

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : HYDRAULIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE DES INFILTRATIONS À TRAVERS
LES BARRAGES EN TERRE HOMOGÈNE
PAR L'ANALOGIE HELE SHAW

Proposé Par :
M^r ABDERRAHIM

Etudié par :
M^r MOHARABI
M^r REMINI

Dirigé par :
M^r ABDERRAHIM
M^r PIMENOV

PROMOTION : JUIN 87

«Une théorie peut être prouvée par l'expérience
mais il n'y a pas de chemin qui mène de l'expérience
à la création d'une théorie.»

EINSTEIN

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

À la mémoire de mon père et à
tous ceux, à qui je pense.

Moharabi Abdennour

Je dédie cette Thèse à mon père, à ma
mère et à ma famille.

Remini Boualem

REMERCIEMENTS

Au terme de cette étude, on tient à exprimer notre profonde gratitude à Monsieur ABERRAHIM, notre promoteur et chef du département en nous confiant ce sujet et pour l'aide qu'il nous a apportée durant toute la durée de cette étude.

Aussi on adresse nos vifs remerciements à Monsieur PIMENOV pour le soutien qu'il nous a donné.

À Mademoiselle HAMEL NACERA de I.N.R.H on exprime notre très cordiale gratitude pour avoir mis à notre disposition une riche documentation qui nous a été très bénéfique.

Nos remerciements vont également à Monsieur BELHADJ responsable du laboratoire pour son aide et nombreux conseils qu'il nous a apportés.

On remercie également Messieurs BAHIDJ et BOUACHE, ainsi que les étudiants de la première année à savoir OULD MADI, MEGUELLATI et le groupe 7. et tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin pour la réussite de cette étude.

— • • ○ SOMMAIRE ○ • —

● Introduction

chapitre 1. ECOULEMENT PERMANENT pages

1. Loi de darcy 1-

- Introduction .
- Définition .
- Différentes vitesses de filtration .
- Conditions, Domaine et limites de validité de la loi de DARCY .
- Généralisation de la loi de DARCY .
- Cohérence de la loi de DARCY avec la loi hydrodynamique

2. théorie de dupuit 7-

- Hypothèses de dupuit .
- Détermination de l'équation de la surface libre .
- Expression du débit .
- Application : Cas d'un barrage en terre homogène avec drains .

3. écoulement à potentiel des vitesses . 10-

- Définition
- Conditions aux limites de l'écoulement

4. méthode semi empirique de kozeny . 13-

- Cas d'une digue sur fondation imperméable avec tapis filtrant .
 - ligne de saturation .
 - Expression du débit de filtration .

chapitre 2

écoulement non permanent 16

- Introduction .
- Hypothèses de base .
- Mise en équation du mouvement de la surface libre
- Etude de variation de la surface libre au cours d'une vidange rapide .
 - Définition d'une vidange rapide .
 - Conditions initiales .
 - Conditions aux limites .
 - Linéarisation de l'équation .
 - Résolution par la méthode de Fourier .

chapitre 3 ETUDE SUR MODELE HELE SHAW.

1. modèle Hele shaw 27

- Ecoulement Hele shaw .
 - Définition .
 - Equations générales .
- Analogie de Hele Shaw .
 - Définition .
 - Principe de l'analogie Hele shaw .
- Modèle Hele shaw .
 - Introduction .
 - Définition .
 - Avantages du modèle .
 - Inconvénients du modèle .
 - Mise en œuvre du modèle .
- Effet de capillarité .
 - Définition de la tension superficielle .
 - Hauteur de capillarité .

2- similitude -38-

- Similitude mécanique.
 - Similitude géométrique.
 - Similitude cinématique.
 - Similitude dynamique.
- échelle de similitude .

3- étude expérimentale -43-

- Caractéristiques du liquide utilisé
- Dispositif expérimental
- Écoulement permanent.
- Écoulement non permanent.

chapitre -4-
réalisation d'un modèle Hele Shaw -65-
à plaque changeable.

