

5/87

50 F  
205

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES  
POUR L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

SUJET

**Calcul d'un écoulement  
méridien dans une roue  
mobile d'une pompe  
centrifuge**

Proposé par :  
Dr. A. THUMA

Etudié par :  
CHEBBOUB Med. R  
BOUZIANE D.

Dirigé par :  
Dr. A. THUMA

PROMOTION : JANVIER 1987

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi — EL-HARRACH — ALGER



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

## ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

**DEPARTEMENT** : GENIE HYDRAULIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE FIN D'ETUDES**  
POUR L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

**SUJET**

**Calcul d'un écoulement  
méridien dans une roue  
mobile d'une pompe  
centrifuge**

Proposé par :  
Dr. A. THUMA

Etudié par :  
CHEBBOUB Med. R  
BOUZIANE D.

Dirigé par :  
Dr. A. THUMA

PROMOTION : JANVIER 1987

Département : HYDRAULIQUE

Promoteur : Dr A.THUMA

Elève Ingénieur : CHEBBOUB Med Rezak  
BOUZIANE Djamel

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

مصححة : السري

موجه : د. أتوما

تلميذ مهندس : شوب محمد رزاق  
بوزيان جمال

الموضوع : دراسة سيلان ذي مسار منحنى ضمن عجلة  
متحركة لمضخة طاردة

الطلخص : يستهدف هذا المشروع اعداد دراسة عددية لسيلان ذي مسار  
منحنى ضمن عجلة متحركة لمضخة طاردة مع التركيز على متابعة  
هذا السيلان وتغيرات سرعته اثناء الظاهرة، وذلك قصد التأكد من مدى  
ملاءمة شكل العجلة لظروف السيلان مما يسمح فيها بعد باجراء التحسينات المناسبة

Sujet : ETUDE D'UN ECOULEMENT MERIDIEN DANS UNE ROUE MOBILE  
D'UNE POMPE CENTRIFUGE.

Résumé : Ce sujet a pour but, l'étude numérique de la coupe Méridienne d'une  
Roue Mobile d'une Pompe Centrifuge, en se basant essentiellement sur  
le déroulement de l'écoulement méridien et ses variations de vitesse  
durant le phénomène, afin de confirmer ou nier cette coupe et l'améli-  
orer pour permettre la recherche de la meilleur.

Subject : Study of a meridian flowing in a mobil wheel  
of centrifugal pump.

Abstract : A numerical study of a meridian of an impeller of centrifugal pump  
is proposed. This study has been essentialy based on the unroll of  
meridian flowing and his speed's variations during the phénomène, in  
order to confirm or, to deny this form and do another better than  
this.

By this way, we permit the search of the best.

## REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Nous tenons à remercier monsieur ANTAL THUMA pour son aide précieuse, messieurs les membres de jury qui auront l'honneur d'apprécier ce travail, tous les enseignants qui ont contribué à nos formations.

Que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce projet, trouvent ici nos sincères gratitude.

D. BOUZIANE et Med. R. CHEBBOUB

## DEDICACES

Je dedie ce travail à toute ma famille et  
mes amis

Med- R. CHEBBOUB

Je dedie ce travail à toute ma famille et  
mes amis

D. BOUZIANE

# SOMMAIRE

## INTRODUCTION

- 1 THEORIE DES ROUES DES POMPES CENTRIFUGES
  - 1.1 TRIANGLES DES VITESSES
  - 1.2 HAUTEUR THEORIQUE DES POMPES CENTRIFUGES
  - 1.3 ECOULEMENT REEL DANS LA ROUE
  - 1.4 COEFFICIENT DE DEFAUT DE PUISSANCE
  - 1.5 PERTES
  - 1.6 RENDEMENTS
  
- 2 CONSTRUCTION D'UNE ROUE MOBILE
  - 2.1 DIMENSIONS PRINCIPALES
    - 2.1.1 PARAMETRES DE SORTIE
    - 2.1.2 PARAMETRES D'ENTREE
  - 2.2 CALCUL DE  $b_2$  ET  $D_2$
  - 2.3 CALCUL DE LA COUPE MERIDIENNE
  - 2.4 CALCUL DE L'AUBAGE A PARTIR D'UNE VITESSE MERIDIENNE DONNEE
  - 2.5 REMARQUE IMPORTANTE
  
- 3 METHODE DE RELAXATION " GAUSS-SAIDEL "
  - 3.1 RESOLUTION DE L'EQUATION DE LAPLACE (CAS D'UN ECOULEMENT PARFAIT)
  - 3.2 RESOLUTION DE L'EQUATION DE POISSON (CAS D'UN ECOULEMENT ROTATIONNEL)
  - 3.3 APPLICATION A UN ECOULEMENT DE REVOLUTION (CAS D'UN ECOULEMENT MERIDIEN)
  
- 4 REALISATION D'UN PROGRAMME INFORMATIQUE POUR LE CALCUL D'UN ECOULEMENT MERIDIEN
  - 4.1 FONCTION DE COURANT A L'ENTREE
  - 4.2 ROTATIONNEL A L'ENTREE
  - 4.3 DETERMINATION DES POINTS DE RELAXATION (ETOILE NORMALE, ETOILE TROUPE)

4.4 CONDITIONS AUX LIMITES

4.5 RELAXATION D'UN POINT A L'INTERIEUR

4.6 RELAXATION A LA SORTIE

4.7 DESCRIPTION DU PROGRAMME

5 CALCULS

5.1 RESULTATS CORRESPONDANTS A LA COUPE MERIDIENE DONNEE

5.2 DISCUSSION DES RESULTATS

5.3 MODIFICATION DE LA COUPE MERIDIENNE

CONCLUSION

---

## INTRODUCTION

La construction d'une pompe s'opère en se basant sur:

- La quantité d'eau que la pompe doit débiter
- La hauteur à laquelle celle-ci est élevée
- La vitesse de rotation également imposée

La méthode la plus pratique consiste à construire pour une pompe déjà existante son organe le plus important qui est la roue mobile.

En première partie, la coupe méridienne est calculée en utilisant une répartition de vitesse méridienne supposée uniforme puis sur cette coupe on applique la méthode de relaxation en utilisant à l'entrée de la roue une répartition de vitesse réelle et avec cette méthode nous pouvons connaître la vitesse en chaque point de la coupe et par conséquent nous déterminons les régions dangereuses dans lesquelles nous devons modifier la forme de la coupe de telle façon qu'elle soit vraiment convergente (pertes de charges sont négligeables), et qui correspond à un bon rendement de la pompe.



# THEORIE DES ROUES DES POMPES CENTRIFUGES

## TRIANGLE DES VITESSES

L'étude la plus commode des diverses composantes des vitesses de l'écoulement dans une roue s'effectue graphiquement à l'aide des vecteurs représentant les vitesses. La forme de ces diagrammes de vecteurs est triangulaire et ils s'appellent "triangles de vitesses". Ils peuvent être tracés pour n'importe quel point du filet liquide à travers la roue; mais d'habitude on porte d'avantage l'attention sur l'entrée et la sortie de aubes de la roue mobile et les triangles de vitesses sont appelés triangle d'entrée et de sortie.

On distingue les trois vitesses :

$\vec{c}$  : La vitesse absolue de l'écoulement par rapport au corps de la pompe.

$\vec{w}$  : La vitesse relative de l'écoulement considérée par rapport à la roue.

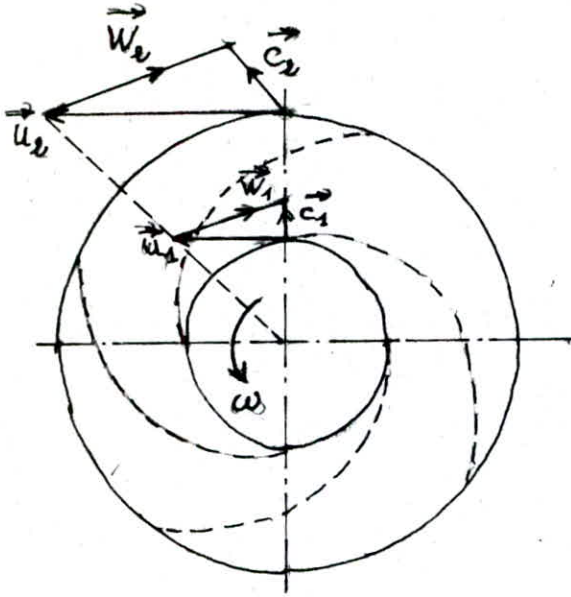
$\vec{u}$  : La vitesse d'entraînement de la roue =  $\frac{\pi D n}{60}$

La roue mobile tourne à la vitesse angulaire  $\omega$ . On affectera l'indice 1 à l'entrée et l'indice 2 à la sortie de la roue.

NOTES : \* La vitesse absolue  $\vec{c}$  possède deux composantes :

- une méridienne  $C_m$
- l'autre tangentielle  $C_u$

\* Toutes les vitesses sont des vitesses moyennes pour la section normale à la direction de l'écoulement.



(Triangles de vitesses à l'entrée et à la sortie d'une pompe)

## HAUTEUR THEORIQUE DES POMPES CENTRIFUGES

On obtient une expression de la hauteur théorique d'une pompe centrifuge en appliquant le théorème du moment cinétique à la masse de liquide traversant les canaux de la roue.

D'où la formule de la hauteur théorique :

$$H_{th} = \frac{c_{2u} \cdot u_2 - c_{1u} \cdot u_1}{g}$$

Si on suppose théoriquement le nombre d'aubes  $N$  est infini. Selon le principe d'Euler la hauteur théorique infinie est aussi donnée par

$$H_{th\infty} = \frac{c_{2u} \cdot u_2 - c_{1u} \cdot u_1}{g}$$

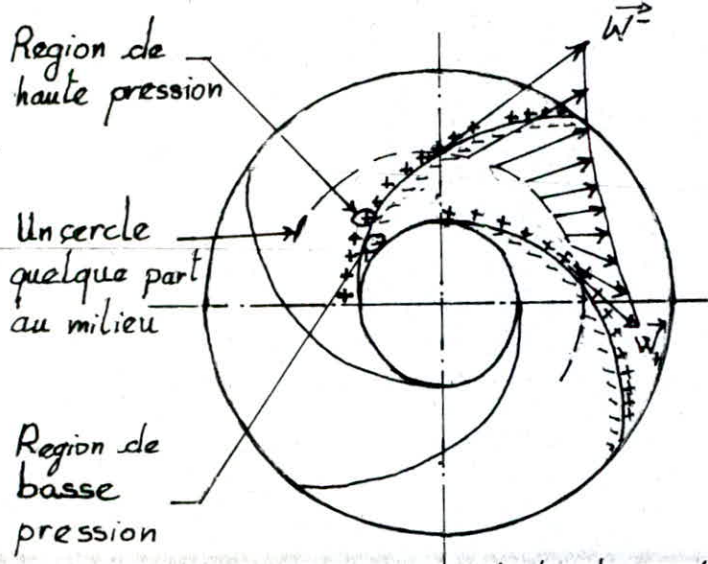
Si le liquide arrive sans prérotation la composante tangentielle de la vitesse absolue est nulle ( $c_{1u} = 0$ )

## ECOULEMENT REEL DANS LA ROUE

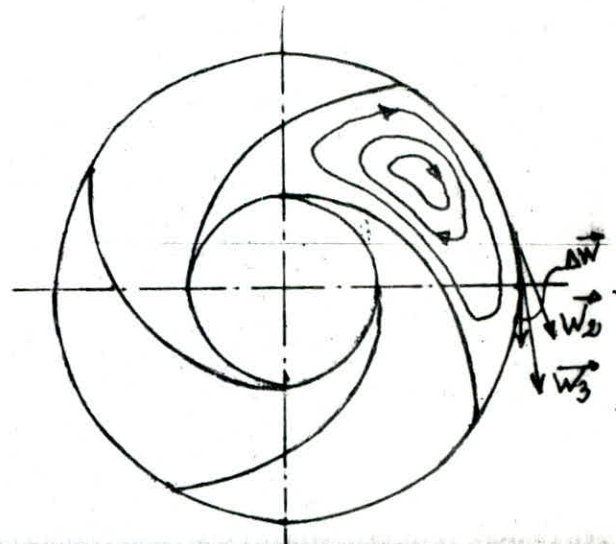
A l'intérieur de la roue, le liquide n'est soumis qu'à un seul excès de pression qui pourra le véhiculer et par conséquent

Les aubes ne peuvent pas lui appliquer la puissance nécessaire pour produire la hauteur d'Euler et ce pour les raisons suivantes :

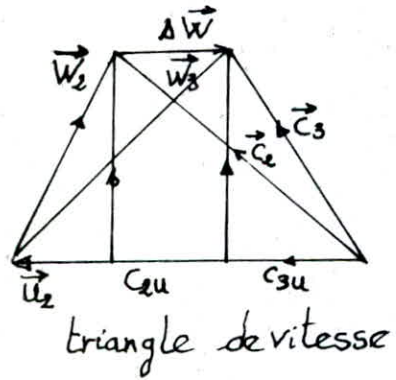
- La repartition de pression de part et d'autre de l'aube n'est pas la même
- La repartition de vitesse est aussi
- Les tourbillons relatifs



(Repartition de pression et de vitesse à l'intérieur de la roue)



(Tourbillons relatifs)



triangle de vitesse

Indice 2 : Aubage infini  
Indice 3 : Aubage fini

$$H_{th} = \frac{c_{3u} \cdot u_2}{g} \quad (c_{1u} = 0)$$

$$H_{th00} = \frac{c_{2u} \cdot u_2}{g}$$

COEFFICIENT DE DEFAUT DE PUISSANCE

Défini par :

$$\lambda = \frac{H_{th}}{H_{th00}}$$

## PERTES

Toutes la hauteur d'une pompe centrifuge est produite par la roue, les autres parties de la pompe ne contribuent en aucune façon à la production de hauteur mais provoquent des pertes inevitables; on distingue trois sortes de pertes:

- pertes de charge : Toutes ces pertes qui se produisent entre les points où les pressions d'aspiration et de refoulement constituent les pertes hydrauliques. Elle comprennent les pertes dues aux frottements des parois le long du filet liquide de l'aspiration au refoulement, les pertes dues à des tourbillons quelques soient leurs causes.

