

وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE DU COUP DE
BELIER DANS UNE CONDUITE
A ECOULEMENT GRAVITAIRE.

Proposé par : M^R

ACHOUR B.

Etudié par :

KHEROUFI S. BENMAMER S.
AMICHI H.

Dirigé par : M^{elle}

PROMOTION 92

DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A

Mon père

Ma mère, ma mère, ma mère

Ma soeur

Ma grand grand mère

Mes petits frères

Tous mes amis (es)

Tous les jeunes de mon village

Tous les martyrs d'ALGERIE

Je dédie ce modeste travail

SMAIL.

Je dédie cet humble travail

A mon père

A ma mère

A ma grand mère

A mes frères et soeurs

A mon oncle SALAH

HAKIM .

AVANT PROPOS



Le but de notre travail est la contribution à l'étude du régime transitoire dans une conduite en charge gravitaire dotée d'un réservoir à niveau constant ,à l'extrémité amont ,et d'un organe de régulation de débit à son extrémité aval .

Le régime transitoire induit par les manoeuvres de l'organe de régulation placé à l'aval caractérisé par les phénomènes de surpression et de depression , occasionne des effets néfastes pour la canalisation ,exemple la fatigue et la fissuration .

Dans ces conditions , nous sommes amenés à utiliser des moyens appropriés , pour la protection des canalisations :c'est l'optique de notre thèse .

Ainsi nous donnerons d'abord les équations de base du régime transitoire occasionné par un changement quelconque du débit ;nous aboutissons à un système de deux équations de dérivés partielles . L'intégration de ce dernier ,après simplification , donne les équations d'Allievi .

Après l'approche théorique du problème , nous passerons à l'étude détaillée du phénomène du coup de bélier en se basant sur certaines hypothèses .Nous donnons ensuite l'application des équations d'Allievi à quelques cas pratiques ,pour mettre en évidence les effets du coup de bélier .

Après la critique de quelques methodes existantes , nous exposerons la methode de Bergeron avec et sans pertes de charge . En appliquant la methode des caractéristiques au graphe de Bergeron , nous déterminerons les valeurs des parametres essentiels de l'écoulement à savoir la pression et le débit ,en envisageant les deux cas séparément où la perte de charge est concentrée à l'amont et à l'aval .

En fixant une pression limite à l'aval (qui dépend des propriétés hydrodynamiques de l'installation?) , nous déterminons la loi de fermeture de l'organe de régulation du débit pour les deux cas où les pertes de charge sont concentrées à l'amont et à l'aval. Pour cela nous devons réaliser un programme de la methode qui permet de faire les calculs.

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE I

PRESENTATION DU REGIME TRANSITOIRE

I-1/ Généralités	page 1
I-1-1/ Equations de base du régime transitoire	page 2
I-1-1-1/ Equation de la quantité de mouvement	page 2
I-2/ Simplification et intégration du système: equation d'Allievi	page 5
I-2-1/ Intèrpretation des équations d'Allievi	page 10
I-3/Approche theorique du problème	page 12

CHAPITRE II

ETUDE DU COUP DE BELIER

II-1/ Definition	page 14
II-2/ hypothèses	page 14
II-3/ Analyse physique du coup de belier	page 16
II-4/ Application des équations d'Allievi à quelques cas pratiques.	page 21
II-4-1/ Etude d'une fermeture progressive	page 21
II-4-2/ Etude d'une fermeture totale lente	page 23
II-4-3/ Etude d'une fermeture totale rapide	page 27
II-4-1/ Etude d'une fermeture complete à partir d'un degres d'ouverture réduite: maximum du coup de belier - formule de Michaud	page 18
II-5/ Effet du coup de belier	page 31
II-6/ Critiques des équations du régime transitoire	page 32

CHAPITRE III

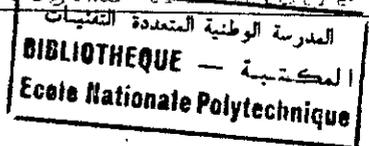
METHODE GRAPHIQUE DE BERGERON

III-1/ Methode de bergeron sans tenir compte des pertes de charge	page 35
III-1-1/ Etude d'une fermeture totale et lente	page 38
III-2/ Methode de bergeron en tenant compte des pertes de charge	page 44
III-3/ Determination des valeurs du coup de belier en tenant compte des pertes de charge : application du graphe de Bergeron	page 45
III-3-1/ Pertes de charge concentrées à l'aval	page 46
III-3-1-1/ Exposé de la methode	page 48
III-3-1-2/ Interprétation de la methode	page 51
III-3-1/ Pertes de charge concentrées à l'amont	page 53
III-3-1-1/ Exposé de la methode	page 54
III-3-1-2/ Interprétation de la methode	page 61
III-4/ détermination d'une loi de fermeture avec pertes de charge	page 63
III-4-1/ Pertes de charge concentrées à l'aval	page 63
III-4-1-1/ Exposé de la methode	page 65
III-4-1-2/ Interprétation de la methode	page 69
III-4-2/ Pertes de charge concentrées à l'amont	page 71
III-4-2-1/ Exposé de la methode	page 72
III-4-2-2/ Interprétation de la methode	page 82
III-5 Programmation	Page 86
III-5-1 Graphes	Page 104

CHAPITRE IV

ETUDE D'UN EXEMPLE PRATIQUE

V-1/ Etude d'un exemple numérique	page 90
V-2/ graphes	page 104
CONCLUSION GENERALE	page 103
Bibliographie	Page 104



CHAPITRE I PRÉSENTATION DU RÉGIME TRANSITOIRE

I-1) Généralités

Nous donnons une brève définition des écoulements permanents, par la suite une description détaillée des écoulements non permanents. L'écoulement est dit permanent lorsque les propriétés du fluide et les caractéristiques du mouvement se manifestant dans chaque point de l'espace occupé par le fluide en mouvement ne subissent aucun changement dans le temps c.à.d

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

L'écoulement est dit uniforme lorsqu'à un instant donné, le vecteur vitesse a la même intensité, direction et sens, en tout point du fluide en mouvement. Il est dit stationnaire si les paramètres hydrauliques ne dépendent pas du temps.

Pour maintenir un débit permanent (Q) dans une conduite à écoulement gravitaire reliant un réservoir et une centrale hydroélectrique, par exemple, il faut maintenir entre ses extrémités une différence de pression Δp constante, dont la grandeur dépend uniquement de (Q) et de la constitution de cette conduite. Si l'on porte (P) en fonction de (Q), on obtient une courbe caractéristique de la conduite qui correspond à un ensemble de points de fonctionnement.

En effet, soit le système réservoir (R) à niveau constant, et une conduite AB à écoulement gravitaire, (figure 1 ci-dessous).

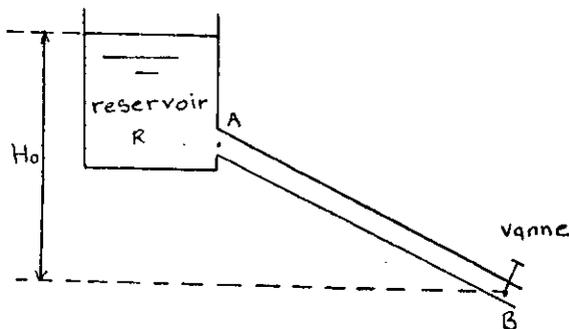


Fig. -1

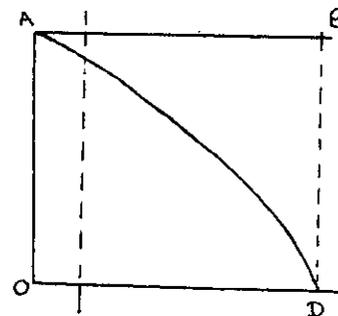


Fig. -2

En appliquant l'équation de Bernoulli entre les sections A et B, nous obtenons l'expression suivante :

$$P_B = H_0 - \Delta H$$

où ΔH est la perte de charge entre A et B

La courbe représentant les variations de pressions au point B est une parabole, obtenue en retranchant de la hauteur $H_0 = OA$ les pertes de charges entre A et B. (Figure 2 page 1).

Si maintenant, l'on produit une variation du débit dans la conduite (Figure 1 page 1) en actionnant, par exemple, une vanne placée en B, nous aurons alors ce qu'on appelle un régime transitoire.

Un régime transitoire est un régime variable dans le temps et dans l'espace, il se manifeste entre deux régimes stationnaires. L'écoulement en régime transitoire étant un écoulement où les paramètres hydrauliques varient en fonction du temps et de l'espace, on peut avoir :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \nabla \dagger$$

I-1-1) Equations de base du régime transitoire

Les équations de bases régissant les phénomènes transitoires sont l'équation de continuité et l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

I-1-1-1) Equation de la quantité de mouvement :

Considérons une tranche d'eau, de masse M, comprise entre deux sections A et A', d'abscisses respectivement x et x + dx, G le centre de gravité de cette tranche et I l'angle d'inclinaison de

la conduite au point B (figure 3 page 3).

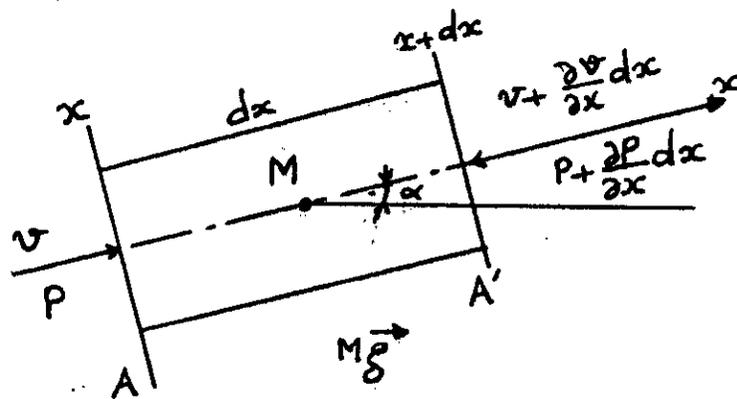


Figure 3

Le principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire :

$$\frac{d(mV)}{dt} = \sum F_{ext} \quad (I.1)$$

avec $\sum F_{ext}$ représente la somme de toutes les forces extérieures appliquées à la tranche considérée.

Les forces extérieures sont :

- Force de pression
- Force de gravité
- Force de frottements

Projetons toutes ces forces sur l'axe Ox, on obtient :

$$\sum F_{ext} = PA - (P + \frac{\partial p}{\partial x} dx) A - \rho g A dx \sin \alpha - \tau \pi D dx$$

$$= - \frac{\partial \rho}{\partial x} A - \rho g A dx \sin \alpha - \tau \pi D dx \quad (I.2)$$

Explicitons l'expression de $\tau \pi D$:

on sait que les pertes de charge linéaires par unité de longueur sont données par :

$$J = \frac{\lambda}{D} \frac{V}{2g} \quad \lambda \text{ est le coefficient de pertes de charges}$$

La force de frottement est exprimée par:

$$\Delta P A = \Delta P \frac{\pi D^2}{4} = \rho g \frac{\lambda}{D} \frac{V^2}{2g} dx \frac{\pi D^2}{4}$$

d'où $dx \tau \pi D = \rho g \frac{\lambda}{D} \frac{V^2}{2g} dx \frac{\pi D^2}{4}$

l'expression de τ devient :

$$\tau = \rho g J D/4 \quad (I.3)$$

donc

$$\pi D \tau = \pi \rho g J \frac{D^2}{4} = J \rho g A$$

En remplaçant cette dernière expression et l'expression (I.1) dans l'équation (I.2), nous aurons, après simplification par $\rho A dx$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = -g (\sin I + J) \quad (I.4)$$

comme $P = \rho g (h - y)$ (voir figure 1 page 1)

et puisque $\frac{\partial y}{\partial x} = \sin I$

et
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}$$

l'équation (I.4) prendra alors la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -g J \quad (I.5)$$

I-1-1-2) Equation de continuité.

Considérons le trançon de conduite compris entre les deux sections A et A', d'abscisses respectivement x et x + dx (Figure 4 page 5)

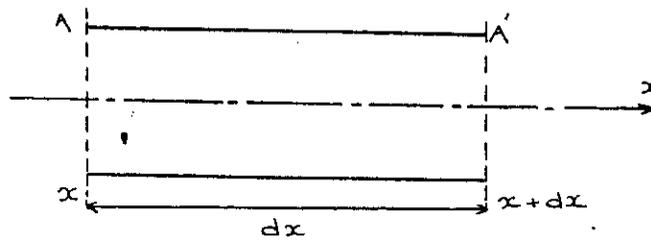


Fig 4

La masse du liquide animée de la vitesse v entrant à travers la section A, dans le trançon dx, pendant l'instant dt, est $\rho v A dt$ et la masse sortante à travers la section A' pendant le même instant dt vaut

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx\right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} dx\right) dt$$

la masse du liquide restante à l'intérieur du trançon dx est par conséquent égale :

$$\rho v A dt - \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx\right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} dx\right) dt$$

en négligeant les termes du second ordre, on obtient :

$$- (v A \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho A \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial A}{\partial x}) dx dt$$

Au même instant dt, s'exerce en A et A' les pressions P et P + $\frac{\partial P}{\partial x} dx$ respectivement. L'accroissement de pression $\frac{\partial P}{\partial x} dx$ dt engendre le tronçon d'une quantité d(CC) et la diminution du volume (VL) du liquide d'une quantité d(VL) en raison de la compressibilité du liquide (eau). Nous aurons donc :

$$\rho [d(VL) + d(CC)] = - (v A \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho A \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial A}{\partial x}) dx dt \quad (1.6)$$

nous allons expliciter chacun des termes du premier membre de cette équation :

a) Compressibilité de l'eau :

Conformément à la loi de Hooke, la variation de pression est donnée par :

$$dP = - K \frac{d(VL)}{VL}$$

K étant le coefficient de compressibilité volumique de l'eau, et d(VL) la variation du volume d'eau.

$$d'où \quad d(VL) = - (VL) \frac{dP}{K}$$

$$Or \quad VL = A dx$$

Donc on obtient

$$d(VL) = - A dx \frac{dP}{K}$$

b) Dilatation de la paroi de la conduite .

Sous l'action de la pression P, la paroi de la conduite est soumise à une contrainte transversale σ . En considérant l'équilibre de la moitié du trançon dx (Figure 5 page 6), Nous écrivons:

$$P S = P D dx$$

$$= 2 e \sigma dx$$

d'où

$$\sigma = \frac{P D}{2 e}$$

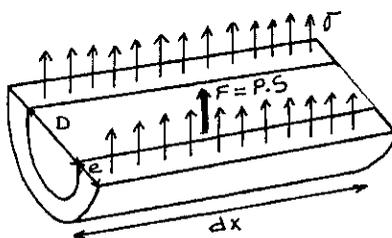


Figure 5

La variation de la presion dP entraine la variation de la contrainte σ , c.à.d :

$$d\sigma = D \frac{dP}{2 e}$$

La variation de la contrainte σ entraine, à son tour, une variation de diamètre D, et nous obtenons :

$$d\sigma = E \frac{dD}{D} \quad E \text{ étant le module de Young}$$

$$d'où \quad d\sigma = \frac{dP}{2 e} = E \frac{dD}{D}$$

Soit, enfin :

$$\frac{dD}{D} = \frac{D}{2 e} \frac{dP}{E}$$

Nous avons $A = \pi D^2/4$

Donc, $\frac{dA}{A} = 2 \frac{dD}{D}$

d'où $\frac{dD}{D} = \frac{1}{2} \frac{dA}{A}$

Par suite $\frac{dA}{2A} = \frac{D}{2e} \frac{dP}{E}$

Il vient : $dA = \frac{D A}{e} \frac{dP}{E}$

La dilatation de la conduite engendre l'emmagasinement d'un volume supplémentaire $d(CC) = dA dx$

Soit :

$$d(CC) = \frac{D A}{e} \frac{dP}{E} dx$$

en reportant ces résultats dans l'expression I-6, nous obtenons:

$$\rho \left(\frac{D A}{e} \frac{dP}{E} dx + A dx \frac{dP}{K} \right) = - \left(V A \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho A \frac{\partial v}{\partial x} + \rho V \frac{\partial A}{\partial x} \right) dx dt$$

(I.7)

nous avons $dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt$

mais $\frac{\partial P}{\partial x}$ est négligeable devant $\frac{\partial P}{\partial t}$

donc nous obtenons:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt$$

Par ailleurs on a $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{P}{K} \right)$ ✓

ρ_0 est la masse volumique en régime permanent
donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{K}$$

et
$$\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x}$$

puisque $A = \pi D^2/4$, alors

$$\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{v}{A} \frac{\pi}{4} 2 D \frac{\partial D}{\partial x}$$

en remplaçant A par son expression, on obtient :

$$\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{v}{\pi D^2/4} \frac{\pi}{4} 2 D \frac{\partial D}{\partial x} = \frac{2 v}{D} \frac{\partial D}{\partial x}$$

nous pouvons écrire, donc :

$$\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{2 v}{D} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial D}{\partial P}$$

par ailleurs,

$$\frac{\partial D}{\partial P} = \frac{D^2}{2 E e} \quad (\text{car } \frac{dD}{dP} = \frac{\partial D}{\partial P})$$

nous avons donc :

$$\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{2 v}{D} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{D^2}{2 E e}$$

Soit

$$\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{v D}{E e} \frac{\partial P}{\partial x}$$

L'équation I-é s'écrit alors :

$$\rho \frac{D A}{e} \frac{dP}{dt} dt \frac{1}{E} dx + \rho \frac{A dx}{K} \frac{dP}{dt} dt + \left(\rho A \frac{v D}{E e} \frac{\partial P}{\partial x} + \rho A \frac{\partial v}{\partial x} + v A \frac{\rho_0}{K} \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx dt = 0 \quad (I.8)$$

mais $\rho = \rho_0 (1 + P/K)$

et, en pratique, K est très grand devant P, donc $\rho/\rho_0 \approx 1$.

Après simplification, l'équation (I.8) s'écrira :

$$\frac{D}{e E} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{K} \frac{dP}{dt} + \frac{v D}{E e} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{K} \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Soit

$$\left(\frac{D}{eE} + \frac{1}{K} \right) \frac{dP}{dt} + \left(\frac{D}{Ee} + \frac{1}{K} \right) v \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Posons

$$\left(\frac{D}{eE} + \frac{1}{K} \right) = \frac{1}{C^2}$$

comme on peut le voir aisément, C a les dimensions d'une vitesse: c'est la célérité de la propagation de l'onde.

D'où

$$\left(\frac{dP}{dt} + v \frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{C^2} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (I.9)$$

Les expressions (I.4) et (I.9) constituent ensemble un système différentiel du coup de Belier. Elles représentent les équations de St Venant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + v \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial x} = -g (\sin \alpha + J) \quad (I.10) \\ \left(\frac{dP}{dt} + v \frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{C^2} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (I.9) \end{array} \right.$$

I-2) Simplification et intégration du système : équations d'Allievi.

Ce système n'est pas intégrable, cependant l'étude approfondie du phénomène nous permet de faire abstraction de $v \frac{\partial V}{\partial x}$ et de $v \frac{\partial P}{\partial x}$ vis à vis respectivement de $\frac{\partial V}{\partial t}$ et de $\frac{\partial p}{\partial t}$. Sachant que $p = \rho g (h - y)$ (voir figure .1 page 1), et en négligeant les pertes de charge dans la conduite, on obtient un système simplifié d'équations du coup de belier.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{g}{c^2} \frac{\partial h}{\partial t} \end{array} \right. \quad (I.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = - g \frac{\partial h}{\partial x} \end{array} \right. \quad (I.12)$$

En dérivant successivement $\frac{\partial v}{\partial x}$, et $\frac{\partial v}{\partial t}$ par rapport à x et t , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \end{array} \right. \quad (I.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{array} \right. \quad (I.14)$$

Ces deux équations sont dites équations des ondes. La solution d'un pareil système, a été donné par d'Alembert (pour C constante)

Soit :

$$H = F(t - x/C) + f(t + x/C) + Cte \quad (I.15)$$

$$v = - \left[F(t - x/C) - f(t + x/C) \right] \cdot g/C + Cte \quad (I.16)$$

Si on considère en un point M que la pression et la vitesse sont H_0 et v_0 à l'instant initial, on obtient les équations dites d'Allievi.

$$\left\{ \begin{array}{l} H - H_0 = F(t - x/C) + f(t + x/C) \end{array} \right. \quad (I.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v - v_0 = - g/C \left[F(t - x/C) - f(t + x/C) \right] \end{array} \right. \quad (I.18)$$

I-2-1) Interprétation des équation d'Allievi.

Imaginons un observateur qui se déplacerait le long de la conduite de l'extrémité aval vers l'extrémité amont avec une vitesse uniforme C, la loi de son mouvement est de la forme $x = C.t + cte$, d'où $t - x/C = cte$.

x : étant positif dans le sens contraire à l'écoulement. Pour cet observateur, la fonction $f(t-x/C)$ représente toujours la même valeur, f est donc une onde qui se propage à la célérité C en remontant le courant. De manière analogue un observateur se déplaçant avec la célérité C, c.à.d dans le même sens que le courant, pour cet observateur, la fonction $f(t+x/C)$ garde toujours la même valeur, c.à.d elle représente une onde qui se déplace avec la célérité C.

I-3) Approche théorique du problème.

On considère une conduite à caractéristiques constantes (section constante, caractéristiques mécaniques constantes, absence de piquage en cours de route)

a) généralités

1) Si la variation des paramètres modificateurs (débit, pression,...) est lente et engendre des variations lentes de pression et de débit dans la canalisation, on admet (et l'expérience le confirme) que la loi d'évolution de l'écoulement est donnée de façon approchée mais satisfaisante par l'équation différentielle régissant les mouvements non permanents pour fluides incompressibles:

$$\Delta H = \frac{L}{g} \frac{dv}{dt} + f(v)$$

où

ΔH : différence de charge (exprimée en mètre de colonne de liquide) entre deux points distants d'une longueur L dans une

conduite de section constante S ,

g est l'accélération de la pesanteur

$\frac{dv}{dt}$ est le gradient de vitesse

$f(v)$ est la perte de charge entre deux points considérés en régime permanent.

Cette approche suppose un liquide incompressible et une conduite indéformable. En d'autres termes, le débit, les vitesses et les accélérations sont identiques à un instant donné en tout point de la conduite; nous avons affaire à un "mouvement de masse".

Nous remarquons que cette hypothèse ne peut pas s'appliquer, par exemple, à une fermeture instantanée et complète d'une vanne placée à l'extrémité de la conduite.

2) Si la variation du paramètre modificateur est rapide,

(gradient de débit ou pression important), la prise en compte des déformations de l'eau (compressibilité) et de la conduite (élasticité) est nécessaire.

Les variations de débit et de pression se propagent sous forme d'onde et les débits ne sont plus constants à un instant donné sur un tronçon de conduite. Nous avons affaire à un "mouvement dit d'onde".

Les équations de base des deux approches sont identiques (théorème des quantités de mouvement et équation de continuité). Cependant, dans le premier cas, (mouvement en masse), la déformation de la conduite et la compressibilité de l'eau sont négligeables.

Dans le cas de notre sujet, faisons abstraction du deuxième cas et nous nous intéresserons uniquement au cas où l'eau est compressible, et la conduite élastique, c.à.d le coup de belier.

CHAPITRE II

ETUDE DU COUP DE BELIER

II-1. Définitions

Le coup de belier correspond à une surpression et une dépression provoquée par une modification brutale d'un débit d'un liquide compressible, dans une conduite considérée comme élastique.

Les causes de naissance d'un coup de belier peuvent être les suivantes :

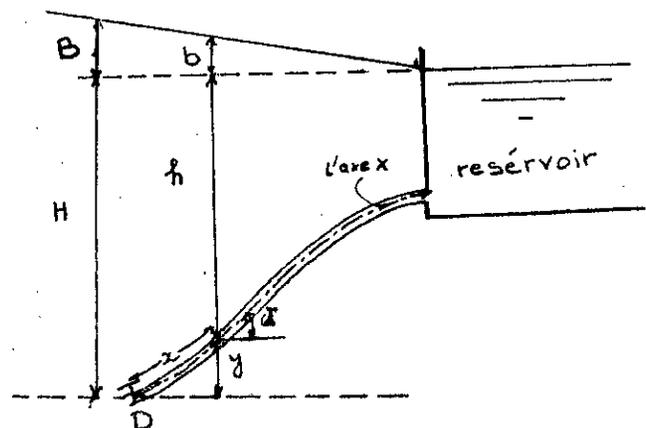
- Manœuvres brusques ou lentes d'une vanne;
- Arrêt ou démarrage brusques d'une pompe;
- Variation de la puissance d'une pompe.

Avant de procéder à la mise en équation du phénomène du coup de belier, nous donnons d'abord les hypothèses.

II-2. Hypothèses :

Considérons une conduite en charge reliant un réservoir R au distributeur D d'une turbine, par exemple, comme l'indique la figure 6 ci-dessous

les coups de belier prennent naissance au point D



Nous prenons comme repère l'axe de la conduite d'origine D, orientée dans le sens contraire au sens de l'écoulement. Nous supposons que le réservoir est de grandes dimensions, pour que le niveau d'eau y reste constant pendant la durée du phénomène étudié, et que la conduite présente une caractéristique unique.

Soit un point Y d'abscisse x et soit h la différence d'altitude entre ce point et la surface libre du réservoir. En régime permanent, le débit étant Q_0 et la vitesse de l'eau est v_0 . En fermant brusquement la conduite au point D, nous observerons, alors, au point Y une variation de la vitesse d'écoulement v et de la pression P dans le temps le long de la conduite. Le problème consiste, donc, à la détermination des fonctions v et P dépendant du temps t et de x .

En un point quelconque de la conduite et à un instant donné t , la surpression ou la dépression ($H - H_0$), depuis l'origine du phénomène est égale à la somme des deux ondes de pression F et f , qui se croisent à cet instant. Une remarque analogue est à faire pour $v - v_0$, qui résultent de la superposition des deux ondes $-g F/C$ et $+g f/C$, cheminant en sens contraire, avec une même vitesse absolue C .

Conditions aux limites :

Au point y d'abscisse $x = L$, la pression reste égale à la pression statique (niveau du réservoir reste constant), $H - H_0 = 0$.
Donc

$$F(t - L/C) + f(t + L/C) = 0$$

soit $F(t - L/C) = -f(t + L/C)$

Au point y, l'onde de retour f est constamment égale et opposée à l'onde incidente F .

Écrivons l'identité précédente au temps $t - L/C$, on aura :

$$F(t - 2L/C) = - f(t)$$

d'où $f(t) = - F(t - 2L/C)$

En posant $\theta = 2 L/C$, qui représente la durée d'aller et retour de l'onde, nous aurons :

$$f(t) = - F(t - \theta)$$

Si nous considérons l'instant $t + x/C$, on obtient :

$$f(t + x/C) = - F(t - \frac{2L - x}{C})$$

Les équations d'Allievi deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} H - H_0 = F(t - x/C) - F(t - \frac{2L - x}{C}) \quad (II.1) \\ v - v_0 = - g/C \left[F(t - x/C) + F(t - \frac{2L - x}{C}) \right] \quad (II.2) \end{array} \right.$$

II-3. Analyse physique du phénomène du coup de belier

Après avoir donné un aperçu mathématique du coup de belier, nous en donnerons une analyse physique en nous plaçant dans le cas d'une conduite d'alimentation dans laquelle le débit se trouve brusquement arrêté.