- Description du modèle .
- Étude expérimentale .

conclusion ●

INTRODUCTION

Depuis quelques Années , l'Algérie a intensifié la construction des barrages en terre par des moyens locaux et dans un bref délai , afin de répondre surtout aux besoins en eau potable et agricole.

Notre étude est consacrée aux infiltrations à travers des barrages en terre homogène (avec tapis filtrant, suintement) d'Algérie typiques par un dispositif expérimental, qui est le modèle Héle - Shaw, en régime permanent et non permanent et de faire une comparaison avec des méthodes classiques (Dupuit, Kozeny, Equation de Boussinesq).



• ○ ○ ○ CHAPITRE 1

ÉCOULEMENT PERMANENT

① LOI DE DARCY

LOI DE DARCY

INTRODUCTION

La théorie de filtration est mise en évidence en 1856.

La naissance est marquée par la publication des fontaines publiques de la ville de Dijon de DARCY et RITTER. Ainsi, DARCY introduit pour la première fois, une loi d'infiltration appelée loi de DARCY, ou encore loi fondamentale de l'hydraulique souterraine. Elle a été vérifiée par de nombreux expérimentateurs, en se plaçant dans son domaine de validité.

DEFINITION DE LA LOI DE DARCY

La loi de DARCY indique la résistance opposée par le milieu poreux à l'écoulement de l'eau.

Généralement, la vitesse est faible, l'écoulement est alors laminaire.

La résistance à l'écoulement est proportionnelle au débit, comme l'a trouvé expérimentalement DARCY. (FIG N°. 1)

$$\frac{\Delta H}{L} = \frac{Q}{KS}$$

$$\text{ou } v = \frac{\Delta H}{L} \cdot K$$

avec $I = -\frac{\Delta H}{L}$ gradient hydraulique

Q = débit à travers le milieu poreux.

ΔH = perte de charge.

S = section du milieu poreux.

K = coefficient dépendant du milieu poreux et souvent de la direction de la vitesse appelé perméabilité.

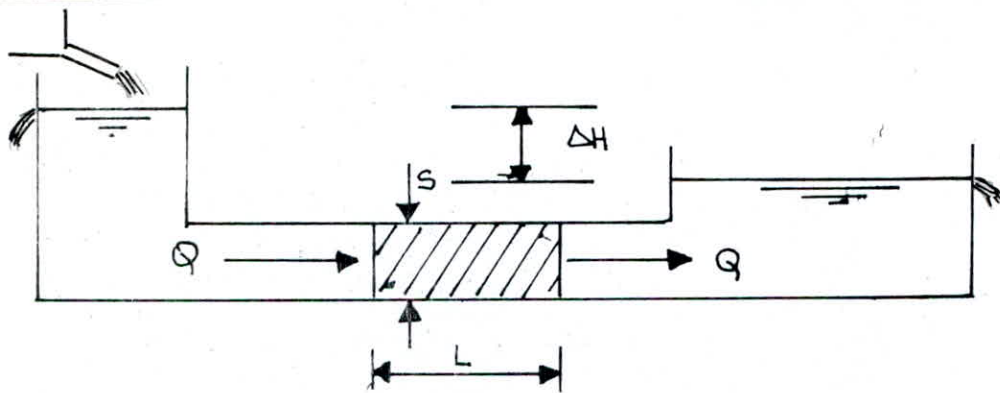


FIG No. 1

DIFFERENTES VITESSES DE FILTRATION

La loi de DARCY nous met ainsi en présence de trois vitesses :

- ① \rightarrow Le quotient $\frac{Q}{S}$ (débit par unité d'aire) qui représente le débit liquide, divisé par la section totale de la colonne filtrante. C'est une vitesse fictive, qu'on appelle vitesse de filtration.
- ② \rightarrow V n'est pas la vitesse réelle de l'eau, qui ne circule que dans les creux entre les grains. Cette vitesse réelle se déduit de la précédente en considérant la porosité, $V' = \frac{V}{P}$ (P : Porosité effective)
- ③ \rightarrow ΔH et ΔP ayant tous deux la dimension d'une longueur, K a la dimension d'une vitesse, μ mesure la perméabilité relative à un fluide donné, celle du milieu poreux par rapport au liquide filtrant. C'est la vitesse de filtration, qui résulterait de l'imposition d'un gradient unité.

