

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT *Hydraulique*

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

*Analyse du coup de bélier par trois  
méthodes numérique :*

~ MACCORMACK

~ LAMBDA

~ GABUTTI

Proposé par :

**MANDI**

Etudié par :

**M. A. HACHÉMI**

Dirigé par

**M. O. BELHADJ**

PROMOTION

**1994**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

*Hydraulique*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

*Analyse du coup de bélier par trois  
méthodes numérique :*

- MACCORMACK

- LAMBDA

- GABUTTI

Proposé par :

**MAHDI**

Etudié par :

**M. A. HACHEMI**

Dirigé par

**M. O. BELHAJJ**

PROMOTION

**1994**

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

A

MA MERE

MON PERE

MES FRERES ET MES SOEURS

MES COUSINS, MES ONCLES

TOUT LES AMIS

JE DEDIE CE TRAVAIL

ABDELKADER

RESUME

Le coup de bélier a beaucoup évolué dans les dernières années, aujourd'hui, l'ingénieur concepteur n'effectue habituellement plus lui même ce type d'analyse. En effet la complexité des problèmes que l'on trouve maintenant exige souvent l'utilisation des programmes sophistiqués qu'on ne retrouve que chez les consultants spécialisés. dans cette thèse nous avons étudié la précision des schémas explicites des différences finies dans la résolution des équations de coup de bélier. Parmi ces schémas nous sommes intéressés par trois schémas courants qui sont schéma de MACCORMACK, DE LAMBDA ET GABUTTI.

ملخص: عرفت حساب الطرق المائتي العددي تطوراً كبيراً خلال السنوات الأخيرة، فلم يعد المهندس يحسب هذه الظاهرة بنفسه. بل أصبحت هناك برامج تجارية وضعت من طرف المصنّعين تقوم بهذا الدور. ونحن إذاً نحاول في هذه الرسالة، دراسة هذه الظاهرة بكل تفاصيلها، ثمنا بوضع برامج مصفوفة، استعملت فيها الطرق الواضحة للسروق المنتهية، بعدما، كانت معظم البرامج السابقة تستخدم فيها طريقة الحلو. فنحن قمنا باستعمال بيانات كل من ماك. كورماك لمبدأ وجاسونكي، ودرسنا دقة النتائج المحصل عليها بكل بيان وبيانها بدلالة عدد كورون (N) وأخيراً اخترنا بيان ماك. كورماك لتكملة الدراسة، لنضع في الأخير برنامجاً يحسب عرفة التوازن.

HISTORIQUE  
 INTRODUCTION

CHAP I	GENERALITES	
I- INTRODUCTION		1
1)Ecoulement permanent		1
2)Ecoulement uniforme		1
3)écoulement transitoire		1
II-ONDES LINEAIRES ET ONDES NON LINEAIRES		
1)Ondes linéaires		1
2)ondes non lineaires		2
III-EQUATIONS DES PERTES DE CHARGE		
1)Pertes de charge linéaires		2
2)Pertes de charge singulières		3
CHAP II	ANALYSE DU COUP DE BELIER	
I- DEFINITION		4
II- DESCRIPTION PHYSIQUE DU COUP DE BELIER		4
III-EFFETS DU COUP DE BELIER		
a)Fermeture rapide		7
b)Fermeture lente		7
c)Ouverture rapide		10
IV- ENNUIS CAUSES PAR LE COUP DE BELIER		13
CHAP III	MODELE MATHEMATIQUE	
I- INTRODUCTION		14
II- DESCRIPTION MATHEMATIQUE DU PHENOMENE		14
1)Hypothese		14

2) Equations du mouvement	٨٥
a) Equation de continuité	٨٥
b) Equation dynamique	١٦
c) Lois d'évolution	٤٢
1) Compressibilité du liquide	١٢
2) Elasticité de la conduite	١٢
III-EQUATIONS DU MOUVEMENT	١٩
IV-CELERITE DES ONDES	٢٠
V-METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION	٢١
1) Méthode analytique	٢١
2) Méthode graphique	٢٢
3) Méthode des caractéristiques	٢٢
4) Méthode des différences finies	٢٣
a) Schémas implicites	٢٣
b) Schémas explicites	
5) Conclusion	٢٣
CHAP IV	<u>SCHEMAS EXPLICITES</u>
I- METHODE DES DIFFERENCES FINIES	٢٤
II- SCHEMAS EXPLICITES	٢٥
1) Schémas de MACCORMACK	٢٦
2) schéma de LAMBDA	٢٨
3) Schéma de GABUTTI	٢٩
4) Stabilité	٣١
III-CONDITIONS AUX LIMITES	٣٢
1) Introduction	٣٢
2) Avantages	٣٢
3) Conditions aux limites au niveau d'un réservoir	٣٣
4) Conditions aux limites au niveau d'une vanne	٣٣
a) Fermeture rapide	٣٣
b) Fermeture lente	٣٣
5) Conditions aux limites dans les schémas explicites	٣٤
a) En utilisant la méthode des caractéristiques	٣٤

b) En utilisant la procédure d'extrapolation 35

CHAP V

	_____	ANALYSE NUMERIQUE DES RESULTATS
I-	ANALYSE D'UNE FERMETURE BRUSQUE DE LA VANNE PAR	36
	LES TROIS SCHEMAS	
1)	Exemple de calcul	36
2)	Influence du nombre de Courant	37
3)	Influence des pertes de charge	37
4)	Influence du matériau	38
5)	Influence de l'épaisseur de la conduite	39
6)	Influence du régime d'écoulement	39
III-	ANALYSE D'UNE FERMETURE LENTE D'UNE VANNE	40

CHAP VI

	_____	SYSTEMES DE PROTECTION
I-	Anti-béliers spécifiques	41
II-	Anti-bélier non spécifiques	41
1)	souppes de décharge	42
2)	cheminée d'équilibre	42
a)	calcul du cheminée d'équilibre basé sur le phénomène	43
	d'oscillation en masse	
b)	calcul basé sur le phénomène du coup d'onde	44
3)	Réservoir d'air	44
	CONCLUSION GENERALE	47

## HISTORIQUE

"L'hydraulique est une science aussi ancienne que la civilisation humaine puisqu'elle commande toute les utilisations de l'eau".

L'évolution de calcul du coup de bélier est passé par des étapes que l'on présentera ici comme suit:

MANABREA(1858) est le premier à s'intéresser au calcul des coups de bélier, à partir de cette date, la compréhension du phénomène s'améliore jusqu'à ce qu'au début du siècle, elle devance les méthodes de calcul disponibles .c'est à ce moment que les ingénieurs praticiens ont développé des méthodes pour résoudre des formes simplifiées des équations principales, à ce titre, on remarquera particulièrement la méthode d'intégration graphique très élégante de BERGERON(1949) qui fut employée presque universellement dans la pratique pendant plusieurs années .

Evidement, l'arrivée des ordinateurs et l'acroissement constant de leur puissance ont permis de traiter des problèmes beaucoup plus complexes et d'améliore la précision de calcul.

## GENERALITES

### I/INTRODUCTION:

Dans ce chapitre, nous allons définir quelques types d'écoulement que l'on rencontrera au cours de notre travail. Nous allons ensuite présenter et définir les différents types d'ondes, enfin nous les expressions des pertes de charge.

1) ECOULEMENT PERMANENT: Un écoulement est dit permanent lorsque tous les caractéristiques hydrauliques et les propriétés des fluides restent invariables dans le temps c'est à dire

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

2) ECOULEMENT UNIFORME:

Un écoulement est dit uniforme lorsqu'à un instant donné, la vitesse du fluide a une même direction et même intensité en tout point de ce fluide.

3) ECOULEMENT TRANSITOIRE: L'écoulement est dit transitoire lorsque les paramètres hydrauliques à savoir (la vitesse, la pression) et les propriétés du fluide sont fonctions du temps et de l'espace:

$$v = v(x, t); \quad P = P(x, t), \quad \rho = \rho(x, t)$$

On peut rencontrer ce phénomène transitoire soit dans l'écoulement en charge, soit dans l'écoulement à surface libre. Parmi ces phénomènes transitoires, le phénomène du coup de bélier, que nous analyserons ici.

### II) TYPES D'ONDES:

1) ONDES LINEAIRES: DU point de vue physique les ondes linéaires sont celles qui se propagent dans le fluide sans modifier les propriétés physiques locales (compressibilité, masse spécifique, conductivité, viscosité...)

voici quelques exemples de ce types d'onde:

- les ondes du son
- les ondes de lumière
- les ondes électromagnétiques

2) ONDES NON LINEAIRES: Les ondes non lineaires sont celles qui se propagent dans le fluide et provoquent des variations dans les propriétés de ce dernier.

La célérité de propagation de ces ondes est indépendante de l'amplitude de celle-ci, et donc elle ne serait plus définie par la seule connaissance du régime permanent initial.

\* les ondes de choc positives sont un exemple d'ondes <sup>non</sup> lineaires. les discontinuités que constituent les manoeuvres rapides sont encore un exemple de ce types d'ondes.

### III/EQUATIONS DE PERTES DE CHARGE:

Les équations de pertes de charge en régime permanent, cette hypothèse est due à la complexité du phénomène transitoire. parmi les formules les plus utilisées, la formule de Darcy qui est plus simple.

1) PERTES DE CHARGE LINEAIRES: Les pertes de charge lineaires ont lieu au cours du mouvement du fluide dans la conduite, elles dépendent de la longueur et du diamètre de la conduite. la formule est :

$$H_l = \frac{f \cdot l}{2 \cdot g \cdot d} V^2$$

$H_l$ : pertes de charge lineaires

$f$ : coefficient de pertes de charge lineaire ou de DARCY.

2) PERTES DE CHARGE SINGULIERES: Ces pertes se produisent lorsqu'on a <sup>1/</sup>changé des caractéristiques de la conduite, elle s'expriment comme suit:

$$H_s = \frac{K}{2 \cdot g} V^2$$

k: coefficient de pertes de charges singulières

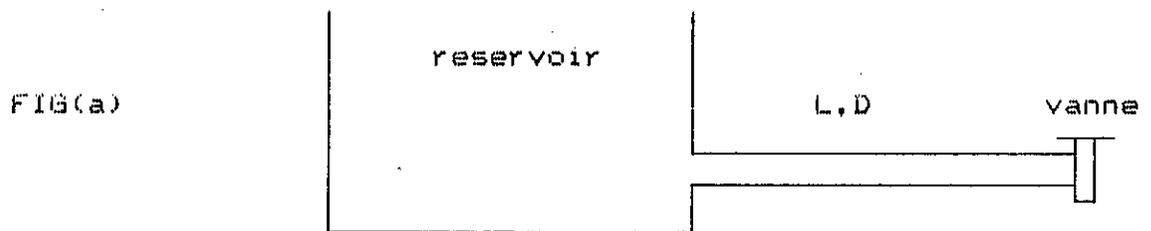
H<sub>s</sub>: pertes de charge singulières

## PHENOMENE DU COUP DE BELIER

I/ DEFINITION: on appelle coup de belier dans une conduite en charge comme étant des variations de pression résultant d'une perturbation des conditions permanentes d'écoulement .

### II/ DESCRIPTION PHYSIQUE DU COUP DE BELIER:

Soit une conduite de longueur ( $l$ ) et de diamètre ( $d$ ) dans laquelle circule un débit ( $q$ ) ,comme l'indique la figure ci-dessus interrompons l'écoulement au moyen d'une vanne placée à l'extrémité avale de la conduite .la vitesse des particules liquides qui initialement était ( $v_0$ ) s'annule du fait que ces particules viennent buter contre cette vanne .



ceci a pour conséquence que toute l'énergie cinétique du liquide se transforme en travail de déformation de la conduite et de compressibilité du liquide .au droit de la vanne la pression devient alors ( $p+dp$ ) où ( $dp$ ) est l'augmentation de la pression Il est clair que les particules qui suivent immédiatement celles qui se sont immobilisées sont stoppées à leurs tours et ainsi de suite, donc à partir de la vanne se produit une onde de surpression qui se propage avec une célérité( $c$ ) vers le reservoir fig(1-b) une fois que toutes les particules du liquide se sont immobilisées dans

la conduite et que cette dernière soit complètement dilatée. La pression qui règne sera  $(p+dp)$  le long de la conduite supérieure à celle qui règne dans le réservoir. fig(1-c).

Comme cet état n'est pas un état d'équilibre, on enregistre un écoulement du liquide de la conduite vers l'intérieur du liquide de réservoir vidant ainsi cette conduite.

La vitesse d'écoulement reste toujours égale à  $(V_0)$  mais de signe contraire fig(1-d). La section de la conduite tend à reprendre son état initial on constate alors un déplacement de la section (n-m) du réservoir vers la vanne. Dès que celle-ci atteint la vanne tout en produisant un abaissement de pression  $(-dp)$ . Cette onde de dépression se propagera alors de la vanne au réservoir fig(1-f).

Une fois que cette onde atteint le réservoir, la conduite sera sous une pression de  $(p-dp)$  inférieure à celle du réservoir qui est maintenue constante et égale à  $p$  fig(1-g). Dès lors le liquide s'écoulera alors du réservoir vers la vanne donc on assiste au remplissage de la conduite augmentant ainsi la pression dans la conduite de  $(p-dp)$  à  $p$ . La vitesse du liquide sera égale à ce moment à  $(V_0)$ . Il est évident qu'une fois la dépression aura été complètement supprimée, la conduite se retrouvera donc dans les mêmes conditions que celles qui existaient juste à la fermeture de la vanne. fig(1-c).

alors le phénomène se reproduira théoriquement à l'infini.

En réalité l'amortissement du phénomène est causé par les frottements et par suite de la dissipation d'une partie de l'énergie du liquide dans le réservoir.