En supposant que la colonne liquide est formée de tranches infiniment rapprochées, le phénomène est physiquement divisé en quatre étapes distinctes :

1ère phase : 1ère aller d'aval en amont

A l'instant précis où la vanne est fermée, la tranche qui s'apprêtait à pénétrer doit s'arrêter instantanément, et l'énergie cinétique qu'elle possédait s'annule intégralement, mais en vertu du principe de conservation de l'énergie, elle ne peut disparaître, elle se transforme en énergie ondulatoire qui provoque la dilatation du tronçon de la conduite, et la compression de la tranche liquide contre la vanne fermée.

Un accroissement de volume se produit, donc, à la vanne de la conduite; L'eau arrive pour combler ce volume, permettant, ainsi, aux tranches suivantes de continuer leur progression avec la vitesse v_0 . Cependant, dès que la première tranche est immobilisée, la seconde tranche est automatiquement arrêtée par le lère. Elle perd son énergie cinétique et subit, à son tour, une compression; Alors que le tronçon correspondant se dilate. Les tranches d'amont poursuivent leur progression, et les mêmes phénomènes se reproduisent avec le reste des tranches à savoir la compression du liquide et la dilatation de la conduite, et ce jusqu'à l'extrémité amont, à la manière d'une onde. Cette propagation s'effectue avec la célérité C définie précédemment.

Une fois l'extrémité amont atteinte, l'eau reste immobile dans la conduite totalement dilatée, en état de surpression (ΔP). Le volume emmagasiné dans la conduite est $Q_0 L/C$, (Figure -7).

2ème phase :

Comme l'état précédent n'est pas un état d'équilibre, la tranche liquide adjacente au réservoir, actionnée par la différence de pression ΔP , se déplace vers le réservoir. Dès que cette tranche se met en mouvement, elle dégage la tranche voisine qui, à son tour, se trouve actionnée par la différence de pression ΔP qui la déplace vers le réservoir, et ainsi de suite. Chaque tranche liquide et le tronçon de conduite correspondant reprennent

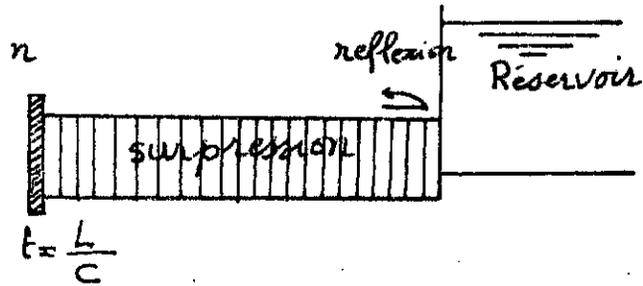
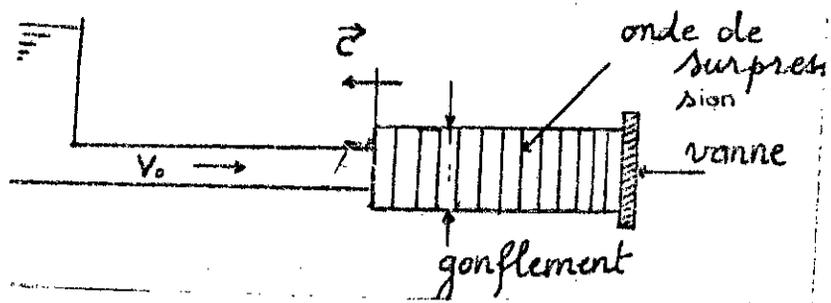


figure - 7

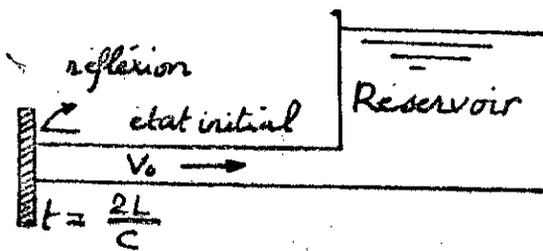
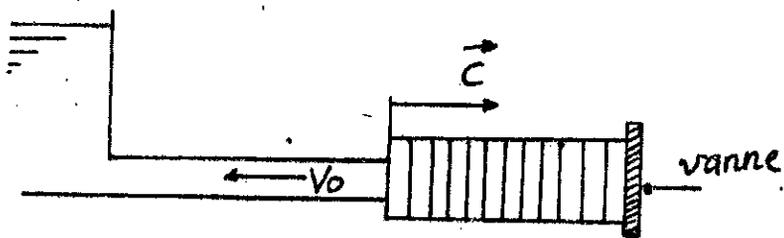


figure 8

successivement leurs dimensions initiales, et libèrent l'énergie potentielle emmagasinée, en expulsant avec la vitesse $-v_0$ le volume accumulé par le gonflement de la conduite et la contraction du liquide. L'énergie potentielle est ainsi transformée en énergie cinétique. La réversibilité est complète si on néglige les frottements. L'onde de décompression atteint la vanne après le temps $2L/C$, depuis le début du phénomène, (Figure .8).

3ème phase :

Quand l'onde d'abaissement atteint la vanne, une reflexion de la perturbation a lieu sur la vanne et une phase de contraction de la conduite commence. Il se produit, alors, une dépression dont la valeur est $-\Delta P$, car cette fois la colonne liquide tend à se détacher de la vanne de la même vitesse v_0 . Cette onde négative court de la vanne vers le réservoir en laissant derrière elle la dépression $-\Delta P$ et la vitesse $v = 0$. Quand l'onde arrive au réservoir, la dépression $-\Delta P$ s'établit pendant un instant dans toute la conduite, voir (figure .9).

4ème phase :

Puisque l'état précédent n'est pas stable, le nivellement de la pression entre le réservoir et la conduite commence. Etant actionnée par la différence de pression ΔP , la tranche du liquide adjacente au réservoir entre dans la conduite. A peine déplacée, elle crée une différence de pression sur la tranche voisine, qui, à son tour, se met en mouvement, et ainsi de suite. Il en résulte l'onde de nivellement de pression qui court vers la vanne, laissant derrière elle une pression P_0 et une vitesse v_0 du courant dirigé vers la vanne. A l'instant $t = 4L/C$, la conduite est entièrement remplie. La vanne étant toujours fermée, l'eau continue à couler, les mêmes phénomènes, décrits précédemment se produiront au cours d'une nouvelle période de durée $4L/C$ (Figure .10)

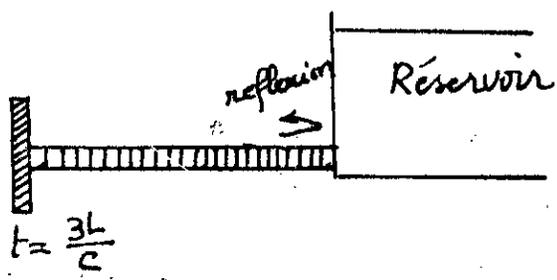
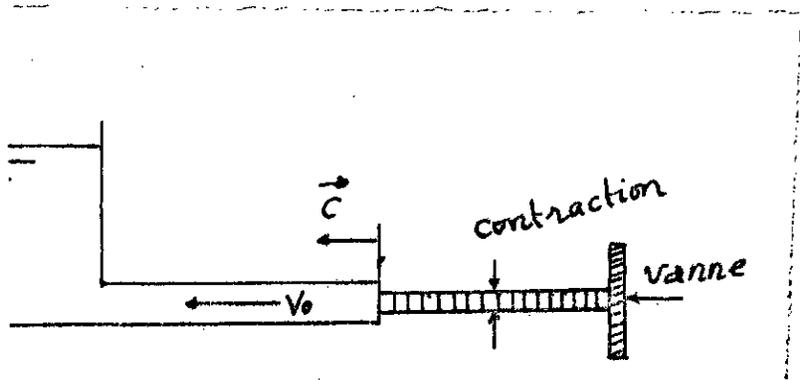


figure - 9

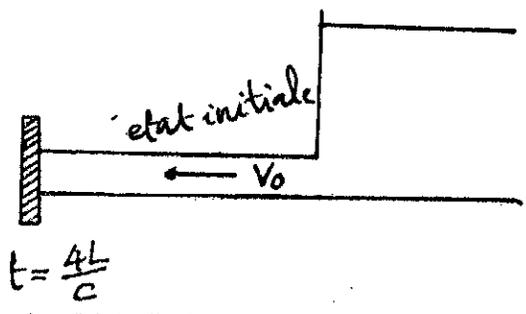
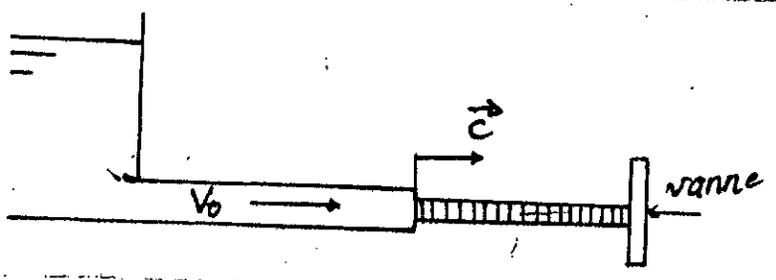


figure 10

II-4. APPLICATION DES EQUATIONS D'ALLIEVI A QUELQUES CAS PRATIQUES

II-4-1. Etude d'une fermeture progressive

En réalité, l'arrêt total du débit n'est jamais obtenu instantanément, la fermeture se fait d'une manière progressive.

Soit A_{vo} la section d'ouverture initiale, H_o la pression en mètre d'eau au distributeur, v_o la vitesse d'écoulement dans la conduite, m coefficient de contraction de la veine liquide à travers la section A_v et A la section constante de la conduite.

L'équation de continuité nous permet d'écrire :

$$v_o A = m A_{vo} \sqrt{2 g H_o} \quad (II.3)$$

Au bout du temps t , la section d'ouverture n'est plus que S , la vitesse d'écoulement dans la conduite devient v , telle que :

$$v A = m A_v \left[2 g (H_o + b) \right]^{1/2} \quad (II.4)$$

b étant la surpression provoquée par la fermeture au temps t .
Des deux équations II.3 et II.4, on tire :

$$v = v_o \frac{A_v}{A_{vo}} \left[\frac{H_o + b}{H_o} \right]^{1/2} \quad (II.5)$$

A_v/A_{vo} désigne le degré d'ouverture du distributeur, c'est une fonction $\phi(t)$ du temps qui se traduit directement de la loi de fermeture du distributeur, nous aurons, donc :

$$\frac{A_v}{A_{vo}} = \phi(t) \quad (II.6)$$

Des deux équations II.5 et II.6, on tire :

$$v = v_0 \phi(t) \left[\frac{H_0 + b}{H_0} \right]^{1/2} \quad (II.7)$$

La fonction $\phi(t)$ peut être représentée par une courbe (Figure 11 page 22).

Pour $t = t_0$, $\phi(0) = 1$

Pour $t > 0$, $\phi(t) < 1$

Puisqu'il s'agit d'une fermeture, on a $A_v/A_{v0} < 1$

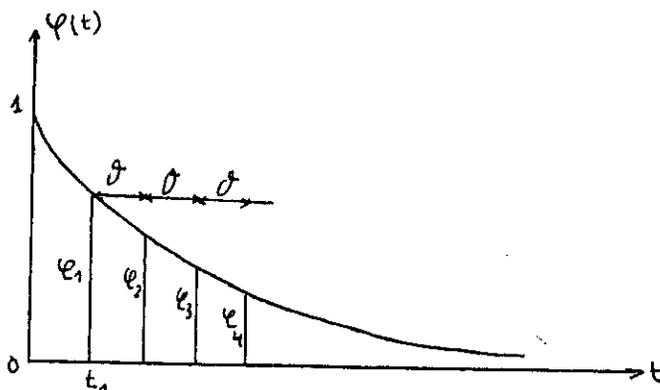


Fig. 11

Au distributeur, où $n = 0$, les équations d'Allievi s'écrivent

$$b = F(t) - F(t-tr) \quad (II.8)$$

$$\frac{c}{g} (v_0 - v) = F(t) + F(t-tr) \quad (II.9)$$

Le terme $F(t-tr)$, qui correspond à l'onde réfléchie est nul tant que le temps $(t-tr)$ est négatif c'ad $t < tr$.

*- Dans l'intervalle de temps compris entre zéro et tr , les ondes réfléchies à l'extrémité amont ne modifient pas les ondes émises par le distributeur : c'est la phase du coup direct.

**- Après le temps tr , les ondes réfléchies à l'extrémité

amont interfèrent avec les ondes émises par le distributeur, en supposant que celui ci n'a pas encore le temps d'achever sa fermeture totale, ce qui est généralement le cas en pratique.

II-4-2. Etude d'une fermeture totale lente

Lorsque le temps T nécessaire à la fermeture complète dépasse $t_r = 2L/C$, on dit que la fermeture est lente et les ondes réfléchies atténuent les ondes incidentes émises par le distributeur après le temps t_r : c'est la phase de contre-coup.

Nous avons vu précédemment que la vitesse v peut s'écrire sous la forme

$$v = v_0 \phi(t) \left[1 + \frac{b}{H_0} \right]^{1/2}$$

- $\phi(t)$: fonction décrivant la loi de fermeture du distributeur
- v_0 : vitesse de l'eau à section constante de la conduite (A)
- b : surpression en (mm d'eau)
- H_0 : hauteur statique au distributeur

La surpression b ne doit pas dépasser, en pratique 25 % de H_0

donc

$$b/H_0 \leq 1/4$$

or

$$1+b/H_0 = \left[1 + \frac{b}{2H_0} \right]^2 - \left[\frac{b}{2H_0} \right]^2$$

$$b/H_0 \leq 1/4 \quad \text{donc on aura } b/2H_0 \leq 1/8$$

d'où

$$\left[\frac{b}{2H_0} \right]^2 \leq 1/64$$

Puisque

$$1+ b/H_0 \leq 1.25$$

donc

$$\left[1 + \frac{b}{2H_0} \right]^2 \leq 1.26525$$

avec une erreur de 1/64, on peut écrire

$$\left(1 + \frac{b}{H_0}\right) = \left(1 + \frac{b}{2H_0}\right)^2$$

donc l'expression de la vitesse devient

$$v = v_0 \phi(t) \left[1 + \frac{b}{2H_0}\right] \quad (\text{II.10})$$

Soient F_1, F_2, \dots, F_n et $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ les valeurs particulieres prises par les fonctions $F(t)$ et $\phi(t)$ aux temps t_1, t_2, \dots, t_n .

Au temps t_n , nous aurons

$$v_n = v_0 \phi_n \left[1 + \frac{b_n}{2H_0}\right]$$

En se plaçant au temps $t_1 < t_r$ correspondant au coup direct. Comme alors, l'onde réfléchie $F(t_1 - t_r)$ est nulle

d'où

$$\begin{cases} b_1 = F(t_1) = F_1 \\ c/g (v_0 - v_1) = F_1 = b_1 \end{cases}$$

On a

$$v_1 = v_0 \phi_1 \left[1 + \frac{b_1}{2H_0}\right]$$

d'où

$$b_1 = \frac{c v_0}{g} \frac{1 - \phi_1}{1 + \frac{c v_0}{2g H_0} \phi_1}$$

Connaissant ϕ_1 , on peut déterminer la valeur de la surpression à l'instant t_1 .

Examinons maintenant ce qui se passe à des intervalles de temps égaux à t_r à partir de t_1 et désignons par t_2, t_3, \dots, t_n les temps correspondants nous aurons alors.

$$t_1, t_2 = t_1 + t_r, t_3 = t_1 + 2t_r, \dots, t_n = t_1 + (n-1)t_r$$

A l'instant t2 les équations d'Allievi donnent.

$$b_2 = F(t_2) - F(t_1) = F_2 - F_1$$

$$c/g (v_0 - v_2) = F(t_2) + F(t_1) = F_2 + F_1$$

Et d'une manière générale, au temps t_n:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_n = F_n - F_{n-1} \\ \frac{C}{g} (V_0 - V_n) = F_n + F_{n-1} \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit d'abord que :

$$b_1 = F_2$$

$$b_2 = F_2 - F_1$$

$$b_3 = F_3 - F_2$$

.....

$$b_n = F_n - F_{n-1}$$

Et en ajoutant membre à membre ces relations, il en résulte :

$$F_1 = b_1$$

$$F_2 = b_1 + b_2$$

.....

$$F_{n-1} = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}$$

$$F_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$$

On peut, donc tracer la courbe représentative de $F(t)$, point par point, en partant de la valeur b_1 au temps t_1 et en ajoutent successivement les surpressions à la fin des intervalles de temps t_r compter à partir de t_1 .

En modifiant la valeur de t_1 (entre 0 et t_r). On pourra tracer totalement la fonction $F(t)$.

Restent à Calculer les surpressions b_1, b_2, \dots, b_n Au bont des intervalles de temps successifs d'amplitude t_r . Or de la seconde équation d'Allievi, on tire en faisant intervenir l'approximation suggérée par Sparre .

$$F_n + F_{n-1} = \frac{CV_0}{g} \left(1 - \phi_n \left(1 + \frac{b_n}{2H_0} \right) \right)$$

Or d'après ce qui précède, nous avons :

$$F_n + F_{n-1} = 2b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_{n-1} + b_n$$

On aurait de même

$$F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{CV_0}{g} \left(1 - \phi_{n-1} \left(1 + \frac{b_{n-1}}{2H_0} \right) \right)$$

$$F_{n-1} + F_{n-2} = 2b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_{n-2} + b_{n-1}$$

Soit finalement

$$2b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_{n-1} + b_n = \frac{CV_0}{g} \left(1 - \phi_n \left(1 + \frac{b_n}{2H_0} \right) \right)$$

$$2b_1 + 2b_2 + \dots + 2b_{n-2} + b_{n-1} = \frac{CV_0}{g} \left(1 - \phi_{n-1} \left(1 + \frac{b_{n-1}}{2H_0} \right) \right)$$

En retranchant membre à membre, on aura

$$b_n + b_{n-1} = \frac{CV_0}{g} \left[(\phi_{n-1} - \phi_n) + \frac{\phi_{n-1} b_{n-1} - \phi_n b_n}{2 H_0} \right]$$

d'où

$$b_n \left[1 + \frac{CV_0}{2gHo} \phi_n \right] = \frac{CV_0}{g} (\phi_{n-1} - \phi_n) - b_{n-1} \left[1 + \frac{CV_0}{2gHo} \phi_{n-1} \right] \quad (II.13)$$

Cette relation liant b_n à b_{n-1} permet, en partant de b_1 , de passer, de proche en proche à b_2, b_3, \dots, b_n .

Le problème est, par conséquent, entièrement résolu.

II-4-3. Etude d'une fermeture totale rapide :

Le temps de fermeture T est inférieur à $t_r = 2L/C$. Dans ce cas, les équations d'Allievi s'écrivent, en sachant que le terme $F(t - t_r) = 0$ (l'onde émise en D n'est pas encore réfléchi).

$$\left. \begin{aligned} b &= F(t) \\ \frac{CV_0}{g} &= F(t) \end{aligned} \right\} \implies b = \frac{CV_0}{g}$$

Les variations de $(b + Ho)$ en fonction du temps sont représentées dans la figure 12 ci-dessous.

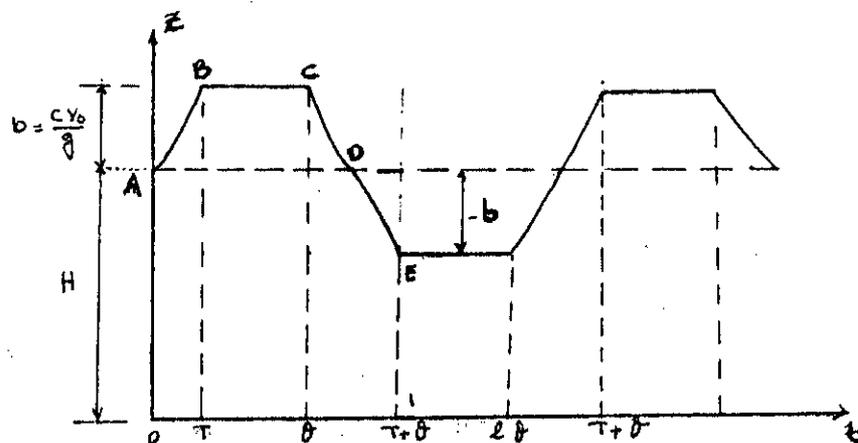


figure 12

II-4-4. Etude d'une fermeture complète à partir d'un degré d'ouverture réduite : Maximum du coup de belier.

- Formule de Michaud

Jusqu'à présent, on partait de l'ouverture totale du distributeur qui donne le débit maximum Q_0 . Monsieur Gabriel a montré que cette hypothèse n'est pas la plus défavorable.

En effet, partant d'un débit réduit Q , et soit T la durée de fermeture complète de ce débit. La loi de fermeture est supposée linéaire comme le montre la figure 13.

Soit v_0 la vitesse de l'eau dans la conduite quand le débit est Q . Puisque la loi de fermeture est linéaire, on en déduit :

$$\frac{v_0}{V_0} = \frac{t}{T}$$

V_0 est la vitesse quand le débit est égal à Q_0 .

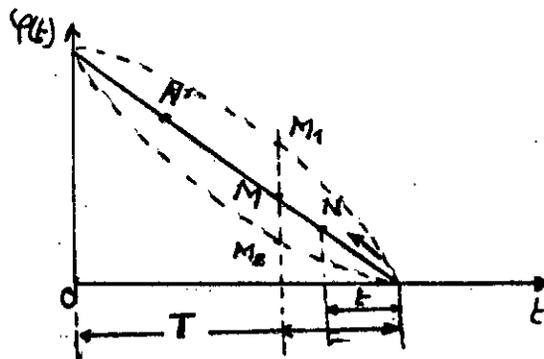


Fig. 13

En effectuant l'arrêt du débit Q , plusieurs cas sont à envisager

1. $t < t_r = 2L/C$

On a $F(t-t_r) = 0$

d'où

$$b_{max} = \frac{Cv_0}{g} = \frac{Cv_0}{gT} t$$

La valeur de b_{max} croît avec le temps. Elle sera maximale pour $t = t_r = 2L/C$.

Soit :

$$b_{max} = \frac{2L v_0}{g T}$$

2.a) $t \geq t_r$ avec $\frac{Cv_0}{2gH_0} \leq 1$

Il s'agit d'une fermeture lente; d'après la formule donnée par De SPARRE, le coup de belier maximum est :

$$b_{max} = \frac{2 L v_0}{g t} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Cv_0}{2gH_0} \left(1 - \frac{2 L}{C t}\right)}$$

Soit :

$$b_{max} = \frac{2 L v_0}{g T} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Cv_0}{2gH_0} \frac{t}{T} \left(1 - \frac{2 L}{C t}\right)}$$

or $t \geq 2L/C$, donc $2LC/t < 1$ d'où $1 - \frac{2 L}{C t} > 0$

Par suite, $b_{max} \leq \frac{2 L v_0}{g T}$

La valeur maximale b_{max} sera atteinte au temps $t = t_r$ (point N' venant en M).

2.b) $t \geq t_r$ avec $\frac{Cv_0}{2gH_0} \geq 1$

Il s'agit d'une fermeture lente, mais dans le cas d'une

basse chute H_0 . La formule de De SPARRE donne :

$$b_{max} = \frac{2 L v_0}{g T} \cdot \frac{1}{2 \left(1 - \frac{L v_0}{2gH_0T} \right)}$$

$$b_{max} = \frac{2 L V_0}{g T} \cdot \frac{1}{2 \left(1 - \frac{L V_0}{2gH_0T} \right)}$$

Puisque le coup de belier maximum est toujours inférieur à la hauteur statique H_0 , c.à.d $\frac{2 L V_0}{g T} < H_0$, donc

$$\frac{2 L V_0}{2 g T H_0} < 1, \text{ soit}$$

$$\frac{L V_0}{2 g T H_0} < 1/2$$

Il vient $1 - \frac{L V_0}{2 g T H_0} > 1/2$

d'où $2 \left(1 - \frac{L V_0}{2 g T H_0} \right) > 1$

ce qui donne

$$b_{max} < \frac{2 L V_0}{g T}$$

Ainsi, dans tous les cas, la valeur maximale du coup de belier est

$$B = \frac{2 L V_0}{g T} \tag{II.15}$$

CONCLUSION

La valeur maximale du coup de belier est obtenue pour un temps de fermeture $t < t_r$, qui est le temps de retour. Ceci s'explique par le fait que les ondes réfléchies à l'amont n'ont pas le temps d'apparaître pour diminuer l'effet des ondes incidentes. Cependant, une fermeture dangereuse peut se produire

à partir d'un degré d'ouverture réduit.

En général, si la loi $\phi(t)$ de fermeture, n'est pas linéaire, comme l'indique la figure II.8. soit par l'allure AM_1B ou l'allure AM_2B .

Cas de l'allure AM_1B

La vitesse v_1 obtenue dans le régime permanent dans le cas d'une fermeture non linéaire est supérieur à la vitesse v_0 de la fermeture linéaire. Nous aurons donc,

$$Cv_1/g > Cvo/g$$

Par conséquent, il y'a une aggravation du coup de belier.

Cas de l'allure AM_2B .

$$\phi_2(t) < \phi_{\text{linéaire}}(t)$$

La vitesse v_2 du régime permanent est plus faible, dans ce cas, que la vitesse v_0 du régime permanent. Dans le cas d'une fermeture linéaire, on aboutira à une valeur du coup de belier plus faible.

Enfin, le distributeur, dont la caractéristique de fermeture ayant l'allure AM_2B est plus intéressante.

II-5. Effets du coup de belier :

Les risques dus aux coups de beliers, sont de plusieurs ordres :

- Risques de fortes pressions : Les coups de belier provoquent des surpressions qui s'ajoutent à la pression initiale. Si la somme de la pression initiale et de la surpression est supérieur à la pression maximale admissible de la conduite, il y'a des risques de rupture de cette dernière et de déboitement des joints.

- Risques de pression négative : Une autre conséquence des coups de belier peut être l'apparition d'une pression négative. Si cette pression devient inférieure à - 10 mètres , il se produit une poche de cavitation. Si le profil en long de la canalisation est défavorable, c.à.d si la poche de vapeur peut se former sur une grande distance, la canalisation peut être aplatie par implosion, et les joints peuvent être aspirés. Une autre conséquence de la cavitation est la détérioration de l'enduit intérieur de la canalisation, mais le risque le plus grave est celui d'éclatement de la conduite lors du retour à des pressions positives: Les pressions obtenues à ce moment sont souvent très importantes. C'est surtout ce risque de fortes pressions qui oblige à éviter la cavitation. Notons que certains ingénieurs estiment négligeables les risques provenant de la cavitation .

- Fatigue de la conduite : L'alternance rapide de fortes et de faibles pressions entraîne la fatigue du matériau constituant la conduite, même si chaque onde de surpression n'est pas suffisante, en elle même, pour créer la rupture.

II-6. Critique des équations du régime transitoire

Equation D'Allievi

Les équation D'allievi ne tiennent pas compte des frottements du liquide contre la paroi de conduite. Ces équations nous permettent de calculer la surpression, en hauteur d'eau, en chaque point de la conduite, en l'ajoutant à la pression statique H_0 . Cette surpression est donnée par.

$$Z = H_0 + b$$

h : valeur du Coup de Bellier en ce point donné.

Pratiquement, on doit tenir compte de charge, donc la pression

initiale effective est la pression dynamique H obtenue en diminuant de la pression statique H_0 ces pertes de charge . Nous aurons donc

$$Z = H + b \quad \text{au lieu de :} \quad Z = H_0 + b$$

Les équations D'Allievi sont valables, en effet, avec un diamètre et une épaisseur déterminés. Il faut prendre ces équations sous leur forme initiale résultant de l'hypothèse que le réservoir est à un niveau constant placé à l'amont de la conduite. Pour les conduites télescopiques, les équations D'Allievi s'appliquent pour chaque tronçon, mais elles ne s'appliquent pas pour les tronçons de diamètre graduellement variable.