- A côté des pertes de charge il existe dans chaque pompe des pertes de debits qu'on appelle perte par fuite (ou volumetrique)

- Les pertes mecaniques comprennent les pertes de puissance dans les paliers, les presse-étoupes et frottement de disque cette derniere perte est de nature hydraulique mais se trouve classée dans les pertes mecaniques du fait quelle ne depend pas du debit dans la roue et quelle ne provoque pas de perte de charge.

## RENDEMENTS

Chaque type de pertes, diminue alors ce qu'on appelle rendement de la pompe.

- rendement hydraulique: Aux pertes hydrauliques correspond un rendement hydraulique, est definit comme le rapport de la hauteur d'elevation nette à la hauteur theorique

$$\eta_h = \frac{H}{H_{th}} = \frac{H_{th} - \text{Pertes hydrauliques}}{H_{th}}$$

- Rendement mécanique : Est le rapport de la puissance absorbée par la roue est convertie en hauteur à la puissance sur l'arbre.

$$\eta_m = \frac{\text{Puissance sur l'arbre}}{\text{puissance sur l'arbre} + \text{pertes mecaniques}}$$

- Rendement volumétrique : Le débit disponible au refoulement de la pompe est inférieur à celui qui traverse la roue de la quantité perdue par fuite. Le rapport des deux débits est appelée rendement volumétrique.

$$\eta_v = \frac{Q}{Q_r} = \frac{Q}{Q + Q_f}$$

Où  $Q_f$  : est débit de fuite.

La relation entre les rendements partiels définis ci-dessus et le rendement globale  $\eta$  qui est exprimé par le produit des trois

$$\eta = \eta_h \times \eta_m \times \eta_v$$

## CONSTRUCTION D'UNE ROUE MOBILE

C'est la détermination précise de toutes les caractéristiques géométriques de l'appareil. Un certain nombre pourront être fixés arbitrairement.

### DIMENSIONS PRINCIPALES

Les caractéristiques principales  $H$ ,  $Q$  et  $n$ , de la roue ayant été fixées. Les caractéristiques sont liées entre elles par la relation :

$$nq = n \cdot Q^{1/2} H^{3/4}$$

Où :  $nq$  : est le nombre de tour spécifique.

$n$  : vitesse de rotation de la roue [trs/mn]

$Q$  : Le débit [ $m^3/sec$ ]

$H$  : La hauteur [m]

Par conséquent tous les paramètres de la roue ne dépendent que de  $nq$  et ne seront calculés qu'à la base de la formule ci-dessus.

### 1 - PARAMETRES DE SORTIE

a - Diamètre d'entrée : Les deux diamètres à la sortie et à l'entrée sont liés par la relation basée sur les expériences établies par STEPANOFF sous forme d'un rapport des deux diamètres en fonction de  $nq$  donné par un abaque.

$$\frac{D_{10}}{D_2} = 0,25 + 0,00853 nq - 0,00541 nq^2 + 2,39 \cdot 10^{-7} nq^3 - 4,48 \cdot 10^{-10} nq^4$$

## b - AUBAGE :

Il est fonction de de grandeures :

- Le nombre d'aube  $N$  qui ne depend generalement que de la vitesse specifique. Selon STEPANOFF, on doit prendre empiriquement les valeurs 5, 7 ou 9 representé sur un abaque

- L'angle de l'aubage caracterisant la forme de celui-ci a la sortie de la roue ; il est fonction de  $nq$  ( $\beta_{2m} = f(nq)$ ) et il est representé sur un abaque.

## c - COEFFICIENT DE VITESSE A LA SORTIE

Il caracterise la vitesse meridienne a la sortie ( $c_{2m}$ ), il est fonction de  $nq$ . On le note  $K_{2m} = f(nq)$  et il est representé sur un abaque de STEPANOFF

## d - RENDEMENT STANDARD

Il est representé experimentalement en fonction de  $n$ ,  $nq$  et  $Q$  par un abaque de HADJU

## e - RENDEMENT VOLUMETRIQUE

Il caracterise le debit et il est fonction de ce dernier et de  $nq$ . ( $\eta_v = f(Q, nq)$ ).

## f - RENDEMENT HYDRAULIQUE

En raison de precision, il est estimé en fonction du rendement standard par CZIBERE d'après la formule :

$$\eta_h = \sqrt{\eta_{st}}$$

## g - PUISSANCE TOTALE DE LA ROUE

C'est la puissance arrivant à l'arbre et doit assurer la puissance utile qui doit sortir l'eau. Elle dépend du liquide, de son débit et de sa hauteur d'élevation.

$$P_t = \frac{\rho g H Q}{\eta_{st}}$$

h - COEFFICIENT DE DEFAT DE PUISSANCE :

Il est caractérisé, selon PFLEIDERER, par le nombre d'aubes et par la nature de l'écoulement

$$\lambda = \frac{N}{N + e} \quad \text{avec ;} \quad e = \psi' a$$

$$\psi' = 0,6 + 0,6 \sin \beta_{20}$$

$$a = \frac{e}{1 - \left(\frac{D_{1e}}{D_2}\right)^2}$$

Où :  $\lambda$  : coefficient de défaut de puissance

N : nombre d'aube

e : caractéristique de l'écoulement

i - PAS DE L'AUBAGE

Il représente la longueur d'arc, le long de laquelle s'étend l'aubage.

$$t_2 = \frac{D_2 \cdot \pi}{N}$$

Où

$t_2$  : pas de l'aubage

N : Nombre d'aubes

$D_2$  : Diamètre extérieur de la roue

j - COEFFICIENT DE RETRICISSEMENT A LA SORTIE



IL caractérise la forme de l'aubage à la sortie, dépend de l'épaisseur d'aube et du pas de l'aubage.

$$Y_2 = \frac{t_2 - \sigma_2}{t_2}, \quad \text{avec} \quad \sigma_2 = \frac{s}{\sin \beta_2}$$

Où :  $s$  : épaisseur d'aube  
 $\beta_2$  : angle de sortie de l'écoulement donnée par

$$\beta_2 = \text{Arctg} \frac{C_{2m}}{u_2 - C_{2u}}$$

#### k - COEFFICIENT DE DEBIT ET DE PRESSION

Le rapport de la vitesse méridienne de sortie et la vitesse d'entraînement  $u_2$  est appelé alors coefficient de débit, on le note :

$$Y_{th} = \frac{C_{2m}}{u_2} \quad \text{avec} \quad C_{2m} = K_{2m} \sqrt{2gH}$$

La hauteur théorique et la hauteur théorique infinie sont reliées par :

$$H_{th} = \lambda H_{th\infty}$$

Et la hauteur réelle en tenant compte du rendement hydraulique est :

$$H = \eta_h \cdot H_{th}$$

En remplaçant on obtient

$$Y_{th} = K_{2m} \sqrt{\eta_h \cdot \lambda \cdot \frac{2gH_{th\infty}}{u_2^2}}$$

Posons  $Y_{th\infty} = \frac{2gH_{th\infty}}{u_2^2}$  définit comme le coefficient de pression

D'où

$$\varphi_{th00} = K_{em} \sqrt{\eta_h \cdot \lambda \cdot \varphi_{th00}}$$

Caractérisant l'écoulement pour un aubage infini

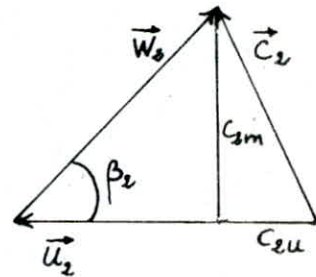
Des triangles des vitesses à la sortie, on déduit géométriquement:

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{c_{2m}}{u_2 - c_{2u}} = \frac{c_{2m}/u_2}{1 - c_{2u}/u_2}$$

On : 
$$H_{th} = \frac{c_{2u} \cdot u_2}{g}$$

$$\frac{c_{2m}}{u_2} = \frac{g \cdot H_{th}}{u_2^2}$$

$$\frac{c_{2u}}{u_2} = \frac{\varphi_{th}}{2}$$



(triangle de vitesse à la sortie)

D'où :

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\varphi_{th}}{1 - \frac{\varphi_{th}}{2}} \Rightarrow \varphi_{th} = 2 \left( 1 - \frac{\varphi_{th}}{\operatorname{tg} \beta_2} \right)$$

Avec cette dernière valeur de  $\varphi_{th}$ , l'expression de  $\varphi_{th}$  sera:

$$\varphi_{th} = K_{em} \sqrt{\eta_h \cdot \lambda \cdot 2 \left( 1 - \frac{\varphi_{th}}{\operatorname{tg} \beta_2} \right)}$$

On élève les deux membres de l'équation au carré et en développant on obtient :

$$\operatorname{tg} \beta_2 \cdot \varphi_{th}^2 + K_{em}^2 \cdot \lambda \cdot 2 \cdot \eta_h \cdot \varphi_{th} - K_{em}^2 \cdot \eta_h \cdot \lambda \cdot \operatorname{tg} \beta_2 = 0$$

On pose  $A = 2 \cdot \lambda \cdot K_{em}^2 \cdot \eta_h$

D'où 
$$\operatorname{tg} \beta_2 \cdot \varphi_{th}^2 + A \varphi_{th} - A \operatorname{tg} \beta_2 = 0$$

Equation du second degré par rapport à  $\psi_{th}$ , dont les racines sont les valeurs de  $\psi_{th}$ , parmi lesquelles on ne prend que la valeur positive, tel que:

$$\psi_{th} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{A}{\operatorname{tg} \beta_2} + \sqrt{\left(\frac{A}{\operatorname{tg} \beta_2}\right)^2 + 4A} \right]$$

D'où on peut déduire la valeur de  $\psi_{th}$

Pour le fonctionnement réel de la machine, le rendement hydraulique est très important, le coefficient réel relatif à ce rendement sera:

$$\psi = \eta_h \cdot \psi_{th}$$

Et par analogie, le coefficient de débit sera:

$$\varphi = \eta_v \cdot \psi_{th}$$

## 2 - PARAMETRES D'ENTREE

Calcul du point de vue résistance

### a - DIAMETRE DE L'ARBRE

Dans un premier temps on considère la puissance totale  $P_t$  comme une charge unique; on aura pour l'acier normal:

$$d_o = 12 \sqrt[3]{P_t / n}$$

Au cours de la construction la roue étant soumise à une force axiale et une autre radiale et de ce fait la charge  $P_t$  sera augmentée de 20 ÷ 30%, et la valeur définitive du diamètre de

l'arbre sera :

$$d_a = 1,25 d_o$$

### b - DIAMETRE DU MOYEU

Afin de laisser un certain espace au clavier on augmente le diamètre de l'arbre de 20 ÷ 40 %, et on a ce qu'on appelle diamètre du moyeu du point de vue résistance.

$$d_m = 1,3 d_a$$

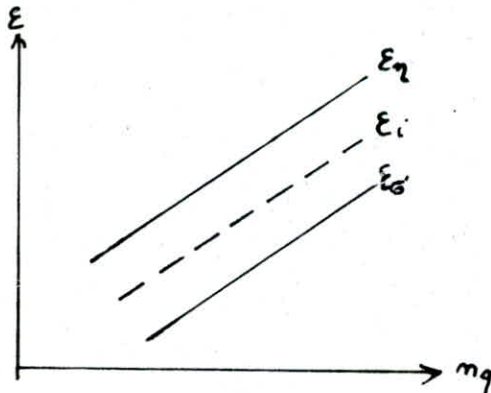
Calcul du point de vue hydraulique

### a - COEFFICIENT DE VITESSE D'ENTREE

La vitesse à l'entrée est donnée par :

$$C_e = \varepsilon \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$$

; avec  $\varepsilon$  : coefficient de vitesse d'entrée



$\varepsilon_\eta$  : est défini du point de vue rendement

$\varepsilon_\sigma$  : est défini du point de vue fonctionnement du point de vue cavitation

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_\eta + \varepsilon_\sigma}{2}$$

Au début une valeur approximative de  $\varepsilon$  telle que

$$\varepsilon = 0,015 \eta_g^{2/3}$$

Si l'erreur relative entre  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_i$  est inférieure à 1% alors on prend la valeur de  $\varepsilon$  comme coefficient de vitesse à l'entrée.

