

2/91

وزارة الجامعات
~~Ministère aux Universitaires~~
المدرسة الوطنية للعلوم والتقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

2 ex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT HYDRAULIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE DES INFILTRATIONS
DANS LES DIGUES ET BARRAGES
EN TERRE PAR LA METHODE
DES DIFFERENCES FINIES

Proposé par :

Mr. ABDERRAHIM

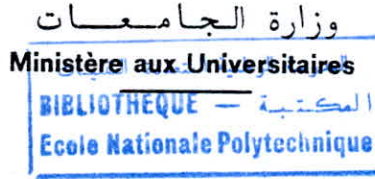
Etudié par :

Melle D. BEN-MILOUD

Dirigé par :

Mr. ABDERRAHIM

PROMOTION JUIN 1991



ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT **HYDRAULIQUE**

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE DES INFILTRATIONS
DANS LES DIGUES ET BARRAGES
EN TERRE PAR LA METHODE
DES DIFFERENCES FINIES

Proposé par :

Mr. ABDERRAHIM

Etudié par :

Melle D. BEN-MILOUD

Dirigé par :

Mr. ABDERRAHIM

PROMOTION **JUIN 1991**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

À mes proches parents

" Le peu que j' ai appris jusqu' ici n' est presque rien à comparaison de ce que j' ignore et que je ne désespère pas de pouvoir apprendre ."

Descartes

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier mes parents qui m'ont soutenue tout au long de mes études.

Je remercie également Monsieur D. Abderrahim, Monsieur Y. Mouloudi, Mademoiselle S. Benmaamar et les autres enseignants du Département Hydraulique pour leur aide.

Mes remerciements vont ensuite à mon oncle Tayeb pour l'impression de cette thèse.

Je tiens à adresser mes derniers remerciements à mes amis de la promotion.

Abstract.

The problem of seepage through a homogeneous earth dam is investigated on the assumption that the flow, steady and governed by Darcy's law. The problem is solved by adapting the finite difference method for machine computation. Several cases have been studied and the results obtained are commented.

Résumé.

Le problème des infiltrations à travers un barrage homogène, en terre est étudié en faisant l'hypothèse que l'écoulement est plan, permanent et régi par la loi de Darcy. On a élaboré un programme pour la résolution de ce problème par la méthode des différences finies. Après avoir traité plusieurs cas, nous avons procédé à la critique des résultats obtenus.

ملخص

تمت مشكلة تسرب المياه عبر سدود التربة تدرس
بفرض السيلان مستوي، مستقر ومستقر بقانون دارسي.
لقد قمنا بعمل برنامج لحل هذه المسألة بطريقة الفرق
المتناهية. قمنا بتطبيق هذا البرنامج على عدة أمثلة ثم
حللنا النتائج المحققة عليها.

Table des Matières

I	Introduction	1
I.1	Introduction générale	1
I.2	Application des principes généraux de la mécanique à la mécanique des fluides dans les milieux poreux.	3
I.2.1	Principe de conservation de la masse et équation de continuité.	3
I.2.2	Principe de la proportionnalité des forces et des accélérations et les trois équations de la dynamique.	4
I.2.3	L'équation d'état du fluide	4
I.2.4	Application des équations de Navier-Poisson à quelques cas particuliers.	5
I.3	Equations de base de l'écoulement permanent.	6
I.3.1	Loi de Darcy.	6
I.3.2	Equation de continuité	8
I.3.3	Anisotropie	9
I.4	Conditions initiales et aux limites.	12
I.4.1	Conditions initiales.	12
I.4.2	Conditions aux limites.	12

II	Méthodes de Résolution	15
II.1	Méthodes analytiques.	16
II.2	Méthodes des modèles.	18
II.2.1.	Modèles hydrauliques.	18
II.2.2.	Modèles analogiques.	22
II.2.2.1.	Analogie visqueuse.	22
II.2.2.2.	Analogie électrique.	24
II.3	Méthodes numériques.	29
II.3.1.	Méthode des différences finies.	30
II.3.2.	Méthode des éléments finis.	30
II.3.3.	Méthode des éléments aux frontières.	33
III	Approximations aux différences finies.	36
III.1	Introduction	36
III.2	Approximations discrètes des dérivées à une dimension.	37
III.3	Analyse des approximations à une dimension: erreur de troncature et consistance.	39
III.4	Résolution de l'équation de Laplace par différences finies.	41
III.4.1.	Maillage.	43
III.4.2.	Discretisation de l'équation de Laplace.	43
III.4.3.	Discretisation des conditions aux limites.	45
III.4.4.	Etude du système linéaire obtenu par discretisation.	49
III.4.5.	Résolution du système linéaire.	51

IV. Principe de résolution.	54
IV.1 Formulation du problème.	54
IV.2 Equations de base et conditions aux limites.	55
IV.3 Formulation par différences finies.	57
IV.4 Mise en oeuvre du traitement.	58
V Résultats et Critiques	61
VI Conclusion Générale	72

Chapitre I

INTRODUCTION

I. Introduction

I.1 Introduction générale.

L'hydraulique souterraine joue un rôle important dans le développement et la gestion des ressources en eau. Aussi, on assiste à une demande croissante d'informations concernant l'hydrologie souterraine et l'hydraulique des écoulements dans les milieux poreux.

Dans de nombreux projets, l'importance de l'étude des écoulements à travers les ouvrages, les barrages notamment, n'est plus à démontrer.

L'un des problèmes essentiel relatif aux digues et barrages en terre, est la considération de tous les effets causés par l'infiltration de l'eau à travers le corps de ces ouvrages.

Les problèmes hydrodynamiques que posent ces ouvrages de retenue, ou de protection, sont d'une part l'évaluation et la limitation du débit de fuite à travers, ou sous, l'ouvrage, et d'autre part, la distribution des pressions au voisinage des parements, ou sous la base, intervenant dans les questions de stabilité.

Avec la loi d'écoulement de Darcy, qui conduit en régime permanent à l'équation de Laplace, l'étude des problèmes de filtration a beaucoup attiré les mathématiciens, depuis un siècle [25].

I. Introduction

C'est pourquoi, plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour le calcul des paramètres hydrodynamiques cités précédemment, et dont la détermination, dans la présente étude, est faite par la méthode numérique des différences finies.

Pour ce faire, on a commencé par la présentation des différentes lois régissant les écoulements dans les milieux poreux.

Par la suite, on a présenté quelques unes des méthodes utilisées, pour résoudre les problèmes d'infiltration dans les digues et barrages en terre, et déterminer les différents paramètres hydrodynamiques.

L'étape suivante a consisté en la présentation détaillée de la méthode des différences finies.

L'algorithme suivi et l'organigramme du travail effectué ont fait ensuite l'objet d'une partie de cette thèse.

Enfin, après avoir traité quelques exemples, on a procédé à la critique des résultats obtenus.

I. Introduction

I.2 Application des Principes généraux de la Mécanique à la Mécanique des Fluides dans les Milieux poreux [15].

Un problème de mécanique des fluides est résolu si l'on connaît en tout point de l'espace considéré la pression P dans le fluide, sa masse spécifique ρ et les composantes de sa vitesse u, v, w .

Ces cinq fonctions de x, y, z, t constituent les inconnues de notre problème. Pour les déterminer, il faudra écrire un certain nombre d'équations traduisant les principes fondamentaux de la mécanique.

I.2.1. Principe de conservation de la masse et équation de continuité.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.1a)$$

où, x, y, z : coordonnées du point considéré ;
 t : temps.

En notation vectorielle, on écrit :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.1b)$$

avec $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

I. Introduction

I.2 Application des Principes généraux de la Mécanique à la Mécanique des Fluides dans les Milieux poreux [15].

Un problème de mécanique des fluides est résolu si l'on connaît en tout point de l'espace considéré la pression P dans le fluide, sa masse spécifique ρ et les composantes de sa vitesse u, v, w .

Ces cinq fonctions de x, y, z, t constituent les inconnues de notre problème. Pour les déterminer, il faudra écrire un certain nombre d'équations traduisant les principes fondamentaux de la mécanique.

I.2.1. Principe de conservation de la masse et équation de continuité.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.1a)$$

où, x, y, z : coordonnées du point considéré ;
 t : temps.

En notation vectorielle, on écrit :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.1b)$$

avec $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

I. Introduction

I. 2.2. Principe de la proportionnalité des forces et des accélérations et les trois équations de la dynamique.

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial x} + f_x + \mu \Delta u + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \vec{V}) &= 0 \\ \int \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial y} + f_y + \mu \Delta v + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} (\text{div } \vec{V}) &= 0 \\ \int \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial z} + f_z + \mu \Delta w + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} (\text{div } \vec{V}) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Equations} \\ \text{de} \\ \text{Navier-Poisson} \end{array} \quad (1.2)$$

avec :

$\int \frac{Du}{Dt}$: forces d'inertie

$\frac{\partial P}{\partial x}$: forces de pression

f_x : forces de volume

$\mu \Delta u + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} (\text{div } \vec{V})$: forces de résistance visqueuse

$$\text{et } \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Les termes des deux autres équations sont analogues.

I. 2.3. L'équation d'état du fluide.

L'équation d'état du fluide est une relation :

$$f(P, \rho, T) = 0 \quad (1.3)$$

reliant la pression et la masse spécifique et introduisant une nouvelle inconnue, la température T . Celle-ci peut être décrite par une relation constituant la loi thermodynamique d'évolution du fluide.

I. Introduction

Cette loi peut être adiabatique, isotherme ou polytropique et se traduit par la relation :

$$g(P, T) = 0 \quad (1.4)$$

Pour les liquides, on adopte pratiquement une équation d'état restreinte à l'isothermie, de la forme :

$$\rho = \rho_0 \exp[\beta(P - P_0)] \quad (1.5)$$

pouvant être remplacée par :

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta(P - P_0)] \quad (1.6)$$

dans le cas de petites variations de pression et où :

ρ_0 : masse spécifique du fluide à la pression P_0

β : coefficient dépendant du fluide.

I.2.4. Application des équations de Navier-Poisson à quelques cas particuliers.

Les équations de Navier-Poisson peuvent être appliquées au milieu poreux moyennant certaines hypothèses, à savoir que :

- les forces d'inertie peuvent être négligées en raison de la faiblesse des vitesses absolues des mouvements dans les milieux poreux ;
- si de plus le mouvement est isotherme, permanent, sans actions des forces extérieures et le fluide incompressible, alors :
 - l'équation d'état se réduit à $\varphi(\rho, T) = 0$;
 - la loi thermodynamique donne $T = c^{te}$;
 - $\rho = c^{te}$.

I. Introduction

I.3 Equations de Base de l'écoulement Permanent.

I.3.1. Loi de Darcy.

Lorsque le fluide remplissant les pores d'un milieu poreux se déplace dans la matrice solide, une force de résistance est générée due à la viscosité du fluide et aux petites dimensions des pores. Cette force de résistance est proportionnelle, pour les mouvements relativement lents, au taux d'écoulement.

Si les effets d'inertie sont négligés et si le milieu poreux est isotropique, les équations d'équilibre peuvent être écrites:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{k} u = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{k} v = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{k} w + \rho g = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

où :

μ : viscosité du fluide ;

k : paramètre du sol indiquant la perméabilité du milieu poreux ;

g : constante de gravité.

Les équations (1.7) peuvent aussi être écrites :

I. Introduction

$$\begin{cases} u = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \\ v = -\frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \\ w = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \right) \end{cases} \quad (1.8)$$

Quand la densité du fluide est constante, il est plus pratique d'introduire une "nouvelle variable", la charge ϕ définie par :

$$\phi = z + \frac{P}{\rho g} \quad (1.9)$$

Dans ce cas, on peut écrire :

$$\begin{cases} u = -k \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = -k \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w = -k \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases} \quad (1.10)$$

où k est un nouveau paramètre appelé conductivité hydraulique, tel que :

$$k = \frac{k}{\mu} \rho g \quad (1.11)$$

Darcy a trouvé expérimentalement que le débit à travers un échantillon de sable était directement proportionnel à la différence des niveaux d'eau aux deux extrémités de l'échantillon, ainsi qu'à la section transversale de l'échantillon et inversement proportionnel

I. Introduction

à la longueur de l'échantillon, d'où :

$$Q = k.A. \frac{\phi_1 - \phi_2}{\Delta s} \quad (1.12)$$

Si le débit spécifique est défini par $q = \frac{Q}{A}$, on obtient en passant à la limite $\Delta s \rightarrow 0$:

$$q = -k \frac{d\phi}{ds} \quad (1.13)$$

qui est une forme spéciale de l'équation (1.10).

I.3.2. L'équation de continuité.

Pour la description du mouvement, la loi de Darcy seule ne suffit pas à moins que la charge ϕ soit connue. En général, quand une situation future doit être prédite, la charge ϕ n'est pas connue à l'avance et la loi de Darcy donne trois relations entre quatre inconnues : les trois composantes du débit spécifique et la charge.

Une quatrième équation doit être obtenue en notant que l'écoulement doit satisfaire la loi physique fondamentale de la conservation de la masse.

Dans le cas d'un milieu poreux incompressible et saturé et dans des conditions d'écoulement permanent, on a :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1.14)$$

Dans la plupart des cas, les variations de la densité ρ peuvent être négligées. D'où, en supposant ρ constant :

I. Introduction

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.15)$$

En remplaçant (1.10) dans (1.15), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.16)$$

qui est une équation à une seule inconnue, la charge ϕ .

Si on suppose la conductivité hydraulique constante, on est alors restreint à des considérations de milieu poreux homogène et l'équation (1.16) devient l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.17)$$

qu'on écrit en utilisant l'opérateur de Laplace ∇^2 :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.18)$$

I. 3. 3. L' anisotropie .

Dans plusieurs sols stratifiés, la résistance à l'écoulement dans la direction verticale est beaucoup plus grande que celle dans la direction horizontale ; ceci est dû à la structure en couches du sol générée par son histoire géologique.

Pour un tel milieu poreux anisotrope, la loi de Darcy doit être généralisée en termes de conductivité hydraulique :

I. Introduction

$$\begin{cases} u = -k_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} - k_{xy} \frac{\partial \phi}{\partial y} - k_{xz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ v = -k_{yx} \frac{\partial \phi}{\partial x} - k_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} - k_{yz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ w = -k_{zx} \frac{\partial \phi}{\partial x} - k_{zy} \frac{\partial \phi}{\partial y} - k_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases} \quad (1.19)$$

On suppose souvent que le tenseur des perméabilités est symétrique. Ceci exprime le fait qu'il existe trois directions orthogonales appelées directions principales de la perméabilité. D'où :

$$\begin{cases} u = -k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = -k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w = -k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases} \quad (1.20)$$

L'équation de continuité reste la même que l'équation (1.15).