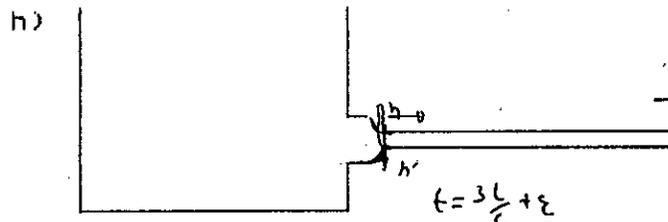
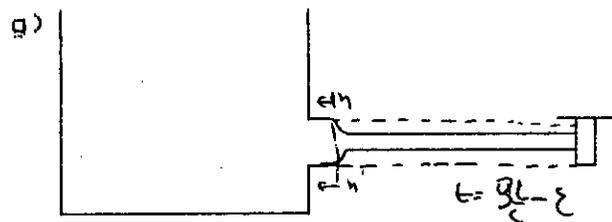
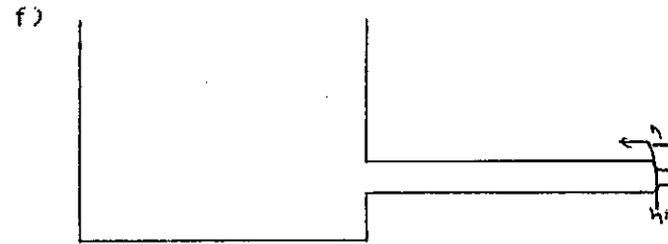
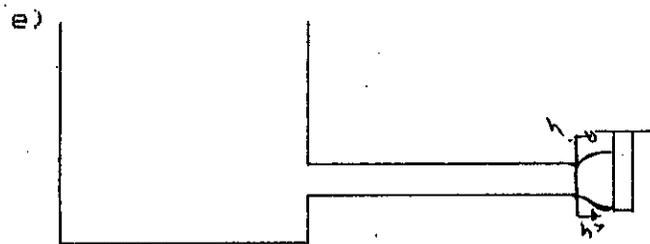
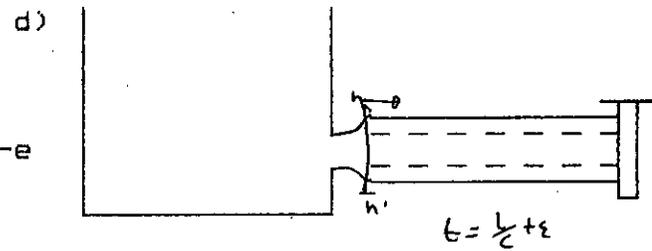
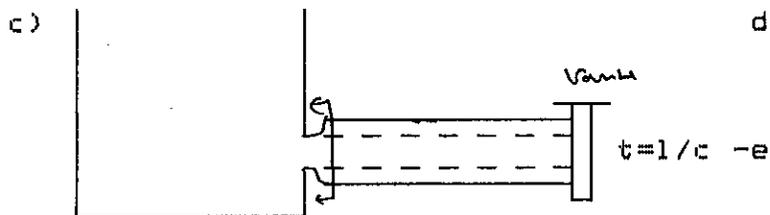
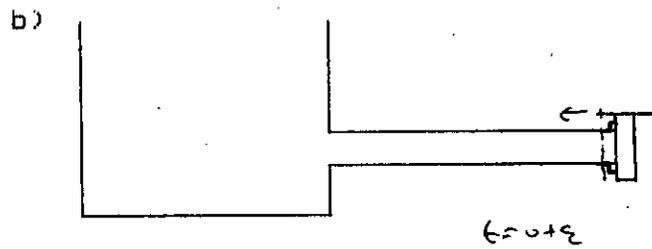
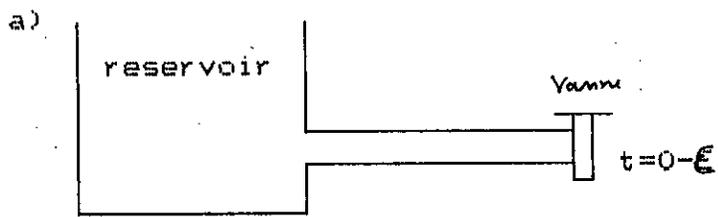


FIG (1)

## II/CAUSES PRINCIPALES DU COUP DE BELIER :

a) Fermeture rapide d'une vanne :

Si on admet que la durée de fermeture est "TM" ,on a presence d'un effet de coup de belier d'une fermeture rapide ,si  $TM \leq 2L/C$  c'est à dire inférieure au temps de parcours : aller et retour de l'onde . On dit que la fermeture est instantanée si  $TM=0$  .

On demontre que la surpression produite par une fermeture rapide ne depend pas de la longueur de la conduite .

Si la fermeture est totale en appelant (VO) la vitesse initiale moyenne du liquide ,la surpression maximale est donnée par la formule de MICHAUD :

$$H_{max} = \frac{C \cdot V_0}{g} , C: \text{ est la célérité d'onde (m/s)}$$

b) FERMETURE LENTE: ( $TM > 2l/c$ ):

On dit que la fermeture de la vanne est lente si la durée de la fermeture est supérieure au temps d'aller et retour mis par l'onde c'est à dire  $TM > 2L/C$  .

Dans ce qui suit nous presenterons uniquement des conduites cylindriques longues susceptible de réfléchir les ondes.

Nous ne prendrons en compte que les manoeuvres de fermeture se produisant à l'extrémité de la conduite .

Considerons une conduite rigide de longueur (L) dans la quelle s'écoule un fluide incompressible ,à l'aval de cette conduite se trouve une vanne ,supposons lors de la fermeture de la vanne que la section de cette dernière varie suivant la lois

$$A_e = A_0 \cdot f(t)$$

A<sub>0</sub>: section de la vanne quand elle est ouverte.

$$Q_t = A_e \sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}$$

Q<sub>t</sub>: debit à travers la vanne.

$H_n$ : charge juste avant la vanne.

Divisons l'expression suivante par A.

Il vient

$$V_t = \frac{A_e}{A} \sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}$$

Derivons cette expression par rapport au temps on obtient:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dA_e}{dt} \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}}{A} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{H_n}} \frac{A_e}{A} \frac{dH_n}{dt}$$

$$H_0 - H_n - \frac{f \cdot l \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot d} = \frac{1}{g} \frac{dV}{dt}$$

$H_0$ : etant la charge du reservoir.

Donc

$$\frac{dH_n}{dt} = \frac{r \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}}{1 \cdot f(t)} \cdot H_0 - H_n - \frac{f \cdot l \cdot V^2}{1 \cdot g \cdot d} - \frac{2 \cdot H_n}{f(t)} \frac{d}{dt} f(t)$$

où

$$r = A/A_0$$

en multipliant cette derniere equation par  $f(t)$

$$f(t) \cdot \frac{dH_n}{dt} = \frac{r \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_n}}{1} \cdot H_0 - H_n - \frac{f \cdot l \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot d} - 2 \cdot H_n \cdot \frac{d}{dt} f(t) \quad (II.5)$$

Si la charge maximale survient lorsque la vanne est totalement fermée alors ( $v_t=0$ ), le terme de frottement n'existera plus. Si la charge maximale intervient au moment où la vanne n'est pas fermée alors la vitesse ( $v_t > 0$ ) quand

( $dH_n/dt=0$ ). Si la pression monte et atteint sa valeur maximale à l'instant de fermeture de la vanne alors  $f(t)$ . ( $dH_n/dt=0$ ) nous définit la plus grande valeur, ainsi l'équation (II.5) établie devient

$$\frac{r\sqrt{2gH_n}}{1.f(t)} \cdot H_0 - H_n - \frac{f \cdot l \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot d} s - \frac{2 \cdot H_n}{f(t)} \cdot \frac{d}{dt} f(t) = 0 \quad (II.6)$$

avec  $H_n = H_{max}$

En négligeant les pertes de charge on a  $f=0$

élevons au carré l'équation (II.6) on a

$$(r \cdot l)^2 \cdot 2 \cdot g \cdot H_{max} \cdot (H_0 - H_{max})^2 = 4 \cdot H_{max}^2 \cdot \left(\frac{d}{dt} f(t)\right)^2 s^2$$

Après développement on a :

$$\frac{H_{max}}{H_0} s^2 - 2 + \frac{2 \cdot (l \cdot df(t)/dt)^2}{g \cdot r^2 \cdot H_0} s \cdot \frac{H_{max}}{H_0} = 0 \quad (II.7)$$

cette équation est du second degré en  $H_{max}/H_0$   
posons

$$\frac{2 \cdot (l \cdot df(t)/dt)^2}{g \cdot r^2 \cdot H_0} = k^2$$

la solution de l'équation (II.7) est

$$\frac{H_{max}}{H_0} = 1 + \frac{k^2}{2} + k^2 \sqrt{1/4 + 1/k^2}$$

prenons comme exemple une fermeture linéaire de la vanne

$$f(t) = 1 - \frac{t}{t_m}$$

où  $t_m$  : est le temps de fermeture de la vanne.

en dérivant par rapport au temps

$$\frac{d}{dt} f(t) = - \frac{1}{tm}$$

il vient

$$k^2 = \frac{2.l^2}{tm^2.r^2.g.Ho} = \frac{2.g.Ho}{r^2} = \frac{l^2}{tm^2.g.Ho^2}$$

comme

$$V_0^2 = \frac{2.g.H_0}{r^2}, V_0: \text{est la vitesse d'écoulement en état permanent}$$

$$\text{d'où } k = \frac{V_0.l}{g.H_0.tm}$$

il est donc simple actuellement d'évaluer  $H_{max}/H_0$

D'après les auteurs, la loi la plus utilisée est:

$$\tau = (1 - t/tm)^b$$

$\tau = 1$  pour une ouverture complète de la vanne

$\tau = 0$  pour une fermeture complète de la vanne

$$b = 1.4 \text{ à } 1.6$$

### C) OUVERTURE RAPIDE D'UNE VANNE

Considérons la conduite précédente dans laquelle circule un fluide incompressible.  A l'aval de la conduite se trouve une vanne, tandis qu'à l'amont se trouve un réservoir

soit  $(dH_i)$  la surpression à la vanne quand elle est totalement ouverte, la pression absolue au niveau de celle-ci est nulle tandis qu'à l'amont (réservoir) elle est de  $H_r$   
par conséquent:

$dH_i = 0 - H_r$  si les frottements ne sont pas présents  
 comme les frottements existent toujours, la pression  $H_r$  doit être  
 réduite de  $H_f$

$$dH_i = H_f - H_r$$

où  $H_f$  est la perte de charge par frottement dont l'expression  
 pour les pertes de charge linéaires

$$H_f = \frac{f \cdot l \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot d}$$

pour les pertes de charge locales

$$H_s = k \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

l'équation (II.8)

$$dH_i = -H_r - \frac{f \cdot l \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot d} - k \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g}$$

comme  $dp = -\rho \cdot l \cdot \frac{dV}{dt} = \rho \cdot g \cdot dH_i$

alors

$$dH_i = -\frac{1}{g} \cdot \frac{dV}{dt}$$

en remplaçant  $dH_i$  par sa valeur dans l'équation on obtient:

$$H_r = \frac{f \cdot l \cdot V^2}{2 \cdot g \cdot d} + k \cdot \frac{V^2}{2 \cdot g} + \frac{1}{g} \cdot \frac{dV}{dt}$$

posons

$$k = \frac{f \cdot l}{d} + k$$

d'où

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2 \cdot g \cdot H_r - k \cdot V^2}{2 \cdot l}$$

soit

$$dt = 2 \cdot l \cdot \frac{dV}{2 \cdot g \cdot H_r - k \cdot V^2}$$

En intégrant cette expression on trouve:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot g \cdot Hr}} \int \frac{dV}{\sqrt{2 \cdot g \cdot Hr} + \sqrt{k} \cdot V} + \int \frac{dV}{\sqrt{2 \cdot g \cdot Hr} - \sqrt{k} \cdot V} \text{ s}$$

d'où

$$t = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot g \cdot Hr}} \cdot \text{Ln} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot Hr} + \sqrt{k} \cdot V}{\sqrt{2 \cdot g \cdot Hr} - \sqrt{k} \cdot V} \text{ s}$$

V : est la vitesse d'écoulement à l'instant t

En divisant l'équation (II.4) par  $\sqrt{k}$  on obtient:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot g \cdot Hr}} \text{Ln} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot Hr/k} + V}{\sqrt{2 \cdot g \cdot Hr/k} - V} \text{ s}$$

Quand  $t \rightarrow \infty$  c'est à dire  $\sqrt{2 \cdot g \cdot Hr} = \sqrt{k} \cdot V_{\infty}$

ou

$V_{\infty}$  : est la vitesse asymptotique quand le temps  $t \rightarrow \infty$

$$V_{\infty} = \sqrt{2 \cdot g \cdot Hr/k}$$

d'où

$$t = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot g \cdot Hr}} \text{Ln} \cdot \frac{V_{\infty} - V}{V_{\infty} + V} \text{ s}$$

Finalement l'expression  $V_{\infty}/V$  est donnée par

$$\frac{V_{\infty}}{V} = \frac{\exp(2 \cdot g \cdot Hr \cdot k)^{0.5t/L} - 1}{\exp(2 \cdot g \cdot Hr \cdot k)^{0.5t/L} + 1}$$

\* Cette fonction peut être représentée sur un graphique FIG( )  
 les lignes pointillées montrent l'influence de la compressibilité  
 du fluide et de l'élasticité de la conduite sur la vitesse  
 d'écoulement. ??

#### IV/ENNUIS CAUSES PAR LE COUP DE BELIER:

Les risques dus au coup de belier sont de plusieurs ordres, on  
 citera:

##### - Risques dus aux fortes pressions:

Lorsque la pression engendrée par le coup de belier est  
 supérieure à la pression maximale admissible dans la conduite il  
 y'a risque de rupture de la conduite et de deboitement des joints

##### -Risques aux pressions négatives:

Lorsque la pression dans la conduite devient inférieure à la  
 pression de vapeur, il se produit une poche d'air ou de cavitation.  
 Si cette pression est très grande la conduite peut éclater.

Une autre conséquence est l'usure de l'enduit intérieur rendant  
 ainsi la conduite rugueuse.

##### -Fatigue de la conduite:

L'alternance des surpressions et des dépressions, qui entraînent la  
 dilatation et compression de la conduite, ce qui entraînent la  
 fatigue de celle-ci.

## MODELE MATHEMATIQUE

### I/INTRODUCTION:

Dans ce chapitre nous analyserons le coup de belier du point de vue mathématique, c'est à dire d'établir les équations qui régissent le phénomène. Après, nous citons les méthodes numériques de résolutions de ces équations. celles-ci dérivent par l'application de deux lois principales de la dynamique des fluides, qui sont : la loi de conservation de la masse ou l'équation de continuité et la loi de conservation de la quantité du mouvement.