● Porosité effective : $P = \frac{\text{Volume des vides se remplissant ou se vidant d'eau}}{\text{Volume total}}$

* Porosité et perméabilité : Ces deux grandeurs dépendent de la grosseur, de la forme et de l'agencement des particules.

CONDITIONS, DOMAINES ET LIMITES DE VALIDITE DE LA LOI DE DARCY

Conditions de validité de la loi de DARCY

La loi de DARCY impose :

- Un écoulement en régime laminaire.
- Un milieu homogène et isotrope.
- effets d'inertie négligeables.

Domaine de validité de la loi de DARCY

La loi de DARCY est applicable, pour des sols constitués d'éléments fins et pulvérulents, constituant des massifs poreux (sable, gravier), appelés terrains perméables en petit. Dans le cas de l'écoulement à travers des fissures diaclases, ou griffons appelés terrains perméables en grand, elle n'est plus valable. Il faut faire appel à d'autres lois, qui ne rentrent pas dans notre cadre.

Limites de validité de la loi de DARCY

On définit un nombre de Reynolds pour l'écoulement d'un milieu poreux :

$$R = \frac{VD_{10}}{\nu}$$

D_{10} : diamètre efficace (diamètre utile des vides, donc en relation étroite avec la porosité).

V : vitesse apparente de filtration.

ν : viscosité cinématique.




D_{10} : Diamètre effective des grains qui correspond à l'ouverture du tamis qui laissant, passer 10% du poids de l'échantillon du sol.

La loi de DARCY cesse d'être valable lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement excède une valeur limite R_c .

La cause de la non validité de cette loi au delà de R_c , a été très discutée. L'opinion la plus couramment répandue à ce sujet, fait coïncider ce seuil de validité avec l'apparition de la turbulence.

Conclusion

En définitif, la loi de DARCY est valable sous réserve des hypothèses suivantes :

-  Écoulement laminaire.
-  Milieu homogène et isotrope.
-  Unité du fluide.

GÉNÉRALISATION DE LA LOI DE DARCY

Sous les hypothèses : homogénéité, isotropie, SLICHTER a généralisé la loi de DARCY sous la forme : $\vec{V} = -K \vec{\text{grad}} H$ dans un espace à trois dimensions.

La projection sur les trois axes conduit :

$$\vec{V} \begin{cases} u = -K \frac{dH}{dx} \\ v = -K \frac{dH}{dy} \\ w = -K \frac{dH}{dz} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Cette généralisation consiste à admettre que la loi} \\ \text{de DARCY est valable en tout point du terrain et} \\ \text{dans toutes les directions.} \end{array}$$

En considérant l'équation de continuité $\text{div} \vec{V} = 0$ qui exprime l'incompressibilité du liquide :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{V} &= \text{div} (-K \vec{\text{grad}} H) = -K \text{div} (\vec{\text{grad}} H) \\ \vec{\text{grad}} H &= \frac{\partial H}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial H}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial H}{\partial z} \vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} H) = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \Delta H = 0$$

$\Delta H = 0$ équation de Laplace appelée aussi équation fondamentale de l'hydraulique souterraine pour un fluide incompressible circulant dans un terrain homogène isotrope.

REMARQUE

Les équations de Darcy et de continuité, suffisent à déterminer les écoulements souterrains, si toutefois on connaît les caractéristiques hydrauliques d'un sol en chacun de ces points, c'est à dire sa porosité et sa perméabilité.

COHERENCE DE LA LOI DE DARCY AVEC LA LOI HYDRODYNAMIQUE

La dynamique des fluides visqueux est régie par la loi de Navier-Stokes

$$\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p = \vec{F} - \vec{\delta} + \nu \Delta \vec{V} \quad (1)$$

- $\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} p$: force de pression.
- \vec{F} : force extérieure.
- $-\vec{\delta}$: force d'inertie résultant du mouvement.
- $\nu \Delta \vec{V}$: force de viscosité.

