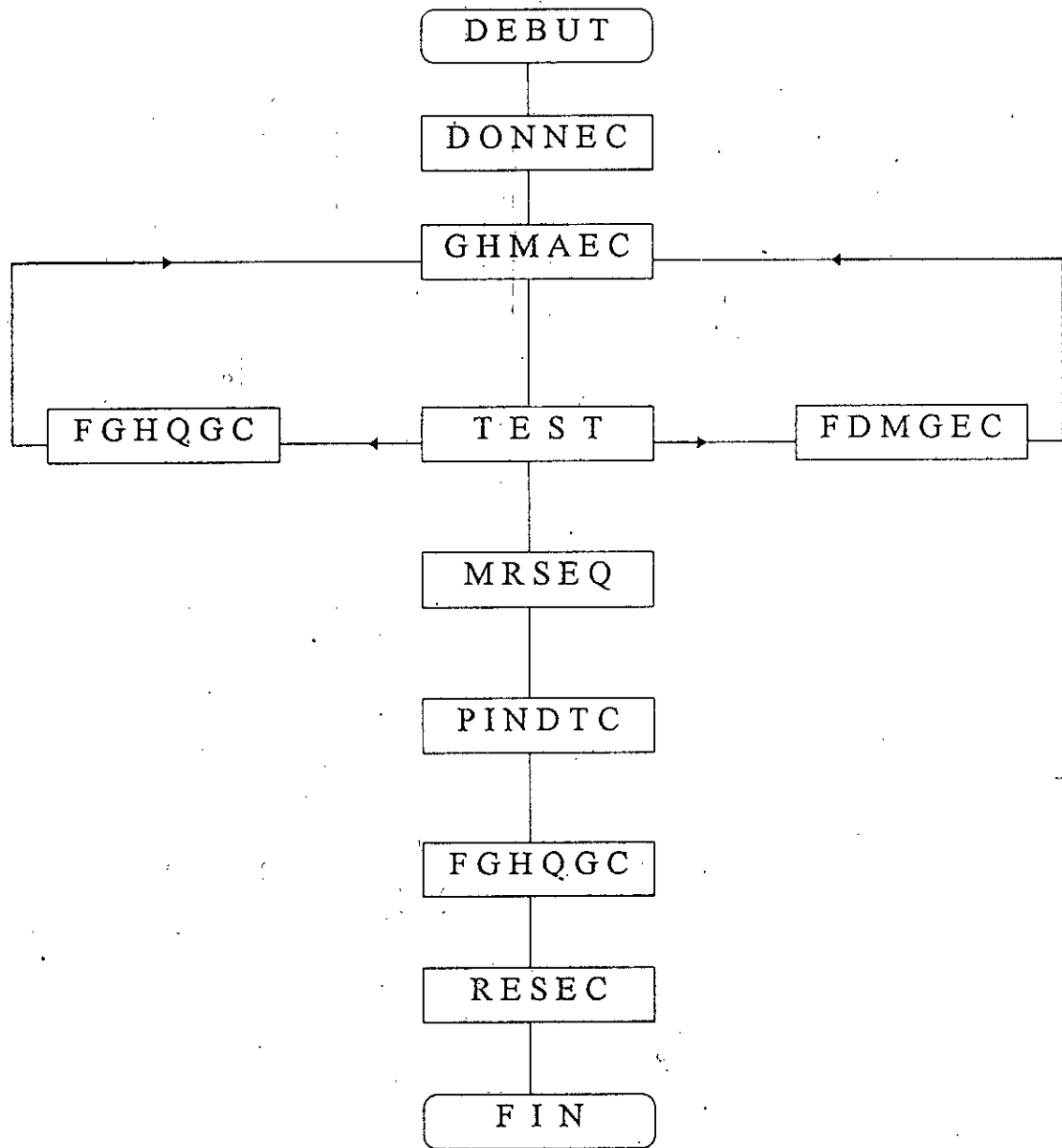
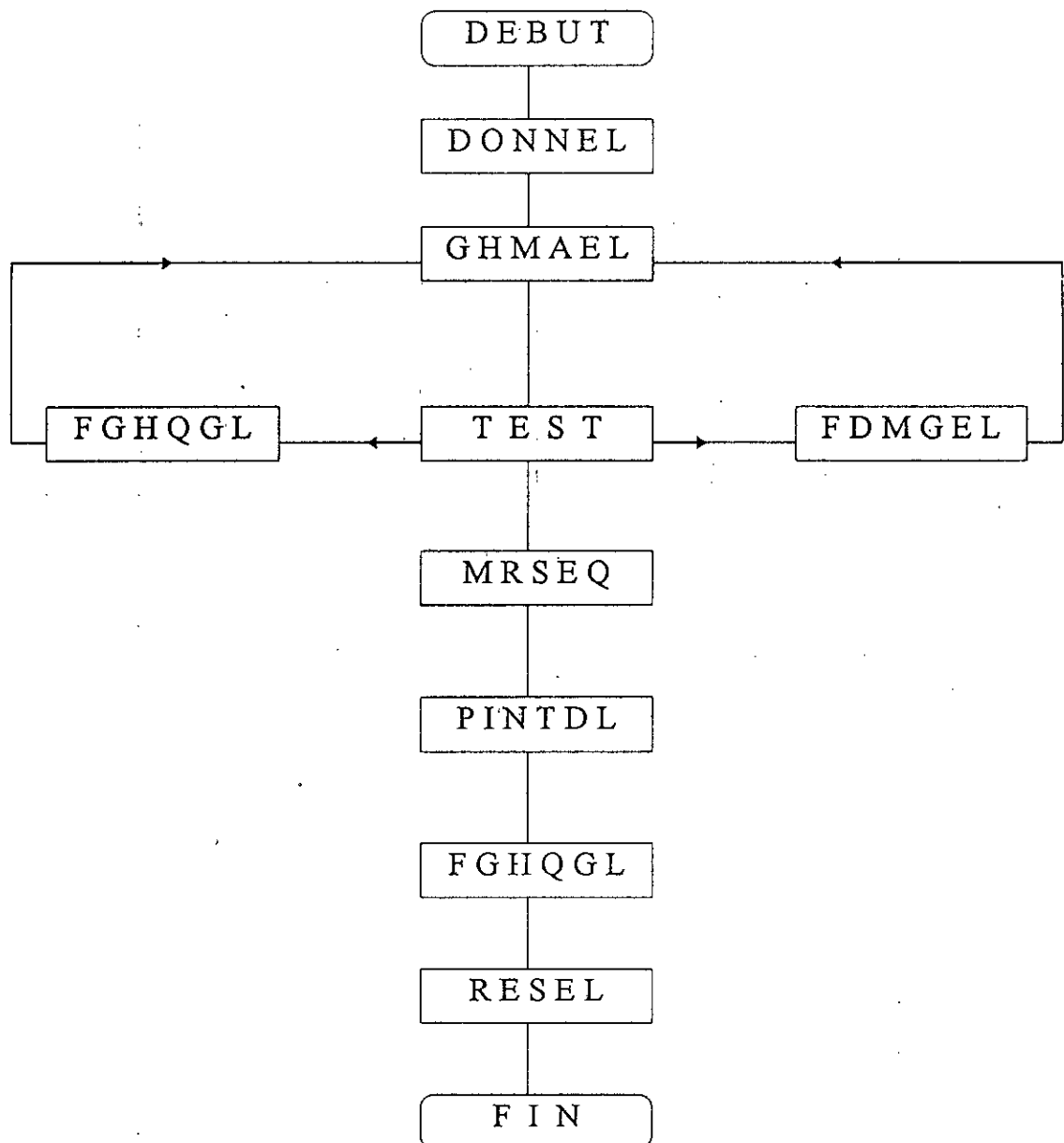
VI-4-1 Cas où l'eau est considérée incompressible*Elément constant*

Fig (VI.3) Organigramme du programme « P F E I E C »

Eléments linéaires**Fig (VI.4) : Organigramme du programme « P F E I F E L »**

VI-4-2 Cas où l'eau est considérée compressible

Eléments constants

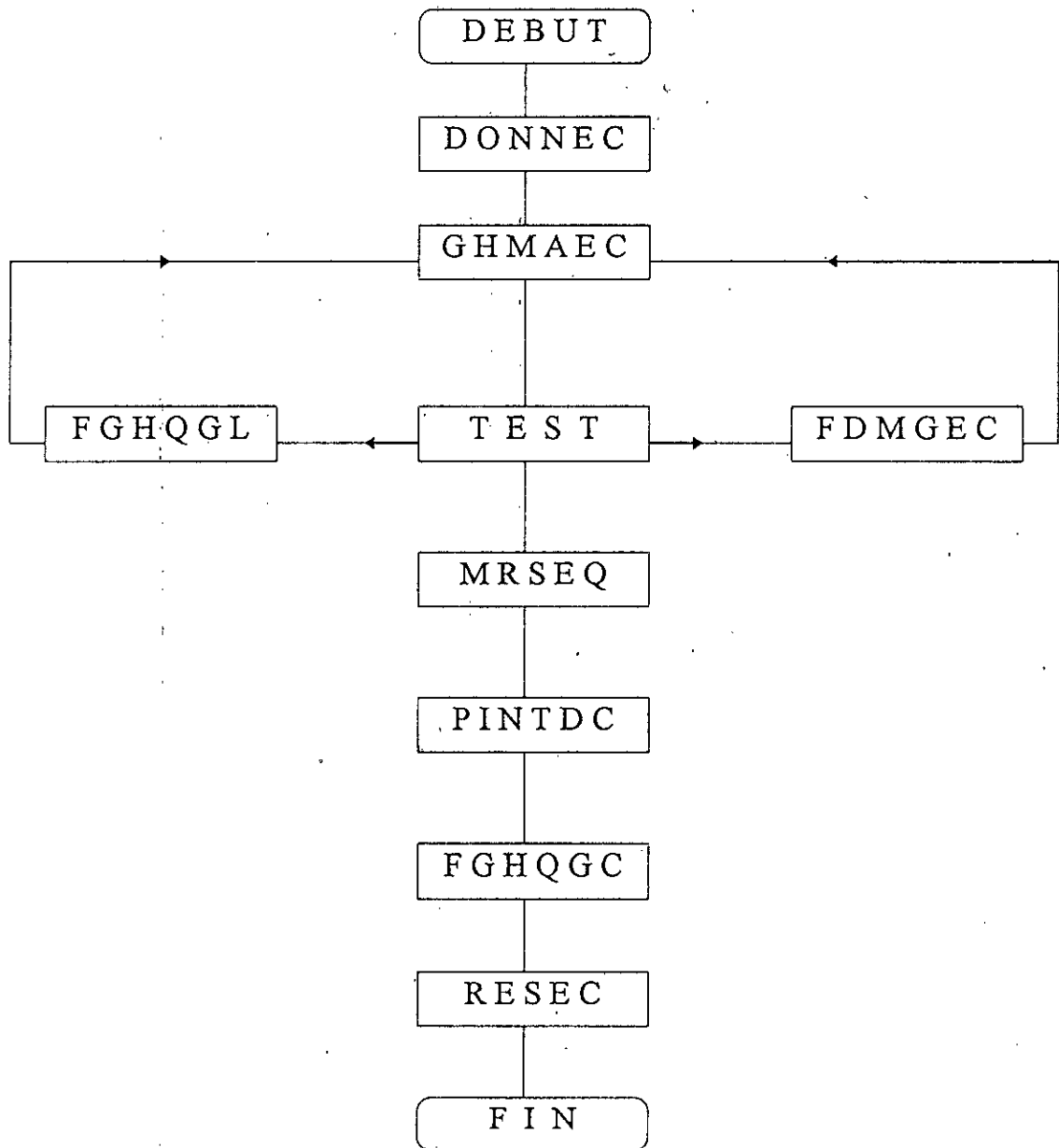


Fig.(VI.5) : Organigramme du programme « P F E C E C »

