

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

1/90

وزارة التعليم العالي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

«0»

lex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : HYDRAULIQUE

«0»

Projet de Fin d'Etudes

Sujet

CONTRIBUTION AU CALCUL, PAR LA METHODE
AUX DIFFERENCES FINIES, DES ECOULEMENTS
DIPHASIQUES

Proposé par :

R. DJELLOULI

Etudié par :

A. BAGGAG

Dirigé par :

R. DJELLOULI

PROMOTION : JUIN 1990

E.N.P. - 10, Avenue Hacén Badi - EL-HARRACH — ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
«0»
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

وزارة التعليم العالي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

«0»

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

«0»

DEPARTEMENT : HYDRAULIQUE

«0»

Projet de Fin d'Etudes

Sujet

CONTRIBUTION AU CALCUL, PAR LA METHODE
AUX DIFFERENCES FINIES, DES ECOULEMENTS
DIPHASIQUES

Proposé par :

R. DJELLOULI

Etudié par :

A. BAGGAG

Dirigé par :

R. DJELLOULI

PROMOTION : JUIN 1990

E.N.P. - 10, Avenue Hacén Badi - EL-HARRACH — ALGER

THESE D'INGENIORAT D'ETAT

Ecole Nationale Polytechnique -ALGER

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Spécialité

HYDRAULIQUE

Présenté par :

Abdelkader BAGGAG

Sujet:

**CONTRIBUTION AU CALCUL,
PAR LA METHODE AUX DIF-
FERENCES FINIES, DES
ECOULEMENTS
DIPHASIQUES.**

Soutenu le 23 Juin 1990
Devant le Jury composé de :

Professeur : AMARA M. (U.S.T.H.B) Président
Messieurs : BERRAH .M. (E.N.P)
DECHEMI .N. (E.N.P)
DJELLOULI .R.(E.N.P)

Résumé:

Il s'agit de mettre en oeuvre une méthode numérique pour le calcul des caractéristiques d'un écoulement diphasique dans une conduite. Nous avons étudié deux méthodes à base de différences finies. Bien que les résultats obtenus ne soient pas probants, nous pouvons espérer les améliorer par une meilleure prise en compte de la non linéarité du système hyperbolique considéré.

المُلخَص :

الهدف من هذه الأطروحة هو إيجاد طريقة عددية لحساب خصائص سيلان « ثنائي الأطوار » داخل أنبوب . درسنا طريقتين عدديتين « للفروق المتناهية » . رغم أن النتائج المتحصّل عليها ليست كاملة إلا أننا نستطيع تحسينها في حالة الأخذ بعين الإعتبار لخطية جملة المعادلات من نوع « القطع الزائد » المستعملة .

Abstract:

The purpose of this work is to compute numerically the characteristics of a piped two-phase flow. To do so, two finite differences schemes have been used. Despite the fact that the results were not fully satisfactory, they can be substantially improved upon by better taking into account the nonlinearities of the hyperbolic system considered.

Mots clés:

Dynamique des gaz - Ecoulement diphasique
Lois de conservation - Différences finies.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

A mes parents

Remerciements



Ce travail m'a été proposé et dirigé par Monsieur Rabia DJELLOULI. Je tiens à lui exprimé ma profonde gratitude et ma reconnaissance pour l'engouement qu'il a su susciter en moi pour l'analyse numérique. Je le remercie très amicalement de sa disponibilité et de son aide constante sur tout les plans. Je le remercie également pour ses vues riches et profondes pour ses analyses claires et ses critiques suggestives, pour sa persévérance et pour ses idées d'initiation à la recherche.

Je remercie le Professeur Mohamed AMARA, Directeur de l'Unité de Recherche de la SONELGAZ de m'avoir fait l'honneur de présidé le jury.

Je tiens aussi à lui exprimer ma reconnaissance pour l'accueil qu'il a bien voulu me réserver dans son unité.

Messieurs Mounir BERRAH et Nourddine DECHEMI ont accepté avec gentillesse de faire partie du jury. Je les remercie pour l'intérêt qu'il témoignent à mon travail. Je voudrais exprimer toute ma gratitude à mon ami Housseem BOUTEKDJIRET pour tous ses encouragements et son soutien constant.

Mademoiselle AZZOUNI a assuée la frappe de ce document, je tiens à la remercier pour sa grande efficacité et la qualité de son travail.

Je remercie enfin tous ceus qui ont participé de pret ou de loin à ma formation.

AVANT PROPOS

Ce travail a été mené et réalisé au département de l'Hydraulique de l'Ecole Nationale Polytechnique, en liaison avec l'Unité de Recherche de la SONELGAZ qui nous a suggéré les principaux termes qui y sont abordés.

Les calculs ont été effectués sur le VAX 750 du centre de calcul de l'Ecole.

PLAN

Presentation du travail

- I) -Introduction : Motivations de l'étude.
- II) -Aperçu historique et état de l'art.
- III) -Le modèle adopté.
- IV) -Schémas aux différences finies : Aperçu général.
- V) -Approximation du modèle diphasique adopté.
- VI) -Conclusion générale.

PRESENTATION DE L'ETUDE

Ce travail est consacré à l'étude des écoulements diphasiques.

Il se compose essentiellement de deux parties.

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude de l'aspect physique nous y trouvons deux chapitres :

Le premier chapitre concerne les motivations de l'étude et une description générale des travaux antérieurs sur le sujet.

Le deuxième chapitre est consacré à la description du modèle que nous avons adopté et que nous nous proposons de résoudre.

La deuxième partie représente l'aspect numérique de l'étude. Les méthodes numériques présentées sont à la base de différences finies. Nous y trouvons également deux chapitres. Nous présentons les différents schémas numériques pour le modèle de transport classique en chapitre trois. Quant au quatrième chapitre, il traite essentiellement l'approximation proprement dite de notre modèle adopté par deux méthodes.

Nous terminons notre étude par une conclusion générale par laquelle nous mettons en valeur les résultats auxquels nous sommes arrivés à l'issue de ce travail.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

CHAPITRE I

INTRODUCTION
MOTIVATIONS DE L'ETUDE

MOTIVATIONS DE L'ETUDE

Ce travail est consacré à l'étude de quelques problèmes rencontrés dans les écoulements des mélanges diphasiques compressibles dans le transport et la distribution du gaz naturel. Il est d'un intérêt scientifique et industriel.

a)- Aspect scientifique de cette étude

Il s'agit d'abord de modéliser un phénomène de mécanique des fluides et ensuite de le traiter par une méthode numérique qui puisse rendre compte de manière satisfaisante des caractéristiques de ce phénomène.

Cette étude m'a permis d'une part d'approfondir mes connaissances en mécanique des fluides en particulier celles qui ont trait aux problèmes de transport. D'autre part, elle m'a permis de maîtriser les techniques numériques les plus performantes qui sont actuellement utilisées dans le traitement de ce type de problème.

b)- Aspect industriel

Ce travail se veut répondre à des besoins industriels réels.

La Sonelgaz, qui est l'investigateur du projet, en est directement intéressée. En effet, en dehors du méthane qui est l'élément dominant, le gaz naturel contient des pourcentages volumétriques d'eau et de carbures saturés avec un nombre d'atomes de carbone croissant (éthane, propane, butane, pentane) . Par suite des lois complexes des conditions d'équilibre des mélanges d'hydrocarbures, une partie de ces éléments se condense dans les conditions atmosphériques et une autre partie reste dans le gaz. Cette dernière peut être récupérée par traitement du gaz dans une unité de dégazolinage, ou si elle ne l'est pas, elle peut se condenser lors du transport ou de la distribution du gaz. Toutes ces condensations (eau, hydrates, hydrocarbures supérieurs,...) constituent tout d'abord une gêne pour l'industrie du gaz : perturbation de la pression de livraison, bouchage des conduites, mauvaises conditions dans les chambres de combustion, etc...

Il ya ensuite un second aspect qui échappe généralement, les condensats étant constitués d'hydrocarbures allant de C_5 et plus, les condensations font perdre au gaz une fraction importante de son pouvoir calorifique, puisqu'elles font perdre au gaz l'apport énergétique de ses constituants les plus riches. Ce dernier point rend essentiel l'étude de la formation et de l'écoulement de ces mélanges : recherches sur les paramètres de formation (pressions, températures de livraison et de transport, recherches sur les différentes formes de mélanges rencontrés (brouillard, gouttelettes, filets liquides, etc,...) et enfin sur leur propagation dans les réseaux de gaz.

Les écoulements diphasiques ne se limitent pas bien sûr au problème de transport de gaz, ils s'étendent à de nombreux phénomènes qui sont soit naturels tels que ceux rencontrés en géométéorologie et en biologie, soit des systèmes industriels tels que les moteurs et générateurs de puissance, les dispositifs de transfert de chaleur, les systèmes de lubrification, pour ne citer que ces applications.

Il est clair que les dimensions des dispositifs industriels augmentent et les conditions tendent vers des limites critiques et plus les connaissances précises de la physique régissant ces systèmes à écoulement diphasique sont indispensables à la sécurité et à la rentabilité des opérations. Ceci implique donc une substitution graduelle des méthodes de modélisation basées sur des corrélations statistiques expérimentales par d'autres basées sur des modèles mathématiques qui peuvent mieux prédire le comportement dynamique des systèmes.

En effet, le modèle optimum, la prédiction des limites opérationnelles et même le contrôle d'un grand nombre de dispositifs vitaux dépendent des modèles mathématiques réalistes et exacts des écoulements diphasiques ainsi que des méthodes de résolution de ces modèles. On mesure ainsi l'intérêt que revêt l'étude de ces écoulements que ce soit au niveau de l'analyse des modèles ou au niveau de la construction de méthodes numériques robustes et adéquates.

On se limite dans ce travail à l'étude des écoulements diphasiques du type liquide-vapeur d'un même fluide (le gaz naturel). Cela n'altère aucunement le caractère assez général des conclusions de ce travail. En effet, et à titre d'exemple, elles restent valides dans tous les écoulements à deux fluides (liquide-gaz) qui sont régis par les mêmes lois de transfert.

CHAPITRE III

APERÇU GÉNÉRAL
ET
ÉTAT DE L'ART

A l'heure actuelle (cf. /5/,/2/,/10/), il existe deux approches dans l'étude des écoulements diphasiques :

- . une approche topographique
- . une approche basée sur les moyennes temporelles.

L'objet de ce chapitre est de décrire ces deux approches afin de bien comprendre les raisons qui poussent les spécialistes dans le choix des modèles et des méthodes de résolution.

a- Approche topographique

Elle est basée essentiellement sur les structures interfaciales par opposition aux écoulements monophasiques qui sont eux classés suivant la géométrie de l'écoulement (laminaire, transitoire, turbulent). Les écoulements diphasiques sont donc, en général classés suivant la géométrie des interfaces en trois catégories :

- . écoulements séparés,
- . écoulements dispersés,
- . écoulements mélangés.

De plus, chaque catégorie est divisée en classes dont chacune d'elles est formée de plusieurs sous familles.

Pour ce qui est de la classe des écoulements séparés, elle peut être divisée en écoulements plans et écoulements quasi-axisymétriques. L'écoulement plan comprend les écoulements pelliculaires et les écoulements stratifiés, quant à l'écoulement quasi-axisymétrique, il consiste en des régimes à écoulement annulaire et à jet.

La classe des écoulements dispersés, quant à elle, peut être divisée en plusieurs types. Ainsi en fonction de la géométrie de l'interface on peut parler de particules sphériques, elliptiques ou granulaires

Cependant, il est plus commode du point de vue statistique et du point de vue topographique de subdiviser la classe des écoulements dispersés en considérant la phase de dispersion.

De ce fait, nous pouvons distinguer trois régimes : écoulement plein de bulles, écoulement de gouttelettes et écoulement de buée ou de particules solides. Dans chaque régime, la géométrie de la dispersion peut être sphérique ou elliptique.

Enfin la troisième classe des écoulements, les écoulements mélangés, est caractérisée par la présence simultanée d'écoulements séparés et dispersés. Ceci est dû à la variation graduelle des structures interfaciales. La transition arrive fréquemment par les mélanges liquide-vapeur comme un changement de phase progressant le long du canal.

Pour terminer ce paragraphe, il est important de noter qu'en pratique l'approche topographique reste sans intérêt en raison de sa complexité. En effet, l'établissement d'un modèle basé sur cet approche est en général très difficile et compliqué. Ceci est lié à l'évolution continue de la topographie de l'écoulement en temps et en espace.

b- Approche basée sur les moyennes temporelles :

La détermination des caractéristiques des écoulements diphasiques est nécessaire pour l'évaluation des performances de systèmes mettant en jeu de tels écoulements. Sous la pression de nécessités pratiques (états de connaissances, temps disponible,...) le calcul des écoulements diphasiques est souvent abordé de façon empirique. On se base, par exemple, sur un modèle d'écoulement monophasique ou d'écoulement diphasique permanent, modèle que l'on complique peu à peu.

Une approche, plus générale est désormais possible grâce à l'impact du développement de nouvelles méthodes numériques qui a été rendu possible par l'apparition d'ordinateurs de plus en plus puissants, capables d'effectuer de "gros" calculs.

C'est cette approche qui nous semble la condition d'une amélioration de la "représentativité" des modèles et de la compréhension des écoulements diphasiques.

Nous allons dans ce paragraphe, tout d'abord, présenter les principes généraux qui régissent la modélisation ensuite nous décrivons les différentes possibilités ou options simplificatrices et enfin nous montrons

brièvement comment on établit les équations locales instantanées.

i- Les principes généraux de la modélisation

De façon générale, un modèle mathématique est un ensemble d'équations présumé représenter le comportement du système physique considéré, dans des conditions données.

Le modèle d'écoulement est basé sur des axiomes issus de la mécanique des milieux continus (cf. /4/,/5/). Il s'agit du principe de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, ainsi que du second principe de la thermodynamique. L'écriture des équations, exprimant ces axiomes implique toujours un certain degré de schématisation et d'idéalisation du système physique schématisation des fluides réels par des milieux continus, des zones à variations brusques (interfaces, chocs,...) par des discontinuités, remplacement des variables locales instantanées par des variables "pratiques", moyennées, etc...

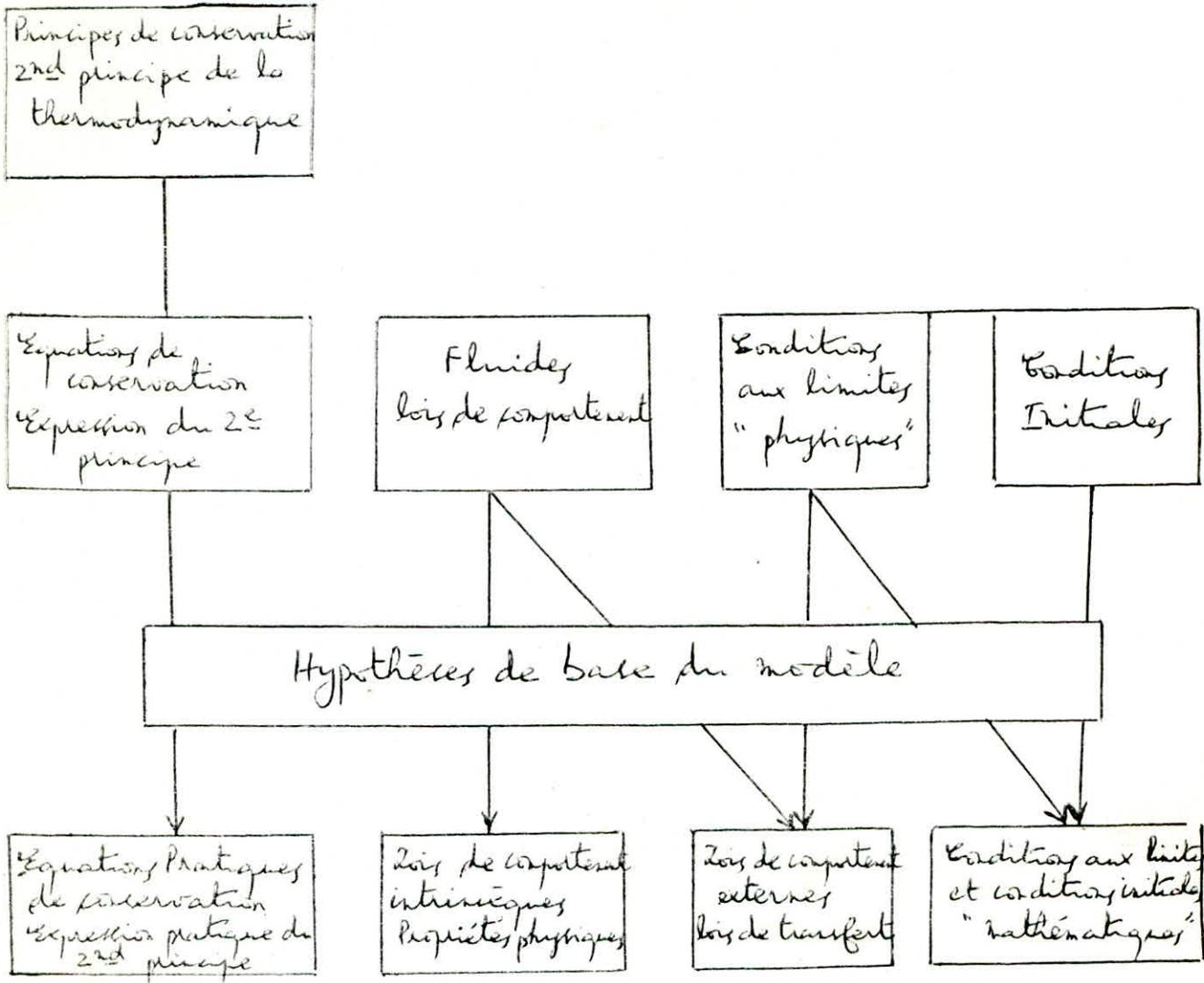
Cette schématisation conditionne la nature même du modèle. Elle doit être distinguée de l'adoption d'hypothèses simplificatrices ayant pour but de faciliter l'utilisation du modèle.

En revanche, schématisation et hypothèses simplificatrices se traduisant toujours par un gain de maniabilité du modèle acquis bien sûr au prix d'une perte d'information physique.

En effet, les équations exprimant les axiomes contiennent des propriétés des fluides considérés. Ces propriétés résultent des lois de comportement dont l'expression implique un certain degré de schématisation et d'idéalisation. En outre, ces équations sont appliquées dans un domaine limité par des surfaces (parois, section d'entrée et de sortie des fluides).

Il y correspond donc des conditions aux limites "physiques".

Enfin, l'utilisation du modèle nécessite, en général, des informations sur l'état initial du système. Ce sont les conditions initiales. Nous pouvons donc résumer cette démarche générale pour l'établissement d'un modèle diphasique dans la fig. suivante :



Fig[1] : Etablissement d'un modèle diphasique.

Des principes de conservation (et, éventuellement, du second principe de la thermodynamique), on déduit, compte tenu de la schématisation adoptée, les équations pratiques de conservation du modèle (et l'expression pratique du second principe).

Ces équations contiennent, d'une part des propriétés, liées par des lois de comportement des fluides considérés. Les lois de comportements pratiques correspondantes peuvent être qualifiées d'intrinsèques (exemple : loi d'état). D'autre part, lorsqu'elles sont moyennées spatialement (cas général), les termes de transfert dépendent à la fois du comportement du ou des fluides considérés et des conditions aux limites physiques (frottement, transfert de chaleur,...). Les lois pratiques donnant les termes de transfert sont appelées lois de comportement externes.

Les autres conditions aux limites physiques et les conditions initiales apparaissent respectivement dans le modèle comme conditions aux limites mathématiques et conditions initiales.

ii- Option fondamentale sur la topologie de l'écoulement

L'option fondamentale sur la topologie de l'écoulement consiste à se donner la nature, le nombre et la disposition relative des fluides et des discontinuités pris en compte. Chaque fluide peut d'une part être monophasique ou simuler une émulsion, qui est alors considérée comme un fluide particulier, dont les lois de comportement sont à préciser. D'autre part, il peut occuper un certain domaine, dont la fonction peut évoluer en exclusivité (par exemple dans une configuration annulaire) ou le partager dans le temps avec un autre fluide.

Dans ce dernier cas s'introduit le temps ou la probabilité de présence en chaque point du domaine de chacun des fluides : c'est une variable dépendante supplémentaire obéissant à une loi qui est à préciser. Elle correspond en fait à une information qui résulte de la topologie réelle de l'écoulement et qui a été perdue lors de la schématisation.

On sait peu de choses de cette loi topologique qui est, en pratique, remplacée par une hypothèse sur l'écart de pression entre phases (cette hypothèse éliminant une variable dépendante, les lois de conservation permettent alors le calcul du temps de présence). Parmi les discontinuités qui peuvent être prises en compte : les frontières éventuelles entre domaines, ainsi que les interfaces présents dans un certain domaine, et enfin les chocs.

Suivant l'option topologique, on classe les modèles courants en :

. Modèle monofluide

C'est le cas d'un seul fluide, "émulsion " qui occupe tout l'écoulement. Les interfaces sont alors ignorées. La difficulté est évidemment de déterminer les propriétés de cette émulsion. Un exemple classique de modèle monofluide est le modèle homogène (ch. chapitre V).