L'équation générale obtenue à partir de (1.15) et (1.20) est :

$$k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.21)$$

On n'obtient plus l'équation de Laplace.

Effectuons le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{\frac{k}{k_x}} x \\ \eta = \sqrt{\frac{k}{k_y}} y \\ \zeta = \sqrt{\frac{k}{k_z}} z \end{cases} \quad (1.22)$$

I. Introduction

k est un coefficient quelconque ayant les dimensions d'une perméabilité relative.

On aura :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = \sqrt{\frac{k_x}{k}} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{k_x}{k} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

et compte tenu de (1.21) :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} = 0 \quad (1.23)$$

On retrouve donc l'équation de Laplace.

La fonction ϕ est donc une fonction harmonique et représente l'ensemble des lignes équipotentiels.

Soit ψ sa fonction conjuguée représentée par :

$$\psi(x, y, z) = C^{te} \quad (1.24)$$

Cette fonction représente les lignes de courant qui sont normales aux lignes équipotentiels.

Ceci se traduit par le fait qu'ayant deux directions orthogonales quelconques \vec{n} et \vec{t} , on a en tout point non singulier du domaine :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (1.25)$$

La connaissance de ϕ et ψ permet la définition de l'écoulement, soit la détermination de ses paramètres : pressions, vitesses et débits.

I. Introduction

I.4 Conditions Initiales et aux Limites [1]

Chacune des équations de continuité et d'hydrodynamique est une équation différentielle partielle décrivant une classe de phénomènes car elles ne contiennent aucune information relative à un cas spécifique à un écoulement en milieu poreux.

Pour obtenir de cette multitude de solutions celle correspondant au problème d'intérêt, il est nécessaire de fournir des informations supplémentaires qui ne sont pas contenues dans les équations.

I.4.1. Conditions initiales.

Elles comprennent des spécifications sur ϕ en tous les points à l'intérieur du domaine considéré à un instant initial noté $t=0$. On peut écrire :

$$\Phi = f(x, y, z, 0) \quad (1.26)$$

Pour tous les points (x, y, z) à l'intérieur du domaine, f est une fonction connue.

I.4.2. Conditions aux limites.

- Limite à charge fixe : rencontrée quand le domaine d'écoulement est adjacent à un volume d'eau libre.

Un tel problème est appelé problème de Dirichlet ou du premier type :

$$\Phi = f(x, y, z) \quad (1.27)$$

avec f : fonction connue.

I. Introduction

- Limite à débit fixe : sur une limite de ce type, le flux normal à la surface limite est donné en tout point. C'est la condition de Neumann ou du second type.

$$q_n = f(x, y, z, t) \quad (1.28)$$

où f est une fonction connue et $q_n = q \cdot 1_n$ dénote la composante du débit spécifique q normale à la surface S .

Si le milieu est anisotrope, on peut écrire :

$$q_n = -\bar{k} \text{grad } \phi \cdot 1_n = f(x, y, z, t) \quad (1.29)$$

- Limite semi-perméable : ce type de limite est rencontré quand le milieu poreux est en contact avec une masse d'eau continue (ou un autre milieu poreux), les deux étant séparés par une couche fine semi-perméable. Soient ϕ la cote piézométrique dans le domaine considéré et ϕ_0 celle dans le domaine externe.

Le débit à travers la couche fine est donné par :

$$q_n = \frac{k'(\phi_0 - \phi)}{B'} \quad (1.30)$$

où B' : épaisseur de la couche semi-perméable ;

k' : sa conductivité hydraulique.

Pour un milieu anisotrope, on aura :

$$-k \cdot \text{grad } \phi \cdot 1_n = \frac{k'(\phi_0 - \phi)}{B'} \quad (1.31)$$

C'est une condition aux limites du troisième type ou de Cauchy.

- Limite à surface libre : le lieu et l'allure de la surface libre sont inconnus. Leur détermination constitue en

I. Introduction

fait une partie de la solution requise. On doit cependant spécifier pour cette limite :

- sa géométrie ;
- la condition à satisfaire en tous ses points.

Puisque la pression relative en tous les points de la surface libre est nulle, on a, à partir de :

$$\phi(x, y, z, t) = z + \frac{P(x, y, z, t)}{\gamma}$$

la relation :

$$\phi(x, y, z, t) = z \quad (1.32)$$

Si cette surface varie dans le temps, sa vitesse dépendrait des vitesses de l'eau sur ses deux faces.

Ceci est exprimé par l'équation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{ne} \left[k_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - k_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = 0 \quad (1.33)$$

où ne : porosité efficace.

- Surface de suintement : dans ce cas, la surface libre est tangente à la limite du milieu poreux. Sur cette surface, l'eau émerge du domaine d'écoulement pour se raccorder au plan d'eau aval. L'eau sortant à l'air libre, on a la condition suivante :

$$\phi = z \quad (1.34)$$

Chapitre II

METHODES DE RESOLUTION

II. Méthodes de Résolution

La présence d'eau est un facteur important dans la conception d'un certain nombre d'ouvrages. Elle agit directement sur la stabilité des talus d'un barrage en terre. Il est donc important, pour l'Ingénieur chargé d'un projet, de pouvoir disposer d'un outil pour le calcul des écoulements de filtration dans son ouvrage ou au voisinage de celui-ci.

La particularité reliant l'ensemble des cas pratiques, qui sont très variés, est la présence d'une surface libre et éventuellement d'une surface de suintement.

Donc, outre la détermination du champ de potentiel de l'écoulement, il faudra déterminer la forme et la position de la surface libre qui est une des limites du domaine d'écoulement.

Ce double problème peut être résolu par des moyens divers: calculs approchés, modèles physiques, modèles analogiques continus ou discrets, modèles mathématiques.

En somme, il existe trois classes de méthodes pour la résolution de ce problème

- méthodes analytiques;
- méthodes basées sur l'utilisation des modèles et des analogies;
- méthodes numériques.

L'hypothèse de base de toutes ces méthodes est que tous les transferts ont lieu dans une zone saturée,

II. Méthodes de Résolution

de perméabilité constante, limitée par la surface libre.

II.1 Méthodes Analytiques [6], [23].

Les méthodes analytiques sont meilleures que toutes les autres et devraient être utilisées quand c'est possible. L'un des avantages de ces méthodes est que la solution peut être appliquée pour différentes valeurs des paramètres et des données d'entrée. Elle montre ainsi clairement l'influence de chaque paramètre.

Considérons donc un écoulement à deux dimensions et utilisons les transformations conformes pour sa résolution. Soit $F(z)$ une fonction de la variable complexe pouvant s'écrire sous la forme :

$$F(z) = F(x+iy) = \phi(x,y) + i\psi(x,y) \quad (2.1)$$

En différenciant F , on obtient :

$$dF = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy \quad (2.2)$$

Par ailleurs, la dérivée

$$\frac{dF}{dz} = \frac{dF}{dx + i dy} \quad (2.3)$$

n'aura de valeur finie indépendamment de dx et dy que si :

$$\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}}{i} \quad (2.4)$$

ce qui est équivalent à :

II. Méthodes de Résolution

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (2.5)$$

Une telle fonction est dite analytique et sa dérivée $\frac{dF}{dz}$ est déterminée d'une façon unique en tout point du plan (x, y) .

Il résulte des équations (2.5) que :

$$\Delta \phi = 0, \quad \Delta \psi = 0 \quad (2.6)$$

Les parties réelle et imaginaire de toute fonction analytique sont des solutions de l'équation de Laplace.

On peut assimiler la partie réelle ϕ d'une fonction analytique à la charge hydraulique et la partie imaginaire ψ à la fonction de courant. Il résulte donc qu'il suffit de poser $\phi = c^{te}$ et $\psi = c^{te}$ pour obtenir les équipotentielles et les lignes de courant.

Malheureusement, dans la plupart des études pratiques, on ne peut obtenir une solution analytique à cause de la forme irrégulière des limites du domaine étudié. De plus, les conditions aux limites pourraient varier le long de ces limites.

Par conséquent, les méthodes analytiques sont rarement appliquées pour la résolution des problèmes pratiques.

II.2 Méthodes des Modèles.

II.2.1. Modèles hydrauliques [5], [19], [23].

Ce sont des modèles physiques construits au laboratoire à une échelle donnée et représentant le domaine d'écoulement ainsi que ses limites, mais avec une distribution spatiale et une valeur de la perméabilité adéquatement modifiées.

Le premier modèle à sable date de 1893, quand P. Forseheimer l'a utilisé pour étudier l'écoulement dans un puits à Graz (Autriche) [3].

On les a construits sous différentes formes et dimensions.

Ce type de modèle a été adopté pour étudier les lignes d'écoulement dans le massif ou les terrains d'assise d'un barrage en terre car la valeur de la perméabilité ne modifie pas pour un système géométrique donné, l'allure générale des équipotentielles et des lignes de courant.

Il faudra, cependant, vérifier les conditions de similitude entre le modèle et le prototype.

En premier lieu, il faut que le nombre de Reynolds reste en deça de la limite de validité pour le modèle et le prototype.

Dans le cas d'un écoulement à travers un milieu homogène et isotrope, la loi générale de l'écoulement est :

$$\Delta \phi = 0 \quad (2.7)$$

II. Méthodes de Résolution

La perméabilité du prototype n'intervenant pas, on voit que la similitude sera réalisée quelle que soit la perméabilité du modèle.

L'échelle de celui-ci étant généralement petite, il convient de réduire autant que possible l'action de la capillarité dont l'importance relative deviendrait trop grande.

Pour déterminer le débit, on utilise la relation de similitude:

$$\frac{Q}{Q_m} = \frac{\Omega}{\Omega_m} \cdot \frac{k}{k_m} \cdot \frac{I}{I_m} \quad (2.8)$$

où :

Q : débit à travers une section donnée;

Ω : section considérée;

k : perméabilité;

I : gradient hydraulique.

Les lettres affectées de l'indice m se rapportent au modèle, tandis que les autres lettres se rapportent au prototype.

S'il n'y a pas de distorsion :

$$I = I_m, \quad Q = \lambda^2 \cdot \frac{k}{k_m} \cdot Q_m \quad (2.9)$$

Pour les écoulements plans à deux dimensions :

$$q = \lambda \cdot \frac{k}{k_m} \cdot q_m \quad (2.10)$$

où q désigne le débit par unité de largeur.

Si l'écoulement à représenter présente une surface libre, la condition $\Phi = z$ régnant sur cette surface conduit à la

II. Méthodes de Résolution

condition de similitude :

$$\frac{\Phi}{\Phi_m} = \lambda_3 \quad (2.11)$$

Dans le cas le plus général d'un milieu homogène et anisotrope, deux cas seront à envisager :

- si le modèle n'est pas distordu, les rapports de perméabilités principales devront être respectés, c'est à dire :

$$\frac{k_x^m}{k_x} = \frac{k_y^m}{k_y} = \frac{k_z^m}{k_z} \quad (2.12)$$

- si le modèle est distordu, les rapports de distorsion seront généralement choisis de façon que l'on puisse réaliser dans le modèle un remplissage isotope :

$$k_x^m = k_y^m = k_z^m \quad (2.13)$$

La visualisation du réseau d'écoulement peut se faire par l'utilisation de traceurs.

Les avantages de la méthode du modèle physique consistent en ce que :

- les phénomènes sont les mêmes sur le modèle et le prototype ;
- les surfaces libres s'établissent d'elles-mêmes ;
- les concentrations des gradients dangereux donnent lieu à des renards dans le modèle identiques à ceux dans le prototype.

Cependant, la réalisation pratique du modèle présente certains problèmes :

II. Méthodes de Résolution

- le remplissage du modèle doit être choisi convenablement. Le choix d'un sable fin pourrait vérifier la condition de Reynolds, mais il présente la difficulté d'une mise en place homogène ainsi que celle du tassement et du colmatage lors des essais;

- le choix d'un sable fin pourrait augmenter l'effet de l'ascension capillaire dans le cas d'un écoulement présentant une surface libre.

La similitude exigeait donc théoriquement que :

$$\frac{d}{d_m} = \lambda \quad (2.14)$$

ce qui est sensiblement équivalent à :

$$\frac{k}{k_m} = \lambda^2 \quad (2.15)$$

- pour réduire l'effet de la capillarité, on choisira des matériaux aussi grossiers que possible et que le permettra la condition de Reynolds, en acceptant, bien sûr, un certain degré d'imperfection du modèle.

On conclut donc que le modèle à sable ne peut pas être utilisé comme un outil de résolution des problèmes aux conditions aux limites. Ceci est dû aux difficultés techniques et d'échelle de la construction du modèle. Il représente cependant un bon outil de recherche au laboratoire pour l'observation des phénomènes et la vérification des solutions approximées.

II. Méthodes de Résolution

II.2.2. Modèles analogiques

Les principes des méthodes analogiques et les règles de base de leur application pour les écoulements dans les milieux poreux sont connus depuis longtemps. Les techniques expérimentales ont été améliorées au cours du temps et le nombre de problèmes qui on résoud par ces méthodes a augmenté.

Le modèle analogique est considéré comme un outil simulant un régime d'écoulement donné. Il est basé sur l'analogie entre systèmes appartenant à des catégories physiques entièrement différentes.

Dans un système analogique, la similitude est reconnue par :

- à chaque variable dépendante et à toutes ses dérivées dans les équations décrivant le système à étudier, correspondent une variable et des dérivées dans les équations du système analogique;
- les variables dépendantes et leurs dérivées sont liées entre elles de la même façon dans les deux systèmes.

Ce type de modèles comprend :

- les modèles d'analogie non-électrique;
- les modèles d'analogie électrique.

II.2.2.1. Analogie risquieuse [1],[3],[5],[23].

On sait depuis le dix-neuvième siècle qu'on peut simuler l'écoulement dans un milieu poreux en utilisant deux

II. Méthodes de Résolution

plaques parallèles rapprochées distantes de $d = 2z_0$ (1.5 à 2.5 mm). Le régime d'écoulement dans le sol étant laminaire, on réalise un écoulement analogue en utilisant un liquide visqueux.