### II/DESCRIPTION MATHEMATIQUE:

#### 1) HYPOTHESES DE BASE:

Pour qu'on puisse appliquer les deux lois sur une tranche de fluide. Des hypothèses de base ont été émises.

- la conduite est peu déformable il en résulte que les composantes de l'accélération perpendiculaire à l'axe de la conduite sont négligeables.

- le liquide est très peu compressible.

la répartition de la pression et la vitesse sont uniformes et constantes à travers une section, il en résulte que l'inertie liée à l'écoulement radial dans une section est négligeable et que la vitesse est une fonction de  $x$  et  $t$ .

- la paroi de la conduite n'a pas d'inertie c'est à dire que la variation de la pression est suivie instantanément par la déformation de la paroi.

- le niveau du réservoir est supposé constant.

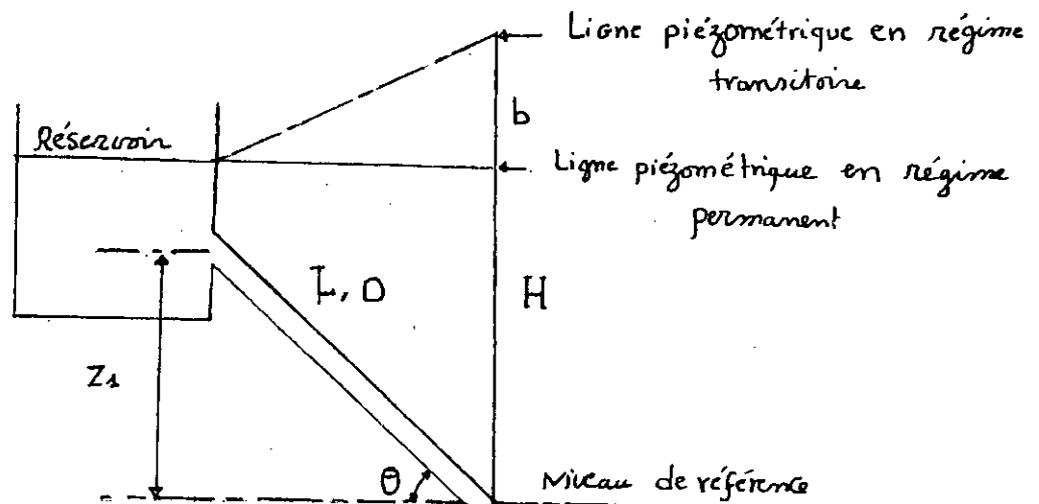
par souci de simplicité est vue les hypothèses simplificatrices présentées ci-dessus, nous présenterons le modèle mathématique, dans le cas d'un fluide homogène.

Les grandeurs définissant les conditions d'écoulement en un point de la conduite sont :

- La pression (charge):  $P(x,t); H(x,t)$
- La vitesse moyenne:  $V(x,t)$

## 2) EQUATIONS DU MOUVEMENT:

Pour établir les équations du mouvement du fluide, Considérons une conduite de longueur (L) et de diamètre (D) reliant un réservoir à l'amont et une vanne à l'aval voir Fig ci-dessous.



### a) EQUATION DE CONTINUITE:

Soit une tranche de canalisation comprise entre deux abscisses  $(x)$  et  $(x+dx)$ . fig( )

La masse entrante à l'abscisse  $(x)$  est  $(\rho \cdot s \cdot V \cdot dt) \cdot x$

La masse sortante à l'abscisse  $(x+dx)$  est  $(\rho \cdot s \cdot V \cdot dt) \cdot (x+dx)$

La variation de stockage entre l'abscisse  $(x)$  et  $(x+dx)$  est donnée par:

$(\rho \cdot s \cdot dx) \cdot (x+dx) - (\rho \cdot s \cdot dx) \cdot x$   
 en écrivant l'égalité

$(\rho \cdot s \cdot V \cdot dt)_x - (\rho \cdot s \cdot V \cdot dt)_{x+dx} = (\rho \cdot s \cdot dx)_{t+dt} - (\rho \cdot s \cdot dx)_t$   
 d'où on obtient:

$$-\frac{\partial \rho s V}{\partial x} dx \cdot dt = \frac{\partial \rho s}{\partial t} dx \cdot dt$$

Donc

$$\frac{\partial \rho s V}{\partial x} + \frac{\partial \rho s}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.1})$$

### b) EQUATION DYNAMIQUE:

Faisons le bilan de quantité de mouvement pendant le temps  $dt$  en suivant le volume d'eau compris entre les abscisses  $x$  et  $x+dx$ . En appliquant la loi de Newton sur cet volume on a:

$$\frac{dmV}{dt} = \sum F \text{ ext}$$

Suivant l'axe  $X$  on a:

$$\begin{aligned} \frac{dmV}{dt} &= m \frac{dV}{dt} + V \frac{dm}{dt} \\ &= \rho s dx \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + V \frac{\partial \rho s}{\partial t} dx + \frac{\partial \rho s}{\partial x} dx \\ &= \rho s dx \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \left[ V \frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial \rho s}{\partial x} \right] s dx \end{aligned}$$

D'après l'équation de continuité (III.1) le terme:

$$V \frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial \rho s}{\partial x} = 0 \quad \text{ce qui donne:}$$

$$\frac{dmV}{dt} = \rho s dx \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

Les forces exterieurs qui existent sont:

- Force de pression .
- Force de gravité
- Force de frottement

### 1) FORCE DE PRESSION:

Comme nous avons dit précédement que la pression est supposée constante dans une section ainsi:

$$F_p = - \frac{\partial p s}{\partial x} dx$$

### 2) FORCE DE GRAVITE:

$$F_g = \rho g s i \cdot dx \quad \text{en supposant que } \sin i = i$$

### 3) FORCE DE FROTTEMENT:

$$F_f = - \rho \cdot g \cdot s \cdot j \cdot dx \quad \text{en supposant que } j \text{ est la}$$

perte de charge lineaire qui sera calculée comme dans le cas du regime permanent

$$\text{ainsi: } j = \frac{f \cdot V \cdot |V|}{2 \cdot D} \quad f: \text{est le coefficient de Darcy de perte de charge.}$$

$$\text{Donc } \rho \cdot s \cdot \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right] s \cdot dx = - \frac{\partial p s}{\partial x} dx + \rho \cdot g \cdot s \cdot (i - j) \cdot dx$$

en devisant cette équation par dx on obtient :

$$\rho \cdot s \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p s}{\partial x} = \rho \cdot g \cdot s \cdot (i - j) \quad (\text{III.2})$$

### c) LOIS D'EVOLUTION:

Deux lois semi-empirique nous permettent de lier les variations de  $\rho$  à celle de P

1) COMPRESSIBILITE DE L'EAU: L'expression de la variation de la masse volumique s'écrit:

$$\frac{1}{\rho} d\rho = \frac{dP}{\epsilon}$$

Avec  $\epsilon$  est le coefficient de compressibilité de l'eau en devisant par dt on obtient:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \frac{dP}{dt} \quad (\text{III.3})$$

2) ELASTICITE DE LA CONDUITE:

a) expressions des contraintes dans les tuyaux sous pression:

soit  $\sigma_r$  la contrainte radiale, et  $\xi$  la deformation correspondante la loi de Hook nous permet d'écrire:

$\xi = \frac{\sigma}{E}$  avec E: module d'élasticité longitudinal du matériau.

Pour les matériaux les plus usuels le module d'élasticité E a les valeurs suivantes:

Matériau	Acier	Cuivre	Laiton	Aluminium et Alliage
E ( $10^6$ kg/cm <sup>2</sup> )	2 à 2.1	1.2	1 à 1.2	0.7 à 0.8

Soit une conduite de longueur (l) et d'épaisseur (e) soumise à la pression p.

Considerons l'équilibre de la moitié de la conduite, voir fig ( ) l'équilibre de la moitié de la section de la conduite donne:

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} P \cdot \cos\alpha \cdot ds - 2 \cdot \sigma \cdot l \cdot e = 0$$

$$ds = l.r.d\alpha \quad \text{d'où}$$

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} P.l.r.\cos\alpha.d\alpha = 2.l.e.\sigma$$

D'où il vient

$$\sigma = \frac{P.D}{2.e} \quad \text{en dérivant cette expression on obtient:}$$

$$d\sigma = \frac{D}{2.e} dP$$

et on a

$$d\sigma = E \frac{dD}{D}$$

$$\frac{ds}{s} = 2 \frac{dD}{D}$$

finalement on a:

$$\frac{1}{s} \frac{ds}{dt} = \frac{D}{e.E} \frac{dP}{dt} \quad (\text{III.4})$$

En composant ces deux équations nous obtenons

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{ds}{s} = \frac{d\rho s}{\rho s} = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \frac{\epsilon.D}{E.e} \right] s dP \quad (\text{III.5})$$

### 3) EQUATIONS DU COUP DE BELIER:

Nous choisissons de conserver les variables P et V en éliminant  $\rho$  et s

l'équation de continuité (III.1) devient:

$$-\frac{1}{\epsilon} \cdot \left[ 1 + \frac{\epsilon.D}{E.e} \right] s \cdot \left[ \frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial V}{\partial x} \right] s + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

et l'équation dynamique (III.2) devient:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + v \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{P.D}{\rho.E.e} = g(i-j)$$

Soit

$$\frac{1}{\epsilon} \left[ 1 + \frac{\epsilon \cdot D}{E \cdot e} \right] \rho \cdot \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{P \cdot D}{\rho \cdot E \cdot e} \right] \rho \frac{\partial p}{\partial x} = g(i-j) \quad (\text{III.7})$$

Ce sont les équations qui régissent le coup de belier si on néglige  $\frac{\partial p}{\partial x}$  devant  $\frac{\partial p}{\partial t}$  et  $\frac{\partial v}{\partial x}$  devant  $\frac{\partial v}{\partial t}$  et si on néglige la perte de charge  $j$  les deux équations précédentes deviennent:

$$\frac{1}{\epsilon} \left[ 1 + \frac{\epsilon \cdot D}{E \cdot e} \right] \rho \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{P \cdot D}{\rho \cdot E \cdot e} \right] \rho \frac{\partial p}{\partial x} = g \cdot i \quad (\text{III.9})$$

Ce sont les équations du coup de belier simple .

#### 4) CELERITE DES ONDES:

L'expression de la célérité des ondes qui apparaissait au cours de l'élaboration de l'équation de continuité s'écrit :

$$C = \sqrt{\epsilon} / \left[ \sqrt{\rho} \sqrt{1 + \epsilon \cdot D / E \cdot e} \right] \rho$$

Avec  $\epsilon$ : coefficient de compressibilité de l'eau

$E$ : module d'élasticité de la conduite

Comme nous voyons dans la formule précédente de la célérité que celle-ci augmente lorsque l'épaisseur  $e$ , le module d'élasticité  $E$  de la conduite et le coefficient de compressibilité  $\epsilon$  augmentent.

Et diminue avec toute augmentation de  $D$  et  $\rho$ .

D'autre part si la célérité augmente la pression au régime transitoire augmente.

Dans la pratique, pour les tuyaux en matériaux peu élastiques (métal, béton, grès...) la célérité des ondes est comprise entre 700 et 1300 m/s. Elle est d'autant plus forte que la pression de service est élevée.

### III-5/METHODES NUMERIQUES DE RESOLUTION:

En l'absence de solution analytique générale au système d'équation précédent, Beauchemin § cite plusieurs méthodes numériques de résolution, parmi ces méthodes on cite les suivantes:

1) METHODE ANALYTIQUE: Cette solution sera élaborée sauf sous les hypothèses suivantes:

- pertes de charge négligeables
- la conduite est supposée horizontale.

les équations du coup de bélier deviennent:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{g \cdot s} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + g \cdot s \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

ces équations sont de type hyperbolique, donc elles admettent des solutions de la forme:

$$H = H_0 + f(t+x/c) + f(t-x/c)$$

$$Q = Q_0 - \frac{g \cdot s}{c} [F(t+x/c) - F(t-x/c)]$$

il reste de déterminer f et F suivant les conditions initiales et aux limites. Cette méthode a été abandonnée, quand les moyens de calcul numériques étaient apparus et ont été développés, en plus elle ne présente pas la réalité grâce à la négligence des pertes de charge. *on néglige*

## 2) METHODE GRAPHIQUE:

LA methode graphique permet d'aboutir d'une manière très élégante et relativement simple à une solution générale des problemes plus compliqués, en plus elle nous permet de comprendre le phenomene de façon très simple. La methode a été crée independamment l'un de l'autre par Schneider(1929) et Bergeron (1931) en France et qui porte son nom "methode de Bergeron" pour bien comprendre cette methode , les auteurs sont partis de l'équation :

$$dH + \frac{1}{g} \frac{dx}{dt} dV = 0$$

Après intégration de cette équation le long de la conduite L entre A et B on obtient :

$$H_A + \frac{1}{g} C \cdot V_A = H_B + \frac{1}{g} C \cdot V_B \quad \text{écoulement de A vers B}$$

$$H_B - \frac{C}{g} V_A = H_B - \frac{C}{g} V_B \quad \text{écoulement de B vers A}$$

Cette methode consiste à tracer l'épure de Bergeron définie par la courbe  $H(Q)$  par tous les points de discrétisation .

Cette methode a pour avantage d'être la base de la methode des caractéristiques . mais elle a été abandonnée , lors de l'apparition des methodes numériques plus performantes . aussi la methode devient très délicate lorsque le nombre de conduites dans le réseau devient très important.

## 3) METHODE DES CARACTERISTIQUES :

La methode des caractéristiques consiste à écrire les deux équations aux dérivées partielles du mouvement dans les axes liés aux trajectoires des perturbations . Ces équations sont exprimées en forme de differences finies en utilisant un intervalle de temps  $dt$  bien spécifié, les solutions son

obtenus à l'aide d'un ordinateur .La méthode présente certains avantages dont on citera:

- les conditions aux limites sont facilement programmables .
- la stabilité de la solution est assurée.
- les systèmes les plus complexes peuvent être manipulés facilement.
- La programmation des équations est très aisée.