CALCUL DE  $b_2$  ET  $D_2$ 

a. L'ARGEUR A LA SORTIE DE LA ROUE ;  $b_2$

Nous avons déjà déterminé les coefficients de débits et de pression  $\varphi$  et  $\psi$ , et avec les deux derniers, nous calculons la largeur de la roue de la roue, et qu'on la désigne par  $b_2$ .

Le débit interne est donné par :

$$Q_i = \eta_v \cdot Q = \eta_v \cdot \pi D_2 b_2 C_{2m} \varphi_e \quad (1)$$

La hauteur est aussi donnée par :

$$H = \eta_h \cdot H_{th} \quad (2)$$

Et les coefficients  $\varphi$  et  $\psi$  sont donnés par :

$$\varphi = \eta_v \cdot \varphi_{th} \quad (3)$$

$$\text{avec, } \varphi_{th} = \frac{C_{2m}}{u_2} \quad (4)$$

$$\psi = \eta_h \cdot \psi_{th} \quad (5)$$

$$\text{avec, } \psi_{th} = 2 \cdot \frac{C_{2t}}{u_2} = 2 \cdot \eta_h \frac{g \cdot H_{th}}{u_2^2} \quad (6)$$

Des équations (1), (3) et (4), nous tirons une expression du débit  $Q$  :

$$Q = \varphi \cdot \pi \cdot D_2 \cdot b_2 \cdot u_2 \cdot \varphi_e$$

Des équations (2), (5) et (6), nous tirons aussi une expression de la hauteur  $H$  ;

$$H = \psi \cdot \frac{u_2^2}{2g}$$

En remplaçons dans la relation  $\eta_g = \eta \cdot Q^{1/2} \cdot H^{-3/4}$ , chacun des débit et la hauteur par les expressions trouvées ; Nous obtenons l'expression de la largeur à la sortie de la roue :

$$b_2 = \frac{\eta_g^2 D_2 \psi^{1,5}}{315,5^2 \psi \psi_2^2} \quad (\text{I})$$

b - DIAMETRE EXTERIEUR DE LA SOUE ;  $D_2$

Le coefficient de pression est défini par :

$$\psi = \frac{2g \cdot H}{u_2^2} \quad (1)$$

Et STEPANOFF établit la formule pour  $\psi$  telle que :

$$\psi = \left( \frac{300}{270 + \eta_g} \right)^{3/4} \quad (2)$$

Et la vitesse d'entraînement est donnée aussi par

$$u_2 = \frac{D_2 \cdot \pi \cdot n}{60} \quad (3)$$

En combinant les équations (1), (2) et (3), Nous tirons l'expression de  $D_2$  :

$$D_2 = \frac{60}{\pi n} \left( \frac{2gH}{\psi} \right) \quad (\text{II})$$

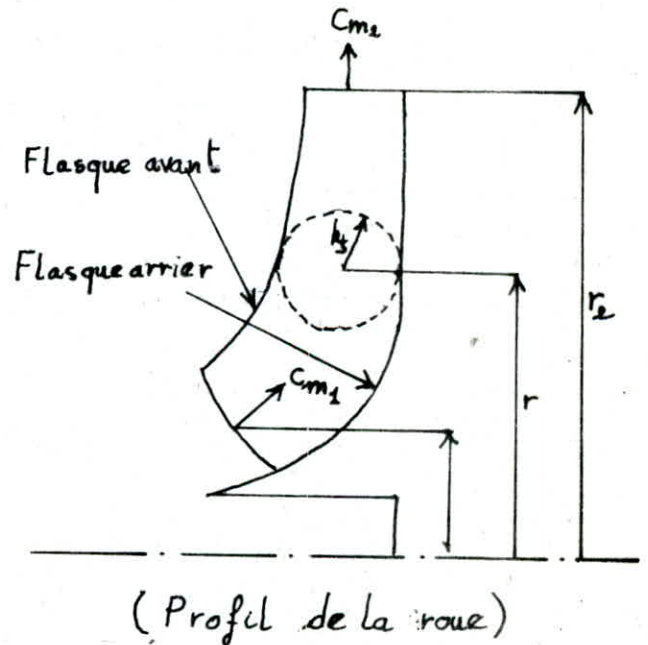
## CALCUL DE LA COUPE MERIDIENNE

Le profil de la roue est tracé pour les vitesses méridiennes calculées respectivement à l'entrée et à la sortie, d'une façon que le passage de  $c_{m1}$  à  $c_{m2}$  se fait graduellement. On aura alors, une vitesse linéaire définie par:

$$c_m = \frac{c_{m2} - c_{m1}}{r_2 - r_1} (r_2 - r_1) + c_{m1}$$

Où  $r_1$  et  $r_2$  sont les rayons à l'entrée et à la sortie.  $r$  représente la position de l'aubage en chaque point de la ligne de courant méridienne à travers la roue donné par:

$$r = \left( \frac{r_2 - r_1}{10} \right) i + r_1$$



Où  $i$  est le nombre de points le long de la coupe. Chaque point de la coupe définit un cercle de rayon  $k_s$  variable linéairement avec  $r$ , il est fonction du pas de l'aubage,

de son épaisseur, et du coefficient de retrécissement en chaque point et qui sont définis respectivement par  $t$ ,  $\sigma$  et  $\psi$

$$\text{Avec } t = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{N} \quad ; \quad \sigma = S/A$$

Où  $A$ : coefficient caractérisant l'aube en chaque point  $i$ , il est donné par:

$$A = \sin \left[ \frac{\beta_{200} - \beta_1}{10} + \beta_1 \right]$$

Et le coefficient de retrécissement par:

$$\psi = \frac{t - \sigma}{t}$$

Et le rayon  $k_s$  par:

$$k_s = \frac{Q}{4 \eta_v c_m r \pi \psi}$$

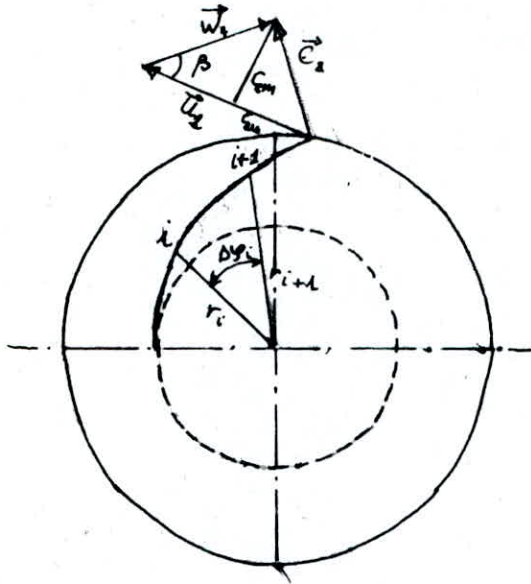
La largeur d'entrée correspondante est:

$$b = 2 \cdot k_s$$

### CALCUL DE L'AUBAGE A PARTIR D'UNE VITESSE MERIDIENNE DONNEE

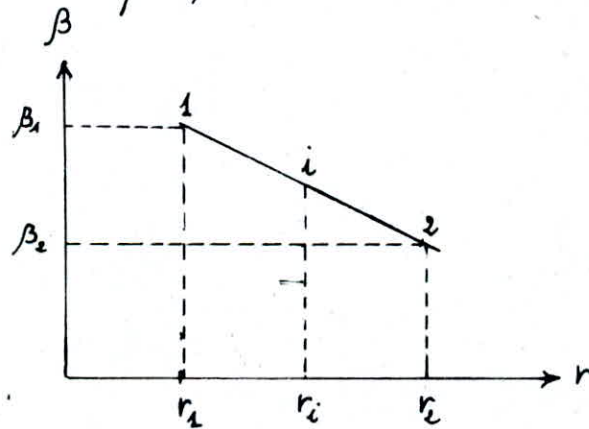
En coordonnées polaires chacun des points  $i$  de l'aube est défini par un angle ( $\varphi_i$ ) et un rayon ( $r_i$ )





D'après le triangle de vitesse, on a:  $\operatorname{tg} \beta = \frac{C_m}{u - cu}$

Ce qui nous montre que  $\beta$  varie linéairement avec  $r$ :



D'où on pourra écrire par interpolation :

$$\beta(r_i) = \frac{\beta_2 - \beta_1}{r_2 - r_1} (r_i - r_1) + \beta_1$$

Soit  $N$  le nombre de points servant au tracé de l'aube  $N = 10, 20, \dots$

On définit l'écart de rayon par :  $\Delta r = \frac{r_2 - r_1}{N - 1}$

D'où la relation entre les rayons successifs :

$$r_{i+1} = r_i + \Delta r$$

Et,

Et pour l'angle on aura :

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta \varphi_i \quad \text{Où} \quad \Delta \varphi_i = \frac{\Delta r}{r_i \cdot \operatorname{tg} \beta_i}$$

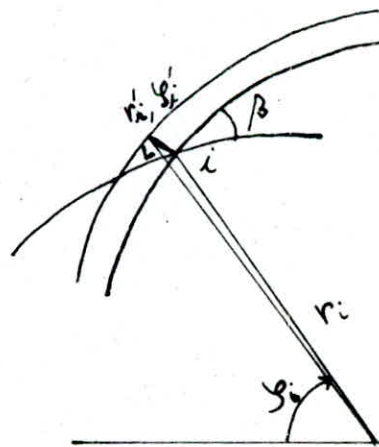
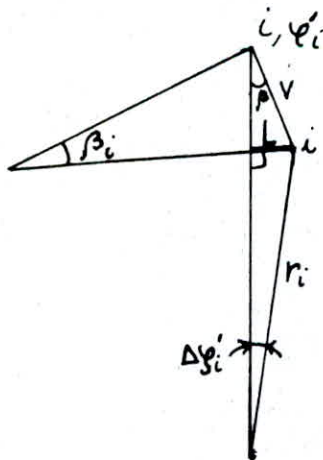
$(r_i, \varphi_i)$  sont les coordonnées polaires de chaque point  $i$

Comme l'aube présente une certaine épaisseur donc  $r_i$  et  $\varphi_i$  sont les coordonnées de la partie inférieure; ceux de la partie supérieure sont :

$$r'_i = r_i + v \cos \beta_i$$

$$\varphi'_i = \varphi_i - \Delta \varphi'_i \quad ; \quad \Delta \varphi'_i = \frac{L}{S} = \frac{S \cdot \sin \beta_i}{r_i}$$

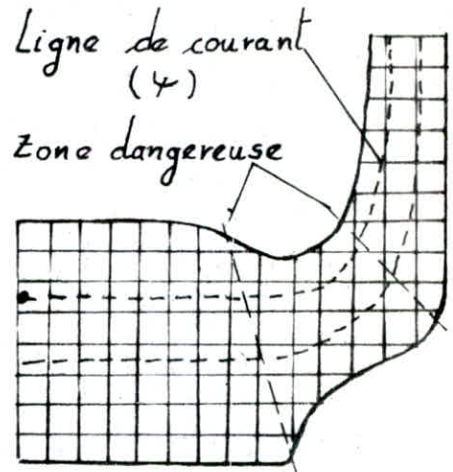
Sur le schéma on a :



## REMARQUE IMPORTANTE

Du triangle de vitesse on a:  $\operatorname{tg} \beta = \frac{C_m}{u - C_u}$

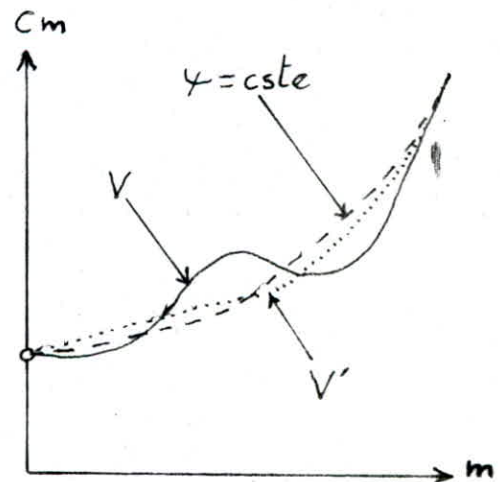
$\beta$  varie linéairement avec  $r$ , elle est fonction de la vitesse méridienne  $C_m$ , cette dernière est calculée en supposant que le passage de  $c_{m1}$  à  $c_{m2}$  se fait graduellement (linéaire). Et en utilisant cette supposition on peut calculer une première forme de la coupe méridienne.