Eléments linéaires

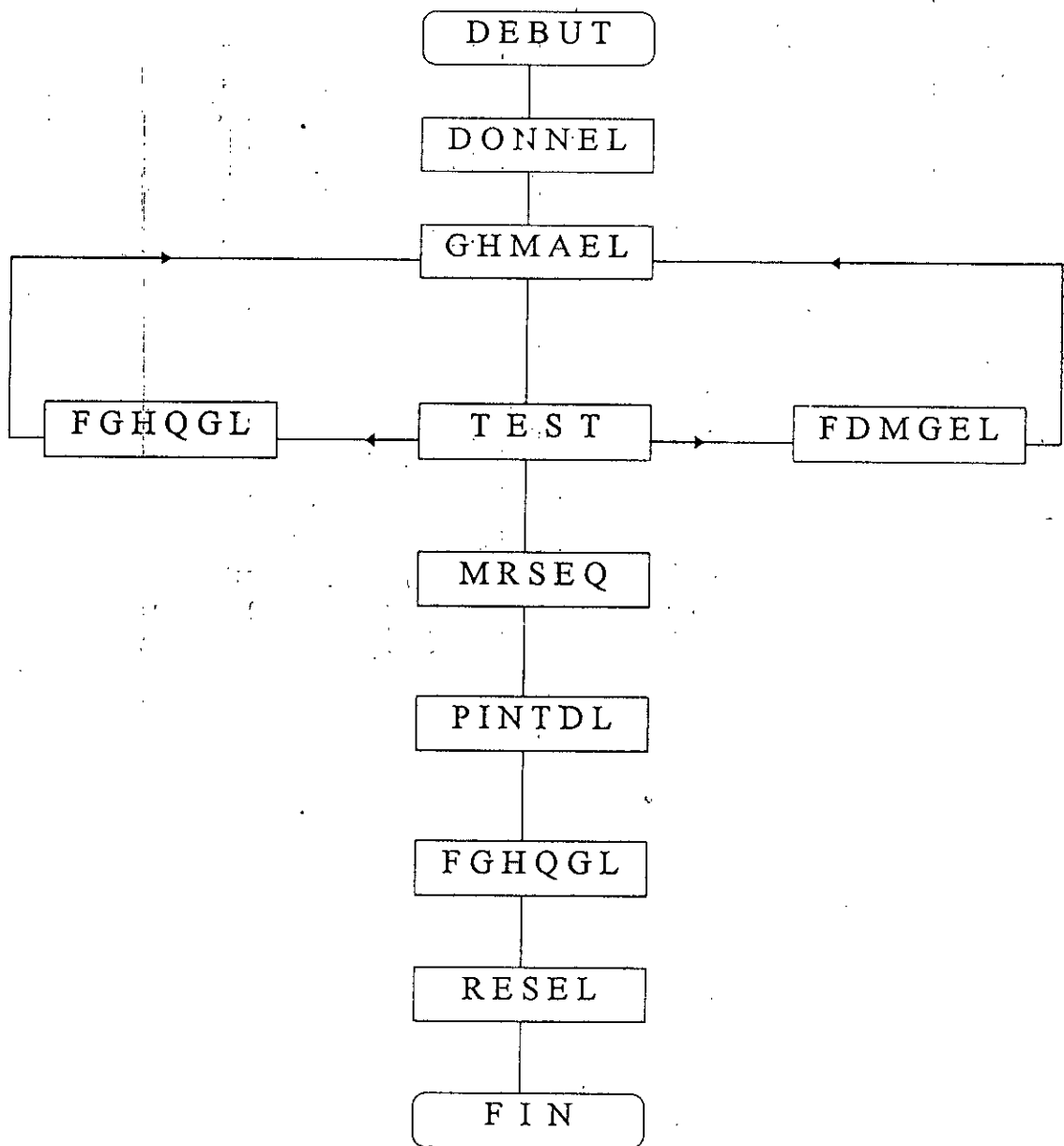


Fig (VI.6) : Organigramme du programme « P F E C E L »

VI-5 PRESENTATION DES ORGANIGRAMMES

Ces programmes sont conçus pour l'étude des pressions hydrodynamiques qui s'exercent sur un parement amont d'un barrage rigide pour différentes inclinaisons de ce dernier. Ces programmes sont constitués de sept sous - programmes (sousroutines) , qui ont en commun des blocs « common » blancs et étiquetés, permettant le passage des paramètres entre eux avec une bonne rapidité lors de l'exécution.

Les sous - programmes utilisés sont :

Sous - programme DONNE (C , L)

Dans le cas où l'eau est considérée incompressible, cette sousroutine permet de lire toutes les données nécessaires au déroulement du programme, à partir des fichiers obtenus par le programmes de discrétisation (DESCEC - DESCEL). Ils comportent les données suivantes :

- Nombre d'éléments N
- Nombre de points intérieurs L
- Coordonnées des extrémités des éléments $x(j)$ et $y(j)$, qui sont aussi les coordonnées des noeuds dans le cas des éléments linéaires.
- Les coordonnées $x_c(j)$, $y_c(j)$, qui sont les coordonnées des points internes
- Un code pour chaque noeud qui est égale à : 0 si la pression est connue
1 si le gradient est connu

Dans le cas où l'eau est considérée compressible, toutes les données restent les mêmes, en ajoutant :

- Le nombre d'onde $K = \omega / c$
- Un code qui permet d'indiquer si on a affaire : 0 partie imaginaire
1 partie réelle

Sous - programme GHMAEL (C , L)

Cette subroutine permet de calculer les matrices G et H , ceci en faisant appel aux subroutines suivantes : FGHQG (C , L) , FDMGE (C , L) et elle permet aussi le réarrangement du système obtenu sous forme : $A \cdot X = B$

Sous - programme FGHOG (C , L)

Cette subroutine permet de calculer les éléments des matrices H et G pour le cas où l'eau est considérée incompressible. Par contre si l'eau est considérée compressible ces termes seront calculés en introduisant des subroutines contenant les fonctions de BESSEL et de NEWMAN. Tout ces termes seront calculés en utilisant la quadrature de Gauss, voir (annexe 2)

Sous - programme FDMGE (C , L)

Cette subroutine permet de calculer les éléments de la diagonale de la matrice G analytiquement ;

Sous - programme MRSEQ

Cette subroutine permet la résolution du système d'équations $A \cdot X = B$ et cela par la méthode d'élimination de Gauss. Cette méthode est appliquée en deux étapes, à savoir la triangularisation du système puis la résolution du système triangularisé obtenu.

- triangularisation

Elle s'effectue selon l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} a_{i,j}^k = a_{i,j}^{(k-1)} - \left[\frac{a_{i,j}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} \right] * a_{k,j}^{(k-1)} \\ b_{i,j}^k = b_{i,j}^{(k-1)} - \left[\frac{a_{i,j}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} \right] * b_{k,j}^{(k-1)} \end{cases}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} i = k + 1 , n \\ j = k + 1 , n \\ k = 1 , n + 1 \end{cases}$$

- Résolution du système triangulaire :

Cette étape est relativement facile et son algorithme est le suivant :

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \frac{\left[b_i - \sum_{j=i+1} a_{i,j} x_j \right]}{a_{i,i}} \end{cases}$$

$$\text{avec : } i = n-1, 1, -1$$

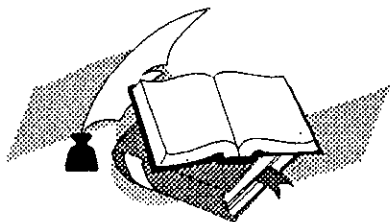
Sous-programmes PINTD (C, L)

Dans cette subroutine on va réarranger les paramètres du problème. Les pressions dans un vecteur et les gradients de pression dans un autre vecteur. Ces derniers vont être utilisés pour le calcul des pressions hydrodynamiques, en des points que l'on choisit à l'intérieur du domaine, en faisant appel aux subroutines FGHQG (C, L).

Sous-programme RESE (C, L)

Cette subroutine permet l'impression des résultats suivants :

- La pression pour chaque noeud de la frontière
- Le gradient de pression pour chaque noeud de la frontière
- La pression pour les points intérieurs choisis



Chapitre 7

*Applications et
interprétation des
résultats*

Après l'élaboration des programmes numériques, ces derniers vont être testés par quelques applications en considérant les hypothèses principales suivantes :

- 1- La hauteur du réservoir est de $H = 150$ m, avec une largeur égale a 4 fois la hauteur c'est a dire $L = 600$ m.
- 2- Un séisme horizontal ou vertical d'accélération unitaire.
- 3- Différents inclinaison du parement amont du barrage rigide.
- 4- Différents inclinaison du fond de la retenue.

Donc la première partie est consacrée pour les tracées des graphes des résultats obtenus, pour un fluide incompressible a fin de les comparés avec celles des résultats de Zangar, dans le cas du séisme horizontal.

En deuxième partie on traitera le cas ou l'eau est considérée compressible, par conséquent l'excitation est prise en compte, deux rapport d'intensités sont a étudiés.

$$\frac{\omega}{\omega_1} = 0,4$$

$$\frac{\omega}{\omega_1} = 0,8$$

avec :

ω : Fréquence propre du séisme.

ω_1 : Fréquence fondamentale du barrage donnée par [13] $\omega_1 = \frac{\pi C}{2H}$.

Ou :

C : Célérité du milieu égale a 1440 m/s.

H : Hauteur du réservoir.

Pour les deux parties la distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage sera représentée par la variation du coefficient de pression

$$C_p = \frac{P}{AGH} \quad \text{en fonction du rapport de la profondeur considérée à la profondeur total}$$

du réservoir $\frac{Y}{H}$.

avec :

P : Pression hydrodynamique exerce sur le parement amont du barrage.

G : Masse volumique de l'eau.

a : L'accélération du séisme, elle est considérée égale à l'unité.

H : Profondeur maximale du réservoir

Interprétations des résultats :

Cas ou l'eau est incompressible :

* Séisme horizontal :

Tout d'abord on remarque que les résultats obtenus sont très proches des résultats obtenus par Zangar d'où la fiabilité de la méthode des équations intégrales aux frontières.

On déduit d'abord des figures (1-2-3-4-5) que l'inclinaison du parement amont modifie la pression hydrodynamiques. Ainsi l'augmentation de la pente de ce dernier génère une diminution de la pression hydrodynamique. D'autre part, la pression hydrodynamique maximale est obtenue au pied du parement vertical comme le montre la figure (1). On remarque aussi que l'augmentation de l'angle que fait le fond de la retenue avec l'horizontale, fait diminuer les pressions hydrodynamiques comme le

montre les figures (5-6-7). Mise à part le parement vertical la pression hydrodynamique maximale est obtenue à une certaine hauteur au dessous de la surface libre. Comme le montre les figures (2-3-4-5-8).

**** Séisme vertical :**

Dans le cas où on a affaire à un séisme vertical, la pression hydrodynamique varie linéairement le long du parement amont comme le montre les figures (9-13), ainsi l'augmentation de l'inclinaison du parement n'engendre pas une grande variation des pressions hydrodynamiques, par contre l'interprétation reste la même que dans le cas où le fond est incliné comme le montre les figures (14-15).

Cas où l'eau est considérée compressible :

Dans le cas où l'eau est considérée compressible la pression hydrodynamique est directement proportionnelle à la fréquence du séisme, c'est à dire les pressions hydrodynamiques augmentent avec l'augmentation de la fréquence du séisme comme le montre les figures (16-21), si on fait une comparaison entre les résultats obtenus dans le cas où l'eau est incompressible avec ceux obtenus dans ce cas (eau compressible) on remarque que le fait de considérer l'eau incompressible pour des fréquences de séisme très élevées devant la fréquence propre du barrage sous-estime les pressions hydrodynamiques.

* pour les graphes on notera les symboles suivants :

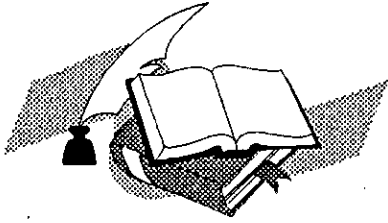
EC : Solution en élément constant.

EL : Solution en élément linéaire.