En effet lorsqu'un réseau multi-branches est composé de plusieurs conduites avec des propriétés (C,D,L,etc..)très différentes,ou lorsque les termes non lineaires des équations principales sont importants,ou encore dans le cas des écoulements diphasiques,ce qui nécessite d'utiliser autres méthodes qui peuvent résoudre ce problème ( schemas explicites ou implicites ) .

#### 4)METHODE DES DIFFERENCES FINIES:

A)SCHEMAS IMPLICITES:Les schémas implicites calculent les caractéristiques de l'écoulement à un instant donné,en fonction des caractéristiques de l'écoulement à ce même instant .ces schémas ont été appliqués dans plusieurs domaines,( l'aerodynamique , coup de belier dans les réseaux simples .leurs résultats démontrent clairement l'intérêt de ces méthodes .En plus ,elles nous permettent de prendre les termes non linéaires,qui apparaissent dans les équations principales .Pratiquement ce modèle a été mis en oeuvre pour étudier l'écoulement non permanent du liquide dans des réseaux multi branches avec différents appareils de protection.

#### CONCLUSION:

On comprendra donc qu'il existe plusieurs méthodes numériques qui,lorsqu'appliquées avec soin,permettent de calculer les conditions transitoires d'un écoulement.on s'intéresse ici d'étudier les schémas explicites qui sont favorables.

## SCHEMAS EXPLICITES

I/METHODE DES DIFFERENCES FINIES: La méthode des différences finies

consiste à estimer par approximation les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions à partir d'une ou plusieurs conditions, cette approximation aux limites. Cette approximation représente une discrétisation du domaine et de remplacer l'opérateur différentiel par une différence finie.

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$$

L'ordre d'approximation d'une méthode aux différences finies se détermine à l'aide de la formule de TAYLOR

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + g(x)$$

\* Si on remplace l'opérateur différentiel par différence finies on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}$$

de même on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2} - \Delta x^2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1} - 2u_i}{\Delta x^2} + g(\Delta x^2)$$

Difference finies arriere : l'operateur est ( $\nabla$ ) telque pour toute

fonction derivable on a

$$\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$$

Nous avons obtenus ça par le developpement de TAYLOR

$$y(x-k) = y(x) - h \frac{\partial y_n}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} + \dots$$

$$y_{n-1} = y_n - h \frac{\partial y_n}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}$$

Si on negligie le terme  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  on obtient :

$$\boxed{Dy_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\nabla y_n}{h}}$$

II) SCHEMAS EXPLICITES : plusieurs schemas du second ordre ont ete developpes dans le calcul de dynamique de fluides pour la solution des equations aux derivees partielles de type hyperbolique. Parmi ces schemas Trois sont choisis ici grace a ses implicites. Le premier schema est celle de MACCORMACK, le deuxieme est de LAMBDA et enfin le schema de GABUTTI.

## 1) SCHEMA DE MACCORMACK :

Le schéma de MACCORMACK est un schéma du second ordre dans l'espace et dans le temps. Il contient deux pas : prédicteur - correcteur dans chaque pas. Un type de différence finie est utilisé. Deux alternances sont utilisées. Dans la première alternance on utilise la différence finie avant dans l'étape de prédiction, par contre dans l'étape de correction la différence finie a été utilisée. Quant à la seconde alternance on utilise la différence arrière dans l'étape de prédiction, et la différence finie avant dans l'étape de correction. MACCORMACK recommande d'utiliser les deux alternances successivement. c'est à dire la deuxième alternance pour le prochain pas et ainsi de suite. La conduite a pour longueur  $L$  divisé en  $n$  pas de distance  $\Delta x$ . Le premier noeud est de numéro 1 et la dernière est de numéro  $n+1$ . les valeurs de  $H$  et  $Q$  sont connues au temps  $J \cdot dt$  (à partir des conditions initiales) et sont déterminées au temps  $t+dt$  (en  $(j+1)dt$ ). Comme le montre la figure

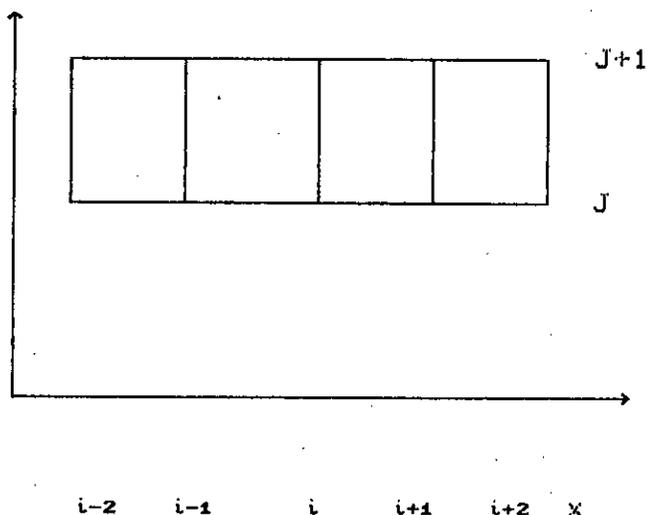


fig : SCHEMA DE DISCRETISATION DU DOMAINE

## A) SCHEMA DE MACCORMACK :

--1<sup>ere</sup> Alternance

Partie prédicteur :

$$\begin{aligned} H_i^* &= H_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{c^2}{g \cdot s} (Q_{i+1}^j - Q_i^j) \\ Q_i^* &= Q_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} g \cdot s \cdot (H_{i+1}^j - H_i^j) - R \cdot |Q_i^j| \cdot Q_i^j \end{aligned} \quad \left| \quad i=1, 2, \dots, n \right.$$

Partie correcteur:

$$\begin{aligned} H_i^{j+1} &= \frac{1}{2} \left\{ H_i^j + H_i^* - \frac{\Delta t \cdot c^2}{g \cdot s} (Q_{i-1}^* - Q_{i-1}^j) \right\} \\ Q_i^{j+1} &= \frac{1}{2} \left\{ Q_i^j + Q_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot g \cdot s \cdot (H_i^* - H_{i-1}^*) - R |Q_i^*| \cdot Q_i^* \right\} \end{aligned} \quad \left| \quad i=2, \dots, n+1 \right.$$

-2<sup>ieme</sup> ALTERNANCE:

Partie prédicteur:

$$\begin{aligned} H_i^* &= H_i^j - \frac{\Delta t \cdot c^2}{\Delta x \cdot g \cdot s} (Q_i^j - Q_{i-1}^j) \\ Q_i^* &= Q_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot g \cdot s \cdot (H_i^j - H_{i-1}^j) - R |Q_i^j| \cdot Q_i^j \end{aligned} \quad \left| \quad i=2, \dots, n+1 \right.$$

Partie Correcteur:

$$\begin{aligned} H_i^{j+1} &= \frac{1}{2} \left[ H_i^j + H_i^* - \frac{\Delta t \cdot c^2}{\Delta x \cdot g \cdot s} (Q_{i+1}^* - Q_i^*) \right] \\ Q_i^{j+1} &= \frac{1}{2} \left[ Q_i^j + Q_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} (H_{i+1}^* - H_i^*) - R |Q_i^*| \cdot Q_i^* \right] \end{aligned} \quad \left| \quad i=1, \dots, n \right.$$

2) SCHEMA DE LAMBDA: Dans le schéma de LAMBDA les équations sont transformées les axes de perturbations afin d'utiliser les différences finies durant les parties de prédiction et de correction.

On a les équations qui régissent le phénomène de coup de bélier :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{C^2}{g \cdot s} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + g \cdot s \frac{\partial H}{\partial x} + R |Q| \cdot Q = 0 \quad (2)$$

*e N* Multipliant l'équation (2) par un nombre  $\eta$  et en l'additionnant avec

l'équation (1) on obtient:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial t} + \eta \cdot g \cdot s \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \eta \cdot \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{C^2}{\eta \cdot g \cdot s} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + R \cdot |Q| \cdot Q = 0 \quad (3)$$

Posons:

$$\eta \cdot g \cdot s = \frac{dx}{dt} = \frac{C^2}{\eta \cdot g \cdot s}$$

donc

$$\eta = \pm \frac{C}{g \cdot s}$$

ce sont les directions des caractéristiques

posons :  $\lambda = \frac{dx}{dt}$

$$\lambda^+ = \frac{dx}{dt} = C \quad \text{caractéristique positive}$$

$$\lambda^- = \frac{dx}{dt} = -C \quad \text{caractéristique négative}$$

donc l'équation (3) devient:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial H^+}{\partial x} \right) + \frac{C}{g \cdot s} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda^+ \frac{\partial Q^+}{\partial x} \right) + \frac{C \cdot R}{g \cdot s} \cdot Q \cdot |Q| = 0 \quad (8)$$

$$\left( \frac{\partial H}{\partial t} + \lambda^- \frac{\partial H^-}{\partial x} \right) - \frac{C}{g \cdot s} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda^- \frac{\partial Q^-}{\partial x} \right) - \frac{C \cdot R}{g \cdot s} \cdot Q \cdot |Q| = 0 \quad (9)$$

Soustrayant l'équation (9) de l'équation (8) et en multipliant par  $\frac{g.s}{C}$  nous obtenons:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{g.s}{C} (\lambda^+ \frac{\partial H^+}{\partial x} - \lambda^- \frac{\partial H^-}{\partial x}) + \frac{1}{2} (\lambda^+ \frac{\partial Q^+}{\partial x} + \lambda^- \frac{\partial Q^-}{\partial x}) + R.Q. |Q| = 0 \quad (10)$$

en additionnant l'équation (8) et (9) nous trouvons:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} (\lambda^+ \frac{\partial H^+}{\partial x} + \lambda^- \frac{\partial H^-}{\partial x}) + \frac{1}{2} \frac{C}{g.s} (\lambda^+ \frac{\partial Q^+}{\partial x} - \lambda^- \frac{\partial Q^-}{\partial x}) = 0 \quad (11)$$

Dans ce schema les dérivées partielles sont remplacées par les approximations de difference finie .

ALGORITHME DU SCHEMA DE LAMBDA :

1) PARTIE DE PREDECTION :

$$\left. \begin{aligned} f_x^+ &= \frac{2f_i^j - 3f_{i-1}^j + f_{i-2}^j}{\Delta x} \\ f_x^- &= \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x} \end{aligned} \right\} f=H, Q$$

$$Q_i^* = Q_i^j - \Delta t \left\{ \frac{1}{2} \frac{g.s}{C} (\lambda^+ H_x^+ - \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} (\lambda^+ Q_x^+ + \lambda^- Q_x^-) + R.Q. |Q_i^j| \right\}$$

$$H_i^* = H_i^j - \Delta t \left\{ \frac{1}{2} (\lambda^+ H_x^+ + \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} \frac{C}{g.s} (\lambda^+ Q_x^+ - \lambda^- Q_x^-) \right\}$$

Partie de correction :

$$f_x^+ = \frac{f_i^* - f_{i-1}^*}{\Delta x}$$

$$f_x^- = \frac{-2f_i^* + 3f_{i+1}^* - f_{i+2}^*}{\Delta x}$$

$$Q_i^{j+1} = \frac{1}{2} \{ Q_i^j + Q_i^* - \Delta t \left\{ \frac{1}{2} \frac{g}{c} (\lambda^+ H_x^+ - \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} (\lambda^+ Q_x^+ + \lambda^- Q_x^-) + R Q_i^* |Q_i^*| \right\} \}$$

$$H_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left\{ H_i^j + H_i^* - \Delta t \left[ \frac{1}{2} (\lambda^+ H_x^+ + \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} \frac{c}{g} (\lambda^+ Q_x^+ - \lambda^- Q_x^-) \right] \right\}$$

3) SCHEMA DE GABUTTI: Ce schéma est similaire au schéma de LAMBDA

ALGORITHME DU SCHEMA DE GABUTTI :

1) PARTIE DE PREDECTION :

PREMIERE ETAPE

$$\begin{array}{l} f_x^+ = \frac{f_i^j - f_{i-1}^j}{\Delta x} \\ f_x^- = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x} \end{array} \quad \left| \quad f = H, Q \right.$$

$$\overline{Q}_i = Q_i^j - \Delta t \left\{ \frac{1}{2} \frac{g}{c} (\lambda^+ H_x^+ - \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} (\lambda^+ Q_x^+ + \lambda^- Q_x^-) + R Q_i^j |Q_i^j| \right\}$$

$$\overline{H}_i = H_i^j - \Delta t \left\{ \frac{1}{2} (\lambda^+ H_x^+ + \lambda^- H_x^-) + \frac{1}{2} \frac{c}{g} (\lambda^+ Q_x^+ - \lambda^- Q_x^-) \right\}$$

DEUXIEME ETAPE:

$$f_x^+ = \frac{2 \cdot f_i^j - 3 \cdot f_{i+1}^j + f_{i+2}^j}{\Delta x}$$

$$f_x^- = \frac{-2f_i^j + 3f_{i+1}^j - f_{i+2}^j}{\Delta x}$$

f=H, Q

et on détermine  $Q_i^*$  et  $H_i^*$  qui sont les memes que dans les chémas de Lambda

PARTIE DE PCORRECTION:

$$\overline{f_x^+} = \frac{\overline{f_i} - \overline{f_{i-1}}}{\Delta x}$$

$$\overline{f_x^-} = \frac{\overline{f_{i+1}} - \overline{f_i}}{\Delta x}$$

Aprés on détermine d'après les équations (10), (11)  $\overline{H_i}$  et  $\overline{Q_i}$  enfin

$H_i^{j+1}$  et  $Q_i^{j+1}$  sont données par:

$$Q_i^{j+1} = \frac{1}{2} (Q_i^j + Q_i^* + Q_i - Q_i)$$

$$H_i^{j+1} = \frac{1}{2} (H_i^j + H_i^* + H_i - H_i)$$

STABILITE:

Ces schémas qui appartiennent aux schémas du type prédicteur-correcteur sont stable sous les conditions du nombre de Courant-Friedricks levy (C.F.L).

Pour les chémas explicites, les conditions de stabilité s'énoncent de la façon suivante:

Le pas de temps  $\Delta t$  doit être tel qu'une onde se propage à la vitesse  $C$ , ne parcourt pas plus d'un pas d'espace en un pas de temps.