(fig. 1)

L'étude réelle de l'écoulement dans cette coupe montre que les lignes de courant se présentent comme c'est indiqué sur la figure 1

Et connaissant qu'il ya une relation entre les lignes de courant et les vitesse; Nous remarquons que dans la zone dangereuse sur une ligne de courant ( $\psi = \text{cste}$ ) la courbe de vitesse ( $V$ ) est très variable et de ça nous modifions la forme de la coupe où la courbe de vitesse présente une grande perturbation de telle façon qu'elle nous donne une courbe de vitesse ( $V'$ ) plus régulière et qui ne présente pas des variations brusques, voir figure 2



(fig. 2)

$m$ : longueur cumulée

# METHODE DE RELAXATION "GAUSS - SEIDEL"

## PROBLEMES A DEUX DIMENSIONS

EQUATIONS DE BASE DECRIVANT UN ÉCOULEMENT QUELCONQUE

- Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (1)$$

- Equation de quantité de mouvement de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}}{dt} &= \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} - \vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} \\ &= -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + g + \nu \Delta \vec{V} \end{aligned} \quad (2)$$

La dernière equation est valable pour un écoulement en régime laminaire ; la masse volumique  $\rho$  et la viscosité sont constantes. Elle n'est pas valable pour les cas des fluides non Newtoniens et pour le calcul des couches limites.

En les développant pour les deux dimensions

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{V}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_x + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g_y + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

Les trois equations (3), (4) et (5) theoriquement rendent la solution pour les trois inconnues :

$$V_x(x, y, t) ; V_y(x, y, t) \text{ et } p(x, y, t)$$

En tenant compte des conditions aux limites et les conditions initiales, elles sont reellement trouvables.

## CAS D'UN ECOULEMENT PARFAIT

Soit :  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$  ;  $\vec{g} = \vec{0}$

Les suppositions  $\rho = \text{constante}$  et  $\nu = 0$  simplifient les équations (3), (4) et (5)

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (8)$$

Les fonctions  $V_x(x, y)$ ,  $V_y(x, y)$  et  $p(x, y)$  sont inconnues. ces fonctions doivent satisfaire les mêmes conditions aux limites, c'est à dire elles ne doivent pas être en contradiction avec les conditions aux limites

Si  $\text{rot } \vec{V} = 0$ , alors la vitesse peut être dérivée d'un potentiel de vitesse :

$$\vec{V} = \text{grad } \varphi$$

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (9)$$

$$V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (10)$$

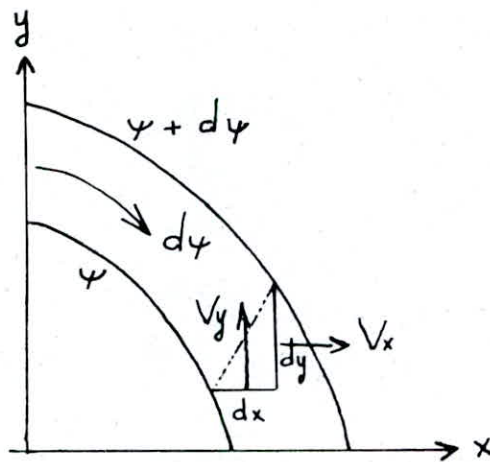
Où  $\varphi(x, y)$  est le potentiel de vitesse, on peut dire : L'écoulement est potentiel

En remplaçant  $V_x$  et  $V_y$  dans (6), on a :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (11)$$

C'est l'équation de LAPLACE sans second membre

## FONCTION DE COURANT



En se déplaçant sur une ligne de courant de l'écoulement la fonction  $\psi(x, y)$  reste constante

Selon la figure, on peut écrire :

$$d\psi = V_x dy - V_y dx \quad (12)$$

mais

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (13)$$

En comparant les équations (12) et (13), on a :

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (14)$$

$$V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (15)$$

En remplaçant (14) et (15) dans l'équation de  $\text{rot } \vec{V} = 0$   
 $= (\text{rot } \vec{V})_z$  ; il vient :

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{V})_z &= \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0 \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

qui est également une équation de LAPLACE

Remplaçons (14) et (15) dans (6), on trouve

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

qui nous dit que l'équation de continuité (6) est automatiquement satisfaite

## RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE LAPLACE

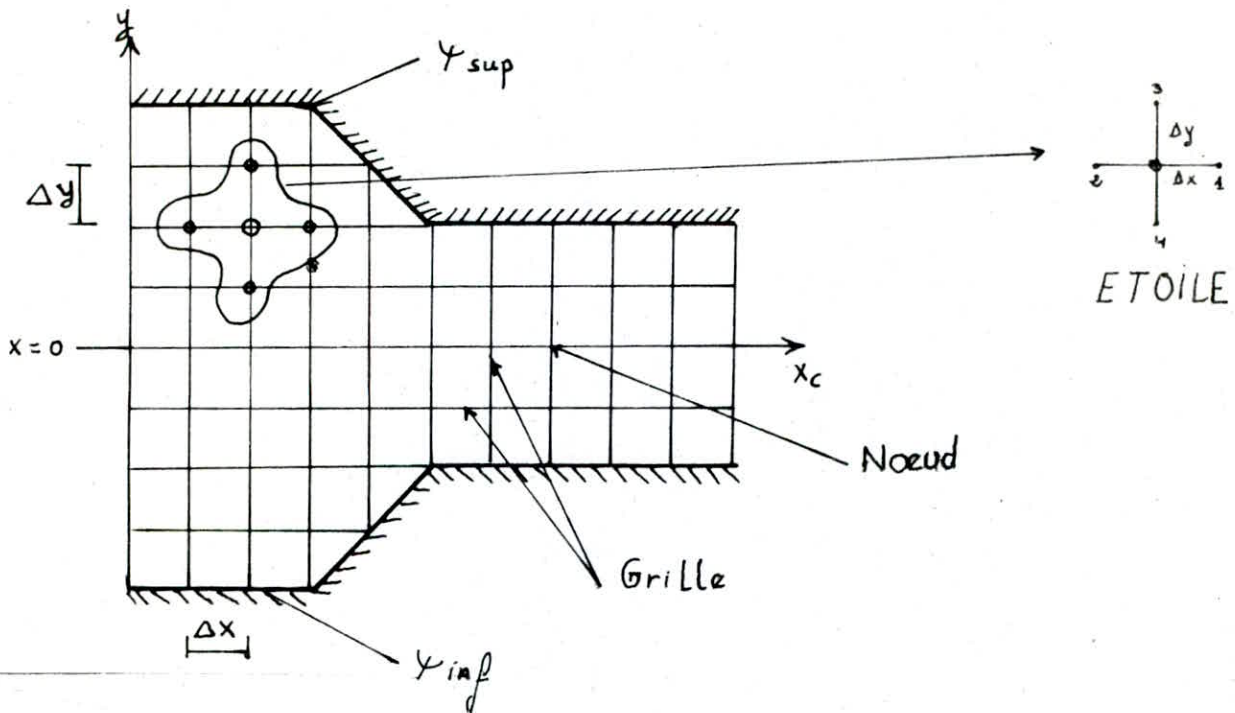
Soit l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Pour mieux expliquer la méthode, nous montrons la solution sur un exemple :

Trouver l'écoulement parfait dans un convergent ;  
 soit l'écoulement à deux dimensions





Les parois sont des lignes de courant

Tout au long de la paroi inférieure  $\psi = \psi_{inf}$  (18)

Tout au long de la paroi supérieure  $\psi = \psi_{sup}$  (19)

pour reconnaître l'écoulement, il faut calculer la fonction de courant  $\psi(x, y)$ .

Nous allons calculer les valeurs numériques  $\psi$  sur les nœuds des réseaux de  $x$  et  $y$

Le pas des réseaux est :  $\Delta x = \Delta y$  (20)

Les dérivées de l'équation (16) sont développées à l'aide des différences finies

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (16)$$

où

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)_0 \cong \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\psi_1 - \psi_0}{\Delta x} - \frac{\psi_0 - \psi_2}{\Delta x} \right) = \frac{\psi_1 - 2\psi_0 + \psi_2}{(\Delta x)^2} \quad (21)$$

$$\text{Et } \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)_0 \cong \frac{1}{\Delta y} \left( \frac{\psi_3 - \psi_0}{\Delta y} - \frac{\psi_0 - \psi_4}{\Delta y} \right) = \frac{\psi_3 - 2\psi_0 + \psi_4}{(\Delta y)^2} \quad (22)$$

En tenant compte la supposition (20), et en mettant (21) et (22) dans l'équation de LAPLACE (16) il vient :

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} (\psi_1 - 4\psi_0 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) = 0 \quad (23)$$

d'où

$$\boxed{\psi_0 = \frac{1}{4} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4)} \quad (24)$$

Si les valeurs de la fonction de courant satisfait l'équation (24), donc en même temps, elles satisfont l'équation de LAPLACE (16), dans le point (0). Si on trouve un ensemble des valeurs de  $\psi$  qui satisfont l'équation (24) sur tous les noeuds du réseau, cet ensemble  $\psi$  est la solution de l'équation de LAPLACE

**PREMIERE FOIS :** Nous donnons une valeur estimée de  $\psi$  concernant à chaque noeud de la grille. Après, nous parcourons systématiquement les noeuds de la grille, et nous utilisons la formule (24); La valeur de  $\psi_0$  y trouvée doit être remplacer par la nouvelle valeur calculée à l'aide de (24); Ainsi, les valeurs de  $\psi_0$  sont modifiées dans chaque noeud de la grille.

DEUXIEME FOIS : Nous parcourons systématiquement les noeuds de la grille et nous effectuons le même processus comme précédemment.

Nous continuons à faire le même processus troisième, quatrième fois et ainsi de suite

La condition d'arrêt est que :

$$\frac{\psi_{i,j}^{(k+1)} - \psi_{i,j}^{(k)}}{\psi_{i,j}^{(k)}} \leq p \quad (25)$$

Où "p" est la précision demandée.

Alors l'ensemble  $\{\psi_{i,j}^{(k+1)}\}$  fait la solution du problème

Les composantes de vitesse sont :

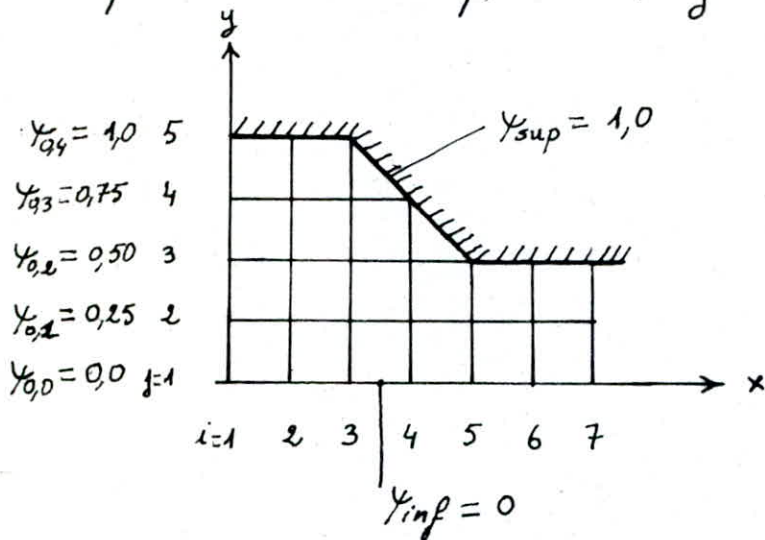
$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \cong \frac{\psi_3 - \psi_4}{2\Delta x} \\ -v_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \cong \frac{\psi_1 - \psi_2}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (26)$$

Cette méthode peut être utilisée sur un domaine borné sa entraîne le problème de la détermination des conditions aux limites où faut-il poser les limites pour déterminer le domaine de calcul??