- $F = [0, 0, -g]$ dans le cas d'un milieu poreux.
- $\vec{\delta} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 0$ (faible effet d'inertie)
- En posant $P^* = P + \rho g z = \phi \omega$: pression effective.

L'équation (1) devient :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta v_x \\ 0 &= 0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta v_y \\ 0 &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta v_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} P^* = \nu \Delta \vec{V} \quad (2)$$

On applique l'opérateur divergence aux deux membres de l'équation

② et en tenant compte de l'équation de continuité $\text{div } \vec{V} = 0$.

$$\frac{1}{\rho} \text{div}(\vec{\text{grad}} p^*) = \nu \text{div}(\Delta \vec{V}) \quad \rho \text{ et } \nu \text{ constantes}$$

$$\vec{\text{grad}} p^* = \frac{\partial p^*}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p^*}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p^*}{\partial z} \vec{k}$$

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} p^*) = \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = \Delta p^*$$

$$\Delta \vec{V} = \Delta u \vec{i} + \Delta v \vec{j} + \Delta w \vec{k}$$

$$\text{div}(\Delta \vec{V}) = \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial \Delta w}{\partial z}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\text{div}(\Delta \vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]$$

$$\text{div}(\Delta \vec{V}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

$$\implies \nu \text{div}(\Delta \vec{V}) = 0 \text{ d'où } \Delta p^* = 0$$

on a $\begin{cases} \Delta p^* = 0 \\ \text{div } \vec{V} = 0 \end{cases} \implies -c \Delta p^* = 0$ c étant une constante.

On peut écrire $\Delta p^* = -\frac{1}{c} \text{div } \vec{V}$

$$\Delta p^* = \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = -\frac{1}{c} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -c \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -c \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} \\ \frac{\partial w}{\partial z} = -c \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} \end{cases} \implies \begin{cases} u = -c \frac{\partial p^*}{\partial x} \\ v = -c \frac{\partial p^*}{\partial y} \\ w = -c \frac{\partial p^*}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} = -c \underbrace{\left[\frac{\partial p^*}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p^*}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p^*}{\partial z} \vec{k} \right]}_{\vec{\text{grad}} p^*}$$

d'où $\vec{V} = -c \vec{\text{grad}} p^*$

$p^* = \phi \omega \xrightarrow{\text{on pose } K = c\omega} \vec{V} = -c\omega \vec{\text{grad}} \phi \implies \boxed{\vec{V} = -K \vec{\text{grad}} \phi}$