Cette condition se traduit par

$$\Delta t \leq \frac{cn \cdot \Delta x}{\max(|V| + c)}$$

et comme  $V \ll c$  la condition devient:

$$\Delta t \leq \frac{cn \cdot \Delta x}{c}$$

si  $cn \leq 1$  les schémas de MACCORMACK ET DE GABUTTI sont stables.

si  $cn < 1$  le schéma de LAMBDA EST STABLE.

### 5) CONDITION AUX LIMITES:

#### I/INTRODUCTION :

les conditions aux limites sont des équations complémentaires et nécessaires. Chaque fois que les caractéristiques de l'écoulement se varient brusquement en un point donné de la conduite. Ce phénomène se produit au niveau d'un réservoir, d'une vanne, d'un clapet, d'un point de connection de deux conduites, et encore au niveau des pompes et des turbines hydrauliques.

#### II/AVANTAGES:

Un des avantages des conditions aux limites est de simplifier les équations du mouvement généralement difficiles à résoudre. Donc elles sont nécessaires aux problèmes numériques, surtout pour les équations différentielles et aux dérivées partielles. Les conditions aux limites généralement rencontrées en hydraulique, et qui permettront de résoudre des problèmes les contenant ensemble, on citera entre autre:

Les conditions aux limites

- d'un réservoir
- d'une vanne.

III/CONDITIONS AUX LIMITES AU NIVEAU D'UN RESERVOIR:

On supposera tout d'abord que le reservoir est de grande dimension afin de negligier la variation du niveau du plan d'eau dans celui-ci pendant le temps c'est à dire:

$$\frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{x=0} = 0, \text{ c'est à dire la charge est constante au premier point}$$

de la conduite, dans le temps

$$H(1, t) = h_0, \text{ quelque soit } t \geq 0$$

IV/CONDITIONS AUX LIMITES AU NIVEAU D'UNE VANNE:

## a) FERMETURE BRUSQUE:

la fermeture est dite brusque lorsqu'au temps  $(t = 2l/c)$  la vanne est complètement fermée. Cela signifie que le débit est nul pendant le temps:

$$q(n+1, t) = 0, \text{ quelque soit } t \geq 0.$$

pour  $t=0$ , la fermeture est instantanée

## b) FERMETURE LENTE:

une fermeture est dite lente, si la fermeture totale de la vanne a lieu au delà du temps caractéristique  $(2l/c)$ .

Le débit ne serait plus brusquement interrompu, mais varierait suivant une loi de fermeture bien précise que l'on pourra exprimer par

$$Q(n+1, t) = f(t) \cdot Q_0 \quad \text{si } t \leq t_f$$

$$Q(n+1, t) = 0 \quad \text{si } t \geq t_f$$

### V/CONDITIONS AUX LIMITES POUR LES SCHEMAS EXPLICITES:

Pour les schemas explicites dans notre etude, les equations sont appliquées à l'interieur du domaine de discretisation FIG (V.1)

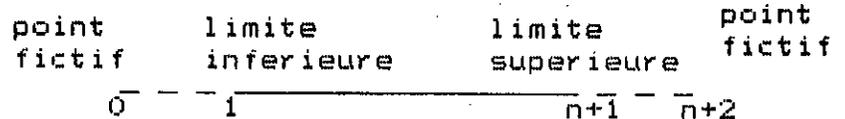


FIG (V.1)

Les conditions aux limites sont déterminées, soit en utilisant la methode des caracteristiques, soit en utilisant l'extrapolation.

#### 1) CONDITION AUX LIMITES EN UTILISANT LA METHODE DES CARACTERISTIQUES:

Au niveau du reservoir  $H(1,t)=h_0$  la charge est constante on determine le debit au point  $i=1$  à l'instant  $t$ :

$$q(1,t) = (h(1,t) - h(2,t-dt)) \cdot g \cdot s / c + q(2,t-dt) \cdot (1 - |q(2,t-dt)| \cdot t \cdot g \cdot s / c)$$

pour le point  $i=n+1$  on sait la valeur de  $q(n+1,t)$  et on determine la charge en ce point. à l'instant  $t$ :

$$H(n+1,t) = h(n,t) + q(n,t-dt) \cdot (c/g/s - |q(n,t-dt)| \cdot t) - q(n+1,t) \cdot c/g/s$$

avec  $t = r \cdot dx / g/s$

où  $r$  est la resistance de la conduite

$dx$  est le pas de longueur de la conduite.

2) EN UTILISANT L'EXTRAPOLATION:

La procédure d'extrapolation est donnée par la formule:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Dans la première alternance du schéma de McCormack, nous ne pouvons pas calculer  $h$  et  $q$  aux points  $i=n+1$  dans l'étape de prédiction, et en point  $i=1$  dans l'étape de correction, donc nous avons besoin aux points fictifs  $i=0$  et  $i=n+2$ .

Les conditions aux limites dans ces points sont déterminées en appliquant la procédure précédente qui nous donne:

$$\left. \begin{array}{l} f_{n+2}^j = 2 \cdot f_{n+1}^j - f_n^j \\ f_0^j = 2 \cdot f_1^j - f_2^j \end{array} \right| f=h, q$$

## ANALYSE NUMERIQUE DES RESULTATS

### I/ANALYSE D'UNE FERMETURE BRUSQUE DE LA VANNE :

On se propose d'étudier la surpression et la dépression dans une conduite d'adduction gravitaire, résultant de la fermeture instantanée d'une vanne se trouvant à l'extrémité aval de la conduite alimentée par un réservoir à cote constante à l'amont. puis de comparer les résultats trouvés par certaines méthodes avec ceux trouvés par (CHANDRYL)

#### 1) EXEMPLE D'APPLICATION :

Les caractéristiques de la conduite sont :

La section = 1 m<sup>2</sup>  
Célérité = 1000 m/s  
Longueur = 5000 m  
Charge = 400 m  
Débit initial = 0.981 m<sup>3</sup>/s // →

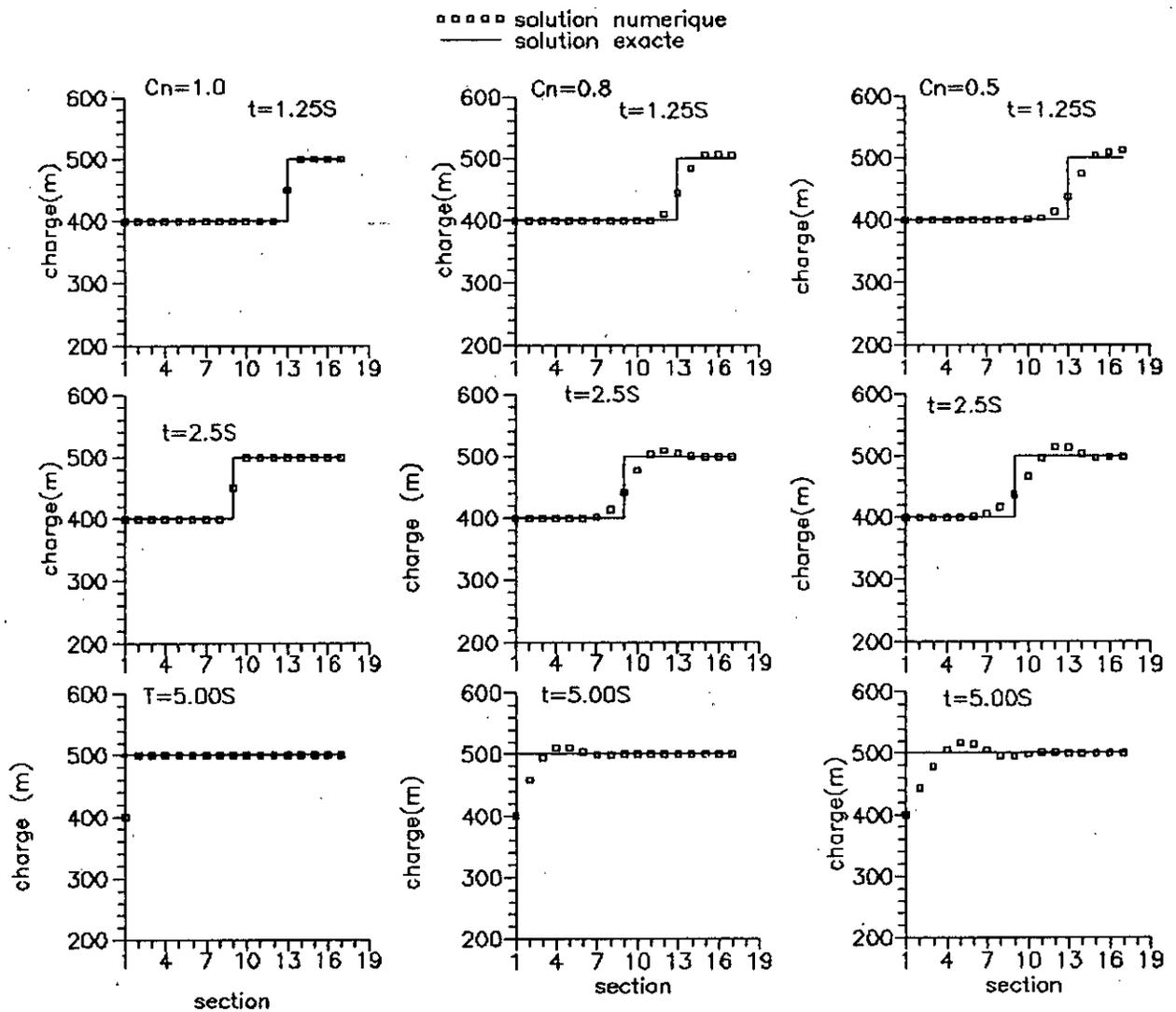
Nous présentons sur la fig(V-1) les résultats obtenus par la méthode de MOCCARMACK, sur la fig (V-2) les résultats trouvés par la méthode de GABUTTI, et sur la fig (V-3) ceux trouvés par la méthode de LAMBDA.

La perte de charge est négligeable ici pour qu'on puisse les comparer avec la solution exacte. Les figures précédentes présentent la propagation de l'onde de surpression de la vanne vers le réservoir.

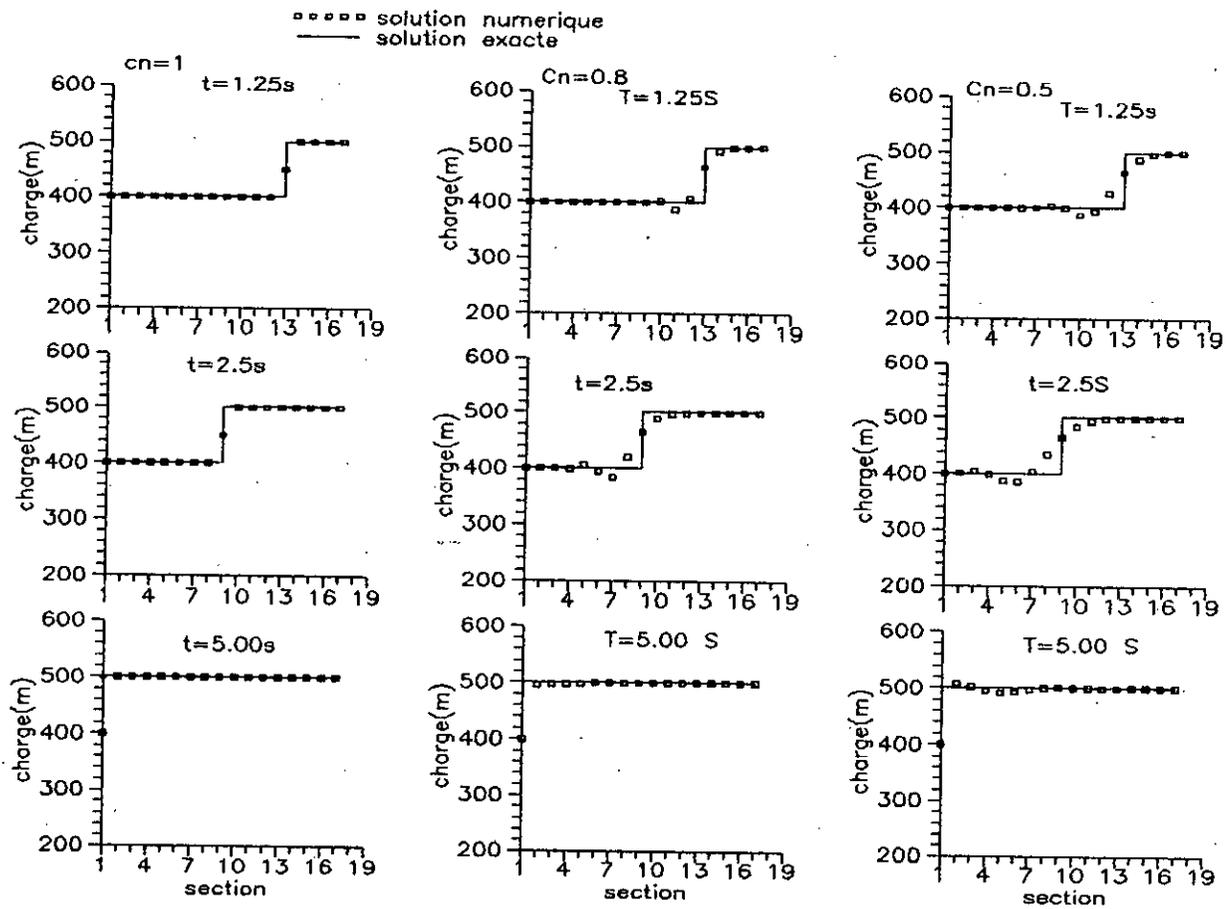
A l'instant  $t=0$ , la vanne est fermée, il y a naissance d'une onde de surpression qui se propage de la vanne vers le réservoir avec une célérité "C", et d'amplitude égale à  $(c \cdot v_0/g=100m)$ . la variation de pression est représentée en fonction de la longueur de la conduite.

Dans des instants bien définis.