. Modèle à deux fluides occupant concurremment tout l'écoulement

Chacune des deux phases possède, en chaque point, une probabilité ou un temps de présence qui s'identifie en pratique au classique "taux de vide". Les interfaces sont prises en compte. Les propriétés sont connues. La difficulté est de déterminer les lois de transfert entre fluides.

. Modèle à deux domaines

C'est le cas des écoulements annulaires ou stratifiés. Chacun des deux domaines peut être occupé par un fluide, ou concurremment par deux fluides. Dans les modèles dits "à phases séparées", les deux domaines sont occupés chacun par un fluide monophasique. Les modèles à deux domaines sont nettement moins utilisés que les précédents en raison de leur complexité, alors qu'ils correspondent à une topologie courante, probablement la plus répandue, d'écoulement diphasique en conduite. Il y a donc là une voie à explorer avec le développement des méthodes numériques.

Nous constatons donc que c'est l'option faite sur la topologie de l'écoulement qui fixe le nombre d'équations de conservation du modèle. En effet, si N_F est le nombre total des fluides considérés et N_D celui des discontinuités fortes, le modèle comporte alors $3(N_F + N_D)$ équations de conservation et $(N_F + N_D)$ équations exprimant le second principe de la thermodynamique.

Parmi ces équations, seules celles relatives aux fluides sont aux dérivées partielles. Parmi les nombreux modèles rencontrés dans la littérature, en voici quatre classes qui peuvent décrire les écoulements monodimensionnels :

. Les modèles à trois équations

Le mélange diphasique est considéré comme un seul fluide. Ces mélanges contiennent trois équations de conservation de la masse totale, de la quantité de mouvement totale et de l'énergie totale. Ces équations sont complétées par quatre lois algébriques ou différentielles qui portent sur les écarts globaux entre phases : écart de pression, écart de vitesse, écart entre l'état de chacune des phases de saturation.

Ces modèles s'écrivent sous une forme conservative, sont strictement

hyperboliques et possèdent des champs caractéristiques qui sont soit vraiment non linéaires (V.N.L), soit linéairement dégénérés (L.D) (cf. /11/). Le modèle le plus simple est le modèle homogène équilibré où tous les écarts précédents sont supposés nuls (cf. chapitre IV).

Les modèles à quatre équations :

Ces modèles contiennent en plus des équations précédentes une équation de conservation de la massephasique (vapeur ou liquide). Ils s'écrivent encore sous une forme conservatrice et sont hyperboliques sous certaines conditions (par exemple écart de vitesse faible devant la vitesse du son dans le mélange) mais admettant un champ caractéristique ni V.NL ni L.D.

Les modèles à cinq équations :

Ces modèles contiennent au moins une équation de conservation de la quantité de mouvement ou de l'énergiephasique. Le système correspondant est alors sous forme non conservative.

Les modèles à six équations (ou bi-fluides) :

Chacune des phases est décrite séparément : 2x3 équations de conservationphasique. Ces modèles ne nécessitent qu'une loi constitutive qui porte sur l'écart de pression entre phase et qui se résume en pratique au fait que l'on admet l'égalité de pression dans les deux phases. Le modèle de base ($P_v = P_l = P$) s'écrit sous une forme non conservative et n'est pas hyperbolique (cf. / 11 /).

Les modèles à sept équations (ou à deux pressions) :

Ces modèles contiennent les six équationsphasiques (avec $P_v \neq P_l$) et une équation supplémentaire qui consiste en général en une équation de propagation du taux de vide qui découle d'hypothèses et de considérations physiques variées. Ces modèles ne sont pas complètement mis au point mais possèdent des propriétés mathématiques intéressantes (cf. / 11 /). En effet, ils se décomposent en deux systèmes d'équations d'Euler pour la phase vapeur et pour la phase liquide couplées uniquement par le taux de

de vide α . Ces systèmes sont hyperboliques mais non strictement hyperboliques (les caractéristiques associées aux valeurs propres peuvent se croiser). Ils possèdent en général quatre champs V.N.L et trois champs ni V.N.L ni L.D, et surtout ils s'écrivent sous une forme non conservative (cf /11/).

iii- Sur la méthode utilisée pour obtenir les équations locales instantanées

L'établissement des équations générales pour les écoulements monophasiques est basé sur le schéma suivant:

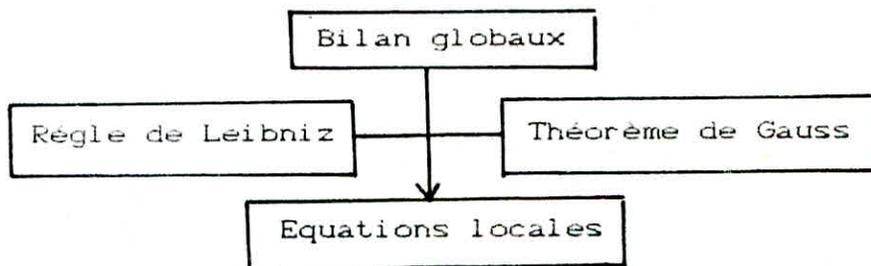


Schéma d'établissement des équations locales

Les bilans globaux traduisent les principes dits de conservation ou d'évolution tels que bilan de masse, bilan de quantité de mouvement (Loi fondamentale de la dynamique), bilan de l'énergie totale (premier principe de la thermodynamique) et l'évolution de l'entropie (second principe de la thermodynamique).

Ces bilans sont écrits pour des bilans matériels c'est à dire des volumes constitués à chaque instant des mêmes éléments de matière. La frontière de tels volumes matériels, si elle est par définition imperméable à la matière, peut en revanche laisser passer les quantités de mouvement sous la forme de tenseur de contraintes, ou l'énergie sous la forme de flux de chaleurs.

Les équations globales instantanées sont obtenues à partir des bilans globaux en utilisant deux théorèmes dans le but d'exprimer ces bilans globaux sous la forme d'intégrales de volume.

Ces deux théorèmes sont la règle de Leibniz et le théorème de Gauss. La règle de Leibniz est un théorème purement cinématique où la notion de masse n'intervient absolument pas. Cette règle permet de transformer la dérivée par rapport au temps d'une intégrale de volume en une intégrale de surface et une intégrale de volume (cf/14/). Quant au théorème de Gauss, il permet de transformer des intégrales de surface en des intégrales de volume (cf/14/). Enfin, il est nécessaire d'écrire les équations traduisant les bilans globaux sous une forme exploitable et ceci dans le but d'un traitement numérique (cf/chapitre IV/).

14-Résolution numérique du problème d'écoulement diphasique:

Bien que les modèles diphasiques généralement utilisés restent valides dans de nombreuses configurations d'écoulement, il est vain d'espérer qu'une seule et même méthode numérique donnera les meilleurs résultats pour toutes les applications .

De façon générale on constate que la grande majorité des méthodes numériques (cf/11/,/9/) qui ont été développées pour des modèles diphasiques ne sont pas adaptées aux calcul des fortes discontinuités. Ces méthodes numériques peuvent être classées suivant leur degré d'implicitation en temps. Nous avons tout d'abord les schémas semi-implicites. Ils ont fait le succès de nombreux codes de calcul. La principale caractéristique de ces schémas introduits par LILES et REED (cf/11/) est la réduction à une équation d'onde sur la pression. Cette approche présente le double avantage de réduire la taille des systèmes à inverser et de se ramener à un problème elliptique sur la pression pour lequel on dispose des méthodes efficaces de résolution (cf/11/). Nous avons ensuite les méthodes totalement implicites qui sont particulièrement intéressantes à utiliser dans le cas où les variations en temps sont lentes.

Ces méthodes ont été largement utilisées et la littérature correspondante est abondante. En revanche, concernant les méthodes numériques adaptées aux calcul des écoulements diphasiques où la prise en compte des ondes de choc est indispensable ,la littérature est malheureusement beaucoup moins

importante. Citons par exemple les méthodes ASWR (ASymmetric Weighted Residuals) qui sont semblables dans leur principe aux méthodes d'éléments finis ou des méthodes aux différences finies basées essentiellement sur le schéma de Mac Cormack ou celui de Lax-Wendroff.

La méthode des caractéristiques dont le principal inconvénient est qu'elle génère des solutions multivoques pour les lois de conservation et pour terminer la méthode de transport (cf/1/) qui consiste à calculer à chaque pas de temps, d'abord la solution, à priori multivoque, fournie par la méthode des caractéristique (phase de transport), puis lui appliquer une transformation géométrique, variante de la symétrisation de STEINER, pour la rendre univoque (phase d'écroulement).

Ces deux dernières méthodes restent complexes et coûteuses dans leur mise en œuvre informatique.

CHAPITRE III

LE MODELE DIPHASIQUE
ADOPTE

CHAPITRE III : LE MODELE ADOPTE

Le programme est conçu pour être appliqué à des calculs d'écoulements d'un mélange gaz liquide dans une conduite horizontale

Pour étudier les problèmes posés par l'application des différences finies, nous nous sommes limités au cas le plus simple, le modèle homogène équilibré. L'objet de ce chapitre est donc de commencer par rappeler brièvement les hypothèses physiques de ce modèle, d'établir ensuite les équations qui le décrivent et enfin de déterminer les invariants du système adopté afin de fixer les conditions aux limites à utiliser.

1-HYPOTHESES PHYSIQUES.

Nous savons maintenant (cf.chapitre II) qu'un fluide diphasique est caractérisé par la présence côte à côte de deux phases qui interagissent fortement. Ils existent entre elles des **transferts** de masse, de quantité de mouvement et d'énergie.

La représentation la plus communément admise dans la littérature (cf [5], [2], [11]) par ceux qui font des calculs est la représentation par valeurs moyennes.

Nous faisons les deux hypothèses suivantes.

- Nous supposons que le mélange est isotrope en espace.

On peut donc définir des grandeurs moyennes pour le mélange et les relier à celles transportées par chacune des phases (gaz, liquide) par l'intermédiaire du taux de présence.

De plus cette hypothèse implique que les vitesses des deux "fluides" sont égales. C'est l'hypothèse "homogène".

Nous nous plaçons dans le cadre de la thermodynamique des systèmes à l'équilibre. Nous supposons que les constantes de temps des transferts entre les deux phases sont suffisamment petites pour que dans un petit volume les deux phases en présence soient à l'équilibre. Nous pouvons ainsi

definir localement une pression et une temperature qui seront les mêmes pour les deux phases.

Ce modèle a déjà été utilisé dans une vaste gamme d'écoulement où les variations **spatio**-temporelles sont suffisamment lentes.

2-EQUATIONS DU MODELE

De façon naturelle les équations déterminant l'écoulement d'un fluide monovariant: principe de la conservation de la masse, de la **quantité** de mouvement et de l'énergie. On pourra trouver l'établissement rigoureux de ces équations dans le cadre dans la mécanique des milieux continus (cf. [5], [11] [4],...).

Nous allons donner ici le système obtenu des équations d'évolution dans le cas monodimensionnel. Nous nous sommes donc placés dans le cadre où l'écoulement possède une symétrie **transversale** par rapport à l'axe de propagation. Les équations qui décrivent l'écoulement sont donc:

- Equation de la conservation de la masse

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

ρ est la densité moyenne du mélange.
 u est la vitesse moyenne du mélange.

- Equation de conservation de la quantité de mouvement:

$$(2) \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

où p est la pression moyenne du mélange.

- Equation de conservation de l'énergie totale:

$$(3) \quad \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((\rho e + p)U) = 0$$

où $e = \epsilon + \frac{1}{2} U^2$ l'énergie totale par unité de masse et ϵ est l'énergie interne par unité de masse.

REMARQUE

Nous pourrions réécrire l'équation de conservation de l'énergie totale sous forme non conservative en utilisant l'entropie spécifique S du système défini par :

$$T dS = dh - \frac{1}{\rho} dp$$

où T est la température du mélange et h est l'enthalpie. Elle est donnée par :

$$h = \epsilon + P/\rho$$

Avec l'entropie S , nous pouvons donc décrire le bilan de l'énergie totale par l'équation :

$$(3)_{\text{bis}} \quad \frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Et afin de fermer le système d'équations des bilans précédentes, nous devons leur ajouter une loi d'état du type :

$$(4)_{\text{bis}} \quad P(\rho, S) = \rho^\gamma S - (\bar{c}^2 / \gamma) \bar{p}^{-1}$$

où $\gamma > 1$ et $\bar{c} > 0$, $\bar{p} > 0$

constantes liées à la nature du fluide.

- Les conditions aux limites.

En règle générale, les conditions aux limites admises sont de trois types: Les conditions d'entrée, les conditions de sortie et enfin les effets de parois que nous négligeons ici puisque nous nous sommes placés dans le cas monodimensionnel.

Par ailleurs, l'écoulement du fluide diphasique dans le modèle homogène est régi par les équations d'un fluide compressible. Ce système d'équations est hyperbolique non linéaire. Il est donc important de connaître le sens de propagation des informations pour déterminer les conditions aux limites à utiliser. Ceci nous amène tout naturellement à calculer **les** invariants du système. Ce calcul est possible et relativement simple dans le cas qui nous intéresse car nous traitons un problème monodimensionnel.

En effet nous pouvons réécrire le système d'équations (1), (2), (3)_{bis} et (4) sous la forme non conservative

$$(5) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + B(V) \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

où

$$(5)_1 \quad V = \begin{bmatrix} \rho \\ U \\ S \end{bmatrix}$$

et

$$(5)_2 \quad B(V) = \begin{bmatrix} U & \rho & 0 \\ c^2 / \rho & U & \rho^{\gamma-1} \\ 0 & 0 & U \end{bmatrix}$$

Avec

$$(5)_3 \quad C = \frac{\partial \rho}{\partial \rho} = \frac{\gamma}{\rho} \left(p + \frac{c^2}{\gamma} \bar{p} \right)$$

C est appelée la vitesse du son dans le mélange.

Il découle alors du système (5) les propriétés suivantes:

1- Il est facile de vérifier que les valeurs propres de la matrice B(V) sont réelles et distinctes et ont pour valeurs :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= U - C \\
 (6)_1 \quad \lambda_2 &= U \\
 \lambda_3 &= U + C
 \end{aligned}$$

On voit bien que :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

Ceci nous permet d'affirmer que (cf [11], ...,) que le système (5) est strictement hyperbolique.

2-On construit aisément une base de fonctions propres aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$r_1(V) = \begin{bmatrix} p \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(6)_2 \quad r_2(V) = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ -\gamma s \end{bmatrix}$$

$$r_3(V) = \begin{bmatrix} p \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$$

En outre, nous vérifions facilement que le 2^{eme} champ caractéristique est linéairement dégénéré (L.D).

$$\nabla \lambda_2 r_2(V) = 0$$

Et que les champs caractéristiques 1 et 3 sont vraiment non linéaires (V.N.L) i.e

$$\nabla \lambda_j r_j(V) \neq 0 \quad j = 1, 3$$

Enfin si on se donne un état initial $V^0 = \begin{bmatrix} p^0 \\ U^0 \\ S^0 \end{bmatrix}$ alors nous pouvons expli-

citer les coordonnées caractéristiques $(\alpha_i)_{i=1,3}$ pour tout état $V = \begin{bmatrix} p \\ U \\ S \end{bmatrix}$

(i.e.)
$$V = \sum_{i=1}^3 \alpha_i r_i(V^0)$$

de la façon suivante :

$$\alpha_1 = 1/2 \left(s/s_0 - U/c^0 + S/\gamma S^0 \right)$$

$$\alpha_2 = -S/\gamma S^0$$

$$\alpha_3 = 1/2 \left(p/p_0 + U/c^0 + S/\gamma S^0 \right)$$

REMARQUES:

1-Il est possible de faire de ce calcul en passant en coordonnées lagrangiennes. Dans ce cas, on a à faire aux invariants de lagrange.

2-L'entropie S du systèmes (5) est un invariant. Ses courbes intégrales correspondent à la vitesse U.

3-La vitesse du son c, apparait donc une valeur importante pour la vitesse. Dans le cas d'un écoulement subsonique l'une des courbes caractéristiques va en sens inverse de la vitesse. Cela fixe le nombre de conditions aux limites pour les frontières ouvertes.

4-Dans la pratique, les conditions aux limites ne correspondent pas exactement aux invariants qu'il est difficile de calculer. Des considérations sur l'évolution de l'énergie totale permettent de les fixer.

Les conditions aux limites que nous adoptons ici et qui sont couramment utilisées (cf. [17]) sont de deux natures:

• Nous supposons fixé en entrée de la conduite, le débit et l'entropie, i.e.:

$$s(x,0) = s_0(x)$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$S(x,0) = S_0(x)$$

p_0 , u_0 et S_0 sont des fonctions données.

En outre, en sortie nous fixons la pression : $P(L, t) = P_\infty(t)$
où L est la longueur de la conduite considérée.

CONCLUSION:

Le modèle homogène équilibré que nous allons résoudre numériquement est le suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Su) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 0 < x < L \\ t > 0 \end{aligned}$$

$$P(S, S) = \rho \cdot S - (\frac{E^2}{\rho}) \cdot \bar{S}$$

Avec les conditions initiales :

$$P(x, 0) = P_i(x)$$

$$U(x, 0) = U_i(x)$$

$$S(x, 0) = S_i(x)$$

$$0 < x < L$$

et les conditions aux limites :

A l'entrée de la conduite

$$p(0, t) = p_0(t)$$

$$U(0, t) = U_0(t)$$

$$S(0, t) = S_0(t)$$

$$t > 0.$$

A la sortie de la conduite :

$$P(L, t) = P_1(t)$$

$$t > 0.$$

• Ce modèle est non seulement pratique pour tester nos méthodes d'approximation par différences finies mais aussi nous pourrions penser qu'il reste valable dans la plupart des cas puisque le gaz et le liquide sont si fortement liés. Cependant afin d'en cerner les limites, on peut citer deux exemples où il est pris à défaut :

• Un écoulement de bulles sous l'effet de la pesanteur. Par la poussée d'Archimède, les bulles montent alors que le liquide reste sur place. Le modèle donne une vitesse moyenne et n'est pas capable de traduire le phénomène de transfert de matière du bas vers le haut.

• Une dépressurisation brusque. Les expérimentations placées dans ce genre d'expérience donnent souvent une courbe d'évolution de la température et une courbe d'évolution de pression en un point. En certains points, la courbe de température de saturation reste un certain temps au-dessus de la température donnée par la pression. Ceci est la preuve de la présence de bulles de vapeur non en équilibre avec l'eau environnante.

CHAPITRE IV

SCHEMAS AUX DIFFERENCES FINIES
APERCU GENERAL

INTRODUCTION

Cette partie est consacrée à la description générale de la méthode des différences finies que nous nous proposons d'utiliser pour traiter numériquement notre problème.

Nous y présentons certains schémas d'approximation qui nous permettront d'introduire les notions qui caractérisent les méthodes aux différences finies à savoir la convergence, la stabilité, la consistance, etc...

Ce chapitre se compose de deux parties :

a- la première partie est consacrée à l'étude de l'équation de transport dite également équation d'advection.

C'est le modèle qui nous servira de base pour la description et l'analyse des schémas d'approximation.

Nous avons choisi le problème de transport essentiellement pour les deux raisons suivantes :

i - c'est un problème classique (cf. /3/) et qui est parfaitement connu (existence et unicité de la solution, comportement etc,...) ce qui nous servira donc à s'assurer dans la deuxième partie que nos schémas numériques conservent les propriétés de la solution de ce problème.

ii - Le modèle de transport, bien qu'il soit linéaire, s'apparente aux équations qui forment le système du modèle diphasique adopté (cf. chapitre IV). Il est donc logique et utile que notre étude des schémas porte d'abord sur un modèle simple (équation linéaire) ensuite au modèle beaucoup plus compliqué constitué par un système d'équations hyperboliques non linéaires.

b- La deuxième partie est consacrée à la présentation et à l'analyse de certains schémas numériques (schéma à deux niveaux, schéma de Lax, schéma décentré, schéma de Lax-Wendroff, schéma saute-Mouton).

Nous rappellerons brièvement les propriétés de chaque schéma. Nous insisterons en particulier sur leur précision, leur stabilité et leur facilité de mise en oeuvre informatique.

Ces caractéristiques représentent les critères qui conditionnent le choix d'un schéma.

Nous présentons à chaque fois les résultats des expériences numériques que nous avons effectuées au Centre de Calcul de l'Ecole Nationale Polytechnique.

Enfin, pour conclure, ce chapitre n'a aucune prétention d'originalité ni de grande rigueur mathématique .

Il ne s'agit que d'une brève introduction de certaines notions qui vont jouer un rôle important dans la suite (Cf. chapitre VI).

a)- Le problème modèle de transport

Il s'agit de résoudre le problème suivant :

trouver la fonction $u(x,t)$ solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0$$

où

u est donnée à l'instant initial par :

$$u(x,0) = u^0(x)$$

Le paramètre c , caractéristique du modèle, est homogène à une vitesse. C'est un problème de Cauchy classique.

Proposition 1 :

Supposons la donnée u^0 dérivable en x . Il existe alors une solution unique u au problème de Cauchy, dérivable en (x,t) .