Les équations de Navier-Stokes projetées sur les axes Ox et Oz (Oz vertical, positif vers le haut) donnent les composantes de la vitesse moyenne \vec{V}_0 :

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{z_0^2}{3\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \\ w_0 = -\frac{z_0^2}{3\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases} \quad (2.16)$$

Si on pose:

$$\phi = -\frac{z_0^2}{3\mu} \cdot P(x, z) \quad (2.17)$$

alors:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ w_0 = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases} \quad (2.18)$$

d'où:

$$\vec{V}_0 = \overrightarrow{\text{grad}} \phi = -\frac{z_0^2}{3\mu} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (2.19)$$

Le potentiel de vitesse est:

$$\phi = -\frac{z_0^2}{3\mu} \cdot P(x, z) \quad (2.20)$$

L'analogie visqueuse utilise le fait que cet écoulement suit une loi analogue à celle de Darcy.

II. Méthodes de Résolution

Le débit spécifique de cet écoulement est donné par :

$$\vec{q} = -Cq \cdot \vec{\text{grad}} \phi \quad (2.21)$$

avec

$$Cq = \frac{q d^3}{12 \nu} \quad (2.22)$$

où d : écartement des deux plaques;

ν : viscosité cinématique du liquide.

La continuité du liquide exigeant que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.23)$$

il s'ensuit

$$\Delta \phi = 0 \quad (2.24)$$

L'analogie avec un écoulement de filtration plan est immédiate et donne :

$q \longleftrightarrow v$ vitesse de filtration

$Cq \longleftrightarrow k$ perméabilité relative.

Les mesures de la charge hydraulique se font comme dans les modèles hydrauliques au moyen de prises de pression reliées à des tubes manométriques. Il est possible de visualiser les lignes de courant en injectant en certains points un mince filet coloré.

II. 2.2.2. Analogie électrique [3], [23], [27], [28].

L'analogie électrique est basée sur la similitude de

II. Méthode de Résolution

entre la loi d'Ohm pour le mouvement des charges électriques à travers un matériau conducteur et la loi de Darcy.

En effet, la loi d'Ohm généralisée est donnée par :

$$\vec{i} = -\frac{1}{\rho_e} \text{grad } U \quad (2.25)$$

où \vec{i} : vecteur de densité de courant;

ρ_e : résistivité du conducteur électrique;

$U(x, z)$: champ de tension électrique.

La répartition des densités de courant est donnée par :

$$\text{div } \vec{i} = 0 \quad (2.26)$$

d'où :

$$\Delta U = 0 \quad (2.27)$$

D'où les correspondances suivantes :

tension électrique	↔	charge hydraulique
densité de courant	↔	vitesse de filtration
conductivité électrique	↔	perméabilité relative

Il existe deux approches :

- Systèmes continus.

Dans un tel système, les propriétés du milieu à étudier sont simulées en utilisant un milieu conducteur continu dans l'espace.

Pour étudier donc par cette méthode un écoulement plan à potentiel de vitesse, on utilise une cuve dont le fond non conducteur a la forme de la région à étudier.

II. Méthodes de Résolution

La cuve est remplie d'une solution électrolytique. La différence de potentiel, maintenue entre les deux parois d'extrémités, crée dans l'électrolyte un champ électrique dont on détermine les lignes équipotentiellles.

L'identification entre les diverses expressions peut se faire de deux manières:

- par analogie directe:

$$U = -\phi, \quad W = -\frac{t}{\sigma} \psi \quad (2.28)$$

- par analogie inverse:

$$W = \phi, \quad U = -\frac{\sigma}{t} \psi \quad (2.29)$$

avec t : épaisseur de l'électrolyte;

σ : sa résistivité;

$W(x, z)$: fonction du flux;

$U(x, z)$: potentiel électrique.

- Systèmes discontinus.

• Papier conducteur [23]: il est constitué de deux feuilles assemblées par une colle et est utilisé pour l'étude des écoulements plans.

Le modèle du domaine à étudier est découpé dans ce papier; ses limites dont le potentiel est connu, sont constituées par des électrodes.

La détermination du champ des équipotentiellles se fait à l'aide d'une sonde portée à un potentiel déterminé et qu'on déplace

II. Méthodes de Résolution

jusqu'à ce que l'intensité qui y passe soit nulle.

Dans le cas d'un écoulement à surface libre, celle-ci n'est pas connue mais peut être déterminée par approximations successives par la double condition :

$$\Phi = z \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (2.30)$$

• Réseaux de résistance [23] : cette méthode permet de représenter facilement des écoulements à travers des zones de perméabilités différentes et anisotropes.

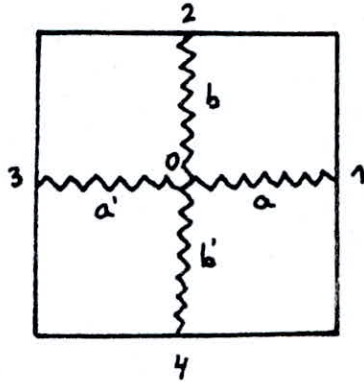


Fig-1- : Réseau de Résistances.

Soit un réseau de mailles carrés formées de résistances égales à R .

La loi des noeuds de Kirchhoff appliquée au noeud 0 donne :

$$\frac{U_1 - U_0}{R} + \frac{U_2 - U_0}{R} + \frac{U_3 - U_0}{R} + \frac{U_4 - U_0}{R} = 0$$

$$\sum_{i=1}^4 U_i - 4U_0 = 0 \quad (2.31)$$

Ceci est analogue à l'équation de Laplace exprimée en différences finies.

II. Méthodes de Résolution

Si le milieu est anisotrope, l'équation de Laplace en différences finies s'écrit :

$$k_x (\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0) + k_z (\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0) = 0 \quad (2.32)$$

Il suffira donc d'affecter les valeurs suivantes aux résistances :

$$R_x = \frac{1}{k_x}, \quad R_z = \frac{1}{k_z} \quad (2.33)$$

Si les mailles sont rectangulaires inégales :

$$R_1 = R_x \cdot \frac{2a}{b+b'} \quad R_3 = R_x \cdot \frac{2a'}{b+b'} \quad (2.34)$$

$$R_2 = R_z \cdot \frac{2b}{a+a'} \quad R_4 = R_z \cdot \frac{2b'}{a+a'}$$

Ainsi, les analogies électriques constituent le moyen le plus rapide et le plus économique quand le problème à étudier ne peut être résolu théoriquement. En effet,

- la méthode du papier conducteur est la plus simple mais ne permet pas de résoudre des problèmes plus compliqués ;

- la méthode des réseaux offre une multitude de possibilités mais il devient plus difficile d'adapter le réseau à tous les domaines d'écoulement, en particulier si ceux-ci présentent des surfaces libres inconnues a priori ;

- la méthode de la cure est recommandée pour les problèmes tridimensionnels, mais elle présente la difficulté

II. Méthodes de Résolution

de réglage de l'horizontalité de la cuve. De plus, l'échelle du modèle ainsi que ses dimensions par rapport à celles de la cuve doivent être choisies avec soin ;

- enfin, il n'existe pas dans le modèle électrique d'effet analogue à la gravité. L'équivalence entre les deux systèmes subsiste cependant si les conditions aux limites et les frontières de l'écoulement électrique sont bien déterminées dans le modèle.

A noter enfin que les méthodes analogiques continuent d'être développées dépendamment du progrès dans différentes branches de la science.

II.3 Méthodes Numériques.

Les méthodes numériques représentent l'un des moyens les plus importants de résolution des grands problèmes rencontrés dans les cas pratiques.

Les modèles mathématiques représentent une solution offrant une très grande souplesse d'emploi. Aussi, on en a développés plusieurs au cours du temps et parallèlement au développement de l'informatique.

Il existe plusieurs approches dont nous exposons trois :

- méthode des différences finies ;
- méthode des éléments finis ;
- méthode des éléments aux frontières.

II. Méthodes de Résolution

II.3.1. Méthode des différences finies.

La méthode des différences finies est basée sur la division du domaine d'écoulement en grille, suivie de l'analyse dudit écoulement et de la résolution des équations le décrivant.

Cette méthode étant celle adoptée dans notre étude, nous en ferons la présentation dans le chapitre suivant.

II.3.2. Méthode des éléments finis [2], [12]

Adoptée dès la moitié des années 60, la méthode des éléments finis représente une technique très performante pour la résolution des problèmes d'écoulements dans les milieux poreux. Elle s'adapte à n'importe quelle forme de domaine et n'importe quelle combinaison des conditions aux limites.

Le principe de cette méthode est la transformation de l'équation aux dérivées partielles en une intégrale comprenant des dérivées du premier ordre seulement. L'intégration est ensuite faite sur les éléments en lesquels le domaine considéré a été divisé.

Soit donc un domaine (D) tel que les conditions extérieures sont insuffisantes pour qu'il soit saturé (fig 2). Il apparaît alors une surface libre (S) séparant (D) en deux domaines :

D_s : domaine d'écoulement ;

D_r : domaine où il n'y a pas d'écoulement.

II. Méthodes de Résolution

Le problème réside donc dans la détermination de la surface limite (S) puis l'analyse de (D_s).

Le problème ainsi que les conditions aux limites sont représentés sur la figure ci-dessous:

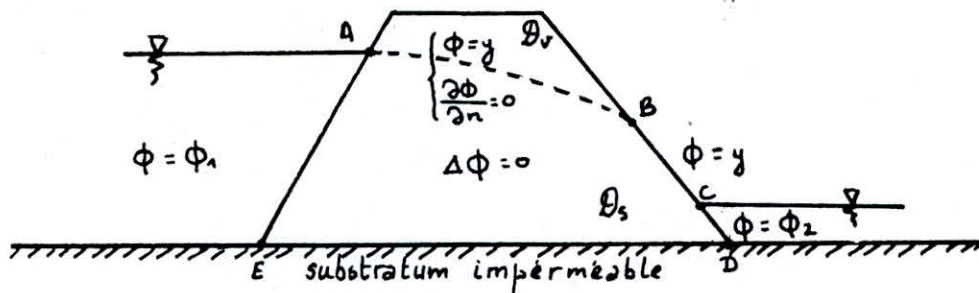


Fig. 2.-: Surface libre et Conditions aux limites

Nous cherchons donc à résoudre l'équation de Laplace:

$$\Delta \phi = 0 \quad (2.35)$$

Cette résolution équivaut à minimiser la fonctionnelle:

$$J(\phi) = \int_D \frac{1}{2} k_i (\partial_i \phi)^2 dD \quad (2.36)$$

où k_i : coefficient de perméabilité pour un écoulement parallèle à la direction i .

Nous cherchons la solution ϕ telle qu'on ait en un point M de (D):

$$\phi = \phi_i N_i + \phi_j N_j + \dots + \phi_n N_n \quad (2.37)$$

où N_i, N_j, \dots, N_n sont des fonctions de $x_i, y_i, z_i, \dots, x_j, y_j, z_j, \dots, x_n, y_n, z_n, \dots$ et des coordonnées du point courant x, y, z appartenant à l'élément considéré.

II. Méthodes de Résolution

Après quoi, on évalue les dérivées partielles dans chaque élément e :

$$\frac{\partial J^e}{\partial \phi_i} = a_{ii}^e \phi_i + a_{ij}^e \phi_j + \dots + a_{in}^e \phi_n \quad (2.38)$$

où les coefficients

$$a_{ij}^e = \int_{\mathcal{D}} \Sigma (k_i \partial_i N_i \cdot \partial_i N_j) \, dD \quad (2.39)$$

sont calculables à partir des éléments de N_i, N_j, \dots, N_n et de la forme des éléments.

La sommation de la contribution de chacun des éléments au processus de minimisation conduit à la relation matricielle:

$$[A][\Phi] = [B] \quad (2.40)$$

où $[A]$: matrice d'ordre M (M , nombre total de noeuds de l'ensemble des éléments);

$[\Phi]$: matrice colonne contenant les M valeurs nodales de la fonction;

$[B]$: matrice second membre.

On peut calculer l'ensemble des valeurs nodales de la fonction potentiel en résolvant le système linéaire (2.40) et avoir ainsi la solution du champ potentiel recherché.

La fonction potentiel obéit à deux types de conditions aux limites le long de la surface libre: $\Phi = z$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$.

La surface libre est obtenue par approximations successives

II. Méthodes de Résolution

en améliorant à chaque fois sa position pas à pas.

On converge ainsi vers une surface libre telle que la solution à l'intérieur du domaine vérifie toutes les conditions exigées.

Le degré de convergence est repéré par deux critères :

$$\sum_k |\Phi_k - y_k| \text{ sur la surface libre}$$

$$\sum_k |\Phi_k^{(n)} - \Phi_k^{(n-1)}| \text{ entre les résultats des itérations}$$

$n-1$ et n .

Ces deux quantités doivent être simultanément petites.

II.3.3. Méthode des éléments aux frontières [4], [8].

La méthode des éléments aux frontières est de plus en plus utilisée à cause de sa simplicité, son efficacité et sa précision.

Elle présente l'avantage d'opérer avec des systèmes d'équations plus petits que dans la méthode des différences finies ou celle des éléments finis.

Soit donc à résoudre l'équation

$$\mathcal{L}(\Phi_0) = 0 \quad (2.41)$$

dans le domaine Ω avec des conditions aux limites données (\mathcal{L}) est un opérateur équivalent au laplacien dans notre cas.

On commence par une discrétisation en éléments et on suppose qu'en chacun de ces sous-domaines, l'inconnue Φ_0 varie suivant une certaine forme.

Il faut noter que dans le cas des éléments aux frontières,

II. Méthodes de Résolution

seule les limites du domaine doivent être discrétisées.

On peut écrire une approximation de Φ_0 telle que :

$$\Phi_0 \approx \Phi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \dots \quad (2.42)$$

où ψ_i : fonctions indépendantes ;
 α_i : série de coefficients inconnus.

L'introduction de l'équation (2.42) dans l'équation (2.41) produirait des erreurs sur le domaine Ω et dans les conditions aux limites.

Le but des différentes techniques approximatives est de réduire ces erreurs autant que possible, soit en essayant de les annuler, soit en les distribuant sur les sous-domaines sous forme de résidus pondérés.

La fonction de pondération w décrivant cette distribution est définie par un ensemble de fonctions linéairement indépendantes et connues, multipliées par des coefficients arbitraires β_i :

$$w = \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \dots \quad (2.43)$$

Quand L est un opérateur linéaire, l'équation (2.41) est pondérée par la fonction w et ce par différentes techniques connues :

- méthode des collocations :

$$\int_{\Omega} L(\Phi) \Delta_i d\Omega = 0 \quad (2.44)$$

II. Méthodes de Résolution

pour tout point i , avec Δ_i fonction de Dirac.

On a donc :

$$w = \beta_1 \Delta_1 + \beta_2 \Delta_2 + \dots \quad (2.45)$$

- méthode des moments :

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi) \psi_i d\Omega = 0 \quad (2.46)$$

où ψ_i est défini pour un problème bidimensionnel par exemple,

$$w = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy + \dots \quad (2.47)$$

Il existe d'autres méthodes comme la méthode de pondération généralisée, méthode de Galerkin, etc...