THEORIE DE DUPUIT

-2-

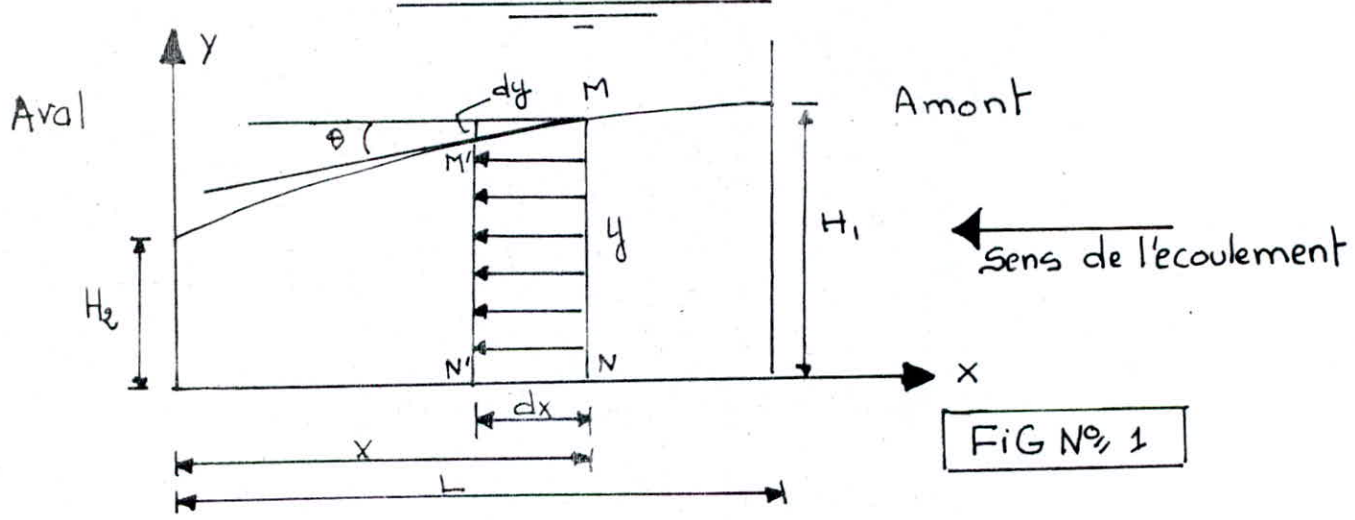
THEORIE DE DUPUIT

THEORIE DE DUPUIT

HYPOTHESES DE DUPUIT

○ → suppose le milieu homogène et isotrope, substratum horizontal, incompressibilité de l'eau et du milieu homogène, régime permanent.

○ → La théorie du Dupuit revient à admettre que, les composantes verticales des vitesses sont négligeables, et que les composantes horizontales sont égales sur chaque verticale, ces vitesses sont proportionnelles aux pertes de charge.



Si on considère le filet liquide superficiel traversant en M et M' deux tranches infiniment voisines MN et M'N' la perte de charge unitaire entre M et M' a pour expression exacte d'après DARCY: $J = \frac{dy}{MM'} = \sin \theta$

La théorie du Dupuit suppose $J_D = \frac{dy}{dx} = \tan \theta$.

Cette condition reste valable tant que θ est petit, c'est à dire lorsqu'on se trouve assez éloigné de l'extrémité aval de la nappe, par contre, cette hypothèse est en défaut, lorsque la pente superficielle

de la nappe atteint des valeurs assez grandes.

○ REMARQUE

La loi de DARCY signifie, d'une façon générale, que l'eau coule vers les points, où la charge est plus faible. Dans le cas de l'hypothèse de Dupuit, elle signifie, que l'eau coule suivant les lignes de plus grande pente de la surface libre.

○ DETERMINATION DE L'ÉQUATION DE LA SURFACE LIBRE ○

D'après Dupuit : $J_D = \frac{dy}{dx} = \text{tg } \theta$

L'équation de continuité : $Q = v \cdot s$

$v = K J_D = K \frac{dy}{dx}$, $s = y \cdot 1$ (En considérant une tranche de longueur unité.)

$Q = v \cdot s = K \cdot y \frac{dy}{dx}$ (Débit à travers la tranche considérée)

$Q dx = K y dy$

l'intégrale donne : $\int Q dx = \int K y dy$

$Q x = K \frac{y^2}{2} + C$ équation d'une parabole

Pour $x = 0$ $y = H_2$

$0 = K \frac{H_2^2}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{K H_2^2}{2}$

d'où $Q \cdot x = \frac{K}{2} (y^2 - H_2^2)$ ①

Expression du débit :

$Q dx = K y dy$

$\int_0^L Q dx = \int_{H_2}^{H_1} K y dy \Rightarrow QL = \frac{K}{2} (H_1^2 - H_2^2)$

$Q = \frac{K}{2L} (H_1^2 - H_2^2)$ ②

de (1) On a $Q = \frac{K}{2L} (y^2 - H_2^2)$

En égalisant () et () $\Rightarrow \frac{K}{2L} (y^2 - H_2^2) = \frac{K}{2L} (H_1^2 - H_2^2)$

$y^2 = \frac{x}{L} (H_1^2 - H_2^2) + H_2^2$

équation de la surface libre.

L : longueur entre les deux hauteurs H_1 et H_2 .