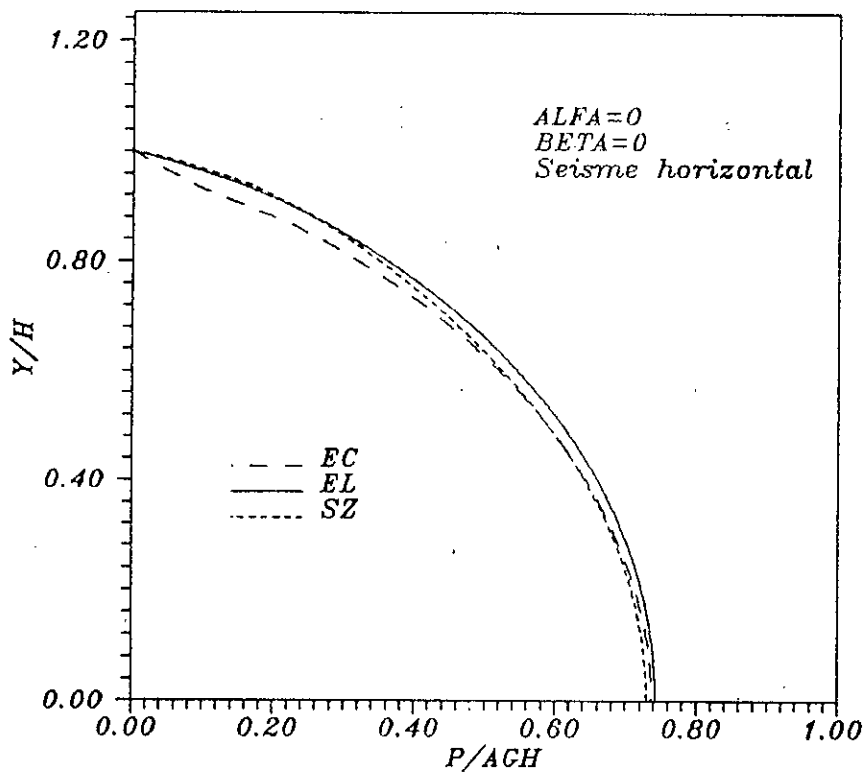
SZ : Solution de Zangar

α : L'angle que fait le parement avec la verticale

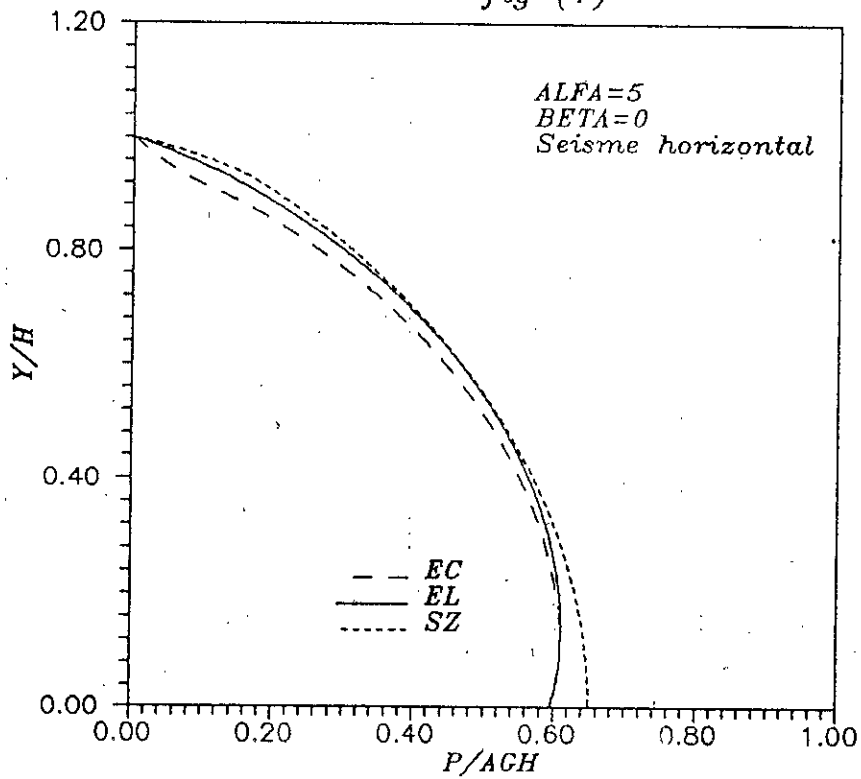
β : L'inclinaison de la cuve avec l'horizontal



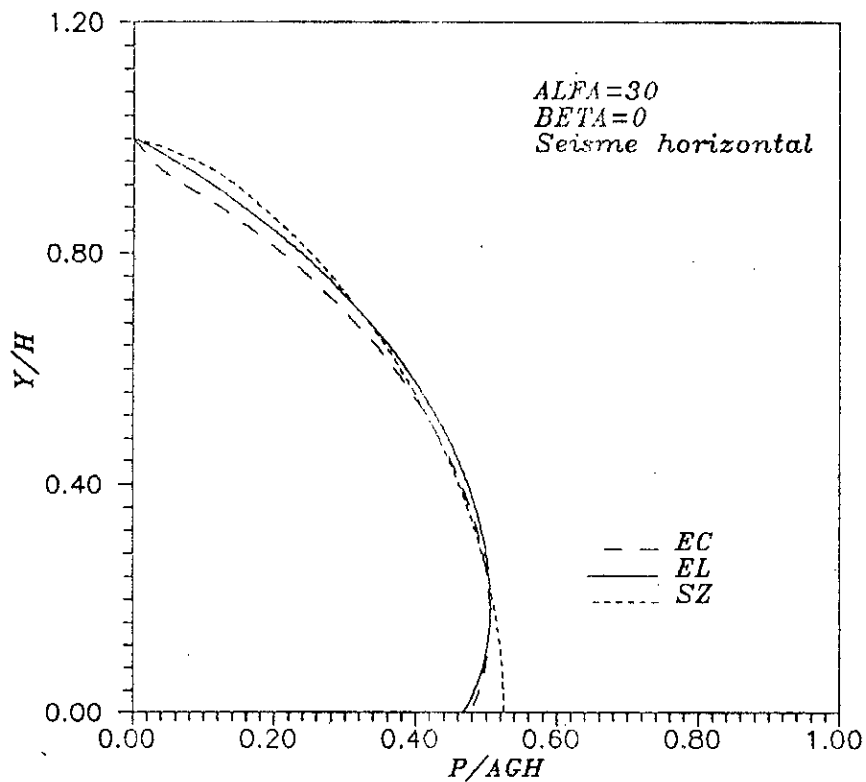
*Cas ou l'eau est
considérée incompressible*



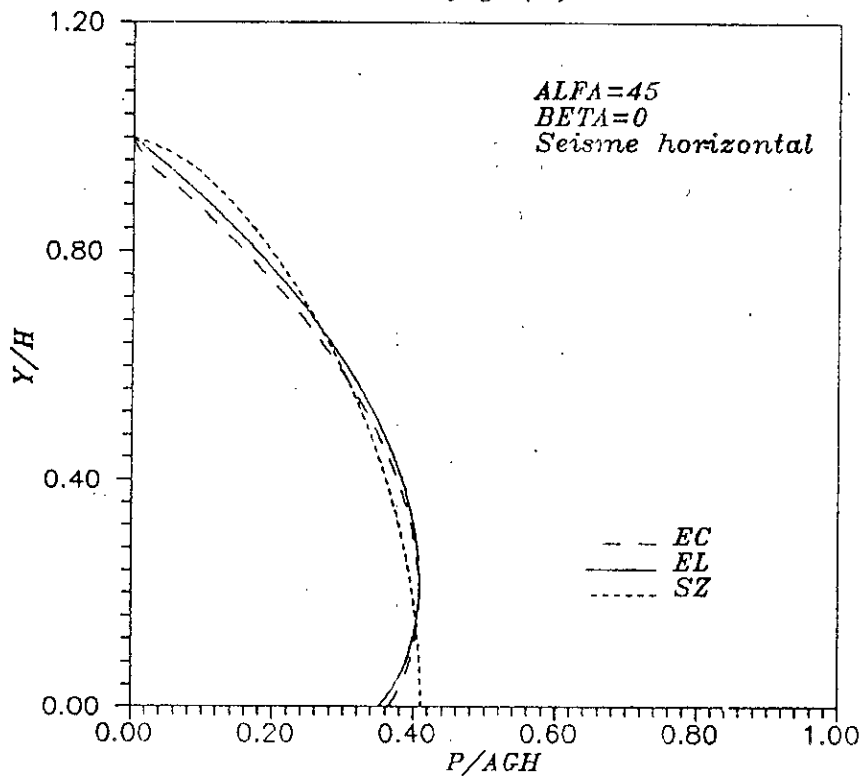
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (1)



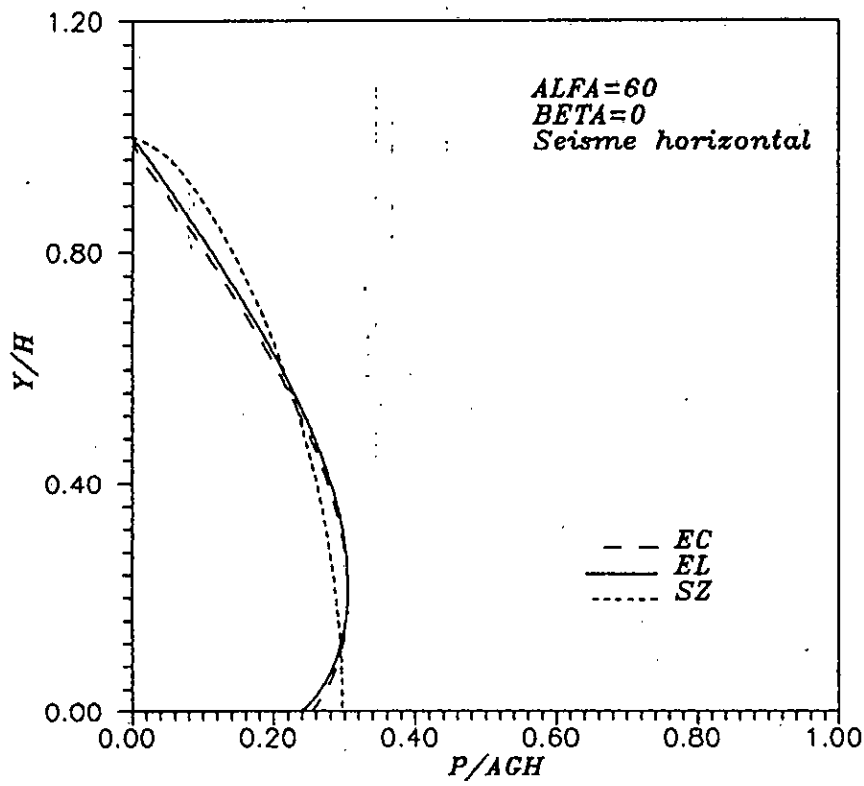
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (2)



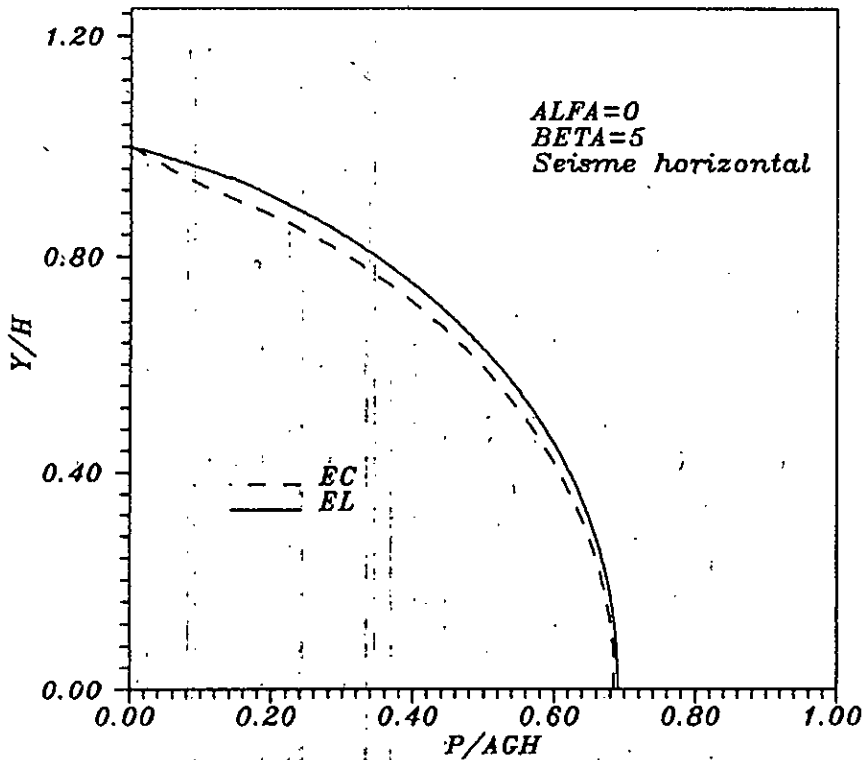
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (3)