Il faut noter que la surface de saturation est déterminée par approximations successives, chacune représentant un domaine où le procédé de la méthode des éléments aux frontières est appliqué.

Chapitre III

**APPROXIMATIONS
AUX DIFFERENCES FINIES**

III. Approximations aux Différences Finies

III.1 Introduction

Un des principes fondamentaux des méthodes numériques est la réduction d'une équation différentielle à une approximation en termes d'équations algébriques. Cette réduction remplace l'équation différentielle continue dont l'espace de la solution est généralement infini par un ensemble fini d'équations algébriques dont l'espace de la solution est de dimension finie. La méthode des différences finies est un moyen par lequel cette réduction peut être faite.

Les grandes lignes de cette méthode sont de procéder d'abord par l'identification d'un nombre fini de points discrets dans le domaine espace-temps considéré. Ces points sont appelés noeuds et c'est en ces lieux que les approximations de la solution réelle seront calculées. La détermination des lieux des noeuds est appelée pas de discrétisation.

Ensuite, les dérivées qui apparaissent dans l'équation différentielle de base sont remplacées par des approximations aux différences discrètes. Ces approximations sont écrites en termes d'évaluations nodales de la fonction inconnue. Ce pas est appelé pas d'approximation et donne un ensemble d'équations algébriques avec les valeurs discrètes nodales comme inconnues.

Le dernier pas donne la solution du système d'équations algébriques résultant. Après quoi, une approximation discrète de la solution de l'équation différentielle originelle est obtenue. Celle-ci doit être une bonne approximation en répondant

III. Approximations aux Différences Finies

à la définition mathématique générale

$$|u - \tilde{u}| < \varepsilon \quad (3.1)$$

où ε est subjectivement choisi suffisamment petit, ce qui n'est pas trivial puisque la solution exacte u est inconnue.

La détermination de la précision de l'approximation requiert donc l'analyse de chacun des trois pas (discrétisation, approximation, solution) induits par la dérivation de la solution aux différences finies.

III.2. Approximations Discrètes des Dérivées

à une Dimension

Le concept d'approximation aux différences finies peut être vu comme le processus inverse utilisé pour définir les dérivées.

Soit en effet, la définition standard de la dérivée d'une fonction continue $u(x)$,

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (3.2)$$

L'approximation aux différences finies de $\frac{du}{dx}$ peut être considérée comme l'équation (3.2) sans le processus des limites. C'est à dire qu'on utilise une valeur finie de h de telle sorte qu'une estimée de $\frac{du}{dx}$ soit obtenue arithmétiquement de $u(x)$. De plus, dans la méthode des

III. Approximations aux Différences Finies

Différences finies les lieux x et $x+h$ sont souvent choisis de telle sorte qu'ils coïncident avec des points nodaux prédéterminés.

L'approximation aux différences finies de $\frac{du}{dx}$ peut donc être écrite comme :

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} \approx \frac{u(x_i+h) - u(x_i)}{(x_i+h) - x_i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.3)$$

où $u_i \equiv u(x_i)$

$u_{i+1} \equiv u(x_{i+1})$

$x_{i+1} \equiv x_i + h$, x_i étant un lieu fixé dans l'espace.

Le membre droit de l'équation (3.3) fournit une approximation arithmétique de $\frac{du}{dx}$ évalué au point nodal x_i .

Des approximations similaires à celles des dérivées premières peuvent être écrites pour des dérivées d'ordre supérieur.

Par exemple, une approximation de la dérivée seconde de $u(x)$ peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &\approx \frac{\left. \frac{du}{dx} \right|_{i+1/2} - \left. \frac{du}{dx} \right|_{i-1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \\ &\approx \frac{\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \right) - \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right)}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

III. Approximations aux Différences Finies

où $x_{i \pm 1/2}$ représente le lieu de x au milieu de x_i et $x_{i \pm 1}$.
Si l'espacement des noeuds est constant, tel que :

$x_{i+1/2} = x_{i-1/2} = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x$, l'équation (3.4) devient :

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (3.5)$$

III.3 Analyse des Approximations à une Dimension :

Erreur de Troncature et Consistance.

L'analyse des approximations aux différences finies prend racine des développements en séries de Taylor.

En effet, ayant le théorème de Taylor, l'approximation aux différences finies précédentes peut être analysée comme suit :

Supposons que $u(x) \in C^\infty [w_1, w_2]$, où $[w_1, w_2]$ est une région finie de l'axe réel. Considérons ensuite le développement en séries de Taylor suivant et les points x_i et x_{i+1} appartenant à $[w_1, w_2]$ et distincts :

$$u(x_{i+1}) \equiv u_{i+1} = u(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} \cdot \left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \cdot \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x_i} + \dots \quad (3.6)$$

En soustrayant u_i des deux membres de l'équation (3.6), on aura :

III. Approximations aux Différences Finies

$$u_{i+1} - u_i = (x_{i+1} - x_i) \cdot \left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \cdot \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} + \dots \quad (3.7)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} &= \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2} \cdot \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} - \dots \\ &= \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} - \frac{\Delta x_i}{2} \cdot \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} - \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

La comparaison des équations (3.3) et (3.8) indique que l'approximation aux différences finies (3.3) néglige les termes :

$$\begin{aligned} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} - \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} &= - \frac{(\Delta x_i)}{2} \cdot \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} - \frac{(\Delta x_i)^2}{3!} \cdot \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right|_{x_i} - \dots \\ &\equiv (E.T) \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'approximation aux différences finies tronque donc l'équation (3.8) avec une erreur de troncature (E.T) définie comme étant la différence entre la dérivée réelle et son approximation aux différences finies.

Elle est due aux termes d'ordre supérieur dans les séries de Taylor et qui sont négligés dans l'approximation aux différences finies.

La condition fondamentale qui doit être vérifiée dans n'importe quelle approximation est que lorsque le processus limite (conditions aux limites) lui est appliqué, la dérivée actuelle doit être retrouvée.

III. Approximations aux Différences Finies

Aussi, comme l'espacement nodal Δx devient arbitrairement petit, l'expression aux différences finies doit devenir arbitrairement proche de la dérivée qu'on veut approximer. L'erreur de troncature doit donc disparaître quand Δx tend vers zéro. Dans ce cas, l'approximation aux différences finies est dite consistante.

La consistence est définie par la condition :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (ET) = 0 \quad (3.10)$$

Dans la présente étude, nous nous limiterons à la résolution de l'équation de Laplace.

III.4 Résolution de l'Equation de Laplace par Différences Finies.

Un grand nombre de phénomènes physiques stationnaires peut être décrit par une fonction $u(x_1, \dots, x_n)$, où n est la dimension de l'espace affine et où x_1, \dots, x_n sont les coordonnées d'un point (en pratique $n=2$ ou 3).

u peut représenter par exemple un potentiel électrique, un potentiel de vitesses, une fonction de courant, etc...

Souvent, on rencontre la situation suivante: le gradient de u , qui représente une grandeur physique aisément interprétable, a un flux. Autrement dit $\forall \Sigma = \partial \Omega$, surface fermée, bord d'un domaine Ω , on a:

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{grad}} u \cdot \vec{n} \cdot d\Sigma = 0 \quad (3.11)$$

III. Approximations aux Différences Finies

où \vec{n} : normale unitaire extérieure à Ω .

En transformant l'équation (3.11) à l'aide de la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{q} \operatorname{grad} u) dx_1 \dots dx_n = 0 \quad (3.12)$$

Comme ceci est vrai pour tout domaine Ω , et dans la mesure où u est assez régulière, on en déduit :

$$\operatorname{div}(\vec{q} \operatorname{grad} u) = 0,$$

c'est à dire :

$$\Delta u = 0 \quad (3.13)$$

$$\text{où } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

L'équation (3.13), dite équation de Laplace, est l'une des équations fondamentales de la physique, de la mécanique et des mathématiques appliquées. C'est le prototype des équations "elliptiques", linéaires et homogènes.

La procédure de résolution commence par le pas de discrétisation. Ensuite, une approximation aux différences finies de l'équation (3.13) est écrite en termes de valeurs nodales qu'on notera $u_{j,i} = u(x_j, y_i)$.

Quant aux conditions aux limites, nous en présentons globalement trois types :

- problème de Dirichlet pur où on impose $u = f$ sur Σ ;
- problème mixte de Dirichlet - Neumann dans lequel

III. Approximations aux différences Finies

$u = f$ sur Σ_1 , $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur Σ_2 , avec Σ_1, Σ_2 deux parties régulières du domaine;

- et le problème de Neumann pur où $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ est imposée sur Σ ;

avec f et g , deux fonctions données.

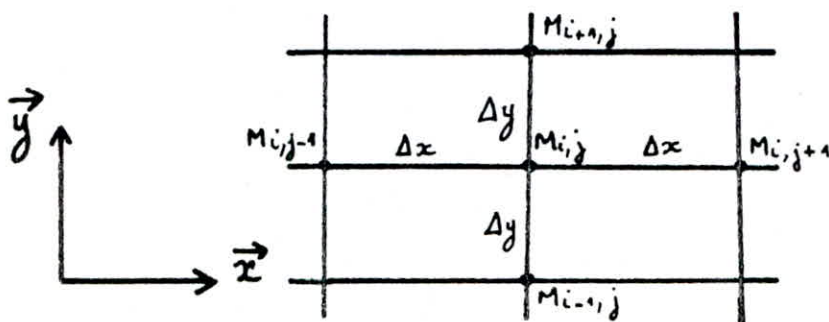
III. 4. 1. Maillage.

Ayant le domaine, on choisit deux directions orthogonales \vec{x}, \vec{y} . On trace alors, un réseau de droites parallèles aux axes x et y , respectivement, équidistantes ou non.

Les intersections des deux réseaux formeront les points $M_{j,i}$ de coordonnées (x_j, y_i) . Ces points constituent le maillage, dit aussi grille.

Donc, au lieu de chercher u dans Ω vérifiant l'équation de Laplace et des conditions aux limites, on cherchera \tilde{u} dans la partie $\tilde{\Omega}$ du maillage située dans Ω ou sur le bord, vérifiant une équation proche de l'équation de Laplace et des conditions aux limites proches des conditions aux limites données.

III. 4. 2. Discretisation de l'équation de Laplace.



III. Approximations aux Différences Finies

Soit un point $M_{i,j}$ intérieur au domaine Ω ainsi que les points voisins. Δx et Δy sont supposés petits par rapport aux dimensions de Ω , donc à l'échelle de variation de u . Si Δx tend vers zéro :

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x \cdot u'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot u''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{6} \cdot u'''(x) + O((\Delta x)^4) \quad (3.14)$$

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x \cdot u'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot u''(x) - \frac{(\Delta x)^3}{6} \cdot u'''(x) + O((\Delta x)^4) \quad (3.15)$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) = \frac{1}{(\Delta x)^2} [u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)] + O((\Delta x)^2) \quad (3.16)$$

à x fixé

De même, en appliquant (3.13) dans la direction \vec{y} et en supposant $\Delta x, \Delta y$ des infiniment petits du même ordre, alors :

$$\begin{aligned} \Delta u(M_{i,j}) &= \frac{1}{(\Delta x)^2} [u(M_{i,j+1}) - 2u(M_{i,j}) + u(M_{i,j-1})] \\ &+ \frac{1}{(\Delta y)^2} [u(M_{i,j}) - 2u(M_{i,j}) + u(M_{i,j})] \\ &+ O((\Delta x)^2, (\Delta y)^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

III. Approximations aux Différences Finies

De plus, si nous cherchons l'inconnue \tilde{u} aux seuls points du maillage, il semble naturel alors d'imposer à \tilde{u} l'équation aux différences finies (3.17).

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} [\tilde{u}_{i,j+1} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i,j-1}] + \frac{1}{(\Delta y)^2} [\tilde{u}_{i+1,j} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i-1,j}] = 0 \quad (3.18)$$

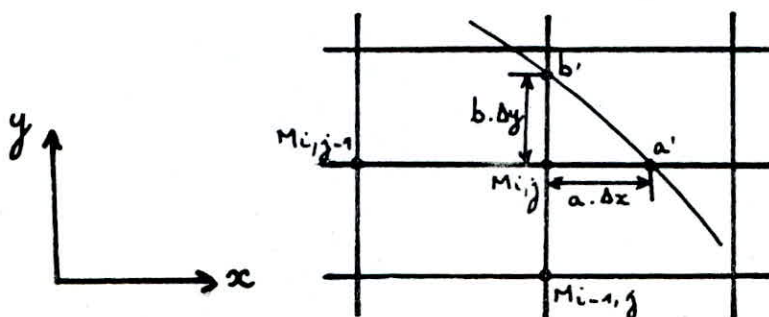
Cette équation joue vis-à-vis de \tilde{u} le même rôle que l'équation de Laplace vis-à-vis de u .

III.4.3. Discretisation des conditions aux limites.

(a). Cas d'une condition de Dirichlet.

Si u vérifie la condition de Dirichlet $u|_{\Gamma} = f$, f donnée, il faut imposer à \tilde{u} de vérifier en les points du maillage situés sur le bord concerné, la condition $\tilde{u} = \tilde{f}$, où \tilde{f} est la restriction de f à ces mêmes points.