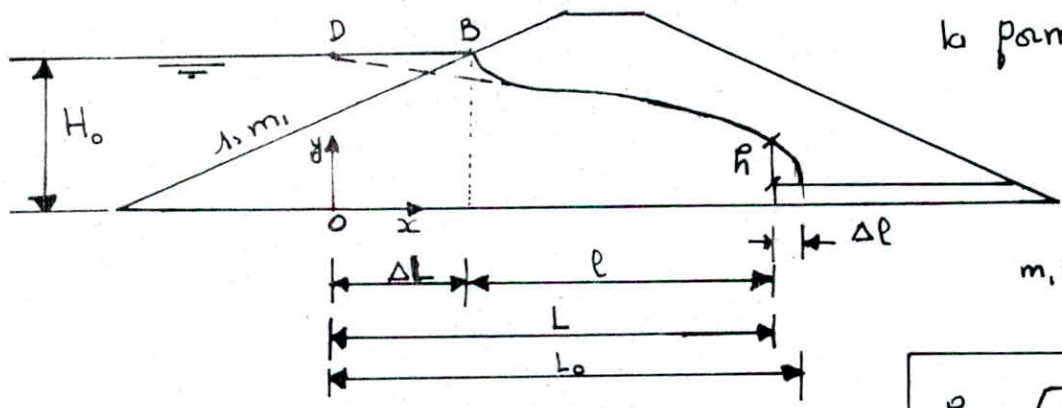
H_1 : hauteur Amont.

H_2 : hauteur Aval.

APPLICATION

Cas d'un barrage en terre homogène avec drain

La méthode utilisée dite méthode hydraulique (semi-empirique) qui, découle de celle du Dupuit, donne l'équation de la ligne de saturation sous la forme décrite ci-dessous



$m_1 =$ pente Amont.

équation de la ligne de saturation

$y = H_0 \sqrt{1 - \frac{x}{L_0}}$

$L_0 = L + \Delta L$
 $L = l + \Delta L$
 $\Delta L = \frac{m_1 \cdot H_0}{1 + 2m_1}$

$H = \sqrt{L_0^2 + H_0^2} - L_0$
 $H = \frac{H_0^2}{2L_0} = \frac{q}{K}$

REMARQUE

La forme de la ligne de saturation ne dépend pas de K coefficient de perméabilité, mais de la forme géométrique du massif.



-3-

ÉCOULEMENT À POTENTIEL DES VITESSES

ÉCOULEMENT A POTENTIEL DES VITESSES

DEFINITION

Si les composantes u, v et w du vecteur vitesse \vec{V} , sont des dérivées partielles par rapport à x, y et z d'une fonction $\varphi(x, y, z)$ appelée potentiel des vitesses, l'écoulement est appelé écoulement à potentiel des vitesses.

Si l'écoulement se fait dans un plan, il sera caractérisé par deux réseaux de courbes :

○ → Les lignes de courant le long de chacune desquelles la fonction de courant ψ reste constante.

○ → Les lignes équipotentiels le long de chacune desquelles le potentiel φ reste constant.

Les deux fonctions ψ et φ sont des fonctions harmoniques : $\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \Delta\psi = 0 \end{cases}$

Ce double réseau a la propriété d'être orthogonal :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{array} \right.$$

équations de Cauchy - Riemann

La généralisation de la loi de DARCY, a permis d'écrire les composantes de la vitesse de filtration, le long des deux axes de coordonnées (En considérant l'écoulement plan) sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -K \frac{\partial H}{\partial x} \\ v = -K \frac{\partial H}{\partial y} \end{array} \right. \quad \text{avec } H = f(x,y) \text{ charge hydraulique} \quad (1)$$