Elle est donnée par :

$$u(x,t) = u^0(x - ct) \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

2- Lorsque la condition initiale u^0 n'est pas régulière, on ne peut plus définir les dérivées partielles de u par rapport à t et x au sens classique. Cependant elles sont définies au sens des distributions, et la solution s'exprime encore en fonction de la donnée initiale u^0 sous forme $u(x,t) = u^0(x-ct)$

Exemple :

Condition initiale présentant des discontinuités :

Soit u^0 définie par

$$u^0(x) = 1 \quad \forall x \in]0,1[$$

$$u^0(x) = 0 \quad \text{sinon}$$

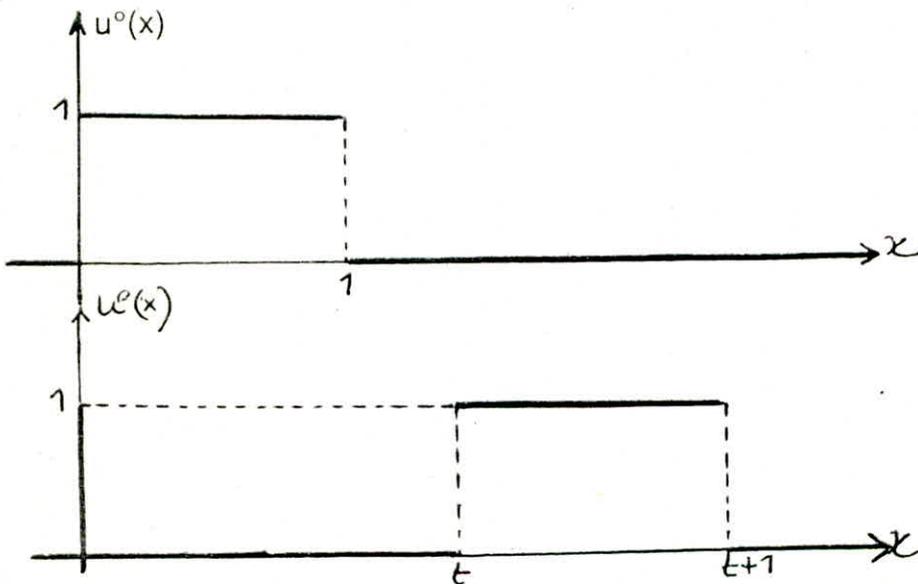


Fig. 2 : Solution correspondant à un créneau initial

Les deux discontinuités de u^0 , placées en $x=0$ et $x=1$, se propagent à la vitesse c .

Il est utile de rappeler ici que le support d'une fonction φ définie sur \mathbb{R} est le complémentaire du plus grand ouvert dans lequel φ est nulle.

Le support de la fonction u^0 définie ci-dessus est $]0,1[$.

3- Lemme 1

Si la condition initiale u^0 est à support compact $[l_1, l_2]$, la solution u du problème de Cauchy est, à chaque instant t , à support compact

$$[l_1 + c.t, l_2 + c.t]$$

Preuve :

Le résultat est tout à fait évident. En effet à chaque instant t , la solution $u(x, t)$ est donnée par :

$$u(x,t) = u^0(x - ct)$$

u est donc non nulle pour $l_1 \leq x - ct \leq l_2$

C'est à dire pour : $l_1 + c.t \leq x \leq l_2 + c.t$

Remarque :

Cette propriété est très importante pour l'approximation : elle permet de réduire le volume des calculs.

4- Lemme 2 : (Principe de maximum)

Si la condition initiale vérifie : $u_* \leq u^0(x) \leq u^*$, $x \in \mathbb{R}$ alors la solution u du problème de Cauchy vérifie :

$$u_* \leq u(x,t) \leq u^* \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0$$

Preuve :

Pour la démonstration de ce lemme, nous renvoyons le lecteur à la littérature (cf. /3/, /7/).

Remarque :

Lorsque nous introduisons des schémas d'approximation de l'équation, il sera important de vérifier qu'ils "conservent des propriétés de ce type"

5- Bien souvent, le problème de transport ne se pose pas sur tout l'axe des

x, mais sur un domaine borné. On parle alors de problème de Cauchy aux limites.

Il faut alors spécifier les conditions aux limites.

La fonction u est ainsi déterminée par l'ensemble des trois équations :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in [0,1], t \in [0,t]$$

$$u(x,0) = u^0(x) \quad x \in]0,1[$$

$$u(0,t) = g(t) \quad t \in [0,T]$$

On voit bien que le problème étant posé avec une seule condition aux limites, à savoir la donnée de u en $x = 0$. En outre u sera continue sur $]0,1[\times]0,T[$ si et seulement si n^0 et g sont liées par la condition de raccord : $n^0(0) = g(0)$.

Donc le problème aux limites se résume au système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in [0,1], t \in [0,T]$$

$$\text{C.I } u(x,0) = n^0(x) \quad x \in]0,1[$$

$$\text{C.L } u(0,t) = g(t) \quad t \in]0,T[$$

$$\text{C.R } n^0(0) = g(0)$$

C'est ce problème que nous allons résoudre à l'aide des approximations par différences finies.

b- Approximation par des schémas aux différences finies

Les principes de base sont les mêmes que pour l'approximation des équations différentielles ordinaires : on construit des "schémas numériques" qui respectent un certain nombre de critères : stabilité, convergence,...

Pour comparer ces schémas, on tient compte de leur précision mais aussi de la difficulté et du coût de leur mise en oeuvre informatique, en fonction de la condition aux limites.

Les deux préoccupations essentielles dans l'étude des schémas pour la résolution d'équations de transport sont :

1)- La détermination de la consistance du schéma, plus précisément de l'ordre de précision.

2)- La détermination de la stabilité du schéma.

On distingue plusieurs conditions de stabilité, entre autre :

- condition de stabilité de Von Newman.
- condition de stabilité de Krein.

La détermination de l'ordre de précision est en général facile. Il est par contre nécessaire d'étudier de façon plus détaillée la stabilité des schémas.

Nous renvoyons le lecteur à la littérature (cf./7/,/9/) pour de plus amples détails.

En pratique, on ne discrétise qu'un problème posé en domaine borné en temps.

On divise l'intervalle $/0,T/$ en N intervalles de longueur Δt et l'intervalle $/0,1/$ en J intervalles de longueur Δx .

On calcule alors une approximation de u aux points x_j ; et aux instants t^n définies par :

$$\begin{aligned} x_j &= j \cdot \Delta x & j & \in /1,J/ \\ t^n &= n \cdot \Delta t & n & \in /1,N/ \end{aligned}$$

où Δx désigne le pas de discrétisation en espace et Δt le pas de discrétisation en temps.

Nous notons u^n l'approximation de u au point x_j à l'instant t^n , i.e :

$$u_j^n \equiv u(x_j, t^n) = u(j \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t)$$

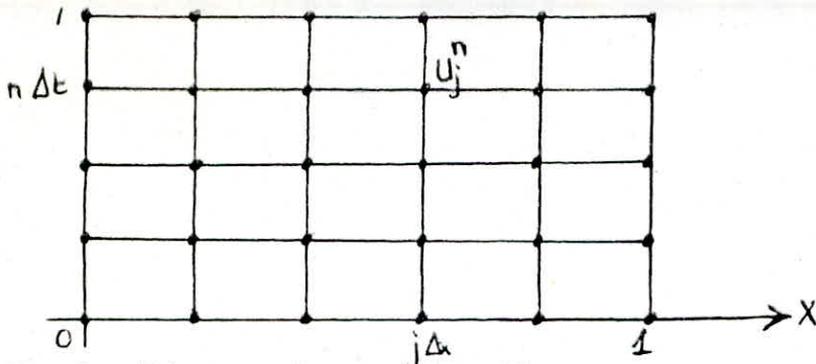


Fig. 3 : Réseau de pas $\Delta x, \Delta t$

On se propose d'approcher la solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad x \in [0, 1], t \in [0, T]$$

qui vérifie la condition initiale $u(x, 0) = u^0(x)$

Ecrire un schéma d'approximation pour l'équation c'est approcher $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$.
cela revient donc à approcher la dérivée d'une fonction.

i- Approximation de la dérivée d'une fonction

Soit f une fonction régulière d'une variable réelle.
Par définition sa dérivée en un point x_0 est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Elle peut être approchée de différentes façons.
Introduisons les opérateurs aux différences finies définies par :

$$D^+ f(x_0, \Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} : \text{différence décentrée à droite.}$$

$$D^- f(x_0, \Delta x) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} : \text{différence décentrée à gauche}$$

$$D^0 f(x_0, \Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

$D^+ f(x_0), D^- f(x_0), D^0 f(x_0)$ constituent des approximations de $f'(x_0)$, et on a, si f est suffisamment régulière :

$$D^+ f(x_0, \Delta x) = f'(x_0) + O(\Delta x)$$

$$D^- f(x_0, \Delta x) = f'(x_0) + O(\Delta x)$$

$$D^0 f(x_0, \Delta x) = f'(x_0) + O(\Delta x^2)$$

Remarques :

1- Ces estimations sont obtenues en écrivant la formule de Taylor à l'ordre nécessaire.

2- Les différences finies décentrées sont d'ordre 1 alors que la différence finie centrée est d'ordre 2.

3- On peut évidemment construire des approximations de $f'(x_0)$ d'ordre supérieur.

Bien sûr, plus l'approximation est d'ordre élevé, plus f doit être régulière.

ii- Les schémas d'approximation

Nous allons maintenant décrire quelques schémas d'approximation classique pour le problème de transport.

1- Un schéma d'approximation à deux niveaux

Le principe de l'approximation est de calculer à chaque pas de temps n toutes les valeurs u_j^n , par récurrence sur n .

On approche la dérivée en espace de u de façon centrée, et la dérivée en temps de façon décentrée.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) \cong \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \cong \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

Le schéma d'approximation s'écrit alors :

$$(1) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \cdot \Delta x} = 0$$

Propriétés du schéma

1- Ce schéma est à deux niveaux en temps car il ne fait intervenir que les temps t^n et t^{n+1} .

2- Il est explicite car les valeurs approchées de u à l'instant t^{n+1} sont données explicitement en fonction des valeurs à l'instant t^n :

$$(1^*) \text{bis} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - c \cdot \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

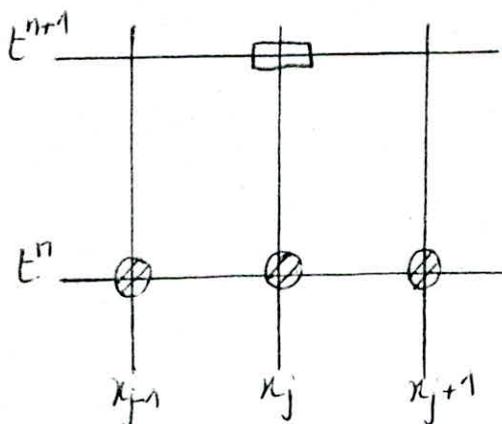


Fig. 4 : Calcul de u^{n+1} à partir du schéma (1)

- point où l'on calcule l'approximation de la solution.
- ⊗ point où l'approximation de la solution est connue.

3- On définit le cône de dépendance numérique comme étant l'ensemble des points (x_i, t^p) en lesquels on doit connaître la valeur approchée de u pour connaître u_j^{n+1} . Dans notre cas, le schéma à deux niveaux, est constitué de tous les points du réseau se trouvant à l'intérieur du triangle isocèle dont les pentes sont $\Delta x / \Delta t$ et le sommet le point (t^{n+1}, x_j) .

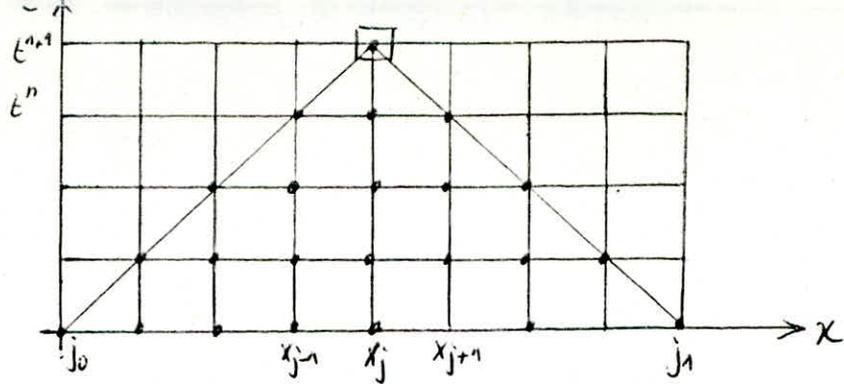


Fig. 5 : Cône de dépendance numérique.

4- On vérifie aisément que la valeur approchée u_j^{n+1} de u en (x_j, t^{n+1}) ne dépend donc que des valeurs de u_k^0 , $j_0 \leq k \leq j_1$. C'est ce que nous appelons les conditions de démarrage du schéma.

5- L'approximation de la condition initiale est liée à la régularité de la fonction u^0 :

Si u^0 est continue, on peut évidemment prendre :

$$u_k^0 = u^0(x_k)$$

Si u^0 est continue, on peut choisir u_k^0 comme étant une valeur moyenne de u^0 sur $[x_{k-1}, x_{k+1}]$, par exemple :

$$u_k^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} u^0(x) dx \quad \text{ou} \quad u_k^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} u^0(x) dx$$

6- Supposons maintenant que Δx et Δt tendent vers zéro avec $j \cdot \Delta x = x$, $(n+1) \Delta t = t$, x et t fixés.

A-t-on $u_j^{n+1} \rightarrow u(x, t)$?

Si c'est vrai, et si $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow l$, $u(x, t)$ dépend alors des valeurs de u^0 sur

$\left[x - \frac{t}{l}, x + \frac{t}{l} \right]$ d'après la fig. 5.

Or, on sait que $u(x, t)$ ne dépend que de $u^0(x - ct)$.

Cela n'est compatible que si

$$x - ct \in \left[x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2} \right]$$

C'est à dire

$$(2) \quad c \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$C \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Les pas Δt et Δx ne peuvent donc être choisis indépendamment et doivent vérifier une condition dite de courant Friedrich-Levy :

$$(2') \quad C \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Cette condition est valable pour un grand nombre de schémas mais elle n'est pas suffisante.

7- Le schéma (1) n'est pas stable.

Nous retrouvons ce résultat lorsque nous abordons l'étude de la stabilité des schémas par la transformation de Fourier ou à l'aide des techniques énergétiques (cf. [3]).

. Remarques :

1- Intuitivement, un schéma est stable si une erreur sur la solution au niveau ne se propage pas aux niveaux ultérieurs. La stabilité est donc une notion ponctuelle en temps mais globale en espace.

Un schéma stable est également dit non dispersif.

Un schéma peut être stable sous certaines conditions ; on dit qu'il est conditionnellement stable. Dans le cas contraire, il est dit inconditionnellement stable.

2- Un schéma est dit convergent si, pour tout point (x,t) .

$$\text{On a : } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} u_j^n = u(x,t)$$

$$\text{avec } j \cdot \Delta x = x, \quad n \cdot \Delta t = t$$

$$\text{Lorsque } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u_j^0 = u^0(x) \text{ pour tout point } x.$$

La convergence est une propriété à la limite, alors pour pouvoir utiliser des pas de discrétisation raisonnables (c'est à dire pas trop petits) et ceci afin de minimiser le coût de calcul, on doit remplir des conditions supplémentaires qui assurent que le schéma est stable.

2- Schéma de LAX :

On a vu que le schéma à deux niveaux précédent est instable. Pour le stabiliser, on remplace u_j^n par :

$$\frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \text{ dans la discrétisation du terme } \frac{\partial u}{\partial t}$$

Le schéma de Lax se présente donc sous la forme :

$$(3) \quad \frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + c \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \cdot \Delta x} = 0$$

En posant $\alpha = c \cdot \Delta t / \Delta x$, on établit alors :

$$(3^*) \text{ bis } \quad u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (1 - \alpha) u_{j+1}^n + \frac{1}{2} (1 + \alpha) u_{j-1}^n$$

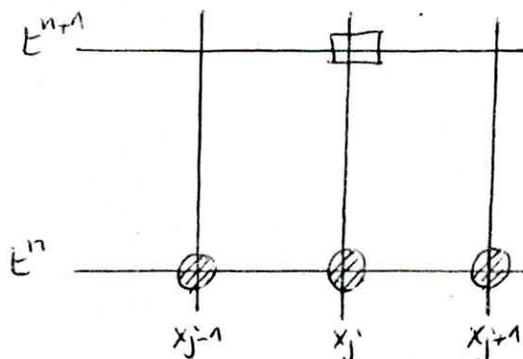


Fig. 6 : Calcul de u_j^{n+1} à partir du schéma (3)

. Propriétés du schéma :

1- Ce schéma est à deux niveaux en temps car il ne fait intervenir que les

temps t^n et t^{n+1} .

2- Il est explicite car les valeurs approchées de u à l'instant t^{n+1} sont données explicitement en fonction des valeurs à l'instant t^n (cf. (3) bis).4

3- Le schéma de Lax est stable sous la condition CFL (2) bis

4- Le schéma de Lax est précis à l'ordre 1 en temps et en espace.

5- Tests Numériques :

On a effectué quatre expériences qui diffèrent par la condition initiale. Les paramètres de discrétisation choisis sont :

$$\Delta t = 0.001$$

$$\Delta x = 0.010$$

ce qui donne :

$$\alpha = 0.100$$

et nous avons représenté les résultats à l'instant :

$$t = 0.010 \text{ (i-e } 10 \Delta t)$$

Pour les quatre tests, les conditions initiales sont :

$$u^0(x) = 1$$

$$u^0(x) = x$$

$$u^0(x) = \sin(2\pi x)$$

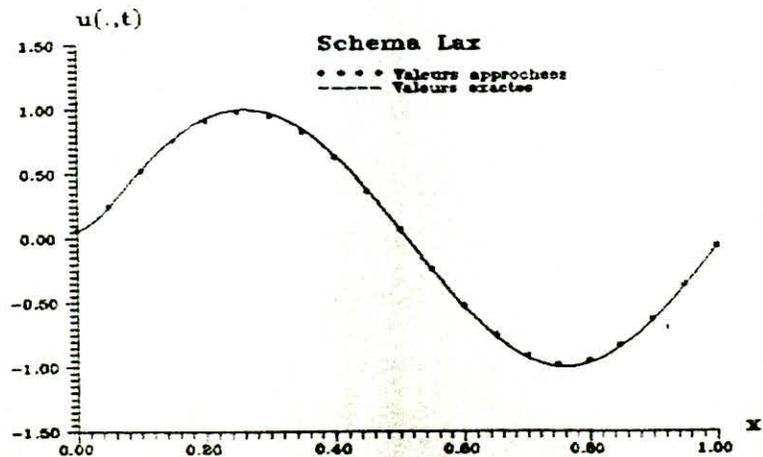
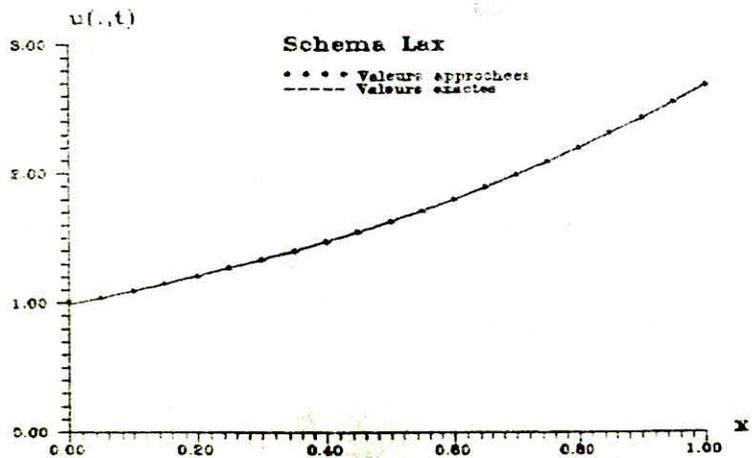
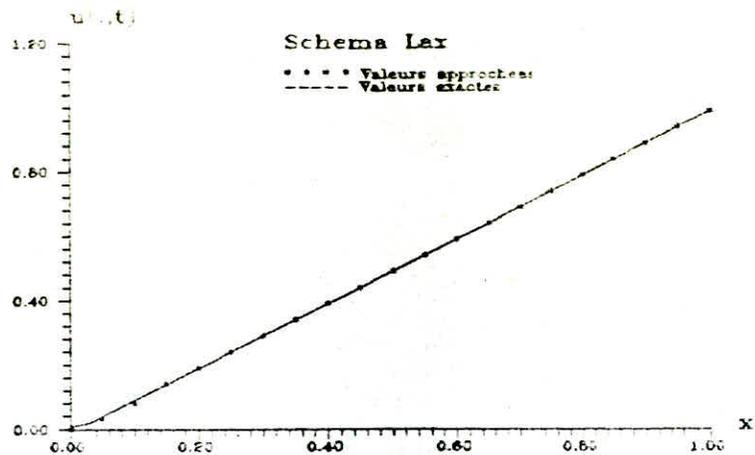
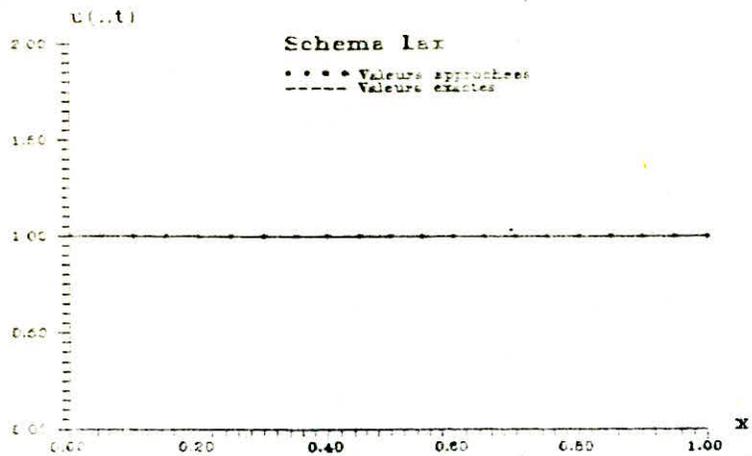
$$u^0(x) = \exp(x).$$

Les courbes obtenues sont représentés ci-contre.