Dans le cas où la frontière ne passe pas par les points du réseau, nous chercherons une approximation de u au point $M_{i,j}$ en utilisant les valeurs de u aux points $M_{i,j-1}$, $M_{i-1,j}$, a' et b' indiqués sur la figure ci-dessous:



III. Approximations aux Différences Finies

Posons $Ma' = a \cdot \Delta x$

$Mb' = b \Delta x$

En utilisant le développement de Taylor, nous aurons :

$$u(b') = u(M_{i,j}) + b(\Delta y) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{(b(\Delta y))^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + o((\Delta y)^3) \quad (3.19a)$$

$$u(M_{i-1,j}) = u(M_{i,j}) - \Delta y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + o((\Delta y)^3)$$

$$u(a') = u(M_{i,j}) + a(\Delta x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(a(\Delta x))^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o((\Delta x)^3) \quad (3.19b)$$

$$u(M_{i,j-1}) = u(M_{i,j}) - \Delta x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + o((\Delta x)^3)$$

En éliminant $\frac{\partial u}{\partial x}$ dans (3.19b) et $\frac{\partial u}{\partial y}$ dans (3.19a) et en écrivant que :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} ,$$

on aura :

$$\begin{aligned} \Delta u = & \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[\frac{u(a')}{a(a+1)} + \frac{u(M_{i,j-1})}{(1+a)} - \frac{u(M_{i,j})}{a} \right] \\ & + \frac{2}{(\Delta y)^2} \left[\frac{u(b')}{b(b+1)} + \frac{u(M_{i-1,j})}{(1+b)} - \frac{u(M_{i,j})}{b} \right] \\ & + o((\Delta x) + (\Delta y)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

En écrivant finalement que $\Delta u = 0$, on pourra établir une approximation au point $M_{i,j}$, en notant que $u(a') = u(b) = f(x, y)$ sur la frontière :

III. Approximations aux Différences Finies

$$\frac{2}{(\Delta x)^2} \left[\frac{f(x, y)}{a(a+1)} + \frac{u(M_{i,j-1})}{(a+1)} - \frac{u(M_{i,j})}{a} \right] + \frac{2}{(\Delta y)^2} \left[\frac{f(x, y)}{b(b+1)} + \frac{u(M_{i-1,j})}{(b+1)} - \frac{u(M_{i,j})}{b} \right] = 0 \quad (3.21)$$

En posant $A = \frac{2}{(\Delta x)^2}$, $B = \frac{2}{(\Delta y)^2}$, on écrira finalement :

$$\frac{A}{(1+a)} u(M_{i,j-1}) + \frac{B}{(1+b)} u(M_{i-1,j}) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{b} \right) u(M_{i,j}) = - \left(\frac{A}{a(a+1)} + \frac{B}{b(b+1)} \right) \cdot f(x, y) \quad (3.22)$$

On écrira pour la solution approximée :

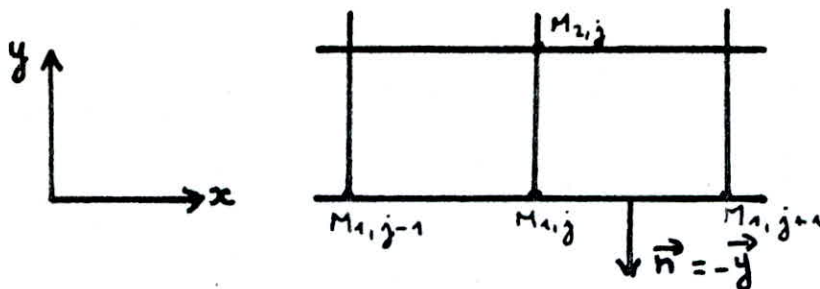
$$\frac{A}{(1+a)} \tilde{u}(M_{i,j-1}) + \frac{B}{(1+b)} \tilde{u}(M_{i-1,j}) - \left(\frac{A}{a} + \frac{B}{b} \right) \tilde{u}(M_{i,j}) = - \left(\frac{A}{a(a+1)} + \frac{B}{b(b+1)} \right) \cdot \tilde{f}(x, y) \quad (3.23)$$

(b) Cas d'une condition de Neumann.

Dans ce cas, on combine la condition aux limites avec l'équation de Laplace, laquelle permet de ramener une dérivée seconde normale à une dérivée seconde tangentielle.

Si la condition de Neumann s'écrit $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\Sigma} = g$ pour le problème continu, on pourra écrire :

III. Approximations aux Différences Finies



$$u(M_{2,j}) = u(M_{1,j}) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(M_{1,j}) + \frac{(\Delta y)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_{1,j}) + o((\Delta y)^3)$$

$$= u(M_{1,j}) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(M_{1,j}) - \frac{(\Delta y)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_{1,j}) + o((\Delta y)^3)$$

(car $\Delta u = 0$)

$$= u(M_{1,j}) + \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(M_{1,j}) - \frac{(\Delta y)^2}{2} \left\{ \frac{1}{(\Delta x)^2} [u(M_{1,j+1}) \right.$$

$$\left. - 2u(M_{1,j}) + u(M_{1,j-1}) + o((\Delta x)^2) \right\} + o((\Delta y)^3)$$

d'où :

$$g(M_{1,j}) = \frac{\partial u}{\partial y}(M_{1,j}) = \frac{1}{(\Delta y)} \left\{ u(M_{2,j}) - \left(1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} \right) u(M_{1,j}) \right.$$

$$\left. + \frac{(\Delta y)^2}{2(\Delta x)^2} [u(M_{1,j+1}) + u(M_{1,j-1})] \right\}$$

$$+ o((\Delta y)^2, (\Delta y)(\Delta x)^2) \quad (3.24)$$

Nous imposons donc à \tilde{u}

$$\tilde{u}_{2,j} - \left(1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} \right) \tilde{u}_{1,j} + \frac{(\Delta y)^2}{2(\Delta x)^2} (\tilde{u}_{1,j+1} + \tilde{u}_{1,j-1}) = \Delta y \cdot g(M_{1,j})$$

$$(3.25)$$

III. Approximations aux Différences Finies

Dans le cas où la frontière ne passe pas par les points du réseau, on aura:

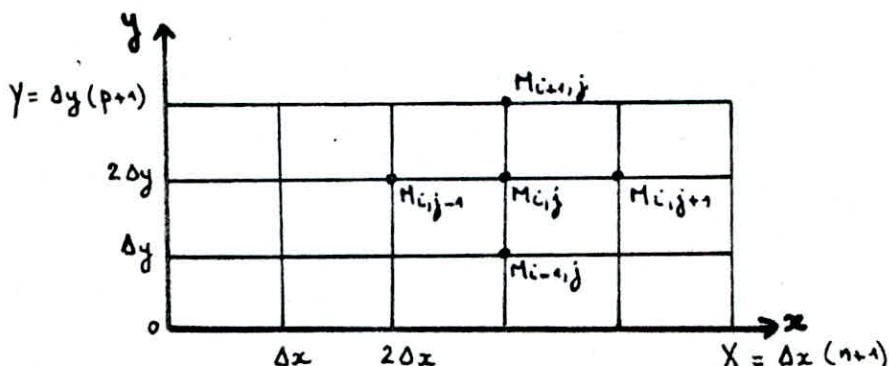
$$\begin{aligned} & \frac{(b\Delta y + 1)(b\Delta y + 2)}{2b\Delta y} \cdot u(M_{i,j}) - \frac{(b\Delta y)(b\Delta y + 2)}{(b\Delta y + 1)} \cdot u(M_{i-1,j}) \\ & + \frac{(b\Delta y)(b\Delta y + 1)}{2(b\Delta y + 2)} \cdot u(M_{i-2,j}) = g(x, y) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(b\Delta y + 1)(b\Delta y + 2)}{2b\Delta y} \cdot \tilde{u}(M_{i,j}) - \frac{(b\Delta y)(b\Delta y + 2)}{(b\Delta y + 1)} \cdot \tilde{u}(M_{i-1,j}) \\ & + \frac{(b\Delta y)(b\Delta y + 1)}{2(b\Delta y + 2)} \cdot \tilde{u}(M_{i-2,j}) = \tilde{g}(x, y) \end{aligned} \quad (3.27)$$

III.4.4. Étude du système linéaire obtenu par discrétisation.

Soit le domaine $\Omega =]0, X[\times]0, Y[$ et soient les pas $\Delta x = \frac{X}{n+1}$ et $\Delta y = \frac{Y}{p+1}$, n et p entiers assez grands.

Construisons le maillage correspondant.



III. Approximation aux Différences Finies

Les points intérieurs sont les points $M_{i,j}$ de coordonnées $x_j = j \cdot \Delta x$ et $y_i = i \cdot \Delta y$ pour $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq p$: leur nombre est $N = np$.

Pour $j=1, j=n, i=1$ ou $i=p$, l'équation de Laplace discrétisée fait intervenir des données aux limites que l'on peut faire passer au second membre, tandis que pour $1 < j < n$ et $1 < i < p$, elle ne fait intervenir que des équations. Elle est alors une équation homogène.

Le système linéaire des équations obtenues s'écrit :

$$AX = B \quad (3.28)$$

où X : matrice colonne des inconnues;

A : matrice $N \times N$ traduisant l'équation de Laplace discrète et ne dépendant que de Δx et Δy ;

B : matrice colonne faisant intervenir les données aux limites.

Comme seuls les points géométriquement voisins sont reliés par des équations du type (3.18), la matrice A est très "creuse".

De même, comme les équations correspondant à $1 < j < n$ et $1 < i < p$ sont homogènes, la matrice B est également très creuse.

Examinons maintenant les propriétés de la matrice

A :

III. Approximations aux Différences Finies

(a) La matrice A est symétrique ; elle comporte les termes $1, -\alpha, -\beta$, où

$$\alpha = \frac{(\Delta y)^2}{2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)}, \quad \beta = \frac{(\Delta x)^2}{2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)}$$

(b) La matrice A est pentadiagonale, c'est à dire :

- tous les termes diagonaux sont égaux à 1 ;
- les deux parallèles à la diagonale, jouxtant celle-ci comportent en général des termes $-\alpha$ et exceptionnellement des zéros ;
- les deux parallèles à la diagonale décalées vers le haut et vers le bas, de n , sont occupées par des termes $-\beta$. La matrice A est dite "matrice bande" de "largeur de bande", $2n+1$.

(c) La matrice A est à "diagonale dominante", c'est à dire :

$$\forall i \in [1, N], \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \quad (3.29)$$

L'inégalité n'étant pas stricte pour toutes les valeurs de i , on dira que la matrice A est "dominante au sens strict".

III.4.5. Résolution du système linéaire.

Il existe pour la résolution des systèmes linéaires deux grandes catégories de méthodes :

III. Approximations aux Différences Finies

- les méthodes directes;
- les méthodes itératives.

Théoriquement, une méthode directe donnerait une solution exacte sans erreurs d'arrondi, alors qu'une méthode itérative donnerait une solution convergeant asymptotiquement vers la solution réelle.

Cependant, comme l'ordinateur représente chaque nombre par un ensemble limité de digits, les méthodes directes ne donneront pas de solution exacte alors qu'une méthode itérative donne, après un certain nombre d'itérations, une solution qui ne varie plus.

Nous avons utilisé, dans notre étude, la méthode itérative de Gauss-Seidel.

Cette méthode est basée sur le balayage du domaine total. Parvenant au point $M_{i,j}$, on y calcule la valeur de la fonction $\tilde{u}_{i,j}^{(k)}$ à l'aide de:

- $\tilde{u}_{i-1,j}^{(k)}$ et $\tilde{u}_{i,j-1}^{(k)}$ récemment calculées dans l'itération en cours;

- et les anciennes valeurs $u_{i+1,j}^{(k-1)}$ et $u_{i,j+1}^{(k-1)}$ issues de l'itération précédente et toujours stockées dans la mémoire de l'ordinateur.

Ceci donne:

$$\tilde{u}_{i,j}^{(k)} = \alpha \left(\tilde{u}_{i+1,j}^{(k-1)} + \tilde{u}_{i-1,j}^{(k)} \right) + \beta \left(\tilde{u}_{i,j+1}^{(k-1)} + \tilde{u}_{i,j-1}^{(k)} \right) \quad (3.30)$$

valeur que nous substituons dans la mémoire de l'ordinateur à l'ancienne valeur $\tilde{u}_{i,j}^{(k-1)}$.

III. Approximations aux Différences Finies

Les calculs sont arrêtés lorsqu'un critère de convergence sur les valeurs de \tilde{u} est vérifié.

On démontre que pour une matrice ayant les propriétés de la matrice A , le processus itératif de Gauss-Seidel converge.

Chapitre IV

PRINCIPE DE RESOLUTION

IV. Principe de Résolution

Le présent chapitre comporte une description des étapes de calcul suivies pour la détermination des paramètres hydrodynamiques de l'écoulement à travers une digue ou un barrage en terre.

IV.1 Formulation du Problème.

Nous allons présenter trois cas :

- barrage rectangulaire avec suintement;
- barrage trapézoïdal avec suintement;
- barrage trapézoïdal avec tapis filtrant.

Les trois barrages sont supposés homogènes et isotopes reposant sur un substratum imperméable.

L'écoulement, régi par la loi de Darcy, est supposé plan et permanent. Le lieu de la surface libre est inconnu et est déterminé au cours des calculs.

Les trois cas étudiés sont présentés sur les figures ci-contre.

Le domaine d'écoulement ABCDE (ou ABE) est résolu par la méthode des différences finies. La position de la surface libre n'étant pas connue, on suppose une position initiale qu'on corrigera au cours des calculs si les conditions qui y règnent ne sont pas satisfaites.

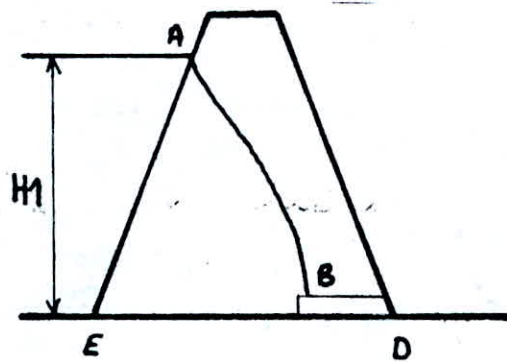
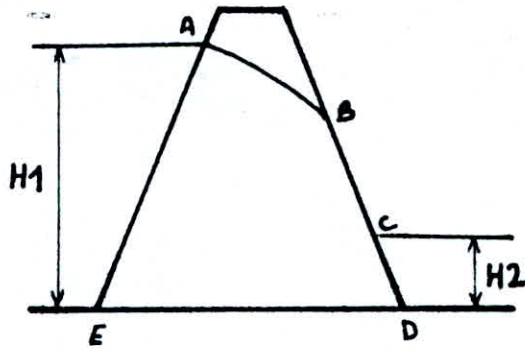
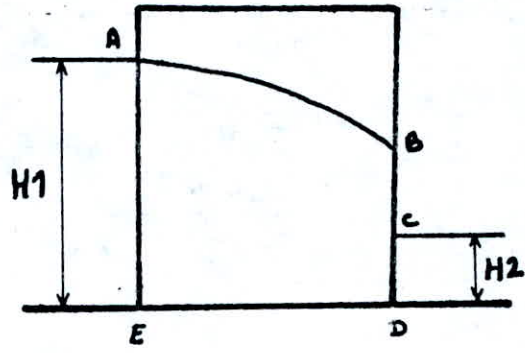


Figure 4: Cas étudiés.

IV. Principe de Résolution

IV.2 Equations de Base et Conditions aux limites.

Nous choisissons un axe de coordonnées Oxz (oz positif vers le bas).

Ainsi la charge est :

$$h = \frac{p}{\rho g} - z \quad (4.1)$$

où ρ : masse volumique considérée constante ;

g : accélération de la gravité.