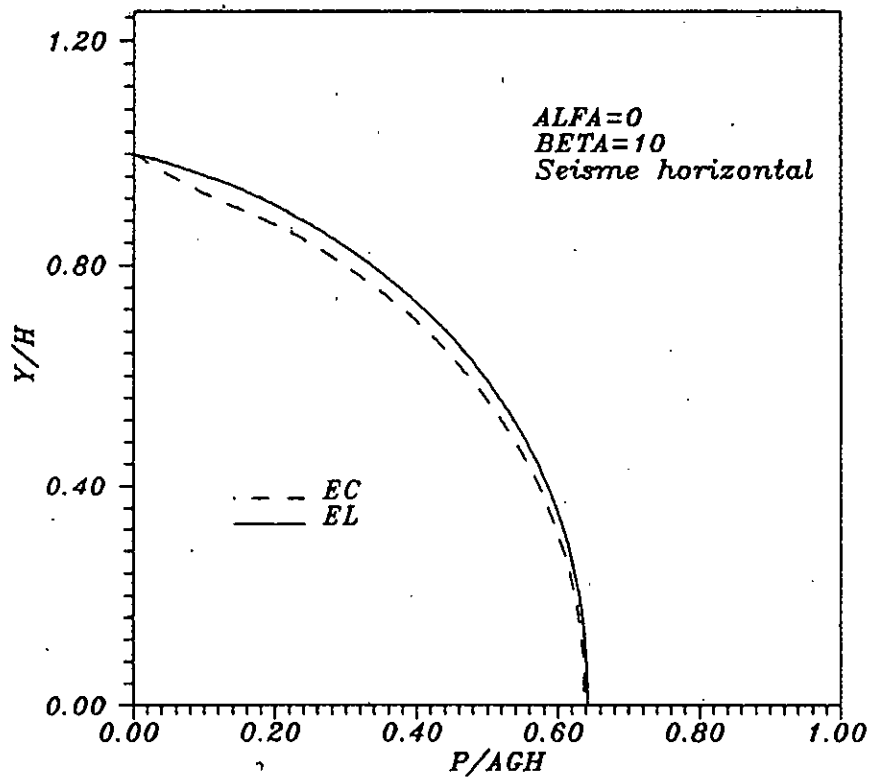
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (4)



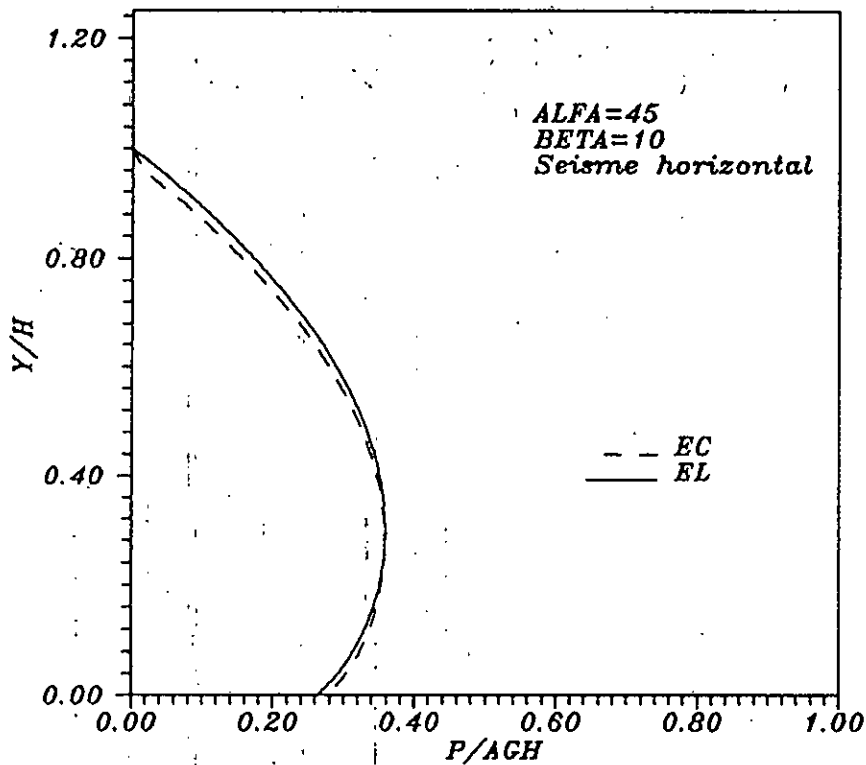
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (5)



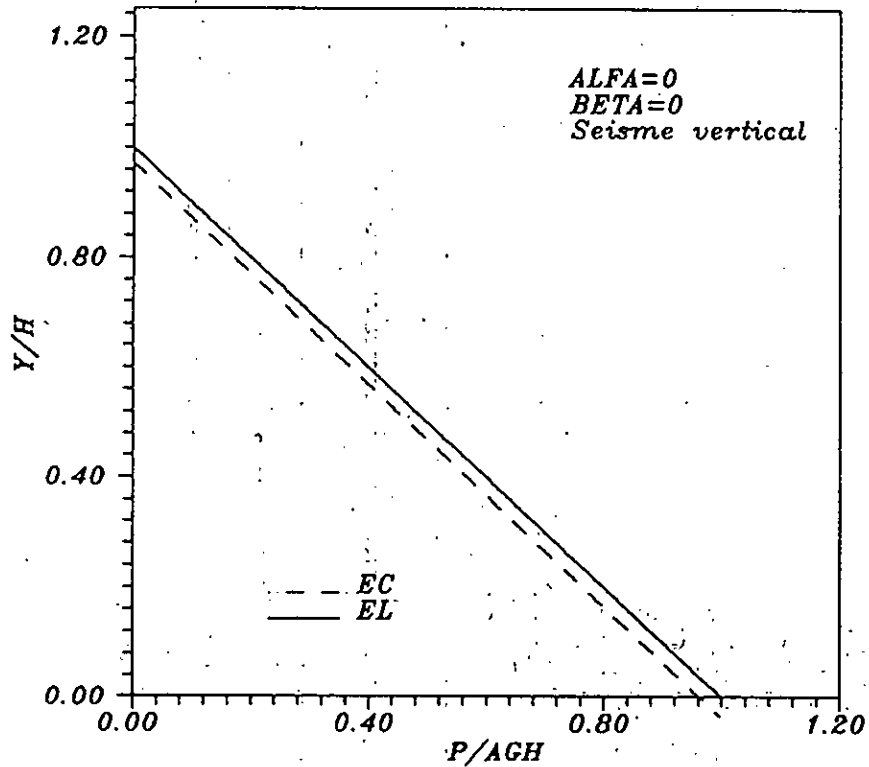
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (6)



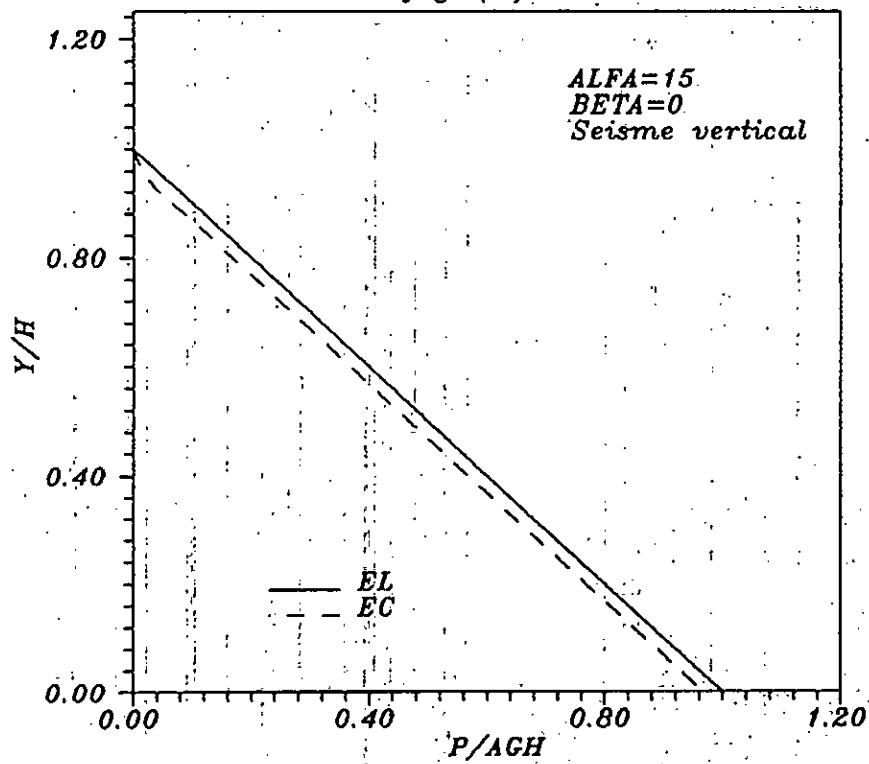
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (7)



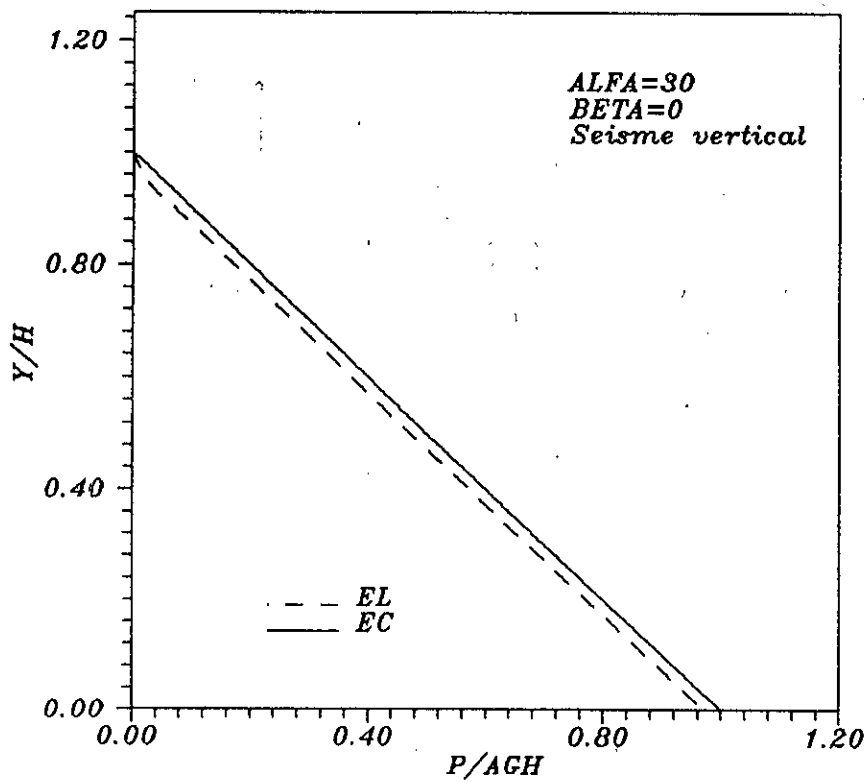
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (8)



