

8/95

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المركز الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE DES PRESSIONS HYDRODYNAMIQUES
SUR LES BARRAGES POIDS RIGIDES PAR
LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES
AUX FRONTIERES

Proposé par :
M^r O.BELHADJ

Etudié par :
M^{rs} M.DOUGHA
S.YAHIAOUI

Dirigé par :
M^r O.BELHADJ

PROMOTION
JUIN 1995

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE DES PRESSIONS HYDRODYNAMIQUES
SUR LES BARRAGES POIDS RIGIDES PAR
LA METHODE DES EQUATIONS INTEGRALES
AUX FRONTIERES

Proposé par :
M^r O. BELHADJ

Etudié par :
M^{rs} M. DOUGHA
S. YAHIAOUI

Dirigé par :
M^r O. BELHADJ

PROMOTION
JUN 1995

TITRE : Etude des pressions hydrodynamiques sur les barrages poids rigides par la méthode des équations intégrales aux frontières

ملخص : الهدف من هذا العمل هو دراسة الضغوط الهيدروديناميكية على السدود الثقيلة الصلدة الناتجة على فعل زلزال . استعملت لهذا الغرض طريقة المعادلات التكاملية على الحدود . بعض النتائج المحصل عليها تم مقارنتها بأخرى متحصل عليها بفضل دراسات سابقة . نتاج هذه المقارنة جيدة عموما .

RESUME : L'objet de ce travail est l'étude des pressions hydrodynamiques sur les barrages poids rigides dûes à l'action d'un seisme .

Pour cela, la méthode des équations intégrales aux frontières a été utilisée.

Quelques résultats obtenus ont été comparés avec d'autres résultats obtenus par des études précédentes .

La comparaison a montré que les résultats sont très proches .

ABSTRACT : The object of this work is the study of hydrodynamic pressures on rigid gravity dams due to earthquake action, using the boundary element method .

Some results obtained are compared with other results of previous studies .

The agreement between these results is fairly good .

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail en terme de respect et de reconnaissances à :

- *Ma mère ;*
- *Mon père ;*
- *Mes frères et soeurs ;*
- *Toute ma famille ;*
- *Tous mes amis .*

SAMIR.

** Je souhaite que ce travail de fin d'étude soit acceptable par mes enseignants, et je le dédie à :*

- *Mes parents ;*
- *Mes frères et soeurs ;*
- *Tous mes amis .*

MOSTEFA.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier notre promoteur M^r O . BELHADJ qui nous a proposé ce sujet et guidé dans notre travail .

Nos remerciements s'adressent aussi à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation .

SOMMAIRE

	page
Introduction	1
<i>Chapitre I</i>	
* <u>Action sismique sur les barrages</u>	2
I . 1 Généralités sur les séismes	2
I . 1 . 1 Définition	2
I . 1 . 2 Types d'ondes	2
* Ondes de volume (ondes P, ondes S)	
* Ondes de surface (ondes de Rayleigh, ondes de love)	
I . 2 Effets induits par les séismes sur les barrages	4
I . 3 Comportement dynamique du barrage	5
I . 3 . 1 L'action sur la masse du barrage	5
I . 3 . 2 L'interaction sol- structure	5
I . 3 . 3 L'intéraction fluide- structure	6
<i>Chapitre II</i>	
* <u>Quelques études précédentes du problème</u>	7
II . 1 Solution de WESTERGAARD	7
II . 2 Etude de ZANGAR	8
II . 3 Etude de PHILIP . L, LIU . F	9

Chapitre III

* <u>Etude hydrodynamique</u>	12
III . 1 Introduction	12
III . 2 Hypothèses de base	12
III . 3 Equations fondamentales du problème	12
III . 4 Notions élémentaires sur la propagation des ondes	
sismiques élastiques	17
III . 4 . 1 Définitions	17
III . 4 . 2 Propagation des ondes sismiques (principe de base)	17
III . 4 . 3 Absorption, réflexion, amortissement des ondes	
sismiques	18
III . 5 Résolution analytique des équations d'ondes	19
- 1 ^{er} cas ($\Delta P = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$)	
- 2 ^{eme} cas ($\Delta P = 0$)	

Chapitre IV

* Présentation de la méthode des équations intégrales aux frontières

IV.1 Introduction	22
IV.2 Historique	22
IV.3 Principe de la méthode des équations intégrales aux frontières	23
IV.4 Avantages et inconvénients de la méthode	24
IV.4.1 Avantages de la méthode	24
IV.4.2 Inconvénients de la méthode	24

IV.5 Formation de l'équation intégrale	25
IV.5.1 Choix de la fonction de pondération	27
IV.5.2 Equation intégrale aux frontières	28
IV.6 Discrétisation de la frontière et de l'équation intégrale	30
IV.6.1 Fonctions de forme	31
- élément constant	
- élément linéaire	
- élément quadratique	
IV.7 Formation du système d'équations	33
IV.8 Problème de coin	34

Chapitre V

*** Application de la méthode des équations intégrales aux frontières**

<u>pour l'étude des pressions hydrodynamiques</u>	35
V.1 Introduction	35
V.2 Cas où l'eau est considérée incompressible	35
V.2.1 Solution fondamentale	35
V.2.2 Formulation de l'équation intégrale	37
V.2.3 Discrétisation de l'équation intégrale aux frontières	38
a- élément constant	
b- élément linéaire	
V.2.4 Evaluation des intégrales aux frontières	41
a- évaluation des intégrales dans le cas des éléments constants	
b- évaluation des intégrales dans le cas des éléments linéaires	

V.3 Cas où l'eau est considérée compressible	45
V.3.1 Solution fondamentale	46
V.3.2 Formulation de l'équation intégrale aux frontières	47
V.3.3 Discrétisation de l'équation intégrale	47
V.3.4 Evaluation des intégrales aux frontières	47
a- évaluation des intégrales dans le cas des éléments constants	
b- évaluation des intégrales dans le cas des éléments linéaires	
V.4 Conditions aux limites	51

Chapitre VI

* <u>Description des programmes numériques</u>	54
---	-----------

Chapitre VII

* <u>Applications</u>	64
VII.1 Eau incompressible	
VII.2 Eau compressible	
VII.3 Interprétation des résultats	67
Conclusion	
Annexes	
Bibliographie	

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Plusieurs barrages dans le monde sont construits dans des zones de moyennes activités sismiques . Le degré d'évaluation du risque associé aux barrages excités ainsi que le succès de futurs projets comptent sur la compréhension approfondie de leurs réponses aux mouvements de la terre . Une analyse compétente est un outil indispensable vers ce but .

L'analyse de la réponse du barrage au séisme est très compliquée du faite qu'elle doit tenir compte non seulement de l'action sismique sur le barrage proprement dit, mais aussi d'autres facteurs qui influent sur sa réponse au séisme, à savoir :

- l'interaction entre le barrage et l'eau du réservoir ;
- l'interaction entre le barrage et la fondation sur laquelle le barrage repose ;
- l'interaction entre l'eau et le fond de la retenue .

Plusieurs recherches ont été réalisées dans ce domaine, en allant de cas simples aux cas compliqués et en utilisant des méthodes expérimentales, analytiques et numériques .

L'aspect qui intéresse notre étude est l'interaction dynamique entre le barrage et l'eau du réservoir .

Le but recherché est la détermination de la répartition des pressions hydrodynamiques sur le parement amont du barrage pour différentes inclinaisons de ce parement .

Chapitre 1

ACTION SISMIQUE SUR LES BARRAGES

I.1 - Généralités sur les séismes : [1] , [5] , [6]

I-1.1. Définition :

Le tremblement de terre correspond à une vibration du sol provoquée par une libération soudaine d'énergie de déformation accumulée à l'intérieur de la terre . L'endroit où se produit le séisme est appelé foyer . A partir de ce point , la secousse sismique se propage sous forme d'ondes de divers types , qui engendrent en surface du sol un mouvement complexe .

I-1.2 Types d'ondes :

a)- Ondes de volume : Elles prennent naissance dans le foyer et se propagent sous deux formes :

* Ondes P ou ondes longitudinales : (fig. I.1.1)

C'est le type d'ondes qui apparaît le premier sur les enregistrements de séisme. Les ondes P s'accompagne d'un changement de volume (Compression, dilatation)

* Ondes S ou ondes transversales : (fig. I.1.2)

Elles sont observées en seconde sur les enregistrements de séisme. Elles provoquent un cisaillement sans changement de volume . Les ondes S ne se propagent pas dans les milieux fluides en raison de l'inaptitude de ces milieux à transmettre les efforts de cisaillement .

b)- Ondes de surface : Elles n'intéressent le sol que sur une profondeur extrêmement faible . On distingue :

* Les ondes R ou ondes RAYLEIGH : (fig. I.1.3)

Se sont des ondes pour lesquelles les points du sol décrivent des ellipses dans le plan vertical de propagation . Ce mouvement entraîne des compressions (ou des tractions) ainsi que des cisaillements dans le sol .

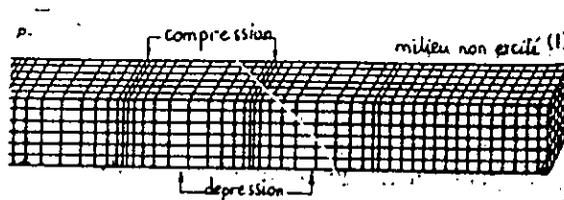


Fig . I . 1 . 1 Une onde longitudinale

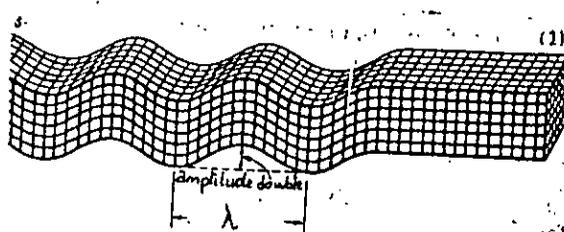


Fig . I . 1 . 2 Une onde transversale

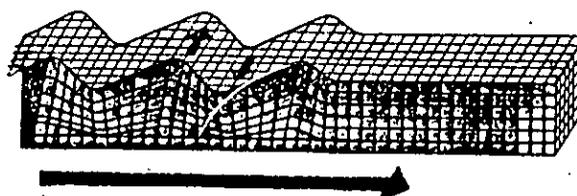


Fig . I . 1 . 3 Une onde de Rayleigh

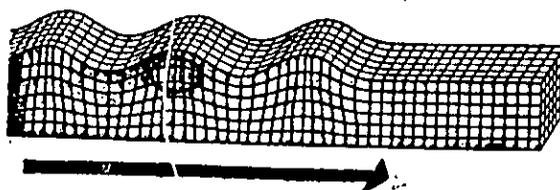


Fig . I . 1 . 4 Une onde Love

* Les ondes Q ou ondes Love : (fig. I.1.4)

Se sont des ondes pour lesquelles les points du sol se déplacent dans un plan tangent à la surface , perpendiculairement à la direction de propagation . Elles n'engendrent que des contraintes de cisaillement .

I.2. Effets induits par les séismes sur les barrages : [6]

Les séismes peuvent apporter aux barrages des dégâts considérables .

- Pour les barrages en béton :
 - ils entraînent le glissement du barrage sur sa fondation ;
 - l'ouverture de joints ou de fissures ;
 - le déplacement par cisaillement ou basculement de plots ou de sections de la partie supérieure ;
 - l'endommagement de l'évacuateur de crue ;
 - ils provoquent des contraintes de traction, de compression ou de cisaillement entraînant des dommages ou des déformations permanentes de la fondation ou du barrage ;
 - les glissements des rives sur la retenue qui peuvent entraîner un déversement sur le barrage si la vague créée dépasse la revanche, et aussi la destruction d'organes de sécurité (vidange de fond et évacuateur de crue).
- Pour les barrages en terre, les séismes provoquent :
 - l'augmentation des pressions interstitielles qui conduisent à des ruptures partielles ou totales ;
 - cisaillement du barrage provoqué par le mouvement d'une faille traversant la fondation ;

- glissement du barrage provoqué par la rupture de l'un de ses talus ;
- perte de la revanche et déversement sur le barrage ;
- apparition des fissures dans les organes étanches du barrage qui peut provoquer des pertes d'eau incontrôlables ;
- destruction du déversoir et des organes de vidanges .

I.3 Comportement dynamique d'un barrage : [6]

Les secousses provoquées par un séisme se composent de vibrations horizontales et verticales . Ces vibrations émises par le substratum rocheux sont transmises au barrage directement ou par l'intermédiaire d'une fondation de type alluvial .

Le comportement dynamique du barrage présente un certain nombre de traits spécifiques, il en résulte lors d'un séisme :

- une action sur la masse du barrage ;
- une interaction sol - structure ;
- une interaction fluide - structure .

I.3.1 L'action sur la masse du barrage :

Le séisme engendre un champ d'accélération qui dépend d'une part du séisme et d'autre part du barrage par sa forme, sa hauteur et les caractéristiques des matériaux qui le composent .

Le barrage sera donc soumis à des efforts supplémentaires consécutifs aux forces d'inertie .

I.3.2 Interaction sol- structure :

Le comportement du barrage dépend du mouvement sismique imposé par le sol et du comportement des fondations pendant et après le séisme .

Il en résulte systématiquement, lors d'un séisme , un couplage dynamique entre le barrage et sa fondation se traduisant par une interaction importante entre le sol et l'ouvrage .

I.3.3 L'interaction fluide - structure :

Les mouvements du fond de la retenue et du barrage lors du séisme génèrent dans l'eau du réservoir des ondes de pression .

Les ondes de pression sur le parement amont modifient le mouvement du barrage qui lui même influe sur la répartition des pressions dans le fluide .

Il vient s'ajouter donc une force hydrodynamique qui affecte la réponse dynamique du barrage d'où la nécessité d'une analyse du phénomène de l'interaction fluide - structure (barrage - eau) .

Chapitre 2

QUELQUES ÉTUDES PRÉCÉDENTES DU PROBLÈME

Dans ce chapitre , nous présentons quelques études anciennes et récentes réalisées dans le but d'une analyse des pressions hydrodynamiques sur les barrages rigides .

II . 1 Solution de Westergaard : [6]

La première approche de ce phénomène a été apportée par Westergaard (1933), qui a calculé la répartition de pression sur un écran vertical limitant un réservoir de profondeur constante dans l'hypothèse d'un mouvement horizontal harmonique de l'écran de période T .

Dans le cas où la compressibilité de l'eau peut être négligée, Westergaard a établi une expression parabolique approchée du résultat, indépendante de la période de vibration de l'écran :

$$P(y) = \frac{7}{8} \alpha W (hy)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II} . 1)$$

avec : P : pression sur l'écran ;

α : coefficient sismique ;

W : poids volumique de l'eau ;

h : profondeur du réservoir ;

y : profondeur du point considéré .

La force totale appliquée sur l'écran est égale à :

$$F = \frac{7}{12} \alpha W h^2 \quad (\text{II} . 2)$$

Elle s'applique en un point situé au $\frac{2}{5}$ de la hauteur en partant du bas
(fig. II.1 . 1)

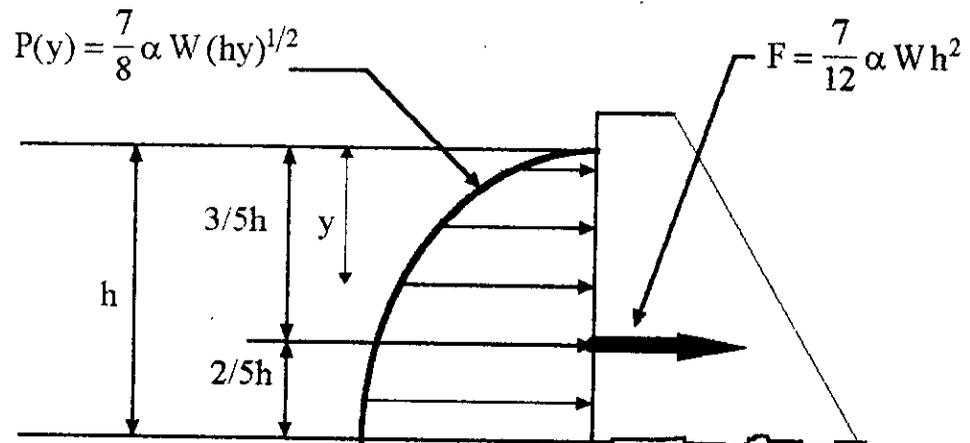


Figure II.1.1

II. 2 Etude de Zangar (1951) : [14]

L'influence du parement amont sur l'interaction barrage - eau à été étudiée par Zangar, par la méthode de l'analogie électrique, pour la résolution de l'équation de Laplace régissant l'évolution de la pression dans le réservoir due à l'action d'un séisme horizontal .

La pression hydrodynamique sur le parement est donnée par :

$$P = C\alpha Wh \quad (\text{II. 3})$$

C : est le coefficient de pression, il dépend seulement de la forme du barrage .

La distribution du coefficient de pression pour différentes inclinaisons du parement amont est représentée par la figure (II.2.1) . De cette figure on remarque que :

- les coefficients de pressions diminuent avec l'augmentation de l'inclinaison du parement ;
- à l'exception du cas d'un parement vertical, le coefficient de pression maximal est toujours obtenu à une certaine distance au-dessus de la base ;

- la valeur maximale de coefficient de pression existe à la base du barrage ayant un parement vertical .

Les résultats expérimentaux ont fait l'objet d'une formulation analytique approchée :

$$P(y) = \frac{C_m}{2} \alpha W h \left[\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) + \left(\frac{y}{h} \left(2 - \frac{y}{h} \right) \right)^{1/2} \right] \quad (\text{II} . 4)$$

où C_m est le coefficient de pression maximale donnée par la figure (II.2.2)

II . 3 Etude de L.F.LIU (1986) : [13]

LIU a étudié le problème analytiquement et numériquement (méthode des équations intégrales aux frontières) dans l'hypothèse d'un fluide incompressible et barrage rigide . Les résultats obtenus sont représentés dans les figures (II . 3 . 1) et (II . 3 . 2) . On peut noter les mêmes remarques faites pour l'étude de Zangar .

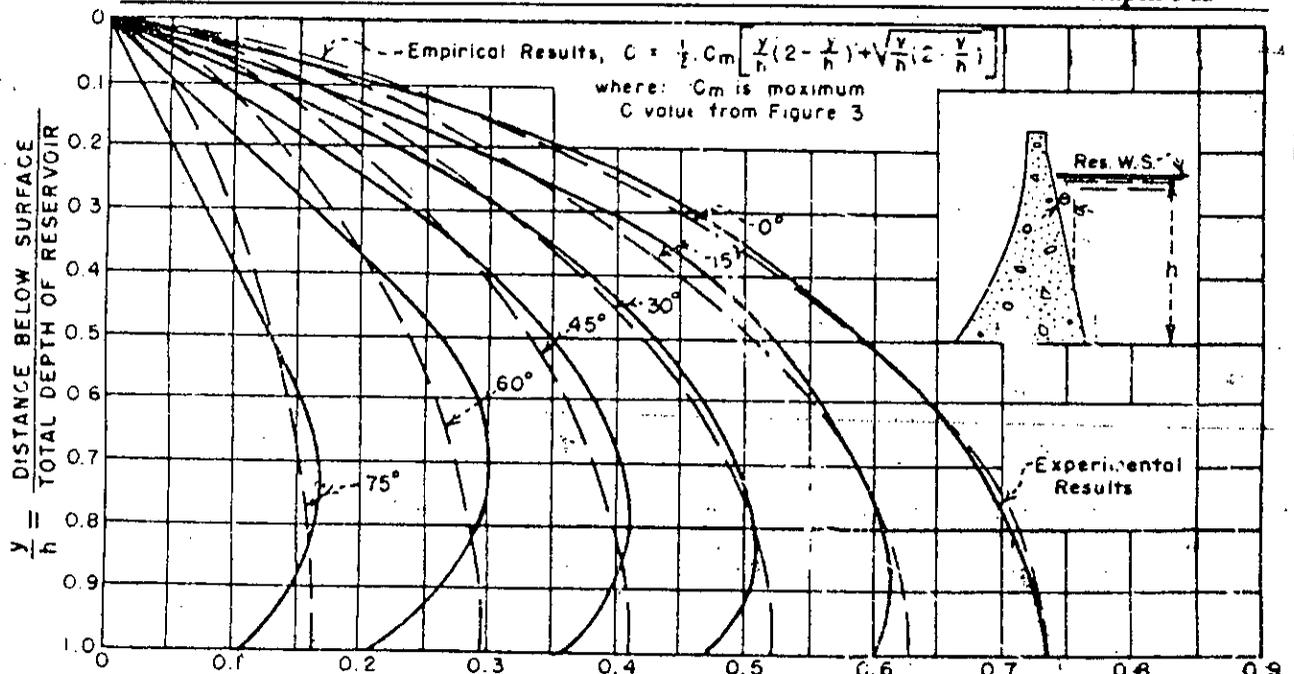


Fig. II . 2 . 1 Coefficient de pression C

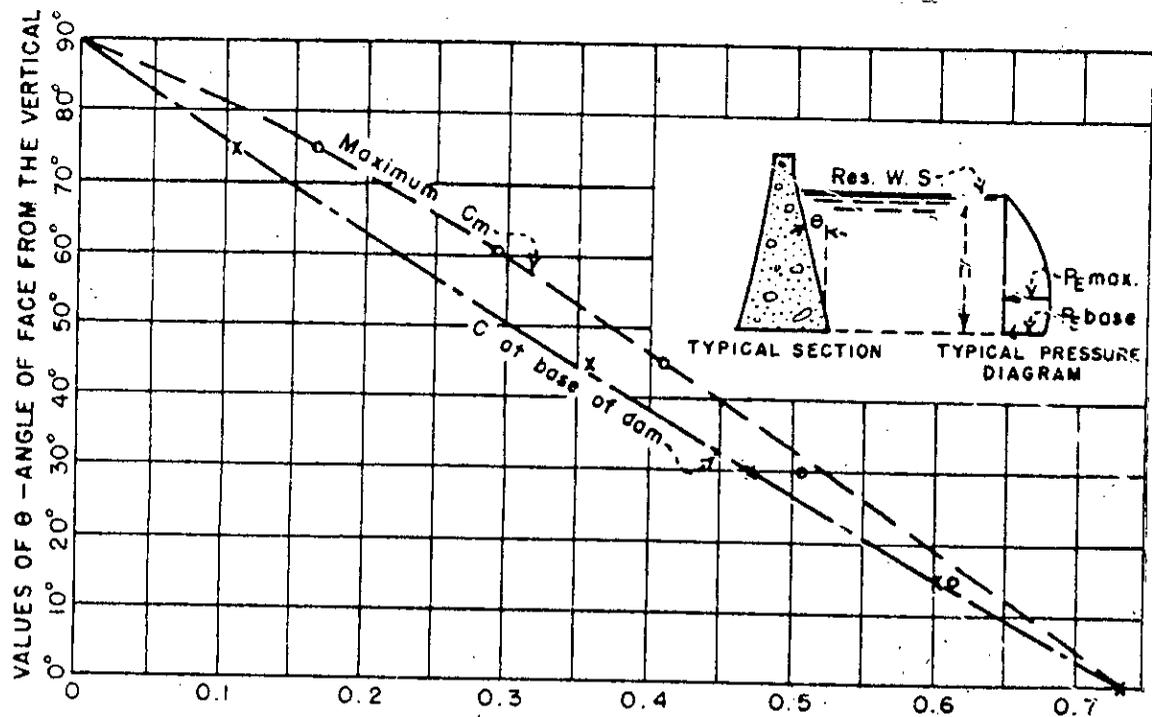


Fig. II . 2 . 2 Coefficient de pression maximale C_m

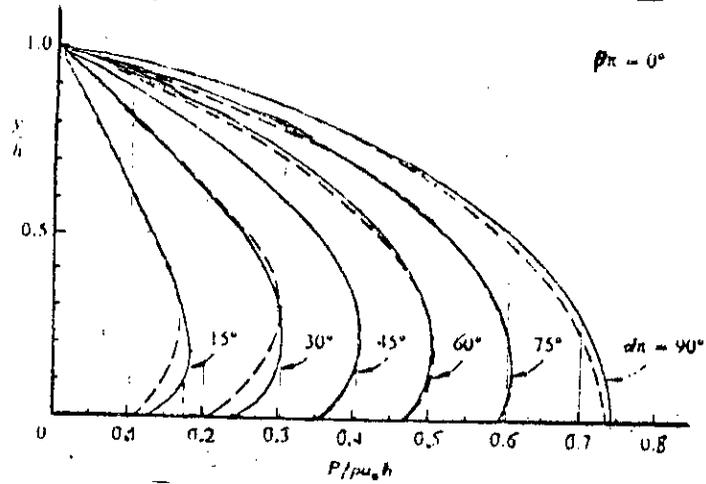


Fig. II. 3. 1 Distribution des pressions hydrodynamiques

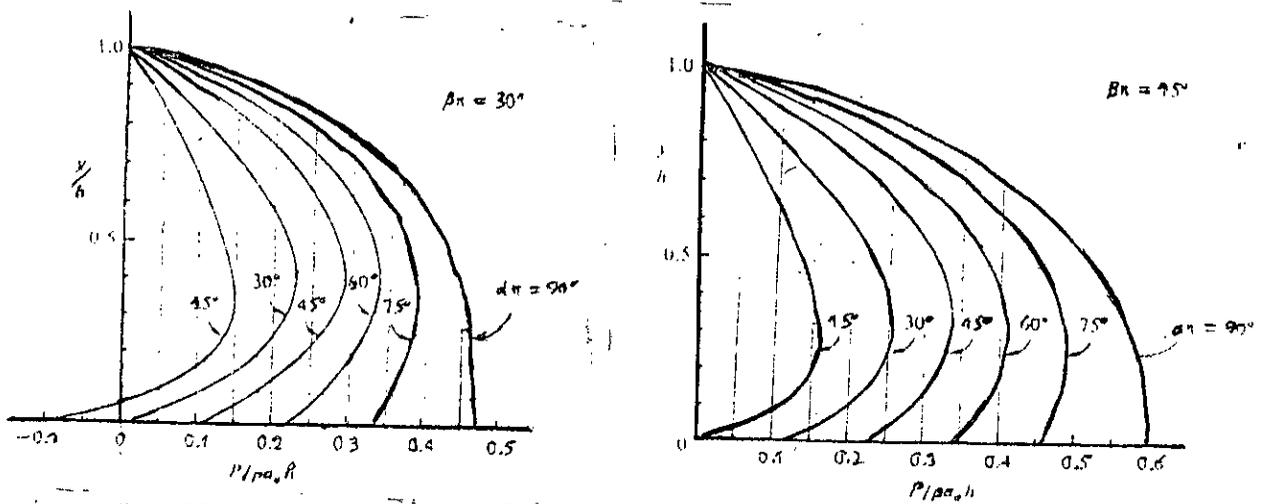


Fig. II. 3. 2 Distribution des pressions hydrodynamique pour un fond incliné ($B = 15^\circ$ et $B = 30^\circ$)

Chapitre 3

ÉTUDE HYDRODYNAMIQUE

III. 1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons étudier le mouvement de l'eau dans la cuve d'un barrage sous l'action d'un séisme .

Ce problème est traité de manière bidimensionnelle, sur un plan perpendiculaire à l'axe d'implantation du barrage (fig.III.1.1) .