On introduit la pression réduite :

$$P = \frac{p}{\rho g} \quad (4.2)$$

Les composantes de la vitesse sont données par :

$$u = k \frac{\partial h}{\partial x} \quad (4.3)$$

$$w = k \frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.4)$$

où k : coefficient de perméabilité, considéré constant.

L'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.5)$$

donne

$$\Delta P = 0 \quad (4.6)$$

IV. Principe de Résolution

L'équation (4.6) est du type elliptique. Les conditions aux limites sont données sur tout le contour du domaine. Sur la face AE, la pression réduite est :

$$P = \gamma \quad (4.7)$$

alors que la charge y est constante.

De même sur la face CD, la pression est :

$$P = \gamma - (H_1 - H_2) \quad (4.8)$$

Sur la base du barrage ED, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 1 \quad (4.9)$$

Le long de la surface de ruintement BC :

$$P = 0 \quad (4.10)$$

Sur la surface libre AB, on a la double condition :

$$P = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial (P - \gamma)}{\partial n} = 0 \quad (4.12)$$

où n : normale à AB, faisant un angle θ avec l'horizontale.

La condition (4.12) peut être réécrite :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \sin^2 \theta \quad (4.13)$$

IV. Principe de Résolution

IV.3 Formulation par Différences Finies.

La région d'écoulement est divisée en mailles où les équations et les conditions aux limites sont remplacées par des approximations aux différences finies.

En se basant sur ce qui a été développé dans le chapitre III, on aura :

- à l'intérieur du domaine, l'équation de Laplace est donnée par :

$$P_{i,j} = \frac{1}{4} (P_{i,j+1} + P_{i,j-1} + P_{i+1,j} + P_{i-1,j}) \quad (4.14)$$

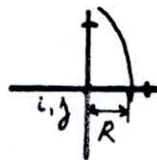
- sur la limite ED, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_{i+1,j} - P_{i-1,j}}{2\Delta z} = 1 \quad (4.15)$$

d'où pour un point donné sur ED, on aura :

$$P_{i,j} = \frac{1}{4} (P_{i,j+1} + 2P_{i-1,j} + P_{i,j-1} + 2\Delta z) \quad (4.16)$$

- sur la surface libre AB, on aura selon les cas schématisés ci-dessous :



• si $0 < R < \Delta x$:

$$P_{i,j} = \frac{\frac{2P_{i,j-1}}{1+R} + P_{i-1,j} + P_{i+1,j}}{2 + \frac{2}{R}} \quad (4.17)$$

IV. Principe de Résolution

• si $0 < S < \Delta z$:

$$P_{i,j} = \frac{P_{i,j+1} + P_{i,j-1} + \frac{2 P_{i+1,j}}{1+S}}{2 + \frac{2}{S}} \quad (4.18)$$

• si $0 < R < \Delta x$ et $0 < S < \Delta z$

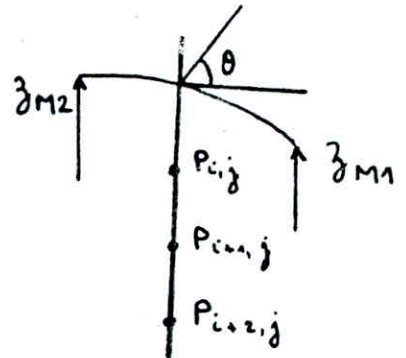
$$P_{i,j} = \frac{\frac{P_{i,j-1}}{1+R} + \frac{P_{i+1,j}}{1+S}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{S}} \quad (4.19)$$

- pour $\frac{\partial P}{\partial z} = \sin^2 \theta$, on remplacera :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{(S+1)(S+2)}{2S} P_{i,j} - \frac{S(S+2)}{(S+1)} P_{i+1,j} + \frac{S(S+1)}{2(S+2)} P_{i+2,j} \quad (4.20)$$

et :

$$\sin \theta = \frac{2 \Delta z}{\sqrt{(z_{M2} - z_{M1})^2 + 4(\Delta z)^2}}$$



IV. 4 Mise en Oeuvre du traitement.

Le principe général est :

- la surface libre inconnue a priori est définie par les conditions (4.11) et (4.12). On suppose donc une position initiale de la surface libre et on résout le problème en utilisant l'équation (4.11), d'où les valeurs $P(x, z)$ en tout point ;

- on vérifie pour la solution obtenue si la

IV. Principe de Résolution

condition (4.12) est vérifiée, sinon on modifie légèrement la surface libre et on refait les calculs jusqu'à la satisfaction simultanée des deux conditions.

Le processus de calcul est donné par la figure 5. Passons en revue les différents sous-programmes écrits en FORTRAN 77 :

- sub INITI : on choisit initialement une ligne parabolique ainsi que la position du point B. Les pressions ont des valeurs arbitraires ;

- sub PBNB : on introduit les différentes conditions aux limites sur les faces amont et aval (4.7 et 4.8) ;

- sub RELAX : on choisit un ordre de balayage et on vérifie la position du point, après on calcule la pression en ce point ;

- sub TEST : on vérifie en tout point de la surface libre si la condition (4.12) est vérifiée. f_{\max} est la plus grande différence de :

$$\left| \sin^2 \theta - \frac{\partial p}{\partial z} \right|$$

- sub SHIFT : dans le cas où f_{\max} est supérieur à un certain critère de convergence de la surface libre, on modifie la position de la surface libre et on revient à la troisième étape ;

- sub CAL : après la vérification simultanée des conditions (4.11) et (4.12) sur la surface libre, on calcule la distribution des charges et les débits de fuite.

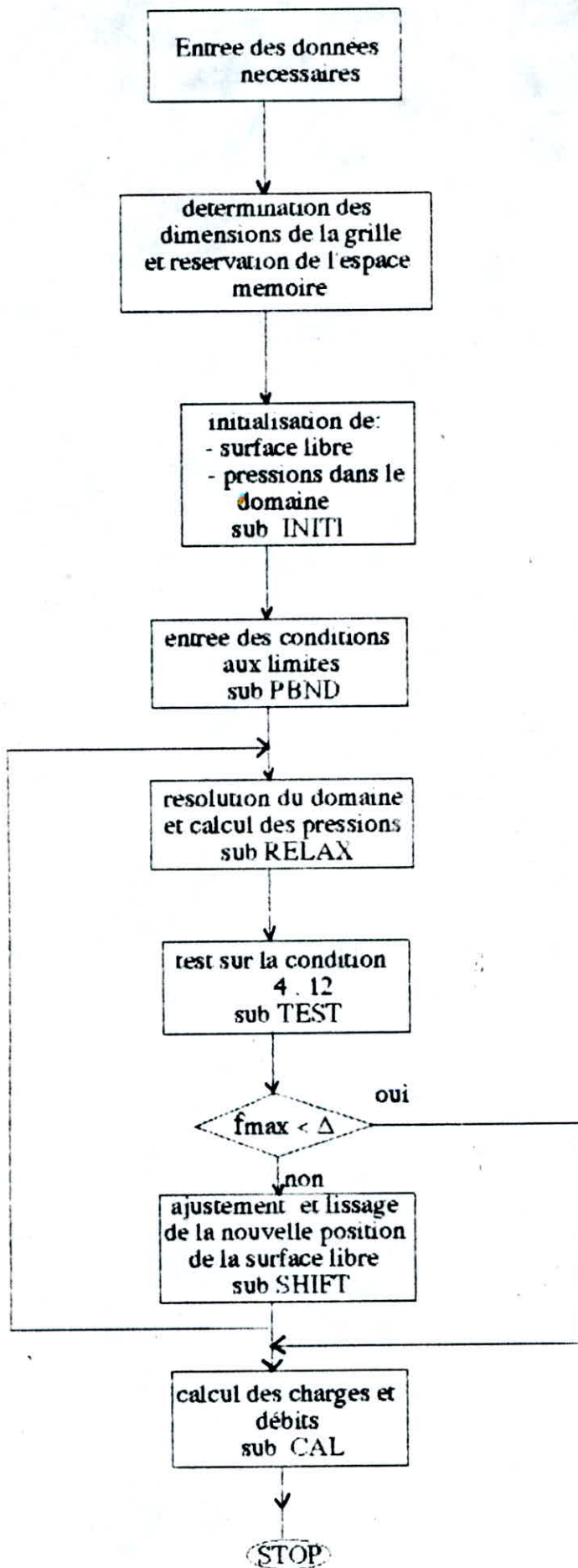


Figure 5: Etapes de calcul

IV. Principe de Résolution

Nous ferons remarquer enfin, que dans le cas du barrage avec tapis filtrant, le problème de détermination du point de suintement ne se pose plus.

Les conditions aux limites seront légèrement modifiées :

- il n'y plus de conditions sur le parement aval ;
- dans le tapis filtrant, les pressions interstitielles sont nulles.

Chapitre V

RESULTATS ET CRITIQUES

V. Résultats et Critiques.

Après la description des bases sur lesquelles repose notre programme, nous allons examiner maintenant à l'aide d'exemples les possibilités que peut offrir celui-ci.

Nous avons traité trois cas :

- barrage homogène rectangulaire ;
- barrage homogène trapézoïdal ;
- barrage homogène trapézoïdal avec tapis filtrant, horizontal.

Dans les trois cas la perméabilité a été prise égale à une constante ayant pour valeur 10^{-3} cm/s.

À l'issue de ces exemples, nous pouvons remarquer après examination des graphes, que les résultats obtenus sont assez satisfaisants, les allures des surfaces libres étant proches des allures théoriques.

Il existe cependant quelques points qui pourraient paraître aberrants et ce à cause des erreurs de précision dues à la double approximation sur les équations elles-mêmes et sur les valeurs calculées.