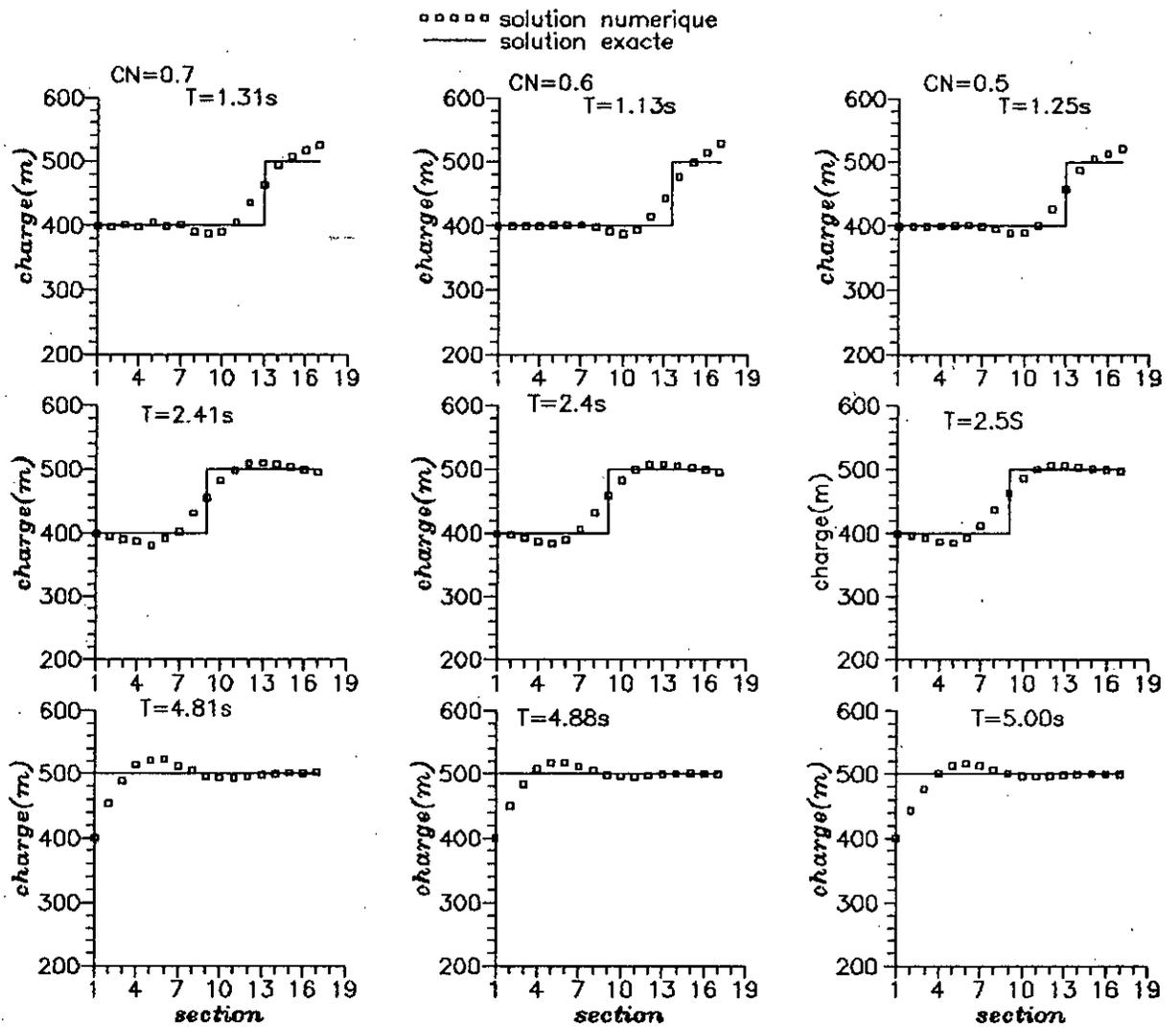
Ici, on prend  $t=1.25, 2.5, 5$  pendant un temps  $t$  de la fermeture l'onde se propage une distance  $x=c \cdot t$  qui présente la longueur de surpression.



FIG(V-1) METHODE DE MACCORMAC: COMPARAISON ENTRE SOLUTION EXACTE ET NUMERIQUE



FIG(V.2)METHODE DE GABUTTI:COMPARAISON ENTRE SOLTION EXACTE ET NUMERIQUE



fig(V-3)METHODE DE LAMBDA:COMPARAISON ENTRE SOLUTION EXACTE ET NUMERIQUE

## 2) INFLUENCE DU NOMBRE DU COURANT (CN) :

Comme on a dit dans le chapitre précédent que CN influe sur la stabilité des schémas . pour cela nous donnons des valeurs à CN , et on <sup>en</sup>registre les suppressions produites .

Pour CN=1 , les schémas de MACCORMACK et GABUTTI donnent des résultats plus au moins exactes par rapport à la solution analytique, tandis que le schéma de LAMBDA n'est pas stable. si on diminue CN, c'est à dire que CN inférieur à 1, le schéma de LAMBDA tend à se stabiliser, et donnera des valeurs plus au moins acceptables comme dans le cas de CN =0.5. <sup>Mais</sup> reste oscille autour de la solution exacte. Les schémas de MACCORMACK et GABUTTI restent plus fiables, mais moins précis que pour CN=1, c'est à dire l'erreur augmente en diminuant CN

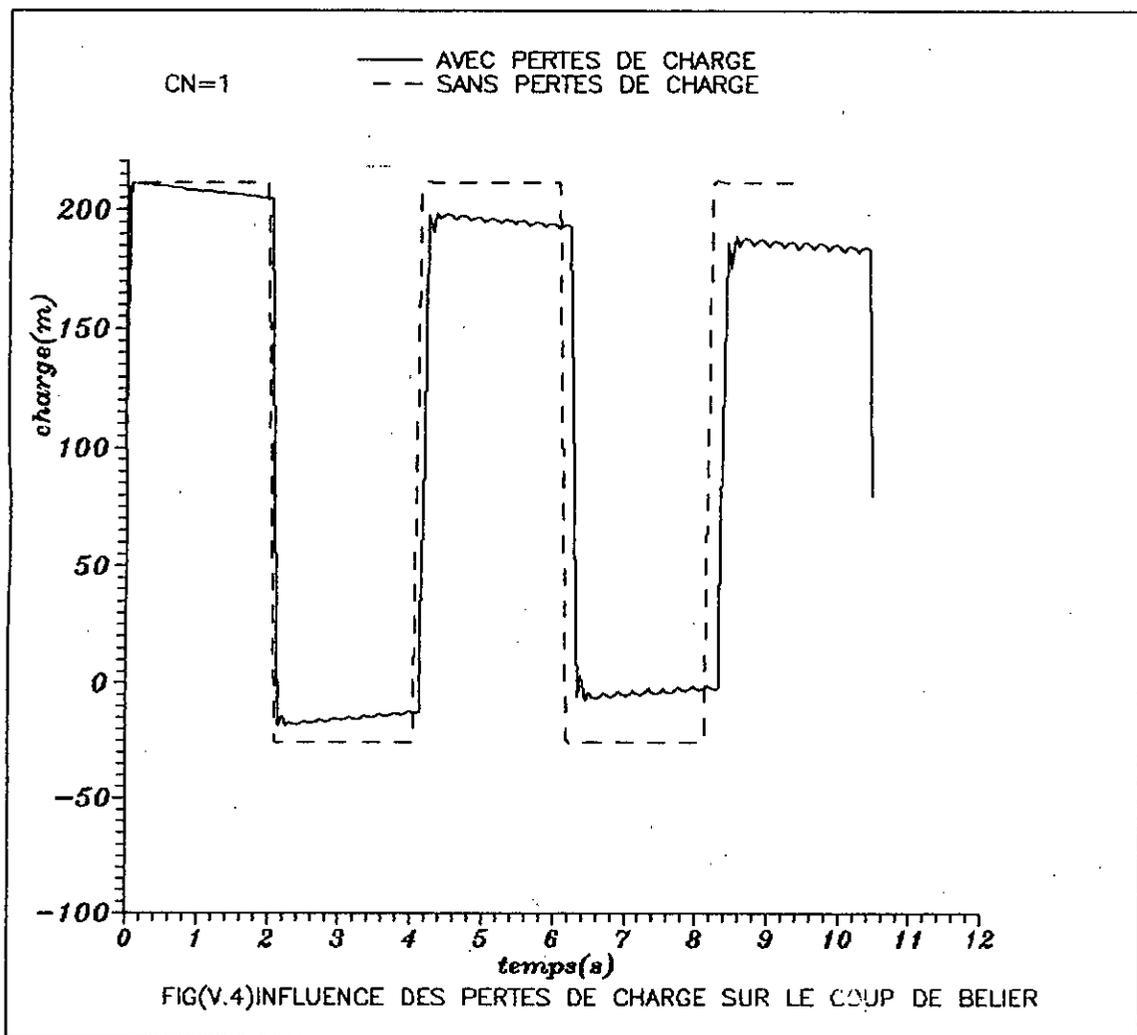
## CONCLUSION :

Nous concluons que si CN est inférieur à 1, les trois schémas sont stables, mais les résultats sont moins précis. Pour CN=1 les deux schémas (MACCORMACK et GABUTTI) donnent des bons résultats. Pour cela on choisit la méthode de MACCORMACK ou de GABUTTI dans l'étude du coup de bélier avec la valeur de CN égale à 1

## 3) INFLUENCE DES PERTES DE CHARGE SUR LE COUP DE BELIER :

les caractéristiques de la conduite sont :

- le diamètre est 0.3 m
- la longueur est 1220 m
- l'épaisseur est 0.005 m
- la conduite est en acier
- la charge au reservoir est 93 m
- la célérité de l'onde est 1164 m/s
- $f = 0.01351$



Le schéma (V-4) montre la variation de la charge à la vanne en fonction du temps pour deux cas de figures .

-Ecoulement sans pertes de charge (courbe en trait plein )

-Ecoulement avec pertes de charge (courbe en pointillet )

On constate à travers ces résultats que :

-La surpression et la dépression oscille périodiquement autour de la charge statique, cette période est égale à  $AL/C$

-Pour l'écoulement sans pertes de charges, la surpression et la dépression restent constantés au niveau de la vanne . Cette surpression (dépression )reste la même sur toute la conduite et égale à  $C \cdot VO/g$

-Pour l'écoulement avec pertes de charges. la surpression et la dépression augmentent respectivement de 0 à  $2L/C$  et de  $2L/C$  à  $4L/C$  .

cette augmentation est égale à  $(F.L.V^2/2.G.D)$  . Donc le rôle de perte de charge est d'amortir progressivement le phénomène. Ceci est dûe à la perte d'énergie cinétique par frottement . donc l'énergie potentiel diminue .

#### 4) INFLUENCE DU MATERIAUX SUR LE COUP DE BELIER :

Pour montrer l'influence des matériaux sur le coup de bélier, on a considéré deux conduites l'une en Fonte et l'autre en Acier de caractéristiquea identiques :

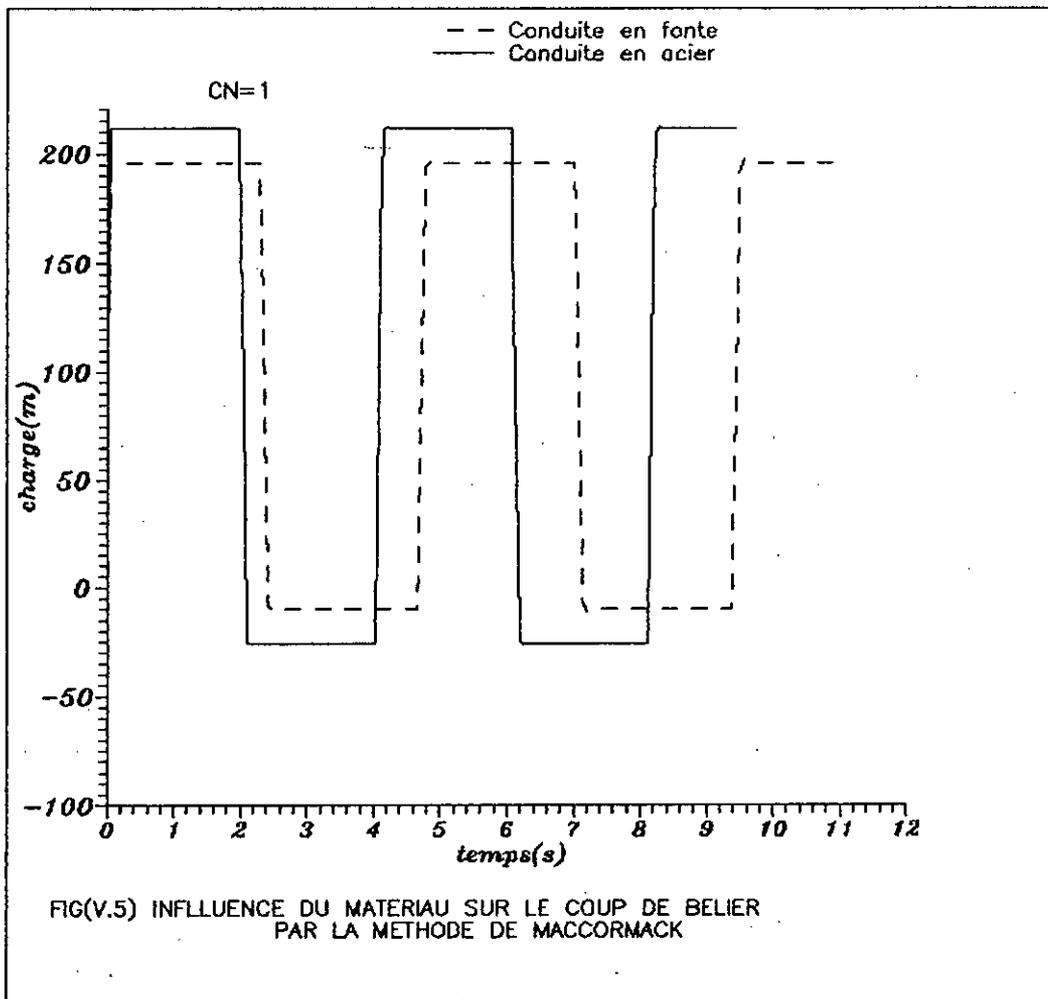
-conduite en Fonte  $E=1.2.10^{11}$  pa ce qui donne  $C=1008$  m/s

-conduite en Acier  $E=2.10^{11}$  pa ce qui donne  $c=1164$  m/s

On constate que :

- La surpression et la dépression pour la conduite en Acier sont plus importantes que celles de la conduite de la Fonte .