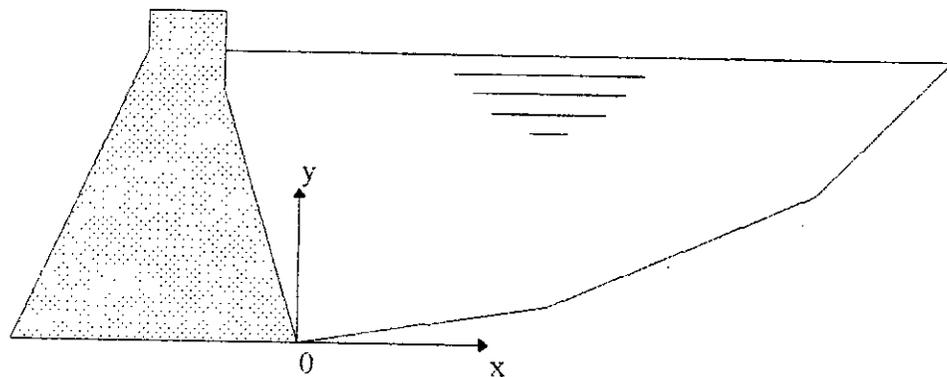


FIG . III .1.1

III. 2 Hypothèses de base :

- 1)- la viscosité de l'eau est négligeable ;
- 2)- le mouvement des particules d'eau est limité aux faibles amplitudes ;
- 3)- l'effet des ondes de surface est négligeable ;
- 4)- la surface libre d'eau de la cuve est supposée plane ;
- 5)- l'effet de turbulence est nul ;

III. 3 Equations fondamentales du problème : [7] [11]

Considérons l'équilibre d'un volume d'eau élémentaire existant dans la cuve d'eau du barrage sous forme d'un parallélépipède d'épaisseur égal à l'unité, soumis à une excitation sismique .

Lorsqu' on applique sur celui-ci le principe de la quantité de mouvement, on établit les équations de NAVIER- STOCKES :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\text{grad}}(P_t) + \nu \cdot \Delta \vec{V} + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \cdot \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V}))$$

avec :

\vec{V} : vecteur de vitesse (m . S⁻¹)

\vec{F} : vecteur des forces volumiques par unité de masse (N . Kg⁻¹)

ρ : masse volumique (Kg . m⁻³)

P_t : pression totale (N . m⁻²)

ν : Viscosité cinématique (m² . S⁻¹)

ξ : viscosité de dilatation (Kg . m⁻¹ S⁻¹)

Si on décompose la pression totale en pression statistique et en pression hydrodynamique (pression de l'excitation), c - à - d :

$$P_t = P_{st} + P$$

l'équation devient :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\text{grad}}(P_{st} + P) + \nu \cdot \Delta \vec{V} + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \cdot \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})) \quad (\text{III} . 3 . 1)$$

* Pour l'état statique (avant l'excitation sismique), l'équation (III.3.1) se simplifie en :

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\text{grad}}(P_{st}) = 0 \quad (\text{III} . 3 . 2)$$

où :

$$\vec{V} = 0 \quad ; \quad \text{div}(\vec{V}) = 0 \quad \text{et} \quad P = 0$$

La combinaison entre les équations (III.3.1) et (III.3.2) donne :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\text{grad}}(P) + \nu \cdot \Delta \vec{V} + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\nu}{3} \right) \cdot \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})) \quad (\text{III} . 3 . 3)$$

En appliquant les hypothèses du travail sur l'équation vectorielle (III.3.3), on aura après simplification et projection sur les axes $\vec{o x}$; $\vec{o y}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d u}{d t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{d v}{d t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{III.3.4})$$

Sachant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d u}{d t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{d v}{d t} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right.$$

L'hypothèse (2) permet de simplifier ces équations en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d u}{d t} \approx \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{d v}{d t} \approx \frac{\partial v}{\partial t} \end{array} \right.$$

L'équation (III.3.3) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{III.3.5})$$

Avec : u , v sont les composantes cartésiennes de (\vec{V}) selon les axes $\vec{o x}$, $\vec{o y}$.

* L'application du principe de la conservation de la masse au volume élémentaire, permet d'établir l'équation de continuité :

$$\frac{d \rho}{d t} + \rho \cdot \text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{III.3.6})$$

On projette sur les axes \vec{ox}, \vec{oy} et d'après l'hypothèse (2), on aura :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

où :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{III.3.7})$$

* Si on considère que l'eau est linéairement compressible (suit la loi de Hooke) :

$$d\rho = \frac{1}{K} \cdot \rho \cdot dP$$

avec : K : module d'élasticité volumique ($N^{-1} \cdot m^2$).

Lorsqu'on divise cette formule par $\left(\frac{1}{dt}\right)$, on obtient :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{K} \cdot \rho \cdot \frac{dP}{dt}$$

d'où :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{K} \cdot \rho \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$$

On dérive celle-ci par rapport à (t) :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{1}{K} \cdot \left(\rho \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \right)$$

en négligeant $\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$ devant $\rho \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$

$$d'où : \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{1}{K} \cdot \rho \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} \quad (\text{III.3.8})$$

En dérivant la 1^{ère} équation du système (III.3.4) par rapport à x , la 2^{ème} par rapport à y et additionnons les deux, on obtient :

$$\rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.3.9})$$

entre (III.3.6) et (III.3.9) on a :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \quad (\text{III.3.10})$$

et entre (III.3.8) et (III.3.10)

$$\frac{\rho}{K} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

ou :

$$\Delta P = \frac{1}{C^2} \times \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (\text{III.3.11})$$

avec :

$$C = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \text{ est la vitesse des ondes dans l'eau . (m . s}^{-1} \text{)}$$

L'équation (III.3.11) représente l'équation générale de propagation des ondes dans un milieu élastique compressible .

* Si on considère que l'eau est incompressible, la valeur de K tend vers l'infini, c'est à dire la valeur de C tend vers l'infini et l'équation (III.3.10) devient :

$$\Delta P = 0 \quad (\text{III.3.12})$$

elle représente l'équation générale de propagation des ondes dans un milieu incompressible .

III . 4 Notions élémentaires sur la propagation des ondes élastiques

sismiques : [7]

III . 4 . 1 Définitions :

* Les ondes élastiques sismiques sont les perturbations mécaniques (déformations) se propageant dans un milieu élastique .

* la propagation des ondes élastiques sismiques d'amplitudes faibles (appelées ondes sonores ou acoustiques) n'est pas liée à un transport de substance .

* L'onde longitudinale est dite plane si la pression P et d'autres grandeurs caractérisant le mouvement ondulatoire du milieu ne sont fonction que du temps et de l'une des coordonnées cartésiennes spatiales, par exemple de x .

* L'onde longitudinale est cylindrique si ses surfaces d'ondes (fronts d'ondes) ont la forme de surfaces cylindriques circulaires ayant un axe de symétrie commun .

* Les ondes cylindriques sont excitées dans un milieu homogène et isotrope .

* Chaque onde peut être représentée sous forme d'un ensemble d'ondes sinusoïdales planes .

III . 4 . 2 Propagation des ondes sismiques :

* Principes de base :

Quand une onde sismique rencontre une interface séparant deux milieux de propriétés élastiques différentes, l'énergie incidente se sépare en deux parties:

- une partie réfléchie ;
- une partie réfractée qui traverse l'interface .

En même temps, il ya " conversion " de l'onde sismique . par exemple, une onde longitudinale donnera naissance à :

- une onde longitudinale et une onde transversale réfléchie ;
- une onde longitudinale et une onde transversale réfractée à travers l'interface .

* Nous nous intéresserons dans cette étude uniquement aux ondes longitudinales, réfléchies ou réfractées, et nous négligerons donc le phénomène de " conversion "

III . 4 . 3 Absorption , réflexion, amortissement des ondes sismiques :

* Définition :

L'absorption est la quantité mesurée quand l'énergie ou l'amplitude de l'onde sismique est comparée entre deux points distincts dans un milieu élastique .

* Coefficient d'absorption (facteur d'atténuation C_{ab}): [1]

pour un milieu élastique absorbant, il peut être défini à partir de la décroissance exponentielle de l'amplitude d'une onde sinusoïdale après un trajet (s) entre deux points caractérisés par les amplitudes $A(0)$, $A(s)$.

$$C_{ab} = \frac{1}{\|s\|} \cdot \text{Ln} \left(\frac{A(0)}{A(s)} \right)$$

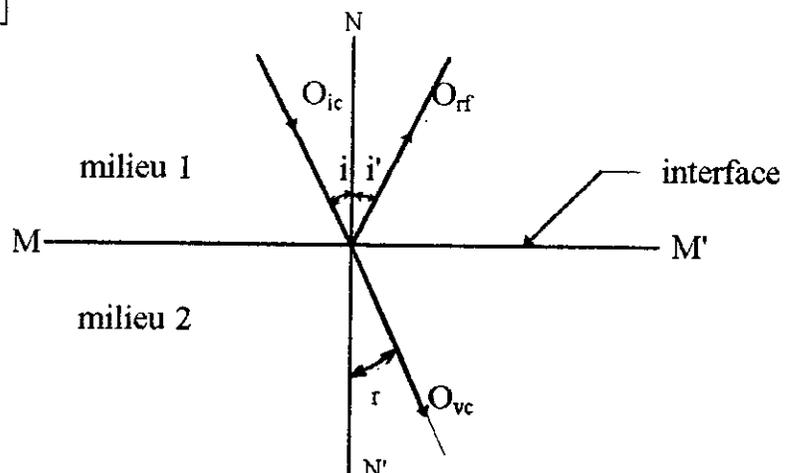
* Coefficient de réflexion C_r : [7]

C'est le rapport des intensités des ondes réfléchi et incidente, pour une onde plane:

$$C_r = \left[\frac{\rho_2 \cdot \text{tg}(r) - \rho_1 \cdot \text{tg}(i)}{\rho_2 \cdot \text{tg}(r) + \rho_1 \cdot \text{tg}(i)} \right]^2 = \left[\frac{\rho_2 \cdot C_2 \cdot \cos(i) - \rho_1 \cdot \sqrt{C_1^2 - C_2^2 \cdot \sin^2(i)}}{\rho_2 \cdot C_2 \cdot \cos(i) + \rho_1 \cdot \sqrt{C_1^2 - C_2^2 \cdot \sin^2(i)}} \right]^2$$

Dans le cas d'incidence normale :

$$C_r = \left[\frac{\rho_2 \cdot C_2 - \rho_1 \cdot C_1}{\rho_2 \cdot C_2 + \rho_1 \cdot C_1} \right]^2$$



Avec : i : angle d'incidence

i' : angle de réflexion

r : angle de réfraction

ρ_1 : masse volumique du premier milieu

ρ_2 : masse volumique du deuxième milieu

C_1 : célérité du premier milieu

C_2 : célérité du deuxième milieu

* Coefficient d'amortissement C_a : [10]

Il est donné par la formule :

$$C_a = \frac{1}{C} \cdot \frac{1 - C_r}{1 + C_r} \quad [C_a] = \frac{S}{m}$$

avec :

C_r : coefficient de réflexion

C : la célérité du milieu

Remarque :

Dans un milieu rigide où $\rho_2 C_2 \gg \rho_1 C_1$ ou $\rho_1 C_1 \gg \rho_2 C_2$, on trouve que le coefficient de réflexion $C_a \approx 1$ et le coefficient d'amortissement tend vers zéro.

III. 5 Résolution analytique des équations d'onde : [8], [12]

* Premièrement : l'équation

$$\Delta \bar{P} = \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2}$$

En coordonnées cylindriques l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \theta^2} = \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2}$$

Lorsqu' on a un milieu homogène isotrope l'équation devient indépendante de θ .

D'où :

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} = \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2}$$

En nous bornant à l'étude des mouvements sinusoïdaux de forme :

$$\bar{P} = P(r, \omega) e^{j\omega t} \quad ; \quad j^2 = -1$$

Avec : $P(r, \omega)$: amplitude d'onde (m)

ω : pulsation d'onde (S^{-1})

Nous obtenons grâce à cette hypothèse :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\omega^2}{C^2} P = 0$$

on pose : $\bar{K} = \omega / C$ et $Z = \bar{K} \cdot r$

L'équation devient :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial P}{\partial Z} + P = 0$$

Ce type d'équation représente une équation de Bessel d'ordre zéro .

- Les solutions de cette équation s'expriment par les fonctions de Bessel et de Neumann d'ordre zéro $J_0(Z)$, $N_0(Z)$.

c- à -d : $P = C_1 \cdot J_0(Z) + j C_2 \cdot N_0(Z)$

* C_1 , C_2 des constantes : (déterminées par les propriétés des ondes incidente et réfléchie, ... etc)

* Propriétés de N_0 et J_0

- lorsque $r \rightarrow 0$, $\begin{cases} J_0 \approx 1 \\ N_0 \approx -\infty \end{cases}$

- la dérivée de N_0, J_0 :

$$J_0' = -J_1$$

$$N_0' = -N_1$$

Avec : J_1 : Fonction de Bessel d'ordre un

N_1 : Fonction de Neumann d'ordre un

* deuxièmement : l'équation

$$\Delta \bar{P} = 0$$

En coordonnées cylindriques l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial \theta^2} = 0$$

Pour un milieu homogène isotrope l'équation se simplifie en :

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} = 0$$

En nous bornons à l'étude des mouvements sinusoïdaux de forme :

$$\bar{P} = P(\omega, r) e^{j\omega t}$$

nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = 0$$

La solution générale de cette équation est donnée par la forme :

$$P = C_1 \ln(r) + C_2$$

C_1, C_2 : sont des constantes .

Chapitre 4

PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES AUX FRONTIÈRES

IV. 1 Introduction :

De nombreux phénomènes physiques sont régis par des équations aux dérivées partielles qui décrivent l'évolution de ces phénomènes dans des domaines limités par des frontières . Les solutions analytiques de ces équations sont très délicates à obtenir . Ainsi des méthodes numériques ont été développées : Différences finies puis éléments finis .

Malgré sa souplesse et son immense champ d'application, la méthode des éléments finis peut présenter un certains nombres d'inconvénients, en particulier, quand le domaine devient infini et quand apparaissent des singularités en des points du domaine. Un autre inconvénient est de devoir traiter dans de nombreux cas des problèmes à trois dimensions, ce qui exige souvent de grandes capacités de mémoire des ordinateurs .

La méthode la plus puissante permettant de remédier à ces inconvénients est celle désignée sous le nom " méthode des équations intégrales aux frontières " où " boundary elements method " (B.E.M).

IV. 2 Historique : [2],[3],[4]

La B.E.M a été étudiée par plusieurs mathématiciens :

FREDHOLM (1903), SMIRNOV (1927), MUSKHELISHVILI (1953),
MIKHLIN (1957), VOLTERA (1959) et KUPRADZE (1964).

FREDHOLM (1903) a établi des équations intégrales pour des problèmes potentiels .

KOLLOG (1929) a exprimé les équations intégrales pour un problème de champ potentiel en terme d'équations intégrales aux frontières .

JAWSON et SYMM (1963) ont présenté une technique numérique pour résoudre les équations intégrales aux frontières développées par FREDHOLM, qui consiste à une discrétisation de la frontière en une série d'éléments, en supposant une source constante à l'intérieur de chaque élément .

RIZZO (1967) a développé une approche par équations intégrales aux frontières pour étudier les problèmes d'élastostatique . CRUSE (1969) a étendue cette approche pour la résolution des problèmes tridimensionnels .

WOOD (1975) a établi une approche par éléments aux frontières pour la prédiction des tassements de structures .

CROUCH (1976) a appliqué la méthode pour l'étude des excavations souterraines .

En ce qui concerne l'application de la méthode pour l'analyse des pressions hydrodynamiques dans les barrages, HANNA et HUMAR (1982) ont appliqué la méthode en considérant un réservoir infini et un écoulement bidimensionnel . LIU (1986) a étudié le problème pour les barrages rigides dans le cas des écoulements potentiels bidimensionnels .

TSEE et LEE (1987) ont appliqué la méthode pour l'analyse en tridimensionnels des pressions hydrodynamiques sur les barrages .

HUMAR et JABLONSKI (1988) ont étudié le problème en bidimensionnel et tridimensionnel avec la méthode des équations intégrales aux frontières associée à la méthode des éléments finis .

IV. 3 Principe de la méthode des équations intégrales aux frontières :

Son principe consiste à transformer les équations aux dérivées partielles régissant le comportement physique du problème étudié dans le domaine et vérifiant des conditions aux limites sur la frontière, en équations intégrales liant des fonctions connues et inconnues sur la frontière du domaine exclusivement .

Dans le but d'une résolution numérique , la frontière du domaine sera discrétisée en un certain nombre d'éléments, ce qui conduit à la discrétisation de l'équation intégrale et permet de former un système d'équations algébriques de type :

$$[H] \{ U \} = [G] \{ V \}$$

Après l'introduction des conditions aux limites et réarrangement du système d'équations sous forme $[A] \{X\} = \{B\}$, celui-ci peut être résolu numériquement (exemple : méthode d'élimination de Gauss), ce qui permet de déterminer les inconnues sur la frontière. Une fois toutes les inconnues sur la frontière sont déterminées, il devient alors possible de déterminer les inconnues à l'intérieur du domaine.

IV. 4 Avantages et inconvénients de la méthode :

IV. 4. 1/ Avantages de la méthode :

* Réduction de la dimension du problème :

La méthode des équations intégrales aux frontières transforme le problème étudié sur la frontière du domaine seulement, ce qui permet de réduire la dimension du problème d'une unité d'où la réduction d'espace mémoire occupé sur ordinateurs.

* Entrée des données :

Etant donné que la dimension du problème est réduite, le nombre des données initiales à introduire est lui-même réduit, ce qui permet de faire des économies de temps et de coût :

* Nombre d'inconnues :

En B.E.M la discrétisation ne concerne que la frontière du domaine, ce qui réduit le nombre d'inconnues en inconnues sur la frontière seulement. Les inconnues à l'intérieur du domaine peuvent être déterminées après détermination des inconnues sur la frontière.

IV. 4. 2 / Inconvénients de la méthode :

* Singularité des intégrales :

La méthode des équations intégrales nécessite le calcul des intégrales pour évaluer les termes des matrices établies. Certaines intégrales présentent des singularités lorsque les fonctions à intégrer contiennent des termes tels que $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$, $\ln r$,ect, qui tendent

vers l'infini quand r tend vers zéro. L'évaluation de telles intégrales nécessite des approches particulières.

* Problème de coin :

Lorsque un point appartient à un coin, il va lui correspondre deux normales et par conséquent, la fonction inconnue présente au niveau de ce point deux dérivées par rapport à la normale. Une analyse particulière est faite pour contourner ce problème. La précision de la méthode est donc affectée aux niveaux des coins.

* Résolution du système d'équations :

Dans la méthode des équations intégrales aux frontières, les matrices établies sont souvent non symétriques, ce qui ne permet pas d'appliquer les techniques de stockage utilisées dans la méthode des éléments finis. La résolution du système d'équations obtenu peut donc être lente.

IV. 5 Formation de l'équation intégrale :

Considérons un phénomène défini dans un domaine Ω limite par une frontière Γ (figure IV. 5. 1) et régi par l'équation aux dérivées partielles :

$$L(U_0) = 0 \quad (\text{IV. 5. 1})$$

avec L est un opérateur différentiel et U_0 la solution exacte de l'équation.

Les conditions aux limites du problème sont :

- conditions essentielles:

$$U = \bar{U} \text{ sur } \Gamma_1$$

- conditions naturelles :

$$V = \frac{\partial U}{\partial n} = \bar{V} \text{ sur } \Gamma_2$$

$$\text{avec } \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$$

\vec{n} est le vecteur normal à la frontière orienté vers l'extérieur.

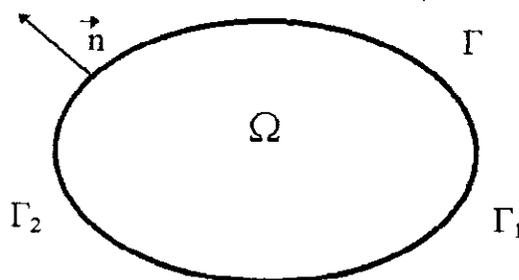


Figure (IV . 5 . 1)

La résolution numérique de l'équation (IV.5.1) permet généralement d'obtenir une solution approchée (U) . Par conséquent , le terme de gauche de l'équation (IV.5.1) n'est pas nul mais égal à un certain résidu :

$$L(U) = R \quad (IV.5.2)$$

Dans le but de minimiser l'erreur (le résidu), on utilise une technique des résidus pondérés qui consiste à distribuer l'erreur sur le domaine en utilisant une fonction de pondération conduisant à l'annulation de la forme intégrale :

$$\int L(U) U^* d\Omega = 0 \quad (IV.5.3)$$

U^* est la fonction de pondération .

Considérant dans ce qui suit le cas particulier où le domaine Ω est bidimensionnel et L est l'opérateur de Laplace ou de D'alembert :

- opérateur de Laplace :

$$L(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

- opérateur de D'alembert :

$$L(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \alpha^2 U ; \alpha : \text{constante réelle}$$

Dans ce cas l'application du théorème de Gréen (annexe1) permet d'écrire la formulation intégrale (IV.5.3) sous la forme :

$$\int_{\Omega} L(U) U^* d\Omega = \int_{\Omega} L(U^*) U d\Omega + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial U}{\partial n} U^* - \frac{\partial U^*}{\partial n} U \right) d\Gamma = 0$$

d'où :

$$\int_{\Omega} L(U^*) U d\Omega = \int_{\Gamma} V^* U d\Gamma - \int_{\Gamma} V U^* d\Gamma \quad (IV.5.4)$$

$d\Gamma$ est un segment de la frontière .

IV . 5 . 1 / Choix de la fonction de pondération :

La fonction de pondération peut être choisie de différentes manières . En d'autre terme, les méthodes des résidus pondérés se distinguent par des choix particuliers de la fonction de pondération (méthode de collocation par points, méthode des sous domaines, méthode de Galerkinge, méthode Ritz) .

Cependant, l'emploi de la méthode des équations intégrales aux frontières nécessite un choix approprié de la fonction de pondération . La fonction choisie doit permettre l'élimination de l'intégrale du premier membre de l'équation (IV.5.4) .

Dans la méthode des équations intégrales aux frontières, on choisit la fonction de pondération de sorte qu'elle soit solution de l'équation (IV.5.4) sans vérification des conditions aux limites, dans le cas d'un domaine infini soumis à une excitation unique concentrée en un point " i " du domaine et dont l'effet se propage vers l'infini. Elle est appelée la solution fondamentale .

Les fonctions delta de Dirac sont souvent employées pour représenter les excitations uniques concentrées intervenant dans des équations différentielles, car elles donnent simplement une valeur en un point quand on intègre sur tout le domaine .

Pour cela, la fonction de pondération (U^*) doit satisfaire l'équation :

$$L(U^*) = \Delta_i \quad (IV.5.1.1)$$

Δ_i est la fonction delta de Dirac centrée au point "i" du domaine .

Les propriétés de la fonction delta de Dirac sont :

$$\Delta_i = \begin{cases} \infty & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases}$$

$$\int_{x_i - \varepsilon}^{x_i + \varepsilon} \Delta_i \, dx = 1$$

$$\int \Delta_i f(x) \, dx = f(x_i)$$

En remplaçant dans (IV.5.4) $L(U^*)$ par son équivalent tiré de l'équation (IV.5.1.1), on obtient :

$$\int_{\Omega} \Delta_i U \, d\Omega = \int_{\Gamma} V_i^* U \, d\Gamma - \int_{\Gamma} V U_i^* \, d\Gamma \quad (\text{IV.5.1.2})$$

En utilisant les propriétés de la fonction delta de Dirac, l'équation (IV.5.1.2) devient:

$$U_i = \int_{\Gamma} V_i^* U \, d\Gamma - \int_{\Gamma} V U_i^* \, d\Gamma \quad (\text{IV.5.1.3})$$

U_i est la valeur de la fonction au point source " i " d'application de l'excitation unitaire .

L'équation (IV.5.1.3) est appelée l'équation intégrale associée à l'équation (IV.5.1)

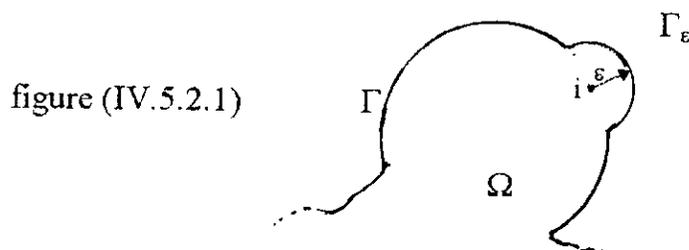
IV . 5 . 2 / Equation intégrale aux frontières :

L'équation (IV.5.1.3) est valable pour un point "i" se trouve à l'intérieur du domaine Ω .

Puisque les inconnues dans les points internes du domaine ne peuvent être déterminées que si les inconnues sur la frontière sont connues, il est donc intéressant d'examiner la forme limite de l'équation (IV.5.1.3) dans le cas où le point source "i" appartient à la frontière Γ du domaine .

Quand "i" est pris sur la frontière, l'intégrale aura une singularité . Pour y remédier on procède comme suit :

- Si le point "i" appartient à une frontière régulière (lisse), on suppose que le domaine Ω est augmenté d'un demi cercle centré au point "i" et de rayon ε tendant vers zéro (figure IV.5.2.1)



- Si le point "i" appartient à une frontière irrégulière (coin), on suppose que le domaine est augmenté d'une région circulaire centré au point i et de rayon ε tendant vers zéro. La frontière du domaine augmente de Γ_ε , avec $\Gamma_\varepsilon = \theta\pi$, où θ est l'angle extérieur au niveau du coin exprimé en radian (figure IV.5.2.2)

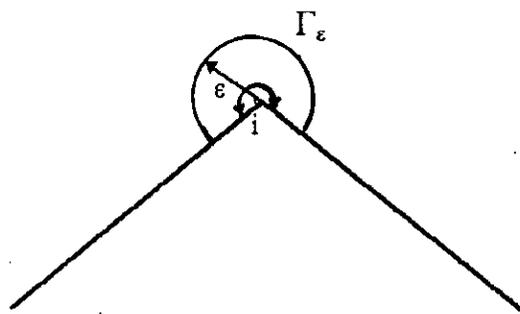


Fig. IV.5.2.2

L'équation (IV.5.1.3) s'écrit dans ce cas (point i sur la frontière) :

$$U_i = \int_{\Gamma} V_i^* U \, d\Gamma - \int_{\Gamma} V U_i^* \, d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} V_i^* U \, d\Gamma_\varepsilon - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} V U_i^* \, d\Gamma_\varepsilon \quad (\text{IV.5.2.1})$$

On démontrera (chapitre V) que l'équation (IV.5.2.1) prend la forme générale suivante (après calcul des limites) :

$$C_i U_i = \int_{\Gamma} V_i^* U d\Gamma - \int_{\Gamma} V U_i^* d\Gamma \quad \dots \quad (IV.5.2.2)$$

où C_i est un coefficient qui dépend de la position du point "i" (à l'intérieur du domaine, sur la frontière) et de la géométrie de la frontière au niveau du point i (lisse, coin).

IV. 6 Discrétisation de la frontière et de l'équation intégrale :

La méthode des équations intégrales aux frontières nécessite la discrétisation de la frontière en une série d'éléments sur lesquels la fonction U et sa dérivée V sont supposées varier, selon un choix approprié, en fonction de leurs valeurs en certains points de l'élément appelés les points nodaux ou noeuds.

Cette approximation est représentée par des fonctions de forme, ce qui permet d'écrire pour chaque élément :

$$U = \sum_{k=1}^{\ell'} \Phi_k U_k = \langle \Phi \rangle \{ U \} \quad (IV.6.1)$$

$$V = \sum_{k=1}^{\ell'} \Phi_k V_k = \langle \Phi \rangle \{ V \}$$

ℓ' : le nombre de points nodaux dans l'élément ;

Φ_k : une fonction de forme ;

U_k et V_k : les valeurs de U et V au noeud k .