Donc on peut dire que l'application des équations D'Allievi au calcul analytique des Coups de Belier est assez restreint et laborieux.

* Formule de Joukowski

La formule de Joukowski a été obtenue à partir des équations

D'Allievi, appliquées à l'amont de la vanne pour le cas d'une fermeture brusque (temps de fermeture inférieur au temps d'aller et retour de l'onde). Elle donne la surpression maximale Cv_0/g et la depression maximale $- Cv_0/g$. Juste à l'amont de la vanne sans tenir compte des frottements contre la paroi de la conduite. Ce qui n'est pas le cas en pratique .

** FORMULE DE MICHAUD

De même ,cette formule de michaud s'obtient en appliquant les équations D'allievi à l'amont de la vanne sans tenir compte des frottements du liquide contre les parois de la conduite et ceci pour un cas de fermeture lente (temps de fermeture supérieur au temps

d'aller et retour de l'onde).

La formule de Joukowski s'applique uniquement pour une loi de fermeture lineaire, c'ad à une variation lineaire du debit mais cette loi est rarement realisée en pratique, tout de même on l'adopte car c'est la seul qui nous permet une interpretation ismple des resultats données par les équations d'Allievi, qui ne tiennent pas compte des caracteristiques variées des conduites.

*** Methode de streeter

La methode de streeter est valable pour deux cas de fermeture en n^egligeant les frottements pour et en supposant que le liquide et les parois de la conduite sont parfaitement élastiquesce qui ne sont pas conforme à la pratique. Leurs actions n'égliée dans les considerations de Streeter, aboutissent à l'amortissement graduelle du phenomene et conduisent finalement à de repos du liquide. De plus le dispositif de fermeture doit être placé à L'extremité aval de la conduite. Streeter a montré que la valeur maximun de l'accroissement de pression dans la region du dispositif de fermeture reste inchangée

- Si la fermeture de la vanne reste inchangée
- Et si la durée de la fermeture est plus courte que la durée de parcours par l'onde entre la vanne et l'extremité amont de la

conduite. Si la fermeture de la vanne se fait par etape successive comportant des fermetures parsielles instantaneés, l'accroissement de pression occasioné par chacune des étapes est:

$$\Delta H = C \Delta v / g$$

∇v est le decroissement de vitesse provoqué par la fermeture de la vanne

Dans le cas ou la fermeture totale est atteinte Avant l'arrivée de la premiere onde, l'accroissement de la hauteur piezometrique sera:

$$\sum \Delta H = c \sum \Delta v / g = C v_0 / g$$

CHAPITRE III

METHODE GRAPHIQUE DE BERGERON

La résolution des équations d'Allievi par la méthode analytique nécessite des calculs longs et compliqués. C'est pourquoi des solutions graphiques plus rapides, ont été imaginées et mises au point par SHNEIDER et BERGERON, indépendamment l'un de l'autre. Nous donnons la préférence à la dernière méthode qui rend l'application des équations aisée, même aux cas les plus compliqués.

III-1 Methode de BERGERON sans tenir compte des pertes de charge

Les équations d'Allievi s'écrivent de la manière suivante :

$$b = F(t-x/C) + f(t+x/C)$$

$$-C/g(v-V_0) = F(t-x/C) - f(t+x/C)$$

Rappelons que pour un observateur se déplaçant, le long de la conduite forcé, suivant la loi $x = x_0 + ct$, F gardait toujours la même valeur : F est donc une onde qui se propage avec la célérité C . De même pour un observateur se déplaçant avec la célérité $-C$, f garde toujours la même valeur : f est une onde qui se propage avec une célérité $-C$. Par suite, F et f ont des valeurs bien déterminées, de plus des deux équations d'Allievi, en additionnant et retranchant membre à membre, on tire :

$$b - C/g(v-V_0) = 2F$$

$$b + C/g(v-V_0) = 2f$$

v : étant la vitesse de l'écoulement au temps t ;

V_0 : étant la vitesse de l'écoulement à l'instant initial .

Si A est l'aire de la section droite de la conduite (supposée constante quelque soit x et si Q est le débit écoulé, on a :

$$Av = Q \quad \text{au temps } t$$

$$AV_0 = Q_0 \quad \text{à instant initial}$$

Les équations ci- dessus deviennent, alors :

$$b = \frac{C(Q-Q_0)}{gA} + 2F$$

$$b = - \frac{C(Q-Q_0)}{gA} + 2f$$

Il en résulte que dans un système d'axes rectangulaires oQ et ob, l'équation $b = \frac{C(Q-Q_0)}{gA} + 2F$ représente pour chaque valeur possible de F, une droite ϕ de pente $i = C/gA$. De même, d'après l'équation $b = - \frac{C(Q-Q_0)}{gA} + 2f$, à chaque valeur possible de f correspond une droite φ d'inclinaison symétrique à la précédente $i' = - C/gA$. Ces deux droites définissent le régime d'écoulement que les deux observateurs enregistrent. Or, à chaque point d'abscisse x, pris sur la conduite forcéé, correspond à chaque instant t, une valeur de b et une valeur de Q ; à ces valeurs on associe donc un point M dans le plan (oQ,ob) (figure .12 page 36). Le point M appartient à la fois à la droite ϕ et à la droite φ , donc à leur intersection.

Mais la droite ϕ correspond à la valeur que possède F à l'instant t, au point d'abscisse x de la conduite. Même remarque pour la droite φ et la valeur f qui lui correspond.

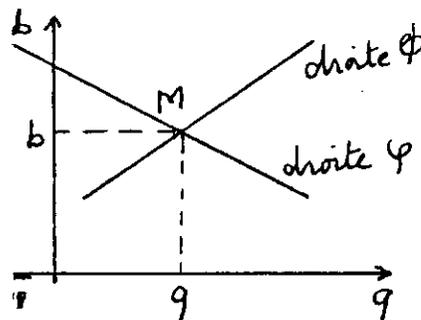


figure 14

Les deux droites ϕ et φ servent de bases pour la solution graphique du coup de bélièr . En effet ,connaissant les conditions aux limites dans la conduite, c.à.d les sections où l'on connaît à un instant donné, la pression et le débit, on pourra représenter sur le diagramme, les points figuratifs correspondants. A l'extrémité amont de la conduite, on sait que la surpression b est nulle, par conséquent le point figuratif correspondant r' reste à tout instant sur l'axe (oQ), comme l'indique la figure 15 page 37 .

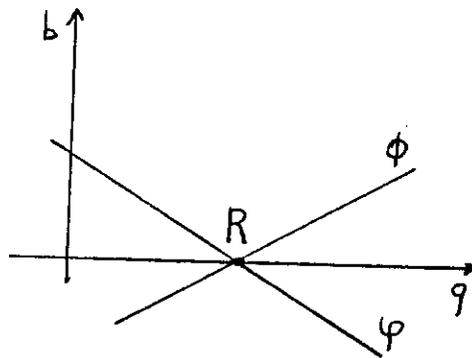


figure 15

Pour ce qui est de l'extrémité avale de la conduite (c.à.d à l'avance) et pour une ouverture $Av \leq A$ au temps t , on a :

$$Q = m Av \sqrt{2g (Ho + b)}$$

où b désigne la valeur du coup de bélièr prise en ce point, m étant le coefficient de contraction et Ho la charge statique au bas de la conduite.

Par suite,

$$\frac{Q^2}{(2gm^2Av^2)} = Ho + bo$$

On voit qu'à chaque valeur de Av correspond une parabole bien déterminée ψ , à axe vertical confondu avec l'axe ob , et de sommet K tel que $\overline{OK} = - Ho$.

En conséquence, quand la vanne a une ouverture Av , le point

figuratif V se trouve au point de rencontre :

- de la parabole ψ (parabole Av)
- d'une droite ϕ (parametre F)
- d'une droite φ (parametre f)

Connaissant la loi de fermeture ou d'ouverture de la vanne ,on peut tracer (figure.17 page38) les paraboles $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ en fonction des sections Av_1, Av_2, Av_3, \dots prises par Av aux temps t_1, t_2, t_3, \dots

En fin quand la vanne est totalement fermée ($Av = 0$). La parabole ψ se confond avec l'axe ob.

En général, il faut retenir qu'en un point bien déterminé de la conduite ($x = \text{constante}$), b et Q varient avec le temps, par suite ,le point figuratif associé, se deplace sur le graphique au fur et à mesure que le temps s'écoule.

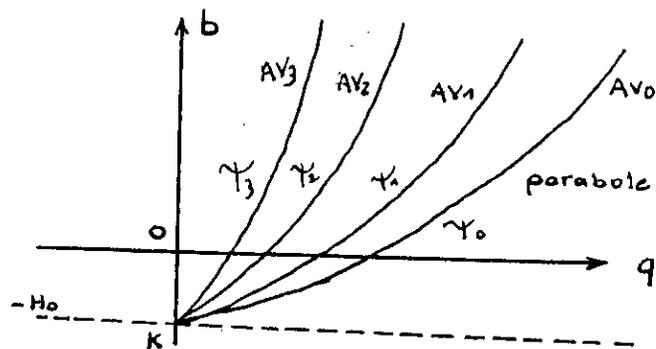


figure 17

III-1-1-Etude d'une fermeture totale et lente du distributeur.

Au temps zéro, avons $Av_0 = A$ (l'ouverture est totale), le débit étant Q_0 le régime est permanent, il n'ya pas de surpression; le

point D est donc nécessairement sur l'intersection de l'axe oq et de la parabole (courbe de la caractéristique du distributeur) ψ_0 correspondant à $A_{vo} = A$ pendant l'intervalle de temps compris entre zéro et $t = 2L/C$ (temps d'aller et retour), l'onde de retour f réfléchi par le réservoir n'est pas encore arrivée au distributeur; sa valeur est donc nulle, la droite correspondante ϕ , liée au point D reste invariable. Entre le temps zéro et t_r le lieu du point D est la droite ϕ_0 de pente $i = -C/gA$, passant par D_0 . Cette droite coupe les paraboles $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ correspondant aux temps $t_r/4, 2t_r/4, 3t_r/4, 4t_r/4$ aux points D_1, D_2, D_3, D_4 .

Nous pouvons mener par ces points les droites $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ d'inclinaison $i = C/gA$ aux quelles correspondent les valeurs F_1, F_2, F_3, F_4 . Ainsi, quand D est en D_1 (temps $t_r/4$) le distributeur émet une onde F_1 , caractérisée par la droite ϕ_1 , elle se propage jusqu'au réservoir qu'elle touche au bout du temps $t_r/4 + t_r/2 = 3t_r/4$, le point de rencontre de ϕ_1 avec la droite oq donne le point C_3 correspondant au $3t_r/4$; de même que les points C_4, C_5, C_6 obtenus par l'intersection des droites ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 avec l'axe oq , relatives à l'extrémité amont aux temps $4t_r/4$ comme unité de temps.

En C_3 part au temps 3 une onde f_3 caractérisée par la droite ϕ_3 . Cette onde arrivera au distributeur au temps $3+2 = 5$ par suite le point D_5 doit se trouver à la fois sur la droite ψ_5 (correspondant au temps $5t_r/4$) et sur la droite ϕ_3 . On obtient aussi le point D_5 relatif à l'extrémité aval au temps 5 . Par D_5 passe une droite ϕ_5 qui coupe oq en C_7 (temps $5+2 = 7$) et ainsi de suite.

Connaissant les points D_0, D_1, D_2, \dots et c_3, c_4, c_5, \dots , on peut évaluer aux instants correspondants, les valeurs de b et de Q à l'origine amont et à l'extrémité aval de la conduite.

Au moment où le distributeur sera fermé totalement, le lieu de D sera sur l'axe ob ($Q=0$). Supposons qu'il soit ainsi au temps 8 , par exemple, le point D_8 sera déterminé par l'intersection de la droite ϕ_6 avec l'axe ob . Il sera de même pour tous les points

correspondants au temps supérieurs à 8. Si l'on poursuit la construction précédemment commencée sur la figure 19 page 41, on voit qu'à partir de D8 et D9 issus de c6,c7 ainsi qu'à partir de c8 et c5 (provenant de D6, D7), les droites ψ et φ successivement menées vont former des losanges. Le diagramme obtenu se ferme sur lui même, il comprend quatre losanges. Le phénomène devient périodique et indéfini (pas de forttements) de periode 2τ .

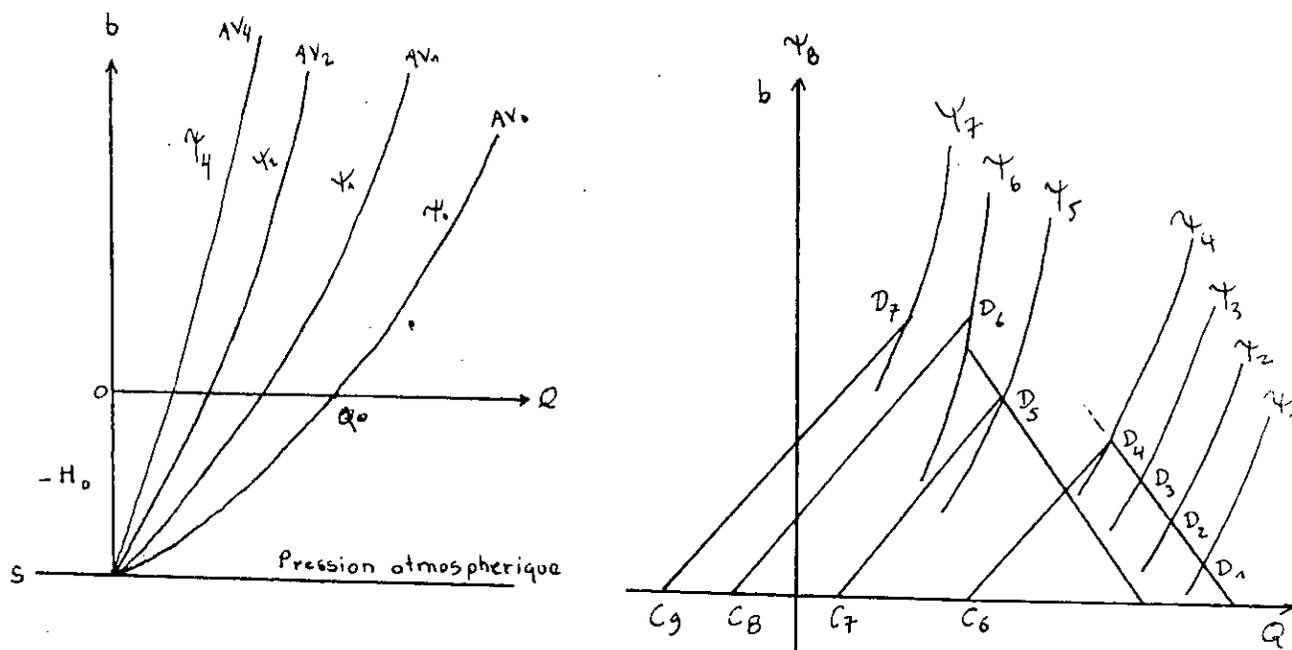


figure 18

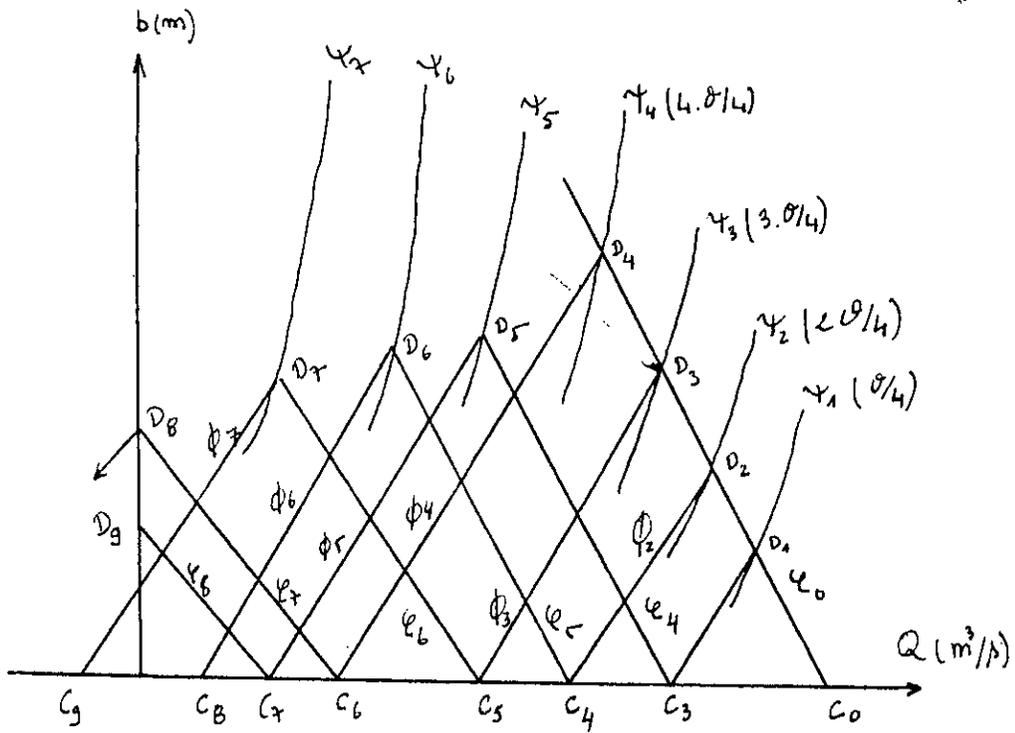


Figure 19

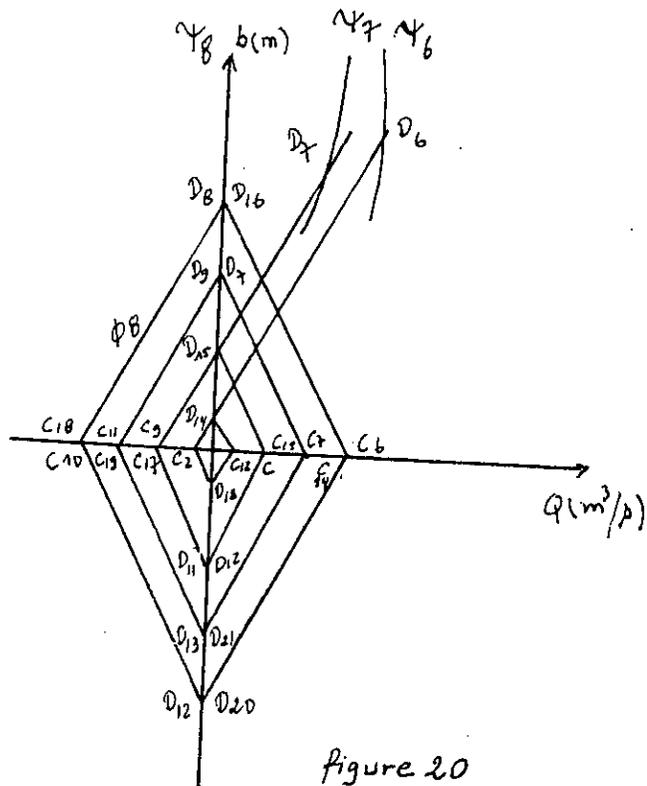


Figure 20

La pression totale au distributeur, pour chaque valeur q de débit est donnée par:

$$CD' = \overline{CB} + b$$

La valeur \overline{CB} correspond aux pressions existantes au distributeur en fonction du débit Q en tenant compte des pertes de charge est donnée en ordonnée par la parabole P .

La valeur AD correspond aux surpressions, provoquées par la fermeture régnant au même distributeur pour le débit Q . Donc on voit que D' se déduit de D en portant $\overline{BD'} = \overline{AD}$ d'où l'on tire $\overline{DD'} = \overline{AB}$.

La construction générale du diagramme de Bergeron, en tenant compte des pertes de charge se fait de la manière suivante : A l'instant initial, Do' sera à l'intersection des paraboles P et ψ ; Do se trouve au point d'intersection de la droite ϕ_0 et de l'axe OQ c'est à dire sur OQ (la surpression n'existe pas encore) mais sur la même ordonnée que Do' . La droite ϕ_0 menée par Do le long de laquelle, aux temps $tr/4, 2tr/4, 3tr/4, 4tr/4$ se situent les points $D1, D2, D3, D4$ (sans tenir compte des pertes de charge); alors les points correspondant $D1', D2', D3', D4'$ (en tenant compte des pertes de charge) s'en déduiraient comme il a été dit ci-dessus, en tenant compte des valeurs de $b1, b2, b3, b4$ données par la droite ϕ_0 , or ils doivent se trouver sur les paraboles $\psi1, \psi2, \psi3, \psi4$ (caractéristiques du distributeur), d'où la construction suivante :

On trace la courbe Δ obtenue en augmentant les ordonnées $P = \overline{CB}$ de la parabole P de la perte de charge (diaphragme $kplk$ fictif à laval) de celles b ($b = AD$) de la droite ξ_0 , ou ce qui revient au même en retranchant des ordonnées de la droite ξ_0 l'écart vertical qui sépare l'axe OQ de la parabole P (écart AB sur la figure (), cette courbe coupera les paraboles aux points D' cherchés.

On mènera, par les points $D1, D2, D3, D4$, les droites $\phi1, \phi2, \phi3, \phi4$ coupant l'axe OQ en $C3, C4, C5, C6$ points représentatifs de l'extrémité amont de la conduite (côté chambre de mise en charge) aux temps 3, 4, 5, 6.

La construction se poursuivra en menant les droites $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$. Prenant par exemple le point C_5 : ou même une droite

parallèle à φ_0 de pente $i = - C/GA$, l'intersection de cette droite avec la parabole ψ_7 donne le D_7 , point représentatif du distributeur au temps $5 + 2 = 7$.

D_7 , déduit de D_7 comme il a été dit plus haut, doit se trouver sur l'intersection de la parabole ψ_7 caractéristique du degré d'ouverture

au temps 7, avec la courbe Δ_5 qui la translation de la courbe de façon que les points D_7 et D_7' se situent sur une droite verticale figure().

la construction se poursuivra ainsi de proche en proche, elle sera facilitée par l'établissement, sur un papier calque de la droite et de la courbe qu'on fera glisser, verticalement chaque fois

qu'il sera nécessaire, d'une quantité telle que $No, N5$ voir figure(22)

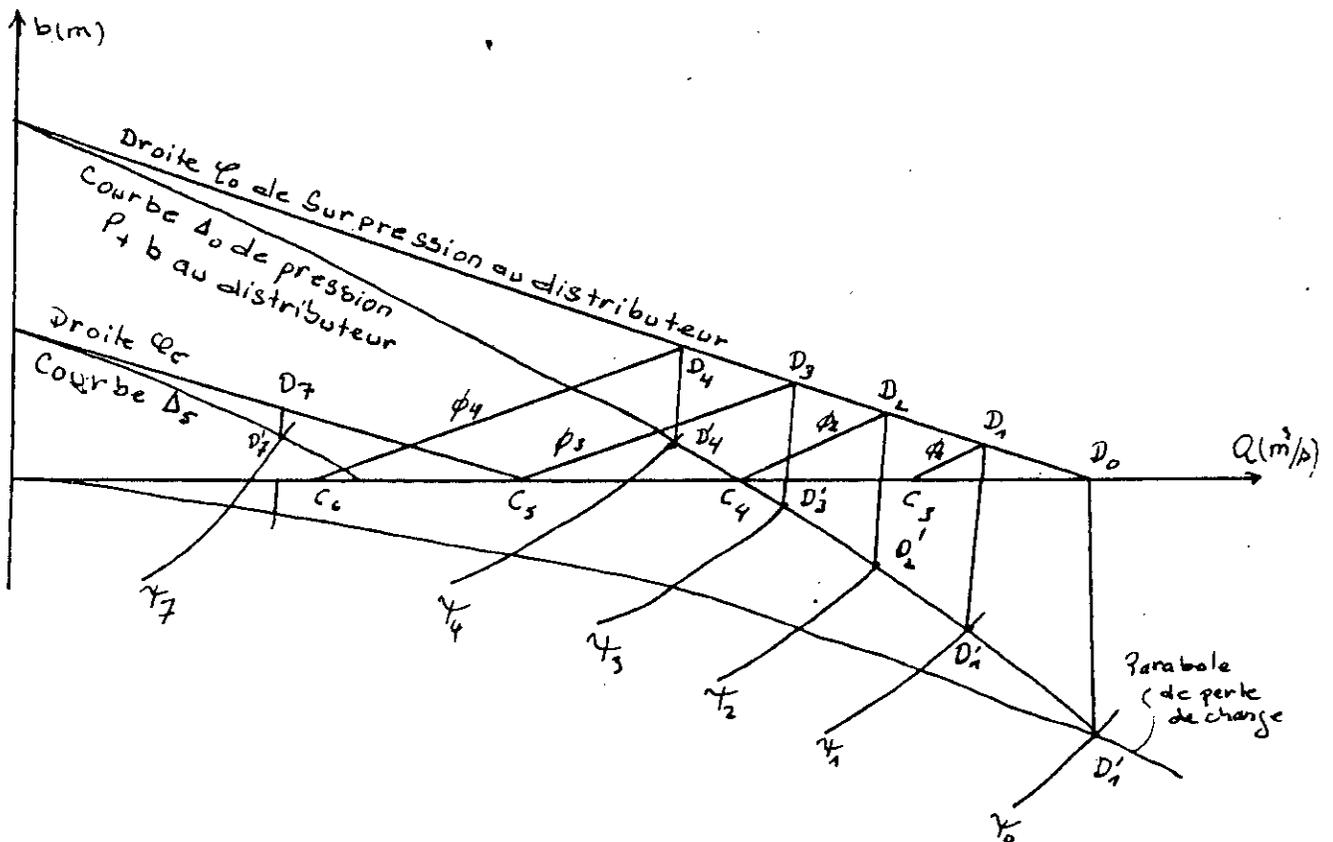


figure 22

III-2 Methode de BERGERON en tenant compte des pertes de charge.

La perte de charge ou perte d'énergie le long d'un courant liquide est due aux frottements des molécules liquides entre elles et les parois du dispositif solide qui guide le courant. Ces frottements interviennent dèsque le mouvement du liquide se produit, puisqu'ils résultent de la viscosité du liquide et de la turbulence du régime.

Etude d'une fermeture lente en tenant compte des pertes de charge supposées concentrée a l'extrémité aval de la conduite .

Si l'on admet que la perte de charge dans la conduite est entièrement concentrée à la sortie aval (en réalité répartie tout le long de la conduite) en supposant un diaphragme fictif qui concentrera la totalité de la perte de charge ; et si comme le montre l'expérience , la perte de charge est proportionnelle au carré du débit Q , on aura comme pression P à l'entrée du distributeur :

$$P = H_0 \pm \alpha Q^2$$

Le signe - étant valable lorsque le débit s'écoule de l'aval vers l'amont ; le signe + lorsqu'il s'écoule de l'amont vers l'aval . H_0 désigne la charge statique à l'extrémité aval de la conduite . Le sommet S des paraboles ψ a pour ordonnée $-H_0$ Par conséquent la courbe P de la pression à l'entrée du distributeur sera une parabole P , d'axe SOB de sommet O et de tangente au sommet OG voir figure (21)

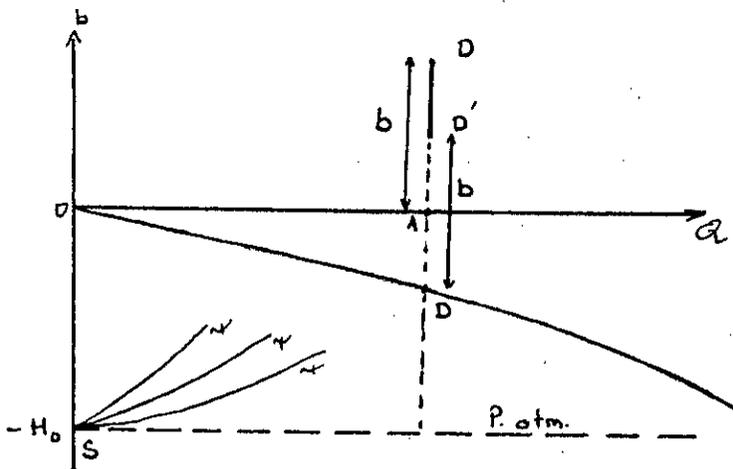


figure 21

III-3 : Détermination des valeurs du coup de belier en tenant compte de pertes de charge : Application du graphe de Bergeron.