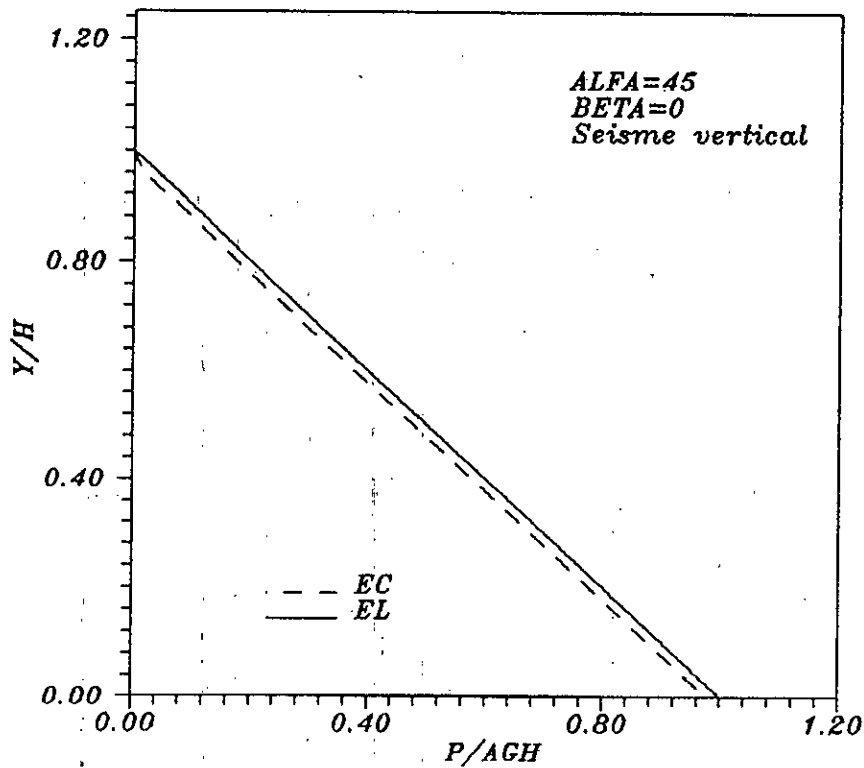
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (9)



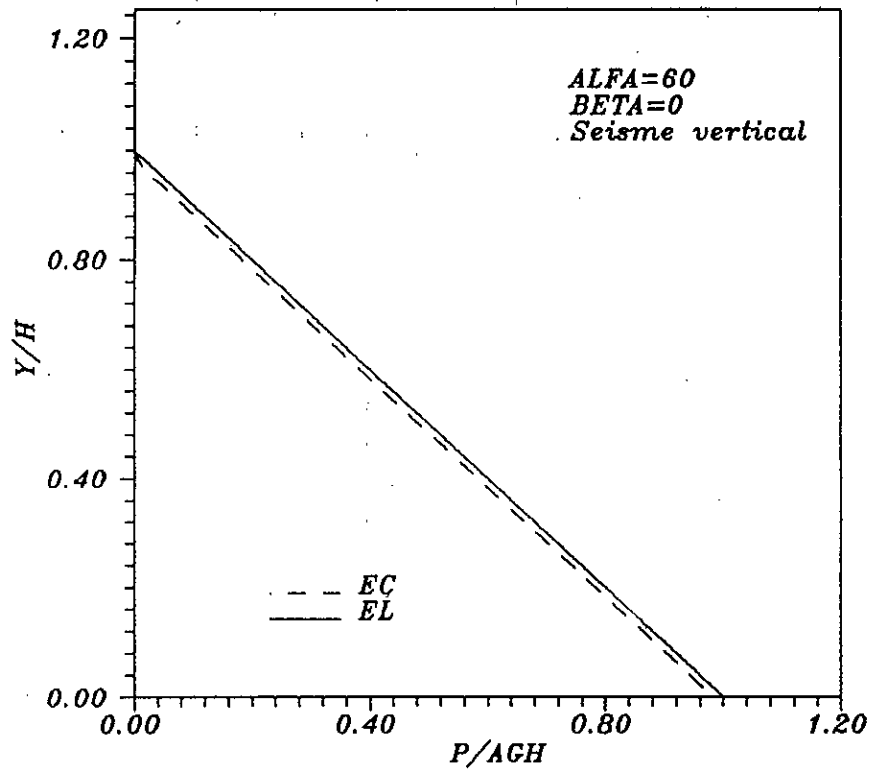
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (10)



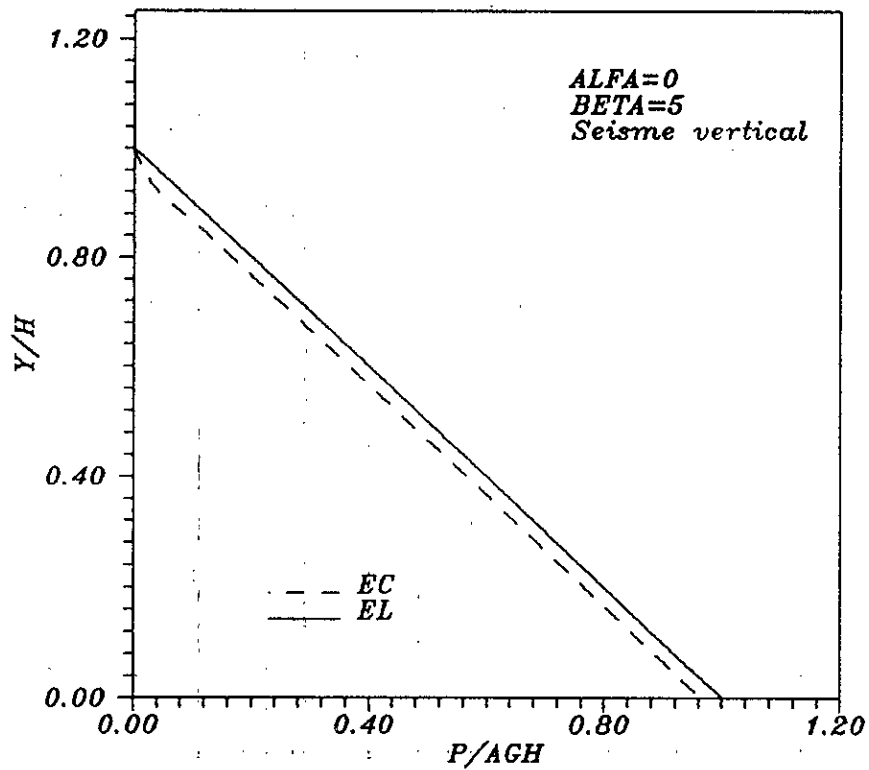
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (11)



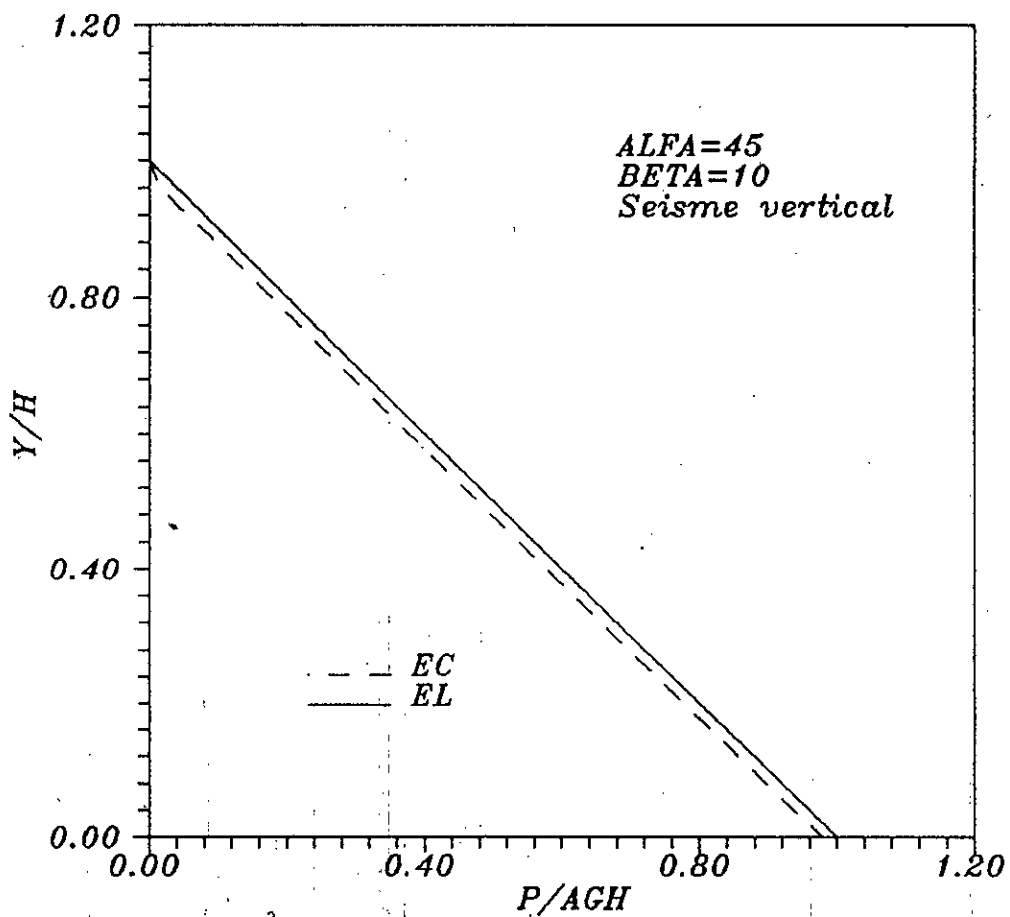
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (12)



Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (13)



Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (14)



Distribution de la pression hydrodynamique
sur le parement amont d'un barrage poids rigide
fig (15)

points interieurs

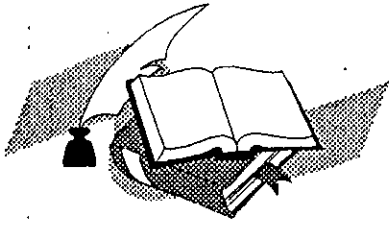
x	y	pression
0.1000000E+02	0.1400000E+03	0.1776431E+05
0.1000000E+02	0.1300000E+03	0.3278493E+05
0.1000000E+02	0.1200000E+03	0.4525924E+05
0.1000000E+02	0.1100000E+03	0.5577456E+05
0.1000000E+02	0.1000000E+03	0.6473077E+05
0.1000000E+02	0.9000000E+02	0.7239249E+05
0.1000000E+02	0.8000000E+02	0.7894117E+05
0.1000000E+02	0.7000000E+02	0.8450569E+05
0.1000000E+02	0.6000000E+02	0.8917989E+05
0.1000000E+02	0.5000000E+02	0.9303291E+05
0.1000000E+02	0.4000000E+02	0.9611518E+05
0.1000000E+02	0.3000000E+02	0.9846133E+05
0.1000000E+02	0.2000000E+02	0.1000917E+06
0.1000000E+02	0.1000000E+02	0.1010267E+06
0.2000000E+02	0.1400000E+03	0.1404234E+05
0.2000000E+02	0.1300000E+03	0.2694367E+05
0.2000000E+02	0.1200000E+03	0.3829075E+05
0.2000000E+02	0.1100000E+03	0.4815036E+05
0.2000000E+02	0.1000000E+03	0.5669145E+05
0.2000000E+02	0.9000000E+02	0.6407307E+05
0.2000000E+02	0.8000000E+02	0.7042399E+05
0.2000000E+02	0.7000000E+02	0.7584466E+05
0.2000000E+02	0.6000000E+02	0.8041266E+05
0.2000000E+02	0.5000000E+02	0.8418745E+05
0.2000000E+02	0.4000000E+02	0.8721429E+05
0.2000000E+02	0.3000000E+02	0.8952718E+05
0.2000000E+02	0.2000000E+02	0.9115368E+05
0.2000000E+02	0.1000000E+02	0.9212567E+05
0.3000000E+02	0.1400000E+03	0.1166163E+05
0.3000000E+02	0.1300000E+03	0.2272242E+05
0.3000000E+02	0.1200000E+03	0.3281906E+05
0.3000000E+02	0.1100000E+03	0.4184059E+05
0.3000000E+02	0.1000000E+03	0.4980588E+05
0.3000000E+02	0.9000000E+02	0.5677931E+05
0.3000000E+02	0.8000000E+02	0.6283300E+05
0.3000000E+02	0.7000000E+02	0.6803320E+05
0.3000000E+02	0.6000000E+02	0.7243614E+05
0.3000000E+02	0.5000000E+02	0.7608802E+05
0.3000000E+02	0.4000000E+02	0.7902598E+05
0.3000000E+02	0.3000000E+02	0.8127974E+05
0.3000000E+02	0.2000000E+02	0.8287418E+05
0.3000000E+02	0.1000000E+02	0.8383151E+05
0.4000000E+02	0.1400000E+03	0.9937566E+04
0.4000000E+02	0.1300000E+03	0.1950915E+05
0.4000000E+02	0.1200000E+03	0.2844229E+05
0.4000000E+02	0.1100000E+03	0.3659332E+05
0.4000000E+02	0.1000000E+03	0.4391281E+05
0.4000000E+02	0.9000000E+02	0.5040400E+05
0.4000000E+02	0.8000000E+02	0.5609386E+05
0.4000000E+02	0.7000000E+02	0.6101726E+05
0.4000000E+02	0.6000000E+02	0.6520914E+05
0.4000000E+02	0.5000000E+02	0.6870126E+05
0.4000000E+02	0.4000000E+02	0.7152100E+05
0.4000000E+02	0.3000000E+02	0.7369141E+05
0.4000000E+02	0.2000000E+02	0.7523136E+05
0.4000000E+02	0.1000000E+02	0.7615614E+05