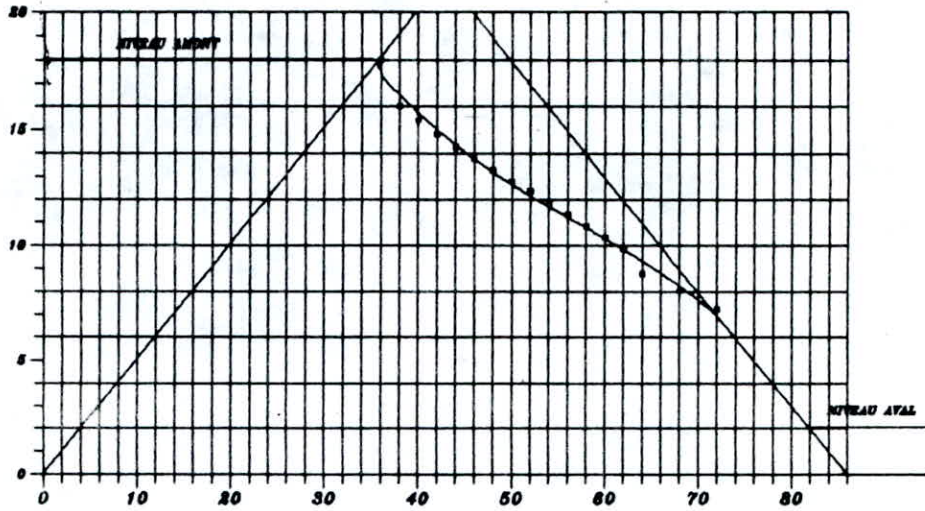


FIGURE 6: MAILLAGE
 $DX=2m$ $DY=2m$

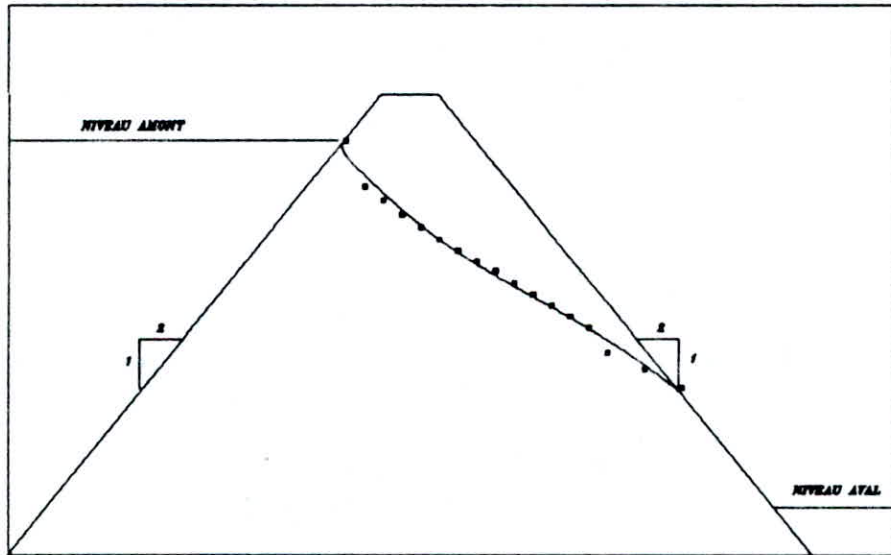


FIGURE 7: VISUALISATION
 DE LA
 SURFACE LIBRE

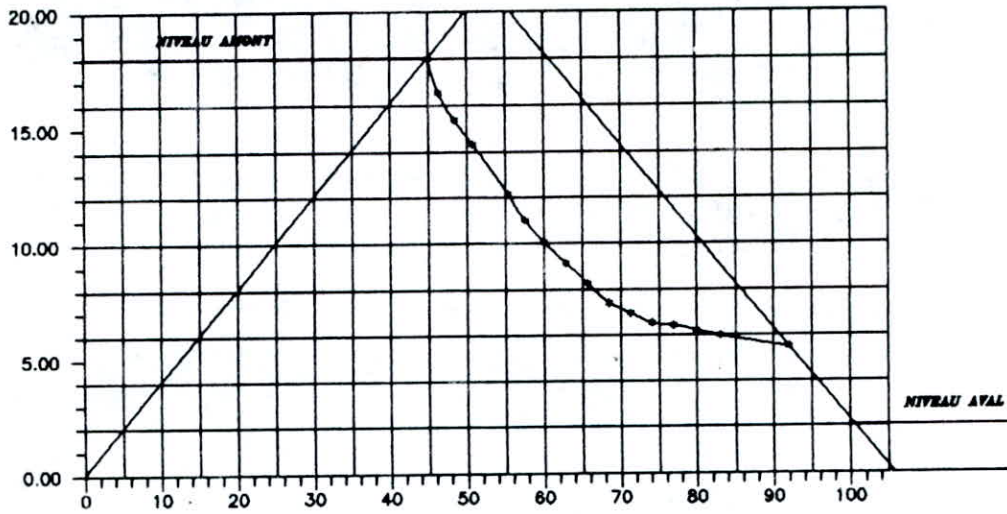


FIGURE 8: MAILLAGE
 $DX=5m$ $DY=5m$

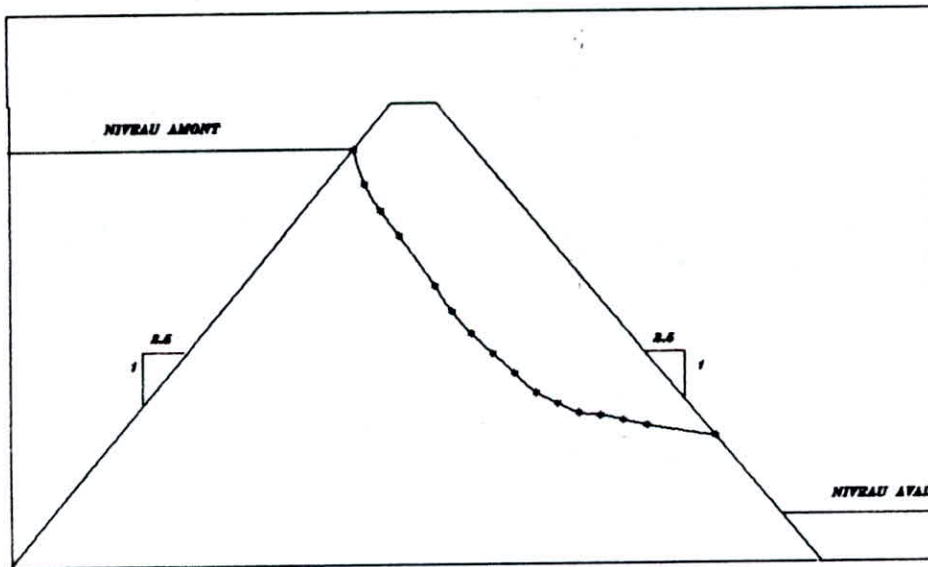


FIGURE 9: VISUALISATION
 DE LA
 SURFACE LIBRE

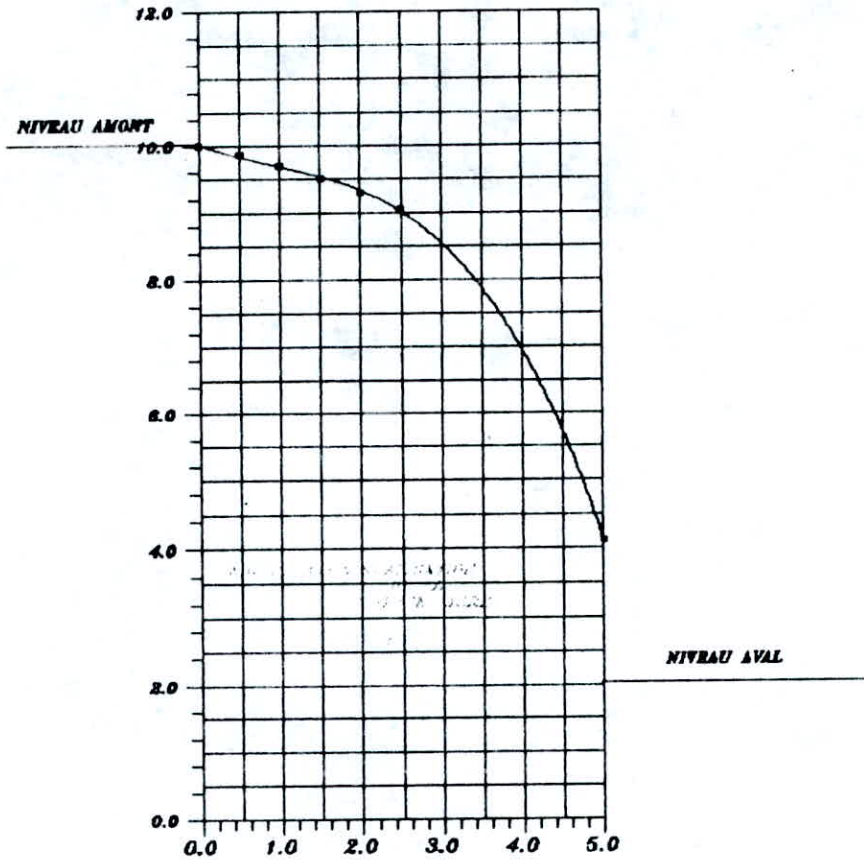


FIGURE 10: MAILLAGE
 $DX=0.5m$ $DY=0.6m$

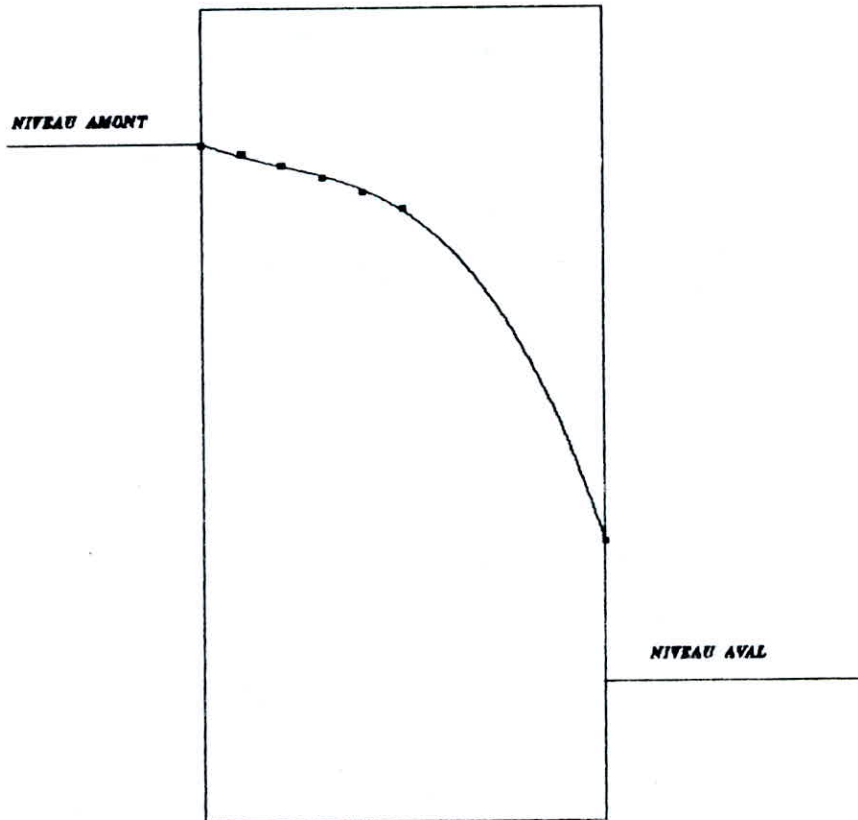


FIGURE 11: MAILLAGE
 $DX=0.5m$ $DY=0.6m$

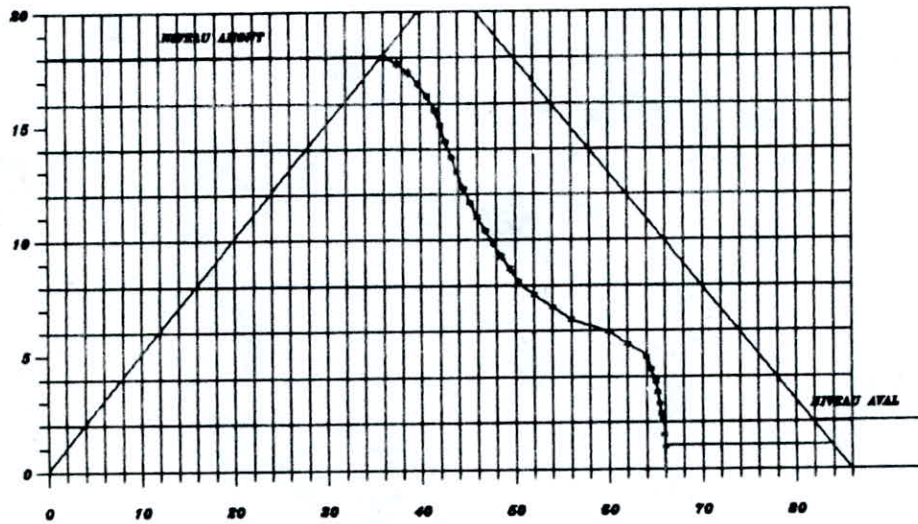


FIGURE 12: MALLAGE
 $DX=2m$ $DY=2m$
 $(Ldrcote=20m)$

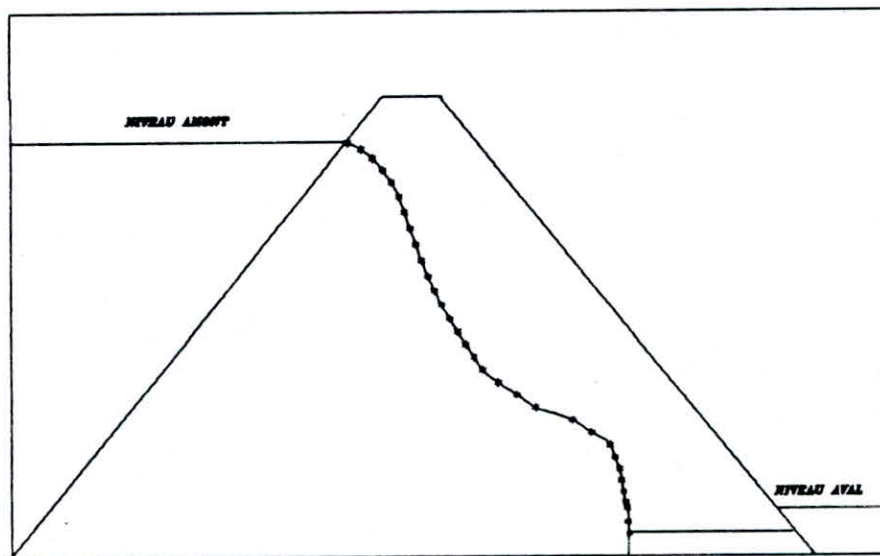


FIGURE 13: VISUALISATION
 DE LA
 SURFACE LIBRE

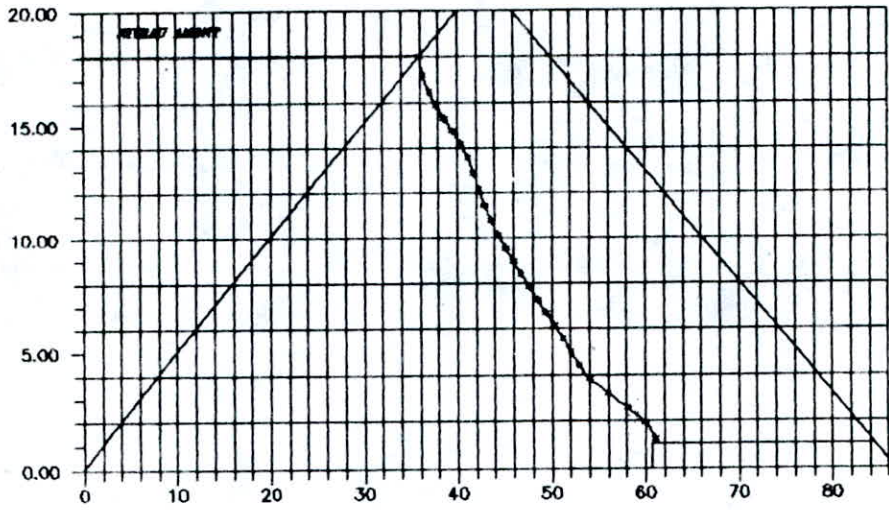


FIGURE 14: MALLAGE
 DX=2cm DY=2cm
 (Lubrification=25cm)

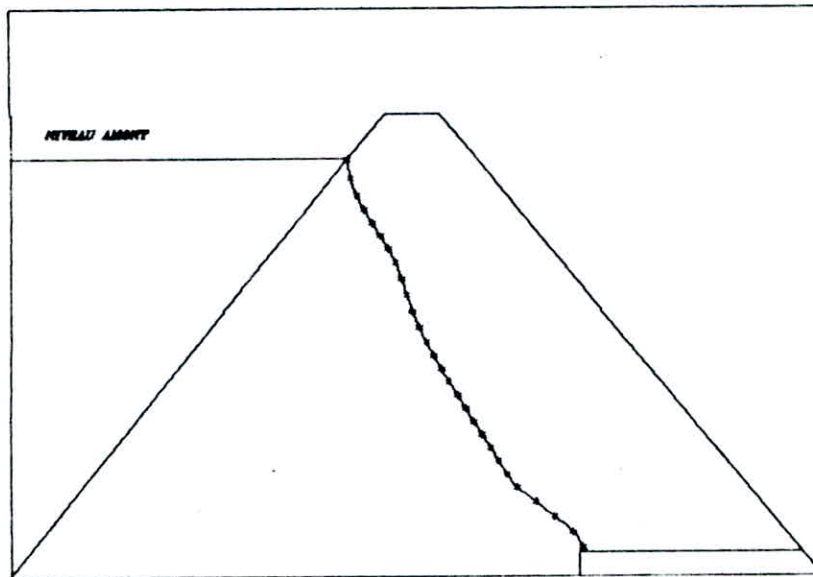


FIGURE 15: VISUALISATION
 DE LA
 SURFACE LIBRE

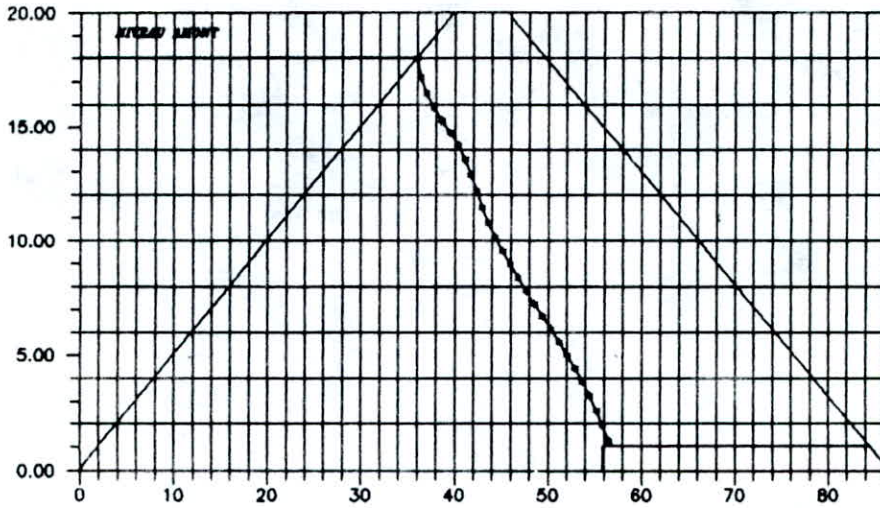


FIGURE 16: MAILLAGE
 $DX=8m$ $DY=8m$
 (L'drain=50m)