Nous nous proposons de calculer les débits et les pressions le long d'une conduite en adduction gravitaire, de diamètre D_c , reliant un réservoir (R) à l'amont, à niveau d'eau constant, et une turbine à l'aval. La longueur développée de la conduite est L . Nous disposons d'une vanne V de diamètre à pleine ouverture D_v à l'extrémité aval de la conduite (figure 23 ci-dessous).

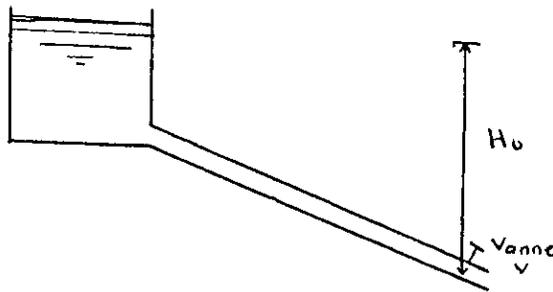


Figure 23

En régime permanent, le débit véhiculé est Q_0 à la vitesse V_0 . on prend comme unité de temps $t_x = \frac{L}{V_0}$, t_r correspond au temps d'aller et retour de l'onde.

On associe les points j_v (à la vanne) et j_r (au réservoir), correspondants au temps $t_j = j \cdot t_x$, où j est un entier naturel. Ainsi, on distingue deux sortes de points : $2j_v$ (ou $2j_r$) et $2(j-1)_v$ (ou $2(j-1)_r$), suivant la valeur de j , c.à.d aux valeurs de $j=1,3,5...$ (impair) correspondants respectivement aux instants $t_r/2, 3t_r/2, 5t_r/2, \dots$. Les points 1_v (ou 1_r), 3_v (ou 3_r), 5_v (ou 5_r), ... qui ne sont autres que les points $(2j-1)_v$ ou $(2j-1)_r$.

De même, suivant la valeur de $j = 0, 2, 4, \dots$ (paire) correspondant aux instants $0t_r/2, 2t_r/2, 4t_r/2, \dots$, on a les points 0_v (ou 0_r), 2_v (ou 2_r), 4_v (ou 4_r), ... qui représentent les points $2j_v$ (ou $2j_r$).

Soient H_{j_v} et H_{j_r} respectivement les pressions au droit de la

vanne et du réservoir au temps $t_j = j \cdot \Delta t$. A cette valeur H_{jv} (ou H_{jr}) correspond une valeur Q_{jv} (ou Q_{jr}), qui représente le débit à la vanne (respectivement au réservoir).

Pour évaluer les pertes de charge, on imagine un diaphragme fictif placé à l'amont (ou à l'aval), qui traduit respectivement les pertes de charge concentrées à l'amont (ou à l'aval). Dans ce cas on désigne par la variable $H(j+1)r$ la pression au point r à l'instant $t(j+1)$ qui lui correspond un débit $Q(j+1)r$.

III-3-1: Pertes de charges concentrées à l'aval

on admet que les pertes de charges sont concentrées à la sortie aval de la conduite. Pour cela, on imagine un diaphragme fictif v' (figure 24 page 46).

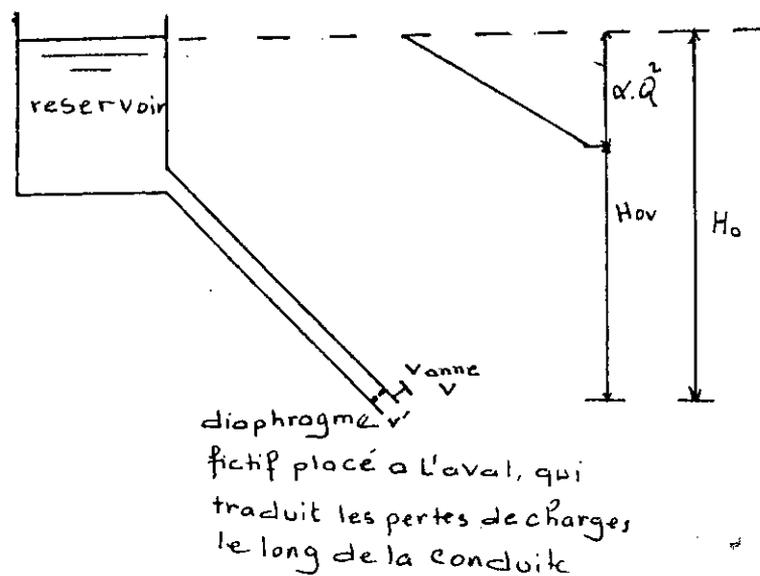


Figure 24

A l'instant initial (régime permanent), au droit de la vanne, on peut écrire :

$$H_{ov} = H_0 - \alpha Q_0^2 \tag{III.1}$$

H_0 : charge statique à la vanne
 αQ_0^2 : exprime la perte de charge au niveau du diaphragme imaginaire

$$Q_0 = m \cdot A_{vo} (2 g H_{ov})^{1/2} \tag{III.2}$$

avec m : coefficient de contraction de la vanne
 A_{vo} : Section de la vanne à $t = 0$

d'où on tire :

$$m = Q_0 / (A_{vo} (2 g H_{ov})^{1/2}) \tag{III.3}$$

La construction graphique de Bergeron est représentée par la figure 25

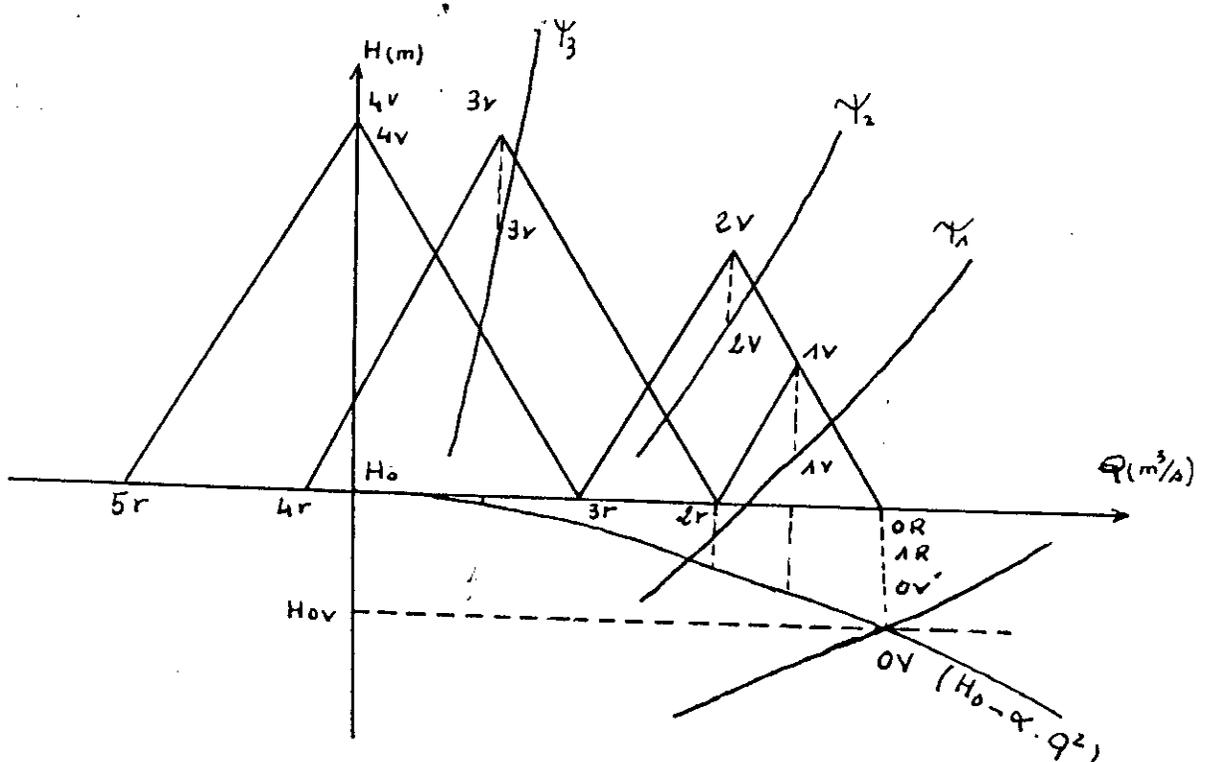


Figure 25

Tous les points représentant le réservoir (jr) aux différents instants se trouvent sur la droite d'équation $H = H_0$.

En élevant la relation (III.6) au carré, on obtient :

$$Q_{jv}^2 = (m \cdot Avj)^2 \cdot (2g H_{jv}) \quad (III.7)$$

De la relation (III.5), on tire $\Delta Q = Q_{jv} - Q(j-1)r$ puis on l'injecte dans l'équation (III.4), qui devient :

$$H_{jv} = H_0 - C \cdot (Q_{jv} - Q(j-1)r)/(g \cdot A) - \alpha Q_{jv}^2 \quad (III.8)$$

En remplaçant H_{jv} dans la relation (III.7), on obtient :

$$Q_{jv}^2 = (m Avj)^2 \cdot 2g (H_0 - C \cdot (Q_{jv} - Q(j-1)r)/(g \cdot A) - \alpha Q_{jv}^2) \quad (III.9)$$

il en vient :

$$Q_{jv}^{2+2} \frac{C/A}{(1/(m Avj))^2 + 2\alpha g} - Q_{jv}^{2-2g} \frac{H_0 + C Q(j-1)r/(g \cdot A)}{(1/(m Avj))^2 + 2\alpha g} = 0 \quad (III.10)$$

On distingue deux cas :

1er Cas : Avant la fermeture totale de la vanne, c.à.d $Avj = 0$

Cette dernière équation du second degré en Q_{jv} est de la forme :

$$a x^2 + b x + C = 0$$

en calculant le discriminant réduit $\Delta' = b^{-2} - a \cdot c$

$$\Delta' = \left[\frac{C/A}{(1/(m Avj))^2 + 2\alpha g} \right]^2 + 2g \frac{H_0 + C Q(j-1)r/(g \cdot A)}{(1/(m Avj))^2 + 2\alpha g}$$

on voit que $\Delta' > 0$, on a deux racines réelles,

$$Q_{jv1} = \frac{C/A}{(1/(m Avj))^2 + 2 \alpha g} + \sqrt{\left[\frac{C/A}{(1/(m Avj))^2 + 2 \alpha g} \right]^2 + 2g \frac{H_o + C Q (j-1)r)/(g.A)}{(1/(m Avj))^2 + 2 \alpha g}}$$

$$Q_{jv2} = \frac{C/A}{(1/(m Avj))^2 + 2 \alpha g} - \sqrt{\left[\frac{C/A}{(1/(m Avj))^2 + 2 \alpha g} \right]^2 + 2g \frac{H_o + C Q (j-1)r)/(g.A)}{(1/(m Avj))^2 + 2 \alpha g}}$$

Cette dernière solution Q_{jv2} n'a aucun sens physique étant donné que la fermeture totale n'est pas encore atteinte (le temps de fermeture t est inférieur au temps de fermeture total T). Le débit est toujours positif.

$$Q_{jv} = \frac{C/A}{(1/(m Avj))^2 + 2 \alpha g} + \sqrt{\left[\frac{C/A}{(1/(m Avj))^2 + 2 \alpha g} \right]^2 + 2g \frac{H_o + C Q (j-1)r)/(g.A)}{(1/(m Avj))^2 + 2 \alpha g}}$$

(III.11)

comme, $Q_{jv} = m Avj \cdot (2g H_{jv})^{1/2}$

$$\text{on a : } H_{jv} = \frac{Q_{jv}^2}{2 g (m Avj)^2} \quad \text{(III.12)}$$

2ème Cas : Fermeture totale de la vanne, c.à.d $Avj = 0$

La vanne est totalement fermée, d'où on a :

$$Q_{jv} = 0$$

$$H_{jv} = H_o + \frac{C}{g A} \cdot Q (j-1)r \quad \text{(III.13)}$$

La relation (III.13) est déduite de l'expression (III.4), en

remplaçant ΔQ par :

$$\Delta Q = Q_{jv} - Q_{(j-1)r} \text{ avec } Q_{jv} = 0$$

b) Détermination du débit $Q_{(j+1)r}$ et de la pression $H_{(j+1)r}$ au niveau du réservoir.

Ces points se situent au niveau du réservoir c.à.d sur la droite H_0

toujours d'après le diagramme de Bergeron, il en résulte :

$$Q_{(j+1)r} = Q_{(j-1)r} + 2 \Delta Q_j$$

Or,

$$\Delta Q = Q_{jv} - Q_{(j-1)r}$$

d'où :

$$Q_{(j+1)r} = Q_{(j-1)r} + 2 (Q_{jv} - Q_{(j-1)r})$$

finalement :

$$Q_{(j+1)r} = 2 Q_{jv} - Q_{(j-1)r} \quad (\text{III.14})$$

III-3-1-2: Interprétation de la méthode

Avant la fermeture totale de la vanne, $t < T$ (temps de fermeture) c.à.d $A_{vj} = 0$, le débit Q et la pression H aux différents points jv sont régis respectivement par les relations (III.11) et (III.12).

La relation (III.11) montre que Q_{jv} dépend uniquement de $Q_{(j-1)r}$, donc en partant d'une valeur connue de $Q_{(j-1)r}$ au niveau du réservoir, on peut déterminer Q_{jv} . Connaissant la valeur de Q_{jv} , on peut déduire la valeur de H_{jv} par la relation (III.13), ensuite on passera à la détermination de $Q_{(j+1)r}$ donné par la relation (III.14). Cette dernière servira pour calculer $Q_{(j+2)v}$ par l'équation (III.11) et ensuite le calcul de $H_{(j+2)v}$ par la relation (III.12).

Ainsi, on suivra le même processus pour le calcul de Q et H jusqu'à la fermeture totale de la vanne à l'instant t_j c.à.d $Q_{jv}=0$.

La relation (III.14) s'écrira $Q_{(j+1)r} = - Q_{(j-1)r}$, c.à.d que le débit au réservoir à l'instant $t_{(j+1)}$ est égal au débit en ce même point à l'instant t_{j-1} mais de signe contraire.

A l'instant t_j , d'après la relation (III.13), on a :

$$H_{jv} = H_o + \frac{C}{g A} \cdot Q_{(j-1)r} \quad (III.15)$$

A l'instant $(j+2)$, on a :

$$H_{(j+2)v} = H_o + \frac{C}{g A} \cdot Q_{(j+1)r}$$

comme $Q_{(j+1)r} = - Q_{(j-1)r}$

donc $H_{(j+2)v} = H_o - \frac{C}{g A} Q_{(j-1)r} \quad (III.16)$

Si on pose

$$\frac{C}{g A} Q_{(j-1)r} = b,$$

les relations (III.15) et (III.16) deviennent :

$$H_{jv} = H_o + b$$

$$H_{(j+2)v} = H_o - b$$

A l'instant $t_{(j+2)}$ se produit une depression b de même valeur que la surpression b qui s'est produite à l'instant t_j , donc, aux instants $t = (t_j + n \cdot t_r)$ (n entier), la valeur du coup de belier à la vanne est la même et égale à b et au reservoir le débit qui rentre est opposé au débit qui sort .

III-3-2 : Pertes de charge concentrées à l'amont :

Considérons les pertes de charges concentrées à l'extrémité amont de la conduite. Pour estimer ces dernières, on imagine un diaphragme fictif placé à cette extrémité (figure 28 page 53).

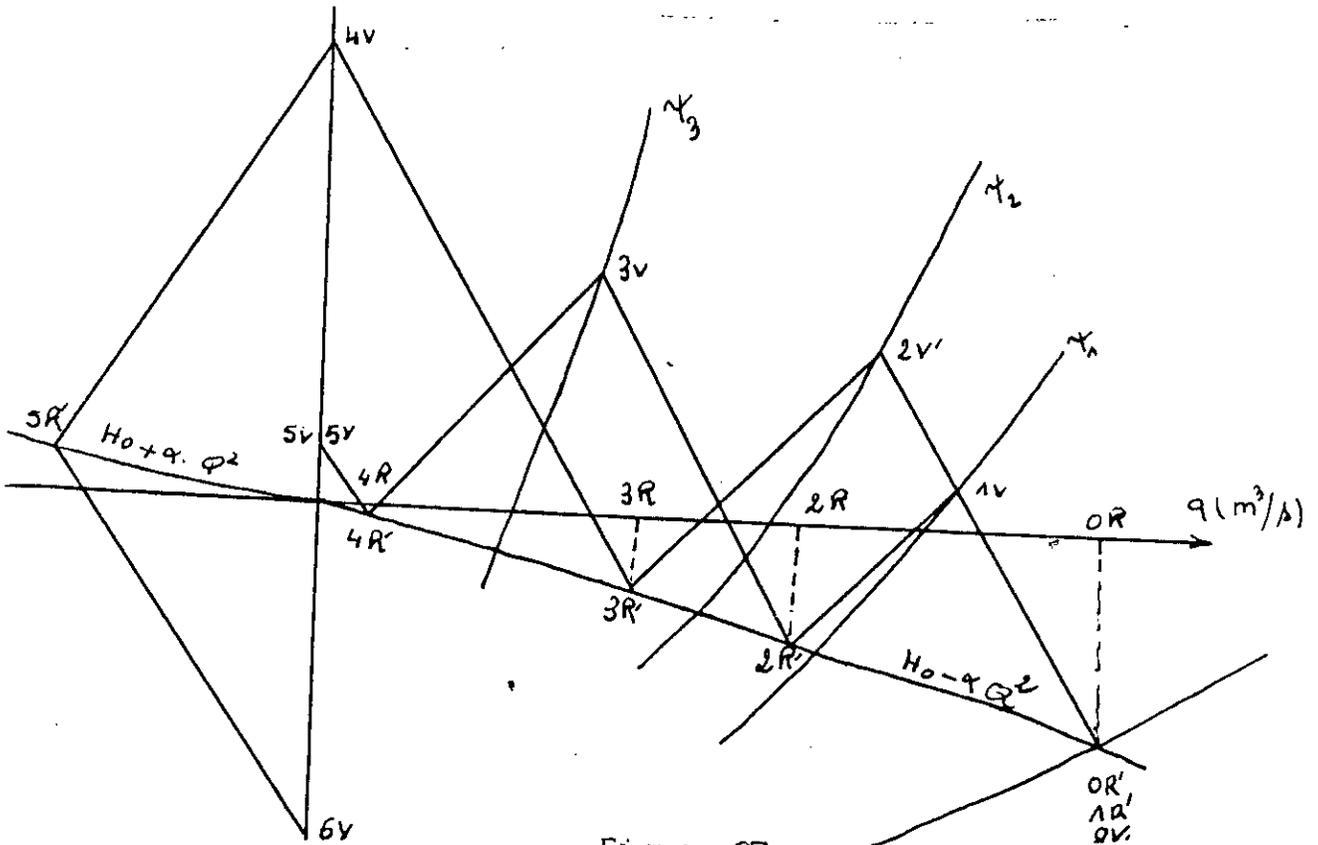


Figure 27

La construction graphique de Bergeron est représentée par la figure. 28 page

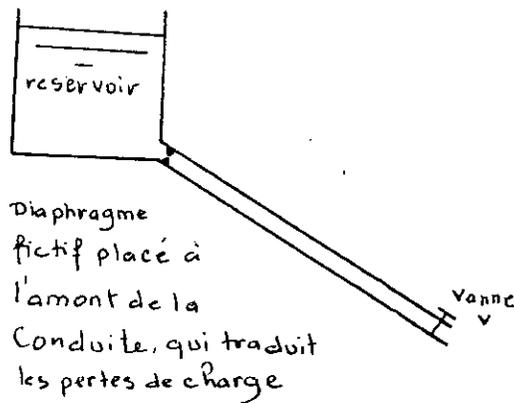


Figure 28

A l'instant initial, nous peut écrire :

$$H_{0v} = H_0 - \alpha Q_0^2$$

$$Q_0 = m A v_0 (2g H_{0v})^{1/2}$$

Les points r' se situant à l'extrémité amont de la conduite , correspondant aux différents instants t_j sont situés sur la courbe d'équation: $H_0 - \alpha |Q| Q$

III-3-2-1: Exposé de la méthode :

Cette étude consiste à déterminer le débit Q_{jv} et la pression H_{jv} au niveau de la vanne aux instants t_j (aux points jv) et à la détermination du débit et de la pression aux points R' aux différents instants.

a) Détermination du débit Q_{jv} et de la pression H_{jv} à la vanne

D'après la construction graphique de Bergeron, (Figure 29 ci-dessous), on peut écrire :

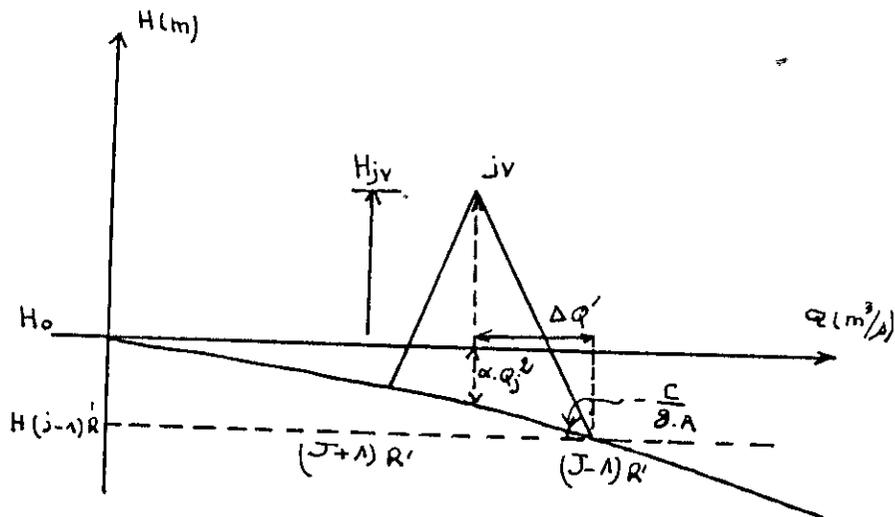


Figure 29

$$- C/2A = \frac{H_{jv} - H(j-1)r'}{\Delta Q_{j'}}$$

d'où

$$H_{jv} = H(j-1) r' - C/gA \Delta Q_{j'} \quad (III.17)$$

$$Q_{jv} = Q(j-1)r' + \Delta Q_{j'} \quad (III.18)$$

$$Q_{jv} = m Avj \cdot (2g H_{jv})^{1/2} \quad (III.19)$$

De l'équation III.18 , on tire $\Delta Q_{j'} = Q_{jv} - Q(j-1)r'$ qu'on remplace dans l'expression III.17, on a :

$$H_{jv} = H(j-1)r' - C/gA (Q_{jv} - Q(j-1)r') \quad (III.20)$$

en élevant l'équation (III.19) au carré, on obtient :

$$Q_{jv}^2 = (m Avj)^2 \cdot 2g \cdot H_{jv}$$

d'où

$$H_{jv} = \frac{Q_{jv}^2}{(m Avj)^2 \cdot 2g} \quad (III.21)$$

En égalisant les équations (III.21 et III.20), on déduit l'équation du second degré en Q_{jv} suivante:

$$Q_{jv}^2 + 2C/A (m Avj)^2 \cdot Q_{jv} - 2.g(m Avj)^2 \left[H(j-1)r' + C/(gA) Q(j-1)r' \right] = 0 \quad (III.22)$$

Suivant Avj , on envisage deux cas :

1er Cas : $Avj \neq 0$ (avant la fermeture totale de la vanne)

La résolution de l'équation du second degré se fait comme suit :

* Calcul du discriminant réduit

$$\Delta' = C/A (m Avj)^2 + 2.g (m Avj)^2 \left[H(j-1)r' + C/(gA) Q(j-1)r' \right]$$

Δ' étant toujours positif, l'équation (III.22) a deux racines réelles :

$$Q_{jv1} = - C/A (m Avj)^2 + \sqrt{\left[C/(m Avj)^2 \right]^2 + 2.g (m Avj)^2 \left[H(j-1)r' + C/(gA) Q(j-1)r' \right]}$$

$$Q_{jv2} = - C/A (m Avj)^2 - \sqrt{C/A (m Avj)^2 + 2.g (m Avj)^2 \left[H(j-1)r' + C/(gA) Q(j-1)r' \right]}$$

La dernière solution n'a aucun sens physique, $Q_{jv2} < 0$, on retient :

$$Q_{jv} = - C/A (m^2 Avj)^2 + \sqrt{C/A (m Avj)^2 + 2.g (m Avj)^2 \left[H(j-1)r' + C/(gA) Q(j-1)r' \right]}$$

(III.23)

De la relation (III.19) on tire:

$$H_{jv} = \frac{Q_{jv}^2}{2 g (m Avj)^2}$$

2ème cas: $Avj \pm 0$ (Fermeture totale de la vanne)

Dans ce cas $Q_{jv} = 0$, d'où de l'équation (III.17) on a :

$$H_{jv} = H(j-1)r' + C/(gA) Q(j-1)r' \tag{III.24}$$

b) Détermination du débit $Q(j+1)r'$ et de la pression $H(j+1)$ au niveau du réservoir.

Il est à noter que la pression $H(j+1)$ au réservoir est donnée par l'équation :

$$H(j+1)r' = H_0 - \alpha | Q(j+1)r' | Q(j+1)r' \quad (III.25)$$

Cette équation dépend du signe de $Q(j+1)r'$, suivant que $Q(j+1)r' \geq 0$ ou $Q(j+1)r' < 0$, (c.à.d : $Av_j = 0$ et $Av_j = 0$).

Deux cas sont à envisager, en considérant $Av_j \neq 0$ et $Av_j = 0$.