0.5000000E+02	0.1400000E+03	0.8601527E+04
0.5000000E+02	0.1300000E+03	0.1695711E+05
0.5000000E+02	0.1200000E+03	0.2486339E+05
0.5000000E+02	0.1100000E+03	0.3218592E+05
0.5000000E+02	0.1000000E+03	0.3885169E+05
0.5000000E+02	0.9000000E+02	0.4483115E+05
0.5000000E+02	0.8000000E+02	0.5012112E+05
0.5000000E+02	0.7000000E+02	0.5473224E+05
0.5000000E+02	0.6000000E+02	0.5868116E+05
0.5000000E+02	0.5000000E+02	0.6198615E+05
0.5000000E+02	0.4000000E+02	0.6466476E+05
0.5000000E+02	0.3000000E+02	0.6673273E+05
0.5000000E+02	0.2000000E+02	0.6820310E+05
0.5000000E+02	0.1000000E+02	0.6908608E+05
0.6000000E+02	0.1400000E+03	0.7521661E+04
0.6000000E+02	0.1300000E+03	0.1486637E+05
0.6000000E+02	0.1200000E+03	0.2187871E+05
0.6000000E+02	0.1100000E+03	0.2844253E+05
0.6000000E+02	0.1000000E+03	0.3448105E+05
0.6000000E+02	0.9000000E+02	0.3994990E+05
0.6000000E+02	0.8000000E+02	0.4482814E+05
0.6000000E+02	0.7000000E+02	0.4910964E+05
0.6000000E+02	0.6000000E+02	0.5279695E+05
0.6000000E+02	0.5000000E+02	0.5589705E+05
0.6000000E+02	0.4000000E+02	0.5841884E+05
0.6000000E+02	0.3000000E+02	0.6037111E+05
0.6000000E+02	0.2000000E+02	0.6176182E+05
0.6000000E+02	0.1000000E+02	0.6259723E+05
0.7000000E+02	0.1400000E+03	0.6624242E+04
0.7000000E+02	0.1300000E+03	0.1311465E+05
0.7000000E+02	0.1200000E+03	0.1934934E+05
0.7000000E+02	0.1100000E+03	0.2522996E+05
0.7000000E+02	0.1000000E+03	0.3068383E+05
0.7000000E+02	0.9000000E+02	0.3566174E+05
0.7000000E+02	0.8000000E+02	0.4013331E+05
0.7000000E+02	0.7000000E+02	0.4408193E+05
0.7000000E+02	0.6000000E+02	0.4750017E+05
0.7000000E+02	0.5000000E+02	0.5038636E+05
0.7000000E+02	0.4000000E+02	0.5274214E+05
0.7000000E+02	0.3000000E+02	0.5457078E+05
0.7000000E+02	0.2000000E+02	0.5587567E+05
0.7000000E+02	0.1000000E+02	0.5665998E+05
0.8000000E+02	0.1400000E+03	0.5863852E+04
0.8000000E+02	0.1300000E+03	0.1162268E+05
0.8000000E+02	0.1200000E+03	0.1717845E+05
0.8000000E+02	0.1100000E+03	0.2244814E+05
0.8000000E+02	0.1000000E+03	0.2736577E+05
0.8000000E+02	0.9000000E+02	0.3188216E+05
0.8000000E+02	0.8000000E+02	0.3596299E+05
0.8000000E+02	0.7000000E+02	0.3958556E+05
0.8000000E+02	0.6000000E+02	0.4273593E+05
0.8000000E+02	0.5000000E+02	0.4540625E+05
0.8000000E+02	0.4000000E+02	0.4759271E+05
0.8000000E+02	0.3000000E+02	0.4929404E+05
0.8000000E+02	0.2000000E+02	0.5051010E+05
0.8000000E+02	0.1000000E+02	0.5124159E+05
0.9000000E+02	0.1400000E+03	0.5710506E+04
0.9000000E+02	0.1300000E+03	0.1033614E+05
0.9000000E+02	0.1200000E+03	0.1529659E+05
0.9000000E+02	0.1100000E+03	0.2002129E+05

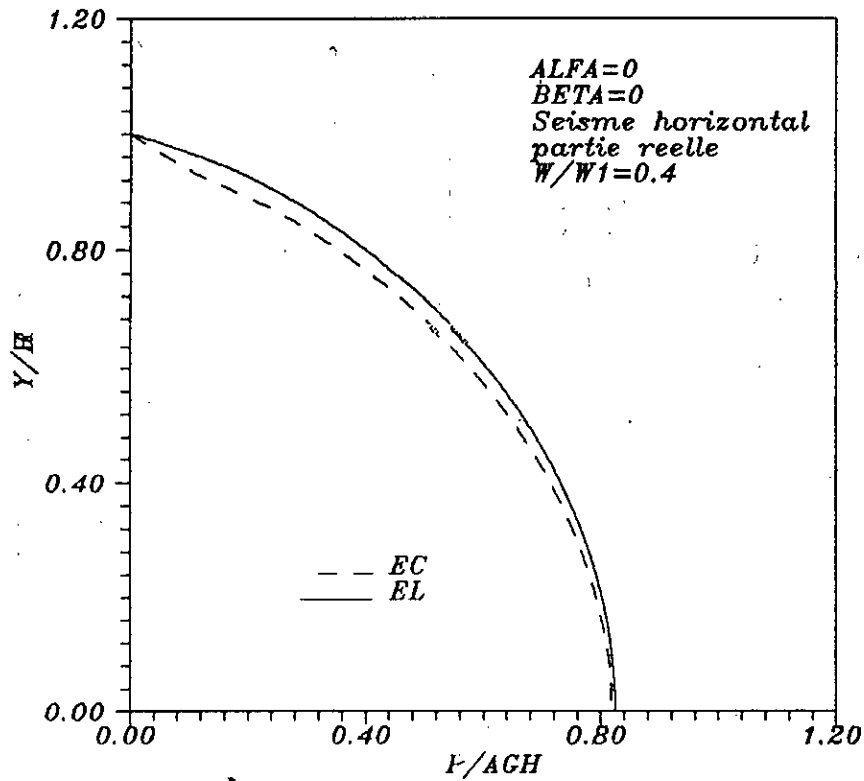
0.9000000E+02	0.1000000E+03	0.2445133E+05
0.9000000E+02	0.9000000E+02	0.2854012E+05
0.9000000E+02	0.8000000E+02	0.3225233E+05
0.9000000E+02	0.7000000E+02	0.3556239E+05
0.9000000E+02	0.6000000E+02	0.3845239E+05
0.9000000E+02	0.5000000E+02	0.4091043E+05
0.9000000E+02	0.4000000E+02	0.4292872E+05
0.9000000E+02	0.3000000E+02	0.4450262E+05
0.9000000E+02	0.2000000E+02	0.4562933E+05
0.9000000E+02	0.1000000E+02	0.4630760E+05
0.1000000E+03	0.1400000E+03	0.4643251E+04
0.1000000E+03	0.1300000E+03	0.9216423E+04
0.1000000E+03	0.1200000E+03	0.1365252E+05
0.1000000E+03	0.1100000E+03	0.1789113E+05
0.1000000E+03	0.1000000E+03	0.2188010E+05
0.1000000E+03	0.9000000E+02	0.2557625E+05
0.1000000E+03	0.8000000E+02	0.2894517E+05
0.1000000E+03	0.7000000E+02	0.3196023E+05
0.1000000E+03	0.6000000E+02	0.3460158E+05
0.1000000E+03	0.5000000E+02	0.3685475E+05
0.1000000E+03	0.4000000E+02	0.3870943E+05
0.1000000E+03	0.3000000E+02	0.4015855E+05
0.1000000E+03	0.2000000E+02	0.4119742E+05
0.1000000E+03	0.1000000E+02	0.4182323E+05
0.1100000E+03	0.1400000E+03	0.4146863E+04
0.1100000E+03	0.1300000E+03	0.8234905E+04
0.1100000E+03	0.1200000E+03	0.1220734E+05
0.1100000E+03	0.1100000E+03	0.1601213E+05
0.1100000E+03	0.1000000E+03	0.1960316E+05
0.1100000E+03	0.9000000E+02	0.2294095E+05
0.1100000E+03	0.8000000E+02	0.2599291E+05
0.1100000E+03	0.7000000E+02	0.2873266E+05
0.1100000E+03	0.6000000E+02	0.3113969E+05
0.1100000E+03	0.5000000E+02	0.3319809E+05
0.1100000E+03	0.4000000E+02	0.3489606E+05
0.1100000E+03	0.3000000E+02	0.3622505E+05
0.1100000E+03	0.2000000E+02	0.3717893E+05
0.1100000E+03	0.1000000E+02	0.3775395E+05
0.1200000E+03	0.1400000E+03	0.3709909E+04
0.1200000E+03	0.1300000E+03	0.7369724E+04
0.1200000E+03	0.1200000E+03	0.1093083E+05
0.1200000E+03	0.1100000E+03	0.1434802E+05
0.1200000E+03	0.1000000E+03	0.1758055E+05
0.1200000E+03	0.9000000E+02	0.2059260E+05
0.1200000E+03	0.8000000E+02	0.2335374E+05
0.1200000E+03	0.7000000E+02	0.2583873E+05
0.1200000E+03	0.6000000E+02	0.2802703E+05
0.1200000E+03	0.5000000E+02	0.2990238E+05
0.1200000E+03	0.4000000E+02	0.3145218E+05
0.1200000E+03	0.3000000E+02	0.3266695E+05
0.1200000E+03	0.2000000E+02	0.3353979E+05
0.1200000E+03	0.1000000E+02	0.3406631E+05
0.1300000E+03	0.1400000E+03	0.3323458E+04
0.1300000E+03	0.1300000E+03	0.6603774E+04
0.1300000E+03	0.1200000E+03	0.9798976E+04
0.1300000E+03	0.1100000E+03	0.1286952E+05
0.1300000E+03	0.1000000E+03	0.1577927E+05
0.1300000E+03	0.9000000E+02	0.1849600E+05
0.1300000E+03	0.8000000E+02	0.2099157E+05
0.1300000E+03	0.7000000E+02	0.2324216E+05