Pour chaque noeud, l'équation (IV.5.2.2) s'écrit après discrétisation :

$$-C_i U_i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \langle \Phi \rangle \{ U \} V_i^* d\Gamma_j \right\} = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} \langle \Phi \rangle \{ V \} U_i^* d\Gamma_j \right\} \quad (IV.6.2)$$

N : le nombre totale d'éléments ;

Γ_j : longueur de l'élément j .

IV . 6 . 1 / Fonctions de forme :

Les fonctions U et V peuvent être approximées sur chaque élément de la frontière par les fonctions de forme suivantes :

a- Élément constant :

Le noeud se trouve au milieu de l'élément (figure IV.6.1.1) . Les fonctions U et V sont supposées constantes sur chaque élément et égales à leurs valeurs au noeud de l'élément (figure IV.6.1.2).

$$\Phi = 1 \quad (IV.6.1.1)$$

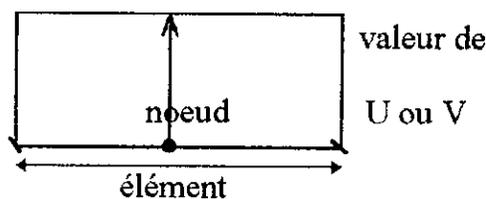


figure (IV.6.1.2)

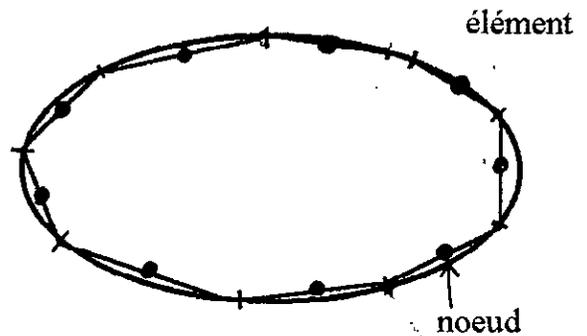


figure (IV.6.1.1)

b- Élément linéaire :

les noeuds se trouvent aux extrémités des éléments, ce qui signifie que chaque élément est représenté par deux noeuds (figure IV.6.1.3).

Les fonctions U et V varient linéairement pour chaque élément (figure IV.6.1.4).

Les fonctions de forme sont :

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (IV.6.1.2)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

avec : ξ est une coordonnée dimensionnelle définie par :

$$\xi = x / (l/2).$$

Les valeurs de U et V en un point de l'élément sont données par :

$$U = \Phi_1 U_1 + \Phi_2 U_2 = \langle \Phi \rangle \{ U \} \quad (IV.6.1.3)$$

$$V = \Phi_1 V_1 + \Phi_2 V_2 = \langle \Phi \rangle \{ V \}$$

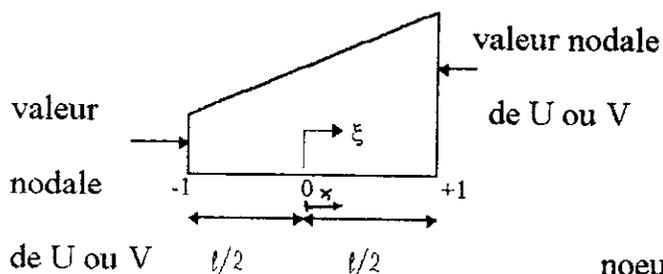


figure (IV.6.1.4)

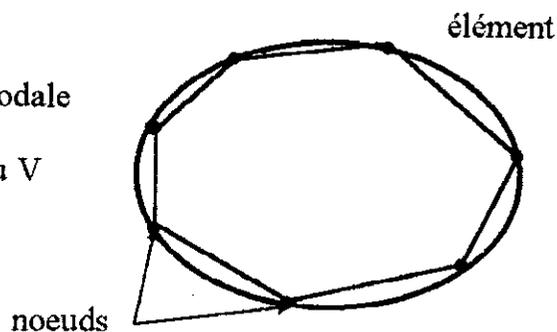


figure (IV.6.1.3)

C - Élément quadratique :

Chaque élément possède trois noeuds : au milieu et aux extrémités . Les fonctions U et V varient sous forme parabolique sur chaque élément .

les fonctions de forme sont :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \\ \Phi_3 &= (1-\xi)(1+\xi)\end{aligned}\tag{IV. 6.1.4}$$

Les valeurs de U et V en un point de l'élément sont données par :

$$\begin{aligned}U &= \Phi_1 U_1 + \Phi_2 U_2 + \Phi_3 U_3 = \langle \Phi \rangle \{ U \} \\ V &= \Phi_1 V_1 + \Phi_2 V_2 + \Phi_3 V_3 = \langle \Phi \rangle \{ V \}\end{aligned}\tag{IV. 6.1.5}$$

IV. 7 Formation du système d'équation :

En écrivant l'équation (IV.6.2) pour chaque noeud de la frontière, on obtient un système de m équations intégrales avec m est le nombre totale de noeuds. L'équation (IV.6.2) contient deux types d'intégrales qui doivent être évaluées sur chaque élément, à savoir :

$$\begin{aligned}& \int_{\Gamma_j} \langle \Phi \rangle \{ U \} V_i^* d\Gamma_j \\ & \int_{\Gamma_j} \langle \Phi \rangle \{ V \} U_i^* d\Gamma_j\end{aligned}$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}H_{ii} &= -C_i + \int_{\Gamma_i} \langle \Phi \rangle V_i^* d\Gamma_i \\ H_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \langle \Phi \rangle V_i^* d\Gamma_j, j \neq i \\ G_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \langle \Phi \rangle U_i^* d\Gamma_j\end{aligned}\tag{IV. 7.1}$$

l'équation (IV.6.2) s'écrit pour chaque noeud :

$$\sum_{j=1}^N U_j H_{ij} = \sum_{j=1}^N V_j G_{ij} , \quad i=1,2,\dots,n \quad (\text{IV.7.2})$$

où sous forme matricielle :

$$[H]\{U\} = [G]\{V\} \quad (\text{IV.7.3})$$

IV. 8 Problème de coin :

La fonction U présente au niveau de coin deux dérivées par rapport à la normale, ce qui rend impossible de résoudre directement le système (IV.7.2) si les conditions aux limites sont de types Dirichlet (uniquement les valeurs de U qui sont connues)

Différentes approches sont développés pour contourner se problème :

a- Concept de noeud unique :

On suppose que les deux dérivées par rapport à la normale au niveau du coin considéré sont égales .

b- Concept de double noeuds :

Cette procédure consiste à dédoubler le noeud au niveau du coin et considérer un petit segment reliant les deux noeuds, figure (IV.8.1) . Le système d'équations (IV.7.3) aura dans ce cas m équations supplémentaires, avec m est le nombre de coins .

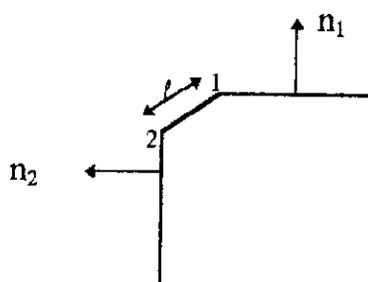


figure (IV.8.1)

Chapitre 5

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES AUX FRONTIÈRES POUR L'ÉTUDE DES PRESSIONS HYDRODYNAMIQUES

V. 1/ Introduction :

Ce chapitre consiste à l'utilisation de la méthode des équations intégrales aux frontières pour formuler le système d'équations permettant, après résolution, de déterminer les pressions hydrodynamiques qui s'exercent sur le parement amont d'un barrage poids rigide .

Notons avant tout, que de nombreux problèmes d'hydraulique peuvent être traités en considérant les liquides incompressibles. Dans d'autres problèmes, la compressibilité doit être prise en considération (exemple : coup de bélier , ,) .

En ce qui concerne notre étude, et pour voir l'influence de la compressibilité sur les résultats, deux cas sont discutés :

- Premier cas : l'eau est considérée incompressible ;
- deuxième cas : la compressibilité de l'eau est prise en considération .

V. 2/ Cas où l'eau est considérée incompressible :

V . 2 . 1/ Solution fondamentale :

La solution fondamentale du problème est celle qui satisfait l'équation :

$$\nabla^2 P^* = \Delta_1 \tag{ V . 2 . 1 . 1 }$$

En premier lieu, on résoudra l'équation homogène, puis on déterminera les constantes d'intégration en intégrant l'équation (V.2.1.1) dans un domaine de dimensions infinies .

La solution générale de l'équation (V.2.1.1) exprimée en coordonnées polaires est : (Voir § III.5)

$$P^* = C_1 \ln (r) + C_2 \tag{ V . 2 . 1 . 2 }$$

en intégrant l'équation (V.2.1.1) on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 P^* d\Omega = \int_{\Omega} \Delta_1 d\Omega = 1 \tag{ V . 2 . 1 . 3 }$$

Sachant que (théorème de Green) :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 P^* d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\partial P^*}{\partial n} d\Gamma$$

Et puisque le domaine Ω est infini, on peut le supposer circulaire, dans ce cas les vecteurs \vec{n} et \vec{r} sont colinéaires (fig. V.2.1.1) d'où :

$$\frac{\partial P^*}{\partial r} = \frac{\partial P^*}{\partial n}$$

L'équation (V.2.1.3) s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial P^*}{\partial r} d\Gamma &= 1 \\ \int_0^{2\pi} \frac{C_1}{r} r d\theta &= 1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} C_1 d\theta = 1 \\ \Rightarrow 2\pi C_1 &= 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Quand $r \rightarrow \infty$, on a $P^* \rightarrow 0$

d'où : $C_2 = 0$.

La solution fondamentale est donc :

$$P^* = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln(r) \quad (V.2.1.3)$$

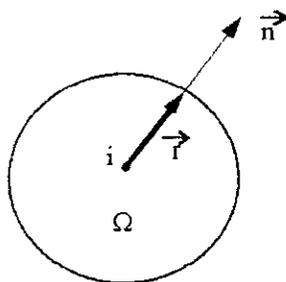


figure (V . 2 . 1 . 1)

V. 2. 2/ formulation de l'équation intégrale :

* à l'intérieur du domaine :

L'équation intégrale (IV.5.1.3) s'écrit dans ce cas :

$$P_i = \int_{\Gamma} P \cdot q_i^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma} P_i^* \cdot q \, d\Gamma \quad (\text{V.2.2.1})$$

avec P_i : la pression hydrodynamique au point source " i "

$$\text{et } q = \frac{\partial P}{\partial n} \quad ; \quad q^* = \frac{\partial P^*}{\partial n}$$

* aux frontières :

Pour une frontière lisse, en supposant le point " i " entouré d'un demi cercle de rayon ε tendant vers zéro (figure IV.5.2.1.), l'équation (IV.5.2.1.) s'écrit dans ce cas:

$$P_i = \int_{\Gamma} P \cdot q_i^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma} P_i^* \cdot q \, d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P \cdot q_i^* \, d\Gamma_\varepsilon - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_i^* \cdot q \, d\Gamma_\varepsilon \quad (\text{V.2.2.2})$$

avec :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P \cdot q_i^* \, d\Gamma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int P \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \, d\Gamma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[P_i \frac{\pi \varepsilon}{2\pi \varepsilon} \right] = \frac{1}{2} P_i$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q \cdot P_i^* \, d\Gamma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int q \cdot \frac{1}{2\pi} \ln(\varepsilon) \, d\Gamma_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[q_i \frac{\pi}{2\pi} \cdot \varepsilon \cdot \ln(\varepsilon) \right] = 0$$

L'équation (V.2.2.2) devient donc :

$$\frac{1}{2} P_i = \int_{\Gamma} P \cdot q_i^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma} P_i^* \cdot q \, d\Gamma \quad (\text{V.2.2.3})$$

pour une frontière irrégulière (coin) (figure IV.5.2.2), on procède de la même manière, avec dans ce cas :

$$\Gamma_\varepsilon = \theta \varepsilon$$

ce qui permet d'avoir :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P q_i^* d\Gamma_\varepsilon = \frac{\theta}{2\pi} P_i$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_i^* q d\Gamma_\varepsilon = 0$$

l'équation (V.2.2.2) s'écrit :

$$\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) P_i = \int_{\Gamma} P q_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} P_i^* q d\Gamma \quad (\text{V.2.2.4})$$

En résumé l'équation intégrale peut s'exprimer par :

$$C_i P_i = \int_{\Gamma} P q_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} P_i^* q d\Gamma \quad (\text{V.2.2.5})$$

Avec :

$C_i = 1$ pour un point à l'intérieur du domaine ;

$C_i = 1/2$ pour un point appartenant à une frontière lisse ;

$C_i = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$ pour un point appartenant à un coin ;

θ : étant l'angle extérieur au niveau du coin

V.2.3/ Discretisation de l'équation intégrale aux frontières :

a) élément constant :

Dans ce cas, le noeud appartient toujours à une frontière lisse (fig.V.2.3.1)

L'équation (V.2.2.5) s'écrit, après discrétisation (voir les équations IV.6.2 et IV.6.1.1)

$$-\frac{1}{2} P_i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} P q_i^* d\Gamma_j \right\} = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} q P_i^* d\Gamma_j \right\} \quad (V.2.3.1)$$

P et q étant constantes et égales à leurs valeurs au noeud, d'où (V.2.3.1) s'écrit :

$$-\frac{1}{2} P_i + \sum_{j=1}^N P_j \cdot \int_{\Gamma_j} q_i^* d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N q_j \cdot \int_{\Gamma_j} P_i^* d\Gamma_j \quad (V.2.3.2)$$

Introduisons les notations :

$$\begin{aligned} H_{ii} &= -\frac{1}{2} + \int_{\Gamma_i} q_i^* d\Gamma_i \\ H_{ij} &= + \int_{\Gamma_j} q_i^* d\Gamma_j \quad i \neq j \\ G_{ij} &= \int_{\Gamma_j} P_i^* d\Gamma_j \end{aligned} \quad (V.2.3.3)$$

L'équation (V.2.3.2) s'écrit pour chaque noeud :

$$\sum_{j=1}^N P_j H_{ij} = \sum_{j=1}^N q_j G_{ij} \quad ; \quad i=1, \dots, N \quad (V.2.3.4)$$

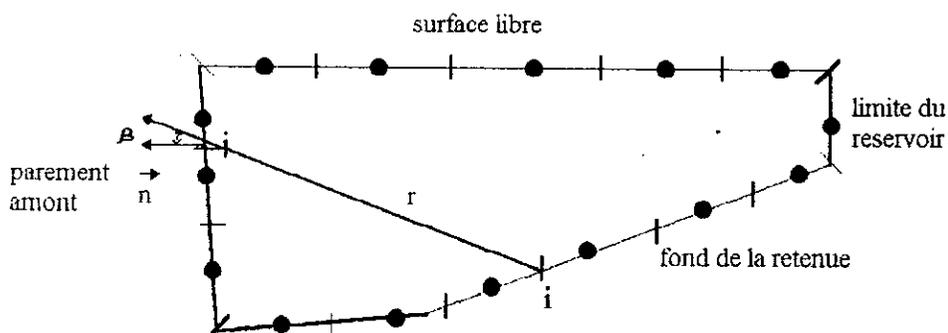


fig. (V.2.3.1)

b) Elément linéaire :

Dans ce cas, le noeud peut appartenir à une frontière lisse comme il peut appartenir à un coin (fig. . V.2.3.2). L'équation (V.2.2.5) s'écrit après Discrétisation (voir les équations IV.6.2 et IV.6.1.3) :

$$-\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) P_1 + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} P_j \\ P_{j+1} \end{Bmatrix} q_i^* d\Gamma_j = \quad (V.2.3.5)$$

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [\phi_1 \ \phi_2] \begin{Bmatrix} q_j \\ q_{j+1} \end{Bmatrix} d\Gamma_j \quad \leftarrow P_i^*$$

ϕ_1 et ϕ_2 sont les fonctions de forme données par l'équation (IV.6.1.2)

Introduisons les notations :

$$\begin{aligned} h_{ij}^{(1)} &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 q_i^* d\Gamma_j \\ h_{ij}^{(2)} &= \int_{\Gamma_j} \phi_2 q_i^* d\Gamma_j \\ g_{ij}^{(1)} &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 P_i^* d\Gamma_j \\ g_{ij}^{(2)} &= \int_{\Gamma_j} \phi_2 P_i^* d\Gamma_j \end{aligned} \quad (V.2.3.6)$$

L'équation (V.2.3.5) s'écrit avec ces notations :

$$-\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right) P_1 + \sum_{j=1}^N (h_{ij}^{(1)} P_j + h_{ij}^{(2)} P_{j+1}) = \quad (V.2.3.7)$$

$$\sum_{j=1}^N (g_{ij}^{(1)} q_j + g_{ij}^{(2)} q_{j+1}) \quad ; \quad i = 1, \dots, N$$

Introduisons encore les notations :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ij} &= h_{ij}^{(1)} + h_{i,j-1}^{(2)} \\ H_{ii} &= -\left(1 - \frac{\theta}{2\Pi}\right) + h_{ii}^{(1)} + h_{i,i-1}^{(2)} \\ G_{ij} &= g_{ij}^{(1)} + g_{i,j-1}^{(2)} \end{aligned} \quad (V.2.3.8)$$

les équations (V.2.3.4) et (V.2.3.7) peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$[H] \{P\} = [G] \{q\} \quad (V.2.3.9)$$

Où [H] et [G] sont des matrices N * N dont les termes sont données par (V.2.3.3) pour les éléments constants et par (V.2.3.8) pour les éléments linéaires .

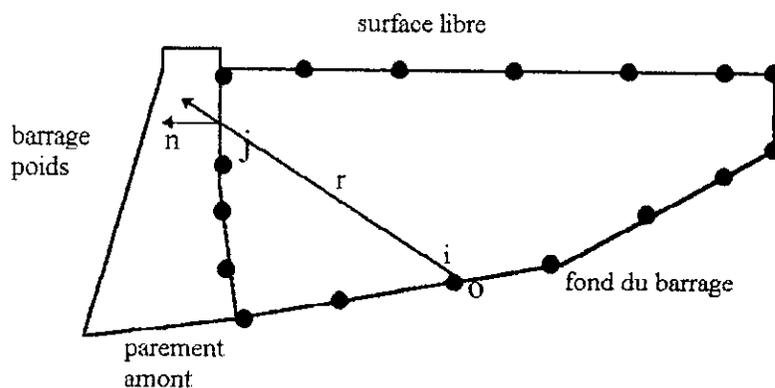


fig. (V . 2 . 3 . 2)

V . 2 . 4/ Evaluation des intégrales aux frontières :

Les intégrales données par (V.2.3.3) et (V.2.3.8) peuvent être évaluées par deux manières :

- intégration numérique ;
- intégration analytique .

L'intégration numérique est utilisée dans le cas où les expressions à intégrer ne présentent aucune singularité . Parmi les méthodes d'intégration numérique on peut utiliser la quadrature de Gauss .

L'intégration analytique est utilisée dans le cas où les expressions à intégrer présentent une singularité .

C'est le cas pour les termes G_{ij} en éléments constants et les termes G_{ij} et $G_{i,i+1}$ en éléments linéaires .

a) Evaluation des intégrales dans le cas des éléments constants :

L'emploi de la quadrature de Gauss avec quatre points d'intégration (figure V.2.4.1) permet d'exprimer les termes H_{ij} et G_{ij} donnés par l'équation (V.2.3.3) sous forme:

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} q_i^* d\Gamma_j = \int \frac{\partial P_i^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{r} \cos(\beta) d\Gamma_j$$

D' où :

$$H_{ij} = \frac{l_j}{4\pi} \sum_{m=1}^4 \frac{1}{r_m} \cdot \cos(\beta_m) \cdot W_m \quad (V.2.4.1)$$

Avec :

β : l'angle entre la normale à l'élément et le vecteur \vec{r} (figure V.2.4.1).

W_m : les facteurs de pondération utilisés dans la quadrature de Gauss ;

l_j : longueur de l'élément j .

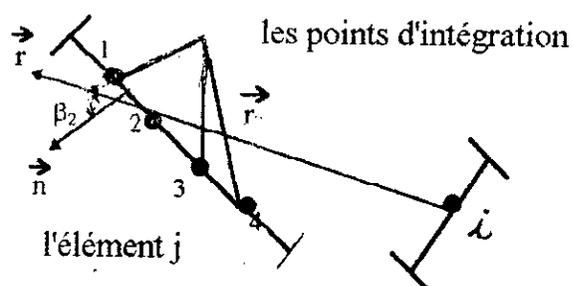


fig. V.2.4.2

$$H_{ii} = -\frac{1}{2} + \frac{\ell_i}{4\pi} \sum_{m=1}^4 \frac{1}{r_m} \cdot \cos(\beta_m) \cdot W_m \quad (\text{V.2.4.2})$$

le deuxième terme dans H_{ii} s'annule, car le vecteur \vec{r} est orthogonal au vecteur \vec{n} ($\cos(\beta) = 0$), d'où :

$$H_{ii} = -\frac{1}{2} \quad (\text{V.2.4.3})$$

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} P_i^* d\Gamma_j = \frac{1}{4\pi} \ell_j \sum_{m=1}^4 \ln(r_m) \cdot W_m \quad (\text{V.2.4.4})$$

Le terme G_{ii} se calculera analytiquement. Pour y faire considérons la nouvelle coordonnée ξ (fig. V.2.4.2)

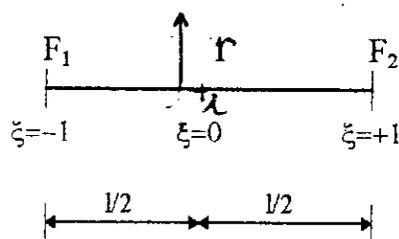


fig. V. 2 . 4 . 2

Cela permet d'exprimer r par :

$$||r|| = |\xi \cdot l/2| \quad (\text{V.2.4.5})$$

D'où :

$$\begin{aligned} G_{ii} &= \int_{F_1}^{F_2} P_i^* d\Gamma_i = 2 \int_{\text{noeudi}}^{F_2} P_i^* d\Gamma_i = \frac{1}{2\pi} \ell_i \int_0^1 \ln\left(\xi \cdot \frac{\ell_i}{2}\right) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \ell_i \ln \frac{\ell_i}{2} + [\xi(\ln(\xi) - 1)]_0^1 \end{aligned} \quad (\text{V.2.4.6})$$

Finalement :

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \cdot \ell_i \cdot \left[\ln\left(\frac{\ell_i}{2}\right) - 1 \right]$$

b) Evaluation des intégrales dans le cas des éléments linéaires :

les intégrales données par (V .1.3.6) sont calculées comme suit :

$$h_{ij}^{(1)} = \int_{\Gamma_j} \varphi_1 q_i^* d\Gamma_j = \frac{\ell_j}{8\pi} \int_{-1}^{+1} (1-\xi) \cdot \frac{1}{r} \cdot \cos(\beta) \cdot d\xi \quad (V.2.4.6)$$

L'application de la quadrature de Gauss avec quatre points d'intégration donne :

$$h_{ij}^{(1)} = \frac{\ell_j}{8\pi} \sum_{m=1}^4 (1-\xi_m) \frac{1}{r_m} \cos(\beta_m) \cdot W_m \quad (V.2.4.6)$$

De la même manière :

$$h_{ij}^{(2)} = \frac{\ell_j}{8\pi} \sum_{m=1}^4 (1+\xi_m) \frac{1}{r_m} \cos(\beta_m) W_m \quad (V.2.4.7)$$

$$g_{ij}^{(1)} = \frac{\ell_j}{8\pi} \sum_{m=1}^4 (1-\xi_m) \ln(r_m) W_m \quad (V.2.4.8)$$

$$g_{ij}^{(2)} = \frac{\ell_j}{8\pi} \sum_{m=1}^4 (1+\xi_m) \ln(r_m) W_m \quad (V.2.4.9)$$

Les termes singuliers sont calculés analytiquement en se référant à la figure (V.2.4.3) :

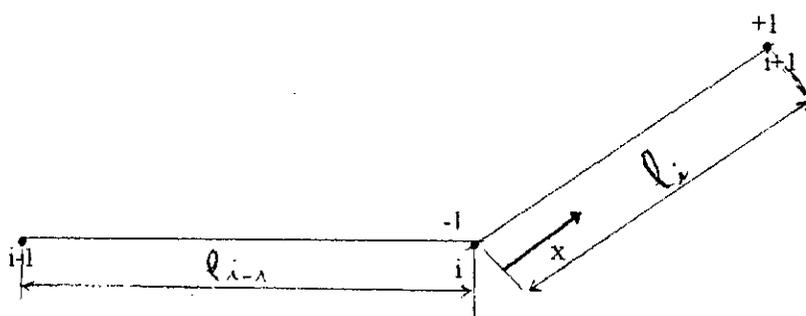


fig. (V.2.4.3)

$$g_{ii}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell_i} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) \ln(x) dx = \frac{\ell_i}{4\pi} (\ln(\ell_i) - 1,5) \quad (\text{V.2.410})$$

$$g_{i,i-1}^{(1)} = \frac{\ell_{i-1}}{4\pi} (\ln(\ell_{i-1}) - 1,5) \quad (\text{V.2.411})$$

$$g_{i,i}^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\ell_i} \left(\frac{x}{\ell_i}\right) \ln(x) dx = \frac{\ell_i}{4\pi} (\ln(\ell_i) - 0,5) \quad (\text{V.2.412})$$

Pour H_{ii} , G_{ii} on trouve :

$$H_{ii} = -1 + \frac{\theta}{2\pi}$$

Parceque les termes $h_{ii}^{(1)}$, $h_{i,i-1}^{(2)}$ sont nuls à cause de l'orthogonalité de \vec{r} et \vec{n} ($\cos(\beta) = 0$)

$$\begin{aligned} G_{ii} &= g_{i,i}^{(1)} + g_{i,i-1}^{(2)} \\ &= \frac{\ell_i}{4\pi} (\ln(\ell_i) - 1,5) + \frac{\ell_{i-1}}{4\pi} (\ln(\ell_{i-1}) - 1,5) \end{aligned}$$

Aussi :

$$\begin{aligned} G_{i,i+1} &= g_{i,i+1}^{(1)} + g_{ii}^{(2)} \\ &= \frac{\ell_{i+1}}{4\pi} (\ln(\ell_{i+1}) - 1,5) + \frac{\ell_i}{4\pi} (\ln(\ell_i) - 0,5) \end{aligned}$$

V. 3/ Cas où l'eau est considérée compressible :

Ce cas sera discuté en considérant une excitation harmonique d'impulsion ω , ce qui permet d'exprimer la pression hydrodynamique par $\bar{P} = P e^{j\omega t}$; $j^2 = -1$

Substitutions dans l'équation (III.3.10) on obtient :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{C^2} P = 0$$

$$\text{Où : } \nabla^2 P + K^2 P = 0 \quad (\text{V.3.1})$$

Avec : $K' = \frac{\omega}{C}$: est le nombre d'onde (m^{-1})

V.3.1/ Solution fondamentale :

La solution fondamentale du problème est celle qui satisfait l'équation :

$$\nabla^2 P^* + K'^2 P^* = \Delta_i \quad (\text{V.3.1.1})$$

La solution homogène de (V.3.1.1) exprimé en coordonnées cylindrique est donnée par (voir paragraphe III. 5) :

$$P^* = C_1 J_0(K'r) + C_2 N_0(K'r)$$

Où :

$$P^* = \sqrt{\frac{2}{\pi K' r}} \left[C_1 \cos(K'r - \pi/4) + C_2 \sin(K'r - \frac{\pi}{4}) \right]$$

$$P^* = \sqrt{\frac{2}{\pi K' r}} \left[\frac{C_1 - jC_2}{2} e^{j(K'r - \frac{\pi}{4})} + \frac{C_1 + jC_2}{2} e^{-j(K'r - \frac{\pi}{4})} \right]$$

Si nous voulons que l'onde cylindrique étudiée se réduise à l'une ou l'autre de ces ondes, nous devons choisir la relation entre C_1 et C_2 telles que : $C_1 = \pm j C_2$

$$\text{Si } C_1 = -j C_2$$

$$P^* = C_1 [J_0(K'r) - jN_0(K'r)]$$

$$= C_1 H_0^{(2)}(K'r)$$

Avec : $H_0^{(2)}$: fonction de HANKEL d'ordre zéro de deuxième espèce ou fonction de Bessel d'ordre zéro de troisième espèce .