D'après la construction de Bergeron, on a :

$$H(j+1)r' = H_{jv} + C/(gA) \Delta Q_j' \quad \text{Avec } \Delta Q_j' = Q(j+1)r' - Q_{jv}$$

1er Cas : $Av_j \neq 0$ Avant la fermeture totale de la vanne :

$$Q(j+1)r' \geq 0 .$$

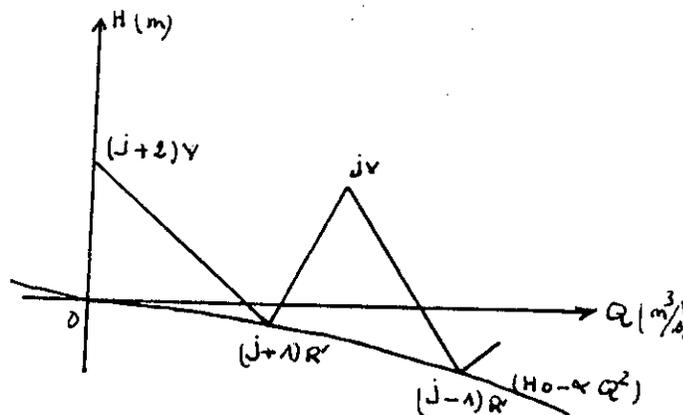


figure 30

on a

$$H(j+1)r' = H_0 - \alpha Q^2(j+1)r' \quad (III.26)$$

$$\Delta Q_j' = Q(j+1)r' - Q_{jv}$$

En remplaçant $\Delta Qj'$ dans l'équation (III.24), on obtient :

$$H(j+1)r' = Hjv + \frac{C}{g A} (Q(j+1)r' - Qjv) \quad (III.27)$$

En égalisant l'équation (III.26) et (III.27), on aura :

$$Hjv + \frac{C}{g A} (Q(j+1)r' - Qjv) = Ho - \alpha Q^2(j+1)r'$$

Après toutes les transformations, nous aboutissons à :

$$Q^2(j+1)r' + 2 \frac{C/A}{2 \alpha g} Q(j+1)r' - \frac{1}{\alpha} (Ho - Hjv + \frac{C}{g A} Qjv) = 0$$

Le discriminant réduit sera :

$$\Delta' = \left[\frac{C/A}{2 \alpha g} \right]^2 + \frac{1}{\alpha} (Ho - Hjv + \frac{C}{g A} Qjv)$$

$\Delta' > 0$, Les solutions de l'équation sont donc :

$$Q(j+1)r'1 = - \frac{C/A}{2 \alpha g} - \sqrt{\left[\frac{C/A}{2 \alpha g} \right]^2 + \frac{1}{\alpha} (Ho - Hjv + \frac{C}{g A} Qjv)}$$

$$Q(j+1)r'2 = - \frac{C/A}{2 \alpha g} + \sqrt{\left[\frac{C/A}{2 \alpha g} \right]^2 + \frac{1}{\alpha} (Ho - Hjv + \frac{C}{g A} Qjv)}$$

La première solution donne un résultat négatif, d'où nous retiendrons la seconde :

$$Q(j+1)r' = \frac{C/A}{2 \alpha g} + \sqrt{\left[\frac{C/A}{2 \alpha g} \right]^2 + \frac{1}{\alpha} (Ho - Hjv + \frac{C}{g A} Qjv)} \quad (III.28)$$

D'où

$$H(j+1)r' = Ho - \alpha Q^2(j+1)r'$$

$$\alpha(j+1)r' < 0$$

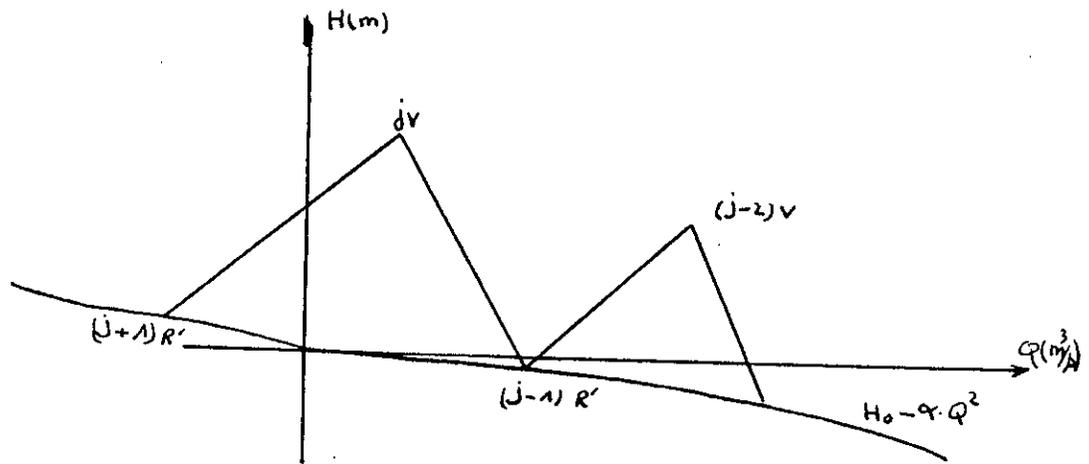


figure 31

L'équation (III.25) s'écrit de la façon suivante:

$$H(j+1)r' = H_0 + \alpha \cdot Q^2(j+1)r' \quad \text{avec } Q(j+1) < 0 \quad (\text{III.29})$$

En égalisant les équations (III.29) et (III.27), il vient

$$H_{jv} + \frac{C}{g A} (Q(j+1)r' - Q_{jv}) = H_0 + \alpha Q^2(j+1)r'$$

soit

$$Q^2(j+1)r' - 2 \frac{C/A}{2\alpha g} Q(j+1)r' - \frac{1}{\alpha} (H_{jv} - H_0 - \frac{C}{g A} Q_{jv}) = 0$$

on calcul le discriminant réduit Δ' :

$$\Delta' = \left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{1}{\alpha} \left[(H_{jv} - H_0 - \frac{C}{g A} Q_{jv}) \right]$$

ainsi, les solutions de l'équation sont:

$$Q(j+1)r' = \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{1}{\alpha} \left[(H_{jv} - H_0 - \frac{C}{g A} Q_{jv}) \right]}$$

$$Q(j+1)r' = \frac{C/A}{2\alpha g} + \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left[(H_{jv} - H_0 - \frac{C}{g A} Q_{jv}) \right]}$$

Nous avons $Q(j+1)r' < 0$, donc nous retiendrons la solution donnant un resultat négatif, qui est:

$$Q(j+1)r' = \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left[(H_{jv} - H_0 - \frac{C}{g A} Q_{jv}) \right]} \tag{III.30}$$

d'où

$$H(j+1)r' = H_0 + \alpha Q^2(j+1)r' \tag{III.31}$$

remarque.

la détermination de la valeur de $Q(j+1)r'$ dépend de son signe, donc, nous procéderons de la manière suivante: on suppose que la valeur de $Q(j+1)r'$ est négative, ainsi nous calculons la valeur $Q(j+1)r'$ par la relation (III.30). Si le resultat est compatible avec l'hypothèse de départ, on prend cette valeur; dans le cas contraire, $Q(j+1)r'$ sera donné par la relation (III.28)

2ème cas: $Av_j = 0$ (après fermeture totale de la vanne)

$Q(j+1)r' \geq 0$

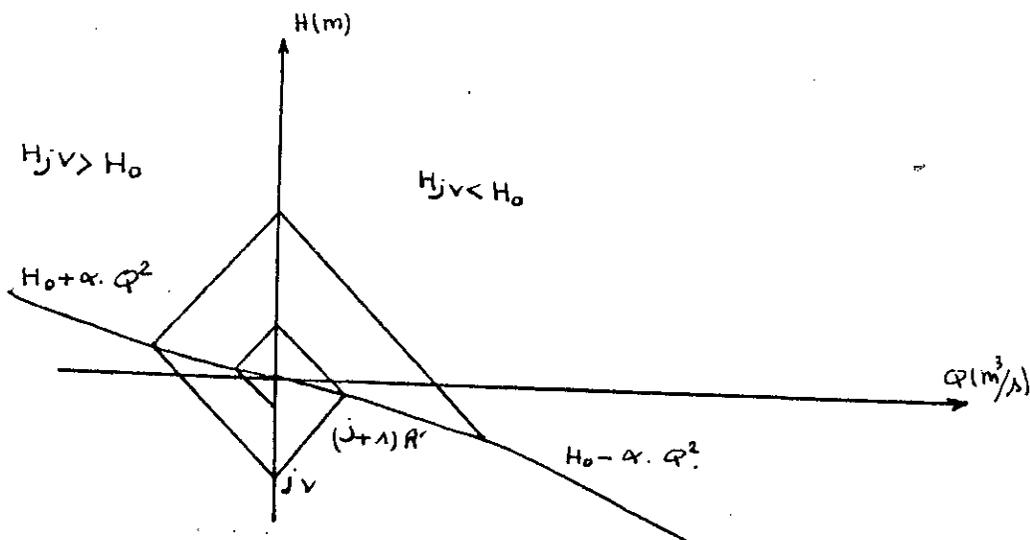


Figure 32.

Dans ce cas, nous avons $H_{jv} \leq H_0$ puisque $Q_{(j+1)r'} \geq 0$.
 Le débit au niveau de la vanne sera donné par la relation (III.30) en posant $Q_{jv} = 0$.

$$Q_{(j+1)r'} = \frac{C/A}{2\alpha g} + \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left(H_{jv} - H_0 - \frac{C}{g A} Q_{jv} \right)}$$

d'où (III.32)

$$H_{(j+1)r'} = H_0 + \alpha Q_{(j+1)r'}^2 \tag{III.33}$$

• $Q_{(j+1)} < 0$

D'après la figure(III.9), ceci se traduit par $H_{jv} > H_0$. La valeur de débit au niveau de la vanne sera nulle(Q_{jv}).D'où la valeur de $Q_{(j+1)r'}$ (débit au niveau du réservoir) sera donné par la relation

(III.30), avec $Q_{jv} = 0$

$$Q_{(j+1)r'} = \frac{C/A}{2\alpha g} + \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left(H_{jv} - H_0 - \frac{C}{g A} Q_{jv} \right)}$$

(III.34)

d'où

$$H_{(j+1)r'} = H_0 + \alpha Q_{(j+1)r'}^2 \tag{III.35}$$

III-3-2-2) Interprétation de la méthode

Pour l'étude d'un point jv à un instant $t_j = j.t_x$ (t_x : temps d'un aller et d'un retour de l'onde à la vanne), On procède de la manière suivante .

Si la fermeture totale de la vanne n'est pas atteinte, l'expression du débit Q_{jv} est donnée par la relation suivante :

$$Q_{jv} = C/A (m Av_j) +$$

$$\sqrt{\left[\frac{C}{(m Av_j)} \right]^2 + 2 \cdot g (m Av_j) \left[H(j-1)r' + \frac{C}{(gA)} Q(j-1)r' \right]}$$

Donc connaissant les valeurs de $Q(j-1)r'$ et de $H(j-1)r'$, nous pouvons déterminer Q_{jv} , qui à son tour servira pour calculer H_{jv} par la relation suivante :

$$H_{jv} = \frac{Q_{jv}^2}{2 g (m \cdot Av_j)^2}$$

Nous passerons ensuite au point (j+1); connaissant les valeurs de H_{jv} et de Q_{jv} , nous pourrions calculer la valeur de $Q(j+1)r'$ donnée par les relations suivantes, selon le signe de $Q(j+1)r'$

si $Q(j+1)r' \geq 0$

$$Q(j+1)r' = - \frac{C/A}{2 \alpha g} + \sqrt{\left[\frac{C/A}{2 \alpha g} \right]^2 + \frac{1}{\alpha} (H_0 - H_{jv} + \frac{C}{g A} Q_{jv})}$$

Si $Q(j+1)r' < 0$

$$Q(j+1)r' = \frac{C/A}{2 \alpha g} - \sqrt{\left[\frac{C/A}{2 \alpha g} \right]^2 + \frac{1}{\alpha} (H_{jv} - H_0 - \frac{C}{g A} Q_{jv})}$$

Les valeurs de $Q(j+1)r'$ et de $H(j+1)r'$ serviront pour le calcul de $Q(j+2)v$ qui permettra à son tour de déterminer $H(j+2)v$ puis nous passerons au calcul de $Q(j+3)r'$ et de $H(j+3)r'$ et nous procéderons de la même manière jusqu'à la fermeture totale.

En supposant que la fermeture totale est atteinte à $t = t(j+m).tx$ Le débit $Q(j+m)$ sera nul d'où $h(j+m)v$ sera donnée par la relation suivante :

$$H(j+m)v = H(j+m-1)r' + \frac{C}{gA} Q(j+m-1)r'$$

III-4. Détermination d'une loi de fermeture avec pertes de charge .

III-4-1. Pertes de charge concentrées à l'aval

Dans cette partie , nous sommes amenés à la détermination d'une loi de fermeture en supposant que les pertes de charge sont concentrées à l'aval . Le diagramme de BERGERON correspondant est représenté ci-dessous [figure .24 et 25]

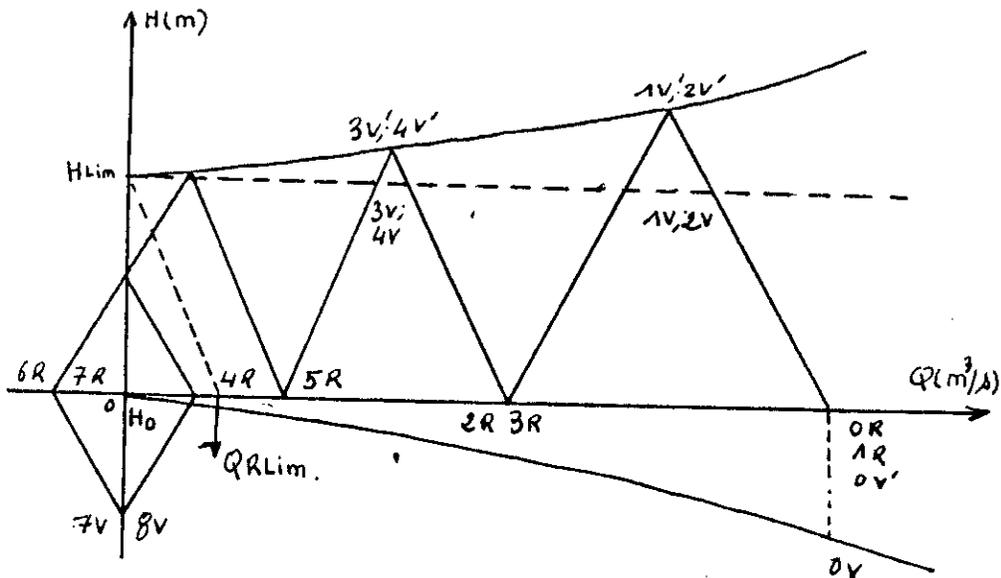


figure 33

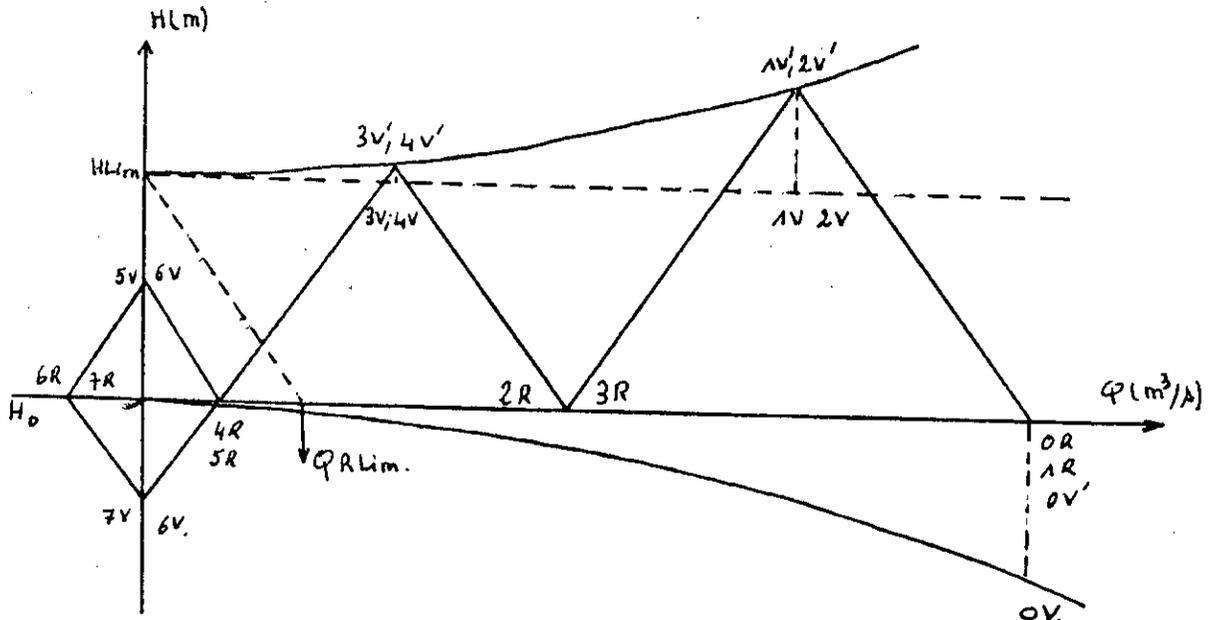


figure 34

Connaissant les valeurs de $H(j+m-1)$ et de $Q(j+m-1)$ nous pourrons déterminer la valeur de $H(j+m)v$ qui nous donnera la valeur de $Q(j+m+1)r'$

*si $H(j+m) \leq H_0$ nous aurons,

$$Q(j+m+1)r' = -\frac{C/A}{2 \alpha g} + \sqrt{\left(\frac{C/A}{2 \alpha g}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} (H_0 - H_{jv} + \frac{C}{g A} Q_{jv})}$$

*si $H(j+m) > H_0$ nous aurons,

$$Q(j+m+1)r' = -\frac{C/A}{2 \alpha g} + \sqrt{\left(\frac{C/A}{2 \alpha g}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} (H_0 - H_{jv} + \frac{C}{g A} Q_{jv})}$$

Ce dernier servira pour le calcul de $H(j+m+1)r'$ suivant :

* $Q(j+m+1)r' \geq 0$ on a

$$H(j+m+1)r' = H_0 - \alpha (Q(j+m+1)r')^2$$

* $Q(j+m+1)r' < 0$ on a

$$H(j+m+1)r' = H_0 + \alpha (Q(j+m+1)r')^2$$

Les valeurs de $Q(j+m+1)r'$ et $H(j+m+1)r'$ seront utilisées pour calculer $H(j+m+2)r'$ qui permettra de déterminer $Q(j+m+3)r'$ et $H(j+m+3)r'$. Nous procéderons de la même manière autant de fois qu'il faudra.

Si on considère que la fermeture totale n'est pas atteinte (le débit $Q_{jv} \neq 0$), on a $H_{jv} = H_{lim}$. Ainsi les points jv sont sur la droite d'équation $H=H_{lim}$.

Si par contre la fermeture totale est atteinte; on a $H_{jv} < H_{lim}$ et les points jv seront sur l'axe vertical OH . Il est à noter que les points r sont disposés sur l'axe horizontal OQ (figure 33 et 34 page)

A l'instant initial, on a :

$$H_{vo} = H_o - \alpha Q_o^2$$

A tout instant, on a :

$$H_{jv} = H_{lim} \quad \text{si } Q_{v(j)}=0$$

III-4-1-1. Exposé de la méthode :

D'après la construction graphique de BERGERON, on remarque qu'il existe un point r de coordonnées $(Q=Q_{rlim}, H=H_o)$ donné par l'intersection de la droite de pente $-C/gA$; menée du point de coordonnées $(Q = 0, H = H_{lim})$ avec l'horizontal OQ . Le point étant positionné, nous allons considérer un point $(j-1)r$ de coordonnées $(Q(j-1)r, H_o)$; puis comparer la valeur de $Q(j-1)r$ à celle de Q_{rlim} . On distingue deux cas :

1er cas: $Q_{r(j-1)} > Q_{rlim}$

On a $Q_{jv} \neq 0$ et le diagramme de BERGERON est représenté par la figure 33 page .

2eme cas: $Q(j-1)r < Q_{rlim}$

On a $Q_{v(j)} = 0$ et le diagramme de BERGERON sera représenté par la figure 34 page .

Avant de procéder à l'étude en considérant chaque cas séparément, on a d'abord déterminer la valeur de Q_{rlim} .

Les figures 33 et 34 nous permettent d'établir les relations suivantes :

$$H_{lim} = H_0 - C/gA \cdot \Delta Q_j$$

$$Q_{jv} = Q_{rlim} + \Delta Q_j$$

comme $Q_{jv} = 0$, on a :

$$\Delta Q_j = - Q_{rlim}$$

$$H_{lim} = H_0 + C/g A Q_{rlim}$$

finalement, on a :

$$Q_{rlim} = \frac{gA}{C} (H_{lim} - H_0) \quad (III.36)$$

a) Détermination du débit Q_j et de la pression H_j à la vanne :

$$\text{1er cas : } Q_{(j-1)r} > Q_{rlim}$$

D'après la construction graphique de BERGERON figure 33 page

on tire :

$$H_{lim} = H_0 - \frac{C/A}{g} \left[Q_{jv} - \alpha Q_v(j)^2 \right] \quad (III.37)$$

$$Q_{jv} = Q_{(j-1)r} + \Delta Q_j \quad (III.38)$$

En remplaçant ΔQ_j par son expression dans la relation (III.37), on obtient la relation suivante :

$$H_{lim} = H_0 - \frac{C/A}{g} \left[Q_{jv} - Q_{(j-1)r} \right] - \alpha Q_v(j)^2$$

Après toute transformation, il vient :

$$Q_{jv}^2 + 2 \frac{C/A}{\alpha g} Q_{jv} - \frac{1}{\alpha} \left[H_0 - H_{lim} + \frac{C/A}{g} Q_{(j-1)r} \right] = 0 \quad (III.39)$$

de la relation (III.39) , on tire :

$$H_{lim} - H_0 = \frac{C/A}{g} Q_{rlim}$$

La relation (III.39) devient alors :

$$Q_{jv}^2 + 2 \frac{C/A}{\alpha g} Q_{jv} - \frac{C/A}{\alpha g} \left[Q_{r(j-1)} - Q_{rlim} \right] = 0$$

La résolution de cette équation du second degré en $Q_v(j)$, se fait comme suite :

$$\Delta' = \left[\frac{C/A}{\alpha g} \right]^2 + \frac{C/A}{\alpha g} \left[Q_{(j-1)r} - Q_{rlim} \right]$$

Δ' étant positif, les solutions de l'équation s'écrivent :

$$Q_{jv1} = - \frac{C/A}{\alpha g} + \sqrt{ \left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{C/A}{\alpha g} \left[Q_{(j-1)r} - Q_{rlim} \right] }$$

$$Q_{jv2} = - \frac{C/A}{\alpha g} - \sqrt{ \left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{C/A}{\alpha g} \left[Q_{(j-1)r} - Q_{rlim} \right] }$$

La seconde solution n'a aucun sens physique d'où on retient :

$$Q_{jv} = - \frac{C/A}{\alpha g} + \sqrt{ \left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{C/A}{\alpha g} \left[Q_{(j-1)r} - Q_{rlim} \right] } \quad (III.40)$$

On peut alors déterminer la section d'ouverture de la vanne Av_j à l'instant t_j :

$$Q_{jv} = m A_{vj} \sqrt{2 g H_{lim}}$$

d'où

$$A_{vj} = \frac{Q_{jv}}{m (2 g H_{lim})^{1/2}} \quad (III.41)$$

2ème cas: $Q(j-1)r < Q_{rlim}$

Dans ce cas on a $A_{vj} = 0$ et $Q_{jv} = 0$ et $H_{jv} < H_{lim}$. D'après la construction de BERGERON (figure page), on tire :

$$H_j = H_0 - (C/gA) \Delta Q_j$$

$$Q_{jv} = \Delta Q_j + Q(j-1)r$$

d'où

$$\Delta Q_j = - Q(j-1)r$$

on a :

$$H_{jv} = H_0 + (c/gA) Q(j-1)r \quad (III.42)$$

b) Détermination du débit $Q(j+1)$ et de la pression $H(j+1)$ au niveau du réservoir.

On a d'après la construction graphique de BERGERON :

$$Q_r(j+1) = Q_r(j-1) + 2\Delta Q(j)$$

or

$$\Delta Q(j) = Q_v(j) - Q_r(j-1)$$

d'où

$$Q(j+1)r = Q(j-1)r + 2 \left[Q_{jv} - Q(j-1)r \right]$$

finalement, on a :

$$Q(j+1)r = 2 Qjv - Q(j-1)r \quad (III.43)$$

III-4-1-2 Interpretation de la methode.

On se propose de déterminer le débit Qjv , la pression Hjv au niveau de la vanne et la section d'ouverture de celle-ci à un instant tj (avant et après la fermeture de la vanne).

Comme nous l'avons vu dans l'exposé de la methode, il y a lieu de considérer deux cas :

1er cas: $Q(1+j)r > Qrlim$

Dans ce cas ,la fermeture totale de la vanne n'est pas atteinte et on a $Hjv = Hlim$.

Le débit Qjv correspondant est non nul et son expression donnée par la relation [III.40] est fonction de $Q(j-1)r$ (débit au niveau du réservoir à l'ihstant $t(j-1)$).

Connaisant la valeur de $Q(j-1)r$, on peut calculer la valeur de Qjv en utilisant la relation [III.40], qui servira à son tour pour la détermination de Ajv à l'aide de la relation (III.41)

Ensuite, on passera au calcul de $Q(j+1)r$ en utilisant la formule (III.43), qu'on comparera avec $Qrlim$.

Si la condition $Q(j+1)r > Qrlim$ est vérifiée, $Q(j+1)r$ sera utilisé

pour le calcul de $Qv(j+2)$ par la relation (III.40) auquel correspondra une section d'ouverture $Av(j+2)$, tirée de la relation (III.41), puis on détermine la valeur de $Qr(j+3)$ par la relation (III.43).

Ainsi on procédera de proche en proche, de la même manière que précédement jusqu'à ce que la condition posée au début, c'est à dire $Q(j-1)r > Qrlim$, ne soit plus vérifiée : ce qui correspond à une fermeture totale de la vanne. En supposant que la condition posée n'est pas vérifiée à l'instant $t=(j+i)tx$, nous aurons $Q(j+i+1)v = 0$ et la condition posée devient $Qr(j-1) < Qrlim$.

2ème cas: $Q_r(j-1) \leq Q_{rlim}$

Dans ce cas, la fermeture totale de la vanne est atteinte, par conséquent $Q(j+i+1)v = 0$ et $H(j+i+1)v < H_{Lim}$. L'expression de $H(j+i+1)v$ donnée par la relation (III.42) est fonction de $Q(j+i)r$.

La valeur de $Q(j+i)r$ étant connue, nous pourrions déterminer $H(j+i+1)v$ à l'aide de la relation (III.42), puis nous passerons au calcul de $Q_r(j+i+1)$ donné par la relation (III.46). Cette dernière nous permettra de calculer $H(j+i+3)v$ en utilisant la relation (III.42). Ensuite de la relation (III.43), nous tirons la valeur de $Q(j+i+4)r$. Ainsi nous pouvons continuer indéfiniment.

REMARQUE

1/ Avant la fermeture de la vanne $Q(j-1)r > Q_{rlim}$

D'après la relation (III.40), Q_jv est fonction de $Q(j-1)r$; si nous considérons que le débit au réservoir aux instants $t_j = (2i).t_x$ et $t_j = (2i-1).t_x$ sont égaux c'est à dire $Q(2i-1)r = Q(2i-2)r$, nous aurons $Q(2i)v = Q(2i-1)v$ par conséquent $Av(2i) = Av(2i-1)$, ceci en utilisant la relation (III.42). la relation (III.43) nous donnera: $Q(2i+1)r = Q(2i)r$.

Ainsi, nous procéderons ~~de la même manière que~~ précédemment jusqu'à ce que la condition posée [$Q_r(j-1) > Q_{rlim}$] ne soit plus vérifiée, ce qui correspond à une fermeture totale vanne.

2/ Après la fermeture totale de la vanne

Supposant que la fermeture totale de la vanne est atteinte à l'instant $t = (j+p).t_x$ ($Av(j+p) = 0$), ainsi nous aurons $Q_r(2i+p+1) = Q_r(2i+p-2)$.

La relation (III.42) nous donne :

$$H(2i+p)v = H(2i+p-1)v$$

La relation (III.43) nous donne :

$$Q(2i+p-1)r = Q(2i+1)r$$

Dans notre cas, nous avons :

$$A \ t=0 \quad (j=0) \quad Q(0)r = Q_0$$

$$A \ t=2 \text{ sec} \quad (j=2) \quad Q(0)r = Q(1)r$$

Ceci s'explique par le fait que, l'onde incidente crée au niveau de la vanne au début de la fermeture, n'ait pas encore affectée au début de l'écoulement au réservoir (pas de changement de débit Q_0). Ce débit s'emmagine dans la partie dilatée de la conduite .