- La période des oscillation est plus grande poue la conduite en Fonte .



Ces deux résultats s'expliquent par le fait que :  
 la célérité est proportionnelle au module d'élasticité. donc ce dernier est proportionnelle à la surpression maximale. quand E augmente  $\Delta H$  augmente .  
 et inversement proportionnel à la période des oscillations  $T. 2L/c$   
 E augmente T diminue. d'où on a les résultats précédents fig (V-5)

#### 5) INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DE LA CONDUITE SUR LE COUP DE BELIER :

La figure (V-6) montre la variation de la surpression et de la dépression en fonction du temps. Pour trois épaisseurs différentes (0.002 m, 0.005 m, 0.01 m) en maintenant les caractéristiques en Acier constantes.

-Épaisseur  $e=0.002$  m donne  $C=918$  m/s

-Épaisseur  $e=0.005$  m donne  $C=1164$  m/s

-Épaisseur  $e=0.01$  m donne  $C=1303$  m/s

On constate que lorsque l'épaisseur augmente, la surpression (dépression) augmente (diminue) et la période des oscillations diminue. Ceci s'explique par le fait que C est proportionnelle à l'épaisseur de la conduite.

#### 6) INFLUENCE DU RÉGIME D'ÉCOULEMENT :

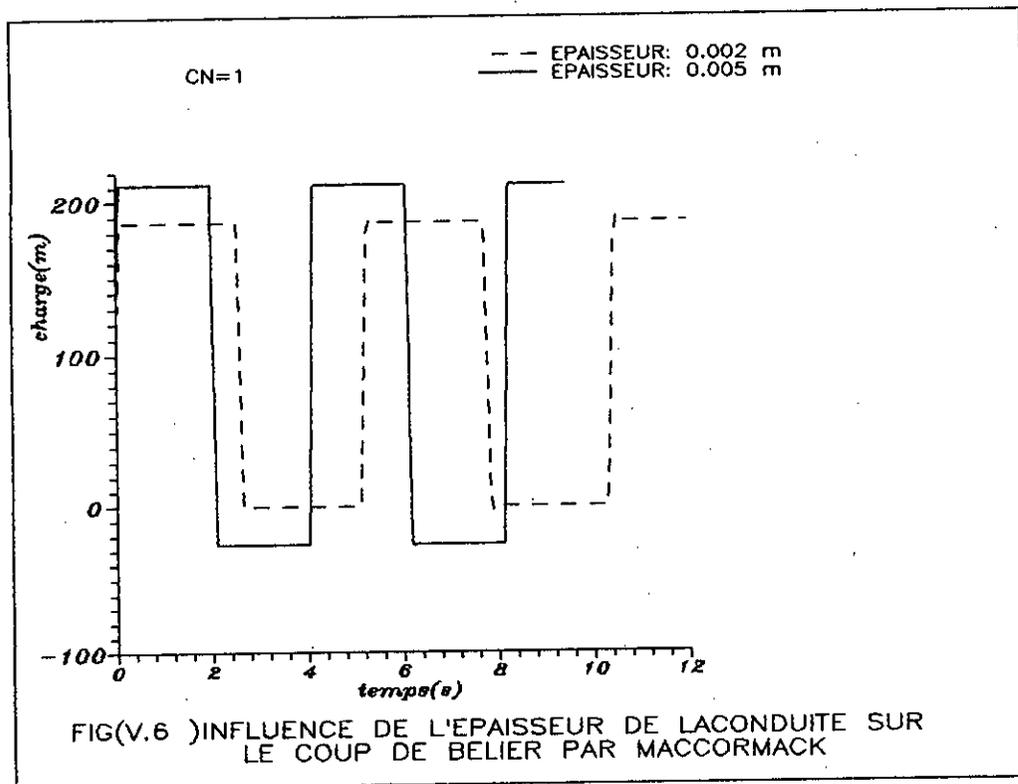
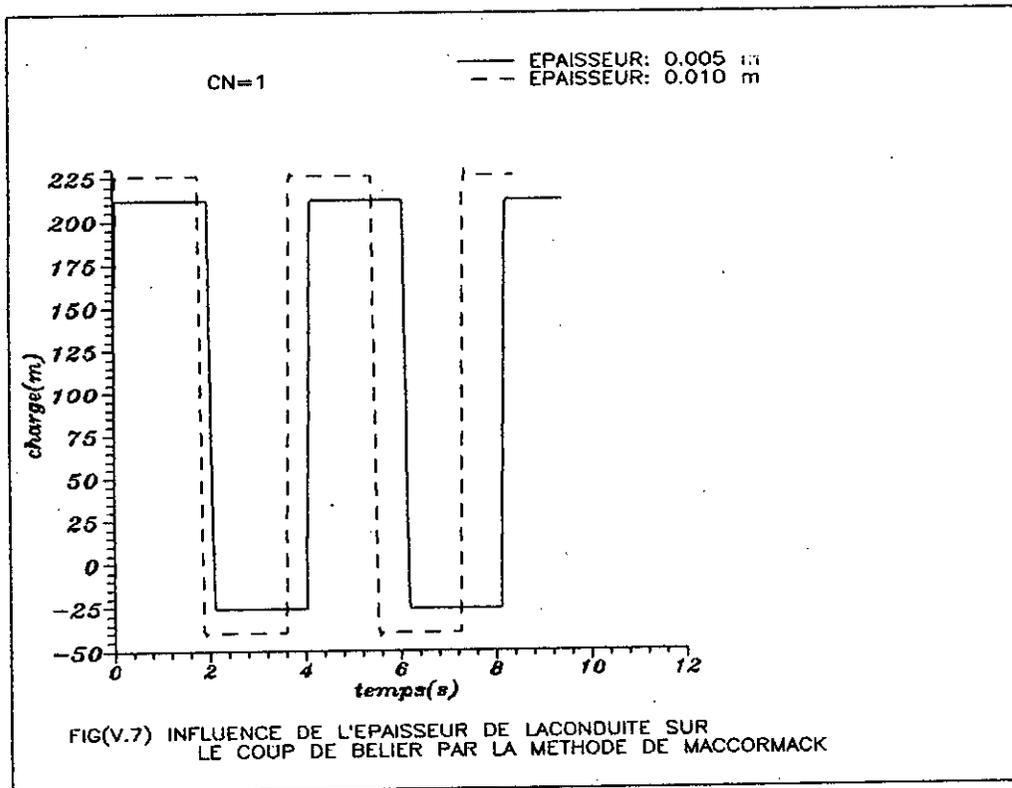
L'écoulement dans une conduite en présence du coup de bélier est turbulent. Pour cela on étudie les deux régimes d'écoulement

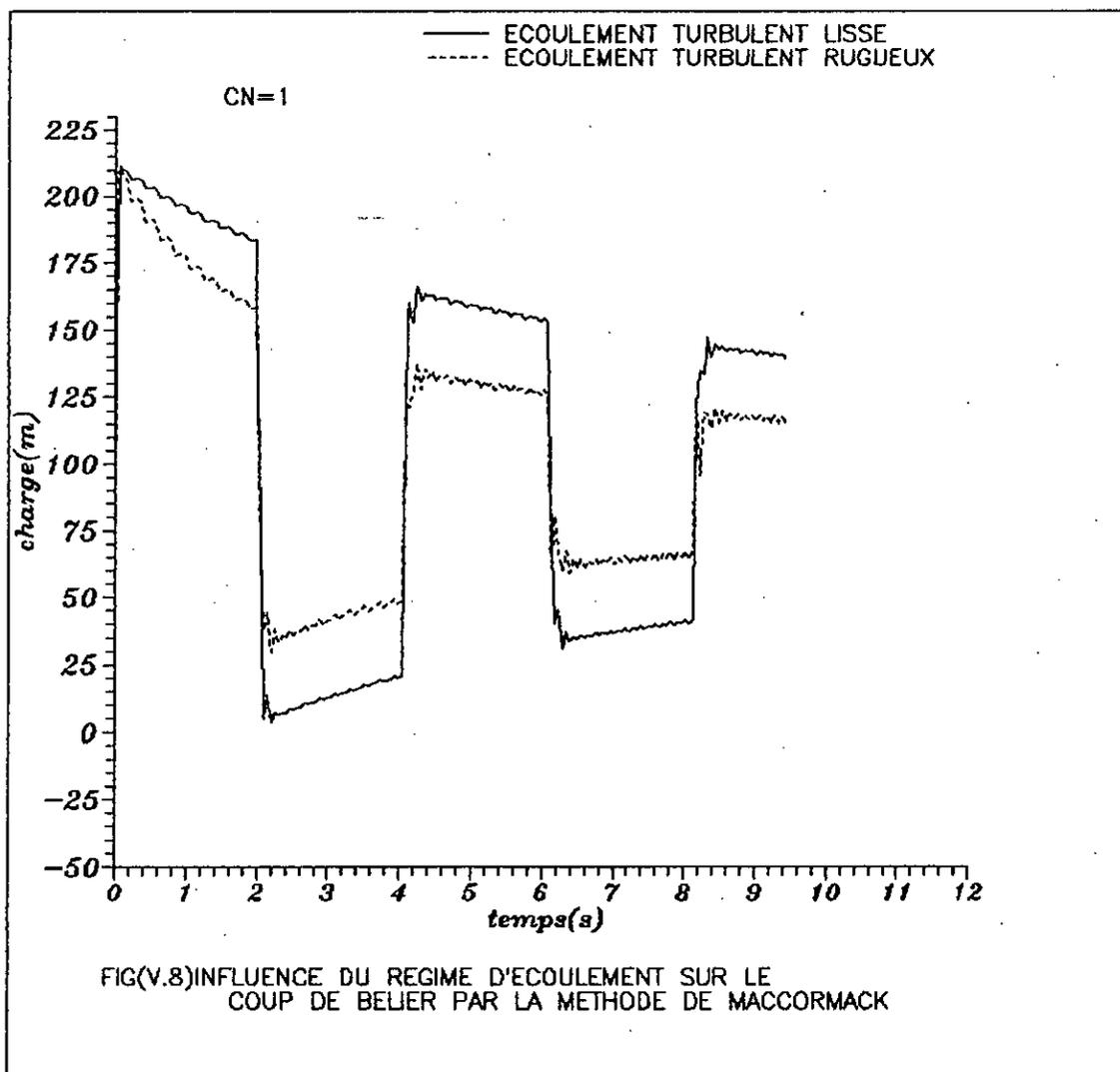
-turbulent lisse

-turbulent rugueux

La figure (V-7) qui représente ces deux cas, montre la variation de la charge à la vanne en fonction du temps. On constate que :

-L'amortissement du phénomène est beaucoup plus important pour l'écoulement turbulent rugueux. Ceci s'explique par le fait que le deuxième type d'écoulement présente un coefficient de pertes de charges plus important.





-Pour l'écoulement turbulent lisse  $f$  est exprimée par la formule de BLASIUS

$$f = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} = 0.01351$$

-Pour l'écoulement turbulent rugueux :  $f$  est donné par la formule de NIKURADSE :

$$f = 8.9 \left[ 0.000253 + \frac{0.0000647}{D} \right] = 0.010367$$

## II) ANALYSE D'UNE FERMETURE LENTE D'UNE VANNE :

Pour pouvoir comparer nos résultats avec ceux trouvés par d'autres chercheurs (1) nous avons étudié le cas d'une conduite de caractéristiques :

- Longueur est 600 m
- diamètre est 0.5 m
- la charge initial est 150 m

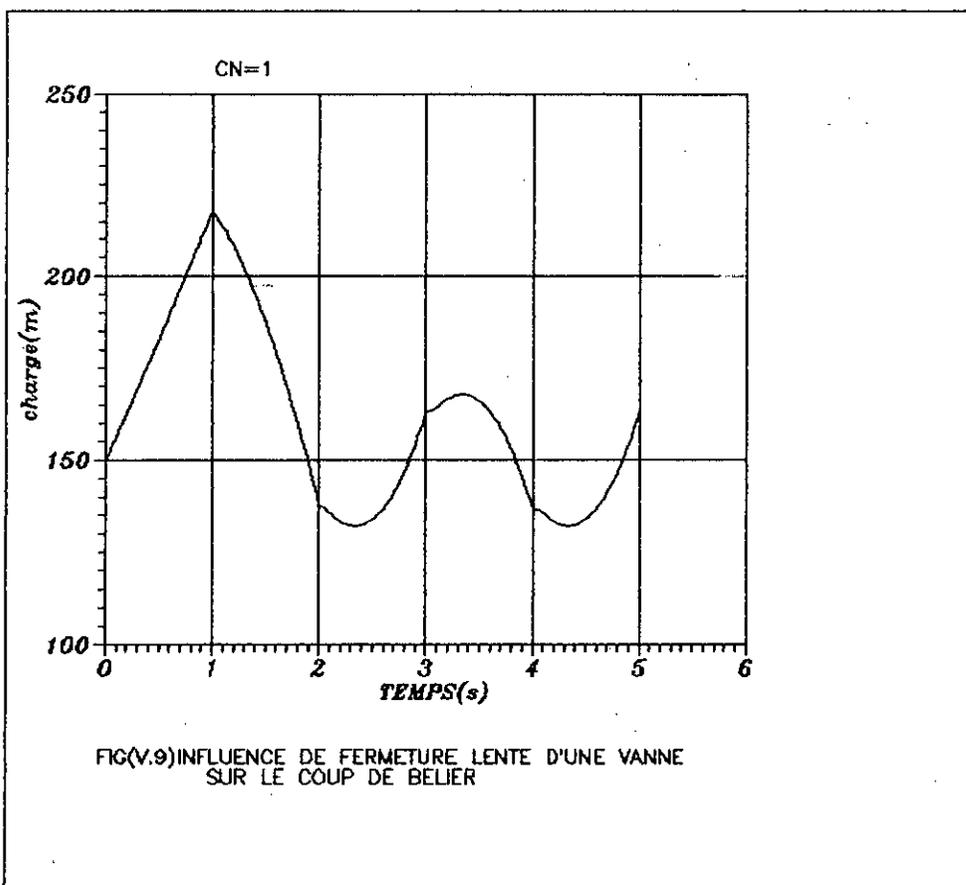
la fermeture de la vanne s'effectue suivant la loi  $(1-t/T_m)^b$  avec un temps de manoeuvre de 2.1s ou  $1.4 < b < 1.6$

On choisit  $b=1.5$  la célérité des ondes  $C=1200$  m/s.