Pour déterminer la valeur de C_1 on intègre l'équation (V.3.1.1) dans un domaine de dimensions infinies .

La solution générale de l'équation (V. 3.1.1) exprimé en coordonnées polaires est (même méthode d'intégration voir paragraphe V.2.1) .

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{j}{4} (J_0 (K r) - j N_0 (K r)) \\ &= \frac{j}{4} H_0^{(2)} (K . r) \quad j^2 = -1 \end{aligned} \quad (V.3.1.2)$$

V . 3 . 2 Formulation de l'équation intégrale aux frontières :

De la même manière que le cas précédent l'équation intégrale au frontière est donnée par l'équation (V.1.2.2) en considérant la solution fondamentale donnée par (V.3.1) et en calculant les limites qui lui correspondent, on peut établir une équation identique à (V.1.2..4)

V . 3 . 3 Discretisation de l'équation intégrale au frontière :

Cette dicrétisation est la même que celle du cas précédent, décrite au paragraphe (V.1.3) . Toutes les équations établies restent valables ici, en considerant dans ces équations la solution fondamentale donnée par (V.3.1.2)

V . 2 . 4 Evaluation des intégrales aux frontières :

a- Evaluation des intégrales dans le cas des éléments constants:

les termes donnés par (V.1.3.3) sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} H_{ii} &= \int_{\Gamma_j} q_i^* \Gamma_j = \frac{j}{4} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial H_0^{(2)} (K' r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d \Gamma_j \\ &= - \frac{j}{4} K \int H_1^{(2)} (K r) \cos (\beta) d \Gamma_j \end{aligned}$$

avec : $H_1^{(2)}(K'r)$: la dérivés de la fonction de HANKAL (voir paragraphe III.5)

D'où :

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \frac{-K_j \ell_j}{8} \sum_{m=1}^4 H_1^{(2)}(K'r_m) \cos(\beta_m) W_m \\ &= \frac{-K \ell_j}{8} \left[\sum_{m=1}^4 (N_1(K'r_m) + j J_1(K'r_m)) \right] \cos(\beta_m) W_m \end{aligned} \quad (V.3.4.1)$$

Donc : $H_{ij} = RH_{ij} + j IMH_{ij}$

avec : RH_{ij} : la partie réelle de H_{ij}

IMH_{ij} : la partie imaginaire de H_{ij}

$$H_{ii} = -\frac{1}{2} + j(-4\alpha) \quad (V.3.4.2)$$

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \int_{\Gamma_j} P_i^* d\Gamma_j = \frac{j}{4} \int H_0^{(2)}(K'\Gamma) d\Gamma_j \\ &= \frac{j \ell_j}{8} \sum_{m=1}^4 H_0^{(2)}(K'r) W_m \\ &= \frac{\ell_j}{8} \left[\sum_{m=1}^4 (N_0(K'r_m) + j J_0(K'r_m)) \right] W_m \\ &= RG_{ij} + j IMG_{ij} \end{aligned} \quad (V.3.4.3)$$

avec : RG_{ij} : la partie réelle de G_{ij}

IMG_{ij} : la partie imaginaire de G_{ij}

Les termes G_{ii} sont calculées analytiquement en utilisant l'approximation suivante de l'équation fondamentale :

lorsque r tend vers zéro on a :

$$\begin{aligned} N_0(Kr) &\approx \frac{2}{\pi} \ln(K'r) \\ J_0(Kr) &\approx 1 \end{aligned} \quad (V.3.4.4)$$

Substituons dans l'expression de G_{ii} et en se référant à la figure (V.2.4.1)

$$\text{IMG}_{ii} = \frac{1}{4} \int_{\Gamma_i} 1 \cdot d\Gamma_i = \frac{1}{4} \frac{\ell_i}{2} \int_{-1}^{+1} d\xi = \frac{1}{4} \ell_i \quad (\text{V.3.4.5})$$

$$\begin{aligned} \text{RG}_{ii} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \ln(Kr) d\Gamma_i = \frac{\ell_i}{2\pi} \int_0^{+1} \ln\left(K\xi \frac{\ell_i}{2}\right) d\xi \\ &= \frac{\ell_i}{2\pi} \left\{ \ln\left(\frac{K\ell_i}{2}\right) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (\text{V.3.4.6})$$

$$G_{ii} = \text{RG}_{ii} + j\text{IMG}_{ii} \quad (\text{V.3.4.7})$$

b- Evaluation des intégrales dans le cas des éléments linéaires :

Les termes donnés par (V.1.3.6) sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} h_{ij}^{(1)} &= \int_{\Gamma_j} \phi_1 q_i^* d\Gamma_j = -\frac{jK\ell_j}{8} \int_{-1}^{+1} (1-\xi) H_1^{(2)}(Kr) \cos(\beta) d\xi \\ &= -\frac{jK'\ell_j}{16} \sum_{m=1}^4 (1-\xi_m) H_1^{(2)}(Kr_m) \cos(\beta_m) W_m \\ &= -\frac{jK'\ell_j}{16} \left[\sum_{m=1}^4 (1-\xi_m) (J_1(Kr_m) - jN_1(Kr_m)) \cos(\beta_m) W_m \right] \end{aligned} \quad (\text{V.3.4.8})$$

$$h_{ij}^{(1)} = \text{R} h_{ij}^{(1)} + j\text{IM} h_{ij}^{(1)}$$

De la même manière :

$$h_{ij}^{(2)} = \int_{\Gamma_j} \phi_2 q_i^* d\Gamma_j = -\frac{jK'\ell_j}{16} \sum_{m=1}^4 (1+\xi_m) H_1^{(2)}(Kr_m) \cos(\beta_m) W_m \quad (\text{V.3.4.9})$$

$$g_{ij}^{(1)} = \frac{j \ell_j}{16} \sum_{m=1}^4 (1 - \xi_m) H_0^{(2)}(K r_m) W_m \quad (\text{V.3.4.10})$$

$$g_{ij}^{(2)} = \frac{j \ell_j}{16} \sum_{m=1}^4 (1 + \xi_m) H_0^{(2)}(K r_m) W_m \quad (\text{V.3.4.11})$$

$$H_{ii} = -1 + \frac{\theta}{2\pi} + j \left(-1 + \frac{\theta}{2\pi} \right) \quad (\text{V.3.4.12})$$

Avec θ l'angle extérieur au niveau du noeud

$$G_{ii} = g_{ii}^{(1)} + g_{i,i-1}^{(2)}$$

Pour la partie réelle :

$$\begin{aligned} \text{RG}_{i,i} &= \text{R}g_{i,i}^{(1)} + \text{R}g_{i,i-1}^{(2)} \\ &= \frac{\ell_i}{4\pi} (\ln(K' \ell_i) - 1,5) + \frac{\ell_{i-1}}{4\pi} (\ln(K' \ell_{i-1}) - 1,5) \end{aligned} \quad (\text{V.3.4.13})$$

et pour la partie imaginaire :

$$\begin{aligned} \text{IMG}_{ii} &= \text{I}Mg_{ii}^{(1)} + \text{I}Mg_{i,i-1}^{(2)} \\ &= \frac{\ell_i}{8} + \frac{\ell_{i-1}}{16} \end{aligned} \quad (\text{V.3.4.14})$$

Aussi:

$$G_{i,i+1} = g_{i,i+1}^{(1)} + g_{ii}^{(2)}$$

pour la partie imaginaire :

$$\text{IMG}_{i,i+1} = \text{I}Mg_{i,i+1}^{(1)} + \text{I}Mg_{ii}^{(2)}$$

$$\text{avec: } \text{I}Mg_{ii}^{(2)} = \frac{\ell_i}{4\pi} (\ln(K' \ell_i) - 0,5) \quad (\text{V.2.4.15})$$

et pour la partie réelle :

$$\begin{aligned} \text{RG}_{i,i+1} &= \text{R}g_{i,i+1}^{(1)} + \text{R}g_{ii}^{(2)} \\ \text{avec: } \text{R}g_{ii}^{(2)} &= \frac{\ell_i}{8} \end{aligned} \quad (\text{V.3.4.16})$$

V. 4/ Conditions aux limites :

le système d'équations $[H] \{ P \} = [G] \{ q \}$ étant formé, il ne peut être écrit sous forme $[A] \{ X \} = \{ B \}$ qu'après introduction des conditions aux limites du problème qui sont :

* Le long de la surface libre :

D'après l'hypothèse (3) (§ III.2), la pression hydrodynamique le long de la surface libre est nulle :

$$\bar{P} (x, H, t) = 0$$

$$\text{D'où } p (x, H) = 0 \quad (V.4.1)$$

Avec H est la hauteur maximale (figure V . 4 . 1)

* Le long du parement amont du barrage :

Le barrage est considéré rigide et se déplace avec le fond de la retenue . Cette hypothèse est acceptable lorsque la fréquence du séisme est petite devant la fréquence propre du barrage [5] .

La condition au limite s'exprime par :

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial n} (S, t) = - \rho \bar{\gamma} \cdot \vec{n} e^{i\omega t}$$

D'où :

$$q = \frac{\partial P}{\partial n} = - \rho \gamma_n \quad (V.4.2)$$

Avec S : la coordonnée curviligne le long du parement ;

γ_n : la composante de l'amplitude de l'accélération selon la normale (\vec{n})

Quand l'excitation est causée par un séisme horizontal

$$\gamma_n = - \cos (\alpha) \cdot \gamma$$

α étant l'angle entre le parement et la verticale

D'où :

$$q = \frac{\partial P}{\partial n} = \rho \gamma \cdot \cos \alpha \quad (\text{V.4.3})$$

Dans le cas d'un séisme vertical :

$$q = \frac{\partial P}{\partial n} = \rho \gamma \sin \alpha \quad (\text{V.4.4})$$

* Le long du fond de la retenue :

La conditions au limite doit tenir compte de l'effet d'amortissement du sol qui provoque une absorption partielle des ondes de pressions incidentes .

La condition au limite s'exprimé par : [10]

$$q = \frac{\partial P}{\partial n} (S', \omega) = - \rho \gamma_n - j \omega C_a P (S', \omega) \quad (\text{V.4.5})$$

Avec S' : la coordonnée curviligne le long du fond ;

C_a : coefficient d'amortissement du sol (III.4.3)

ω : impulsion (fréquence) de l'excitation sismique

La partie imaginaire dans (V.4.5) représente le terme d'amortissement . Pour une fondation rigide $C_a = 0$ et il y aura une réflexion total des ondes .

Pour une excitation sismique horizontale :

$$\gamma_n = \gamma \sin (\beta')$$

Pour une excitation sismique verticale :

$$\gamma_n = - \gamma \cos (\beta')$$

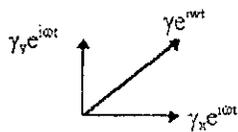
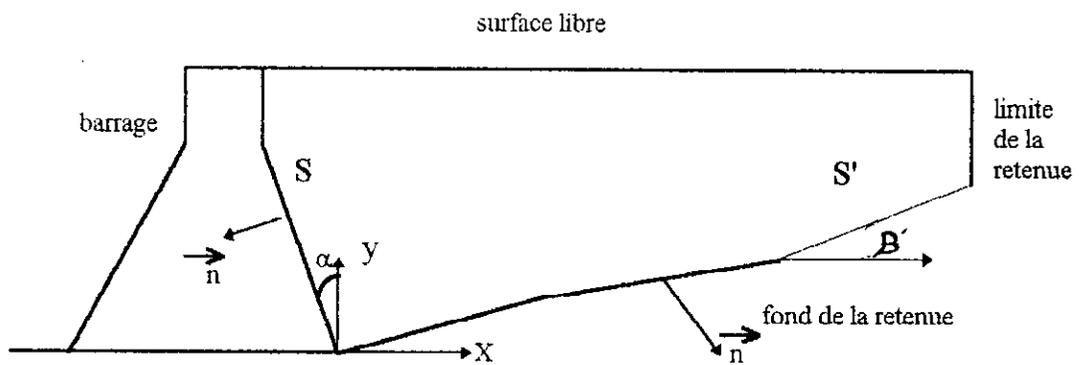
β' étant l'angle entre le fond et l'horizontale

* Le long de la limite du réservoir :

Cette limite est définie après une certaine distance du parement amont au delà duquel il n'ya plus une réflexion d'ondes

La condition au limite s'exprime par :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (V.4.6)$$



(Fig. V.4.1)

Chapitre 6

DÉSCRIPTION DES PROGRAMMES NUMÉRIQUES

VI. 1 / Introduction :

Dans ce chapitre, on va décrire les programmes numériques établis, qui permettent de déterminer les inconnues du problème dans les deux cas suivants :

- cas où l'eau est considérée incompressible ;
- cas où l'eau est considérée compressible .

Deux formulations sont utilisées dans chaque cas :

- formulation en éléments constants ;
- formulation en éléments linéaires .

Mathématiquement, la méthode des équations intégrales aux frontières se réduit à déterminer les éléments des matrices $[H]$, $[G]$ et à poser le système d'équations $[H] \{ P \} = [G] \{ q \}$ sous forme $[A] \{ x \} = \{ b \}$, puis le résoudre .

Les étapes de cette méthode sont décrites dans l'organigramme N° (1) .

VI. 2 / Programmes établis :

Les programmes établis comportent :

- un sous programme ;
- quatre fonctions ;
- quatre programmes .

1) - Sous programme : (organigramme N°(2))

Il permet de schématiser le domaine d'étude et de discrétiser sa frontière en une série d'éléments, en précisant les extrémités des éléments et les positions des noeuds relatives à chaque formulation (éléments linéaires, éléments constants) .

Il permet aussi de déterminer :

- le nombre totale de noeuds de discrétisation (k) ;
- le nombre de portions droites formant la frontière du domaine (M) ;

- indiquer le type du parement (L) (vertical ou incliné) ;
- les coordonnées des extrémités des éléments X (I) , Y (I) , qui sont aussi les coordonnées des noeuds dans le cas des éléments linéaires ;
- les coordonnées du milieu de chaque élément, XM(I) , YM(I) , qui sont aussi les coordonnées des noeuds dans le cas des éléments constants ;
- les conditions aux limites Q (I) pour chaque noeud selon le type de seisme (horizontal, vertical) ;
- le nombre de noeuds dans chaque portion de la frontière N (m) .

Ces données sont sauvegardées dans le fichier DONEC . DAT pour les éléments constants et DONEL. DAT pour les éléments linéaires .

2) - Fonctions BESSJO, BESSYO, BESSY 1 : (Voir l'annexe)

Elles correspondent aux fonctions de Bessel et de Newman nécessaires pour le calcul des termes des matrices [H] et [G] dans le cas où l'eau est considérée compressible. Ces programmes sont établis en utilisant des approximations polynomiales de ces fonctions .

BESSJO : la fonction de Bessel de premier espèce d'ordre zéro ;

BESSJ1 : la fonction de Bessel de premier espèce d'ordre un ;

BESSYO : la fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre zéro ou fonction de Newman d'ordre zéro ;

BESSY 1 : la fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre un ou fonction de Newman d'ordre un .

3) - Programme PFIEC :

Permet de déterminer les inconnues du problème dans le cas où l'eau est considérée incompressible en utilisant une formulation en éléments constants, ce programme est représenté par l'organigramme N° (3), et il comporte les étapes suivantes :

a- lecture des données : ce fait à partir du fichier DONEC . DAT

b- calcul des termes H_{ij} et G_{ij} : se fait en utilisant la méthode d'intégration quadrature du Gauss avec quatre points d'intégration. Les termes singuliers sont calculés analytiquement. Cette étape nécessite le calcul de :

- coordonnées de quatre points d'intégration sur chaque élément ($X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4,)$;

- Les rayons entre chaque noeud et les points d'intégration (R_1, R_2, R_3, R_4) ;

- les rayons entre le rayon et la normale à l'élément au niveau de chaque point d'intégration ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4,)$

c- construction du vecteur $\{ B \}$

d- construction de la matrice $[A]$: les étapes (c) et (d) consiste à permuter quelques colonnes de $[H]$ et de $[G]$ de sorte que les valeurs connue seront toutes dans un membre formant ainsi le vecteur $\{ B \}$, et les inconnues dans l'autre membre formant ainsi le vecteur $\{ X \}$.

e- résolution du système d'équations $[A] \{ X \} = \{ B \}$:

cette étape est réalisée en utilisant la méthode d'élimination de Gauss qui comporte deux étapes :

- triangularisation de la matrice $[A]$;

- résolution du système en allant du bas en haut ;

4)- Programme PFIEL :

Ce programme permet de déterminer les solutions recherchées dans le cas où l'eau est considérée incompressible, en utilisant une formulation en éléments linéaires . Ce programme est représenté par l'organigramme N°(4) et il comporte les étapes suivantes:

a)- lecture des données :

se fait à partir du fichier DONEL . DAT

b)- calcul des termes H_{ij} et G_{ij} :

ces termes sont calculés en utilisant la quadrature de Gauss pour l'intégration numérique ou calculés analytiquement pour les termes singuliers. Deux itérations sont nécessaires pour calculer chaque terme étant donné que

$$H_{ij} = h_{ij}^{(1)} + h_{ij-1}^{(2)} \quad \text{et} \quad G_{ij} = g_{ij}^{(1)} + g_{ij-1}^{(2)}$$

c)- construction du vecteur $\{ B \}$:

cette étape est presque identique à celle décrite au programme précédent avec quelques changements concernant la formulation utilisée, en particulier le fait que chaque noeud appartient à deux éléments (précédent et antécédent) .

d- construction de la matrice $[A]$: Idem que le programme précédent .

e- résolution du système d'équations $[A] \{ X \} = \{ B \}$: par l'emploi de la méthode d'élimination de Gauss .

5) Programme PFCEC :

Ce programme permet de résoudre le problème dans le cas où l'eau est considérée compressible, en utilisant une formulation en éléments constants, le programme est représenté par l'organigramme N° (5) .

Les étapes du programme sont :

a- lecture des données : à partir du fichier DONEC . DAT .

b- calcul des termes H_{ij} et G_{ij} : par l'emploi de la quadrature de Gauss pour l'intégration numérique ou analytiquement pour les termes singuliers et en faisant appel aux fonctions BOSSYO, BESSY1 , BESSJO, BESSJ1 .

c- construction du vecteur $\{ B \}$ et de la matrice $[A]$: se fait de la même manière que le programme PFIEC .

d- résolution du système $[A] \{ X \} = \{ B \}$: se fait par la méthode d'élimination de Gauss .

6) Programme PFCEL :

Ce programme permet de résoudre le problème dans le cas où l'eau est considérée compressible, en utilisant une formulation en éléments linéaires .

Le programme est représenté par l'organigramme N°(6) les étapes du programme sont :

a- lecture des données : à partir du fichier DONEL . DAT

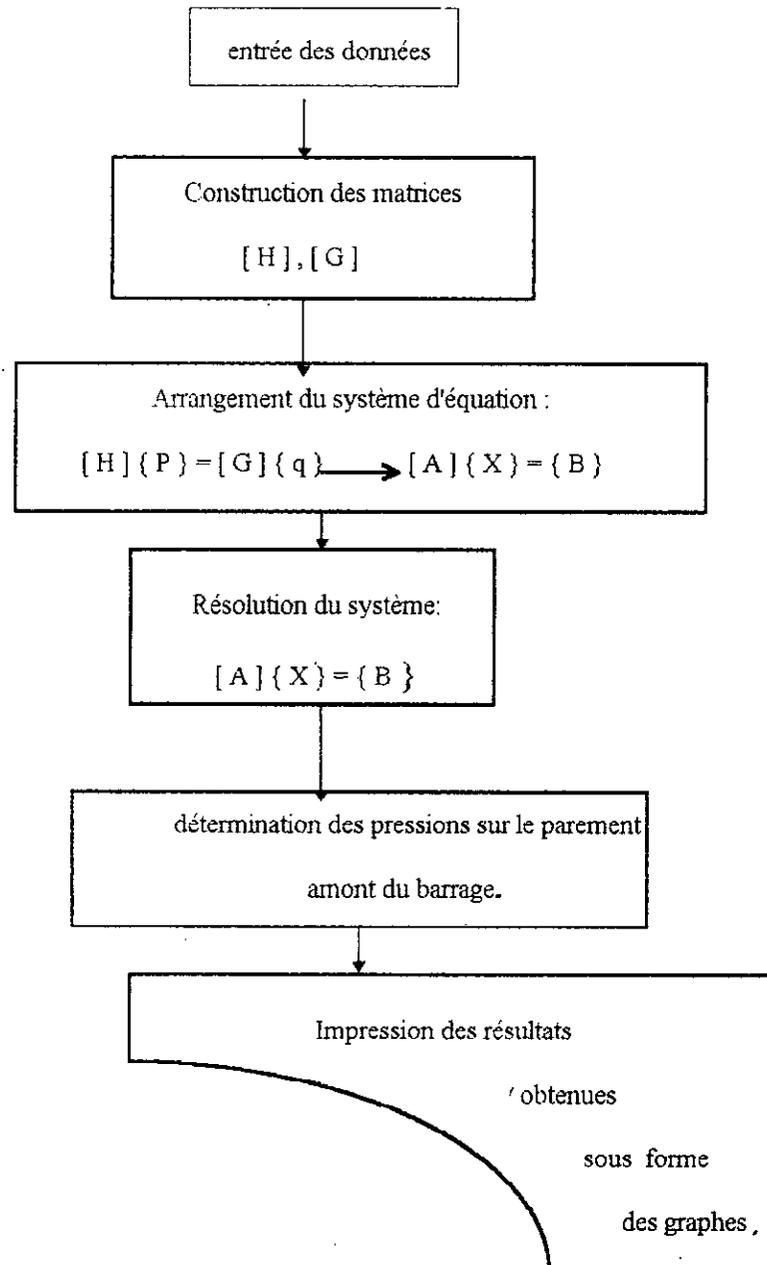
b- calcul des termes H_{ij} et G_{ij} : revient à déterminer les termes $h_{ij}^{(1)}$ et $h_{ij-1}^{(2)}$ ainsi que $g_{ij}^{(1)}$ et $g_{ij-1}^{(2)}$ en utilisant la quadrature de Gauss .ou analytiquement et en faisant appel aux fonctions BESSYO, BESSY1, BESSJO, BESSJ1 .

c- Construction du vecteur { B } et de la matrice [A] :

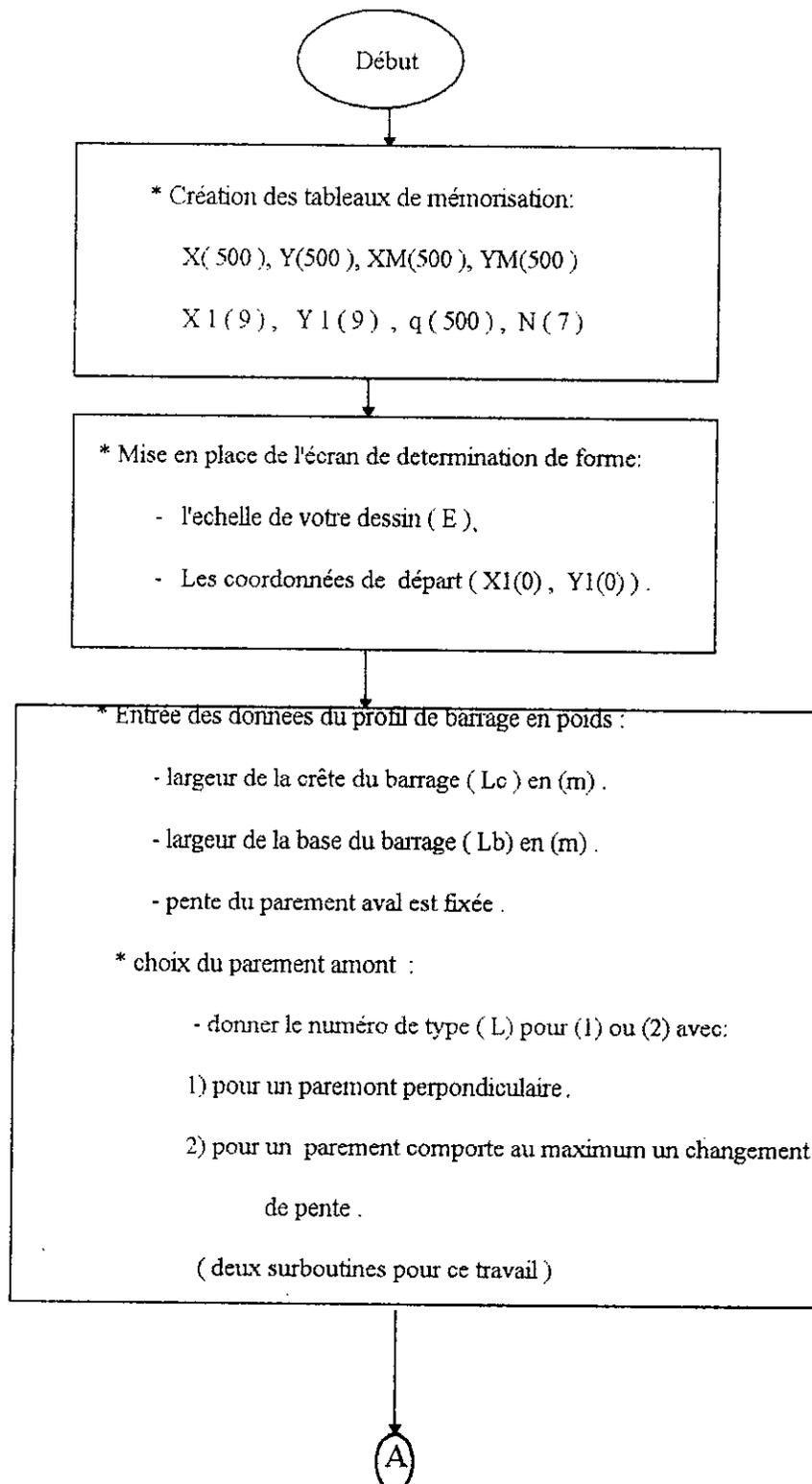
se fait de la même manière que dans le programme PFIEL