On a donc :

$$Q(1)v=Q(2)v$$

$$Av(1)=Av(2)$$

$$Q(2)r=Q(3)r$$

Ainsi dans le calcul de l'exemple , nous aurons à déterminer $Q_jv, H_jv, Av_j, Q(j+1)r'$ aux points $j=2i$, puis nous prendrons les mêmes résultats pour les points $(2i-1)$ en tenant compte des remarques citées plus haut.

II-4-2 Pertes de charge concentrées à l'amont.

Le digramme de BERGERON correspondant à l'optimisation de la fermeture, dont les pertes de charges sont concentrées à l'amont est représenté ci-dessous (figures 26 et .27). Selon la position du point $Q(j-1)r$ par rapport à Q_{lim} , nous aurons deux cas de figure (fig.26 et fig.27).

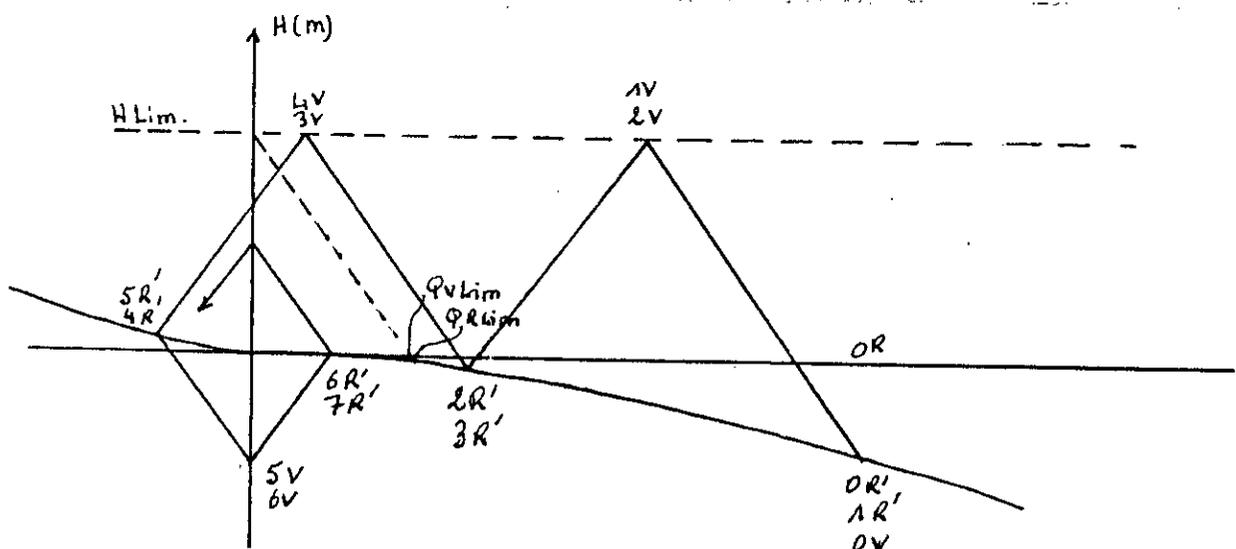


figure 26

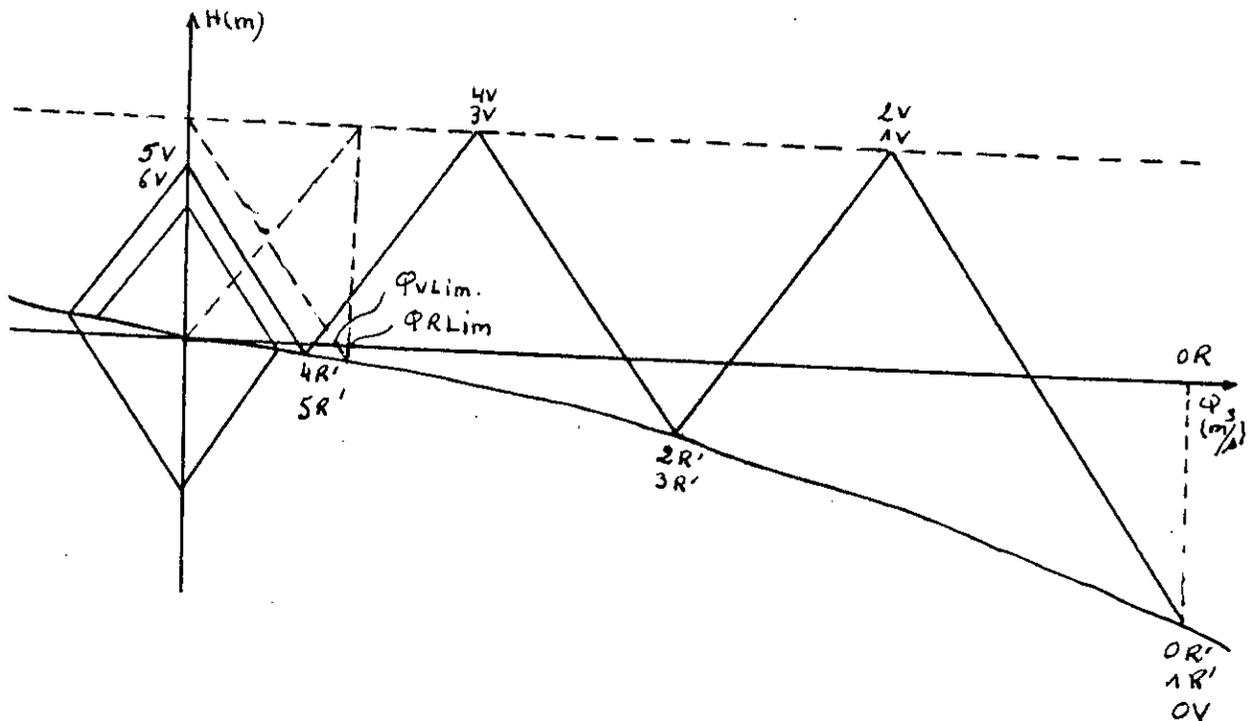


figure.27

Si à un instant t_j la vanne n'est pas totalement fermée, c'est à dire que le débit $Q_{jv} \neq 0$, nous aurons alors $H_{jv} = H_{lim}$ et tous les points jv pour lesquels la fermeture totale n'est pas atteinte seront sur la droite d'équation $H = H_{lim}$. Si par contre la fermeture totale est atteinte ($Q_{jv} = 0$), nous aurons $H_{jv} \leq H_{lim}$ les points jv seront situés sur l'axe vertical OH . Les points r' seront situés sur la courbe d'équation : $H_0 - \alpha |Q_{r'}| Q_{r'}$.

III-4-2-1 EXPOSE DE LA METHODE

Détermination de Q_{rlim} :

D'après la construction graphique de BERGERON, on remarque que le point Q_{rlim} est obtenu par l'intersection de la courbe d'équation c/gA issue du point $(H = H_{lim}, Q = 0)$ et de la courbe d'équation : $H_0 - \alpha.Q^2$. Ce point Q_{rlim} aura donc pour coordonnées $(Q=Q_{rlim}, H=H_0)$.

Du diagramme de BERGERON, fig(III.16) et (III.17), nous établirons les relations suivantes :

$$H_{lim} = H_r(j-1) - c/gA \Delta Q_j \dots\dots\dots (III.44)$$

$$Q_{vj} = \Delta Q'_j + Q_{Rlim} \dots\dots\dots (III.45)$$

$$H_r(j-1) = H_o - \alpha Q_{Rlim}^2 \dots\dots\dots (III.46)$$

de (III.45) , nous tirons

$$\Delta Q'_j = Q_{vj} - Q_{Rlim} \dots\dots\dots (III.47)$$

Or, $Q_{vj} = 0$ donc $\Delta Q'_j$ devient égal à $-Q_{Rlim}$ qu'on remplace dans l'équation (III.44).

on obtient :

$$\Delta Q'_j = - Q_{Rlim}.$$

on remplace $\Delta Q'_j$ dans (III.44) et on obtient :

$$H_{lim} = H(j-1) + c/gA Q_{Rlim}.$$

en remplaçant $H(j-1)r'$ dans la relation (III.47) on obtient :

$$H_{lim} = H_o - \alpha \cdot Q_{Rlim}^2 + \frac{C}{gA} \cdot Q_{Rlim} .$$

après transformations ,on obtient une équation du second degré en Q_{Rlim} :

$$Q_{Rlim}^2 - 2 \cdot \frac{C/A}{2\alpha g} Q_{Rlim} + \frac{1}{\alpha} [H_{lim} - H_o]$$

Le discriminant réduit est :

$$\Delta' = \left(\frac{C/A}{2\alpha g} \right)^2 - \frac{1}{\alpha} [H_{lim} - H_o]$$

Les solutions de l'équation sont:

$$Q_{Rlim1} = \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g} \right)^2 - \frac{1}{\alpha} [H_{lim} - H_o]}$$

$$Q_{Rlim2} = \frac{C/A}{2\alpha g} + \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g} \right)^2 - \frac{1}{\alpha} [H_{lim} - H_o]}$$

La deuxième solution n'a aucun sens physique ,

d'où on retient :

$$QRlim = \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left[\frac{C/A}{2\alpha \cdot g}\right]^2 - \frac{1}{\alpha} (Hlim - Ho)}$$

(III.48)

Determination de QVlim.

Le point QVlim est obtenu par l'intersection de la droite de pente $-c/gA$ menée du point de coordonnées $(Q = 0, H = Hlim)$ avec l'axe horizontal OQ . Ce point a pour coordonnées $(Q=QVlim, H=Ho)$.

D'après le diagramme de BERGERON, on tire les relations suivantes:

$$Hlim = Ho - \frac{C}{gA} \Delta Qj \tag{III.49}$$

$$Qjv = \Delta Qj + QVlim \tag{III.50}$$

De (III.50) nous tirons

$$\Delta Qj = Qjv - QVlim = - QVlim \quad \text{car } Qjv = 0.$$

en remplaçant ΔQjv dans la relation (III.49) on obtient:

$$Hlim = Ho + \frac{C}{gA} \cdot QVlim$$

D'où

$$QVlim = \frac{gA}{C} (Hlim - Ho). \tag{III.51}$$

a) Détermination des valeurs de débits, pressions et ouvertures de lavanne aux points jv .

Pour l'étude des points jv , on envisage deux cas, selon que $Q(j-1)r' > QRlim$ où $Q(j-1)r' \leq QRlim$.

1er cas : $Q(j-1)r' > Q_{Rlim}$.

Dans ce cas on aura $Q_{jv} \neq 0$ (la fermeture totale n'est pas encore atteinte). D'après le diagramme de BERGERON ,on tire les relations suivantes :

$$H_{lim} = H(j-1)r - \frac{C}{gA} \cdot \Delta Q'j \quad (III.52)$$

$$Q_{jv} = \Delta Q'j + Q(j-1)r \quad (III.53)$$

De l'équation (III.53), nous tirons ΔQj que nous remplaçons dans (III.52),

$$H_{lim} = H(j-1)r' - \frac{C}{gA} \left[Q_{jv} - Q(j-1)r' \right] \quad (III.54)$$

Après toute transformation nous aboutissons à:

$$Q_{jv} = Q(j-1)r - \frac{C}{gA} \left[Q_{jv} - Q(j-1)r \right]$$

Or, $Q_{Vj} = m.A_{jv} \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{lim}}$

on aura donc :

$$A_{Vj} = \frac{Q_{Vj}}{m.A_{jv} \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{lim}}} \quad (III.55)$$

2ème cas :

Dans ce cas , nous avons $Q_{Vj} = 0$ et donc les points jv seront situés sur l'axe vertical OH. La fermeture totale de la vanne est atteinte ; par conséquent $A_{Vj} = 0$.
on a

$$H_{vj} = H(j-1)r - \frac{C}{gA} \Delta Q'j$$

Or,

$$Q_{jv} = \Delta Q'j + Q(j-1)r$$

Comme $Q_{jv} = 0$, on a $\Delta Q'j = - Q(j-1)r$.

Finalement, on obtient

$$H_{jv} = H(j-1)r + \frac{C}{gA} Q(j-1)r \quad (III.56)$$

b) Etude des points $Q(j+1)r$

Nous savons que $h(j+1)r$ s'écrit de la façon suivante :

$$H(j+1)r = H_0 - \alpha \cdot |Q(j+1)r| \cdot Q(j+1)r$$

donc elle dépend du signe de $Q(j+1)r$, d'où nous distinguerons deux cas :

1er cas: $Q(j+1)r \geq 0$

2ème cas: $Q(j+1)r < 0$

Nous traitons ces deux cas en considérant ,

* $Av \neq 0$

** $Av_j = 0$

a) Avant la fermeture totale de la vanne: $Av_j \neq 0$

on a donc $Q_{jv} \neq 0$

$$H(j+1)r = h_{lim} + \frac{C}{g \cdot a} \nabla Q_j \tag{III.57}$$

$$Q(j+1)r = Q_{jv} + \nabla Q_j \tag{III.58}$$

$$h(j+1)r = H_0 - \alpha \cdot |Q(j+1)r| \cdot Q(j+1)r \tag{III.59}$$

1er cas: Si $Q(j+1)r \geq 0$

Ce qui veut dire que : si $Q_{jv} \geq 0$ Q_{vlim} , alors l'équation (III.59) s'écrit de la manière suivante :

$$H(j+1)r = H_0 - \alpha \cdot Q(j+1)r^2 \tag{III.60}$$

de la relation (III.58) , nous tirons $\Delta Q_j = Q(j+1)r - Q_{jv}$, en l'injectant dans la relation (III.59), nous obtenons :

$$H(j+1)r = H_{lim} + \frac{C}{g \cdot A} \left[Q(j+1)r - Q_{jv} \right] \tag{III.61}$$

nous égalisons les relations (III.60) et (III.61) on obtient :

$$H_0 - \alpha \cdot Q(j+1)r = H_{lim} + \frac{C}{gA} \left[Q(j+1)r - Q_{jv} \right]$$

finalement on aboutit à l'équation du second degré en $Q(j+1)r$ suivante :

$$Q(j+1)r^2 + 2 \frac{C/A}{2\alpha g} Q(j+1)r + \frac{C/A}{2\alpha g} \left[\frac{GA}{\alpha g} (H_{lim} - H_0) - Q_{jv} \right]$$

or
$$Q_{vlim} = \frac{gA}{C} (H_{lim} - H_0)$$

d'où on obtient :

$$Q(j+1)r^2 + 2 \frac{C/A}{2\alpha g} Q(j+1)r + \frac{C/A}{\alpha g} \left[Q_{vlim} - Q_{jv} \right] = 0$$

Le discriminant réduit Δ' s'écrit :

$$\Delta' = \left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 - \frac{C/A}{\alpha g} \left[Q_{vlim} - Q_{jv} \right]$$

on a $Q_{jv} \geq Q_{vlim}$ d'où Δ' est positif. Les racines de l'équation seront donc :

$$Q(j+1)r_1 = - \frac{C/A}{2\alpha g} + \sqrt{\left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 - \frac{C/A}{\alpha g} \left[Q_{vlim} - Q_{jv} \right]}$$

$$Q(j+1)r_2 = - \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 - \frac{C/A}{\alpha g} \left[Q_{vlim} - Q_{jv} \right]}$$

Nous retiendrons la deuxième solution qui donne un résultat négatif, d'où

$$Q(j+1)r = - \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 - \frac{C/A}{\alpha g} \left[Q_{vlim} - Q_{jv} \right]} \quad (III.62)$$

$H(j+1)$ sera donné par cette relation:

$$H(j+1)r = H_0 - \alpha \cdot Q(j+1)r^2 \quad (\text{III.63})$$

2ème cas: $Q(j+1)r < 0$

cette condition se traduit par : si $Q_{jv} < Q_{vlim}$, $H(j+1)$ s'écrit de la façon suivante :

$$H(j+1)r = H_0 + \alpha \cdot Q(j+1)r^2 \quad (\text{III.64})$$

Or nous avons montré précédemment (relation (III.61)) que ,

$$H(j+1)r = H_{lim} + \frac{C}{gA} [Q(j+1)r - Q_{jv}]$$

on égalise les deux relations (III.64) et (III.61) nous aurons :

$$H_{lim} + \frac{C}{gA} [Q(j+1)r - Q_{jv}] = H_0 + \alpha \cdot Q(j+1)r^2$$

En développant cette relation nous obtenons :

$$Q(j+1)r - 2 \frac{C/A}{2\alpha g} Q(j+1)r - \frac{C/A}{\alpha g} [Q_{vlim} - Q_{jv}] = 0$$

Le discriminant réduit Δ' sera

$$\Delta' = \left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{C/A}{\alpha g} [Q_{vlim} - Q_{jv}]$$

Le discriminant étant positif car $Q_{vlim} > Q_{jv}$ d'où, nous aurons deux solutions réelles :

$$Q(j+1)r_1 = \frac{C/A}{2\alpha g} + \sqrt{\left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{C/A}{\alpha g} [Q_{vlim} - Q_{jv}]}$$

$$Q(j+1)r_2 = \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{C/A}{\alpha g} [Q_{vlim} - Q_{jv}]}$$

$$\Delta = \left(\frac{C/A}{2\alpha g} \right)^2 - \frac{1}{\alpha} (H_{jv} - H_0)$$

$H_{jv} \leq H_0$ donc Δ est positif, les deux solutions réelles s'écrivent:

$$Q(j+1)r_1 = - \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g} \right)^2 - \frac{1}{\alpha} (H_{jv} - H_0)}$$

$$Q(j+1)r_2 = - \frac{C/A}{2\alpha g} + \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g} \right)^2 - \frac{1}{\alpha} (H_{jv} - H_0)}$$

La première solution nous donne un résultat négatif, nous retiendrons alors,

$$Q(j+1)r' = + \frac{C/A}{2\alpha g} + \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g} \right)^2 - \frac{1}{\alpha} (H_{jv} - H_0)} \quad (III.72)$$

$H(j+1)r'$ sera donnée par la relation suivante:

$$H(j+1)r = H_0 - \alpha \cdot Q(j+1)r'^2$$

2ème cas: Si $Q(j+1)r < 0$

Ce qui traduit par $H_{jv} > H_0$ Alors, la relation (m) s'écrit:

$$H(j+1)r' = H_0 + \alpha \cdot Q(j+1)r'^2 \quad (III.73)$$

En égalisant les relations (III.73) et (III.71) nous obtenons :

$$H_0 + \alpha \cdot Q(j+1)r'^2 = H_{jv} + \frac{C}{g A} Q(j+1)r'$$

En développant cette relation nous obtenons finalement une équation du second degré en $Q(j+1)r'$

$$Q(j+1)r'^2 - 2 \frac{C/A}{2\alpha g} Q(j+1)r' - \frac{1}{\alpha} (H_{jv} - H_0) = 0$$

Le discriminant réduit de cette équation du second degré est:

$$\Delta' = \left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{1}{\alpha} (H_{jv} - H_0)$$

Δ' étant positif, les solutions seront donc:

$$q(j+1)r'1 = \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{1}{\alpha} (H_{jv} - H_0)}$$

$$q(j+1)r2 = \frac{C/A}{2\alpha g} + \sqrt{\left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{1}{\alpha} (H_{jv} - H_0)}$$

La deuxième solution nous donne un résultat positif, nous retiendrons

donc la première solution:

$$Q(j+1)r' = \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left[\frac{C/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{1}{\alpha} (H_{jv} - H_0)} \quad (III.73)$$

Et $H(j+1)$ sera égale à

$$H(j+1)r = H_0 + \alpha \cdot Q(j+1)r \quad (III.74)$$

III-4-2-2.

interprétation de la méthode

La méthode consiste à déterminer le débit Q_j , la pression H_j au niveau de chaque extrémité de la conduite c.à.d au niveau de la vanne et du réservoir ainsi que la section d'ouverture à un instant t_j de façon que la pression au niveau de la vanne ne dépasse pas une certaine valeur H_{lim} .

Pour cela nous calculons Q_{rlim} qui est donné par la relation (III.47) ainsi que Q_{vlim} donné par la relation (III.50) qui est fonction de H_{lim} ; nous considérons un point jv à un instant $t_j = j \cdot t_x$ dans le cas où la condition $Q(j+1)r > Q_{rlim}$ est satisfaite ce qui veut dire que la fermeture totale de la vanne n'est pas atteinte c.à.d $Q_{jv} \neq 0$. En partant de $Q(j-1)r$ et $H(j-1)r$ connus, nous pourons déterminer Q_{jv} en se servant de la relation (III.53) ce qui nous permettra de calculer A_{vj} à l'aide de la relation (III.54) pour le

calcul de $Q(j+1)r$ et $h(j+1)$. Nous distinguerons deux cas:

1er cas: $Q_{jv} \geq Q_{vlim}$

Dans ce cas, $Q(j+1)r$ et $H(j+1)$ sont respectivement par les relations (III.62) et (III.63)

2ème cas: $Q_{jv} < Q_{vlim}$

Dans ce cas $Q(j+1)r$ et $H(j+1)r$ sont donnés respectivement par les relations (III.65) et (III.66).

Ainsi nous procéderons de proche en proche de la même manière jusqu'à ce que la condition $Q(j-1)r \geq Q_{rlim}$ ce qui veut dire que la vanne est totalement fermée donc $Av_j = 0$ et $Q_{jv} = 0$ H_{jv} est donnée par la relation (III.55). En comparant la valeur de H_{jv} à celle de H_0 , nous distinguerons deux cas:

Si $h_{jv} < H_0$ alors, $Q(j+1)r$ et $H(j+1)r$ seront donnés respectivement par les relations (III.72) et (III.63)

Si $H_{jv} > H_0$ alors, $Q(j+1)r$ et $H(j+1)r$ seront donnés respectivement par les relations (III.73) et (III.66)

Connaissant les valeurs de $H(j+1)$ et $Q(j+1)r$ nous pourrions calculer $H(j+1)r$ Qui à son tour sera comparé à H_0 suivant que $H(j+2) \geq H_0$ où $H(j+1) < H_0$ on aura $Q(j+1)r$ et $H(j+1)r$ nous continuerons cette procédure de proche en proche autant de fois qu'il faudra.

remarque

a) Avant la fermeture totale de la vanne

Si nous considérons que le débit et la pression aux réservoir $Q(j-1)$ et $H(j-1)r$ sont égaux aux instants $t_j = 2i.t_x$ et $t_j = (2i-1).t_x$. d'après la relation (III.53) Q_{jv} qui est fonction de $Q(j-1)r$ et de $h(j-1)r$ nous aurons $Q(2i)v = Q(2i-1)v$ par conséquent $Av(2i) = Av(2i-1)$ d'après la relation (III.54). Etant donné que $Q(j+1)r$ est fonction de Q_{jv} relation (III.62) ou (III.65), d'où nous aurons $Q(2i)r = Q(2i+1)r$ et $H(2i+1)r = H(2i)$ relation (III.63) et (III.66). Nous procéderons de la même manière jusqu'à

Nous retiendrons la deuxième solution car la première solution nous donne un résultat négatif d'où ,

$$Q(j+1)r = \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g}\right)^2 + \frac{C/A}{\alpha g} (Q_{vlim} - Q_{jv})} \quad (III.65)$$

Par conséquent, on a

$$H(j+1)r = H_0 + \alpha \cdot Q(j+1)r^2 \quad (III.66)$$

b) Après la fermeture totale de la vanne: $A_{v0} = 0$

Nous aurons: $Q_{vj} = 0$

$$H(j+1)r = H_{jv} + \frac{C}{g A} \Delta Q_j \quad (III.67)$$

$$Q(j+1)r' = Q_{jv} + \Delta Q_j \quad (III.68)$$

$$H(j+1)r = H_0 - \alpha |Q(j+1)r| \cdot Q(j+1)r \quad (III.69)$$

1er cas: Si $Q(j+1)r \geq 0$

Cette condition se traduit par : $H_{jv} \leq H_0$ (fig.26 et fig.27) . Alors, la relation (III.69) s'écrit:

$$H(j+1)r' = H_0 - \alpha \cdot Q(j+1)r'^2 \quad (III.70)$$

De la relation (III.68) on a:

$$\Delta Q_j = Q(j+1)r - Q_{jv}$$

Nous remplaçons ΔQ_j dans (III.67), on a:

$$H(j+1)r = H_{jv} + \frac{C}{g A} Q(j+1)r \quad (III.71)$$

Nous égalisons (III.71) et (III.70), il vient:

$$H_0 - \alpha \cdot Q(j+1)r'^2 = H_{jv} + \frac{C}{g A} Q(j+1)r'$$

Finalement nous aboutissons à une équation du second degré en $Q(j+1)r$,

$$Q(j+1)r^2 + 2 \frac{C/A}{2\alpha g} Q(j+1)r + \frac{1}{\alpha} (H_{jv} - H_0) = 0$$

Le calcul du discriminant réduit nous donne

ce que $Q(j+1) > Q_{rlim}$ ce qui correspond à une fermeture totale de la vanne

b)Après la fermeture totale de la vanne

Si la fermeture totale de la vanne est atteinte à $t = (j + p).t_x$, nous aurons donc $Q(j+p-1)r = Q(j+p-2)$ et $H(j+p-1)r = H(j+p-2)r$ la relation (III.55) nous donne $H(j+p)v = H((j+p+1)$. A l'aide de la relation (72) ou (74) on a $Q(j+p+1)r = Q(j+p)r$ et d'après l'expression (63) et (66) on aura $H(j+p+1) = H(j+p)$.

Dans notre cas on a:

$$\begin{array}{ll} Q_{0r} = Q_{1r} & \text{[pour les mêmes raisons citées} \\ & \text{dans la remarque relative au} \\ H_{0r} = H_{1r} & \text{paragraphe (III-4)]} \end{array}$$

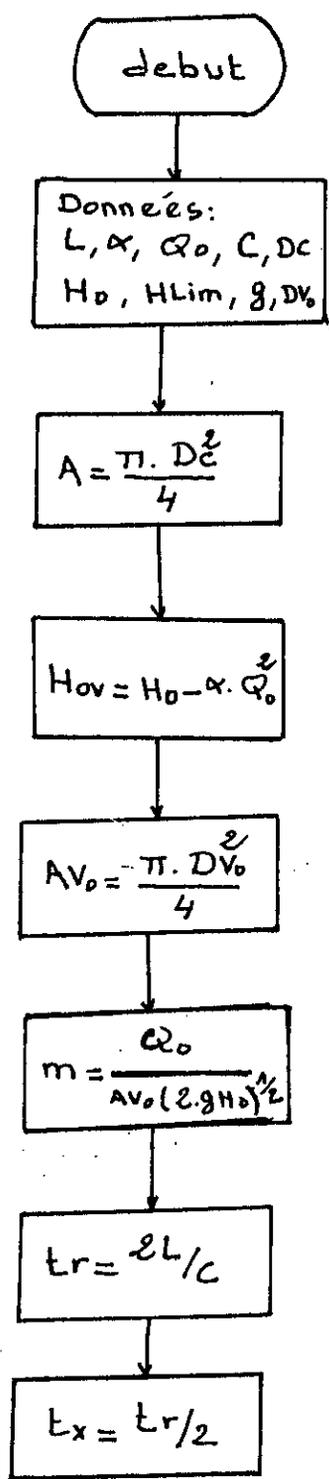
on aura donc:

- * $Q_{1v} = Q_{2v}$.
- * $Av_1 = Av_2$.
- * $Q_{2r} = Q_{3R}$.
- * $H_{2r} = H_{3r}$.