3- Schéma décentré

L'idée est d'écrire un schéma dont la solution se propage dans le sens des x positifs : c'est à dire que u_j^{n+1} ne dépend que de u_{j-1}^n et u_j^n ; on pose alors

$$(4) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c. \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$



Propriétés du schéma

1- Ce schéma est à deux niveaux en temps car il ne fait intervenir que les temps t^n et t^{n+1} .

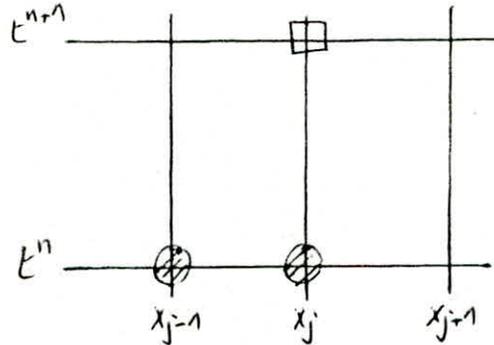


Fig. 7 : Calcul de u^{n+1} à partir du schéma (4)

2- Il est explicite car les valeurs approchées de u à l'instant t^{n+1} sont données explicitement en fonction des valeurs à l'instant t^n . En effet, le schéma (4) peut s'écrire sous forme :

$$(4) \quad u_j^{n+1} = (1-\alpha)u_j^n + \alpha u_{j-1}^n$$

3- Le schéma Décentré est stable si et seulement si la condition de Courant Friedrichs-Levy (CF.L (2) bis) est réalisée.

4- Le schéma Décentré est précis à d'ordre 1 en espace et en temps.

5- Tests Numériques

On a effectué quatre expériences qui diffèrent par la condition initiale. Les paramètres de discrétisation choisis sont :

$$\Delta t = 0.001$$

$$\Delta x = 0.010$$

ce qui donne :

$$\alpha = 0.100$$

et nous avons représenté les résultats à l'instant :

$$t = 0.010 \text{ (i-e } 10 \Delta t)$$

Pour les quatre tests, les conditions initiales sont :

$$u^0(x) = 1$$

$$u^0(x) = x$$

$$u^0(x) = \sin(2\pi x)$$

$$u^0(x) = \exp(x).$$

Les courbes obtenues sont représentés ci-contre.

Les deux schémas qui ont été présentés sont d'ordre 1 en temps et en espace. Par ailleurs, la précision étant liée à l'ordre, on aimerait bien disposer d'un schéma à deux niveaux d'ordre plus élevés.

4- Schéma de Lax-Wendroff

Ce schéma est défini par :

$$(5) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \cdot \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \cdot \Delta x} - c^2 \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Propriétés du schéma

1- Ce schéma est à deux niveaux en temps car il ne fait intervenir que les temps t^n et t^{n+1}

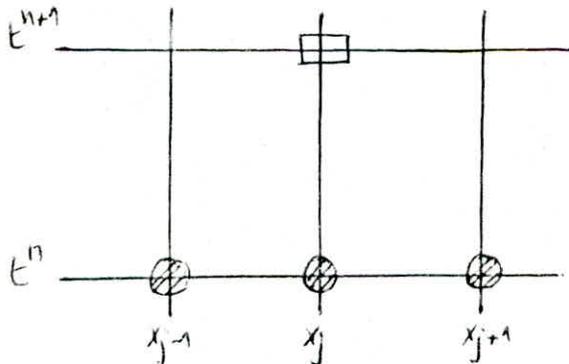


Fig. 8 : Calcul de u^{n+1} à partir du schéma (5)

2- Il est explicite car les valeurs approchées de u à l'instant t^{n+1} sont données explicitement en fonction des valeurs à l'instant t^n . Donc le

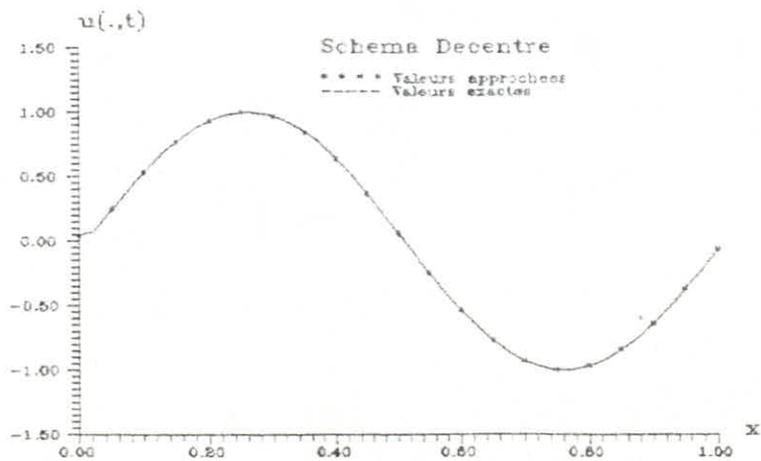
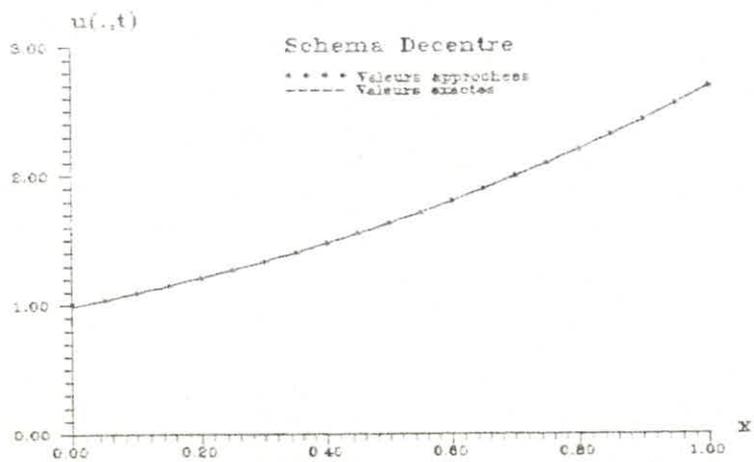
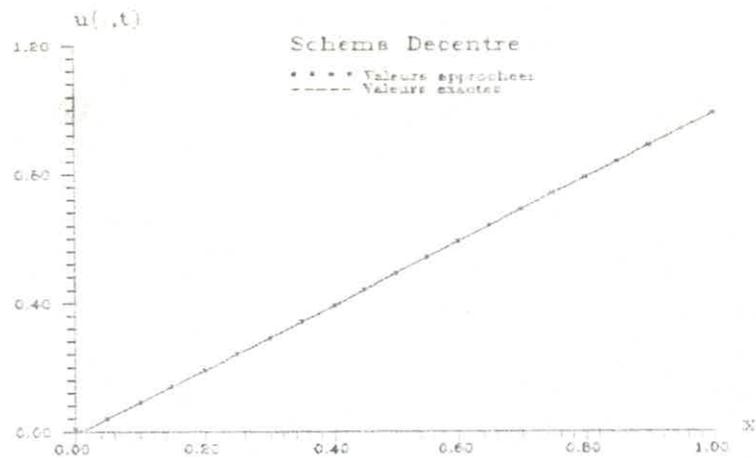
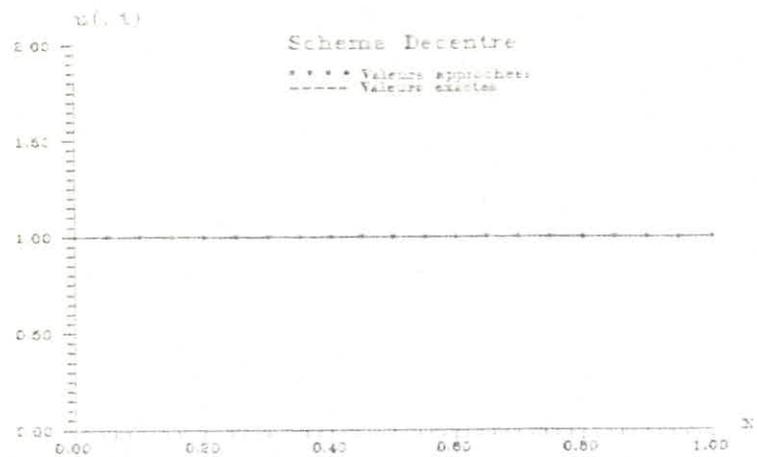


schéma (5) peut s'écrire sous la forme :

$$(5)\text{bis } u_j^{n+1} = (1-\alpha^2) u_j^n + \frac{\alpha}{2} (\alpha - 1) u_{j+1}^n + \frac{\alpha}{2} (\alpha + 1) u_{j-1}^n$$

3- Il est précis à l'ordre 2 en temps et en espace.

4- Il est stable sous la condition C.F.L (2)bis.

5- Les valeurs qui interviennent pour le calcul de u^{n+1} sont donc comme pour le schéma de Lax : u_{j-1}^n , u_j^n et u_{j+1}^n .

6- Tests Numériques.

On a effectué quatre expériences qui diffèrent par la condition initiale. Les paramètres de discrétisation choisis sont :

$$\Delta t = 0.001$$

$$\Delta x = 0.010$$

ce qui donne :

$$\alpha = 0.100$$

et nous avons représenté les résultats à l'instant :

$$t = 0.010 \text{ (i-e } 10 \Delta t)$$

Pour les quatre tests, les conditions initiales sont :

$$u^0(x) = 1$$

$$u^0(x) = x$$

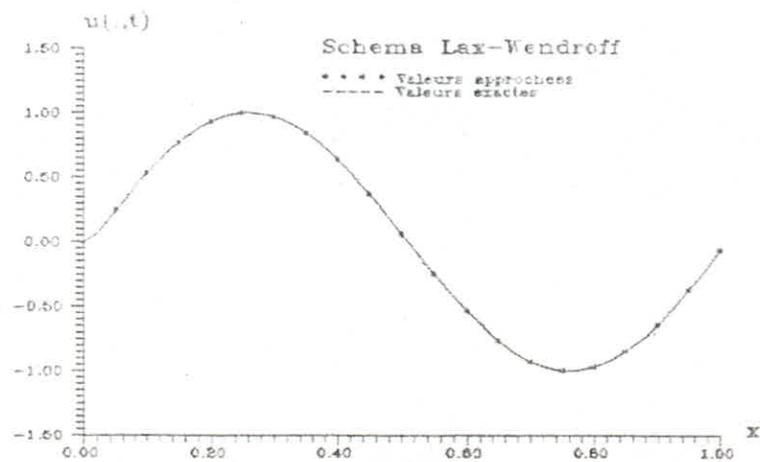
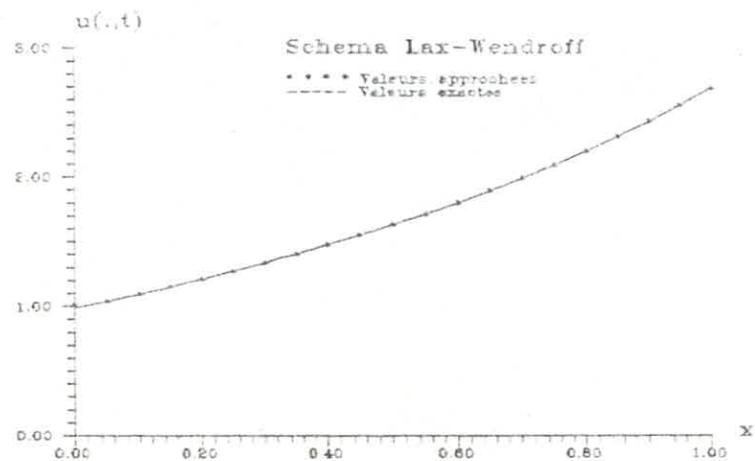
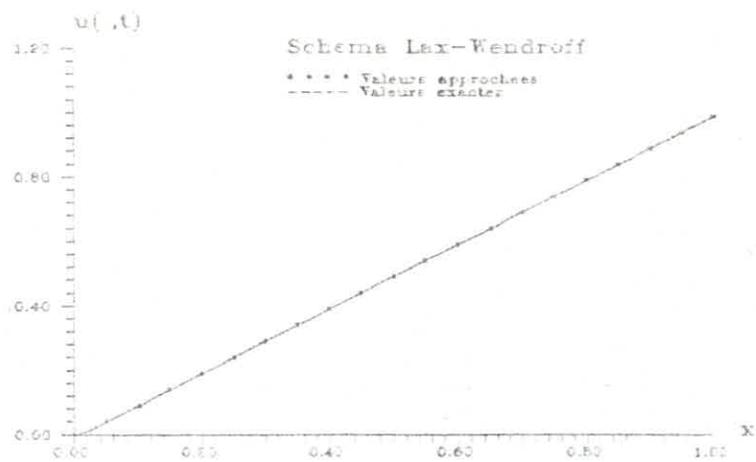
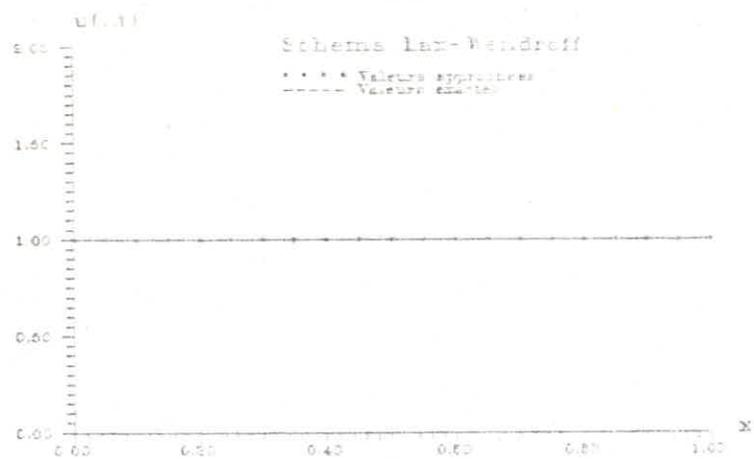
$$u^0(x) = \sin(2\pi x)$$

$$u^0(x) = \exp(x).$$

Les courbes obtenues sont représentées ci-contre.

Remarques :

Les trois schémas explicites à deux niveaux que l'on a considérés ont des dispersions comparables.



. Celui de Lax-Wendroff est, dans de nombreux cas, moins dissipatif que les deux autres. Cependant, il ne vérifie pas le principe du maximum (cf./3/), ce qui peut devenir très gênant lorsque l'on travaille sur une grande échelle de temps.

On souhaite donc disposer d'un schéma explicite qui ne soit pas dissipatif. Pour cela, on introduit un schéma à trois niveaux : c'est le schéma Saute-Mouton.

5- Schéma Saute-Mouton (Leap-Frog)

Le schéma Saute-Mouton est défini par :

$$(6) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2.\Delta t} + c. \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2.\Delta x} = 0$$

Propriétés du schéma

1- On approche au point (x_j, t^n) les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ par des différences finies centrées.

2- Le mouton est évidemment le point (x_j, t^n)

3- C'est un schéma à trois niveaux car il fait intervenir les temps t^{n-1} , t^n et t^{n+1} .

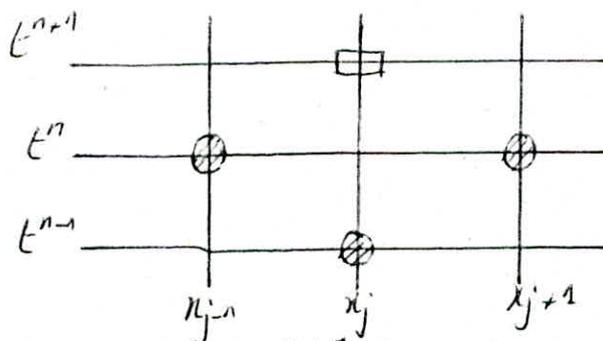


Fig. 9 : Calcul de u^{n+1} à partir du schéma (6)

4- C'est un schéma explicite car les valeurs approchées de u à l'instant t^{n+1} sont données explicitement en fonction des valeurs à l'instant t^{n-1} et t^n .

5- Le schéma est plus précis que les schémas précédents puisqu'il est d'ordre plus élevé (niveau 3) en temps.

6- Le schéma est stable sous la condition C.F.L (2)bis.

7- Tests Numériques :

. On a effectué quatre expériences qui diffèrent par la condition initiale. Les paramètres de discrétisation choisis sont :

$$\Delta t = 0.001$$

$$\Delta x = 0.010$$

ce qui donne :

$$\alpha = 0.100$$

et nous avons représenté les résultats à l'instant :

$$t = 0.010 \text{ (i-e } 10 \Delta t)$$

Pour les quatre tests, les conditions initiales sont :

$$u^0(x) = 1$$

$$u^0(x) = x$$

$$u^0(x) = \sin(2\pi x)$$

$$u^0(x) = \exp(x).$$

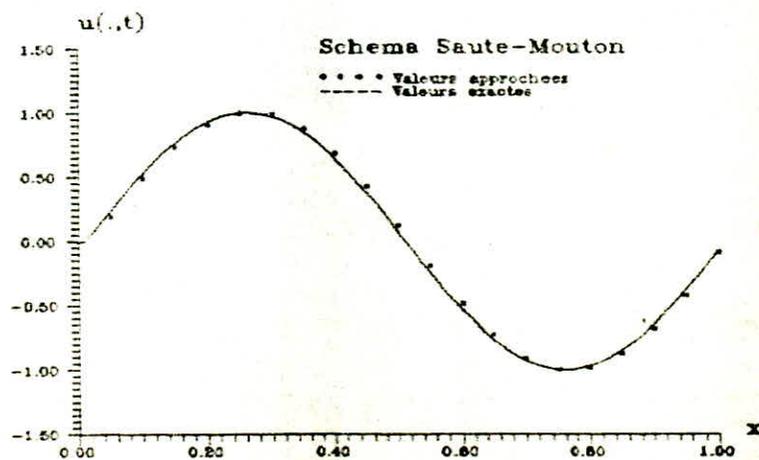
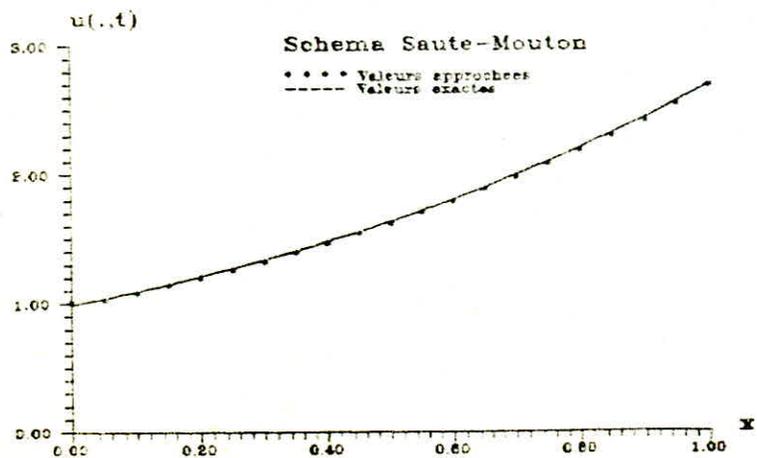
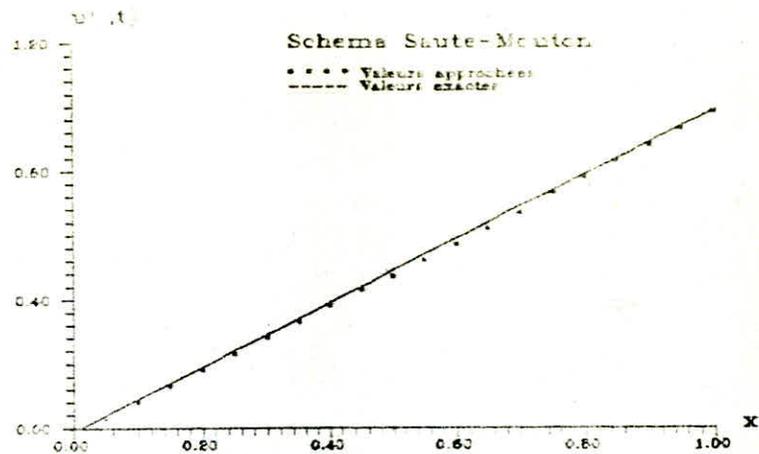
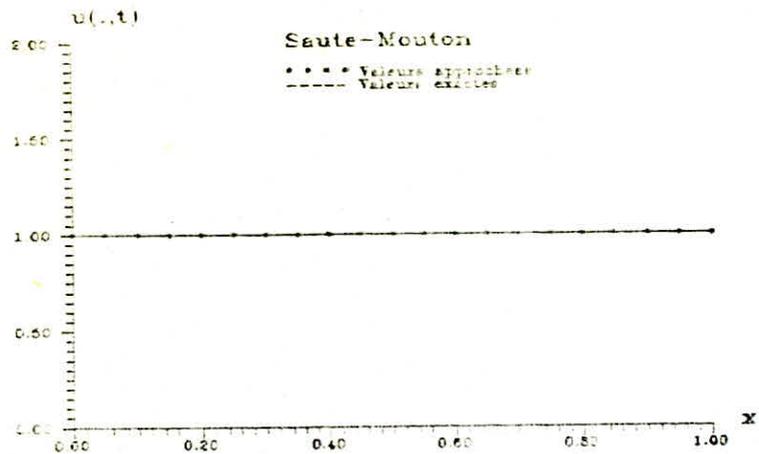
Les courbes obtenues sont représentées ci-contre :

t

Remarques

1- Démarrage du schéma est lié à la connaissance de U^0 et U^1 . U^0 est donné par la condition initiale, u^1 peut être calculée par un des schémas à deux niveaux exposés précédemment. On peut même utiliser pour cela le schéma à deux niveaux instable puisqu'on ne le fait agir que sur un seul pas de temps, mais il est souhaitable d'utiliser un schéma de démarrage qui soit du même ordre : le schéma de Lax-Wendroff, par exemple.