0.1300000E+03	0.6000000E+02	0.2522793E+05
0.1300000E+03	0.5000000E+02	0.2693271E+05
0.1300000E+03	0.4000000E+02	0.2834375E+05
0.1300000E+03	0.3000000E+02	0.2945110E+05
0.1300000E+03	0.2000000E+02	0.3024755E+05
0.1300000E+03	0.1000000E+02	0.3072821E+05
0.1400000E+03	0.1400000E+03	0.2980429E+04
0.1400000E+03	0.1300000E+03	0.5923390E+04
0.1400000E+03	0.1200000E+03	0.8792289E+04
0.1400000E+03	0.1100000E+03	0.1155246E+05
0.1400000E+03	0.1000000E+03	0.1417184E+05
0.1400000E+03	0.9000000E+02	0.1662125E+05
0.1400000E+03	0.8000000E+02	0.1887508E+05
0.1400000E+03	0.7000000E+02	0.2091106E+05
0.1400000E+03	0.6000000E+02	0.2271034E+05
0.1400000E+03	0.5000000E+02	0.2425733E+05
0.1400000E+03	0.4000000E+02	0.2553939E+05
0.1400000E+03	0.3000000E+02	0.2654658E+05
0.1400000E+03	0.2000000E+02	0.2727156E+05
0.1400000E+03	0.1000000E+02	0.2770929E+05
0.1500000E+03	0.1400000E+03	0.2675066E+04
0.1500000E+03	0.1300000E+03	0.5317334E+04
0.1500000E+03	0.1200000E+03	0.7894776E+04
0.1500000E+03	0.1100000E+03	0.1037680E+05
0.1500000E+03	0.1000000E+03	0.1273483E+05
0.1500000E+03	0.9000000E+02	0.1494268E+05
0.1500000E+03	0.8000000E+02	0.1697699E+05
0.1500000E+03	0.7000000E+02	0.1881716E+05
0.1500000E+03	0.6000000E+02	0.2044557E+05
0.1500000E+03	0.5000000E+02	0.2184731E+05
0.1500000E+03	0.4000000E+02	0.2301027E+05
0.1500000E+03	0.3000000E+02	0.2392474E+05
0.1500000E+03	0.2000000E+02	0.2458338E+05
0.1500000E+03	0.1000000E+02	0.2498115E+05
0.1600000E+03	0.1400000E+03	0.2402596E+04
0.1600000E+03	0.1300000E+03	0.4776320E+04
0.1600000E+03	0.1200000E+03	0.7093004E+04
0.1600000E+03	0.1100000E+03	0.9325525E+04
0.1600000E+03	0.1000000E+03	0.1144843E+05
0.1600000E+03	0.9000000E+02	0.1343814E+05
0.1600000E+03	0.8000000E+02	0.1527347E+05
0.1600000E+03	0.7000000E+02	0.1693552E+05
0.1600000E+03	0.6000000E+02	0.1840785E+05
0.1600000E+03	0.5000000E+02	0.1967656E+05
0.1600000E+03	0.4000000E+02	0.2073005E+05
0.1600000E+03	0.3000000E+02	0.2155901E+05
0.1600000E+03	0.2000000E+02	0.2215642E+05
0.1600000E+03	0.1000000E+02	0.2251738E+05
0.1700000E+03	0.1400000E+03	0.2159034E+04
0.1700000E+03	0.1300000E+03	0.4292560E+04
0.1700000E+03	0.1200000E+03	0.6375650E+04
0.1700000E+03	0.1100000E+03	0.8384239E+04
0.1700000E+03	0.1000000E+03	0.1029557E+05
0.1700000E+03	0.9000000E+02	0.1208846E+05
0.1700000E+03	0.8000000E+02	0.1374368E+05
0.1700000E+03	0.7000000E+02	0.1524399E+05
0.1700000E+03	0.6000000E+02	0.1657422E+05
0.1700000E+03	0.5000000E+02	0.1772141E+05
0.1700000E+03	0.4000000E+02	0.1867466E+05
0.1700000E+03	0.3000000E+02	0.1942525E+05

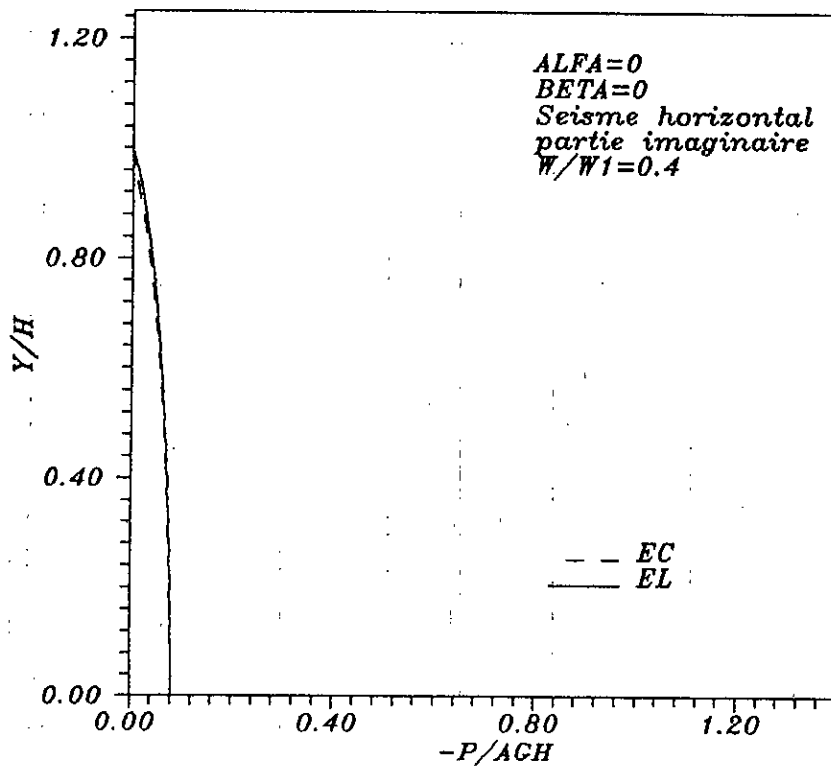
0.1700000E+03	0.2000000E+02	0.1996640E+05
0.1700000E+03	0.1000000E+02	0.2029341E+05
0.1800000E+03	0.1400000E+03	0.1941022E+04
0.1800000E+03	0.1300000E+03	0.3859406E+04
0.1800000E+03	0.1200000E+03	0.5733032E+04
0.1800000E+03	0.1100000E+03	0.7540510E+04
0.1800000E+03	0.1000000E+03	0.9261413E+04
0.1800000E+03	0.9000000E+02	0.1087679E+05
0.1800000E+03	0.8000000E+02	0.1236918E+05
0.1800000E+03	0.7000000E+02	0.1372286E+05
0.1800000E+03	0.6000000E+02	0.1492398E+05
0.1800000E+03	0.5000000E+02	0.1596050E+05
0.1800000E+03	0.4000000E+02	0.1682234E+05
0.1800000E+03	0.3000000E+02	0.1750125E+05
0.1800000E+03	0.2000000E+02	0.1799094E+05
0.1800000E+03	0.1000000E+02	0.1828693E+05
0.1900000E+03	0.1400000E+03	0.1745630E+04
0.1900000E+03	0.1300000E+03	0.3471141E+04
0.1900000E+03	0.1200000E+03	0.5156783E+04
0.1900000E+03	0.1100000E+03	0.6783514E+04
0.1900000E+03	0.1000000E+03	0.8333072E+04
0.1900000E+03	0.9000000E+02	0.9788368E+04



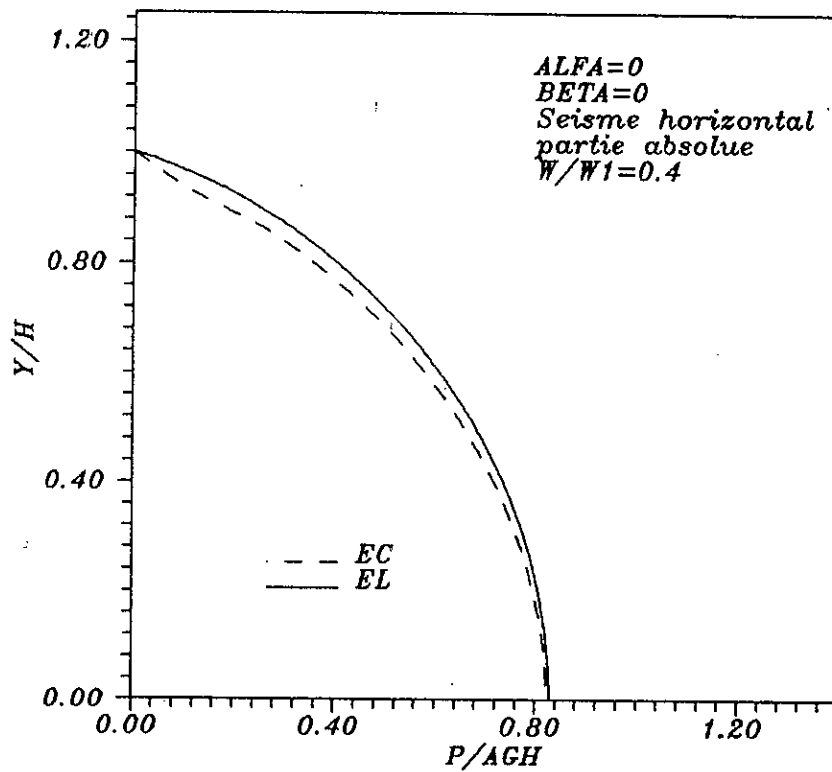
*Cas où l'eau est
considérée compressible*



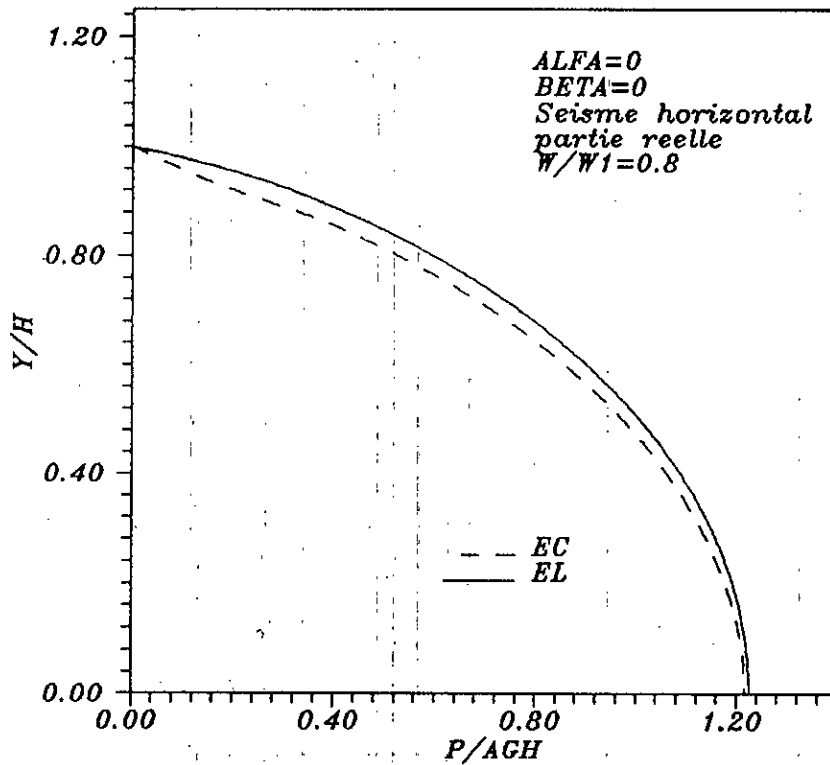
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (16)



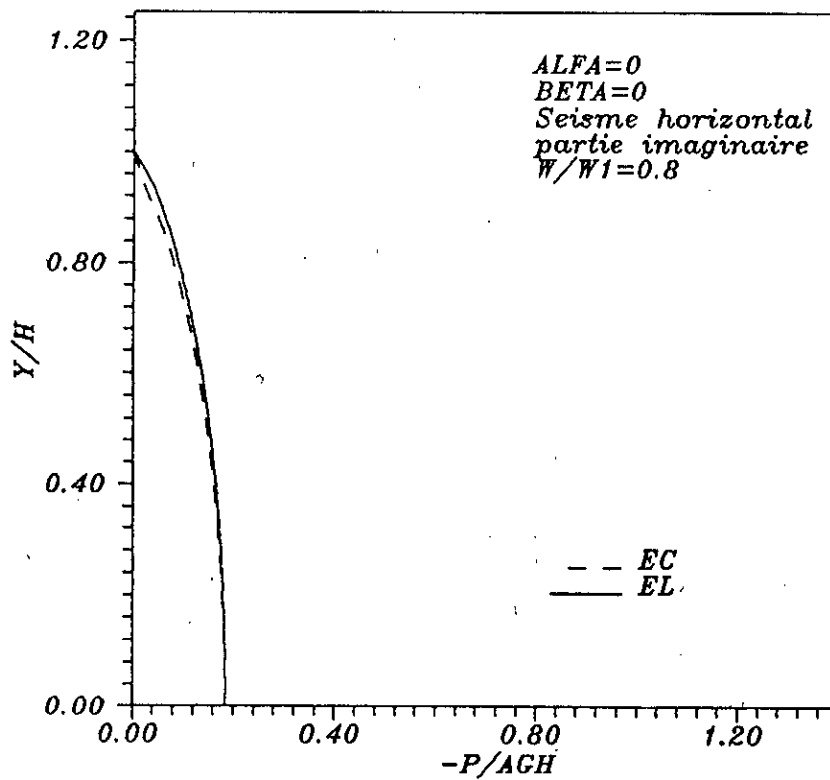
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (17)