III-5.. Programmation

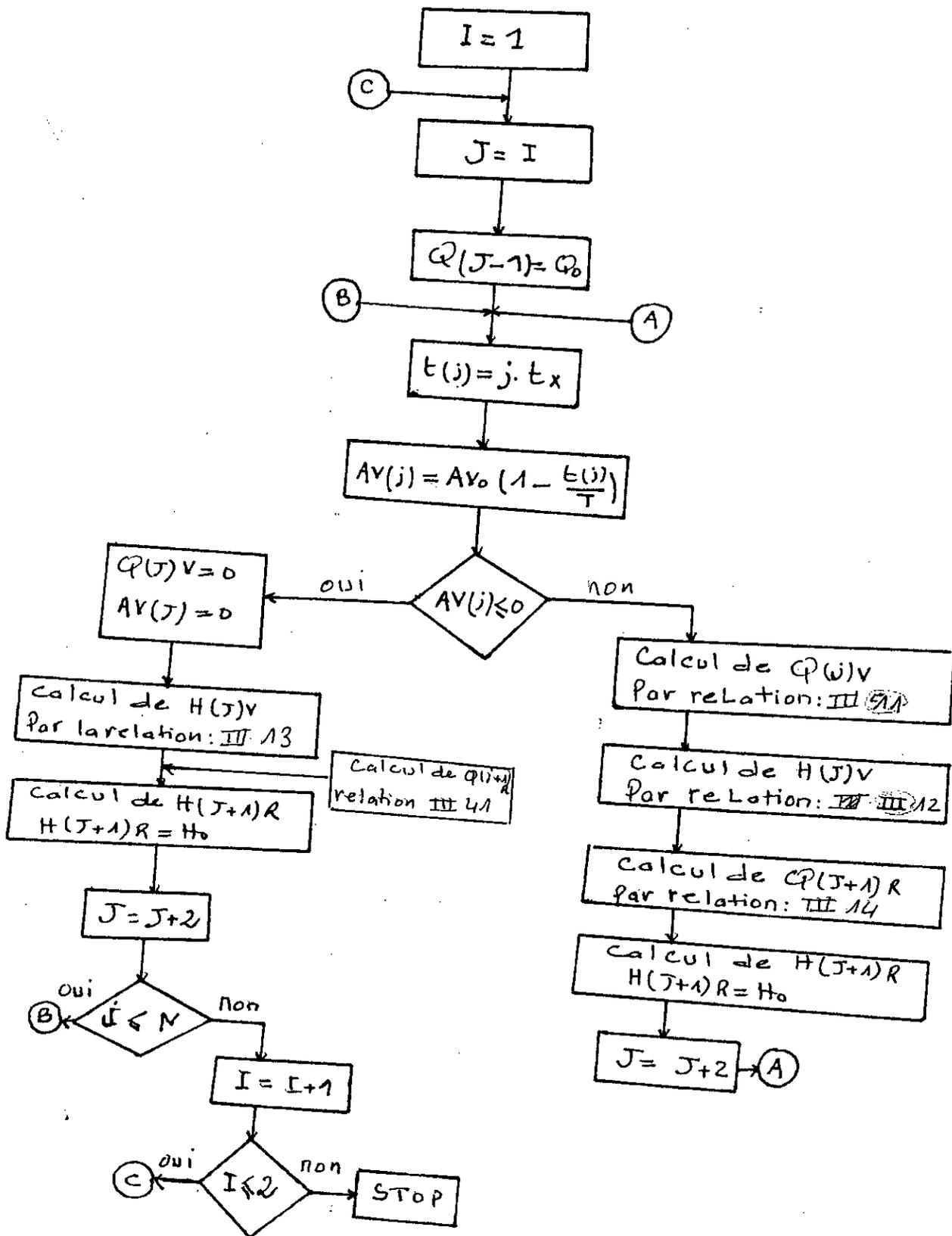
III. 5-1 Graphes.

organigrammes - de calcul

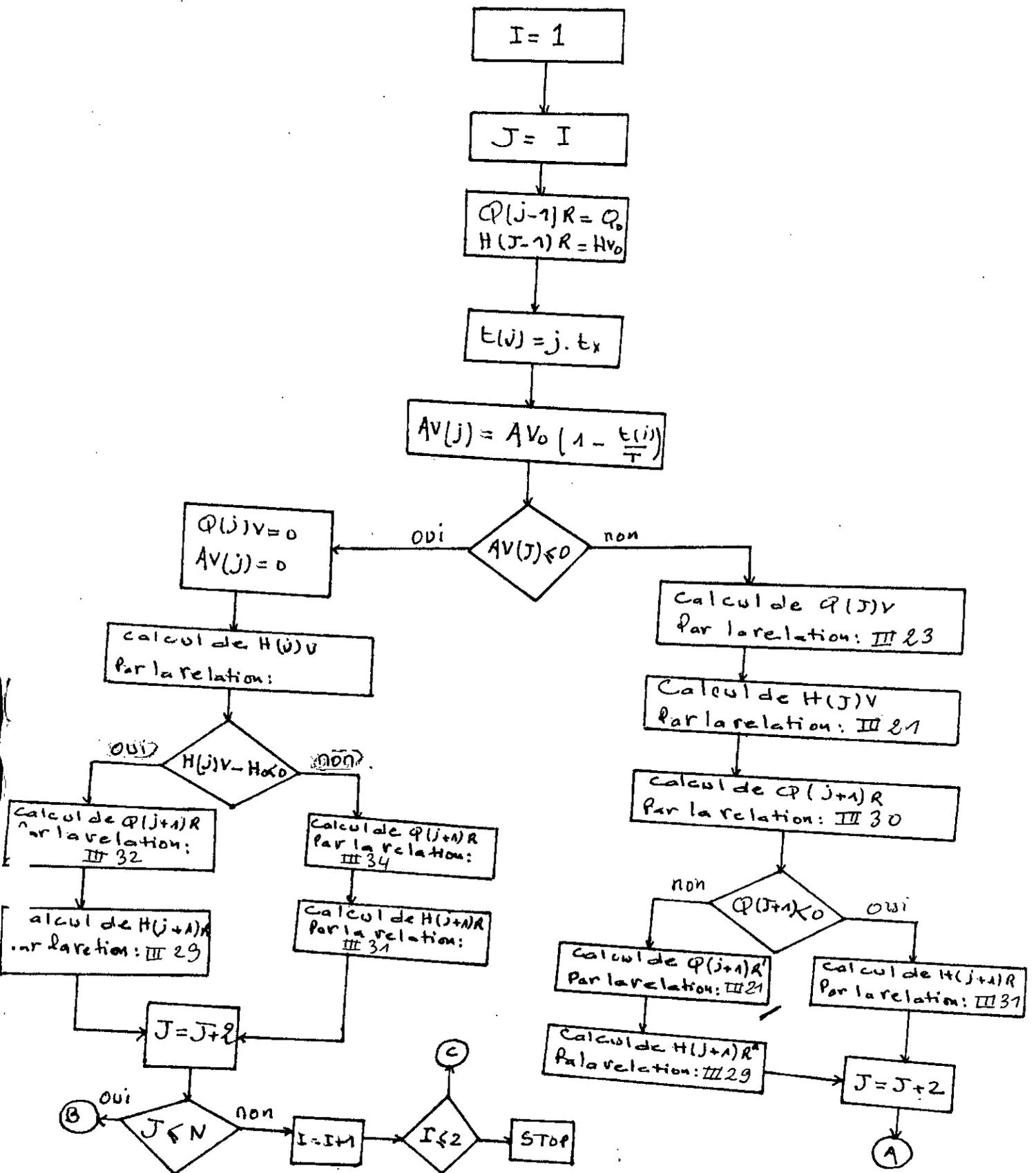


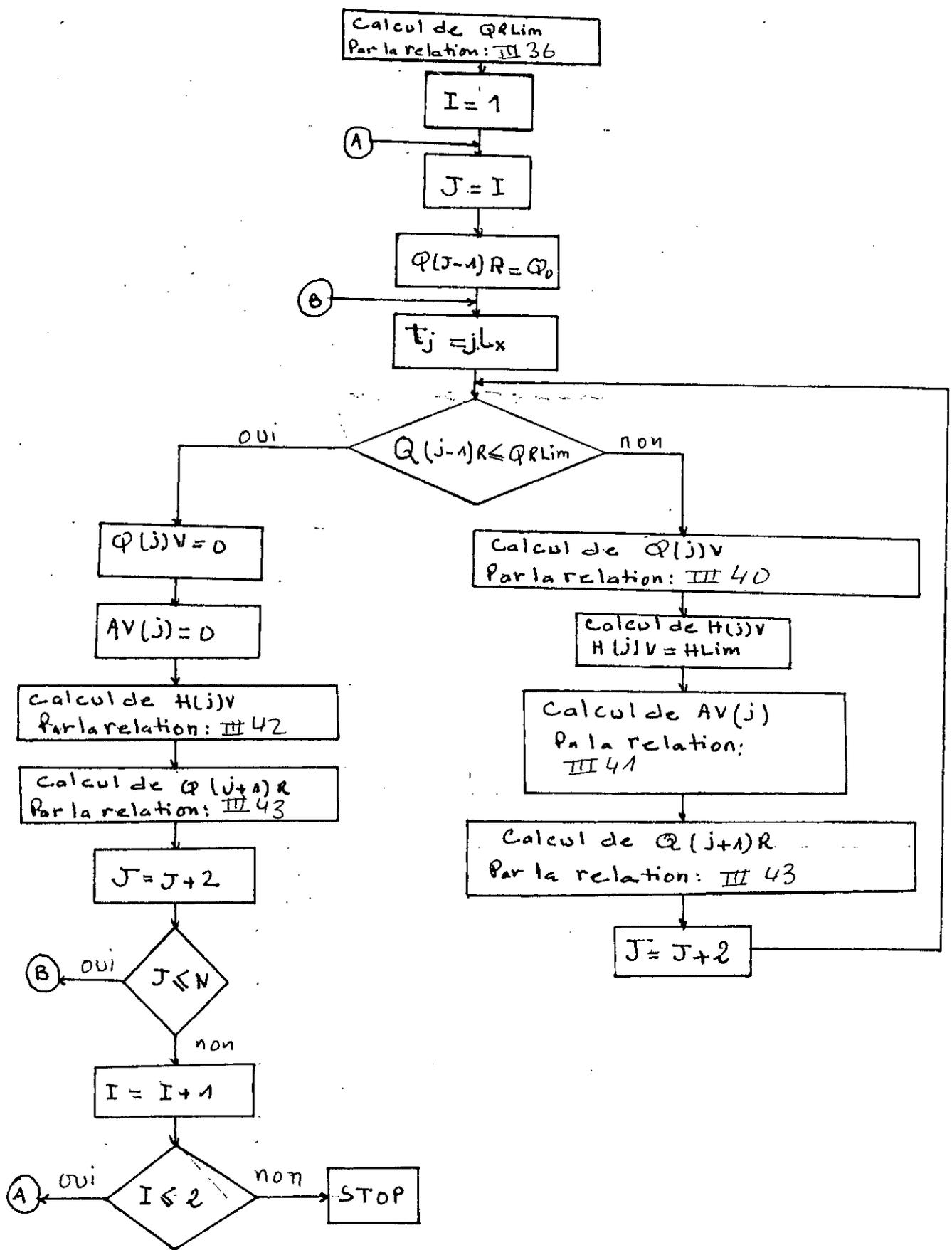
Les quatre organigrammes sont reliés par un menu.

Pertes de charge concentrées à l'aval



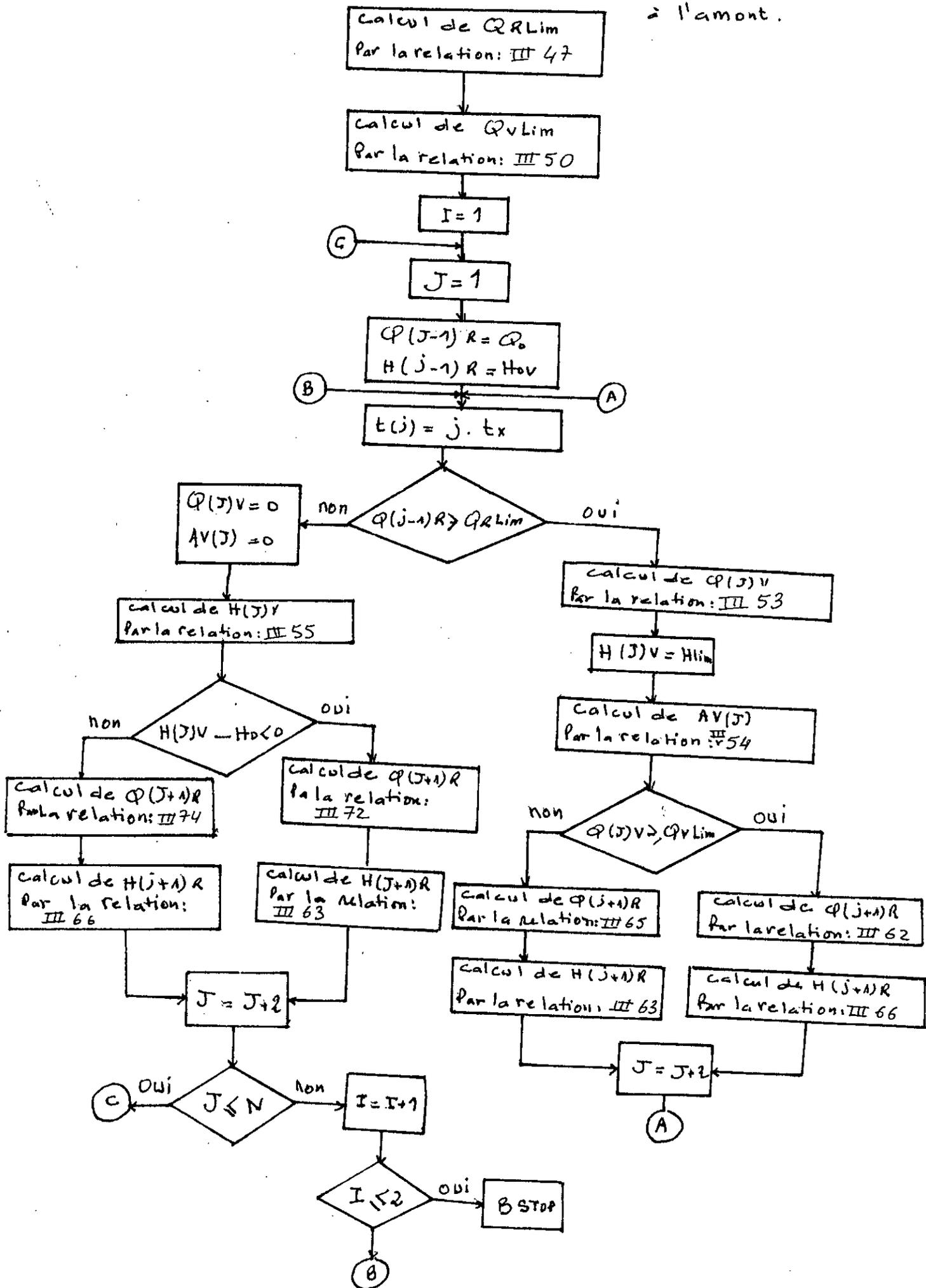
Pertes de charge concentrées à l'amont.





Loi de fermeture (optimisation): Pertes de charge concentrées à l'aval.

Loi de fermeture (optimisation) : Partes de charge Concentrees à l'amont.



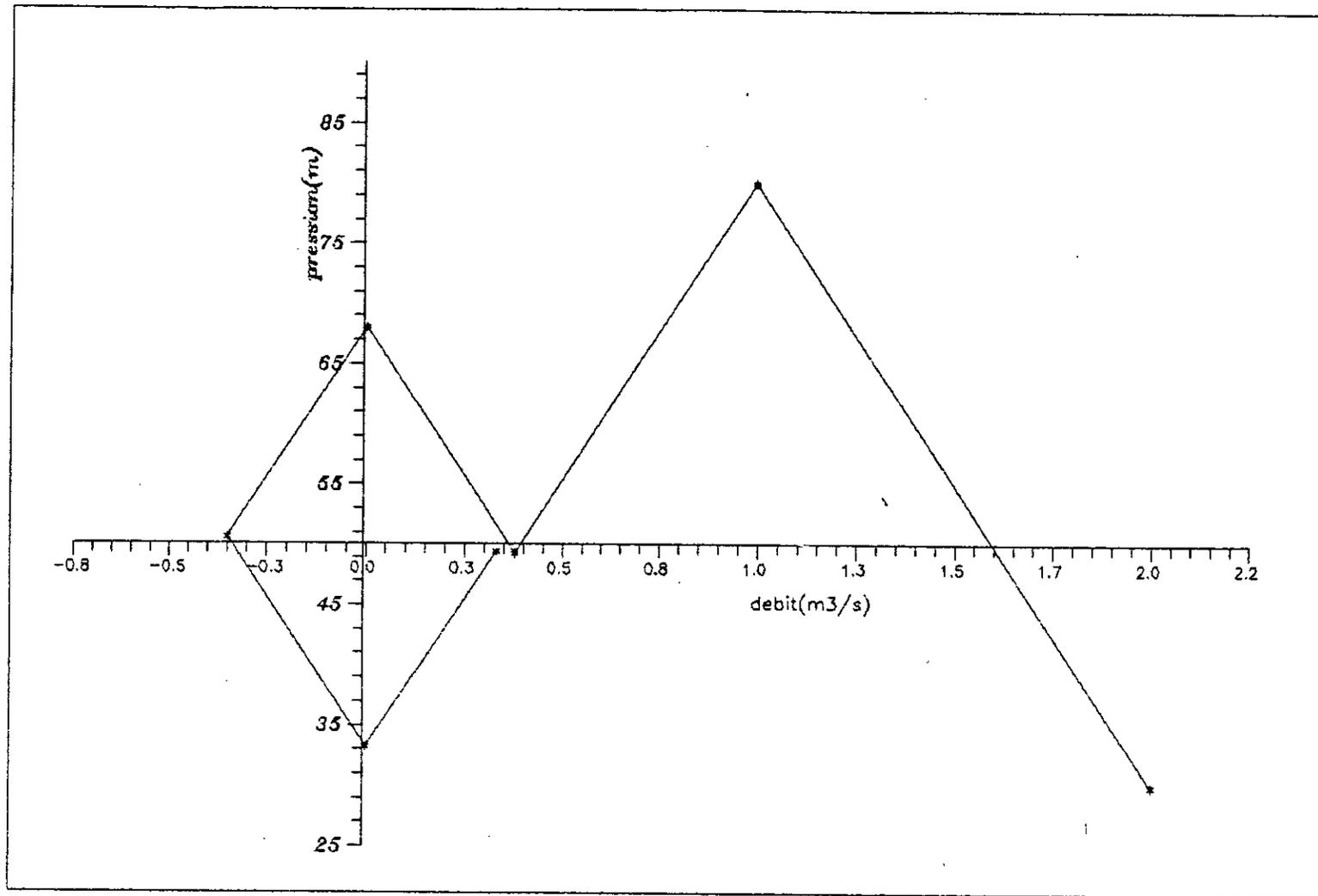


figure ()
✓

Graphe de BERGERON : OPTIMISATION
pertes de charge concentrees a l'amont

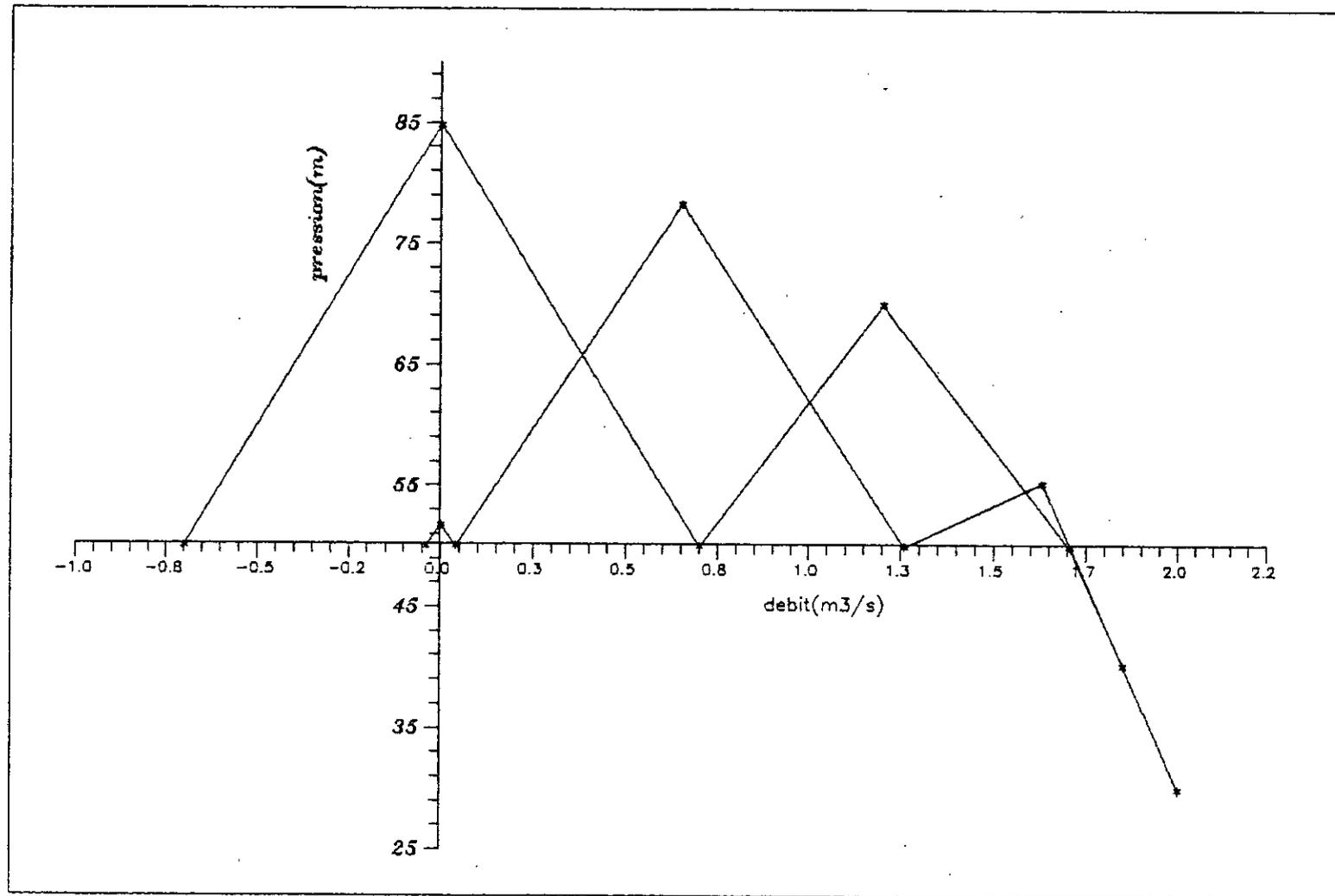


figure () Graphe de BERGERON :
pertes de charge concentrees a l'amont

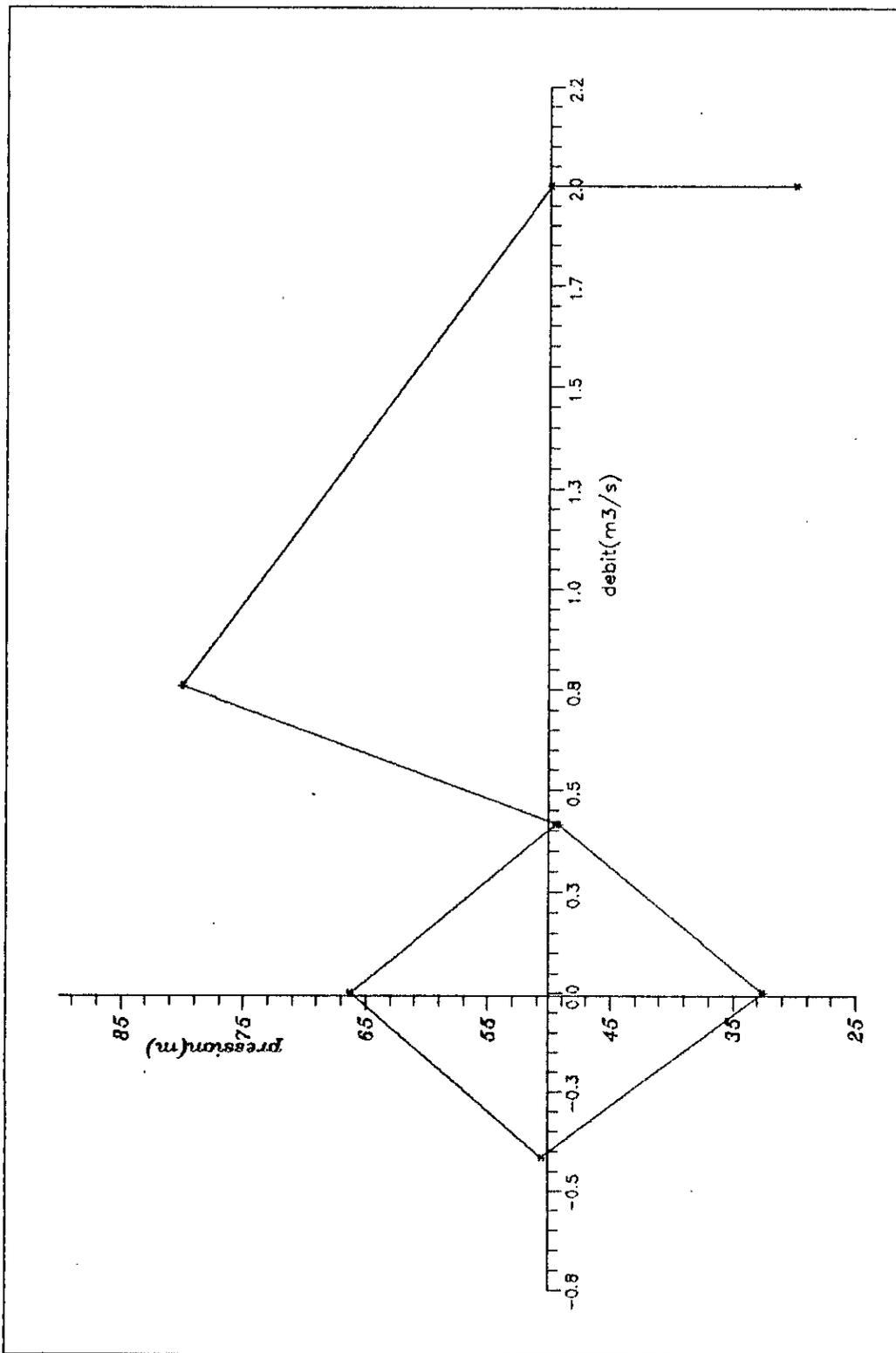
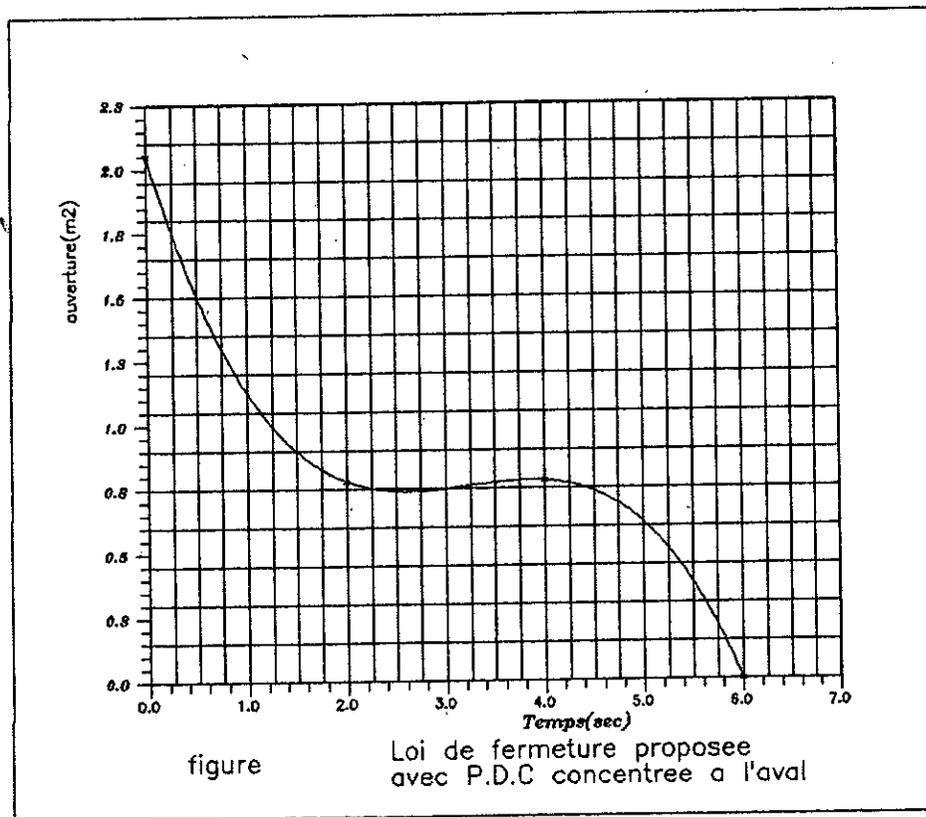
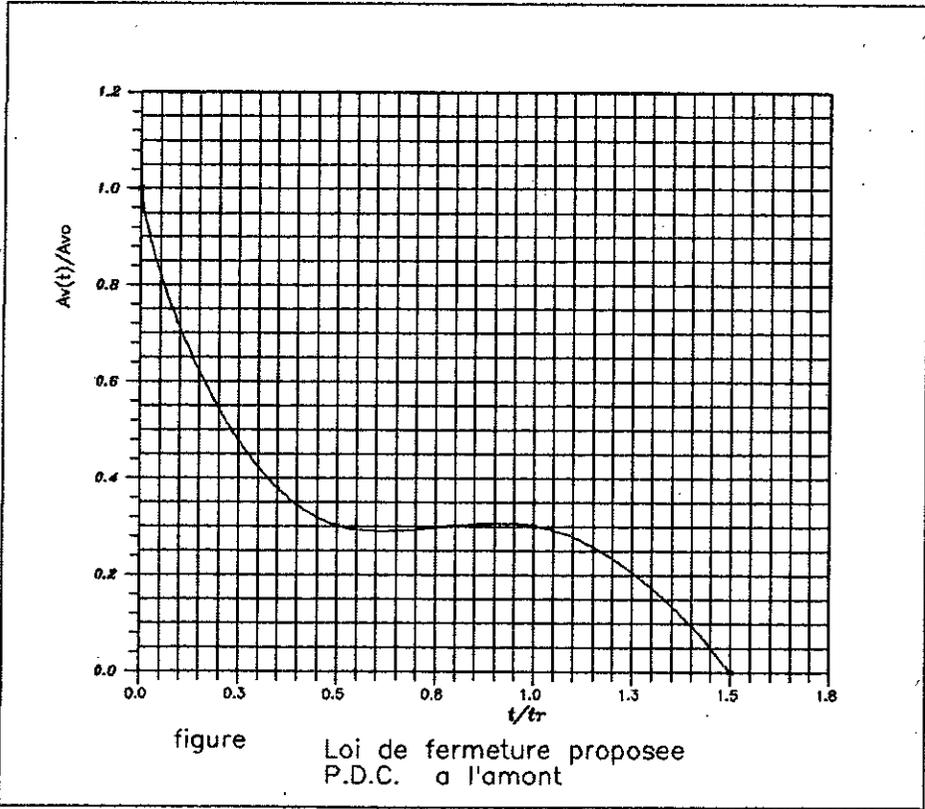


figure () Graphe de BERGERON : OPTIMISATION
pertes de charge concentrees a l'aval





CHAPITRE IV ETUDE D'UN EXEMPLE PRATIQUE

Nous allons traiter un exemple pratique comme il a été posé au chapitre III .