Nous représenterons sur la figure (V-B) nos résultats. on voit sur la figure :

-La surpression et la dépression présentées sur les deux figures oscillent autour de la charge statique.

-La charge augmente depuis l'état permanent jusqu'à la surpression maximale qui est atteinte juste avant la fermeture totale de la vanne. Après ce temps le phénomène continue à osciller autour de la charge statique avec une période de  $4L/C$ .



## SYSTEMES DE PROTECTION

### INTRODUCTION:

les coups de bélier provoqués par des variations rapides du débit peuvent être dus à des manoeuvres de vanne, normales ou incorrectes, qui résultent des variations de pression, qui peuvent conduire à un aplatissement de la conduite, si celle-ci ne présente pas une épaisseur suffisante. puisque ces variations de pression sont dues à des variations du débit, un appareil anti bélier cherche à minimiser ces variations de pression en compensant partiellement ces variations. Il existe plusieurs sortes d'appareils pour se protéger contre le coup de bélier: des anti-béliers spécifiques, qui permettent de combattre un seul de ces risques, et d'autres qui ont un caractère universel, sous réserve de leur emplacement correct.

I/ANTIBELIERS SPECIFIQUES: Pour lutter contre les coups de bélier dus à la fermeture de la vanne d'alimentation, il convient de limiter la vitesse de fermeture de celle-ci. Cette solution, qui ne protège pas contre l'arrêt intempéstif d'une pompe.

II/ANTIBELIER NON SPECIFIQUE: Ce sont les appareils les plus utilisés dans la pratique, parmi ces appareils on citera:

- Soupapes de décharge
- Cheminée d'équilibre
- réservoir d'air

Nous nous intéresserons ici plus particulièrement à deux appareils antibéliers qu'on rencontre fréquemment: les cheminées d'équilibre et les réservoirs d'air.

1) SOUPAPES DE DECHARGE: Une soupape de décharge est un appareil qui fait intervenir un organe mécanique, un ressort qui par sa compression, obture en exploitation normale, un orifice placé sur la conduite au point à protéger. donc elle consiste à dévier un certain débit à l'extérieur de la conduite à protéger dès que la pression atteint une valeur 1.04 à 1.1 de la pression maximale admissible.

2) CHEMINEE D'EQUILIBRE: La cheminée d'équilibre n'entre en fonction que lorsqu'il se produit une variation du débit dans le réseau.

Les calculs usuels de chambres d'équilibre sont basés sur le phénomène d'oscillation en masse qui ne donnent qu'une image simplifiée de l'écoulement en régime transitoire car on y admet que l'eau est incompressible et l'on néglige la déformation de la paroi de la conduite .

Par contre les équations du coup de bélier d'onde représentent une image précise de l'écoulement en régime transitoire dans les aductions en charge chaque changement du régime d'écoulement, si infime soit-il, est effectué par les ondes du coup de bélier. nous allons présenter ici, le calcul par la méthode des oscillations en masse.

a) CALCUL DU CHEMINEE D'EQUILIBRE BASE SUR LE PHENOMENE D'OSCILLATION EN MASSE:

#### HYPOTHESES:

- le fluide est incompressible
- la conduite est rigide
- l'inertie du fluide dans le réservoir est négligeable vis à vis de celle du liquide dans la conduite
- la vitesse du groupe reste constante

b) EQUATION DE CONTINUITE: D'après la loi de conservation la masse dans la cheminée d'équilibre:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{q_c}{A_{ce}} \quad (\text{VI.2})$$

$q_c$ : débit entrant ou sortant de cheminée d'équilibre

$A_{ce}$ : section de la cheminée

$Z$ : hauteur produite dans la cheminée pendant l'oscillation

c) EQUATION DE CONSERVATION DU MOUVEMENT: D'après la loi de NEWTON appliquée à la colonne de l'eau de la conduite on a

$$-\frac{1}{g \cdot s} \frac{dq_c}{dt} = -(Z + k \cdot |q_c| \cdot q_c) \quad (\text{VI.2})$$

où  $k$  est un coefficient qui regroupe les pertes de charge dues au frottements et à l'orifice.

si on néglige ces deux effets, alors on peut intégrer les équations analytiquement, en posant comme conditions initiales à  $t=0$  que:

$$Z=0 \quad \text{et} \quad \frac{dZ}{dt} = \frac{q_0}{A_{ce}} \quad \text{on trouve alors que}$$

$$Z = q_0 \sqrt{l/g \cdot A_{ce} \cdot A_c} \sin \sqrt{g \cdot A_c / l \cdot A_{ce}} \cdot t$$

On voit donc que l'amplitude des oscillations de masse est fonction du débit initial, de la longueur et de l'aire de la conduite et de la cheminée. La fréquence ou la pulsation de ces oscillations est fonction de l'aire et de la longueur de la conduite, ainsi de l'aire de la cheminée.

2°) CALCUL BASE SUR LE PHENOMENE DU COUP DE BELIER D'ONDE: Nous rappelons d'abord les bases des calculs. Partant d'un régime permanent, nous analyserons l'écoulement dans l'adduction à la suite d'une manoeuvre quelconque simple ou combinée du vannage.

Nous tiendrons en compte:

- Des lois de manoeuvres du vannage;
- Des caractéristiques hydrauliques de la turbine ou de la pompe .
- Des pertes de charges dues aux frottements.

les étapes de calculs sont:

- conditions initiales dans l'adduction en admettant une valeur au temps zéro soit du débit de la turbine soit de l'ouverture du vannage.
- Conditions aux limites calculées par la méthode des caractéristiques ou la méthode de l'extrapolation.

3) RESERVOIR D'AIR: Un réservoir à air a aussi pour effet d'amortir les variations du débit dans le système, en se vidangeant et se remplissant partiellement. Dans les deux cas, la variation du niveau d'eau dans le réservoir occasionne une variation du volume et de la pression d'air dans la partie supérieure du réservoir. En acceptant que l'air se comporte comme un gaz parfait, on peut écrire la relation suivante:

$$H_{air} \cdot V_{air}^m = cte \quad (VI.3)$$

où  $H_{air}$  est la pression absolue de l'air (en mètre d'eau)

$V_{air}$  est le volume d'air (en  $m^3$ )

$m$  est l'exposant de l'équation polytropique des gaz (en général on retient une valeur de 1.2)

En faisant le meme raisonnement qu'à la section précédente, on peut formuler les équations suivantes:

1) EQUATION DE CONTINUITÉ:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{q_c}{Ar} \quad (\text{VI.4})$$

2) EQUATION DE CONSERVATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT:

$$\frac{dq_c}{dt} = \frac{g \cdot Ac}{l} \cdot (Z - k \cdot |q_c| \cdot q_c - H_{air}) \quad (\text{VI.5})$$

Ces deux équations peuvent être intégrées numériquement par des méthodes numériques usuelles, comme celle de Runge-Kutta par exemple.

3) MODELE DU CALCUL SIMPLIFIE DU RESERVOIR D'AIR: En faisant abstraction des pertes de charges dans la conduite de refoulement et en considérant le phénomène comme oscillation en masse.

A. Vibert arrive à une expression relativement simple qui donne le volume  $U_0$  de l'air dans le réservoir en régime permanent.

En marche normale, les caractéristiques de l'air dans le réservoir d'air sont données par Zoet  $U_0$ . Zo étant la pression absolue exprimée en mètres d'eau. A la fin de dépression, première phase du phénomène, l'air occupe un volume plus grand et sa pression sera donc la plus faible; soit  $Z_{min}$  cette pression absolue. A la fin de la surpression on enregistre une pression d'air  $Z_{max}$ .

L'expression donnant  $U_0$  est la suivante:

$$U_0 = \frac{V^2}{2 \cdot g \cdot Z_0} \frac{1 \cdot A_c}{f\left(\frac{Z_0}{Z_{\min}}\right)}$$

$U_0$  = volume d'air ( $m^3$ ),  $L$  = longueur de la conduite en m  
 $A_c$  = section de la conduite en  $m^2$

$$f\left(\frac{Z}{Z_0}\right) = \frac{Z}{Z_0} - 1 - \log\left(\frac{Z_0}{Z_{\min}}\right)$$

Cette expression donnant  $U_0$  a fait l'objet d'un abaque de A. Vibert et qui est donné planche (xxVII) voir annexe.

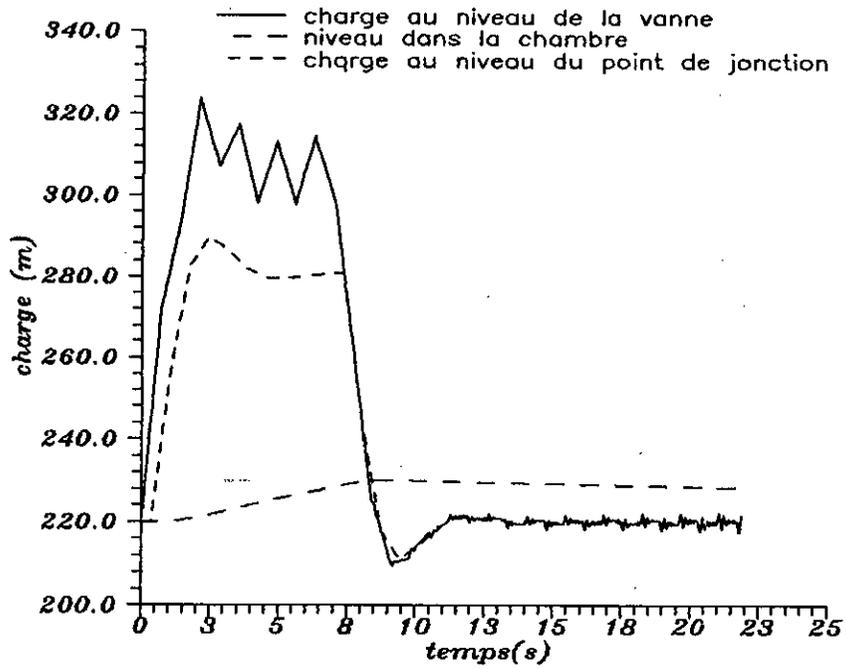
Pour l'établissement de cet abaque, la formule a été mise sous la forme suivante:

$$\frac{U_0}{1 \cdot A_c} = \frac{V}{2 \cdot g} \frac{1}{Z_0} \frac{1^2}{f\left(\frac{Z}{Z_0}\right)}$$

en posant  $\frac{V^2}{2 \cdot g} = h_0$  d'où

$$\frac{U_0}{1 \cdot A_c} = \frac{h_0}{Z_0} \frac{1}{f\left(\frac{Z}{Z_0}\right)}$$

CONCLUSION: dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu des méthodes de calcul du système de protection, ces méthodes simples, quoiqu'insuffisantes pour effectuer une étude complète de coups de bélier, devraient permettre à l'ingénieur-concepteur d'évaluer rapidement les ordres de grandeur en jeu et l'effet d'une modification de désign<sup>e</sup> du réseau à l'étude. *Cher*



FIG(VI.10). ANALYSE DU COUP DE BELIER AVEC SYSTEME DE PROTECTION

??

## CONCLUSION GENERALE

Le calcul du coup de bélier a beaucoup évolué dans les dernières années. L'ingénieur concepteur n'effectue habituellement plus ce type d'analyse. En effet, la complexité des problèmes que l'on traite que l'on traite maintenant exige souvent l'utilisation de programmes sophistiqués qu'on ne trouve que chez les consultants spécialisés.

Dans ce travail nous avons donné un aperçu sur les méthodes numériques de résolution, parmi ces méthodes nous avons étudié les schémas explicites de façon plus détaillée. Dans le chapitre 5 nous avons présenté les trois schémas explicites définis par Maccormack, Lambda et Gabutti. La stabilité de ces schémas est donnée par la condition sur le nombre de courant CN. Cette dernière est donnée par  $CN \leq 1$  pour les schémas de MACCORMACK ET DE GABUTTI, et  $CN < 1$  pour le schéma de LAMBDA. Nous avons trouvé que pour  $CN=1$  les schémas de MACCORMACK ET DE GABUTTI donnent des bons résultats, pour cela on a choisi le schéma de MACCORMACK pour analyser le coup de bélier en fonction des caractéristiques de la conduite et le type de la fermeture de la vanne.

En effet, en prenant en compte les considérations des coups de bélier à toute les étapes du design d'un système hydraulique, on évite de nombreux ennuis et des coûts importants. Dans le chapitre (VI) nous avons cité quelques systèmes de protection, puis nous avons donné les méthodes de calcul du coup de bélier dans la cheminée d'équilibre ou réservoir d'air, en particulier la méthode du calcul basé sur l'oscillation en masse.

Enfin les schémas explicites restent plus favorables de les appliquer dans le domaine de mécanique des fluides, et particulier dans le calcul du coup de bélier dans les réseaux qui contiennent plusieurs de conduites, où l'application de la méthode des caractéristiques est difficile.

BIBLIOGRAPHIE

- 1-CARLIER : Hydraulique générale.  
EYROLLES, PARIS (1972).
- 2-A-DUPONT : Hydraulique urbaine tome II .  
EYROLLES, PARIS (1979)
- 3-Y.OURAGH : Ecoulement forcés en hydraulique, 2<sup>ème</sup> partie  
O.P.U. (1990)
- 4-MU.hussein chan : chambre d'équilibre .  
DUNOD, PARIS (1966)
- 5-P.BEAUCHEMIN : Sciences et techniques de l'eau  
Vol 26 N°3 Août (1992)
- 6- H.CHAUDRY : Seconde-order-accumulate explicite  
M.Y.HUSSENI Finite-differences schemes for  
water hammer analysis .  
December 1985 Vol 107
- 7-BERGERON : coup de bélier en électricité.  
DUNOD (Année)
- 8-A-GOURDIN H-BOUMATTRAT  
Méthodes numériques appliquées.  
O.P.U (Année)
- 9-DOUGLAS : FLUID-MECHANICS .  
MC.MILLAN  
(Année)