42



2- La résolution du problème de transport avec un tel schéma est évidemment plus coûteuse puisque pour calculer la solution à l'instant n , il faut stocker u_j^{n-1} et u_j^{n-2} .

3- La mise en oeuvre informatique d'un tel schéma nécessite les précautions suivantes :

i- Il n'est pas bon de se fixer un pas Δx et de prendre Δt beaucoup plus petit dans la mesure du possible, on choisira Δt et Δx de façon à ce que $c \cdot \Delta t$ reste proche de 1.

ii- Pour déterminer u_j^{n+1} , on écrit les équations suivantes :

. Pour $j = 0$, u_0^{n+1} est donné égal à $g(t^{n+1})$

. Pour $1 \leq j \leq J-1$, on écrit le schéma sans modification.

. Pour $j = J$, on peut encore écrire le schéma, à condition de définir "fictivement" les valeurs u_{J+1}^n et u_{J+1}^{n+1} .

iii- Pour définir u_{J+1} , il existe plusieurs façons de procéder.

On peut employer l'une des méthodes suivantes :

a)- Calculer U_{J+1} par extrapolation polynomiale à partir de

$U_J, U_{J-1}, U_{J-2}, \dots, U_{J-p}$; en général, on se limite au cas $p = 0$ ou $p = 1$, c'est à dire : $U_{J+1} = U_J$ ou bien $U_{J+1} = 2 \cdot U_J - U_{J-1}$.

b)- calculer u_{J+1} en utilisant un schéma à deux points d'espace écrit au point x_{J+1} , par exemple le schéma décentré explicite.

c)- Dans le cas où l'on utilise le schéma Saute-Mouton, on peut utiliser en $j = J$, la formule :

$$\frac{1}{2 \cdot \Delta t} (u_J^{n+1} - u_J^{n-1}) + \frac{c}{\Delta x} \left(\frac{1}{2} (u_J^{n+1} + u_J^{n-1}) - u_{J-1}^n \right) = 0$$

Enfin, il y a bien sûr certaines conditions aux limites qui peuvent engendrer des instabilités.

Il est toujours possible d'accroître la précision de la solution en choisissant un pas de discrétisation en temps solution et/ou en espace plus petit, or, cela est moins pénalisant si on diminue seulement le pas en temps : diviser Δt par 2 entraîne le doublement du volume de calcul, alors que diviser Δx par 2, oblige, lorsque l'on utilise un schéma explicite à diviser aussi Δt par 2, donc à quadrupler le volume de calculs pour un problème monodimensionnel (à multiplier par 8 pour un problème bidimensionnel).

En d'autres termes, lorsqu'il est compliqué d'accroître la précision de la discrétisation spatiale et temporelle, il est plus rentable d'accroître la précision du schéma de discrétisation en espace que celle du schéma en temps.

En règle générale, les calculs sont faits avec un pas de temps variable évalué selon les critères de variation relative de la solution approchée d'un pas de temps à l'autre de telle sorte que la précision temporelle peut toujours être obtenue par réduction du pas de temps.

Conclusion du chapitre

Le premier schéma numérique est instable : c'est un exemple académique. Les autres schémas sont conditionnellement stables, mais le schéma de Lax-Wendroff présente l'avantage d'être moins dissipatif que les autres. Voilà pourquoi, nous l'avons choisi dans la suite pour résoudre le modèle diphasique adopté.

Enfin, nous signalons que les tests numériques présentés dans ce chapitre ont été effectués au Centre de Calcul de l'Ecole Nationale Polytechnique sur le VAX 750 . Pour cela, nous avons mis au point le logiciel UEA1, écrit en FORTRAN77 et conçu pour traiter tous les cas du problème de transport scalaire pour les schémas que nous avons présentés.

CHAPITRE V

APPROXIMATION DU MODELE
DIPHASIQUE ADOPTE

APPROXIMATION DU MODÈLE DIPHASIQUE ADOPTÉ

Introduction:

Le but de ce chapitre c'est d'approximer le modèle adopté (cf Chapitre III) par différences finies. Nous allons utiliser deux schémas numériques :

Le schéma de Lax-Wendroff et la famille des schémas prédicteur-correcteur. Les conclusions relatives à chaque schéma seront présentées .

1-Schéma de Lax-Wendroff:

a-Les équations discrétisées:

Nous avons adopté le schéma de Lax-Wendroff introduit au chapitre IV pour discrétiser le système écrit sous forme non conservative :

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \\ P(\rho, s) = \rho \cdot s - \frac{\bar{c}^2}{\gamma} \cdot \rho \end{array} \right.$$

Nous montrons ainsi que cette approximation nous conduit à la résolution du système algébrique suivant :

$$\rho_j^{n+1} = \left[1 - \left(u \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] \rho_j^n + \frac{1}{2} u \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u \frac{\Delta t}{\Delta x} - 1 \right) \rho_{j+1}^n + \frac{1}{2} u \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(u \frac{\Delta t}{\Delta x} + 1 \right) \rho_{j-1}^n - \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \rho_j^n$$

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= \left[1 - \left(u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] \cdot u_j^n + \frac{1}{2} \cdot u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} - 1 \right) \cdot u_{j+1}^n + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} + 1 \right) \cdot u_{j-1}^n - \frac{1}{\rho_j} \cdot \frac{1}{\Delta x} \left(p_j^n - p_{j-1}^n \right) \\
s_j^{n+1} &= \left[1 - \left(u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] \cdot s_j^n + \frac{1}{2} \cdot u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} - 1 \right) \cdot s_{j+1}^n + \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \left(u_j^n \frac{\Delta t}{\Delta x} + 1 \right) \cdot s_{j-1}^n
\end{aligned}$$

et la loi d'état approchée est alors :

$$p_j^{n+1} = \begin{pmatrix} \rho_j^n \\ \rho_j^n \\ \rho_j^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^n \\ s_j^n \\ \gamma^n \end{pmatrix} \frac{c^2}{\gamma} \cdot \bar{\rho}$$

b-Les expériences numériques:

Nous avons effectué des tests dans les cas suivants :

.Premier cas:

. conditions initiales :

$$\begin{cases} \rho(x) = 2 \\ 0 \\ u(x) = 1 \\ 0 \\ s(x) = 1 \\ 0 \end{cases}$$

. conditions aux limites :

à l'entrée

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\rho}(t) = 2 \\ \tilde{u}(t) = 1 \\ \tilde{s}(t) = 1 \end{array} \right|$$

à la sortie: $| P(1,t) = 2$

La solution du problème est

$$\left. \begin{array}{l} \rho(x,t) = 2 \\ u(x,t) = 1 \\ s(x,t) = 1 \end{array} \right|$$

et la pression est donnée par la loi d'état :

$$P(x,t) = 2$$

Deuxième cas :

. conditions initiales :

$$\left. \begin{array}{l} \rho(x) = \exp(-x) \\ \circ \\ u(x) = 1 \\ \circ \\ s(x) = \exp(x) \\ \circ \end{array} \right|$$

conditions aux limites :

à l'entrée

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\rho}(t) = \exp(-t) \\ \tilde{u}(t) = 1 \\ \tilde{s}(t) = \exp(-t) \end{array} \right|$$

à la sortie: $\left| P(1, t) = P(t) = \exp(-2t) \right.$
 ∞

La solution du problème est

$$\left. \begin{array}{l} \rho(x, t) = \exp(-x-t) \\ u(x, t) = 1 \\ s(x, t) = \exp(-x-t) \end{array} \right|$$

et la pression est donnée par la loi d'état :

$$P(x, t) = \exp(-2t)$$

Les tests effectués pour chaque cas correspondent aux pas suivants :

1^{er} test : $\Delta t = 10^{-5}$; $\Delta x = 10^{-2}$

2^{em} test : $\Delta t = 10^{-4}$; $\Delta x = 10^{-2}$

3^{em} test : $\Delta t = 10^{-3}$; $\Delta x = 10^{-2}$

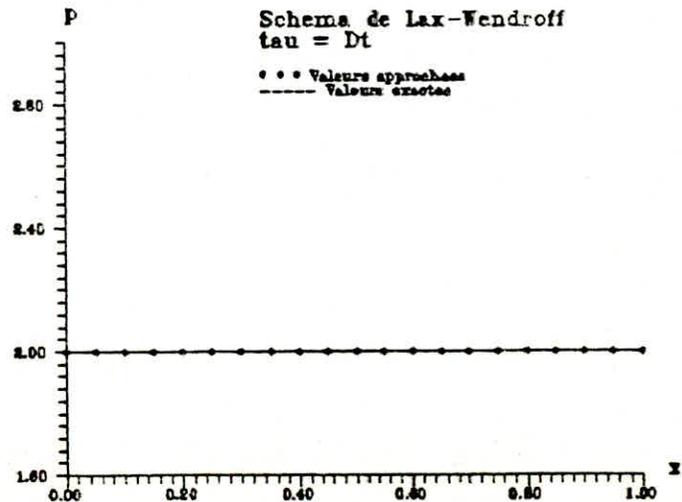
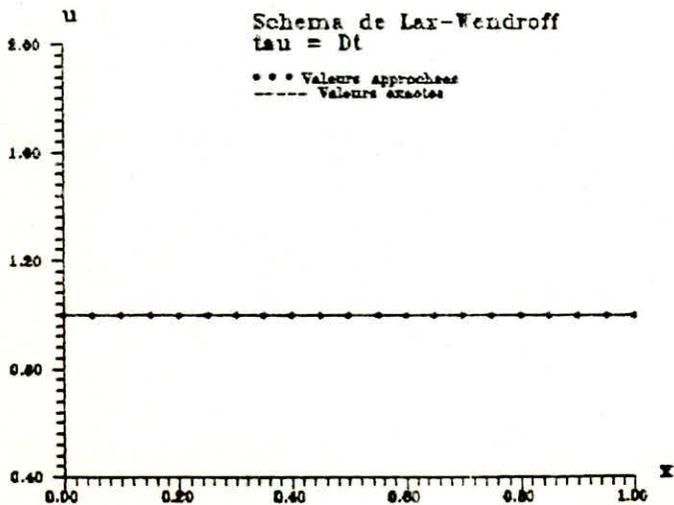
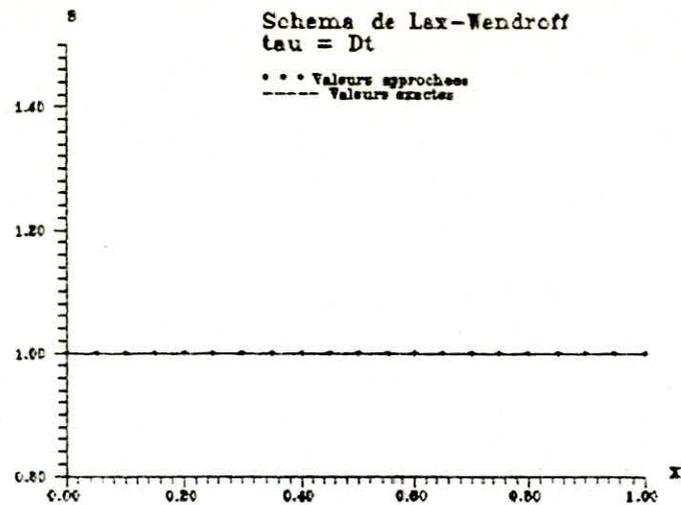
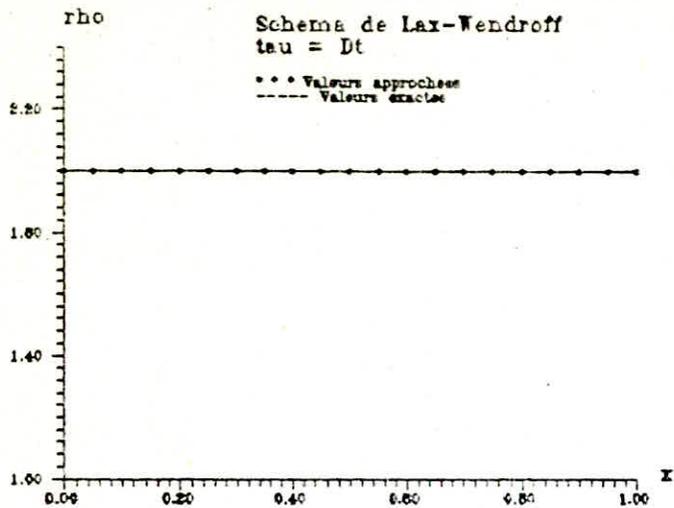
Les courbes ont été tracées au bout de la première iteration dans le temps et indiquées ci-contre .

c-Analyse des résultats et conclusion :

Au vu des résultats obtenus, nous constatons que ce schéma est complètement instable et mal adapté à la résolution de notre problème, il casse très rapidement et il se crée des oscillations parasites dont l'amplitude devient grande au

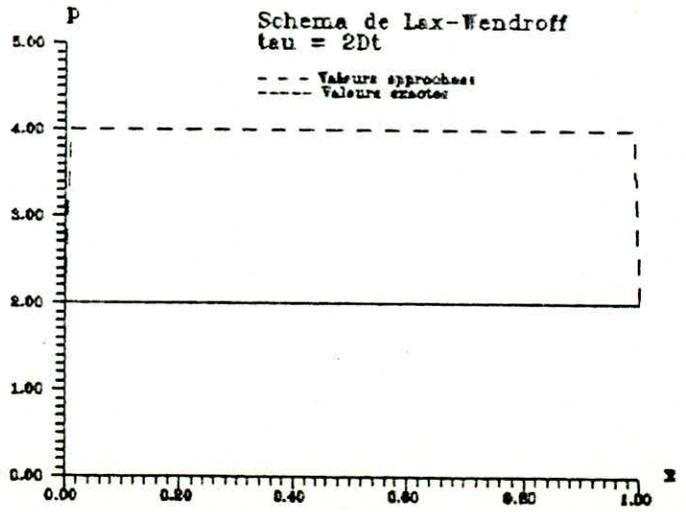
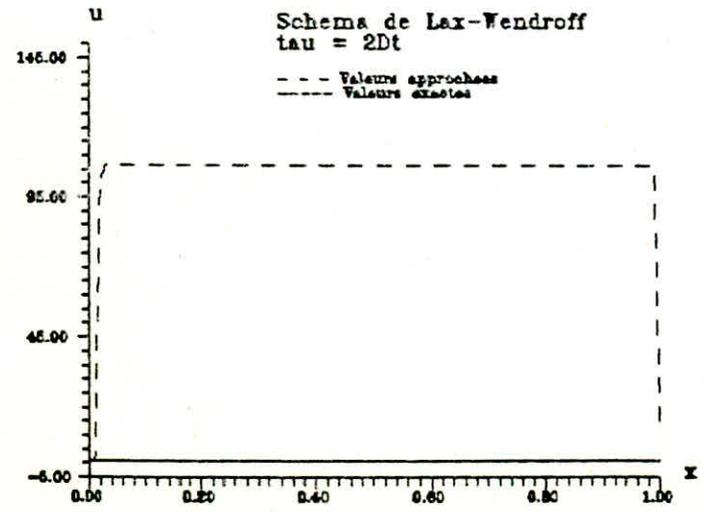
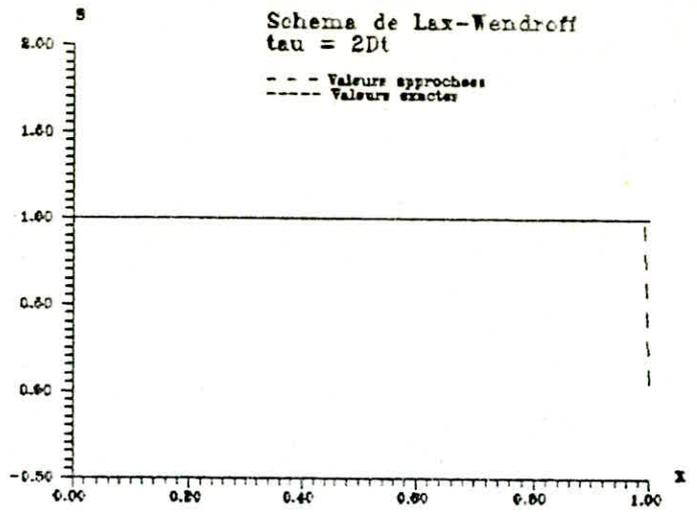
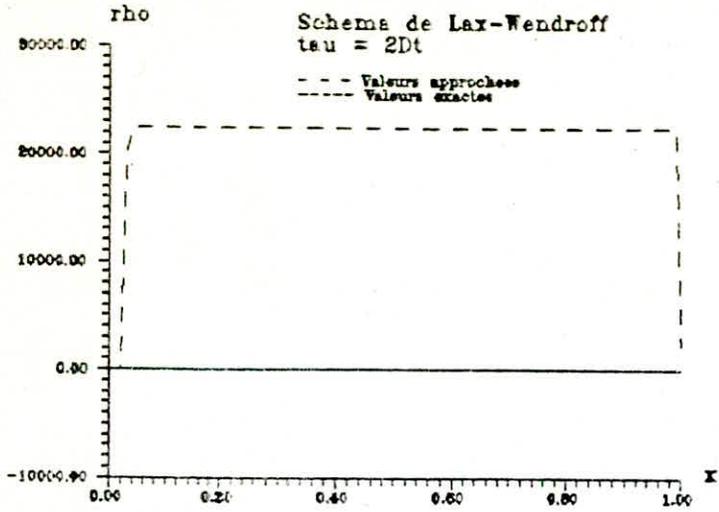
67

Premier cas



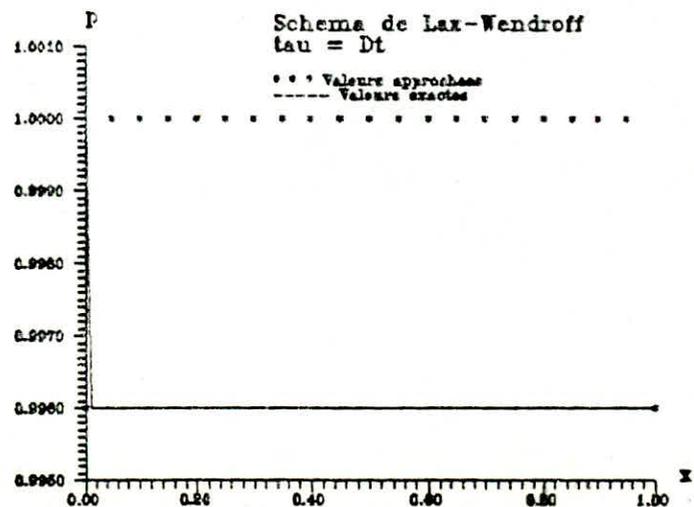
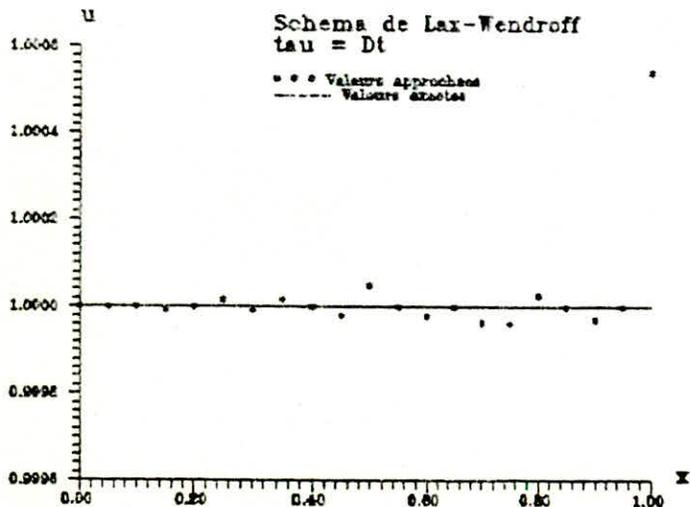
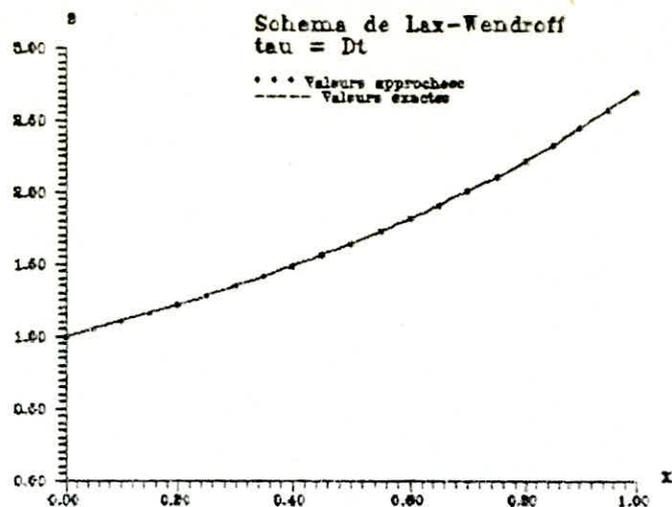
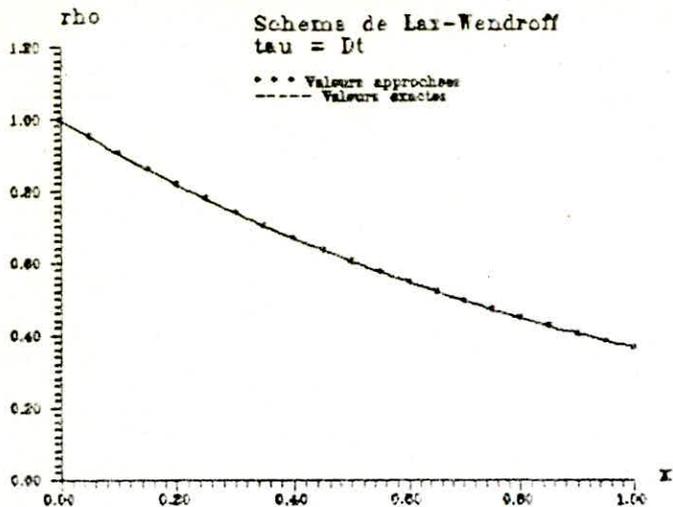
50