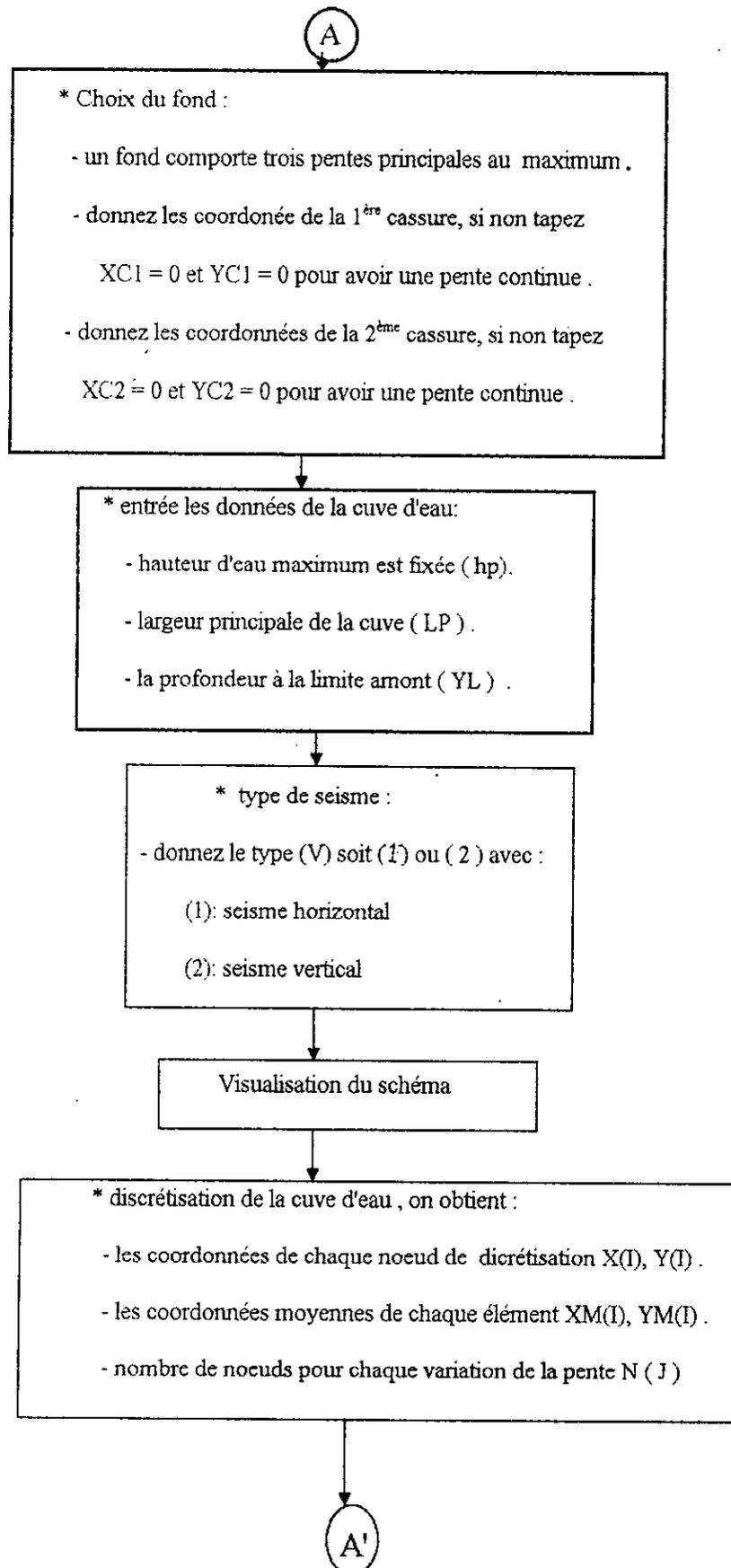
d- Résolution du système d'équations

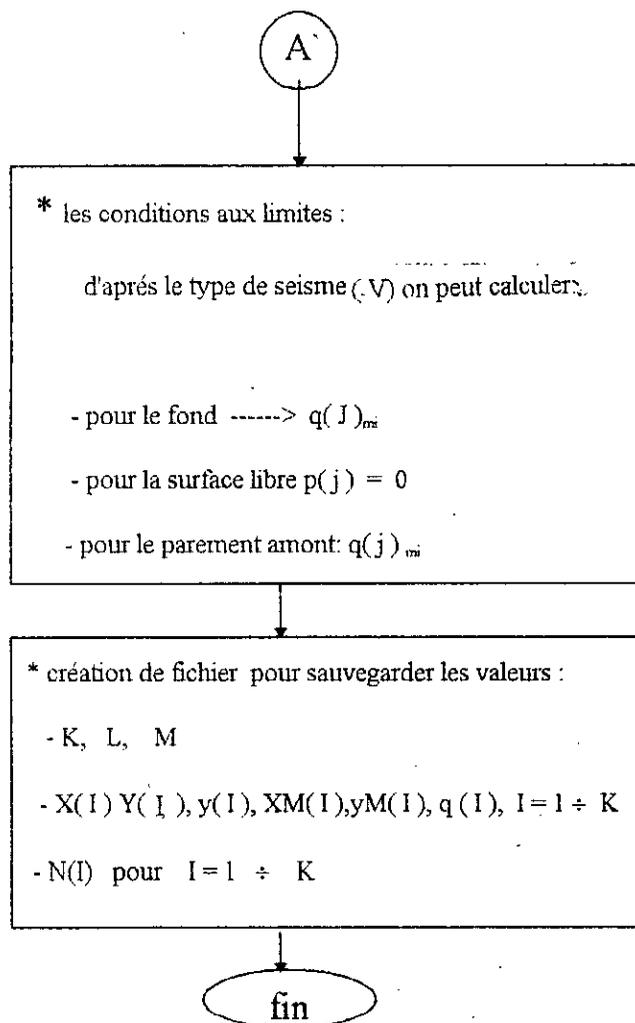
Organigramme N° (1)



Organnigramme N°(2)

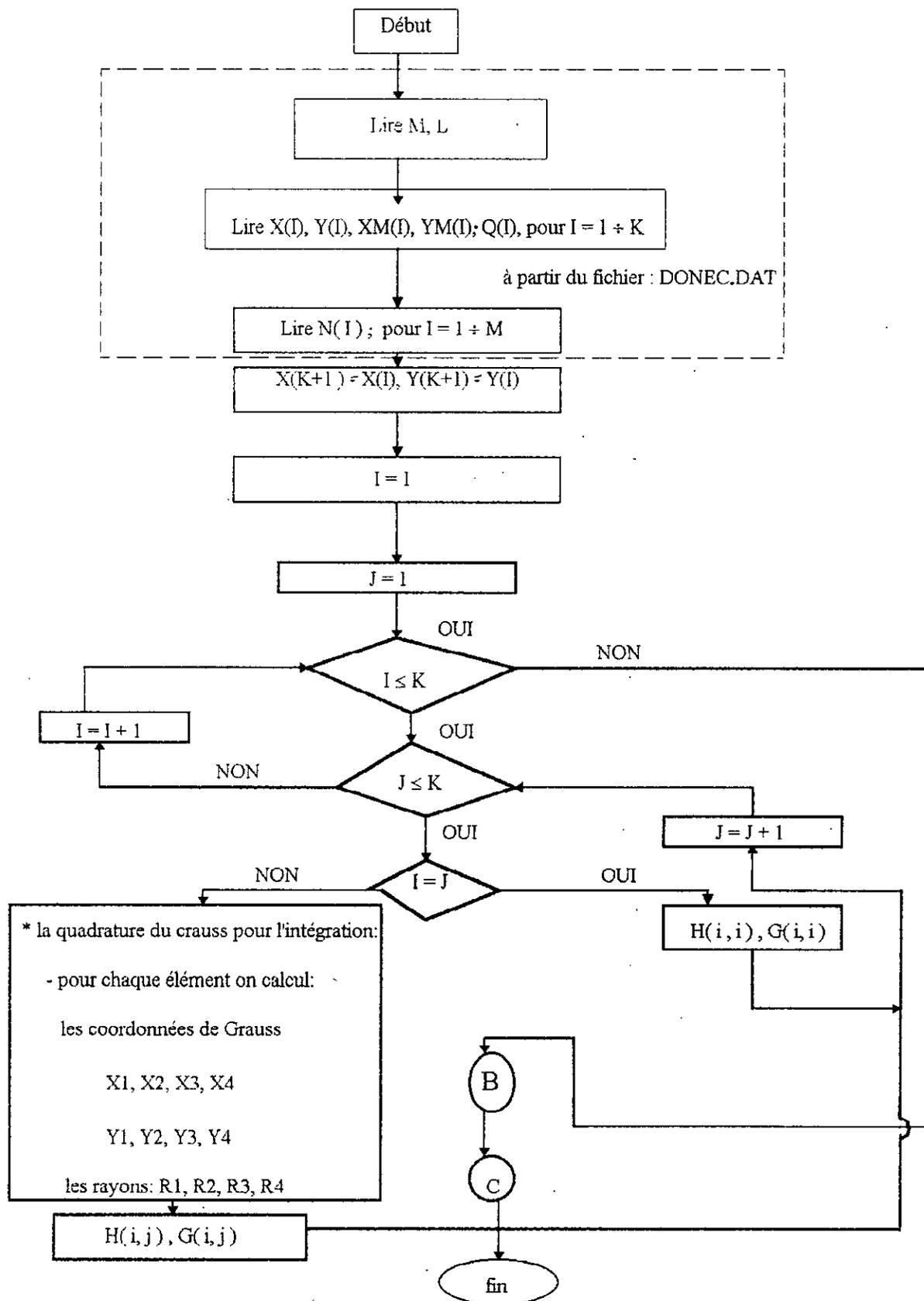


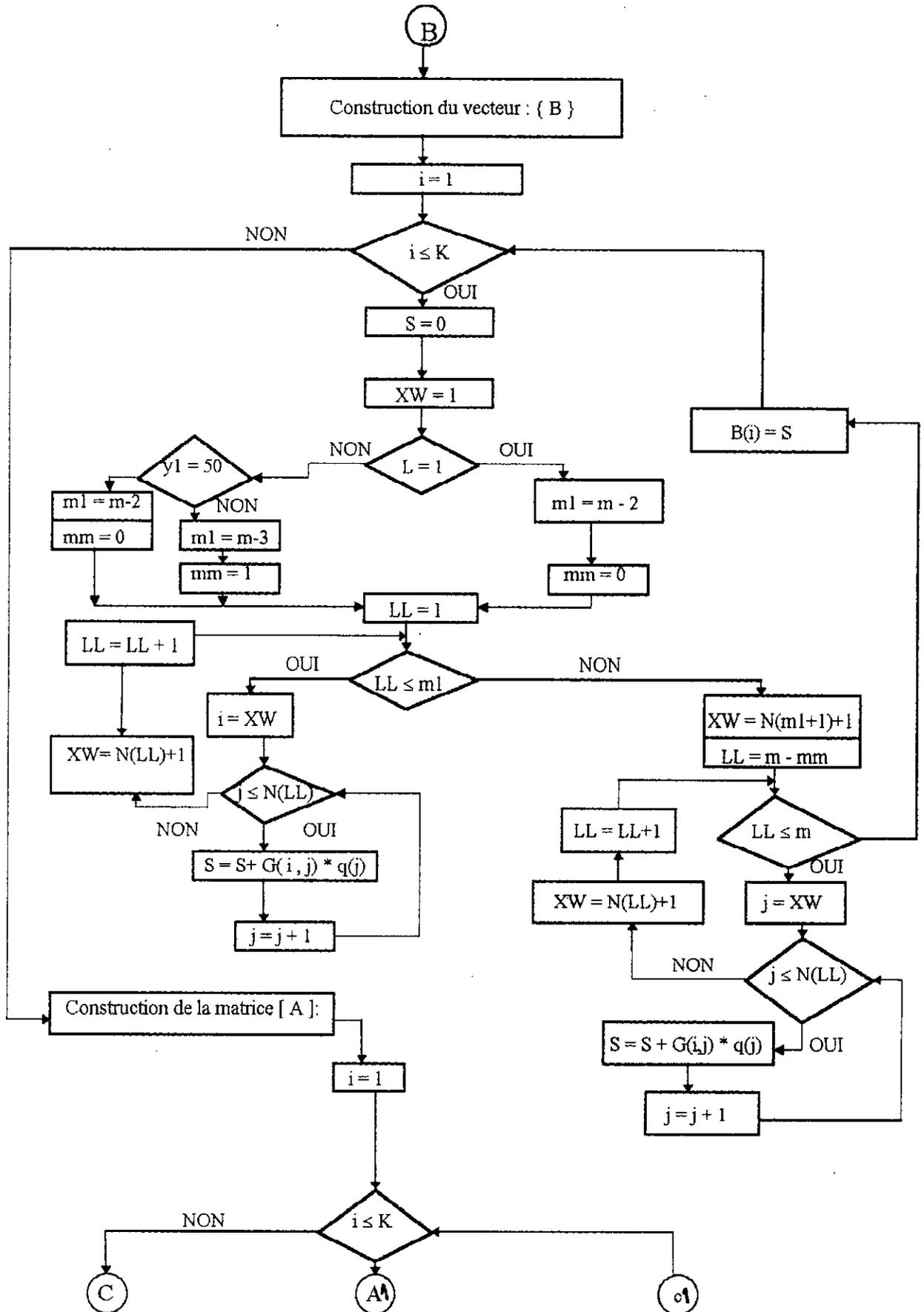


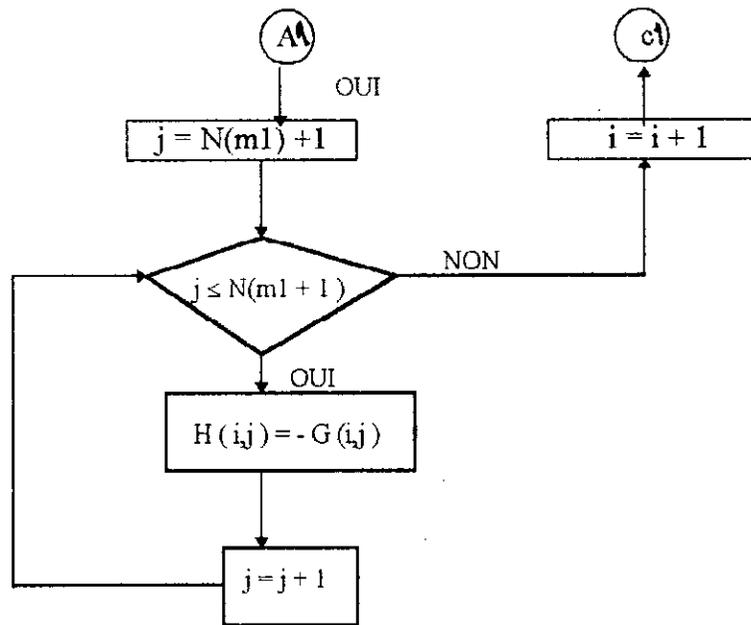


Organigramme N°(3)

* (l'eau considérée incompressible, thechnique de l'élément consant)

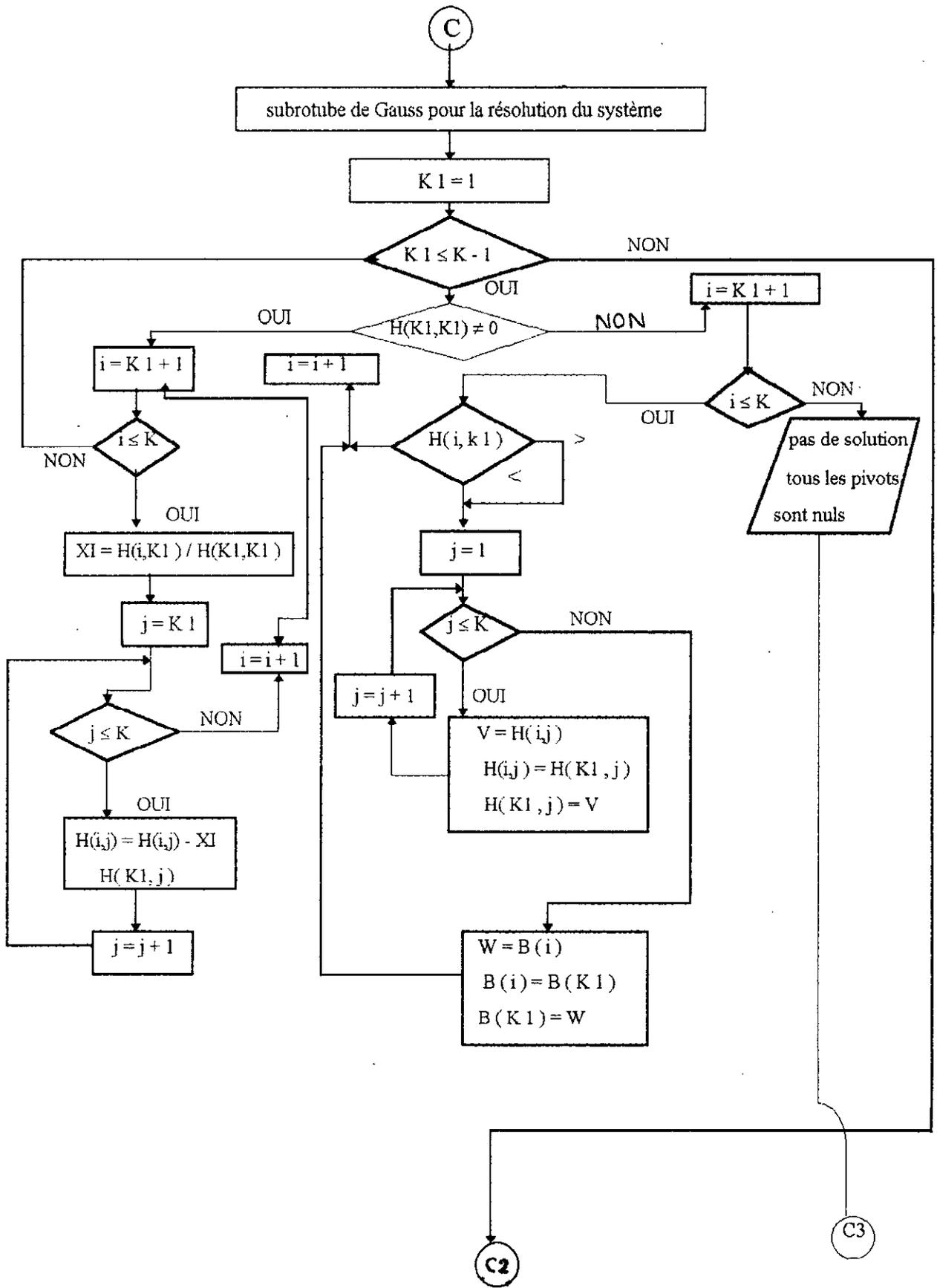


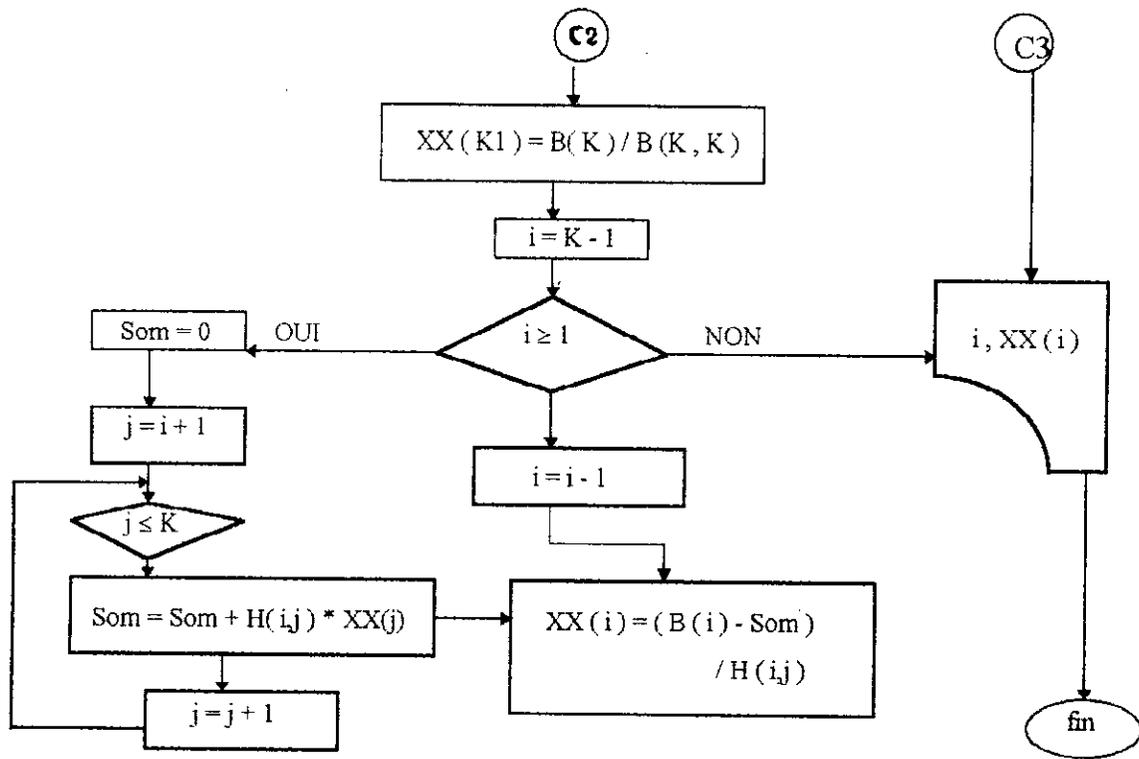




Remarque :

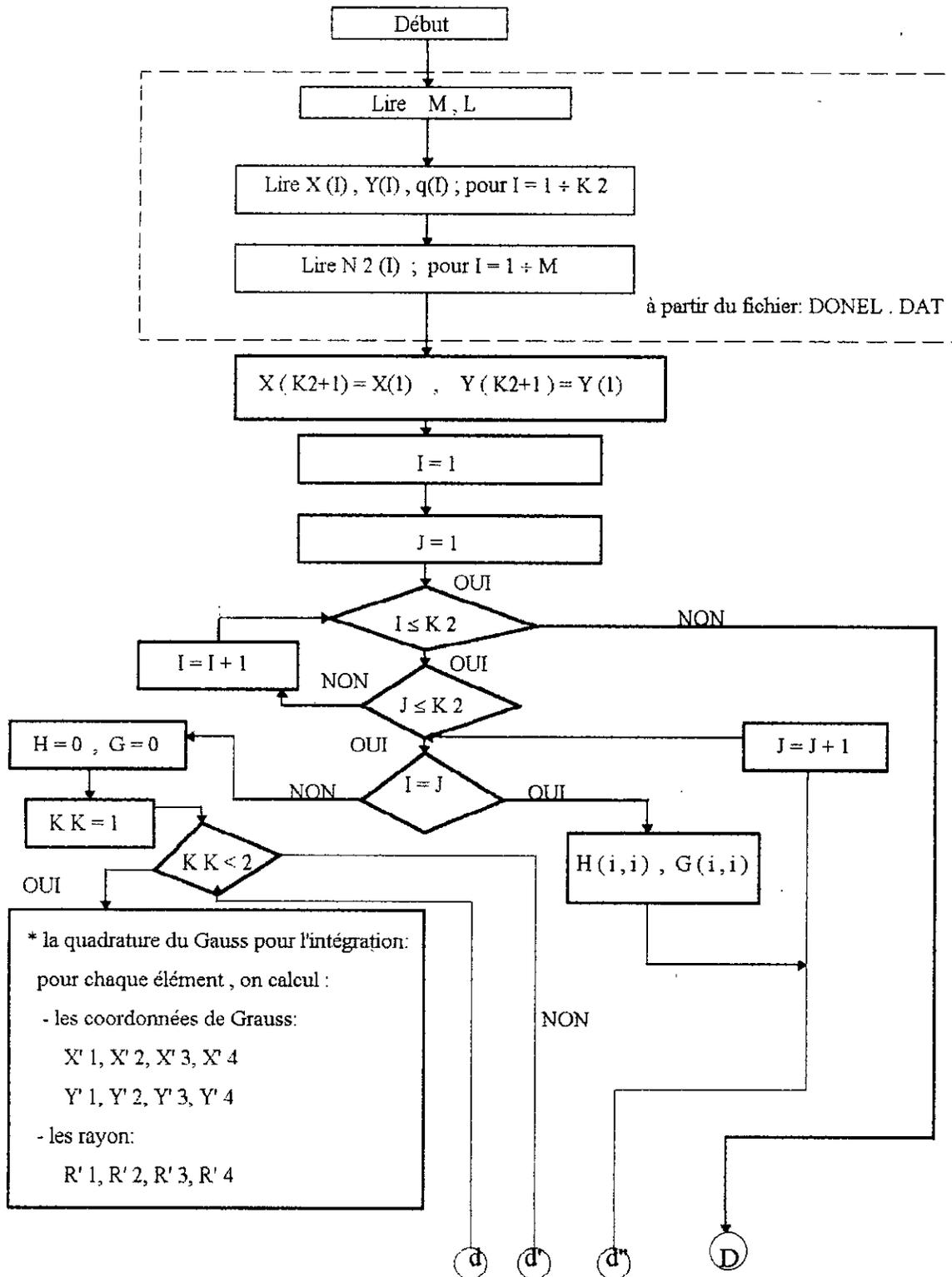
y 1 : l'ordonnée de la cassure de pente du parement amont du barrage .