Nous ne pouvons pas donner une réponse directe en général, nous déterminons le domaine par tâtonnement (par exemple les droites verticales  $x=0$  et  $x=x_c$  sont

de plus en plus éloignées jusqu'à ce que la différence entre deux solutions est négligeable).

Reprenons l'exemple : (symétrie)



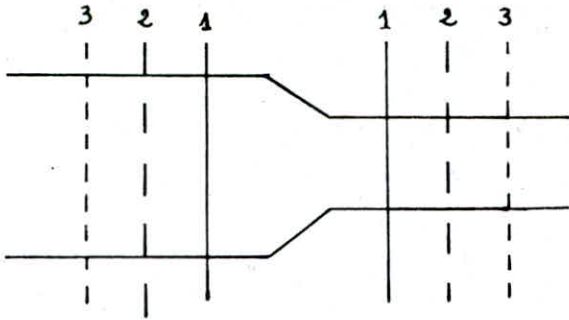
La première valeur estimée de  $y_{i,j} = 0$ , sauf dans les points aux limites.

Nous commençons à calculer les nouvelles valeurs de  $y_{i,j}$  où  $i=2$  par la formule (24) et après pour  $i=2$  ect... jusqu'à  $i=6$

par exemple  $y_{2,2} = \frac{1}{4} (0 + 0,25 + 0 + 0) \cong 0,063$   
ect....

### REMARQUES GENERALES

1 - Le calcul est valable sur un domaine borné quand nous préparons les conditions aux limites, il faut que ces conditions aux limites sont en accord avec le résultat



[1-1] première limite

[2-2] deuxième limite

[3-3] troisième limite

Si le résultat dans le domaine [2-2] est le même dans le domaine [3-3], on prend le domaine [2-2] et nous ne prolongeons pas

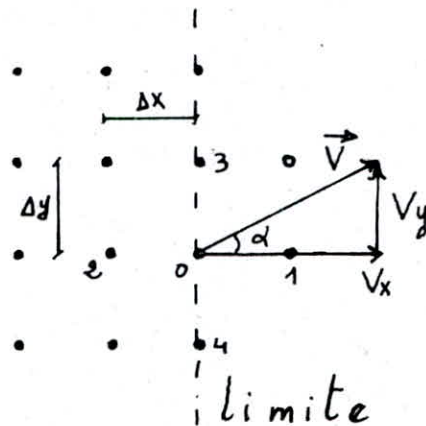
2\_ Nous distinguons deux sortes de conditions aux limites :

a. Les limites à premier ordre : tout au long d'une limite à premier ordre ; la valeur de  $\psi$  est donnée (soit constante ou non)

par exemple :  $\psi_{inf} = 0$  ;  $\psi_{sup} = 1,0$ .

b. Les limites à deuxième ordre : tout au long d'une limite à deuxième ordre la dérivée normale de  $\psi$  est donnée

par exemple : la condition physique est que le fluide traverse la limite sous l'angle ( $\alpha$ )



Dans ce cas, nous imaginons un point (1) en dehors de la limite

Puisque  $V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

On a :  $\psi_1 - \psi_0 \cong -V_y \Delta x$  (27)

D'autre part  $V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \cong \frac{\psi_3 - \psi_4}{2\Delta y} = \frac{\psi_3 - \psi_4}{2\Delta x}$

Où  $\Delta x = \Delta y$

D'où  $\Delta x = \frac{\psi_3 - \psi_4}{2V_x}$  (28)

En remplaçant cette dernière relation dans (27)

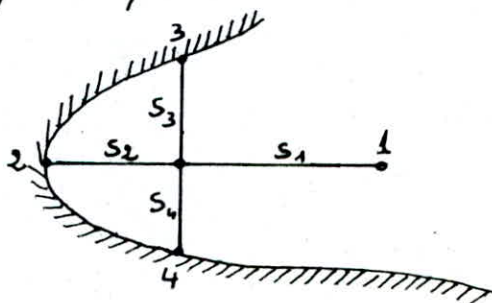
$\psi_1 = \psi_0 - \frac{\text{tg } \alpha}{2} (\psi_3 - \psi_4)$  où  $\text{tg } \alpha = \frac{V_y}{V_x}$

D'où

$\psi_0 = \frac{1}{3} \left[ \psi_2 + \left(1 - \frac{\text{tg } \alpha}{2}\right) \psi_3 + \left(1 + \frac{\text{tg } \alpha}{2}\right) \psi_4 \right]$  (29)

Dans ce cas on doit calculer les valeurs de  $\psi_0$  même sur la limite.

3 - On peut rencontrer souvent le problème que la limite à premier ordre ne passe pas par les points de noeud de la grille à pas équidistant



(Étoile tronquée)

En cas d'une telle "étoile tronquée", le développement limité jusqu'à l'ordre "2" autour du point "0",

On a :

$$\psi_1 - \psi_0 = S_1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 + \frac{S_1^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_0 \quad (30)$$

$$\psi_2 - \psi_0 = -S_2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 + \frac{S_2^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_0 \quad (31)$$

$$\psi_3 - \psi_0 = S_3 \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 + \frac{S_3^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0 \quad (32)$$

$$\psi_4 - \psi_0 = -S_4 \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 + \frac{S_4^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0 \quad (33)$$

On peut exprimer les dérivées :

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0 = \frac{S_2^2 \psi_1 - S_1^2 \psi_2 + (S_1^2 - S_2^2) \psi_0}{S_1 S_2 (S_1 + S_2)} \quad (34)$$

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0 = \frac{S_4^2 \psi_3 - S_3^2 \psi_4 + (S_3^2 - S_4^2) \psi_0}{S_3 S_4 (S_3 + S_4)} \quad (35)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{S_1 \psi_2 + S_2 \psi_1 - (S_1 + S_2) \psi_0}{\frac{1}{2} S_1 S_2 (S_1 + S_2)} \quad (36)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{S_3 \psi_4 + S_4 \psi_3 - (S_3 + S_4) \psi_0}{\frac{1}{2} S_3 S_4 (S_3 + S_4)} \quad (37)$$

Ces équations peuvent être portées dans (16)

$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \right) \quad \text{il vient :}$$

$$\psi_0 = \frac{\frac{\psi_1}{S_1(S_1+S_2)} + \frac{\psi_2}{S_2(S_1+S_2)} + \frac{\psi_3}{S_3(S_3+S_4)} + \frac{\psi_4}{S_4(S_3+S_4)}}{\frac{1}{S_1 S_2} + \frac{1}{S_3 S_4}} \quad (38)$$

Après avoir trouver la fonction  $\psi(x,y)$  les équations (34) et (45) doivent être utilisé pour calculer les composantes de vitesse  $V_x$  et  $V_y$ .



## CAS D'UN ECOULEMENT ROTATIONNEL

Les écoulements rotationnels sont les écoulements pour lesquels le vecteur tourbillons n'est pas nul ou  $\text{rot } \vec{V} \neq 0$

En reprenons l'idée de démonstration de l'équation (16) mais avec  $\text{rot } \vec{V} \neq 0$  ; il vient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - (\text{rot } \vec{V})_z \quad (17)$$

Qui est une équation de Poisson. La conclusion tirée de (17) est que la fonction de courant est mieux utile au potentiel de vitesse pour décrire un écoulement parfait à deux dimensions.

Soit l'écoulement parfait mais rotationnel défini par l'équation (17)

Les dérivées de deuxième ordre sont formulées en (21) et (22) :

$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_0 \cong \frac{\psi_1 - 2\psi_0 + \psi_2}{(\Delta x)^2} \quad (21)$$

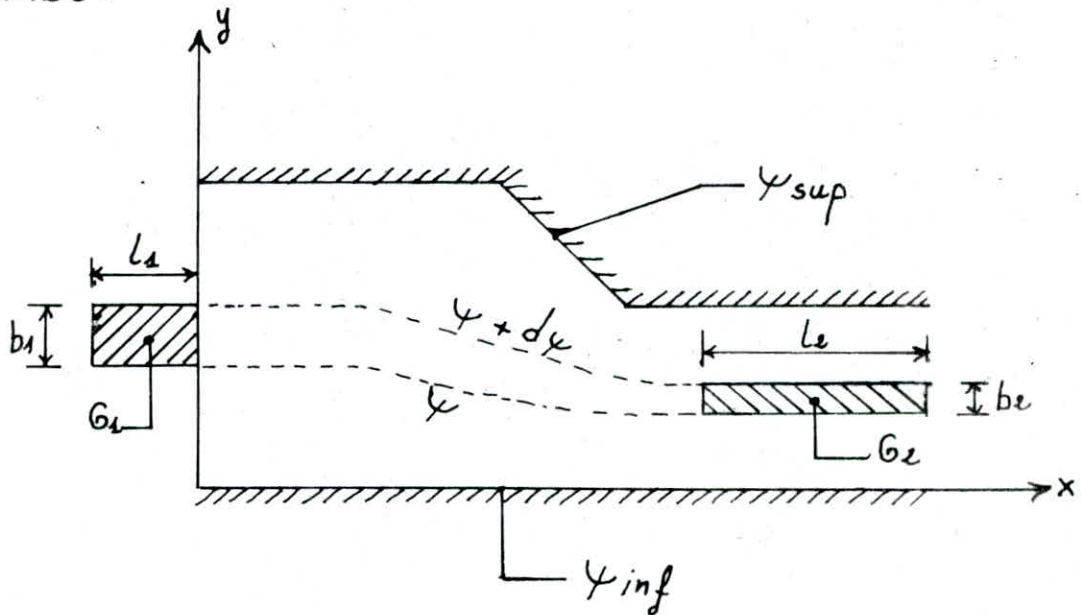
$$\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0 \cong \frac{\psi_3 - 2\psi_0 + \psi_4}{(\Delta y)^2} \quad (22)$$

Nous les rapportons en (17) avec la supposition

$$\Delta x = \Delta y \quad ; \quad \text{il vient :}$$

$$\psi_0 = \frac{1}{4} \left[ \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \Delta x^2 (\text{rot } \vec{V})_z \right] \quad (39)$$

L'équation (39) remplace (24) en cas d'un écoulement rotationnel.



Supposons les lignes de courant sont parallèles à l'axe dans les sections (1) et (2)

La relation à la section (1) est :

$$(\text{rot } \vec{V}_1)_z = -\frac{\partial v_{x1}}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (40)$$

Suivons l'évolution du volume renfermé par la courbe  $G_1$ . Cette courbe va renfermer toujours les mêmes particules. De cette façon, elle arrivera à la section (2).