Premier cas



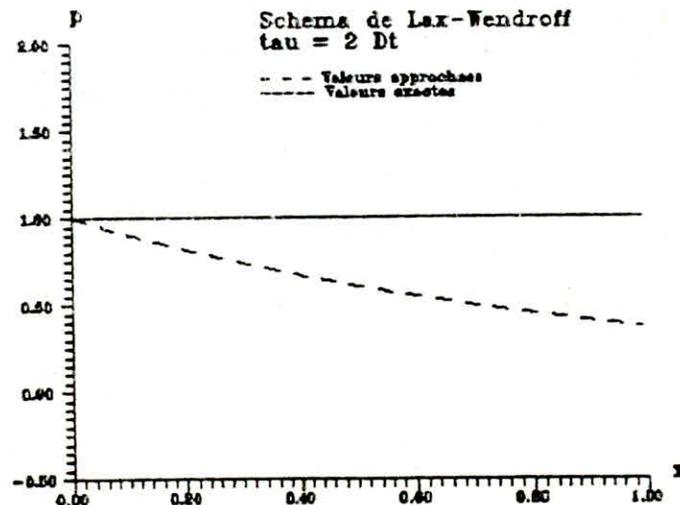
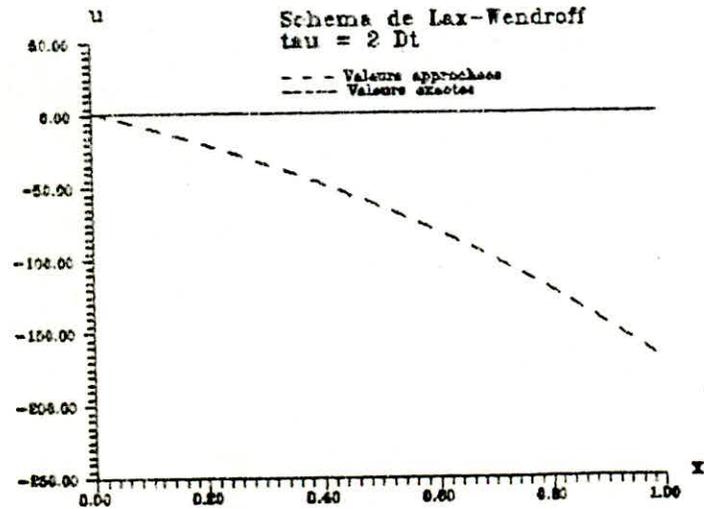
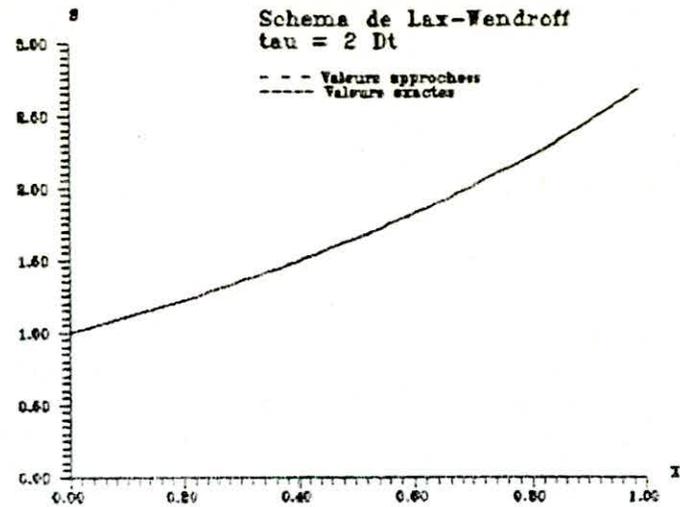
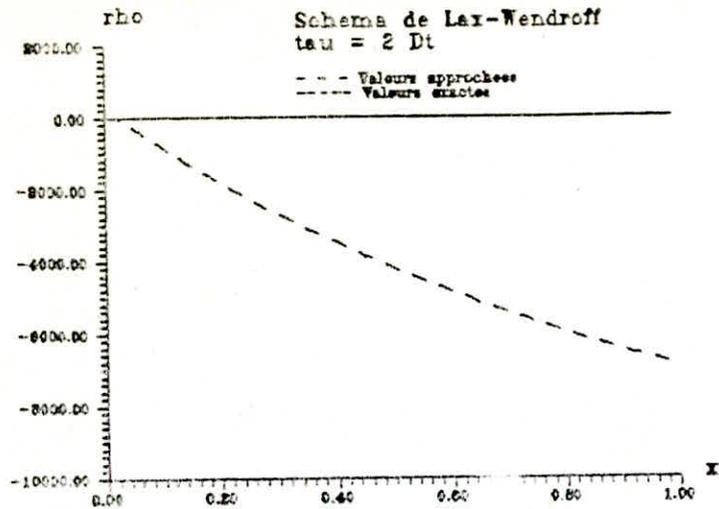
52

Deuxième cas



52

Deuxième cas



cours du temps. Cela s'explique par le fait qu'en réalité avec un tel schéma, on ne résout plus un problème non linéaire. En effet, l'approximation des équations de notre système par ce schéma s'est fait au prix d'une linéarisation. Ce qui a fait perdre toutes les caractéristiques de la solution du système. Ceci est un phénomène très classique et bien connu par les spécialistes. Nous signalons que le programme UEA2, écrit en FORTRAN77 calcule également les solutions dans le cas d'un système non homogène, c'est-à-dire avec terme source (second membre) les tests effectués nous permettent de retrouver les mêmes phénomènes.

Voilà pourquoi, nous sommes donc amenés, et ceci dans le but de mieux tenir compte du caractère du système (non linéarité, hyperbolicité), à mettre en œuvre un autre schéma qui puisse avoir les mêmes propriétés du schéma de Lax-Wendroff (explicite, ordre 2, ...) sans pour autant linéariser le système considéré. Nous avons donc retenu la famille des schémas du type prédicteur-correcteur.

2-Schéma du type prédicteur-correcteur:

Les schémas du type prédicteur-correcteur (cf [9],[11]) sont semi explicites, précis à l'ordre 2 et conditionnellement stables, toutefois l'introduction de ces schémas est possible lorsque le système est écrit sous forme conservative. par conséquent. Nous réécrivons le système (5.1) sous forme conservative pour pouvoir l'approximer par de tels schémas. Nous pouvons vérifier (cf [9],[11]) que le système (5.1) s'écrit sous forme conservative de la manière suivante :

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial}{\partial x} ((\rho e + p)u) = 0 \end{cases}$$

ρ est la densité

u et la vitesse

P est la pression

e est l'énergie totale spécifique

(i.e par unité de

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2} \cdot u^2$$

avec ε l'énergie interne spécifique

pour fermer le système, l'équation d'état s'écrit:

$$P = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot \left(e - \frac{1}{2} u^2 \right)$$

γ est le coefficient d'adiabétique.

a- Equations discrétisées :

Dans ce paragraphe nous allons tout d'abord décrire les schémas du type prédicteur-correcteur dans le cas général.

ILs sont appelés les schémas S_{β}^{α} et ont été introduits par Zerut et Peyrat .

Si Nous considérons un système de la formes :

$$(5.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(x) = 0 & , x \in \mathbb{R} , t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ou $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$

et si on pose :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ x = j \cdot \Delta x \\ t = n \cdot \Delta t \end{cases} \quad , \quad \begin{matrix} j \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

alors l'approximation du système (5-3) par le schéma prédicteur-correcteur est de la forme suivante :

$$\begin{cases} (1) & u_{j+1/2}^{n+1/2} = (1-\beta)u_j^n + \beta u_{j+1}^n - \alpha \lambda \left[f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n) \right] \\ (2) & u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2\alpha} \left[(\alpha-\beta)f(u_{j+1}^n) + (2\beta-1)f(u_j^n) + (1-\alpha-\beta)f(u_{j-1}^n) \right] \\ & \quad + f(u_{j+1/2}^{n+1/2}) - f(u_{j-1/2}^{n+1/2}) \end{cases}$$

où α et β sont des paramètres réels compris entre 0 et 1. Ce sont les paramètres du schéma dont le rôle intervient au niveau de la stabilité et de la consistance du schéma (cf [7]) pour $\alpha=\beta=1/2$, on retrouve un schéma dû à Richtmyer tandis que pour $\alpha=1, \beta=0$, on obtient le schéma de Mac Cormack

$u_{j+1/2}^{n+1/2}$ c'est une valeur "fictive", ou prédictee. Elle peut être considérée comme une approximation de $u \left(x_{j+\beta}, t_{n+\alpha} \right)$

avec $x_{j+\beta} = x_j + \beta \Delta x$ et $t_{n+\alpha} = t_n + \alpha \Delta t$

pour obtenir la valeur approchée de $u(x_j, t_{n+1})$ on corrige par l'équation (2)

La discrétisation du système (5-2) par les schémas prédicteur-correcteur nous amène à résoudre la famille des systèmes algébriques suivante :

$$\rho_{j+1/2}^{n+1/2} = (1-\beta)\rho_j^n + \beta\rho_{j+1}^n - \alpha\lambda \left[\binom{n}{j+1} \binom{n}{j+1} \rho_{j+1}^n - \binom{n}{j} \binom{n}{j} \rho_j^n \right]$$

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\lambda}{2\alpha} \left[(\alpha-\beta)u_{j+1} \binom{n}{j+1} \binom{n}{j+1} \rho_{j+1}^n + (2\beta-1)u_j \binom{n}{j} \binom{n}{j} \rho_j^n + (1-\alpha-\beta)u_{j-1} \binom{n}{j-1} \binom{n}{j-1} \rho_{j-1}^n + u_j \binom{n}{j} \binom{n+1/2}{j+1/2} \rho_{j+1/2}^n + u_{j-1} \binom{n}{j-1} \binom{n+1/2}{j-1/2} \rho_{j-1/2}^n \right]$$

$$\rho_{j+1/2}^{n+1/2} \cdot u_{j+1/2} = (1-\beta)\rho_j^n u_j + \beta\rho_{j+1}^n u_{j+1} - \alpha\lambda \left[\binom{n}{j+1}^2 \binom{n}{j+1} \rho_{j+1}^n - P_{j+1}^n - \binom{n}{j}^2 \binom{n}{j} \rho_j^n - P_j^n \right]$$

$$\rho_{j+1}^{n+1} \cdot u_{j+1} = \rho_j^n u_j - \frac{\lambda}{2\alpha} \left[(\alpha-\beta) \left[\binom{n}{j+1}^2 \binom{n}{j+1} \rho_{j+1}^n + P_{j+1}^n \right] + (2\beta-1) \left[\binom{n}{j}^2 \binom{n}{j} \rho_j^n + P_j^n \right] + (1-\alpha-\beta) \left[\binom{n}{j-1}^2 \binom{n}{j-1} \rho_{j-1}^n + P_{j-1}^n \right] + \frac{1}{\rho_j} \binom{n+1/2}{j+1/2} \binom{n+1/2}{j+1/2} \rho_{j+1/2}^n + \frac{1}{\rho_{j-1}} \binom{n+1/2}{j-1/2} \binom{n+1/2}{j-1/2} \rho_{j-1/2}^n + P_{j-1}^n \right]$$

$$\rho_{j+1/2}^{n+1/2} \cdot e_{j+1/2} = (1-\beta)\rho_j^n e_j + \beta\rho_{j+1}^n e_{j+1} - \alpha\lambda \left[\binom{n}{j+1} \binom{n}{j+1} \rho_{j+1}^n - P_{j+1}^n + u_{j+1} \binom{n}{j} \binom{n}{j+1} \rho_j^n - P_j^n \right]$$

$$\rho_{j+1}^{n+1} \cdot u_{j+1} = \rho_j^n e_j - \frac{\lambda}{2\alpha} \left[(\alpha-\beta) \left[\binom{n}{j+1} \binom{n}{j+1} \rho_{j+1}^n + P_{j+1}^n \right] + (2\beta-1) \left[\binom{n}{j} \binom{n}{j} \rho_j^n + P_j^n \right] + (1-\alpha-\beta) \left[\binom{n}{j-1} \binom{n}{j-1} \rho_{j-1}^n + P_{j-1}^n \right] + \binom{n+1/2}{j+1/2} \binom{n+1/2}{j+1/2} \rho_{j+1/2}^n + P_{j+1}^n + \binom{n+1/2}{j-1/2} \binom{n+1/2}{j-1/2} \rho_{j-1/2}^n + P_{j-1}^n \right]$$

Pour fermer le système, la loi d'état discrétisée s'écrit sous la forme :

$$P_j^{n+1} = (\gamma - 1) \cdot \rho \cdot \left[e^{-1/2} (u_j^h)^2 \right]$$

b- Les expériences numériques :

Nous avons effectué les tests dans les conditions suivantes:

. Premier cas:

. conditions initiales :

$$\left| \begin{array}{l} \rho(x, 0) = \exp(x) \\ u(x, 0) = 1 \\ e(x, 0) = 1/2 + \exp(-x) \\ P(x, 0) = 1 \end{array} \right.$$

. conditions aux limites :

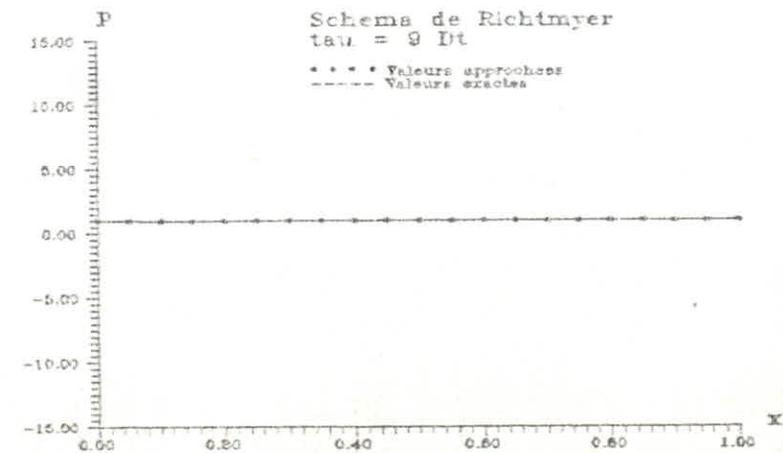
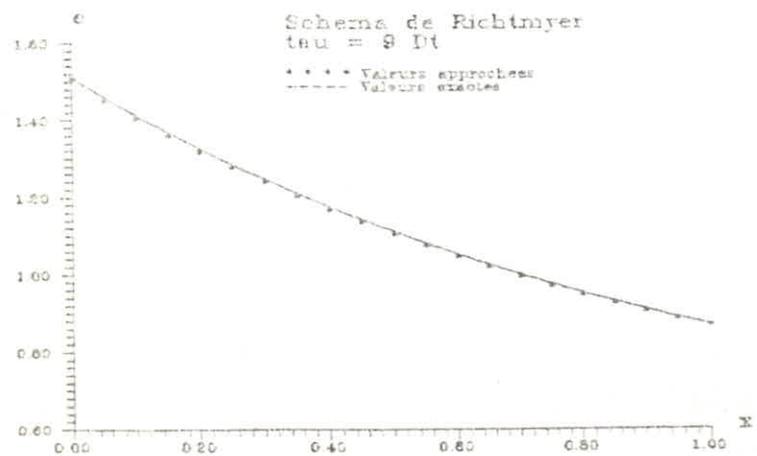
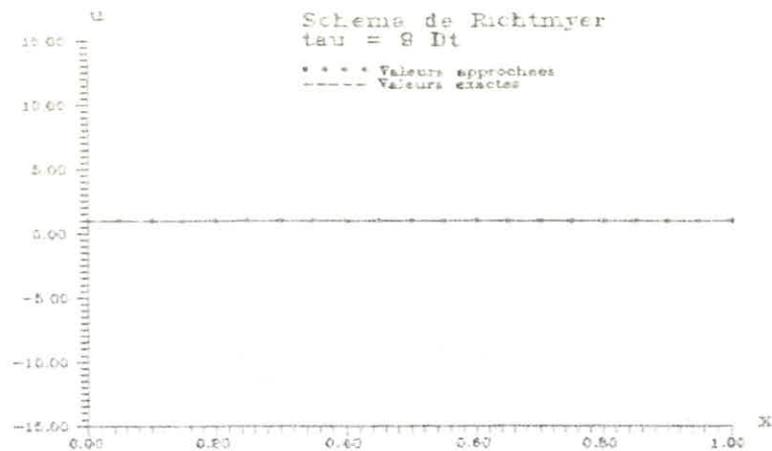
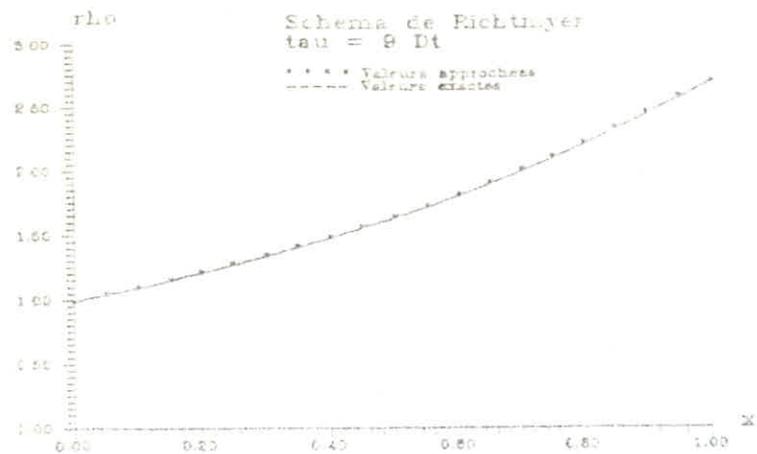
à l'entrée

$$\left| \begin{array}{l} \rho(0, t) = \exp(-t) \\ u(0, t) = 1 \\ e(0, t) = 1/2 + \exp(t) \end{array} \right.$$