La conduite forcée présente les caractéristiques suivantes :

- * Longueur développée $L = 2000 \text{ m}$.
- * Diamètre intérieur $Dc0 = 1.616 \text{ m}$
- * La section est donnée par $A = \frac{\pi \cdot Dc0^2}{4} = 2.04999296 = 2.05 \text{ m}^2$

Il est à noter que le diamètre intérieur de la vanne est le même que celui de la conduite soit donc : $Dv0 = Dc0$.

Le débit véhiculé par la conduite en régime permanent est :

$$Q_0 = 2 \text{ m}^3/\text{sec} .$$

La célérité des ondes de choc dans la conduite est :

$$C = 1000 \text{ m/sec} ,$$

La charge statique est $H_0 = 50 \text{ m}$,

La charge limite admissible par la conduite est $H_{lim} = 80 \text{ m}$,

L'accélération de la pesanteur est $g = 9.81 \text{ m/sec}^2$.

La variation de la section d'ouverture de la vanne est linéaire.

La fermeture complète s'effectue en un temps $T = 10 \text{ sec}$.

Le temps d'un aller-retour de l'onde de choc est tr .

$$tr = 2L/C = 2 \cdot 2000/1000 \quad tr = 4 \text{ sec} .$$

Nous remarquons que $tr < T$; nous sommes donc dans le cas d'une fermeture lente .

L'unité de temps étant prise égale à $tx = tr/2$, la section d'ouverture de la vanne aux différents instants $t_j = j \cdot tx$ est donnée par la relation :

$$A_{jv} = A_{vo} \left[1 - [t_j/T] \right] \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Avec A_{vo} la section de la vanne à pleine ouverture .

$$A_{vo} = \frac{\pi \cdot D_{vo}^2}{4}$$

$$A_{vo} = 2.04999296 = 2.05 \text{ m}^2$$

Pour $j = 1$ $t_1 = 1 \cdot t_r / 2 = 2 \text{ sec}$.

$$A_{1v} = A_{0v} \cdot \left[1 - [t(1)/T] \right] , \quad A_{1v} = 1.639994368 = 1.64 \text{ m}^2$$

Les valeurs de la section A_{jv} aux différents instants t_j , sont données dans le tableau. I :

$$\text{A } t = 0 \quad H_{0v} = H_0 - \alpha Q_0^2 .$$

$$m = \frac{Q_0}{A_{0v} \cdot (2 \cdot g \cdot H_{0v})^{1/2}}$$

$$\text{A.N.:} \quad H_{0v} = 50 - 5 \cdot (2) = 30 \text{ m}^2 \quad ; \quad m = 0.04 .$$

j	0	1	2	3	4	5
t_j [sec]	0	2	4	6	8	10
A_{jv} [m ²]	2.05	1.64	1.23	0.82	0.41	0.00

Tableau -1

A/. PERTES DE CHARGE CONCENTREES A L'AVAL :

Pour résoudre ce problème , il faut connaître à chaque instant t_j , les valeurs de $Q(j-1)r$ correspondant à l'instant $t(j-1)$. Dans notre cas , nous avons :

$$\text{A l'instant } t = 0 \quad [j=0] : Q_{0r} = Q_{0v} = Q_0 = 2 \text{ m}^3/\text{sec} .$$

$$\text{A l'instant } t = 2 \quad [j=2] : Q_{1r} = Q_0 = 2 \text{ m}^3/\text{sec} .$$

A.1/. Etude des points (2i)V

$$\text{a/.Point (2V): } j = 2 ; t_2 = 4 \text{ sec}; A_{2v} = 1.229995776 = 1.23 \text{ m}^2 .$$

Etant donné que $A_{2v} \neq 0$, Q_{2v} est donné par la relation [III.11] qui s'écrit :

$$Q_{2v} = - \frac{c/A}{[1/(m \cdot A_{2v})]^2 + 2\alpha g} + \sqrt{\left[\frac{c/A}{[1/(m \cdot A_{2v})]^2 + 2\alpha g} \right]^2 + \frac{H_0 + c \cdot Q_{1r} / (gA)}{[1/(m \cdot A_{2v})]^2 + 2\alpha g}}$$

$$\underline{\text{A.N.:}} \quad Q_{2v} = 1.628221221 = 1.63 \text{ m}^3/\text{sec} .$$

H_{2v} est obtenue en utilisant la relation [III.20], qui s'écrit :

$$H_{2v} = \frac{Q_{2v}^2}{2 \cdot g \cdot [m \cdot A_{2v}]^2}$$

A.N.:

$$H_{2v} = 55.23134185 = 55.23 \text{ m .}$$

Le débit Q_{3r} est obtenu en utilisant la relation [III.22] qui s'écrit : $Q_{3r} = 2.Q_{2v} - Q_{1r}$.

b/. Point (4V):

$$j = 4 ; t_4 = 8 \text{ sec} ; A_{4v} = 0.409998592 = 0.41 \text{ m}^2 .$$

Etant donné que $A_{4v} \neq 0$, Q_{4v} est donné par la relation [III.11] qui s'écrit :

$$Q_{4v} = - \frac{4 \ c/A}{[1/(m.A_{4v})]^2 + 2\alpha g} + \sqrt{ \left[\frac{c/A}{[1/(m.A_{4v})]^2 + 2\alpha g} \right]^2 + \frac{H_0 + c.Q_{3r}/(gA)}{[1/(m.A_{4v})]^2 + 2\alpha g} }$$

A.N.:

$$Q_4 = 0.64606918 = 0.65 \text{ m}^3/\text{sec} .$$

H_{4v} est donnée par la relation [III.13], qui s'écrit :

$$H_{4v} = \frac{Q_{4v}^2}{2.g.[m.A_{4v}]^2}$$

A.N :

$$H_{4v} = 78.26405023 = 78.26 \text{ m} .$$

Le débit Q_{5r} est calculé par la relation :

$$Q_{5r} = 2.Q_{4v} - Q_{3r} .$$

A.N.:

$$Q_{5r} = 0.03569594 = 0.04 \text{ m}^3/\text{sec} .$$

c/. Point (6V) : $j = 6$; $t_6 = 12 \text{ sec}$; $a_{6v} = 0$ [fermeture totale de la vanne .]

Dans ce cas nous aurons $Q_{6v} = 0$, par conséquent H_{6v} sera donnée par la relation [III.13] qui donne :

$$H_{6v} = H_0 + \frac{c}{g.A} Q_{5r} .$$

A.N.:

$$H_{6v} = 51.77499628 = 51.77 \text{ m .}$$

Q_{7r} est donné par la relation [III.22] qui s'écrit :

$$Q_{7r} = 2.Q_{6v} - Q_{5r} = - Q_{5r} + Q_{6v}$$

A.N.:

$$Q_{7r} = - 0.03569594 = - 0.04 \text{ m /sec .}$$

A.2/. Etude des points $(2i-1)V$:

Les valeurs de Q_{jv} , H_{jv} et $Q_{(j+1)r}$ aux différents instants seront données dans le tableau suivant :

j	t_j [sec]	A_{jv} [m ²]	$Q_{(2i-1)v}$ [m ³ /sec]	$H_{(2i-1)v}$ [m]	$Q_{(2i)r}$ [m ³ /sec]
1	2	1.64	1.85	40.20	1.70
3	6	0.82	1.20	67.74	0.70
5	10	0.00	0.00	84.81	-0.70

Tableau .2

Nous allons regrouper tous résultats dans le tableau ci-dessous :

j	t_j [sec]	A_{jv} [m ²]	$Q_{(2i-1)v}$ [m ³ /sec]	$H_{(2i-1)v}$ [m]	$Q_{(2i)r}$ [m ³ /sec]
1	2	1.64	1.85	40.20	1.70
2	4	1.23	1.63	55.23	1.26
3	6	0.82	1.20	67.74	0.70
4	8	0.41	0.65	78.26	0.04
5	10	0.00	0.00	84.81	-0.70
6	12	0.00	0.00	51.77	-0.04

Tableau.3

b) pertes de charges concentrées a l'amont.

pour résoudre ce problème il faut connaître à chaque instant t_j les valeurs de $Q(j-1)r'$ et de $H(j-1)r'$ correspondant à l'instant $t(j-1)$.

dans notre cas:

à l'instant $t = 0$	$[j=0]$	$Q0r' = Q0v = Q0 = 2 \text{ m}^3/\text{s}$
à l'instant $t = 2 \text{ s}$	$[j=1]$	$Q1r' = Q0 = 2 \text{ m}^3/\text{s}$ $H1r' = H0v = 30 \text{ m}$

b.1) Etude des points $(2i)v$:

a) Point $(2v)$: $j = 2$; $t_2 = 4 \text{ s}$; $A_{2v} = 1.229995776 = 1.23 \text{ m}^2$.
Etant donné que $A_{2v} \neq 0$; Q_{2v} est donné par la relation (23) qui s'écrit :

$$Q_{2v} = -\frac{C}{A} (m \cdot A_{2v})^2 + \sqrt{\left[\frac{C}{A} (m \cdot A_{2v})^2 \right]^2 + 2g (mA_{2v})^2 \left(H1r + \frac{C}{gA} Q1r' \right)}$$

A.N :

$$Q_{2v} = 1.570259262 = 1.57 \text{ m}^3/\text{s}$$

H_{2v} est obtenu en utilisant la relation (21) qui s'écrit:

$$H_{2v} = \frac{Q_{2v}^2}{2g(mA_{2v})^2}$$

A.N :

$$H_{2v} = 51.36904674 = 51.37.$$

* Calcul de $Q_{3r'}$ et de $H_{3r'}$:

Nous allons calculer d'abord $Q_{3r'}$ en utilisant la relation (30). Si le résultat obtenu n'est pas compatible avec la condition posée [$Q(j+1)r' \leq 0$], $Q_{3r'}$ sera déterminé par la relation (28)

D'après la relation (30), nous pouvons écrire :

$$Q3r' = \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} \left(H2v - H_0 - \frac{C}{gA} Q2v\right)}$$

A.N.:

$$Q3r' = 1.909271804 = 1.91 \text{ m}^3/\text{s}$$

Comme $Q3r'$ est positif, il sera calculé par la relation (31) qui s'écrit: $H3r' = H_0 - \alpha \cdot (Q3r')^2$.

A.N.:

$$H3r' = 40.78672584 = 40.79$$

b) Point (4v): $j = 4$; $t4 = 8 \text{ s}$; $A4v = 0.409997184 = 0.41 \text{ m}^2$.

Comme $A4v \neq 0$, $Q4v$ et $H4v$ seront donnés par les relations (23) et (21); d'où

A.N.:

$$A4v = 0.638830513 = 0.64 \text{ m}^3/\text{s} .$$

$$H4v = 76.52010805 = 76.52 \text{ m} .$$

En procédant de la manière que tout à l'heure, la relation (30) donne le resultat suivant:

$$Q5r' = 0.106643269 = 0.11 \text{ m}^3/\text{s} .$$

Le resultat obtenu étant positif, $Q5r'$ sera calculé par la relation (28), qui donne :

$$Q5r' = 0.10440368 = 0.1 \text{ m}^3/\text{sec}$$

c) Point (6v): $j = 6$; $t6 = 12 \text{ s}$; $A6v = 0$ (fermeture totale de la vanne) Dans ce cas $Q6v = 0$ et $H6v$ est donné par la relation (25), qui s'écrit

$$H6v = Hr' + \frac{C}{g \cdot A} Q5r' .$$

A.N.:

$$H6v = 55.13701815 = 55.14.$$

Nous remarquons que $H6v > H0$; alors $Q5r'$ sera déterminé en utilisant la relation (34)

$$Q7r' = \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} (H6v - H0)}$$

A.N.:

$$Q7r' = -0.102256241 = -0.10 \text{ m}^3/\text{s}.$$

$H7r'$ est donnée par la relation (29):

$$H7r' = 50.0522817 = 50.05 \text{ m}.$$

c) Point (8v): $j = 8$; $t8 = 16$; $ABv = 0$

puisque $ABv = 8$, on a $QBv = 0$ et $H8v$ est calculée en utilisant la relation (24).

A.N.:

$$H8v = 44.96738 = 44.97 \text{ m}.$$

$H8v$ étant inférieure à $H0$, alors $Q9r'$ sera déterminé à l'aide de

la relation (36).

$$Q9r' = \frac{C/A}{2\alpha g} - \sqrt{\left(\frac{C/A}{2\alpha g}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} (H0 - H8v)}$$

$H9r'$ sera calculée par la relation (31):

$$H9r' = H0 - \alpha Q9r'^2$$

A.N.:

$$H9r' = 49.949800 = 49.95 \text{ m}.$$

b.2) Etude des points $(2i-1)v$:

Nous procéderons de la même manière que dans le cas de l'étude des points $(2i)v$. Les résultats seront donnés dans le tableau 4.

j	t _j (s)	A _{jv} (m) ²	Q _{jv} (m ³ /s)	H _{jv} (m)	Q(j+1)r' (m /s)	H(j+1)r (m)
1	2	1.64	1.82	38.88	1.74	34.85
3	6	0.82	1.16	63.52	0.82	46.61
5	10	0.00	0.00	87.58	-0.71	52.49
7	14	0.00	0.00	17.40	0.62	48.10

Tableau 4

Nous allons dresser un tableau récapitulatif, regroupant les résultats obtenus dans l'étude des points (2i)v et (2i-1)v.

j	t _j (s)	A _{jv} (m) ²	Q _{jv} (m ³ /s)	H _{jv} (m)	Q(j+1)r' (m /s)	H(j+1)r (m)
0	0	2.05	2.00	30.00	2.00	30.00
1	2	1.64	1.82	38.88	1.74	34.85
2	4	1.23	1.57	51.37	1.36	40.85
3	6	0.82	1.16	63.52	0.82	46.61
4	8	0.41	0.64	76.52	0.10	49.95
5	10	0.00	0.00	87.58	-0.71	52.49
6	12	0.00	0.00	55.14	-0.10	50.05
7	14	0.00	0.00	17.40	-0.62	48.10
8	16	0.00	0.00	44.97	-0.10	49.95

Tableau 5 (suite)

C/. OPTIMISATION DE LA FERMETURE : Pertes de charge a l'avial:

Avant de procéder à l'étude , nous allons d'abord calculer la valeur de QRlim , donnée par la relation [III.36] ; nous obtenons :

$$QRlim = 0.603312928 = 0.60 \text{ m}^3/\text{sec}.$$

A l'instant $t=0$ [$j=0$] nous avons : $Q0r=Q0v=Q0=2 \text{ m}^3/\text{sec}.$
 $H0v=30 \text{ m} .$

A l'instant $t=2 \text{ sec}$ [$j=1$] nous avons : $Q1r=Q0=2 \text{ m}^3/\text{sec}.$

C.1/.ETUDE DES POINTS (2i)V :

a/.Point (2V) : $j = 2$; $t2 = 4 \text{ sec} .$

Nous avons $Q1r > QRlim$, par conséquent $H2v = Hlim$ et $Q2v$ sera donné pa la relation [III.40] , qui s'écrit :

$$Q2v = - \frac{c/A}{2\alpha g} + \sqrt{\left[\frac{c/A}{2\alpha g} \right]^2 + \frac{c/A}{\alpha g} \left[Q1r - QRlim \right]}$$

A.N. :

$$Q2v = 1.24166308 = 1.24 \text{ m}^3/\text{sec} .$$

Ainsi donc nous pouvons calculer $A2v$ en utilisant la relation [III.41] :

$$A2v = \frac{Q2v}{\sqrt{m (2 g H lim)}}$$

A.N.

$$A2v = 0.779366588 = 0.78 \text{ m}$$

b/.Point (4V) : $j = 4$ $t4 = 8 \text{ sec}$

Comme $Q3r < QRlim$, nous aurons $A4v = 0$ et $H4v$ sera donnée par la relation [III.35] , qui s'écrit :

$$H4v = H_0 + \frac{c}{gA} Q3r$$

A.N.: $H4v = 74.03360532 = 74.03 \text{ m} .$

$Q5r$ sera déterminé en utilisant la relation [III.43]

A.N.: $Q5r = - 0.48332616 = -^30.48 \text{ m /sec}$

c/.Point (6V) : $j = 6$; $t_6 = 12 \text{ sec}$

Comme $Q5r < QRlim$; nous aurons $A6v = 0$, $Q6v = 0$ et $H6v$

est donné par la relation [III.42] ; nous obtenons :

$$H6v = 25.96639468 \text{ m} .$$

$Q7r$ sera sera déterminé en utilisant [III.43] , qui nous donne :

$$Q7r = 0.48332616 \text{ m /}^3\text{sec} .$$

Compte tenu de la remarque faite au chapitre , les résultats de l'étude $(2i-1)V$ sont identiques à ceux trouvés pour les points $(2i)V$. Ainsi , nous avons dressé le tableau suivant :
[tableau .6] .

j	tj [sec]	Ajv [m2]	Qj [m3/sec]	Hjv [m]	Q(j+1)r [m3/sec]
1 et 2	2 et 4	0.78	1.24	80.00	1.48
3 et 4	6 et 8	0.00	0.00	74.03	-0.48
5 et 6	10 et 12	0.00	0.00	25.97	0.48

Tableau.6

D/. OPTIMISATION DE LA FERMETURE : P.D.C.A L'AMONT :

Nous d'abord déterminer les valeur de Q_{RLim} et de Q_{VLim} données respectivement par les relations [III.47] et [III.50]. nous obtenons:

$$Q_{RLim} = 0.645166773 = 0.65 \text{ m}^3/\text{sec} .$$

$$Q_{VLim} = 0.603312928 = 0.60 \text{ m}^3/\text{sec} .$$

A l'instant $t = 0$ [$j = 0$] : $Q_{0r} = Q_{0v} = Q_0 = 2 \text{ m}^3/\text{sec} .$

A l'instant $t = 2 \text{ sec}$ [$j = 1$] : $Q_{1r} = Q_0 = 2 \text{ m}^3/\text{sec} .$

$$H_{1r} = H_{0v} = 30 \text{ m} .$$

D.1/. ETUDE DES POINTS (2i)V :

a/. Point 2V : $j = 2$; $t_2 = 4 \text{ sec} .$

Puisque $Q_{1r} > Q_{RLim}$, Nous aurons donc :

$H_{2v} = H_{Lim}$ et Q_{2v} sera donné par la relation [III.53] , qui s'écrit :

$$Q_{2v} = Q_{1r} - \frac{gA}{c} [H_{Lim} - H_{1r}]$$

A.N.: $Q_{2v} = 0.994478453 = 0.99 \text{ m}^3/\text{sec} .$

La section A_{2v} sera calculée par la relation [III.54] qui donne :

$$A_{2v} = \frac{Q_{2v}}{m \sqrt{(2g H_{lim})}}$$

A.N.: $A_{2v} = 0.6241384 = 0.62 \text{ m}^2 .$

Comme $Q_{2v} > Q_{VLim}$, Q_{3r} se calculera comme suite en utilisant la relation [III.62].

$$Q_{3r} = - \frac{c/A}{2\alpha g} + \sqrt{\left[\frac{c/A}{2\alpha g} \right]^2 - \frac{c}{2\alpha g} [Q_{Vlim} - Q_{2v}]}$$

A.N.:

$$Q_{3r} = 0.376883015 = 0.38 \text{ m} / \text{sec} .$$

Par conséquent , H_{3r} sera donnée par la relation [III.63].

$$H_{3r} = H_0 - \alpha Q_r(3)^2$$

A.N.:

$$H_{3r} = 49.28979596 \text{ m .}$$

b /.Point (4V) :

Dans ce cas $Q_{3r} < Q_{RLim}$, par conséquent nous aurons $Q_{4v} = 0$ [fermeture totale de la vanne].

d'où nous aurons :

$$A_{4v} = 0 \text{ et } H_{4v} \text{ sera donné par la relation [III.55]}$$

qui donne :

$$H_{4v} = H_{3r} + \frac{c}{gA} Q_{3r}$$

A.N.:

$$H_{4v} = 68.0304692 = 68.03 \text{ m}$$

H_{4v} étant supérieur à H_o , Q_{5r} est donné par la relation [III.74] qui s'écrit :

$$Q_{5r} = \frac{c/A}{2\alpha g} - \sqrt{\frac{c/A}{2\alpha g} + 1/\alpha [H_{4v} - H_o]}$$

A.N.:

$$Q_{5r} = - 0.350264259 = - 0.35 \text{ m}^3/\text{sec} .$$

D'où H_{5r} calculée par la relation [III.66] , s'écrit :

$$H_{5r} = H_o + \alpha Q_{5r}^2$$

A.N.:

$$H_{5r} = 50.61342526 = 50.61 \text{ m.}$$

Comme $H_{6v} < H_o$:

Q_{7r} sera donné par la relation [III.72] qui s'écrit :

$$Q_{7r} = - \frac{c/A}{2\alpha g} + \sqrt{\left[\frac{c/A}{2\alpha g}\right]^2 - 1/\alpha [H_{6v} - H_o]}$$

H_{7r} sera donné par la relation [III.63] :

$$H_{7r} = H_o - \alpha Q_{7r}^2$$

A.N.:

$$Q_{7r} = 0.327165204 = 0.33 \text{ m}^3/\text{sec} .$$

$$H7r = 49.46481464 = 49.46 \text{ m .}$$

compte tenu de la remarque faite au chapitre III les résultats de l'étude des points $(2i-1)V$ sont identiques à ceux trouvés pour les points $(2i)V$.

les résultats sont donnés dans le tableau récapitulatif suivant :

j	tj (sec)	Qjv (m ³ /sec)	Ajv (m ²)	Hjv (m)	Q(j+1)r (m ³ /sec)	H(j+1)r (m)
1 et 2	2 et 4	0.99	0.62	80	0.38	49.29
3 et 4	6 et 8	0.00	0.00	68.03	-0.35	50.61
5 et 6	10 et 12	0.00	0.00	33.20	0.33	49.46

Tableau 7

CONSTRUCTION GRAPHIQUE DE BERGERON :

CONCLUSION GENERALE .

Dans cette étude portant sur la contribution à l'étude du coup de bélier , nous avons établi un modèle de calcul , pour le cas d'une conduite à caractéristique unique reliée à son extrémité amont à un réservoir à niveau constant et à un organe de régulation de débit à son extrémité aval .Ceci en utilisant la methode des caractéristiques appliquée au graphe de Bergeron , en supposant que les pertes de charge sont concentrées à l'amont ou à l'aval .

La détermination des valeurs du coup de bélier (pression et débit) est obtenue par un calcul numérique pour les deux cas où la perte de charge est concentrée à l'amont ou à l'aval.

Ayant comme optique toutes les circonstances néfastes à la conduite ,nous avons déterminé une loi de fermeture de l'organe de régulation du débit en fixant une valeur limite du coup de bélier à ne pas dépasser qui dépend des propriétés hydrodynamiques de l'installation .

Ceci a pour avantages :

-protection de la conduite contre les vibrations dues à la variation de pression en assurant un coup de bélier parfait.

-Régulation du débit en fonction du temps .

Notre étude est accompagnée d'un exemple pratique sur lequel nous avons testé nos résultats .

BIBLIOGRAPHIE

- 1-y. Ouragh, écoulement forcé en hydraulique, O.P.U, 1990
- 2-L. BERGERON, "du coup de belier en hydraulique au coup de foudre en électricité", Dunod Paris, 1950
- 3-CARLIER "Hydraulique générale", Eyrolles, Paris.
- 4-A. Dupont, "hydraulique urbaine" tome 2, Eyrolles, Paris.
- 5-M. HUG, "Mécanique des fluides appliquée", Eyrolles, Paris 1975.
- 6-M. Munier, "coup de belier dans les réservoirs sous pression", ENGRF Paris, 1978
7. contribution à l'étude du régime transitoire dans une conduite à écoulement gravitaire (thèse). M^r SALAH BOUALEM.