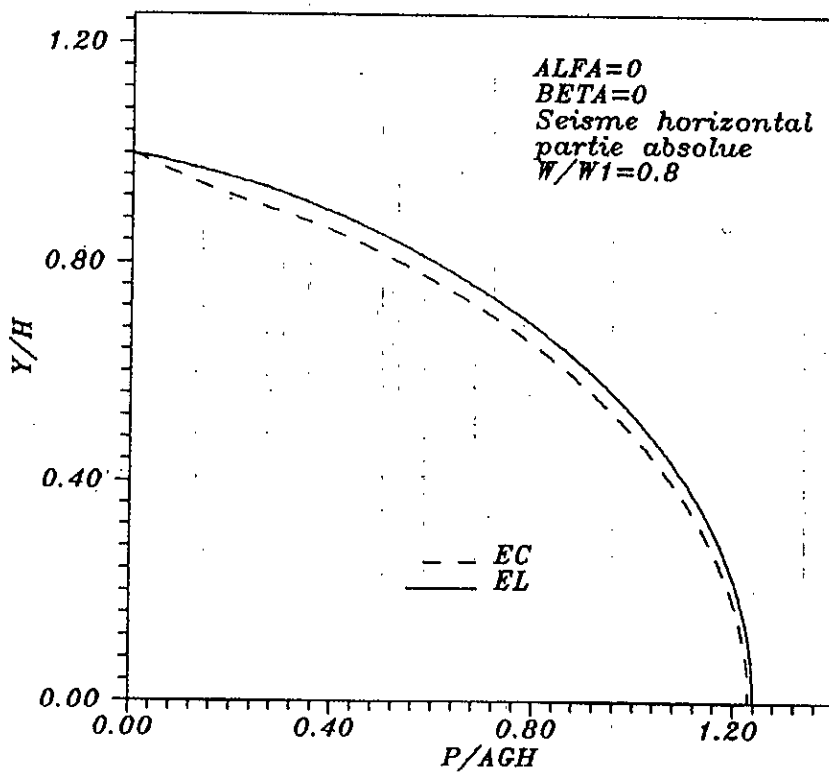
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (18)



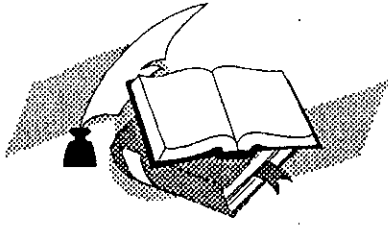
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (19)



Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (20)



Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide fig (21)



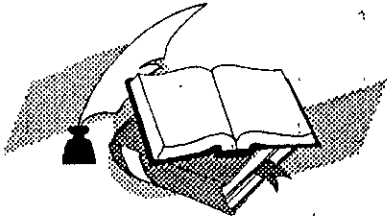
Conclusion

Le but de l'étude faite, nous a permis d'avoir les résultats des pressions hydrodynamiques ainsi que leurs gradients, causé par le mouvement du barrage et / ou le fond de la retenue qui s'exercent sur un parement amont d'un barrage poids rigide. Tout en tenant compte de certains aspects sur ces variations de pressions (l'inclinaison du parement amont, le type de séisme, l'inclinaison du fond de la retenue, la compressibilité de l'eau, etc...).

L'étude établie, nous donne l'occasion de conclure que lors du dimensionnement et la conception d'un barrage poids, le choix de l'inclinaison du parement amont a une influence et doit être pris en considération, surtout dans des zones à moyenne et à forte sismicité.

On remarque aussi que la méthode des équations intégrales aux frontières et la plus évidente, la plus puissante, vu qu'elle permet une grande réduction de l'espace mémoire des ordinateurs et cela en réduisant le problème d'une dimension par rapport aux autres méthodes numériques (M.E.F par exemple).

Enfin on peut dire que cette méthode est bien adaptée pour l'étude des pressions hydrodynamiques sur les barrages poids soumis à des excitations sismiques, car elle permet d'obtenir des résultats acceptables comparés aux résultats de Zangar et d'autres auteurs.



Annexes

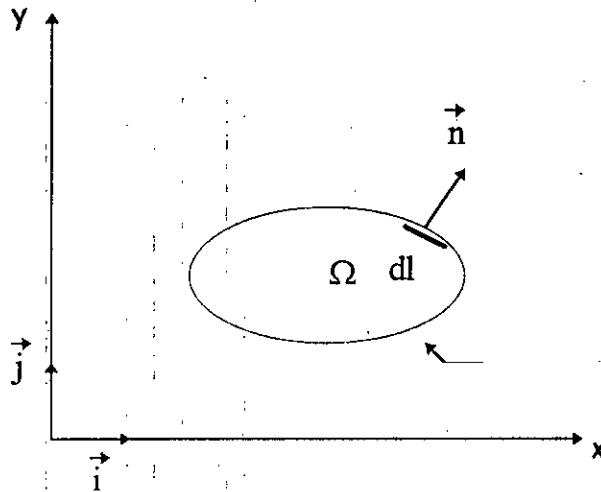
ANNEXE I

FORMULE DE GREEN

$$\int_{\Omega} \Psi \cdot \Delta U \, d\Omega = \int_{\Omega} U \cdot \Delta \Psi \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \left[\Psi \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right] dl$$

avec :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



ANNEXE 2

Méthode d'intégration numérique de Gauss

La méthode d'intégration de Gauss, permet le passage de l'intégrale à la sommation. Cette méthode est très puissante dans la B E M, elle permet l'évaluation des intégrales sur les éléments de frontière.

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i f(\xi_i) + E_n$$

Avec : W_i : coefficient de pondération

ξ_i : coordonnée du $i^{\text{ème}}$ point d'intégration

n : nombre total de points d'intégration

E_n : l'erreur d'approximation

Nous donnons en conclusion le tableau suivant qui résume les valeurs de W_i et des coordonnées ξ_i servant au calcul des intégrales par la quadrature de Gauss. Dans le tableau on trouve que des valeurs non négatives de ξ_i . Il est à noter qu'il existe dans ce cas pour chaque ξ_i positif une valeur négative $-\xi_i$ mais de même W_i .

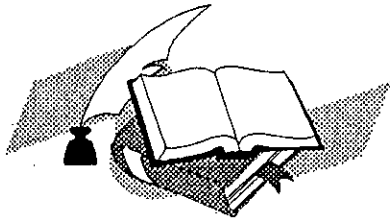
n	ξ_i	W_i	n	ξ_i	W_i
2	0.5773502692	1	8	0.1834346422	0.3626837834
3	0	0.8888888888		0.5355324099	0.3137066459
	0.7745966692	0.5555555555		0.7966664774	0.222381035
4	0.3399810436	0.6521451549	9	0.9602898565	0.1012285363
	0.8611363116	0.3478548451		0	0.3302393550
5	0	0.5688888888	10	0.3242534234	0.3123470770
	0.5384693101	0.4786286705		0.6133714327	0.2606106964
0.9061798459	0.2362688506	0.8360311073		0.1806481607	
6	0.2386191861	0.4679139346	10	0.9681602395	0.08127438836
	0.6612093865	0.3607615731		0.1488743390	0.2955242247
7	0.9324695142	0.1713244924	0.4333953941	0.2692667193	
	0	0.4179591837	0.6794095683	0.2190863625	
	0.4058451514	0.3818300505	0.8650633667	0.1494513491	
	0.7415311856	0.2797053915	0.9739065285	0.06667134430	
	0.9491079123	0.1294849662			

Pour une formule de GAUSS avec une fonction de poids en $\text{Ln} (1/\xi)$

$$I_2 = \int_0^1 \log\left(\frac{1}{\xi}\right) f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i)$$

nous donnons le tableau suivant qui résume les valeurs des w_i et des coordonnées ξ_i

n	ξ_i	w_i	n	ξ_i	w_i
2	0.112.880	0.71853931	8	0.13320243 (-1)	0.16441660
	0.60227691	0.28146068		0.797550427 (-1)	0.23752560
3	0.63890792 (-1)	0.51340455		0.19787102	0.22684198
	0.36899706	0.39198004		0.335415398	0.17575408
	0.76688030	0.94615406 (-1)		0.52945857	0.11292402
4	0.41448480 (-1)	0.38346406		0.70181452	0.57872212 (-1)
	0.24527491	0.36687532		0.84937932	0.20979074 (-1)
	0.55616545	0.19043513		0.95332645	0.36864071 (-2)
	0.84898239	0.39225487 (-1)	9	0.10869338 (-1)	0.14006846
5	0.29134472 (-1)	0.29789342		0.064983682 (-1)	0.30977224
	0.17397721	0.34977622		0.16222943	0.21142716
	0.41170251	0.23448829		0.29374996	0.17715622
	0.67731417	0.98930460 (-1)		0.44663195	0.12779920
	0.89477136	0.18911552 (-1)		0.60548172	0.78478879 (-1)
6	0.216344005 (-1)	0.23876366	0.754111017	0.39022490 (-1)	
	0.12958339	0.30828657	0.87726585	0.13867290 (-1)	
	0.31402045	0.24531742	0.96225056	0.24080402 (-2)	
	0.53865721	0.14200875	10	0.90425944 (-2)	0.12095474
	0.75691533	0.55454622 (-1)		0.53971054 (-1)	0.18636310
	0.92266884	0.10168958 (-1)		0.13531134	0.19566066
7	0.16719355 (-1)	0.19616938		0.24705169	0.17357723
	0.10018568	0.27030264	0.38021171	0.13569597	
	0.24629424	0.239668187	0.52379159	0.93647084 (-1)	
	0.43346349	0.16577577	0.66577472	0.55787938 (-1)	
	0.63235098	0.88943226 (-1)	0.79419019	0.27159893 (-1)	
	0.81111862	0.33194304 (-1)	0.89816102	0.95151992 (-2)	
	0.94084816	0.59327869 (-2)	0.96884798	0.16381586 (-2)	



Bibliographie

- [1] F.A.AKL and Y.C. DAS
« Hydrodynamic pressure on dams »
Int. J. Modelling and Simulation Vol.8, N° 1, 33-37 (1958).
- [2] P. K. Banerjee and R. Butterfield
« Boundary element methods in engineering science »
Mc Graw - Hill Book company (U K) Limited England.
- [3] A. A Benaggoug, M. HADID
« Investigation numérique du comportement des plaques raidies par la méthode des éléments finis et la méthodes des équations intégrales aux frontières »
P.E.E , E.N.P , (1992).
- [4] S. Boudaa, F. Djaalali
« Analyse des problèmes de l'élasticité plane par la méthode des équations intégrales aux frontières »
P.E.E , E.N.P , (1992).
- [5] J. A Brebbia , J C. F. Telles, L. C. Wrobel
« Boudary élément techniques »
Berlin Heidelberg New York Tokyo (1984).
- [6] P. Chakrabarti, K. Chopra
« Earthquake analysis of gravity dans including hydrodynamic interaction »
Earthquake Eng. Struct. Dyn. Vol. 2, 143 - 160 (1973).
- [7] V. Davidovici
« Génie parasismique »
Presse de l'école national des ponts et chaussées paris (1985).
- [8] M. Dougha, S. Yahiaoui
« L'étude des pressions hydrodynamiques sur les barrages poids rigides par la méthode des équations intégrales aux frontières »
P.F.E , E.N.P , (1995).
- [9] L. Gangming
« A new boundary element method coupled with FEM packages »
Communications in applied numerical method Vol. 5, 365 - 371 (1989).
- [10] Germain
« Mécanique des milieux continus »
Ed. Masson. Paris (1962).
- [11] G. Goudet
« Les fonctions de bessel et leur applications en physique »
Masson et C^{ie} , éditeur France (1954).

- [12] M. Hadid
« Analyse de l'interaction cinématique déterministe et stochastique pour fondations rigides bidimensionnelles par une approche intégrales aux frontières »
Magistère. E.N.P (1995).
- [13] J. L. Hummar, A. M. Jablonski
« Boundary element reservoir model for seismic analyses of gravity dams »
Earthquake Eng. Struct. Dyn. Vol 16, 1129 - 1156 (1988).
- [14] A. Seghir, A. Soufari
« Interaction fluide - structure cas des barrages poids en béton »
P.F.E , E.N.P , (1985).
- [15] S. K. Sharan
« A. non-reflecting boundary in fluide - structure interaction »
Computer & structures Vol. 26, N°5, 841, 846 (1987).
- [16] Solomon
« Elasticité linéaire »
Ed. Masson, Paris (1968).