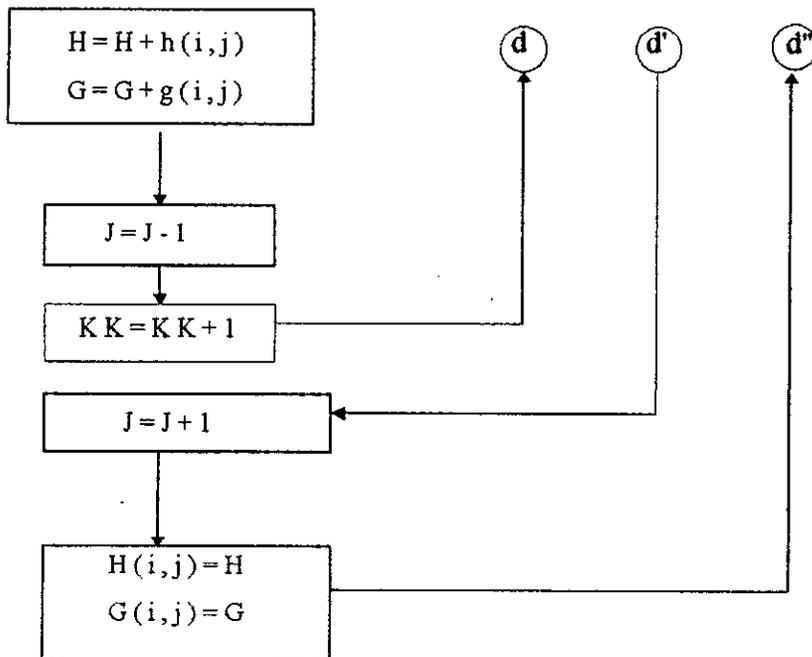




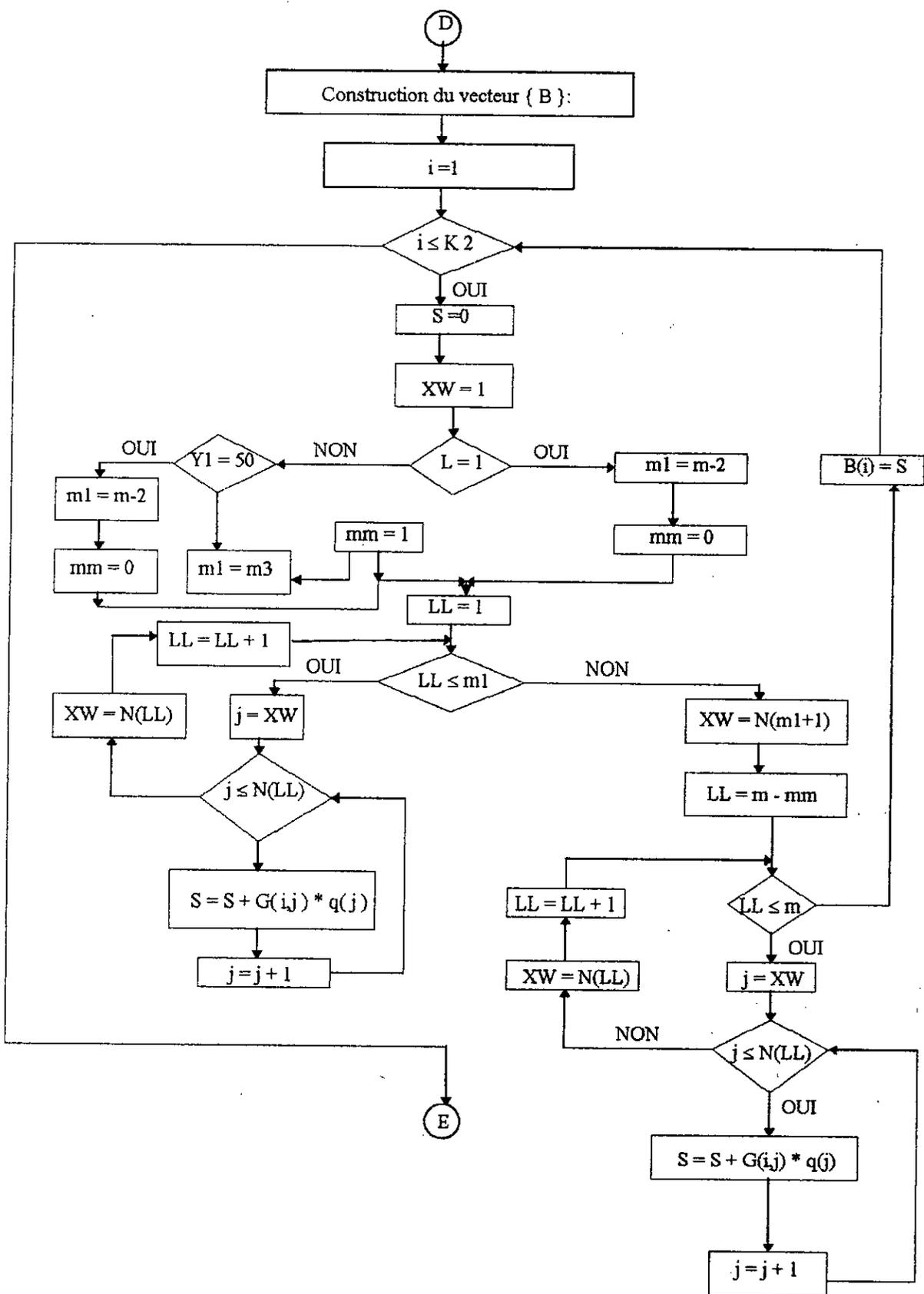
Organigramme N°(4)

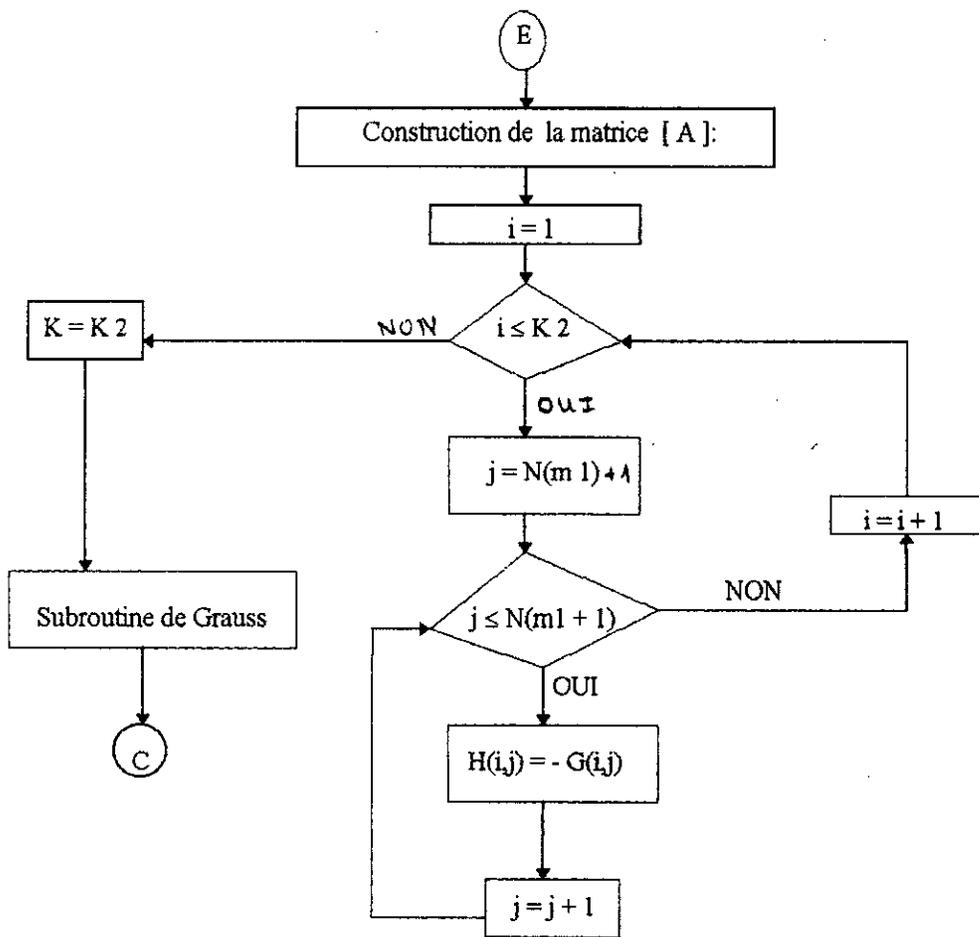
* (l'eau considérée incompressible, technique de l'élément linéaire)





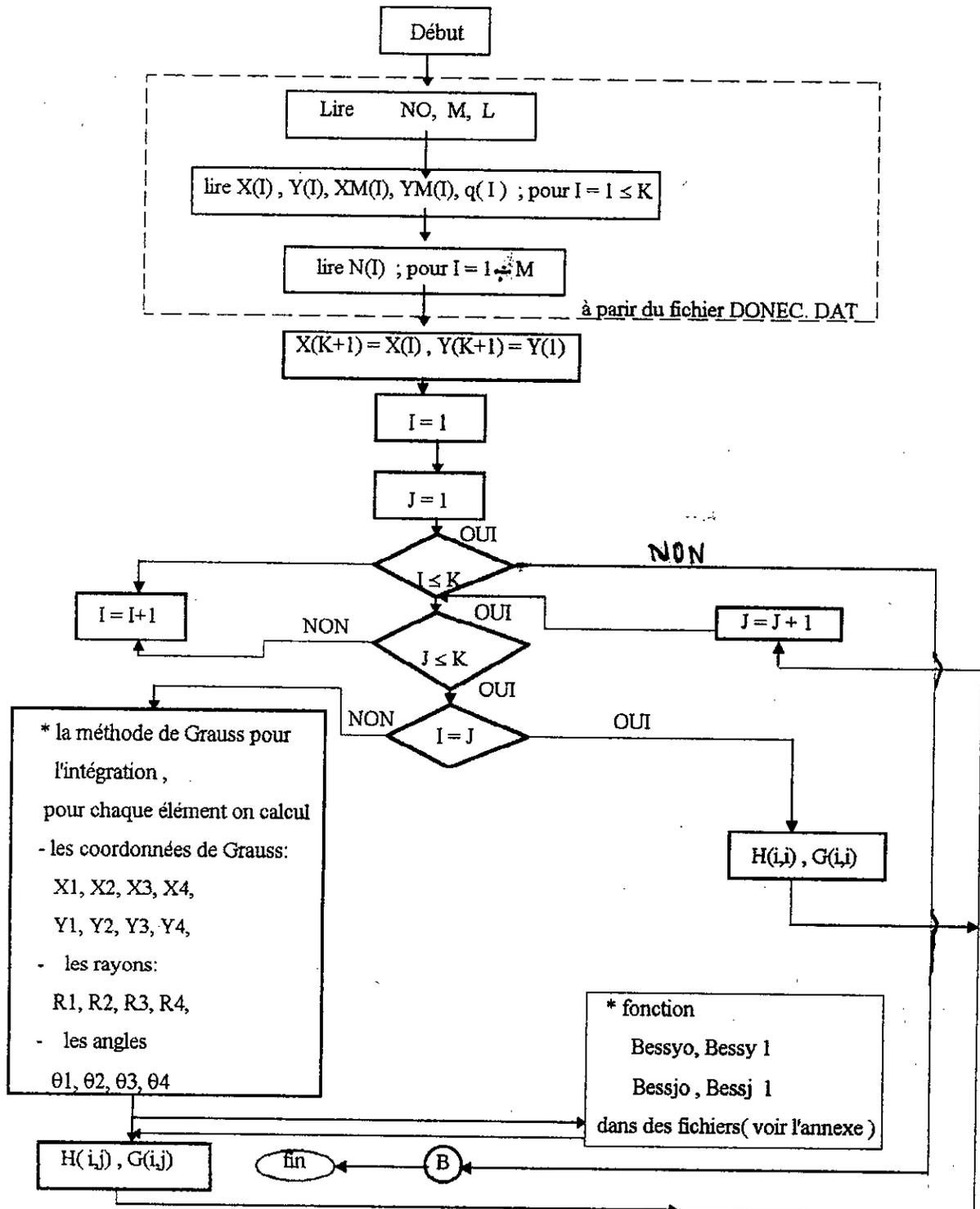
les rayons (R'1, R' 2, R' 3, R' 4) sont différents de (R1, R2, R3, R4) et même pour les valeurs X et Y .





Organigramme N°(5)

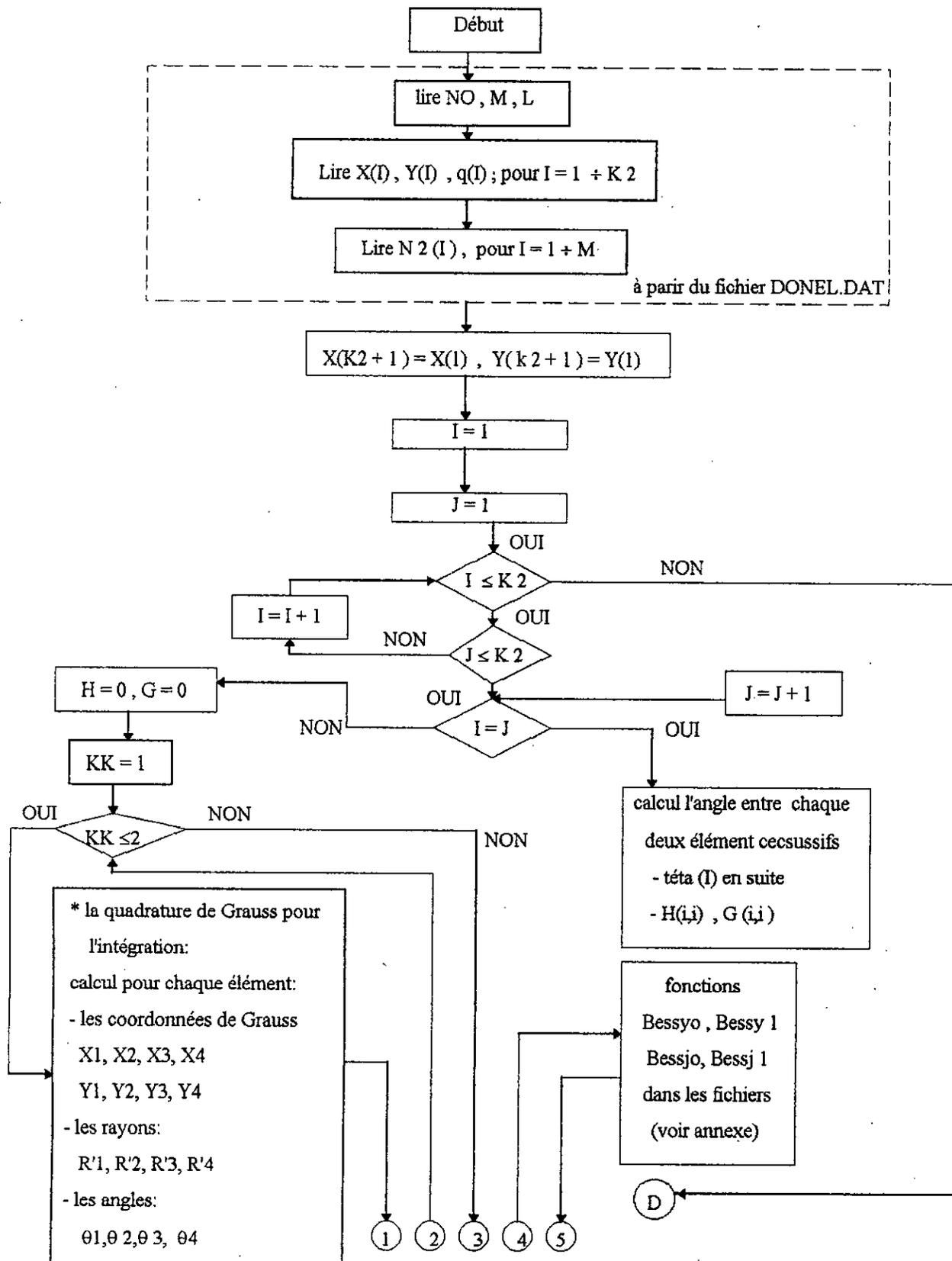
l'eau considérée compressible, technique du l'élément constant

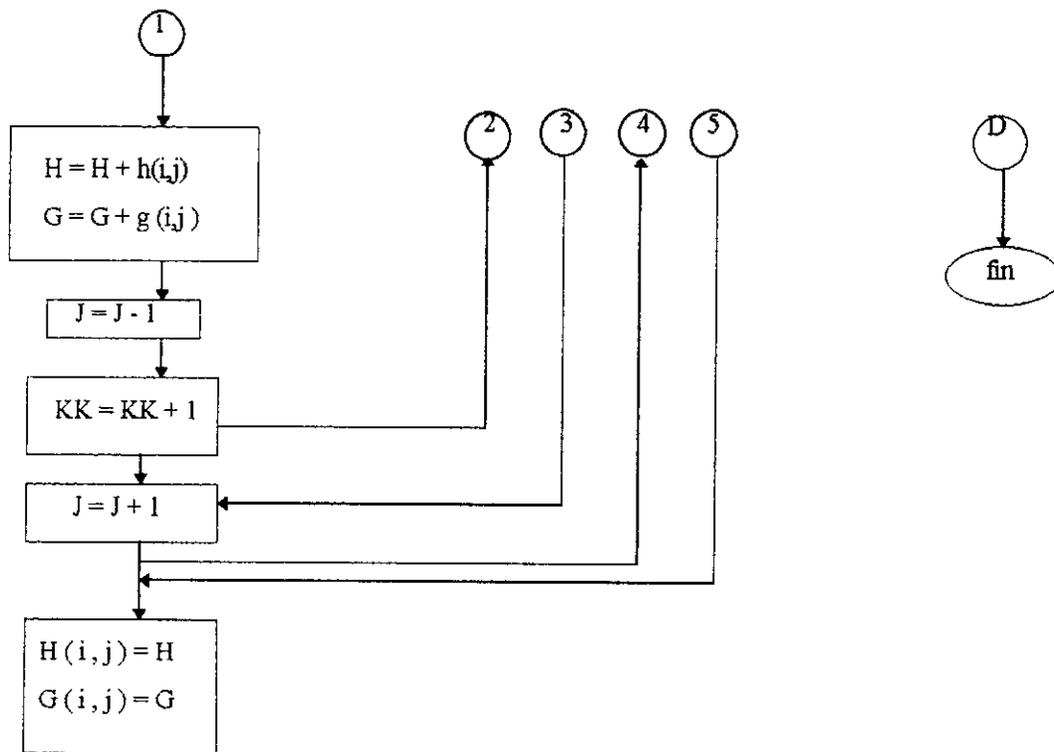


NO: représente le nombre d'ondes (κ')

Organigramme N°(6)

* (l'eau considérée compressible, technique de l'élément linéaire)





Chapitre 7

APPLICATIONS

Les programmes établis ont été testés par quelques applications, dans lesquelles, on a considéré un séisme horizontal ou vertical d'accélération unitaire .

Dans le cas où l'eau est considérée incompressible, des exemples traités par Zangar et Liu ont été refaits ici, pour pouvoir comparer nos résultats avec ceux déjà existants (figures VII.1, VII.2, VII.3) .

Dans le cas où l'eau est considérée compressible deux cas sont discutés :

- $\omega / \omega_1 = 0,4$;

- $\omega / \omega_1 = 0,8$.

Avec ω : fréquence propre du séisme

ω_1 : fréquence fondamentale du barrage donnée par : [10]

$$\omega_1 = \pi C / 2H$$

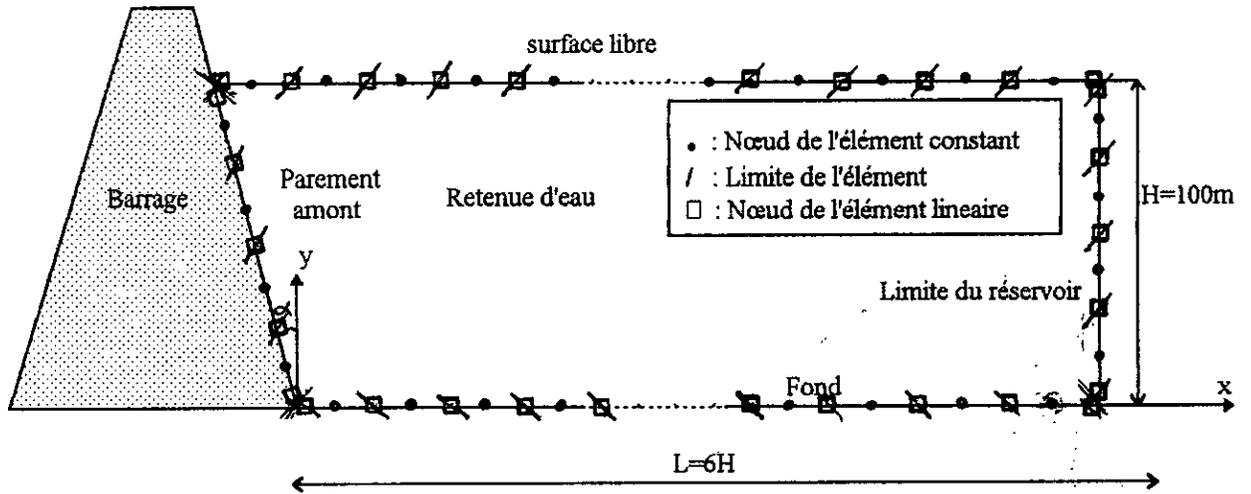


Fig. VII.1 : discrétisation en éléments constants et lineaires d'un barrage de parement incliné et fond horizontal

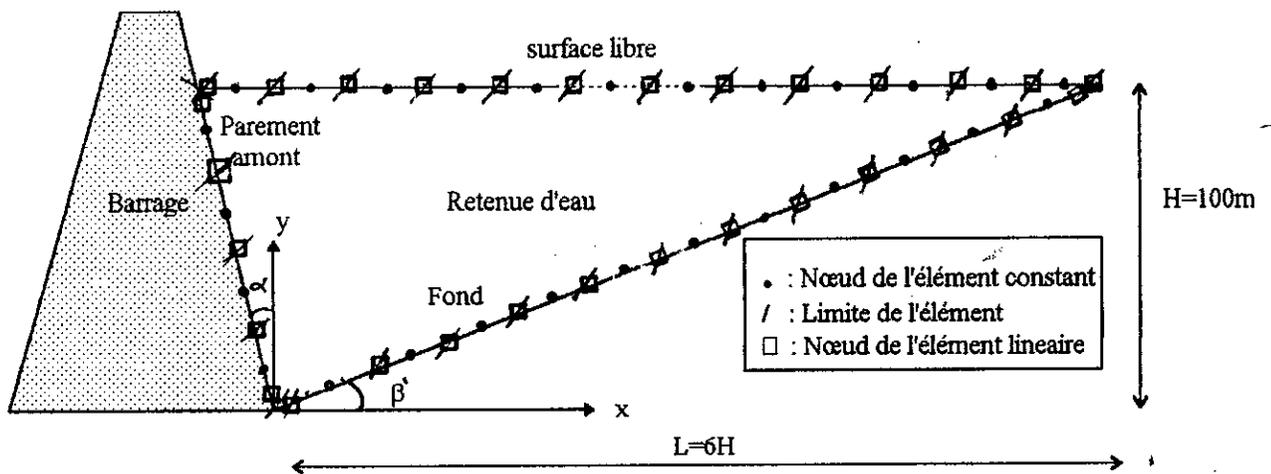


Fig. VII.2 : discrétisation en éléments constants et lineaires d'un barrage de parement incliné et fond incliné

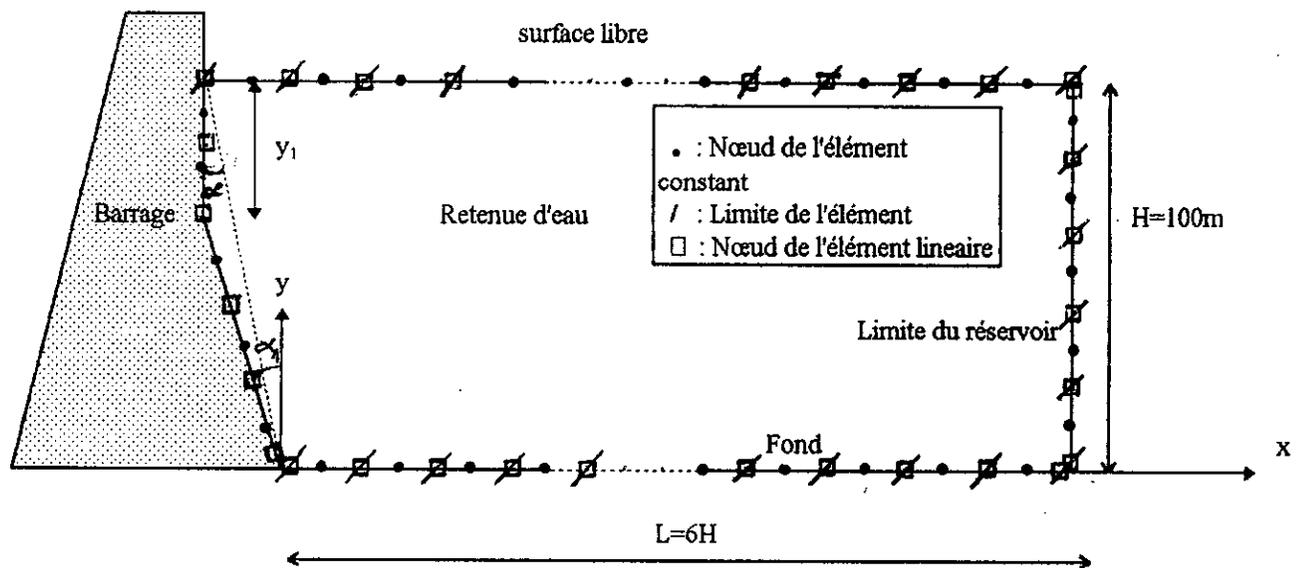


Fig. VII.3 : discrétisation en éléments constants et lineaires d'un barrage de parement incliné ayant une portion verticale et fond horizontal

VII.3 Interprétation des résultats :

- Cas où l'eau est considérée incompressible :

* Pour un séisme horizontal :

Les résultats obtenus montrent que :

- Les pressions hydrodynamiques sur le parement amont du barrage diminuent quand l'inclinaison du parement augmente . (fig 1 à 5)
- Pour une inclinaison donnée, les pressions hydrodynamiques sur le parement diminuent quand l'angle que fait le fond avec l'horizontale augmente . (fig 1, 10, 11, 12, 13)
- La pression hydrodynamique maximale est obtenue au pied du parement vertical . (fig 1)
- A l'exception du parement vertical la pression hydrodynamique maximale est toujours obtenue à une certaine hauteur au-dessus de la base . (fig 2 à 5)
- Pour un parement ayant une portion verticale et une autre inclinée, la pression hydrodynamique maximale est obtenue au niveau de l'extrémité inférieure de la portion verticale . (fig 8, 9)

* Pour un séisme vertical :

La pression hydrodynamique varie linéairement dans la direction (y) indépendamment de l'inclinaison du parement . (fig 14, 15)

- Cas où l'eau est considérée compressible :

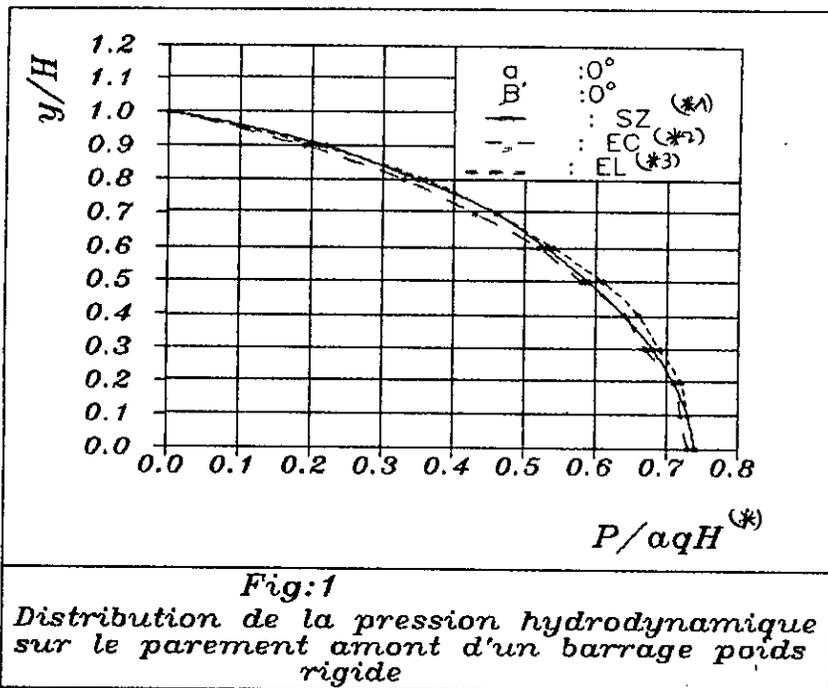
- Les pressions hydrodynamiques augmentent avec l'augmentation de la fréquence du séisme . (cas 2 : fig 1 à 12)
- La comparaison entre les résultats obtenus dans le premier cas (eau incompressible) avec ceux obtenus dans ce cas (eau compressible) montre que le fait de considérer l'eau incompressible sous estime les pressions hydrodynamiques . Les résultats sont proches seulement pour $\omega / \omega_1 = 0,4$. (exemple fig 1 du 1^{er} cas avec fig 3 et 6 du 2^{er} cas)

L'hypothèse d'une eau incompressible est donc valable lorsque la fréquence du séisme est très petite devant la fréquence propre du barrage .