Puisque  $\rho = \text{constante}$ , l'équation de continuité devient

$$l_1 b_1 = l_2 b_2 \quad (41)$$

D'autre part, selon le théorème de KELVIN :

## ENONCE DU THEOREME :

Dans un écoulement permanent de fluide incompressible non visqueux soumis uniquement à un champ de pesanteur, la circulation du vecteur vitesse le long d'une courbe fermée, entraînée dans le mouvement possède une valeur constante.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{G_1} = \Gamma_{G_2} \quad (42)$$

En utilisons le théorème de STOCKES :

$$\Gamma_G = \oint_G \vec{V} \cdot d\vec{s} = \iint_{L \times b} \text{rot } \vec{V}_z \cdot d\vec{l} \cdot db$$

On a :

$$\Gamma_{G_1} = (\text{rot } \vec{V}_1)_z \cdot l_1 \cdot b_1 = \Gamma_{G_2} = (\text{rot } \vec{V}_2)_z \cdot l_2 \cdot b_2 \quad (43)$$

D'où on a :

$$(\text{rot } \vec{V}_1)_z = (\text{rot } \vec{V}_2)_z \quad (44)$$

Nous pouvons alors constater que la valeur du rotationnel ne varie pas tout au long d'une ligne de courant c'est à dire, les valeurs de la rotationnel et de la fonction de courant se dependent et cette dependance peut être formulé par la relation :

$$(\text{rot } \vec{V})_z = f(\psi)$$

C'est LE PRINCIPE DE CONSERVATION DU ROTATIONNEL

---

Après avoir formulé les conditions aux limites dans la section (1) en même temps la relation  $(\text{rot } \vec{V}_1)_z = (\text{rot } \vec{V}_2)_z = f(\psi)$  peut être formulé à l'aide de (40)

L'application de la formule de relaxation (39) ; en remplaçant  $(\text{rot } \vec{V})_z = f(\psi)$

Pendant l'iteration, cette valeur de rotationnel est améliorée aussi

En ce qui concerne à la condition au limite dans la section (2), il faut utiliser obligatoirement les conditions aux limites à deuxième ordre. Pour appliquer la formule (29) à notre problème actuel il suffit de supposer  $t_{ga} = 0$  qui donne :

$$\psi_0 = \frac{1}{3} \left[ \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \Delta x^2 (\text{rot } \vec{V})_z \right] \quad (45)$$

## ÉCOULEMENTS DE REVOLUTION

Les écoulements de revolutions s'étudient par des méthodes analogues à celles vues pour les écoulements plans.

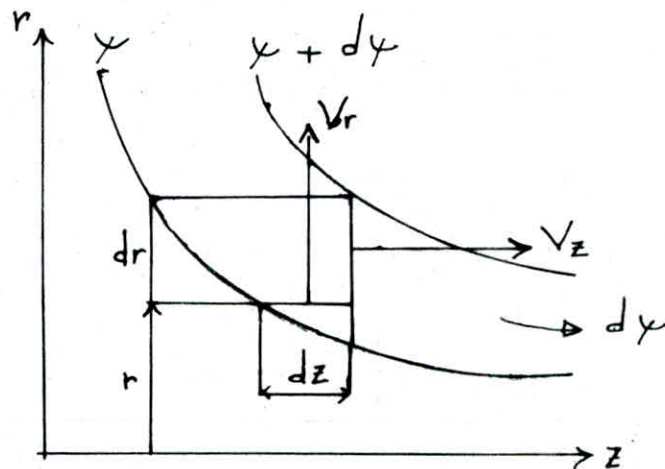
Soit l'axe "z" l'axe de symétrie. Dans le plan (x, y) on suppose un système de coordonnées (r,  $\theta$ ) c'est-à-dire un système polaire

La fonction de courant peut être utilisée uniquement dans les écoulements à deux dimensions parce qu'il y a une relation entre les lignes de courant et le débit.

Mais dans le cas d'un écoulement de révolution, on peut définir des fonctions pareilles aux fonctions de courant. De cette façon, on peut examiner des écoulements méridiens à conditions que la composante rotationnelle de la vitesse  $V_{\theta} = 0$ ; L'autre cas qui peut être examiner ce sont des écoulements polaires où  $V_z = 0$

## CAS D'UN ECOULEMENT MERIDIEN

L'écoulement méridien est étudié à condition que la composante rotationnelle de la vitesse est nulle ( $V_\theta = 0$ )



Le débit passant entre les deux surfaces de courant est:

$$dQ = -V_r 2\pi dz + V_z 2\pi r dr \quad (46)$$

D'autre part, la dérivée totale du débit  $Q$  est:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial z} dz + \frac{\partial Q}{\partial r} dr \quad (47)$$

Il nous semble utile de définir:

$$d\psi = \frac{dQ}{2\pi} \quad (48)$$

Alors (46) devient

$$d\psi = -V_r r dz + V_z r dr \quad (49)$$

On réécrit en (47) à l'aide de (48), il vient

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr, \quad (50)$$

Maintenant comparons les equations (49) et (50) d'où :

$$V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (51)$$

$$V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (52)$$

La composante perpendiculaire au plan  $(r, z)$  du rotationnel de  $(\vec{V})$  est :

$$(\text{rot } \vec{V})_\theta = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (53)$$

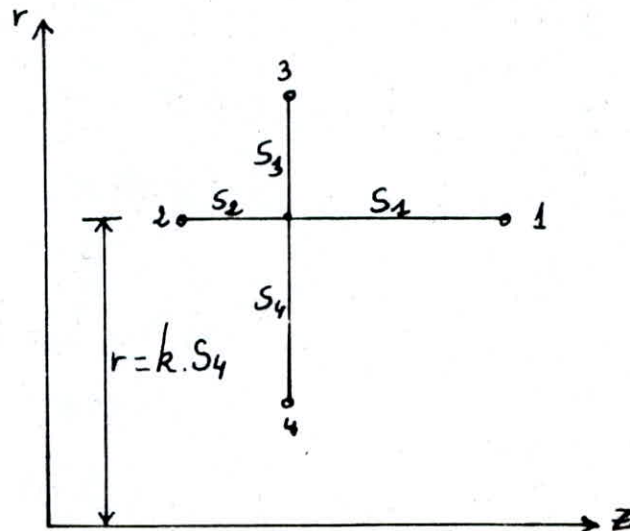
Et en remplaçant  $V_r$  et  $V_z$  par (51) et (52) on a :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r (\text{rot } \vec{V})_\theta \quad (54)$$

Ou dans le cas de  $(\text{rot } \vec{V})_\theta = 0$ , on a :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (55)$$

Prenons d'abord le cas d'une "étoile tronquée"  $\Rightarrow$



On peut établir le système d'équations pareil à celui de (30), (31), (32) et (33). Nous écrivons  $z$  et  $r$  au lieu de  $x$  et  $y$ , la solution de ce système d'équation donne des valeurs telles qu'elles sont figurées en (34), (35), (36) et (37) qui peuvent être remplacées en (54)

$$\text{Définissons } r = k \cdot S_4 \quad (56)$$

En utilisant (56), on a la formule de relaxation:

$$y_0 = \frac{\frac{2 y_1}{S_1(S_1+S_2)} + \frac{2 y_2}{S_2(S_1+S_2)} + \frac{(2k-1) y_3}{k S_3(S_3+S_4)} + \frac{(2k + \frac{S_3}{S_4}) y_4}{k S_4(S_3+S_4)} + k S_4 (\text{rot } \vec{V})_\theta}{\frac{2}{S_1 \cdot S_2} + \frac{2}{S_3 \cdot S_4} + \frac{S_3 - S_4}{k S_3 \cdot S_4^2}} \quad (57)$$

Et les vitesses

$$V_r = - \frac{S_2^2 y_1 - S_1^2 y_2 + (S_1^2 - S_2^2) y_0}{k S_1 S_2 (S_1 + S_2) S_4} \quad (58)$$

$$V_z = \frac{S_4^2 y_3 - S_3^2 y_4 + (S_3^2 - S_4^2) y_0}{k S_3 S_4^2 (S_3 + S_4)} \quad (59)$$

Dans un point de nœud à étoile normale

$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \Delta r = \Delta z$  et alors:

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2 + \frac{2k-1}{2k} y_3 + \frac{2k+1}{2k} y_4}{4} + \frac{k (\Delta z^3) (\text{rot } \vec{V})_\theta}{4} \quad (60)$$



Et les vitesses

$$V_r = - \frac{Y_1 - Y_2}{2k(\Delta z)^2} \quad (61)$$

$$V_\theta = \frac{Y_3 - Y_4}{2k(\Delta z)^2} \quad (62)$$

Maintenant le principe de conservation du rotationnel devient

$$\frac{(\text{rot } \vec{V}_1)_z}{r_1} = \frac{(\text{rot } \vec{V}_2)_z}{r_2} \quad (44a)$$

(parce que l'équation de continuité  $L_1 b_1 e_{r_1} \Pi = L_2 b_2 e_{r_2} \Pi$  au lieu de (41). En partant dans (43) on a: l'équation (44)

## REALISATION D'UN PROGRAMME INFORMATIQUE POUR LE CALCUL D'UN ECOULEMENT MERIDIEN

La coupe meridienne est placée dans une grille (voir figure 1)

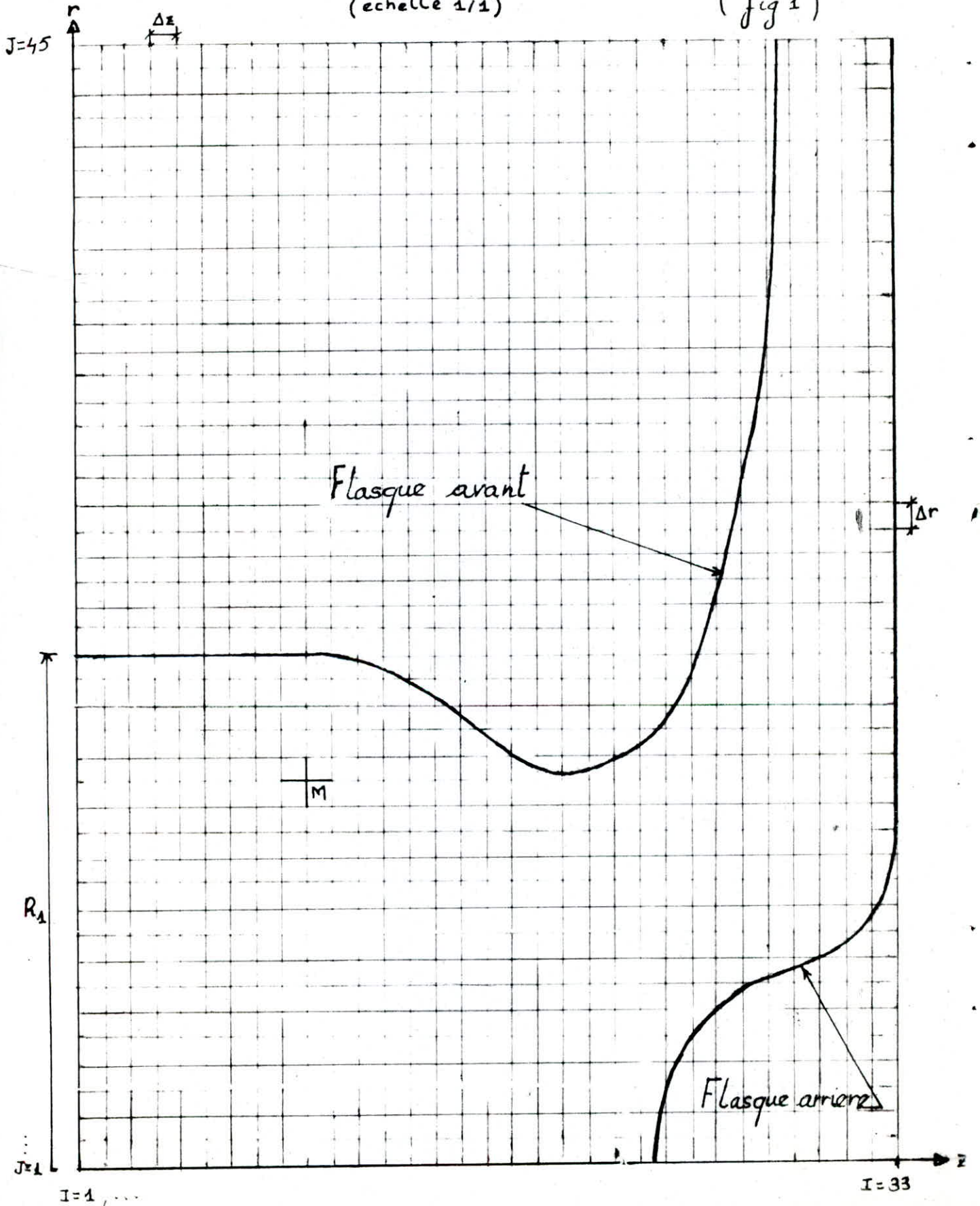
Le pas suivant l'axe  $z$  est  $\Delta z$  et suivant l'axe  $r$  est  $\Delta r$

Tout point  $M(i,j)$  ou nœud, interieur à la coupe meridienne initialise une étoile comme présente sur la figure 1.