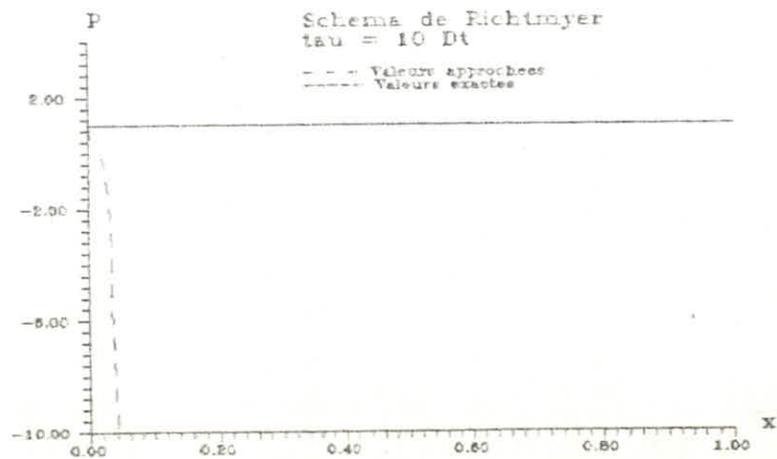
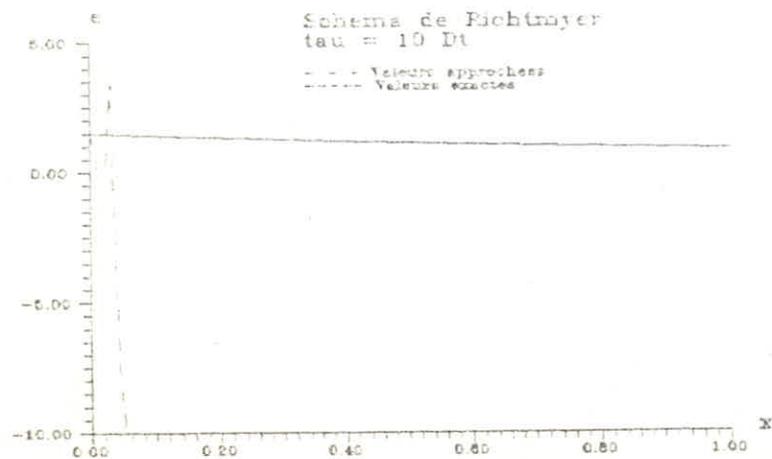
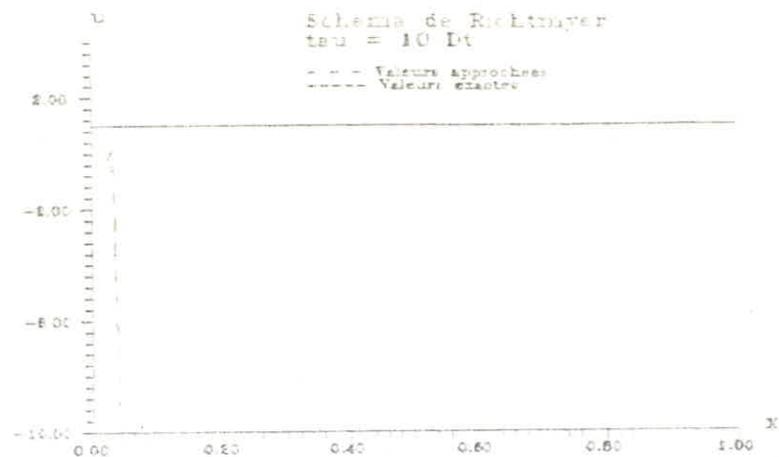
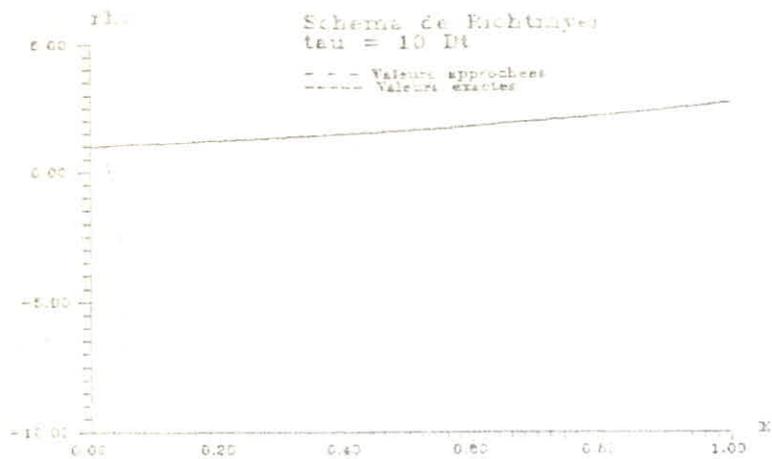
à la sortie: $| P(1, t) = 1$

La solution du problème est

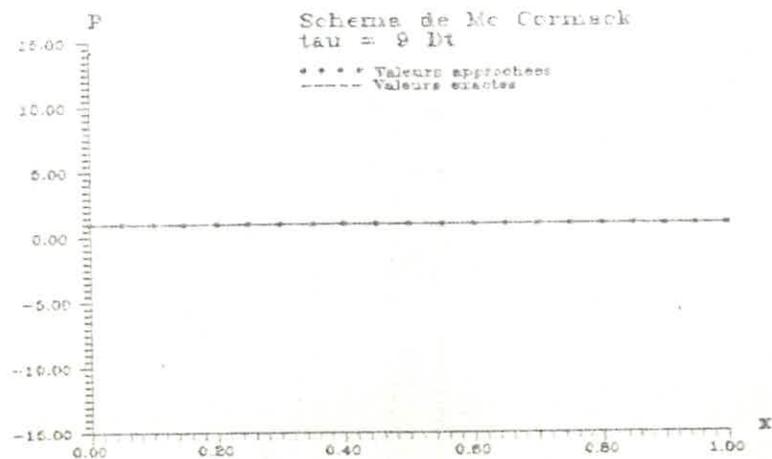
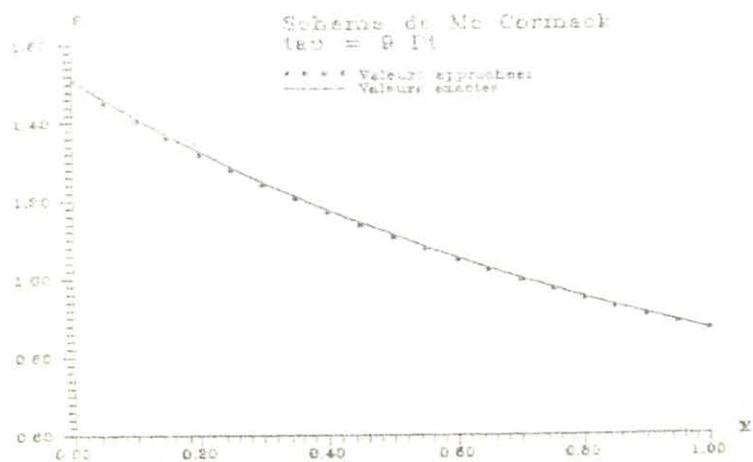
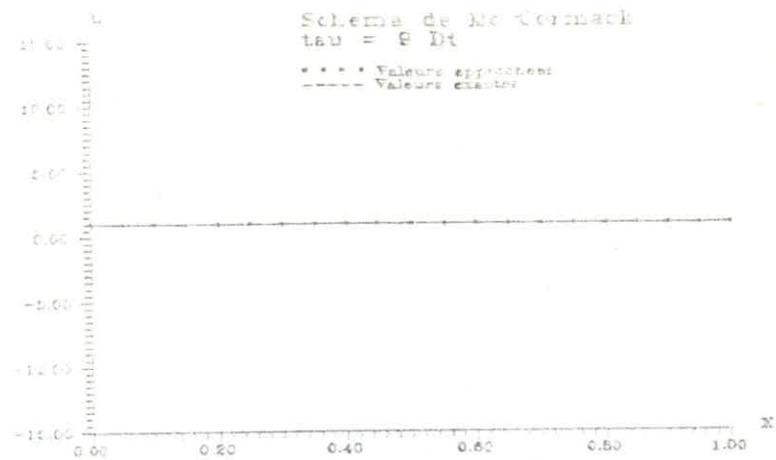
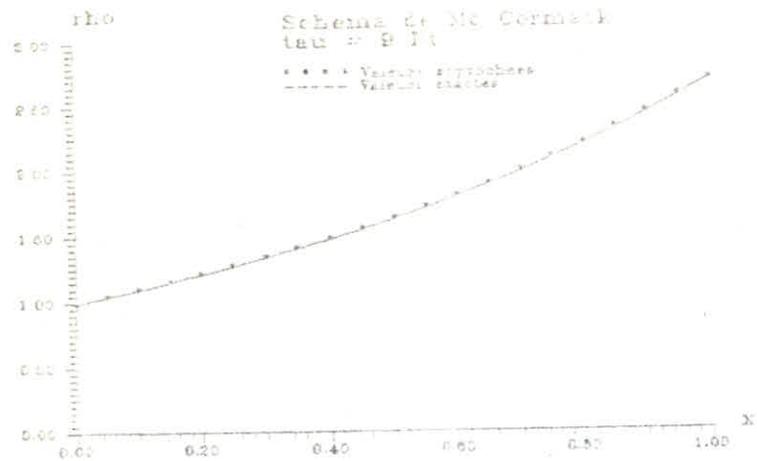
$$\left| \begin{array}{l} \rho(x, t) = \exp(+x-t) \\ u(x, t) = 1 \\ e(x, t) = 1/2 + \exp(-x-t) \\ P(x, t) = 1 \end{array} \right.$$

Premier cas

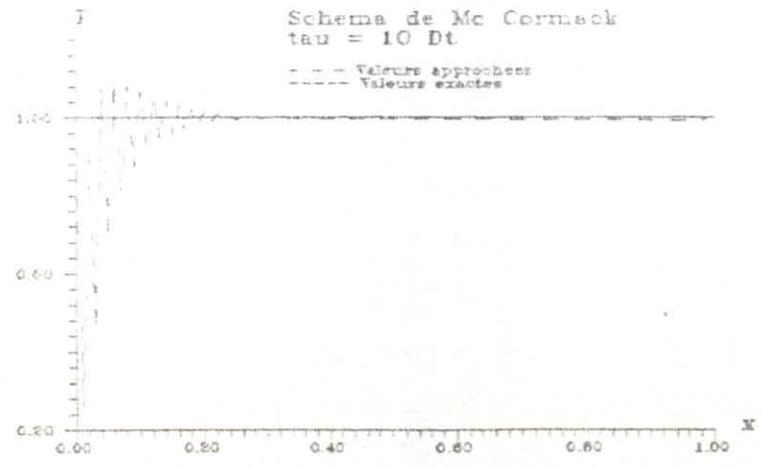
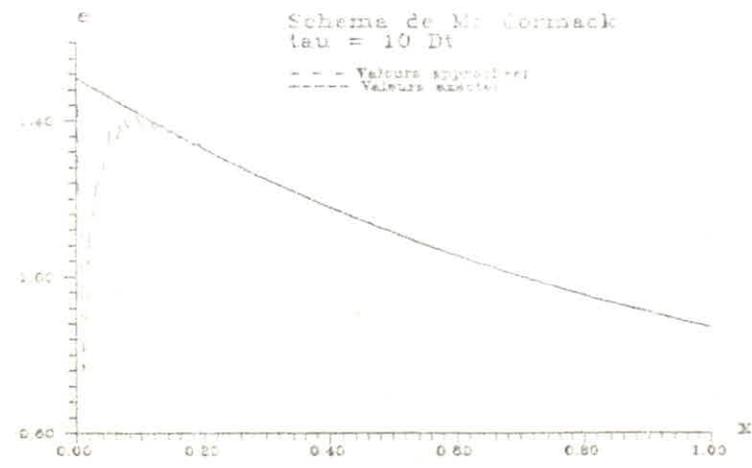
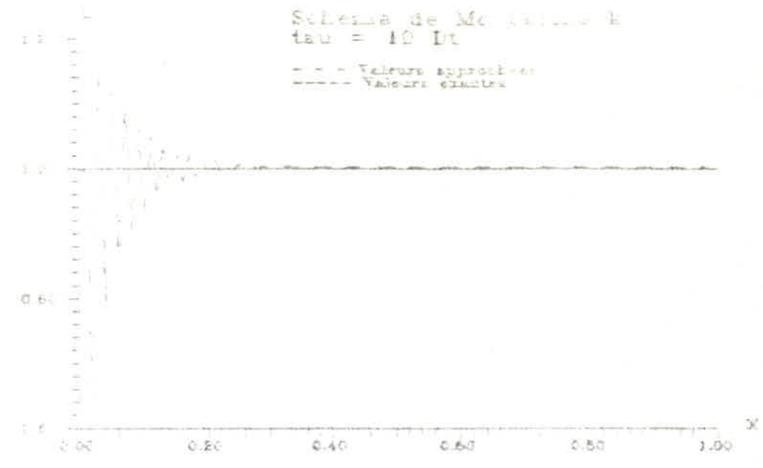
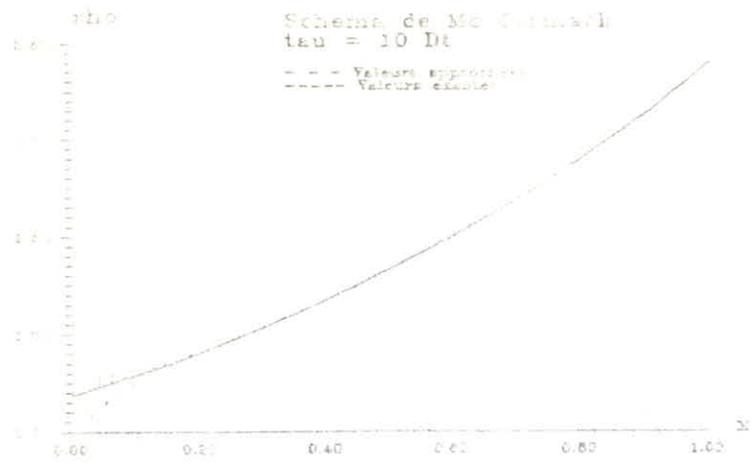
59
Premier cas



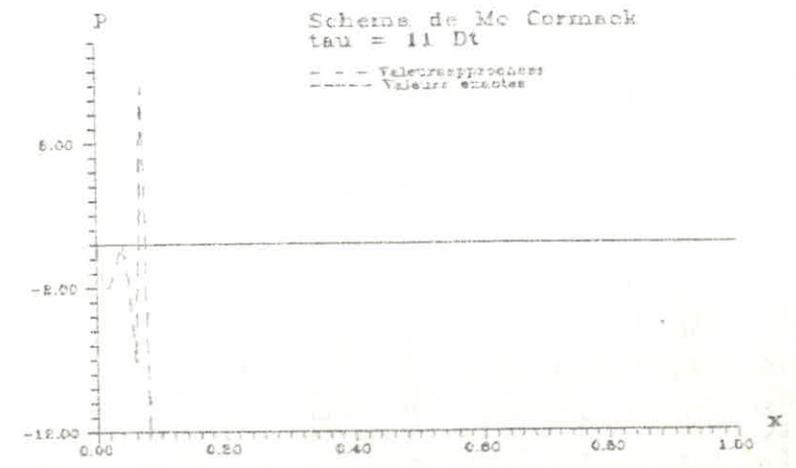
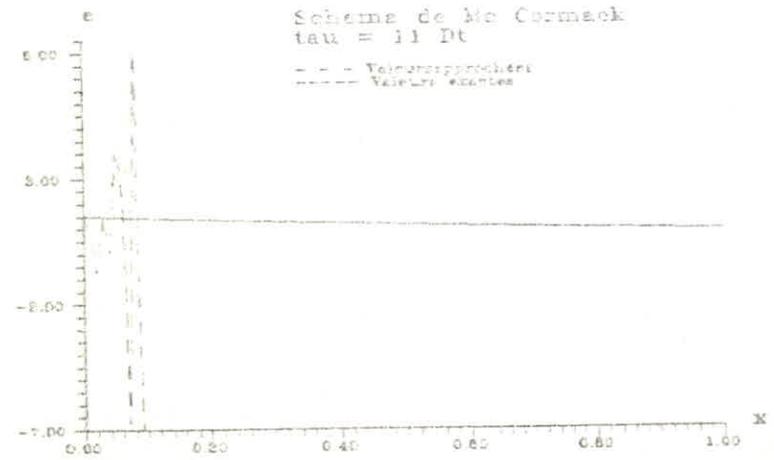
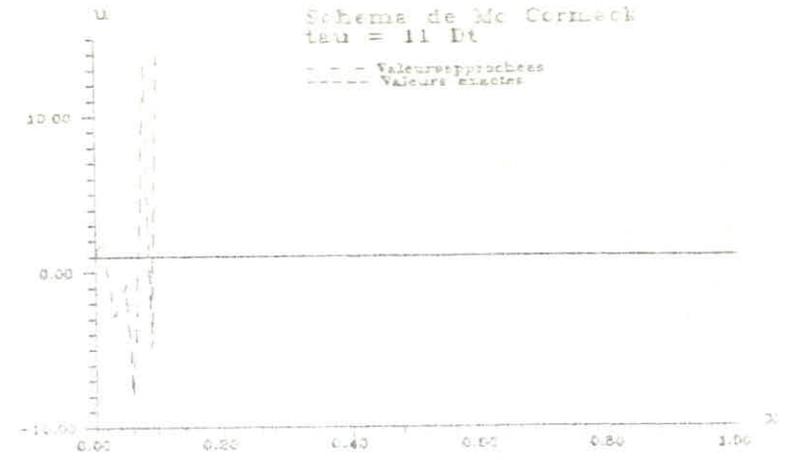
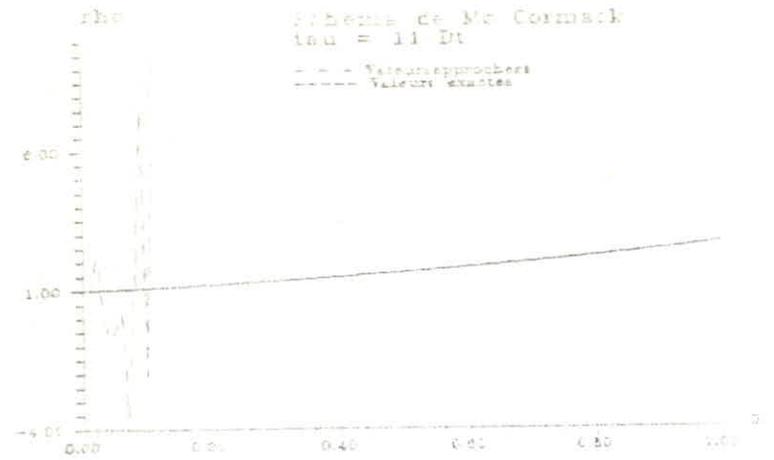
Premier cas



Premier cas



62
Premiers cas



Deuxième cas :

. conditions initiales :

$$\left. \begin{array}{l} \rho(x) = 1+x \\ \circ \\ u(x) = 1 \\ \circ \\ e(x) = 1/2 \\ \circ \end{array} \right|$$

. conditions aux limites :

à l'entrée

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\rho}(t) = 1-t \\ \tilde{\circ} \\ u(t) = 1 \\ \tilde{\circ} \\ e(t) = 1/2 \\ \circ \end{array} \right|$$

à la sortie: $\left| P(1,t) = P(t) = 0 \right.$
 ∞

La solution du problème est

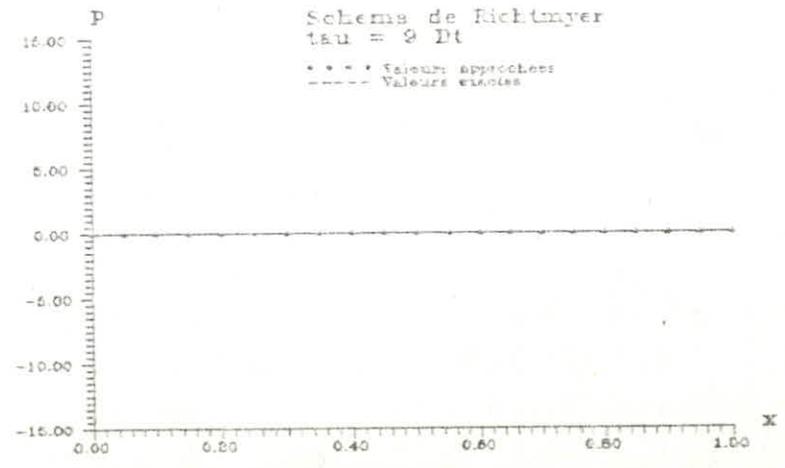
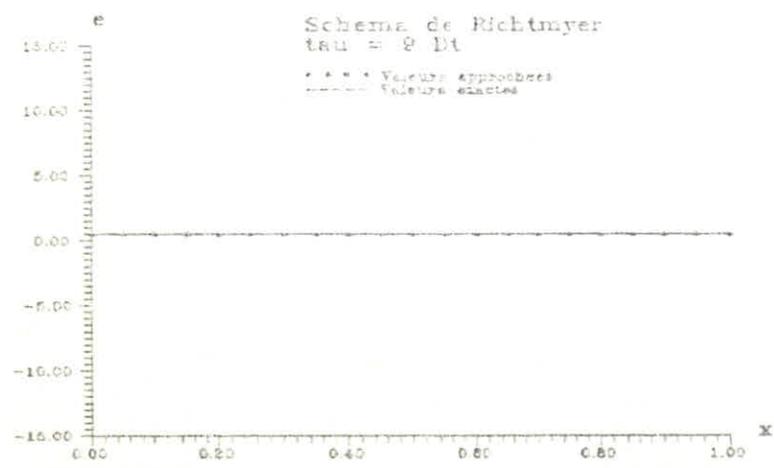
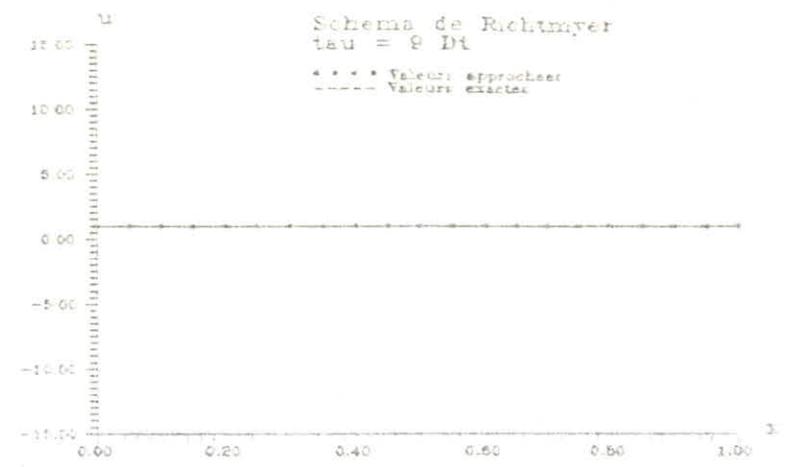
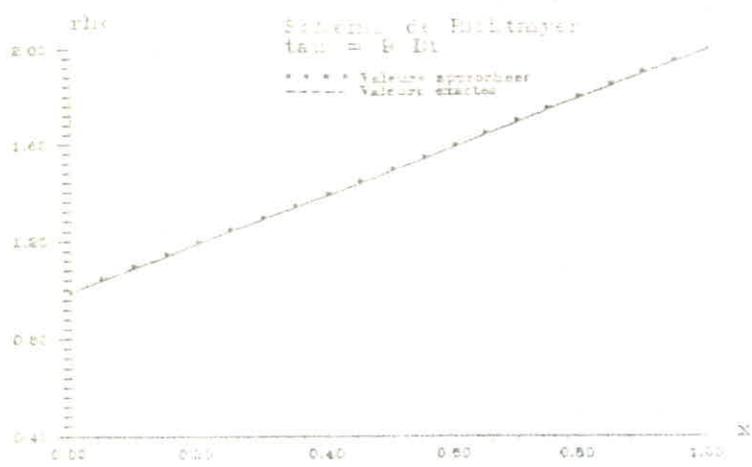
$$\left. \begin{array}{l} \rho(x,t) = 1+x-t \\ u(x,t) = 1 \\ e(x,t) = 1/2 \\ P(x,t) = 0 \end{array} \right|$$

Les tests effectués correspondent à un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$
et un pas d'espace $\Delta x = 10^{-2}$

Les tests réalisés sont ceux de Mac Cormack et de Richtmyer.
Les courbes sont représentées ci-contre.