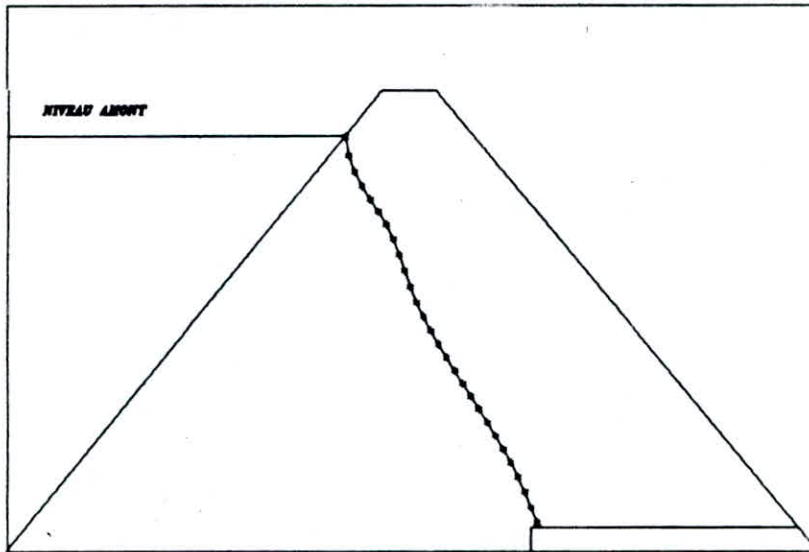


FIGURE 17: VISUALISATION
 DE LA
 SURFACE LIBRE

V- RESULTATS ET CRITIQUES

 *****BARRAGE TRAPEZOIDAL AVEC POINT DE SUINTEMENT*****

LARGEUR DE LA BASE =86m
 PENTE AMONT = PENTE AVAL =1/2

X	Y	CHARGE	DEBIT SPECIFIQUE
.20000E+01	.10000E+01	.18000E+02	.24434E-04
.60000E+01	.30000E+01	.18000E+02	.53296E-04
.10000E+02	.50000E+01	.18000E+02	-.42048E-05
.14000E+02	.70000E+01	.18000E+02	.56008E-05
.18000E+02	.90000E+01	.18000E+02	.29078E-04
.22000E+02	.11000E+02	.18000E+02	.12581E-04
.26000E+02	.13000E+02	.18000E+02	.53900E-05
.30000E+02	.15000E+02	.18000E+02	-.36804E-04
.34000E+02	.17000E+02	.18000E+02	.84709E-04
.26000E+02	.90000E+01	.18000E+02	.23303E-04
.26000E+02	.00000E+00	.18070E+02	.00000E+00
.43000E+02	.00000E+00	.20582E+01	.00000E+00
.60000E+02	.00000E+00	.55958E+00	.00000E+00
.78000E+02	.00000E+00	.34422E+01	.00000E+00
.84000E+02	.10000E+01	.20000E+01	-.72787E-05
.80000E+02	.30000E+01	.30000E+01	-.79380E-05
.76000E+02	.50000E+01	.50000E+01	-.58461E-06

X	Y	CHARGE
.16000E+02	.20000E+01	.17837E+02
.16000E+02	.40000E+01	.17552E+02
.16000E+02	.60000E+01	.17203E+02
.36000E+02	.20000E+01	.16924E+02
.36000E+02	.40000E+01	.16643E+02
.36000E+02	.60000E+01	.15769E+02
.36000E+02	.80000E+01	.15293E+02
.36000E+02	.10000E+02	.14880E+02
.36000E+02	.12000E+02	.14546E+02
.36000E+02	.14000E+02	.14219E+02
.50000E+02	.20000E+01	.13790E+02
.50000E+02	.40000E+01	.12650E+02
.50000E+02	.60000E+01	.12005E+02
.50000E+02	.80000E+01	.11370E+02
.50000E+02	.10000E+02	.10280E+02
.50000E+02	.12000E+02	.97850E+01
.50000E+02	.14000E+02	.93247E+01
.70000E+02	.20000E+01	.54223E+01
.70000E+02	.40000E+01	.43773E+01
.70000E+02	.60000E+01	.38027E+01

 *****BARRAGE TRAPEZOIDAL AVEC TAPIS FILTRANT*****

LONGUEUR DU DRAIN =20m
 LARGEUR DE LA BASE =86m
 PENTE AMONT = PENTE AVAL =1/2

X	Y	CHARGE	DEBIT SPECIFIQUE
.40000E+01	.20000E+01	.18000E+02	.20386E-03
.80000E+01	.40000E+01	.18000E+02	-.14459E-04
.12000E+02	.60000E+01	.18000E+02	-.22945E-04
.16000E+02	.80000E+01	.18000E+02	-.34783E-04
.20000E+02	.10000E+02	.18000E+02	-.30856E-05
.24000E+02	.12000E+02	.18000E+02	-.37489E-04
.28000E+02	.14000E+02	.18000E+02	-.43349E-04
.32000E+02	.16000E+02	.18000E+02	-.21413E-04
.36000E+02	.18000E+02	.18000E+02	-.42687E-04
.20000E+02	.95000E+01	.18000E+02	.39994E-04
.60000E+01	.00000E+00	.00000E+00	-.13987E-04
.14000E+02	.00000E+00	.17876E+02	.00000E+00
.22000E+02	.00000E+00	.17563E+02	.00000E+00
.30000E+02	.00000E+00	.16950E+02	.00000E+00
.38000E+02	.00000E+00	.16032E+02	.00000E+00
.46000E+02	.00000E+00	.10888E+02	.00000E+00
.54000E+02	.00000E+00	.68331E+01	.00000E+00
.62000E+02	.00000E+00	.49200E+01	.00000E+00
.66000E+02	.50000E+00	.00000E+00	.14925E-04
.34000E+02	.10000E+01	.10000E+01	-.10067E-04

 *****BARRAGE AVEC TAPIS FILTRANT*****

LONGUEUR DU DRAIN =25m
 LARGEUR DE LA BASE =86m
 PENTE AMONT = PENTE AVAL =1/2

X	Y	CHARGE	DEBIT SPECIFIQUE
.40000E+01	.20000E+01	.18000E+02	.20511E-03
.80000E+01	.40000E+01	.18000E+02	-.15101E-04
.12000E+02	.60000E+01	.18000E+02	-.22083E-04
.16000E+02	.80000E+01	.18000E+02	-.32534E-04
.20000E+02	.10000E+02	.18000E+02	-.12560E-05
.24000E+02	.12000E+02	.18000E+02	-.37473E-04
.28000E+02	.14000E+02	.18000E+02	-.43154E-04
.32000E+02	.16000E+02	.18000E+02	-.10317E-04
.36000E+02	.18000E+02	.18000E+02	-.43127E-04
.20000E+02	.95000E+01	.18000E+02	.40605E-04
.60000E+01	.00000E+00	.00000E+00	-.13870E-03
.14000E+02	.00000E+00	.17719E+01	.00000E+00
.22000E+02	.00000E+00	.16836E+02	.00000E+00
.30000E+02	.00000E+00	.15944E+02	.00000E+00
.38000E+02	.00000E+00	.14892E+02	.00000E+00
.46000E+02	.00000E+00	.87500E+01	.00000E+00
.54000E+02	.00000E+00	.40598E+01	.00000E+00
.59500E+02	.00000E+00	.27719E+01	.00000E+00
.61000E+02	.50000E+00	.00000E+00	.16266E-04
.31500E+02	.10000E+01	.10000E+01	-.12114E-04

 *****BARRAGE TRAPEZOIDAL AVEC TAPIS FILTRANT*****

LONGUEUR DU DRAIN =30m
 LARGEUR DE LA BASE =86m
 PENTE AMONT = PENTE AVAL =1/2

X	Y	CHARGE	DEBIT SPECIFIQUE
.40000E+01	.20000E+01	.18000E+02	.20675E-03
.80000E+01	.40000E+01	.18000E+02	-.16584E-04
.12000E+02	.60000E+01	.18000E+02	-.20360E-04
.16000E+02	.80000E+01	.18000E+02	-.31153E-04
.20000E+02	.10000E+02	.18000E+02	-.18406E-05
.24000E+02	.12000E+02	.18000E+02	-.37900E-04
.28000E+02	.14000E+02	.18000E+02	-.43003E-04
.32000E+02	.16000E+02	.18000E+02	-.11172E-05
.36000E+02	.18000E+02	.18000E+02	-.44779E-04
.20000E+02	.95000E+01	.18000E+02	.40527E-04
.60000E+01	.00000E+00	.00000E+00	-.13845E-03
.14000E+02	.00000E+00	.17720E+02	.00000E+00
.22000E+02	.00000E+00	.16343E+02	.00000E+00
.30000E+02	.00000E+00	.16012E+02	.00000E+00
.38000E+02	.00000E+00	.15880E+02	.00000E+00
.46000E+02	.00000E+00	.86730E+01	.00000E+00
.52000E+02	.00000E+00	.48799E+01	.00000E+00
.55000E+02	.00000E+00	.19390E+01	.00000E+00
.56000E+02	.50000E+00	.00000E+00	.54249E-05
.29000E+02	.10000E+01	.10000E+01	-.13317E-04

Chapitre VI

CONCLUSION GENERALE

VI. Conclusion Générale

L'apport du modèle mathématique dans l'arsenal des outils mis à la disposition de l'Ingénieur dans l'étendue incomparable des possibilités qu'il offre à son utilisateur.

Les résultats qui viennent d'être décrits montrent que celui qu'on a élaboré peut être amélioré. En effet, les hypothèses faites ont beaucoup simplifié le problème du point de vue physique.

Il faudra néanmoins noter la difficulté de l'application de la méthode des différences finies à un domaine variable. De plus, la discrétisation des conditions aux limites n'est pas toujours aisée.

Enfin, on peut prétendre à une amélioration du modèle en éliminant certaines hypothèses considérées auparavant, telle la négligence des effets de la capillarité, par exemple.

On peut également traiter le cas des barages hétérogènes ou du régime non-permanent.

Le modèle mathématique reste donc un vaste domaine de recherche sans diminuer pour autant l'importance des autres modèles, analogiques ou physiques.

BIBLIOGRAPHIE

1. BEAR, J. : Hydraulics of groundwater
Mc Graw-Hill Inc, 1979.
2. BLANC, G.; BARADAT, Y.; LAGARDE, A. : "Utilisation
des modèles mathématiques multidimensionnels
pour l'étude des écoulements dans les milieux
poreux" , La Houille Blanche , N° 5-6,
pp 435-441 , 1973.
3. BOWEN, R. : Groundwater .
Applied Science Publishers, 2nd Edition,
USA, 1986.
4. BREBBIA, C., A. : "Fundamentals of boundary elements"
Numerical methods in geomechanics ,
J.B. Martins (ed.) , pp 337-354 , 1982.
5. CARLIER, M. : Hydraulique générale et appliquée ,
Ed. Eyrolles , 1980.
6. CASANDJIAN, C. : "Écoulement de l'eau à travers une
digue perméable. Modélisation analytique."
Matériaux et constructions , Nov-Dec, N°78,
Dunod, 1980.
7. CASSAN, M. : Aide-mémoire d'hydraulique souterraine,
Ponts et Chaussées Presses, 1986.
8. CHUGH, A., K.; FALVEY, H., T. : "Seepage analysis in a zoned
anisotropic medium by the boundary element
method", International journal for numerical
and analytical methods in geomechanics,

vol 8, pp 399-407, 1984.

9. EFTHIMIATOS, J. : "Contribution à l'étude des infiltrations à travers les digues et barrages en terre." Thèse d'obtention du grade de Docteur-Ingénieur, Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 1965.
10. FINNEMORE, E., J. ; PERRY, B. : "Seepage through an earth dam computed by the relaxation technique." Water resources research, vol.4, N°5, pp1059-1067, October 1968.
11. FORSYTHE, G., E. ; WASOW, W., R. : Finite-difference methods for partial differential equations, John Wiley and Sons Inc, 1960.
12. GUELLEC, P. : "Calcul des écoulements dans les milieux poreux par la méthode des éléments finis", Rapport de Recherche N°11, Laboratoire des Ponts et Chaussées, Novembre 1970.
13. HALEK, V. : "Some hydraulic models and analogues for solving spatial lateral and bottom seepage through earth dams." La Houille Blanche, N° 5-6, pp 425-427, 1973.
14. HOUPEURT, A. : Mécanique des fluides dans les milieux poreux : butiques et recherches, Ed, technip, 1974.
15. HOUPEURT, A. : Eléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux, Ed Technip, 1975.

16. KAHAWITA, R.: Méthodes des différences finies, cours donné en 1990.
17. KOVACS, G.: "Scientific and practical problems related to the calculation of hydrodynamic parameters of seepage through earth dams", La Houille Blanche, N° 5-6, pp 413-414, 1973.
18. LEON, L.: Traitement d'algorithmes par ordinateur, Tome 2, CEPADUEG-EDITIONS, 1983.
19. MALLET, C.; PACQUANT, J.: Les barrages en terre. Ed. Eyrolles, 1951.
20. McCracken, D.D.; Doan, W.S.: Numerical methods and FORTRAN programming with applications in engineering and science, John Wiley and Sons Inc, 1964.
21. OBLED, C.: Cours d'analyse numérique, "Ecole Nationale d'hydraulique, Grenoble, 1983.
22. ROISIN, V.; VERBEYEN, J.: Stabilité des terrains: sols routiers, soutènements, talus. Ed. Eyrolles.
23. SCHNEEBELI, G. Hydraulique souterraine, Ed. Eyrolles, 1978.
24. SELLIA, M.: Finite difference approximations, Cours, MIT, automne 1988.
25. THIRRIOT, C.: "Hydrodynamique des digues et barrages en terre. Exposé d'introduction", La Houille Blanche, N° 5-6, pp 401-411, 1973.

26. VACHAUD, G.: "Écoulement dans les digues et barrages en terre",
La Houille Blanche, N° 5-6, pp 429-431, 1973.
27. VARLET, A.: Barrages - Reservoirs : Barrages en terre et en
enrochements, Tome 3, Ed. Eyrolles, 1966.
28. VERRUIT, A.: Groundwater flow, The Mc. Millan Press,
Second Edition, 1972.