COUPE MERIDIENNE ORIGINALE

(echelle 1/1)

(fig 1)



## FONCTION DE COURANT A L'ENTRÉE :

Comme il a été établi au chapitre précédent, la fonction de courant est donnée par l'équation (52)

$$V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (52)$$

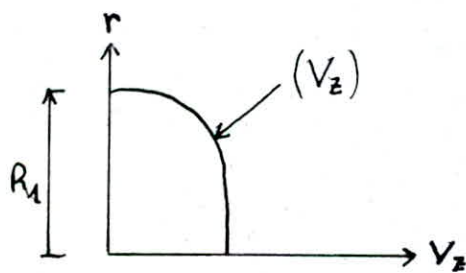
D'où

$$\psi = \int_0^r r V_z dr = \int_0^r r V_0 \left(1 - \frac{r}{R_1}\right)^n dr \quad (1^*)$$

La forme de l'équation de la vitesse est parabolique de degré  $n$

$$V_z = V_0 \left(1 - \frac{r}{R_1}\right)^n$$

Le profil de  $V_z$  est



Où :  $n = 1/7$  ; conduite circulaire  
 $R_1$  : rayon de la conduite à son entrée  
 $r$  : rayon intermédiaire de calcul, le pas  $\Delta r$

$$R_1 = (21 - 1) \Delta r = 20 \Delta r$$

Dans notre cas on suppose  $V_0 = 2 \text{ m/s}$  et nous prenons des pas égaux

$$\Delta z = \Delta r = 0,005 \text{ m}$$

La notation de ces variables dans le programme est :

$$V_0 \longrightarrow V\phi$$

$$n \longrightarrow N$$

$$\Delta z \longrightarrow X_1$$

$$\Delta r \longrightarrow Y_1$$

$$i \longrightarrow I$$

$$j \longrightarrow J$$

Faisons une sommation, (1\*) devient :

$$\psi \cong \sum_{j=2}^k r_j V_0 \left(1 - \frac{r_j}{R_1}\right)^n (r_j - r_{j-1}) \quad (2^*)$$

Pour  $i=1$  et  $j=2, \dots, 21$  ; l'équation (2\*) nous permet de calculer les valeurs de  $\psi$  à l'entrée.

Pour augmenter la précision de la formule de somme nous avons divisé  $\Delta r$  en dix pas de calcul, c'est à dire que :

$$r_j - r_{j-1} = \frac{1}{10} \Delta r$$

### ROTATIONNEL A L'ENTREE

La composante perpendiculaire au plan  $(r, z)$  du rotationnel à l'entrée est donné par l'équation (53) :

$$(\text{rot } \vec{V})_{\theta} = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (53)$$

Or, à l'entrée nous avons un écoulement parfaitement horizontal à cause du rajout du tronçon et donc, la vitesse  $V_r$  est nulle ; ( $V_r = 0$ )

$$(53) \text{ devient } (\text{rot } \vec{V})_{\theta} = -\frac{\partial V_z}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \cdot r \cdot V_0 \cdot \left(1 - \frac{r}{R_1}\right)^n \right]$$

$$= -V_0 \cdot n \cdot \left(1 - \frac{r}{R_1}\right)^{n-1} \left(0 - \frac{1}{R_1}\right)$$

D'où :

$$\boxed{(\text{rot } \vec{v})_{\theta} = V_0 \cdot \frac{n}{R_1} \cdot \left(1 - \frac{r}{R_1}\right)^{(n-1)}} \quad (3^*)$$

### DETERMINATION DES POINTS DE RELAXATION (étoiles normales, étoiles tronquées).

Présentons une étoile dans notre cas :

Une étoile est dite tronquée si au moins l'un de ses bras est inférieur aux autres.

Si non  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ , et elle est normale.

Exemple : Le point  $M_1(15, 8)$  représente une étoile normale  
Le point  $M_2(23, 2)$  représente une étoile tronquée

La forme de notre coupe, ne présente à aucun moment au niveau des étoiles tronquées, une forme connue (sphère, cylindre, cône), ce qui nous conduit à chercher les étoiles tronquées et initialiser par un guide de calcul  $L(I, J) = 2$ , et les affecter de leurs bras  $S_1, S_2, S_3$  et  $S_4$  sous forme de DATA dans le programme.

Tandis que, les points intérieurs à la coupe (telle que

La limite ne traverse pas un bras), représentant des étoiles normales sont initialisés par  $L(I, J) = 1$

Mais, tout au début, nous avons affecté à tous les points de la grille par  $L(I, J) = 0$

Enfin, toute étoile normale intérieure est affectée par  $L(I, J) = 1$ , et toute étoile tronquée intérieure est affectée par  $L(I, J) = 2$ .

Et pour toute étoile extérieure à la coupe méridienne c'est à dire, qui se trouve au dessus du flasque avant ou au dessous du flasque arrière  $L(I, J) = 0$

### CONDITIONS AUX LIMITES

Nous sommes présent devant deux sortes de conditions aux limites qui sont :

- Conditions aux limites supérieures :

À la paroi supérieure ou flasque avant (voir fig 1), la valeur de  $\psi_{i,j}$  est conservée égale à  $\psi_{\max} = \psi(1, 21)$

$$\text{pour } i = 1, \dots, 10 \quad \psi(1, 21) = \psi_{\max}$$

La forme étant quelconque nous avons eu seulement trois au points du flasque avant passant par des nœuds

$$\psi(15, 20) = \psi(19, 18) = \psi(26, 22) = \psi_{\max}$$

- Conditions aux limites inférieures :

à A la paroi inférieure ou flasque arrière (voir fig 1); La

valeur de  $\psi_{i,j}$  est conservée à une valeur nulle  $\psi_{inf} = 0$

$$1 \leq i \leq 23 \quad ; \quad \psi(i, 1) = \psi_{inf}$$

$$14 \leq j \leq 45 \quad ; \quad \psi(33, j) = \psi_{inf}$$

### RELAXATION DANS UN POINT INTERIEUR

Les points où nous devons appliquer la relaxation sont caractérisés par  $L(I, J)$  positif, si  $J$  est différent de 45

Elle peut être appliquée pour une étoile tronquée et pour une étoile normale,

Voyons d'abord le premier cas :

D'après le chapitre précédent :

Nous avons :

$$\psi_0 = \frac{\frac{2\psi_1}{s_1(s_1+s_2)} + \frac{2\psi_2}{s_2(s_1+s_2)} + \frac{(2k-1)\psi_3}{k s_3(s_3+s_4)} + \frac{(2k+s_3/s_4)\psi_4}{k s_4(s_3+s_4)} + k s_4 (\text{rot } \vec{V})_0}{\frac{2}{s_1 \cdot s_2} + \frac{2}{s_3 \cdot s_4} + \frac{s_3 - s_4}{k s_3 \cdot s_4}} \quad (5)$$

Et pour l'étoile normale nous avons :

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \frac{2k-1}{2k} \psi_3 + \frac{2k+1}{2k} \psi_4 + k(\Delta z)^3 (\text{rot } \vec{V})_0}{4} \quad (6)$$

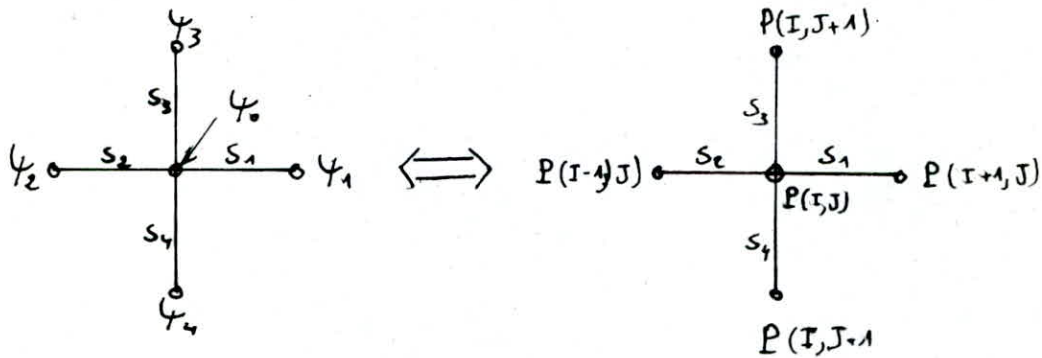
Où  $\psi_0$  : la valeur de  $\psi_{i,j}$  cherchée au point  $M(i, j)$  initialisée par  $P(I, J)$

$\psi_1, \psi_2, \psi_3$  et  $\psi_4$  sont les valeurs de  $\psi(i \pm 1, j \pm 1)$  au voisinage de  $\psi_0$  initialisée respectivement par  $P(I+1, J)$ ,



$P(I-1, J)$ ,  $P(I, J+1)$  et  $P(I, J-1)$

Nous avons sur la figure:



$k$  est initialisée par  $K(I, J)$

$(\text{rot } \vec{V})_0$  est initialisée par  $\text{ROT}(I, J)$

### RELAXATION A LA SORTIE

A la sortie, nous avons une forme dont l'axe central est perpendiculaire à l'axe  $z$ , à ce niveau, les parois supérieure et inférieure sont parallèles. Donc l'écoulement est pratiquement radial ainsi, la composante horizontale de la vitesse  $\vec{V}_z$  est nulle. ( $\vec{V}_z = \vec{0}$ )

$$V_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

$$\text{Or, } \frac{\partial \psi}{\partial r} \approx \frac{\psi_3 - \psi_0}{\Delta r} = 0$$

D'où finalement nous avons:

$$\boxed{\psi_3 = \psi_0}$$

Et la formule de relaxation d'un point normal interieur (Formule (60)), on remplace  $\psi_3$  par  $\psi_0$

On aura:

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \frac{2k-1}{2k} \psi_0 + \frac{2k+1}{2k} \psi_4 + k(\Delta z)^3 (\text{rot } \vec{V})_\theta}{4}$$

De ça on tire l'expression finale de  $\psi_0$  en fonction des autres:

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2 + (1 + \frac{1}{2k}) \psi_4 + k(\Delta z)^3 (\text{rot } \vec{V})_\theta}{3 + \frac{1}{2k}} \quad (4^*)$$

C'est la formule de relaxation d'un point normal à la sortie de notre coupe meridienne.

Nous avons un noeud à la sortie qui est une étoile tronquée; c'est point  $M(29, 45)$

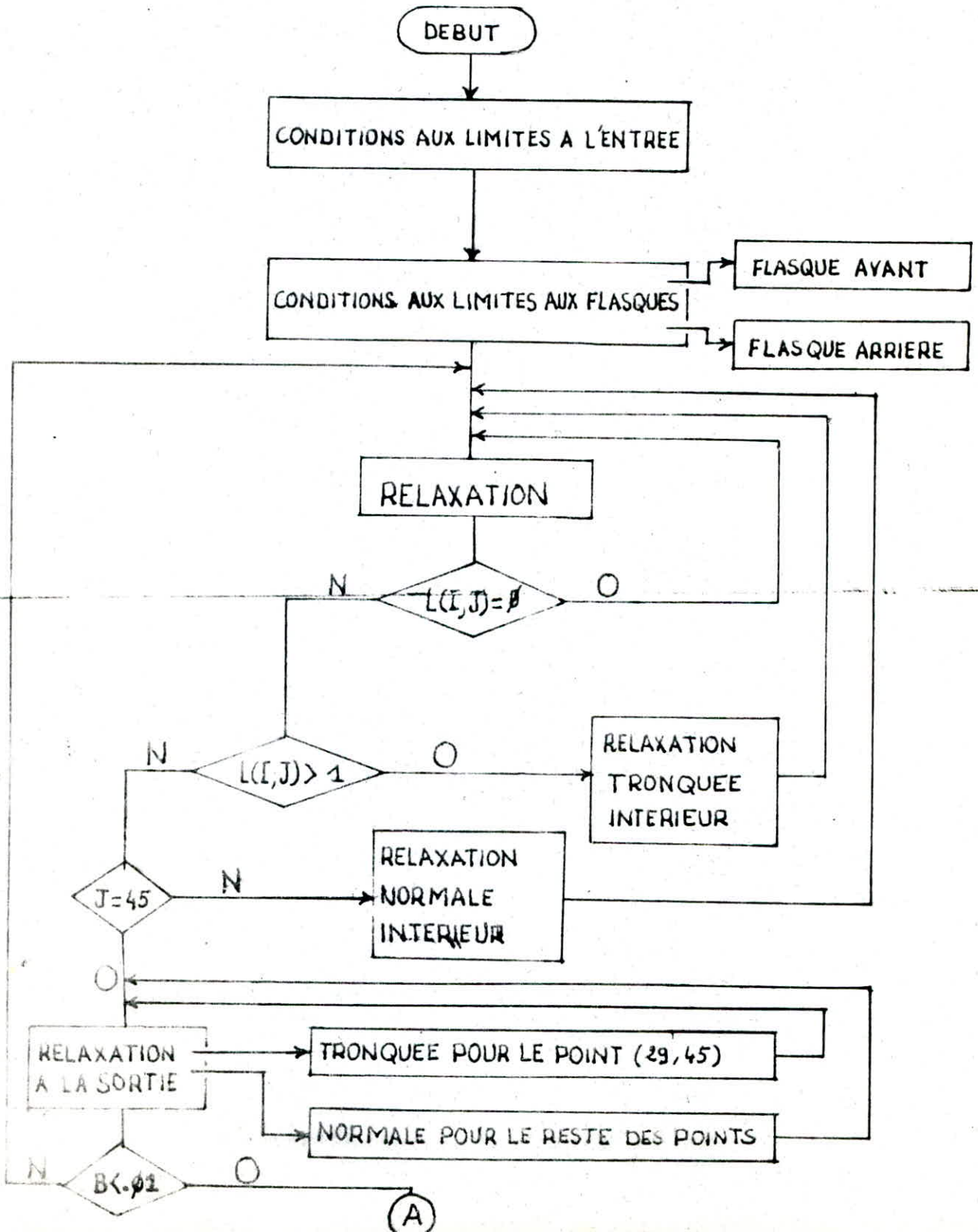
Pour cela, nous remplaçons  $\psi_3$  par  $\psi_0$  dans formule de relaxation d'une étoile tronquée interieure (formule (53))