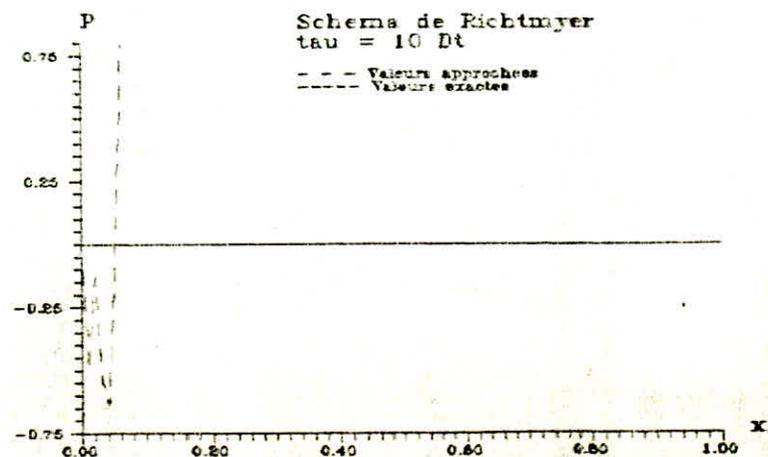
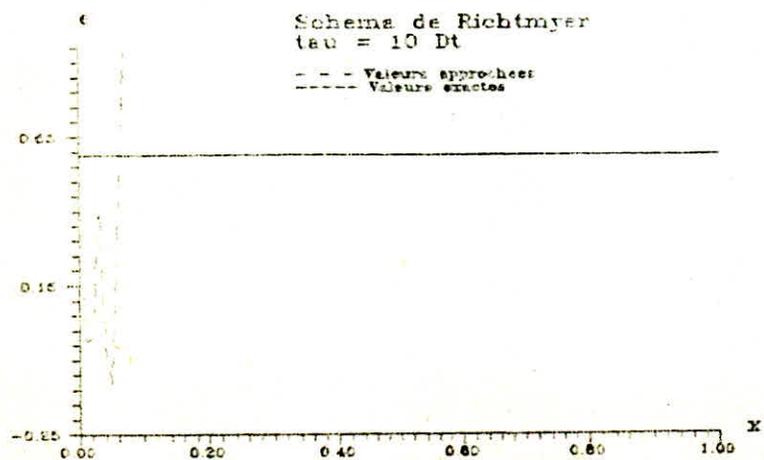
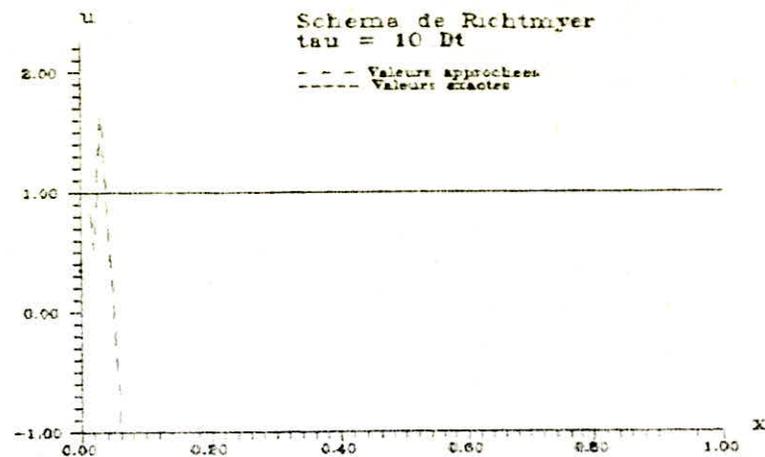
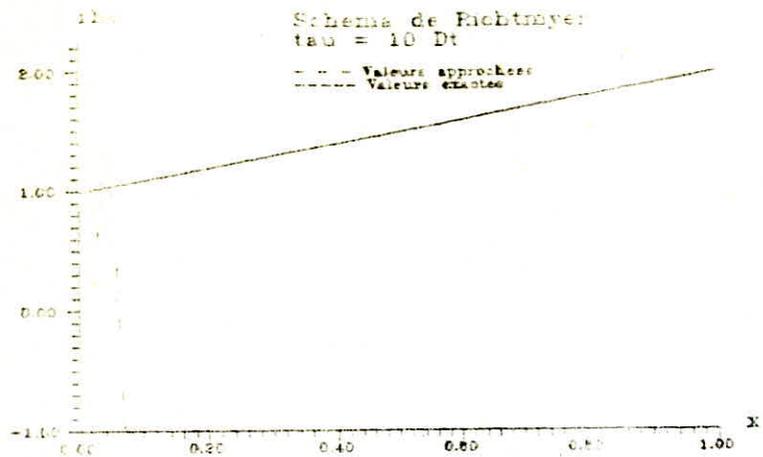
64

Deuxième cas



65

Deuxième cas



66

Deuxième cas

e

Schema de Mc Cormack
 $\tau = 9 \Delta t$

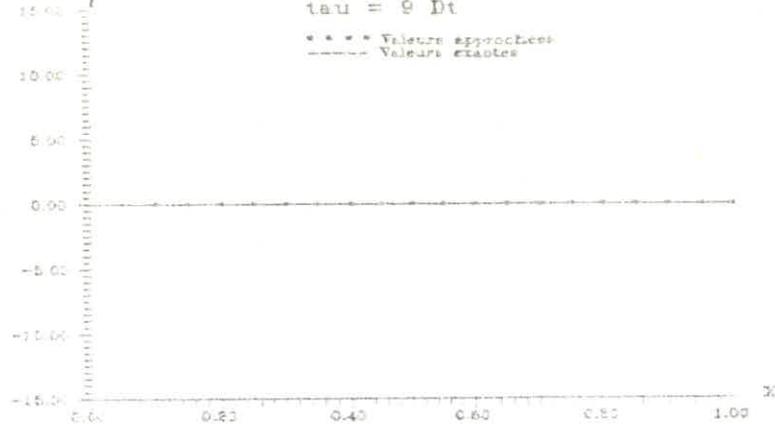
*** Valeurs approchées
----- Valeurs exactes



f

Schema de Mc Cormack
 $\tau = 9 \Delta t$

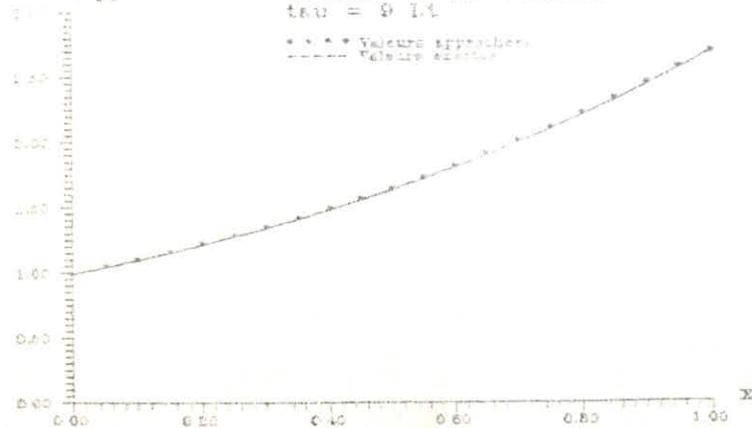
*** Valeurs approchées
----- Valeurs exactes



h0

Schema de Mc Cormack
 $\tau = 9 \Delta t$

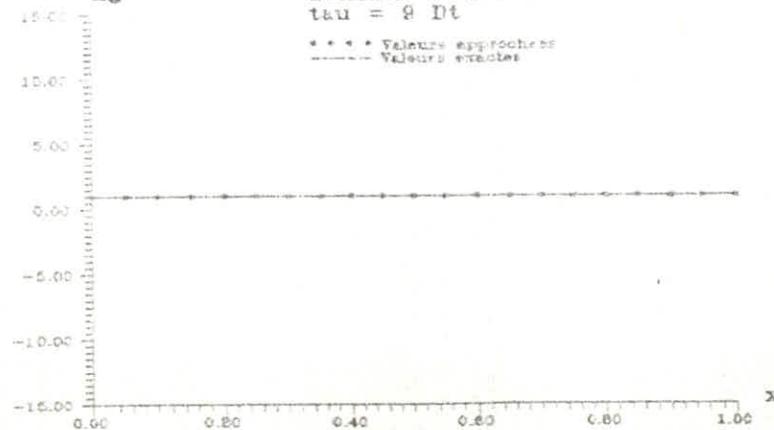
*** Valeurs approchées
----- Valeurs exactes



h1

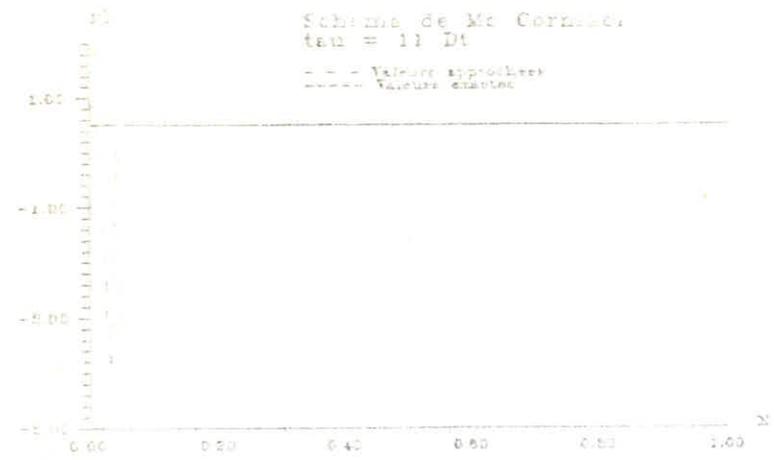
Schema de Mc Cormack
 $\tau = 9 \Delta t$

*** Valeurs approchées
----- Valeurs exactes



Schema de Mc Cornack
tau = 11 Dt

- - - Valeurs approchées
----- Valeurs exactes



Schema de Mc Cornack
tau = 11 Dt

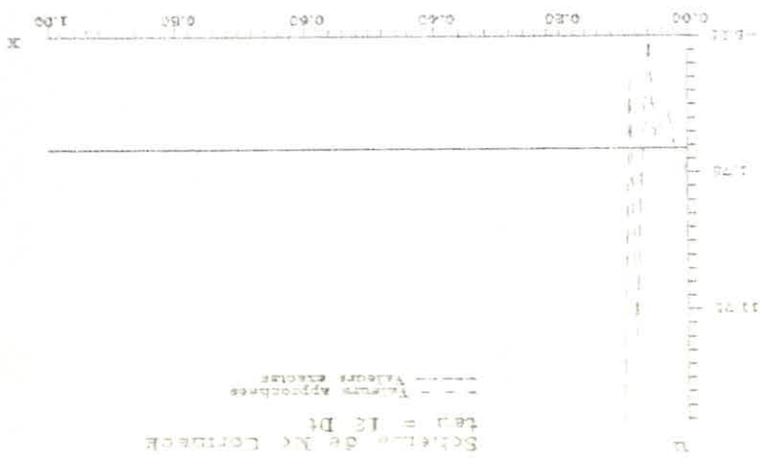
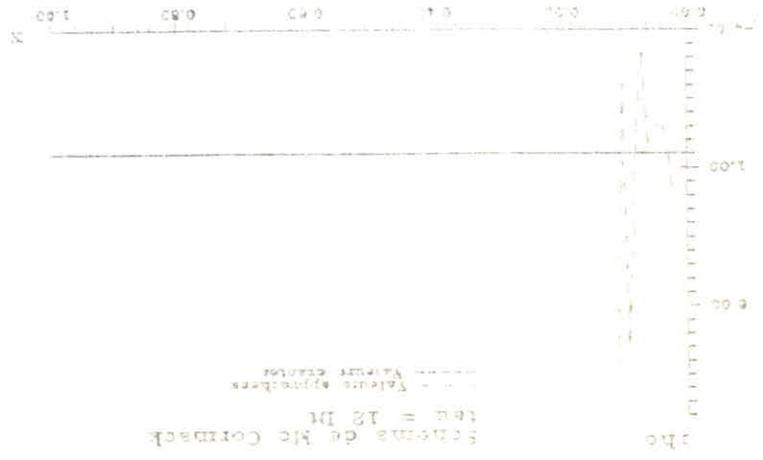
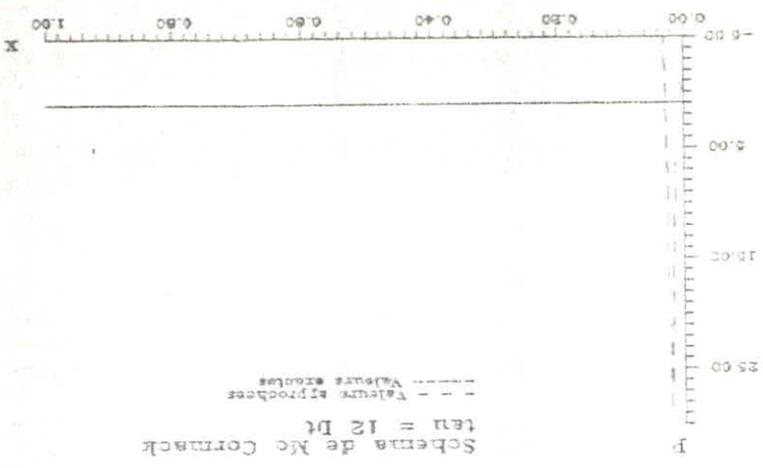
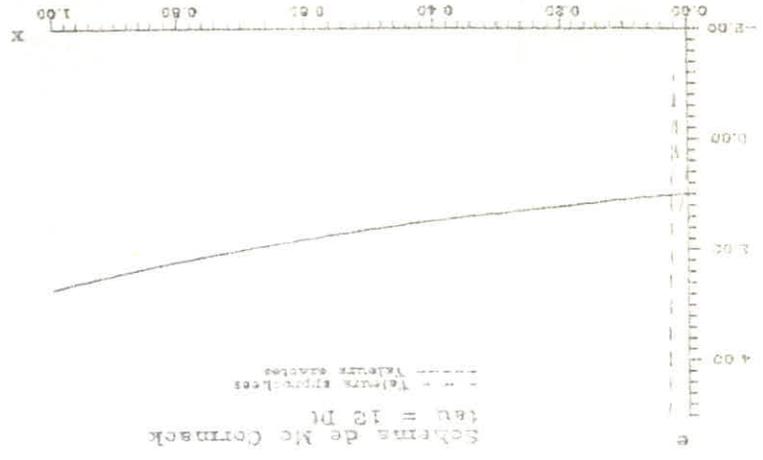
- - - Valeurs approchées
----- Valeurs exactes



67

Deuxième cas

Deuxième cas

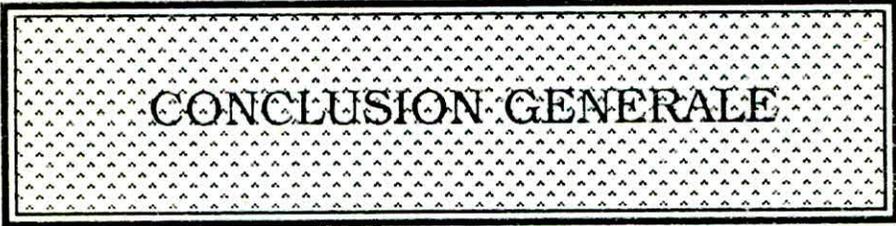


c-Analyse et commentaires :

Au vu des résultats obtenus, nous constatons que le schéma prédicteur-correcteur est meilleur que le schéma de Lax-Wendroff mais reste néanmoins instable. ceci est dû au fait que ce schéma semi-linéaire les équations de notre système.

3-Conclusion du chapitre:

Nous pouvons affirmer à la lumière des résultats obtenus, que le traitement numérique du modèle adopté nécessite l'utilisation de schémas qui restent vraiment non linéaires si l'on veut conserver les propriétés de la solution et mener des calculs dans le temps et dans l'espace . Nous pensons en particulier à la classe des schémas de GODUNOV.



CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Notre étude a porté sur deux axes : physique et numérique.

1)-Axe physique

Nous avons tenté de faire une synthèse bibliographique sur l'état de l'art . Nous avons pu ainsi mesurer la complexité des phénomènes qui interagissent dans ce type d'écoulement diphasiques et qui peuvent donner lieu à des problèmes mathématiques très compliqués dans les deux aspects: Mathématiques (existence et unicité de la solution, comportement de la solution, etc ..) et numérique (construction de méthodes adéquates ...). En toute état de cause, le domaine des écoulements diphasiques est un domaine qui n'a pas été finalisé, qui est pratiquement vierge et qui peut constituer une voie à explorer .

Nous pensons, dans le cadre de la modélisation, à une approche qui combine et l'approche stochastique et l'approche mathématique et ceci dans le but de garder le maximum d'informations sur l'état réel de l'écoulement diphasique.

2)-Axe numérique

Les méthodes numériques que nous avons testé (schémas de LAX-WENDROFF, schéma prédictor-correcteur) ont montrés leur faiblesse (problème de stabilité) à résoudre le modèle adopté qui est pourtant un modèle de base pour ce type d'écoulement. Il est donc essentiel surtout si l'on veut résoudre des cas plus concrets, de mettre en oeuvre des méthodes numériques plus robustes et plus efficaces qui tiennent compte surtout du caractère hyperbolique et non linéaire du système. Plusieurs voies sont possibles. Nous en citons deux:

- Soit continuer à résoudre le problème par des méthodes aux différences finies et dans ce cas il faut utiliser des méthodes du type GODUNOV bien que leur mise en oeuvre informatique soit difficile et coûteuse.
- Soit utiliser des méthodes d'éléments finis mixtes telles que celles utilisées par MONTAGNE (cf /8/)

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1-BERNIER.Y, "Quelque schémas numérique pour l'approximation des lois de conservations." These, Univ. Paris dophine, Janvier 1986.
- 2-DELHAYE., "Cours sur les écoulements diphasiques-Equation fondamentales" à l'institut politechnique de Grenoble.
- 3-HALPERNE.L., "Introduction à l'analyse numériques des équations différentielles ordinaires et des équations d'évolution linéaires." ENSTA 1985.
- 4-HUG.M., "Mécanique des fluides"
- 5-ISHII.M., "Thermo-fluid dynamic theory of two phase flow" Eyrolles, Paris 1985.
- 6-LEFLOCHE.PH., "Cntribution a l'étude théorique et a l'approximation numérique des systèmes hyperboliques non linéaires. Application de la dynamique des gaz." these. Ecole polytechnique, Paris, Janvier 1988.
- 7-LIONS.J.L., "Méthodes numériques pour les problèmes d'évolution."
Tome 3.
- 8-MONTAGNE.J.L., "Une application de la méthode des éléments finies mixtes au calcul bidimensionnel d'un fluide diphasique." These universite de Paris-sud, Orsay, Septembre 1981.
- 9-RAVIART.P.A., "Analyse numérique des systèmes des lois de conservation-problèmes d'évolution" Cours 1985.
- 10-TONG.L.S., "Boiling heat transfert and two-phase flow" New york 1975.
- 11-TOUMI.I., "Etude du problème de Riemann et construction de schémas numériques type GODUNOV multidimensionnelles pour des modèles d'écoulement diphasiques." These université de Paris VI, Juin 1989.
- 12-VEYSSEYRE.H., "Analyse numérique: Problème d'évolution" Cours à l'école centrale, Paris, 1989-1990.
- 13-WALLIS.G.B., "One dimensinal two-phase flow" Mc Graw Hill.
- 14-PARODY., " Mathématiques appliquées à l'art de l'ingénieur".

4