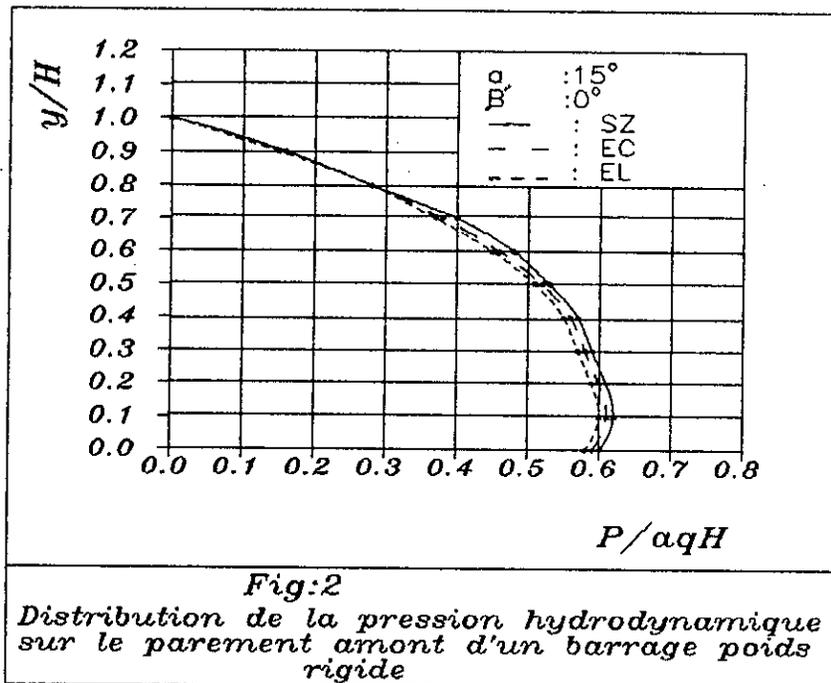
- Les pressions hydrodynamiques dans le cas d'une fondation rigide sont plus importantes que dans le cas d'une fondation non rigide . Cela est dû au fait qu'une partie des ondes incidentes est absorbée par la fondation ~~non rigide~~ . (fig 13, 14, 15 du 2^{ème} cas)

cas 1 :

**L'eau est considérée
incompressible**



- (*1) SZ : Solution de Zangon
- (*2) EC : éléments constants
- (*3) EL : éléments linéaires



- (*) a : accélération du sisme
- q : masse volumique de l'eau

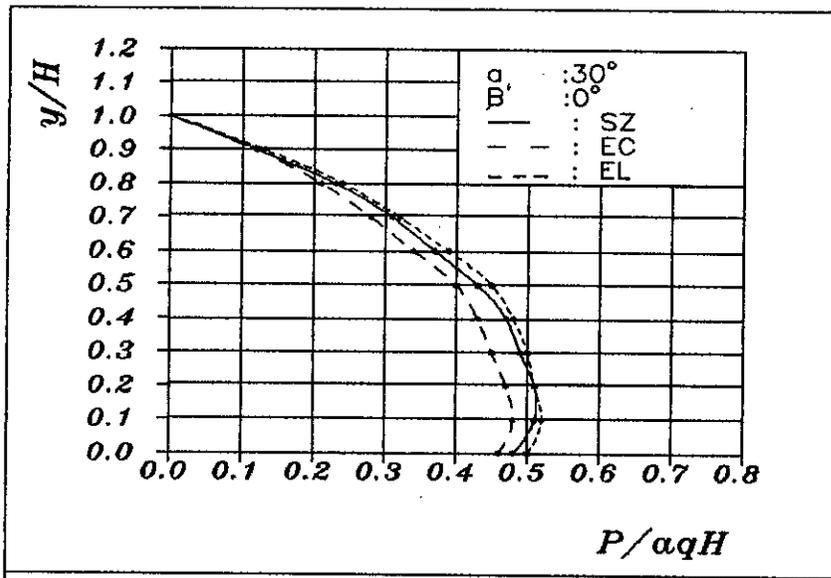


Fig:3
 Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide

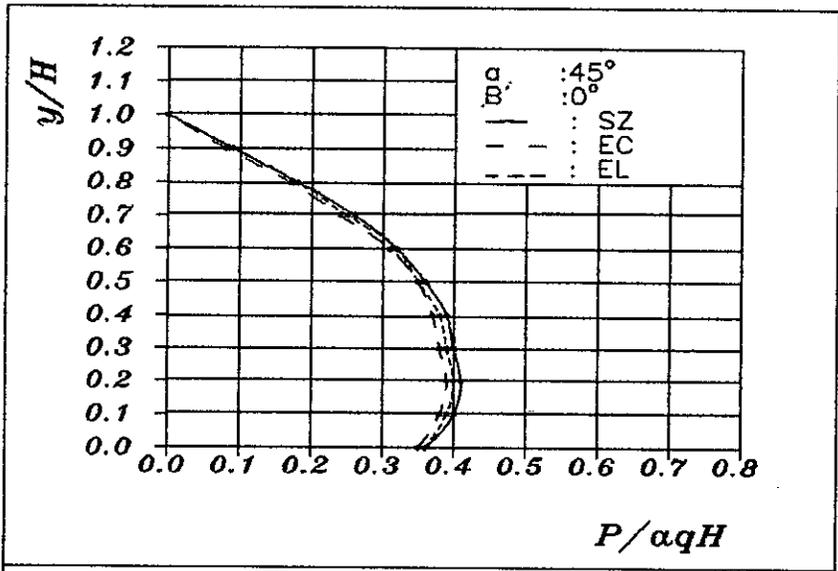
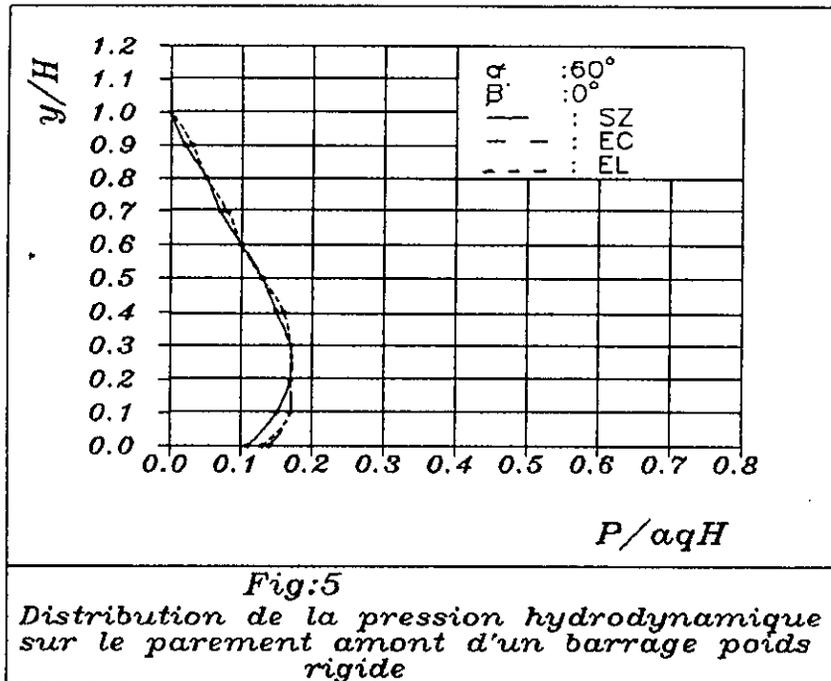


Fig:4
 Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide



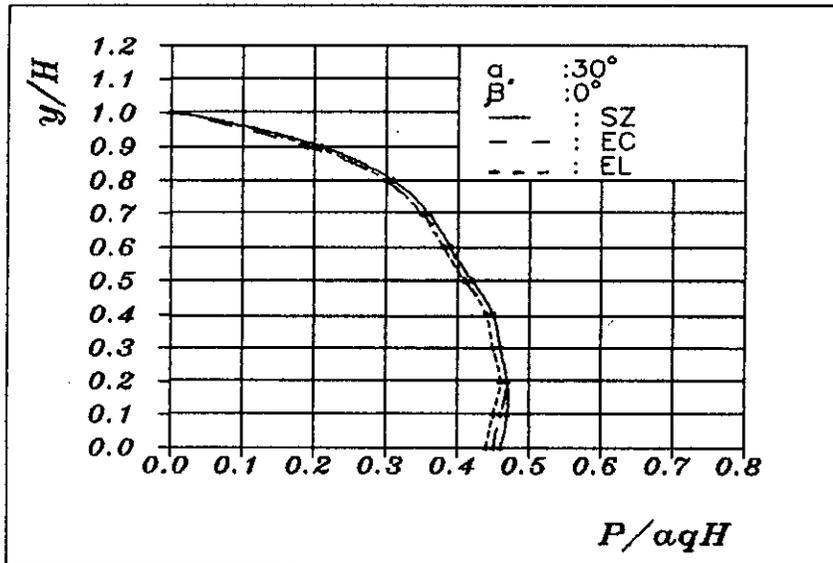


Fig:7

Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide, avec $y_1 = H/4$

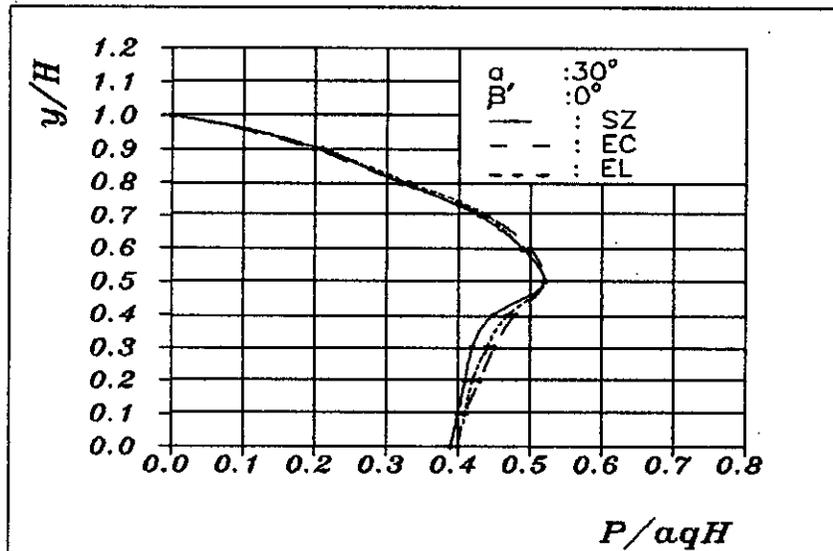
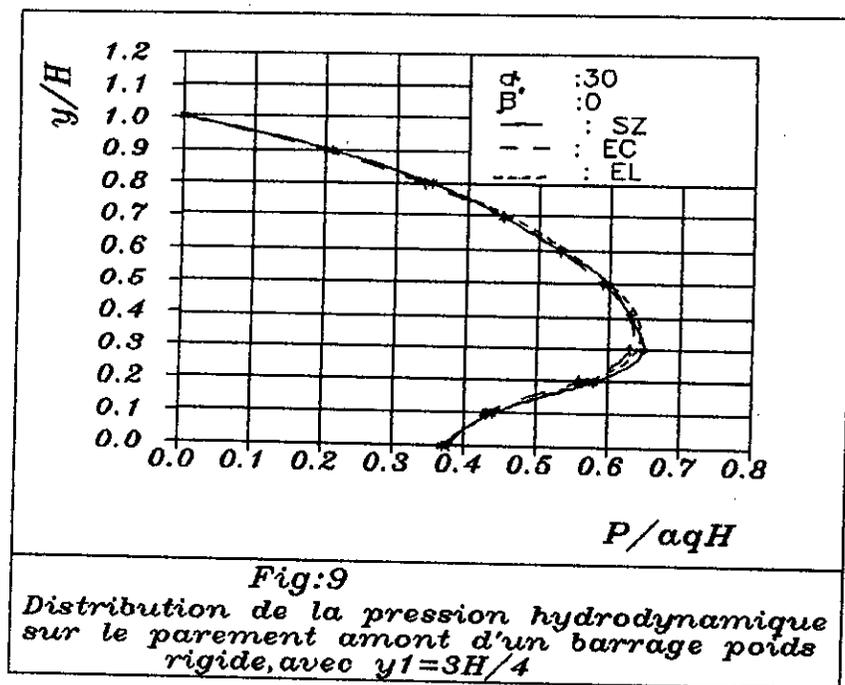
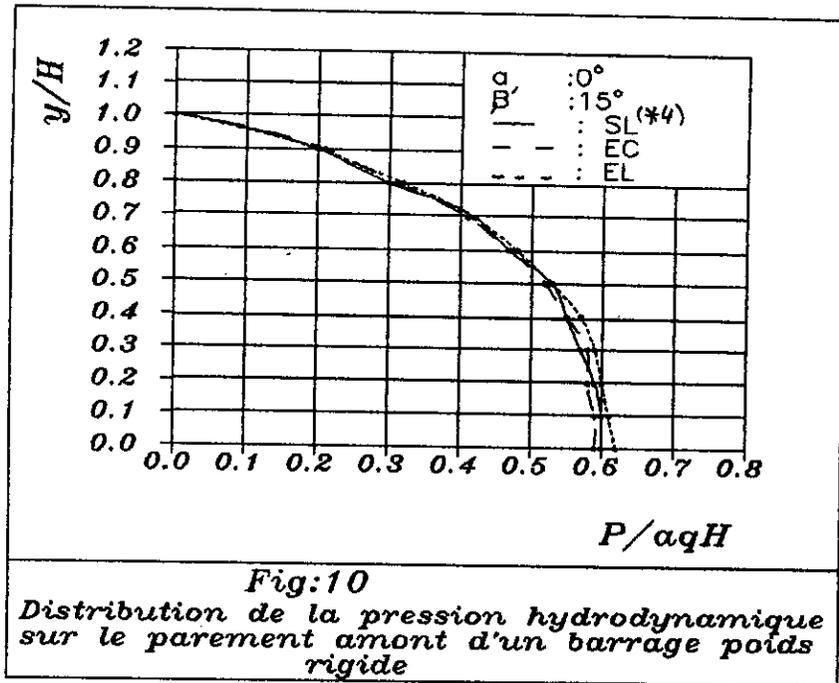


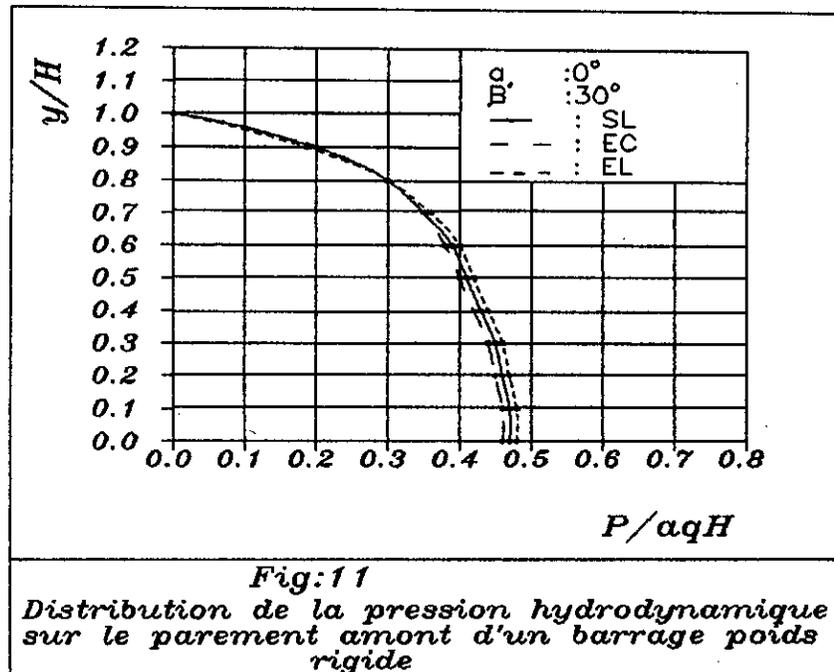
Fig:8

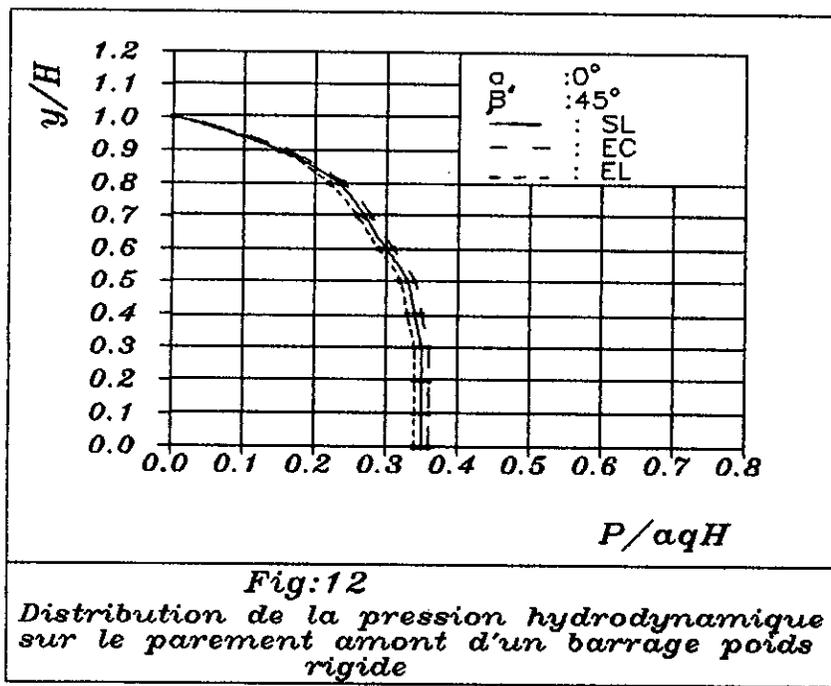
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide, avec $y_1 = H/2$

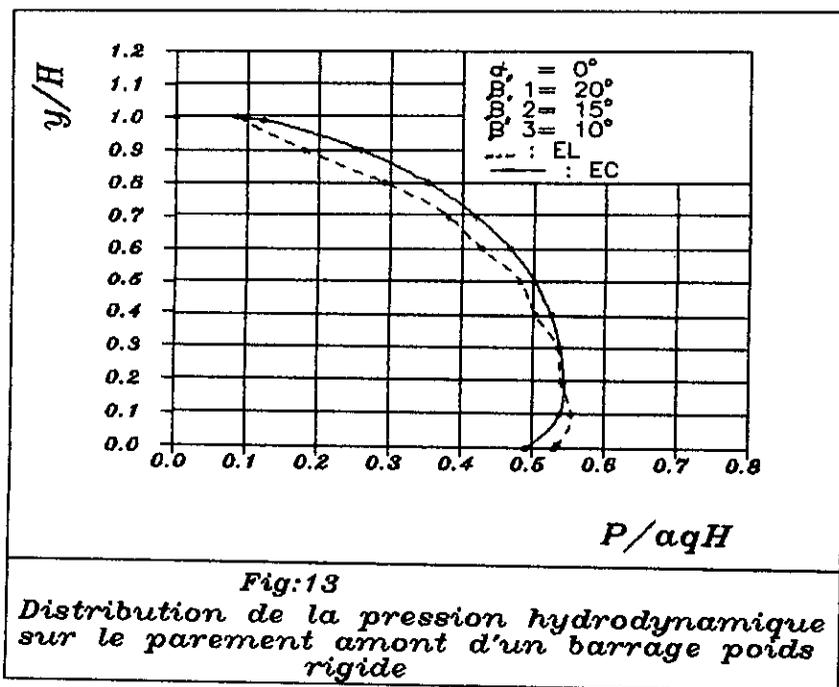




(*4) SL : solution de Liu .







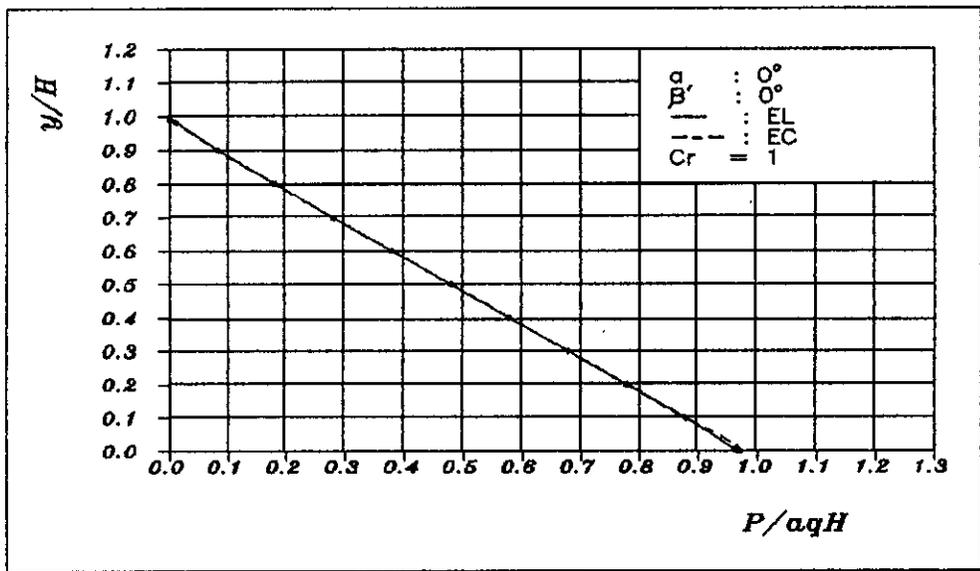


Fig:14
 Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide (séisme vertical)

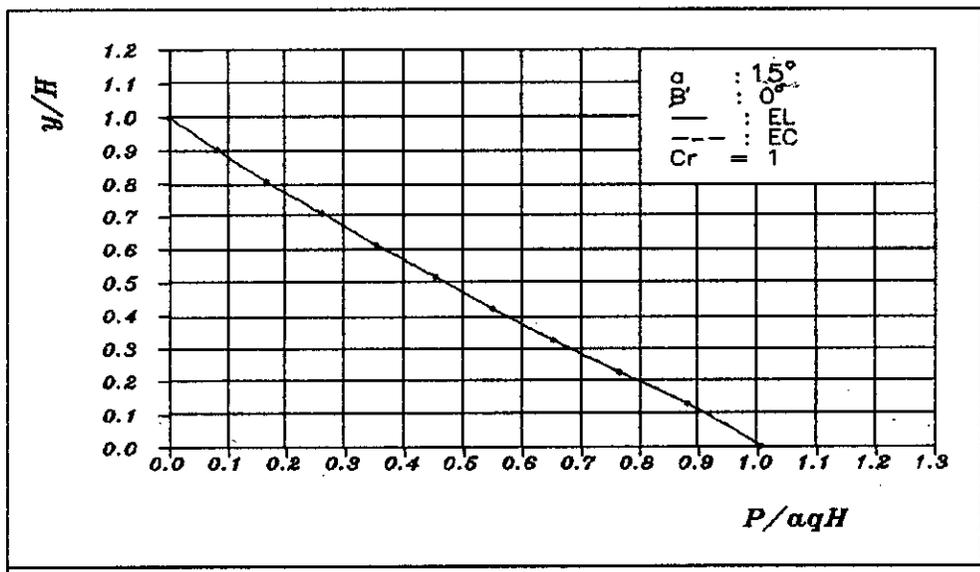


Fig:15
 Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide (séisme vertical)

cas 2 :

**L'eau est considérée
compressible**

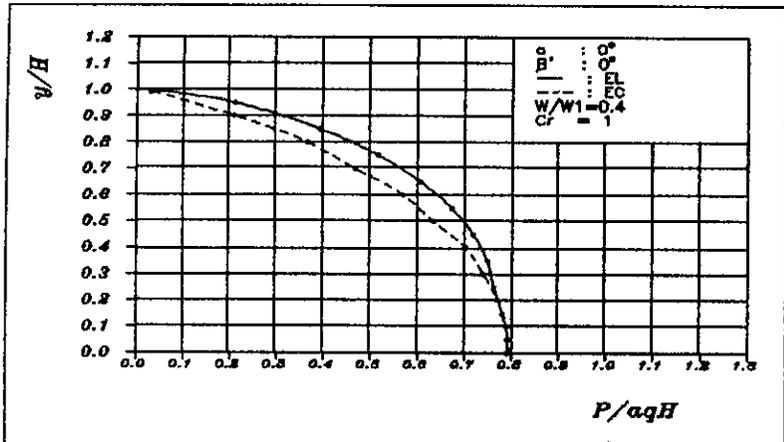


Fig:1 (partie réelle)
 Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide

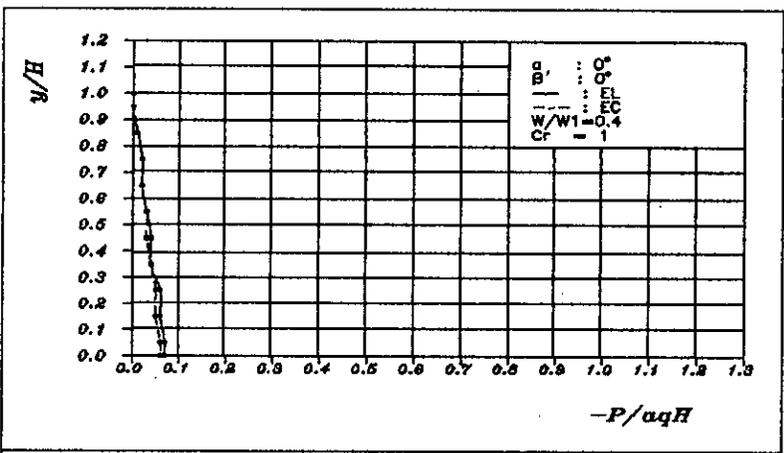


Fig:2 (partie imaginaire)
 Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide

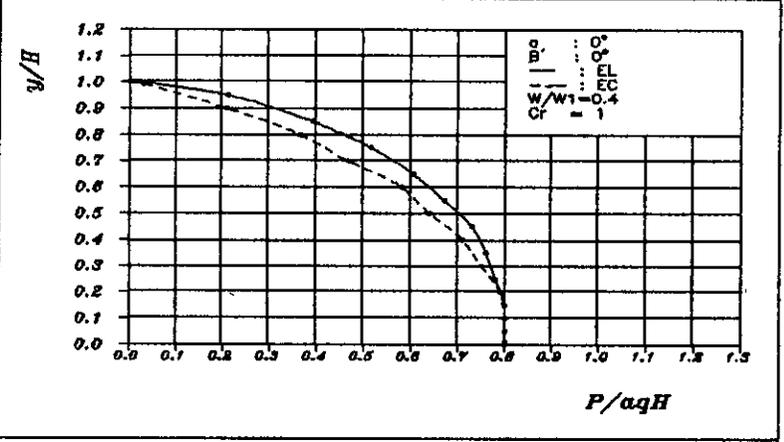


Fig:3 (partie absolue)
 Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide

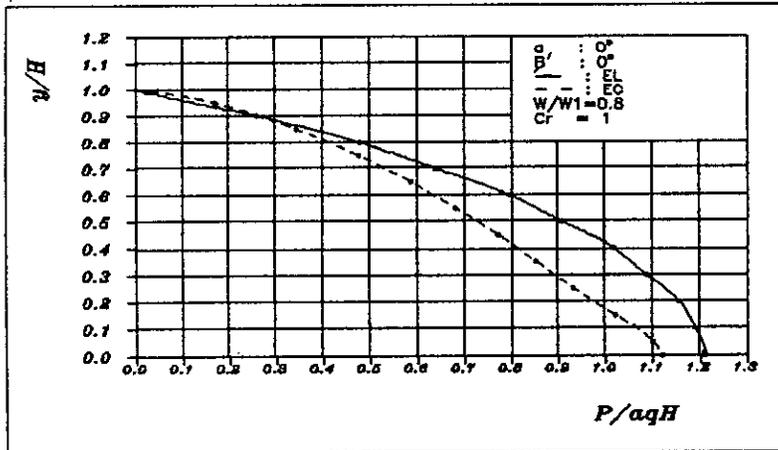


Fig:4 (partie réelle)
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide

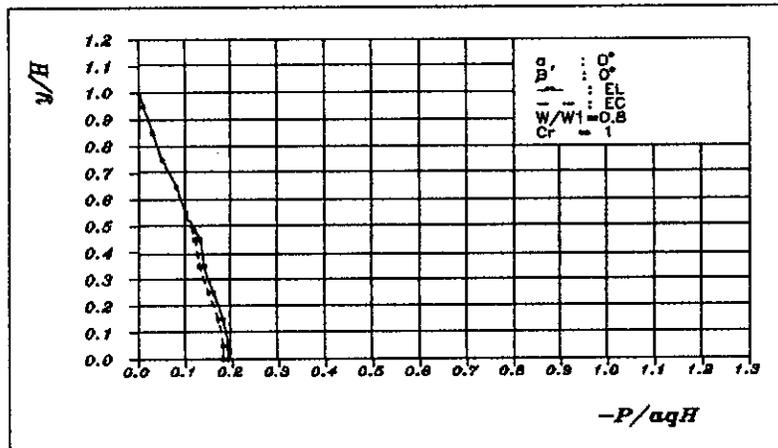


Fig:5 (partie imaginaire)
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide

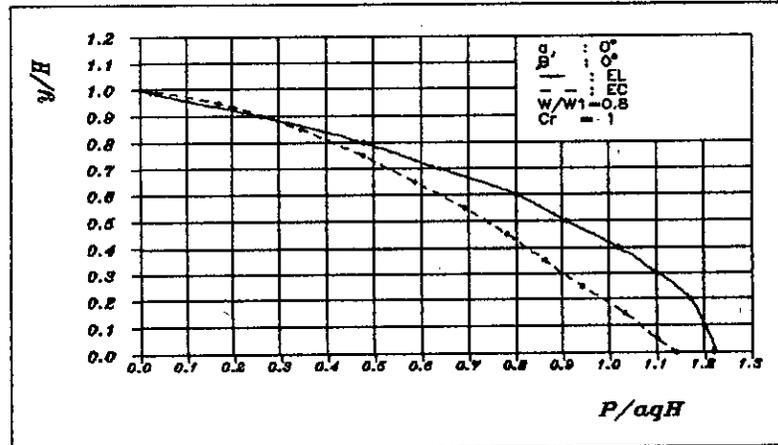


Fig:6 (partie absolue)
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide

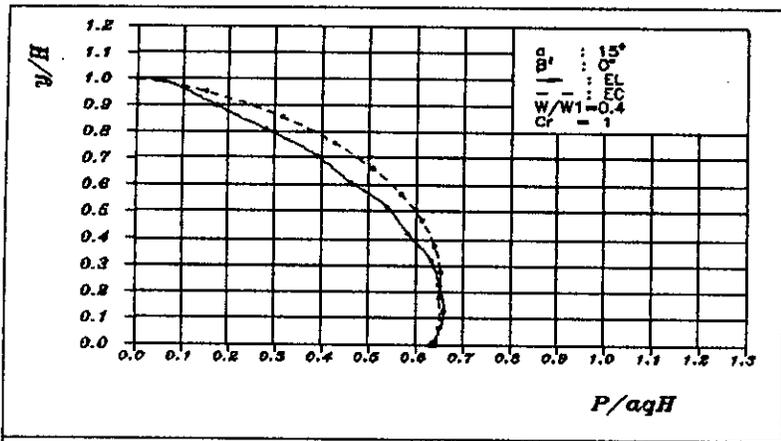


Fig:7 (partie réelle)
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide

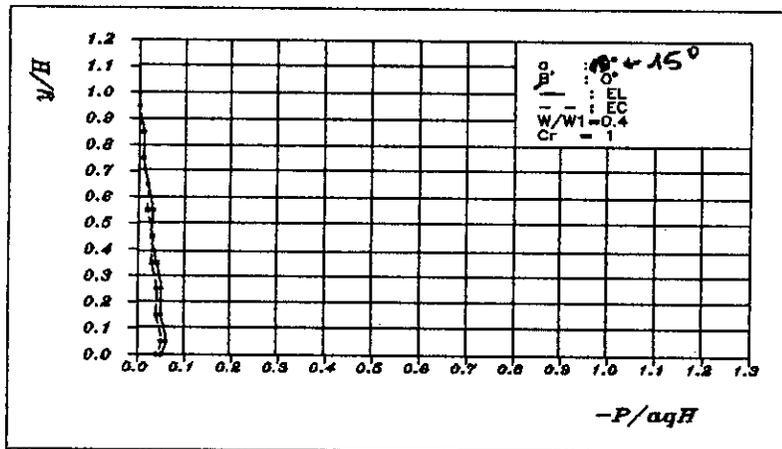


Fig:8 (partie imaginaire)
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide

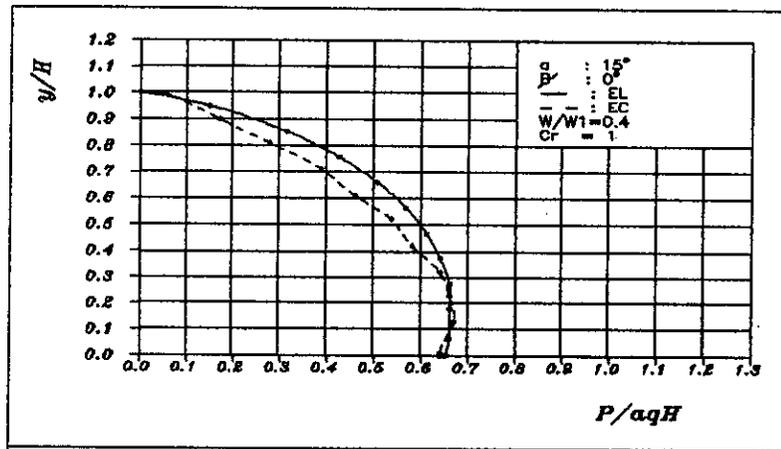


Fig:9 (partie absolue)
Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide

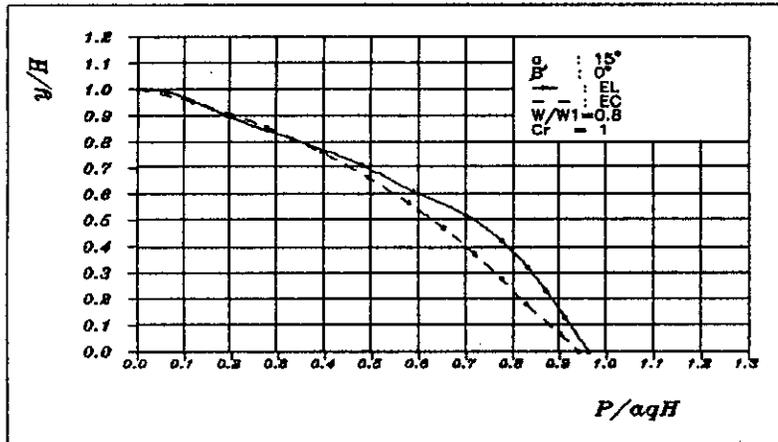


Fig:10 (partie réelle)
Distribution de la pression hydrodynamique
sur le parement amont d'un barrage poids
rigide

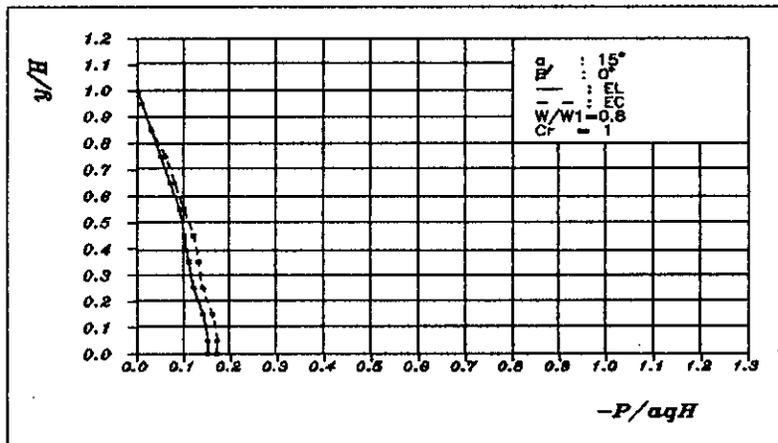


Fig:11 (partie imaginaire)
Distribution de la pression hydrodynamique
sur le parement amont d'un barrage poids
rigide

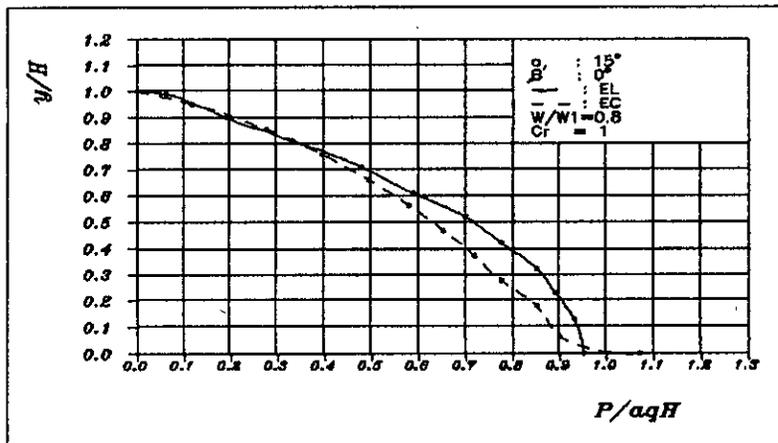


Fig:12 (partie absolue)
Distribution de la pression hydrodynamique
sur le parement amont d'un barrage poids
rigide

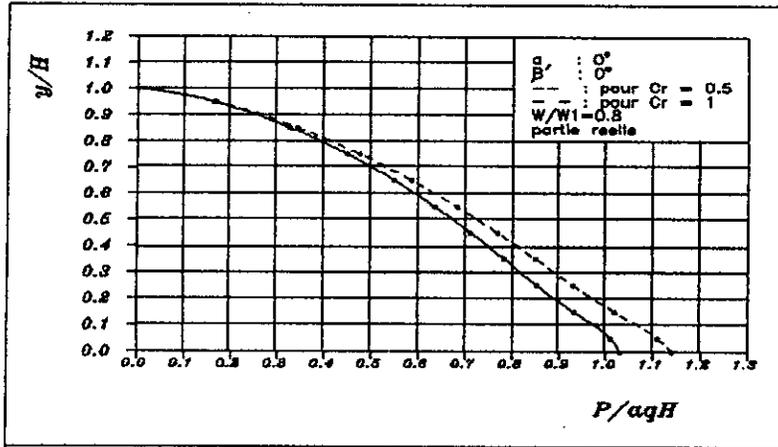


Fig:13 (L'effet de l'absorption)
 Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide (Element constant)

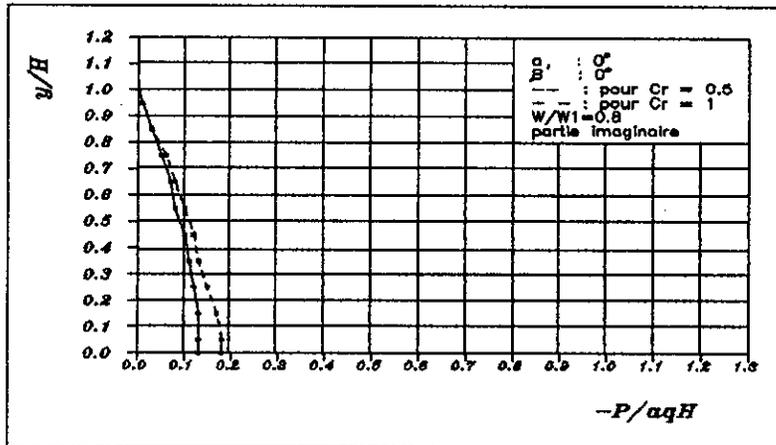


Fig:14 (L'effet de l'absorption)
 Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide (Element constant)

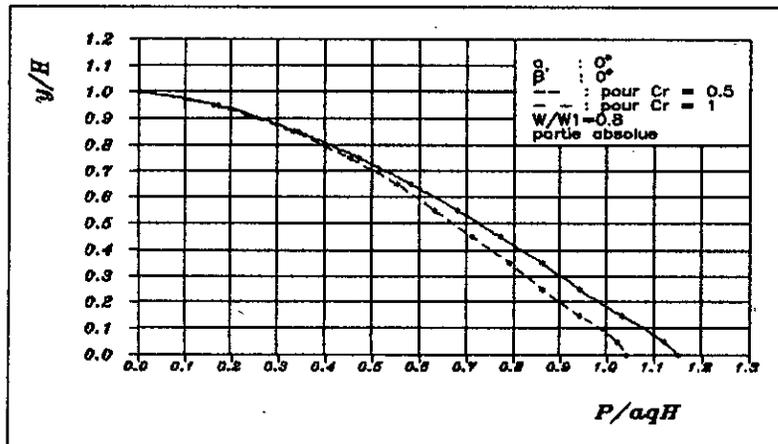


Fig:15 (L'effet de l'absorption)
 Distribution de la pression hydrodynamique sur le parement amont d'un barrage poids rigide (Element constant)

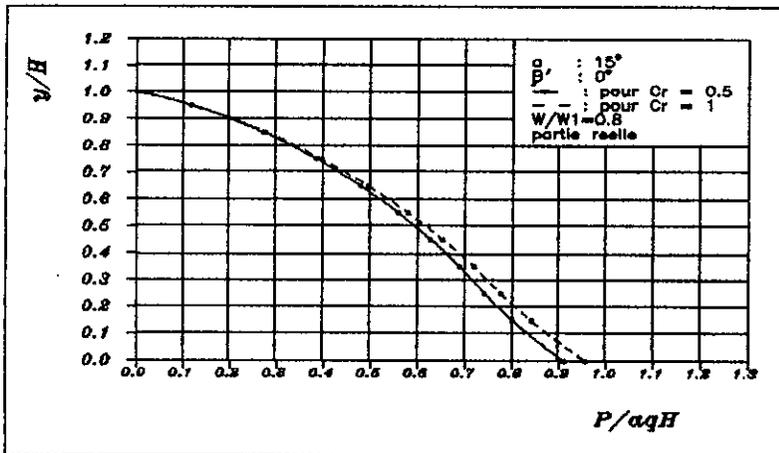


Fig:16 (L'effet de l'absorption)
 Distribution de la pression hydrodynamique
 sur le parement amont d'un barrage poids
 rigide (Element constant)

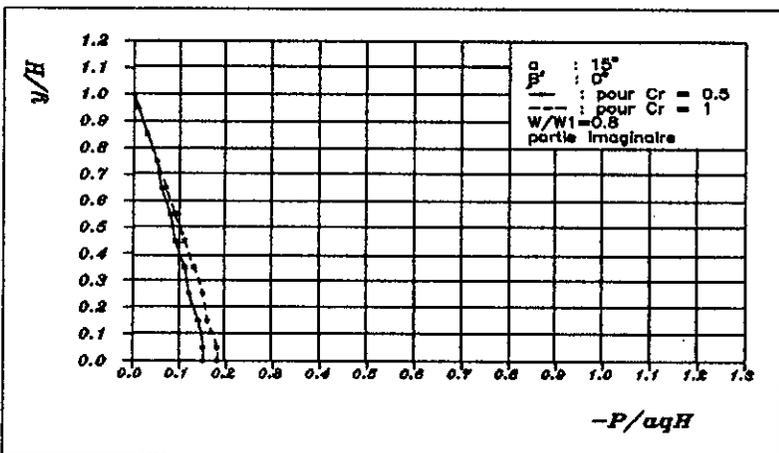


Fig:17 (L'effet de l'absorption)
 Distribution de la pression hydrodynamique
 sur le parement amont d'un barrage poids
 rigide (Element constant)

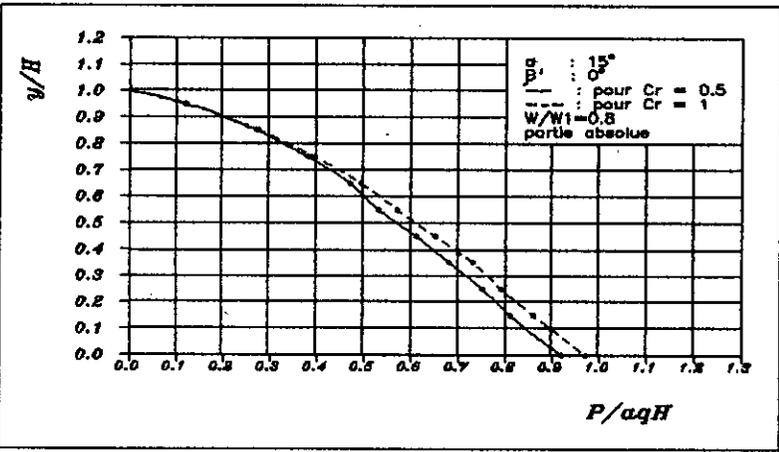


Fig:18 (L'effet de l'absorption)
 Distribution de la pression hydrodynamique
 sur le parement amont d'un barrage poids
 rigide (Element constant)

CONCLUSION

Ce travail nous a permis de déterminer les pressions hydrodynamiques qui s'exercent sur le parement amont d'un barrage poids rigide et de voir l'influence des différents facteurs sur l'ordre de ces pressions (inclinaison du parement, compressibilité de l'eau, forme et absorption du fond de la retenue) .

Cette étude permet de conclure que la forme du parement amont du barrage est un critère essentiel dont il faudrait tenir compte dans la conception des barrages poids en zones sismiques .

On conclut aussi que la méthode des équations intégrales aux frontières est un outil efficace pour l'étude des pressions hydrodynamiques sur les barrages poids soumis à des excitations sismiques, car elle permet d'obtenir des résultats avec un degré acceptable de précision . Cette précision est liée au choix de l'approximation (élément constant, élément linéaire), la longueur de l'élément et la manière de contourner le problème des coins .

La comparaison des résultats obtenus par cette méthode avec ceux obtenu par d'autre méthodes (Zangar, Liu) justifiée son utilité .

ANNEXES

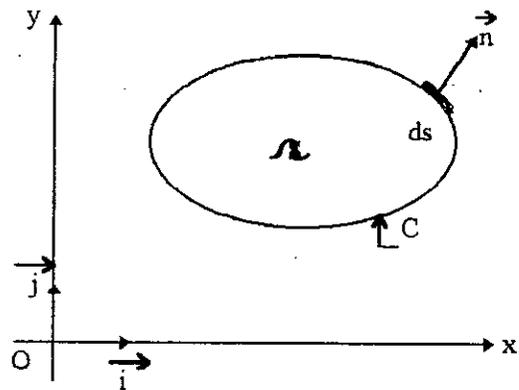
ANNEXE N° 1

1 - Formule de Gréen

$$\int_{\Omega} \Psi \cdot \Delta U \, dx dy = \int_{\Omega} U \cdot \Delta \Psi \, dx dy + \oint_S \left(\Psi \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right) ds$$

avec :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



2 - Quadrature de Gauss unidimensionnelle :

C'est une méthode numérique très puissante . Dans la BEM une telle méthode permet l'évaluation d'intégrales sur les éléments de frontières .

L'intégration de la fonction $f(\xi)$ est donnée par la sommation suivante :

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) \, d\xi = \sum_{i=1}^n W_i f(\xi_i) + E_n$$

avec : W_i = coefficient de pondération

ξ_i : coordonnée de $i^{\text{ème}}$ point d'intégration .

n : nombre total de points d'intégration

E_n : l'erreur de l'approximation ($E_n = 0 (d^{2n} f / d\xi^{2n})$)

Pour $n = 4$, on a :

n	i	ξ_i	W_i
4	1	0,86 113631	0,34785485
	2	-0,86113631	0,34785485
	3	0,33998104	0,65214515
	4	- 0,33998104	0,65214515

ANNEXE N°2

```
C *****
C * Fonction de Bessel de premier espèce d'ordre zéro *
C *****
FUNCTION BESSJ0(X)
REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
* S1,S2,S3,S4,S5,S6
DATA P1,P2,P3,P4,P5/1.D0,-.1098628627D-2,.2734510407D-4,
* -.2073370639D-5,.2093887211D-6/, Q1,Q2,Q3,Q4,Q5/-.1562499995D-
*1,
* .1430488765D-3,-.6911147651D-5,.7621095161D-6,-.934945152D-7/
DATA R1,R2,R3,R4,R5,R6/57568490574.D0,-13362590354.D0,651619640.7D
*0,
* -11214424.18D0,77392.33017D0,-184.9052456D0/,
* S1,S2,S3,S4,S5,S6/57568490411.D0,1029532985.D0,
* 9494680.718D0,59272.64853D0,267.8532712D0,1.D0/
IF(ABS(X).LT.8.)THEN
Y=X**2
BESSJ0=(R1+Y*(R2+Y*(R3+Y*(R4+Y*(R5+Y*R6))))
* /(S1+Y*(S2+Y*(S3+Y*(S4+Y*(S5+Y*S6))))
ELSE
AX=ABS(X)
Z=8./AX
Y=Z**2
XX=AX-.785398164
BESSJ0=SQRT(.636619772/AX)*(COS(XX)*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y
*P5))))-Z*STN(XX)*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*Q5))))
ENDIF
RETURN
END
```

```

*****
* Fonction de Bessel de premier espèce d'ordre un *
*****
FUNCTION BESSJ1(X)
REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
* S1,S2,S3,S4,S5,S6
DATA R1,R2,R3,R4,R5,R6/72362614232.D0,-7895059235.D0,242396853.1D0
*,
* -2972611.439D0,15704.48260D0,-30.16036606D0/,
* S1,S2,S3,S4,S5,S6/144725228442.D0,2300535178.D0,
* 18583304.74D0,99447.43394D0,376.9991397D0,1.D0/
DATA P1,P2,P3,P4,P5/1.D0,.183105D-2,-.3516396496D-4,.2457520174D-5
*,
* -.240337019D-6/, Q1,Q2,Q3,Q4,Q5/.04687499995D0,-.2002690873D-3
*,
* .8449199096D-5,-.88228987D-6,.105787412D-6/
IF (ABS(X).LT.8.) THEN
  Y=X**2
  BESSJ1=X*(R1+Y*(R2+Y*(R3+Y*(R4+Y*(R5+Y*R6))))
* /((S1+Y*(S2+Y*(S3+Y*(S4+Y*(S5+Y*S6))))))
ELSE
  AX=ABS(X)
  Z=8./AX
  Y=Z**2
  XX=AX-2.356194491
  BESSJ1=SQRT(.636619772/AX)*(COS(XX)*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y
* *P5))))-Z*STN(XX)*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*Q5))))
* *STGN(1.,X)
ENDIF
RETURN
END

```

```

*****
* Fonction de Bessel de deusiemme espèce d'ordre zéro *
*****
FUNCTION BESSY0(X)
  REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
  *   S1,S2,S3,S4,S5,S6
  DATA P1,P2,P3,P4,P5/1.D0,-.1098628627D-2,.2734510407D-4,
  *   -.2073370639D-5,.2093887211D-6/, Q1,Q2,Q3,Q4,Q5/-.1562499995D-
  *1,
  *   .1430488765D-3,-.6911147651D-5,.7621095161D-6,-.934945152D-7/
  DATA R1,R2,R3,R4,R5,R6/-2957821389.D0,7062834065.D0,-512359803.6D0
  *
  *   10879881.29D0,-86327.92757D0,228.4622733D0/,
  *   S1,S2,S3,S4,S5,S6/40076544269.D0,745249964.8D0,
  *   7189466.438D0,47447.26470D0,226.1030244D0,1.D0/
  IF(X.I.T.8.)THEN
    Y=X**2
    BESSY0=(R1+Y*(R2+Y*(R3+Y*(R4+Y*(R5+Y*R6)))))/(S1+Y*(S2+Y
  *   *(S3+Y*(S4+Y*(S5+Y*S6))))+.636619772*BESSJ0(X)*LOG(X)
  ELSE
    Z=8./X
    Y=Z**2
    XX=X-.785398164
    BESSY0=SQRT(.636619772/X)*(STN(XX)*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y*
  *   P5))))+Z*COS(XX)*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*Q5))))
  ENDTF
  RETURN
END

```

```

*****
* Fonction de Bessel de deusiemme espéce d'ordre un *
*****
FUNCTION BESSY1(X)
  REAL*8 Y,P1,P2,P3,P4,P5,Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
  *   S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7
  DATA P1,P2,P3,P4,P5/1.D0,.183105D-2,-.3516396496D-4,.2457520174D-5
  * ,
  *   -.240337019D-6/, Q1,Q2,Q3,Q4,Q5/.04687499995D0,-.2002690873D-3
  * ,
  *   .8449199096D-5,-.88228987D-6,.105787412D-6/
  DATA R1,R2,R3,R4,R5,R6/-.4900604943D13,.1275274390D13,-.5153438139
  *D11,
  *   .7349264551D9,-.4237922726D7,.8511937935D4/,
  *   S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7/.2499580570D14,.4244419664D12,
  *   .3733650367D10,.2245904002D8,.1020426050D6,.3549632885D3,1.D0/
  IF(X.LT.8.)THEN
    Y=X**2
    BESSY1=X*(R1+Y*(R2+Y*(R3+Y*(R4+Y*(R5+Y*R6)))))/(S1+Y*(S2+Y*
  *   (S3+Y*(S4+Y*(S5+Y*(S6+Y*S7)))))+.636619772
  *   *(BESS.J1(X)*LOG(X)-1./X)
  ELSE
    Z=8./X
    Y=Z**2
    XX=X-2.356194491
    BESSY1=SQRT(.636619772/X)*(SIN(XX)*(P1+Y*(P2+Y*(P3+Y*(P4+Y
  *   *P5))))+Z*COS(XX)*(Q1+Y*(Q2+Y*(Q3+Y*(Q4+Y*Q5))))
  ENDIF
  RETURN
  END

```

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

[1] K. BADDARI, M.DJEDDI, " éléments de sismologie "

OPU, ALGERIE, 1994 .

[2] A.A BENAZZOUZ, M . HADID, " Investgiation numérique du comportement des plaques raidies par la méthode des éléments finis et la méthode des équations intégrales aux frontières" PFE, E.N.P, 1992 .

[3] S. BOUDAA F . DJALLALI " Analyse des problèmes de l'élasticité plane par la méthode des équations intégrales aux frontières " PFE, E.N.P, 1992 "

[4] C.A BERBBIA J. DOMINGUEZ " Boudany elements an introductory course", computational mechanics publications, Southampton, Bouston, USA, 1989 .

[5] A. CAPRA V. DAVIDOVICI " Calcul des structures en zones sismiques", Eyrolles,FRANCE, 1982 .

[6] V. DAVIDOVICI " Génie parasismique ", presse de l'école nationale des ponts et chaussés, FRANCE, 1985 .

[7] A. DELTAF B. YAVOSKI " Aide mémoire de physique ", MIR, URSS, 1975 .

[8] G. GEORGE "les fonctions de Bessel et leurs applications en physique ", Masson, FRANCE,1945 .

[9] M. HUG " Mécanique des fluides appliquées ", EYROLLES, FRANCE, 1975 .

[10] J. L. HUMMAR A.M JABLONSKI " Bouday element reservoir model for seismic analysis of gravity dams", journal of earthquake enginnering and structural dynamics ", Vol 16, CANADA, 1988 .

[11] H. LAMB " Hydrodynamics ", USA, 1945 .

[12] LOW, BRYDON " Bessel functions for engineering ", LTD, LONDON, 1961 .

[13] PHILIP L.F.LIU " Hydrodynamic pressures on rigid dams during earthquake ", journal of fluid mechanics, Vol 165, GREAT BRITAIN, 1986 .

[14] C.N. ZANGAR " Hydrodynamic pressures on dams due to horizontal earthquakes ", bureau of reclamation, Denver Cole, USA, 1953 .

ERRATUM

page	faute	correction
50	de l'équation (V.2.4.15)	$IMg_{ii}^{(2)} = li/8$
50	de l'équation (V.2.4.16)	$Rg_{ii}^{(2)} = \frac{li}{2\pi} (\ln(li) - 0.15)$