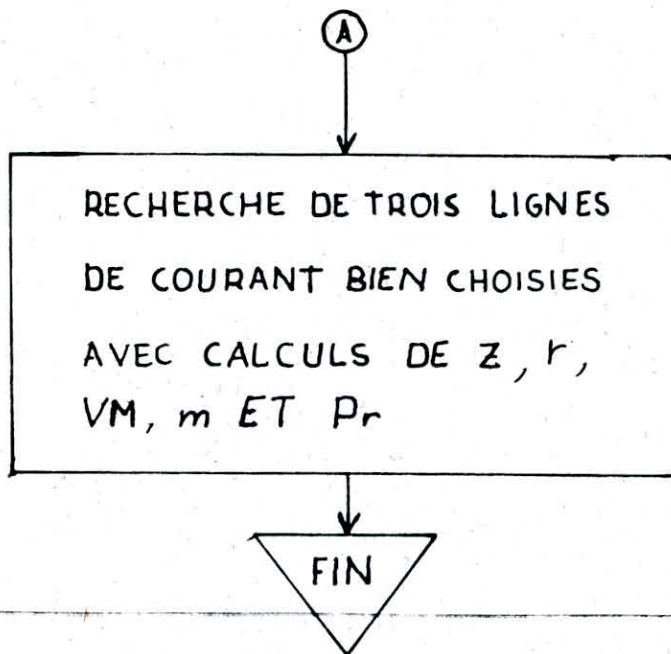
D'où nous obtenons la nouvelle expression de  $\psi_0$  d'une étoile tronquée à la sortie:

$$\psi_0 = \frac{\frac{2\psi_1}{s_1(s_1+s_2)} + \frac{2\psi_2}{s_2(s_1+s_2)} + \frac{(2k+s_3/s_4)\psi_4}{k s_4(s_3+s_4)} + k s_4 (\text{rot } \vec{V})_\theta}{\frac{2}{s_1 \cdot s_2} + \frac{2}{s_3 \cdot s_4} + \frac{s_3 - s_4}{k s_3 s_4^2} - \frac{(2k-1)}{k s_3(s_3+s_4)}} \quad (5^*)$$

## DISCRIPTION DU PROGRAMME

Nous donnons un organigramme general:





Où :

$r$  : est l'ordonnée du point de la ligne de courant  
 $z$  : l'abscisse du point de la ligne de courant  
 $VM$  : Vitesse meridienne.  
 $m$  : distance de la trajectoire de la ligne de courant  
 $Pr$  : pression.

## CALCULS

## RESULTATS CORRESPONDANTS A LA COUPE MERIDIENNE DONNEE

Le choix des trois lignes de courant à tracer a été fait.

ainsi :

$$\psi_{1t} = \psi_{sup} / 4$$

Dès l'entrée nous avons repéré ces lignes de courant par

$$\psi_{1t}$$

$$\psi_{2t} = 2 \psi_{1t}$$

$$\psi_{3t} = 3 \psi_{1t}$$

Initialisés respectivement par  $TS1$ ,  $2 * TS1$  et  $3 * TS1$  et, le long de l'écoulement nous avons cherché tous les points où les  $\psi$  sont égaux à  $\psi_{1t}$ . L'ensemble de ces points forme la ligne de courant  $\psi_{1t} \rightarrow TS1$

De la même façon :

La ligne de courant  $\psi_{2t} \rightarrow 2 * TS1$

La ligne de courant  $\psi_{3t} \rightarrow 3 * TS1$

Le programme réalisé, nous donne directement les résultats sur un tableau

Pour chaque ligne de courant parmi les trois choisies, ce tableau nous donne :

A la première colonne  $Z(m)$ , à la deuxième colonne  $P(m)$  indiquant respectivement l'abscisse et l'ordonnée des points repérés de la ligne de courant.

A la troisième colonne les vitesses méridiennes  $VM$  (m/s) durant l'écoulement.

A la quatrième colonne les longueurs cumulées  $m$  (m) correspondantes, indiquant la distance de la trajectoire de la ligne de courant.

Ces résultats nous ont permis le tracé des trajectoires de ces trois lignes de courants.

#### DISCUSSION DES RESULTATS

Pour pouvoir confirmer ou nier la coupe méridienne originale nous avons tracé les courbes  $VM = f(m)$  (voir graphique) afin de voir les variations de vitesses durant le déroulement de l'écoulement.

Ces graphes montrent que les vitesses méridiennes croissent et décroissent :

- Dans les régions  $0,106\text{ m} \leq m \leq 0,142\text{ m}$   
et  $0,194\text{ m} \leq m \leq 0,241\text{ m}$

La vitesse méridienne décroît. En ces lieux, Nous avons le risque de décollement de l'écoulement.

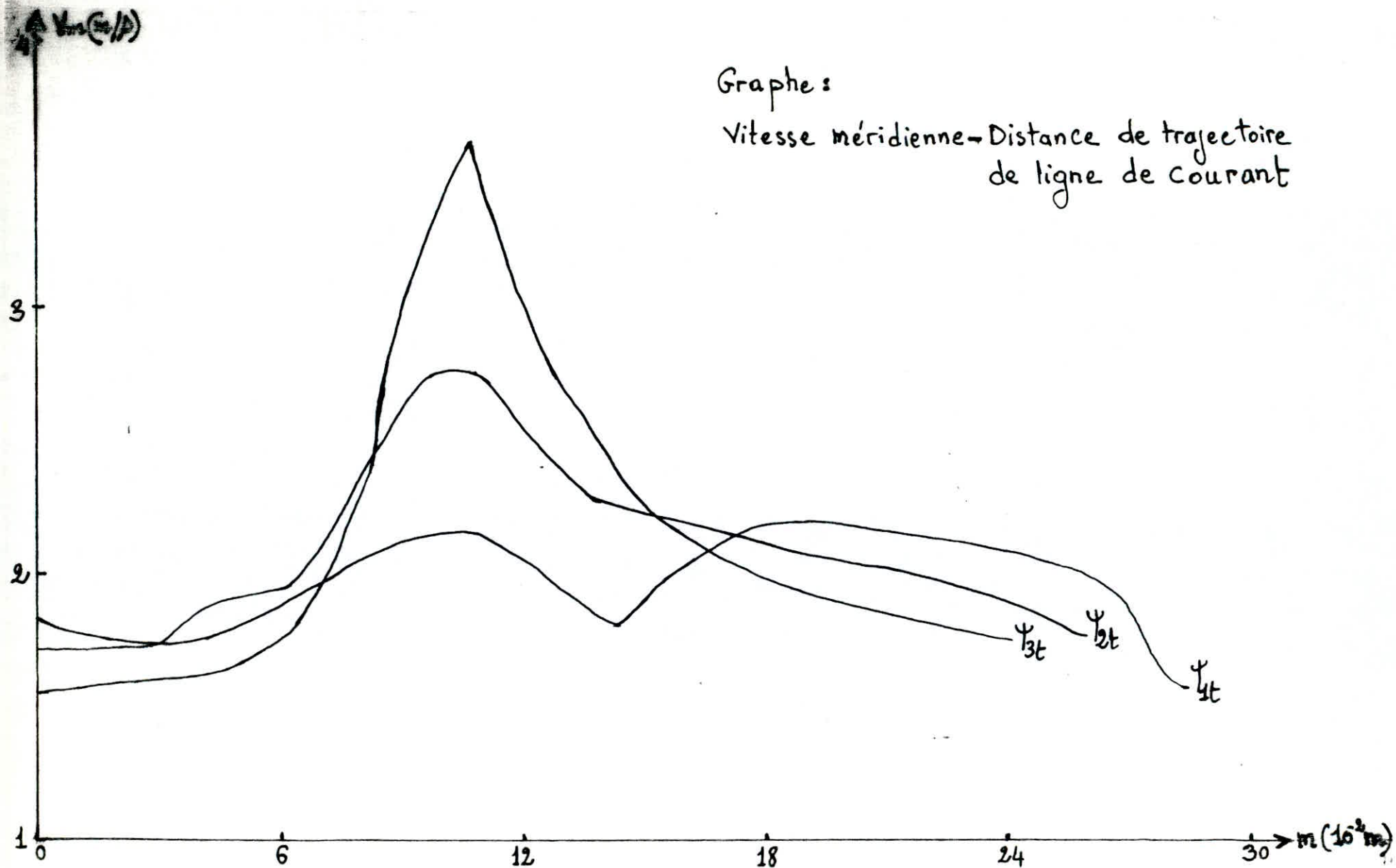
Nous assistons à des désaccélération de l'écoulement.

- Par contre, dans la région  $0,045\text{ m} \leq m \leq 0,106\text{ m}$

La vitesse méridienne croît, ainsi donc, nous assistons à des accélérations de l'écoulement.

Graphes

Vitesse méridienne → Distance de trajectoire  
de ligne de courant



Nous devons éviter les perturbations de la vitesse (croissance décroissance), Aussi signalons-nous le calcul de pression le long de l'écoulement et plus particulièrement pour certains points proches du flasque avant ayant une vitesse élevée.

Exemple: Le point ( $Z = 0,110 \text{ m}$ ,  $r = 0,076 \text{ m}$ )

La vitesse méridienne correspondante est  $V_M = 361 \text{ m/s}$

La pression est  $P_r = 0,9557 \text{ atm}$

La pression en ces points est faible, par conséquent nous avons le risque de cavitation.

#### MODIFICATION DE LA COUPE MERIDIENNE

Au sous chapitre précédent (DISCUSSION DES RESULTATS), nous avons localisé les régions de décollement de l'écoulement et les régions à faibles pressions; ces dernières sont des régions de cavitation très dangereuse qui après utilisation de la pompe, nous présentent une érosion de la paroi.

En définitif, nous disons que les régions de décollement ou de cavitation sont à éviter.

Pour cela, nous modifions la coupe méridienne.

La coupe méridienne étant trouvée étant trouvée par la méthode de PFLEIDER et STEPANOFF basée sur le tracé des cercles comme indiqué au chapitre 2. Pour sa modification nous faisons une translation des cercles en gardant leurs rayons et les ordonnées respectives.



Nous nous donnons un vecteur  $\vec{u}$ , la translation  $T$  est telle que :

$$T(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{u} \quad \text{où } \vec{x} \text{ est un vecteur ayant pour coordonnées l'abscisse et l'ordonnée du centre du cercle.}$$

Le vecteur  $\vec{u}$  aura pour composantes, abscisse négative, ordonnée nulle.

Ainsi la translation se fera de droite vers la gauche afin d'éviter les régions dangereuses.

## CONCLUSION

Le calcul qui sera appliqué à cette nouvelle coupe méridienne prouvera l'amélioration de la coupe originale.

Nous espérons que ce genre de méthode sera appliquée dans notre pays

## BIBLIOGRAPHIE

- SEDILLE (T2)
- TROSKOLANSKI
- STEPANOFF
- KOVATS
- M. BOUMAHRAT, A. GOURDON - Methodes  
numériques appliquées