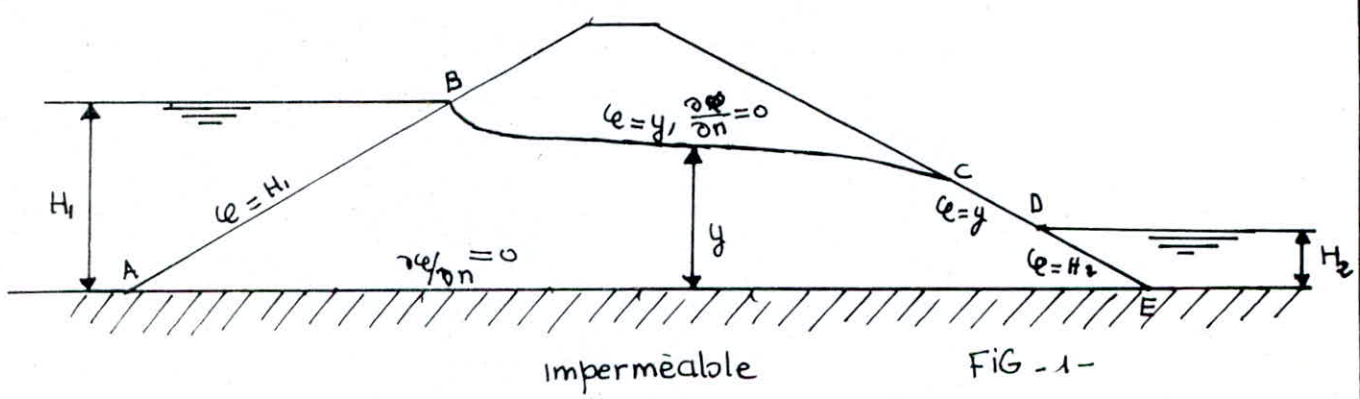
Si on pose $\varphi = -KH \longrightarrow \varphi(x,y) = -KH(x,y)$

Le système (1) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{array} \right.$$

\longrightarrow donc il s'agit bien d'un écoulement à potentiel des vitesses $\varphi(x,y) = -K(H(x,y)) \equiv$ fonction potentiel.

CONDITIONS AUX LIMITES DE L'ECOULEMENT



Un écoulement à potentiel des vitesses, ne peut être calculé que, si on connaît d'une part les limites de l'écoulement, d'autre part les conditions sur ces limites.

Ces dernières sont faciles à déterminer par des considérations physiques. On distingue trois types de conditions :

① → La vitesse de filtration est tangente à toute surface imperméable. Sur cette dernière la condition sera par conséquent :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

② → Dans une masse d'eau libre, les pertes de charges sont nulles, en comparaison de celles qui règnent à l'intérieur du massif poreux. Une telle masse est donc à potentiel constant, et la condition à appliquer à la surface de séparation de l'eau libre et de l'eau contenue dans le massif est :

$$\varphi = \text{constante}$$

③ → Sur toutes les surfaces le long desquelles l'écoulement de filtration est en contact avec l'air, la pression est égale à la pression atmosphérique $P_a = 0$. On a donc sur ces surfaces la condition :

$$\varphi = y$$

sur la figure -A-, la condition ① est valable le long de l'imperméable AE

La condition ② régit sur AB et DE, surfaces équipotentielles.

La condition ③ s'applique à la surface libre BC et au segment de suintement CD.

REMARQUE

Les écoulements à potentiel des vitesses, sont étudiés

suivant trois catégories de méthodes :

- méthode analytique ou numérique
- méthode graphique
- méthode analogique



4

METHODE SEMI_EMPIRIQUE DE KOZENY

MÉTHODE SEMI-EMPIRIQUE DE KOZENY

CAS D'UNE DIGUE SUR FONDATION IMPERMEABLE AVEC TAPIS FILTRANT

On suppose l'homogénéité et l'isotropie du massif.

A partir du potentiel complexe : $\omega = \varphi + i\psi = \sqrt{2c}Z$, $z = x + iy$

$$(\varphi + i\psi)^2 = (\sqrt{2c}Z)^2 \quad c = \text{cte}$$

$$\varphi^2 + 2i\varphi\psi - \psi^2 = 2cx + 2ciy$$

Par identification

$$\textcircled{1} \begin{cases} \varphi^2 - \psi^2 = 2cx \\ \varphi\psi = cy \end{cases}$$

Pour la ligne de saturation $\psi = c$, $\varphi = y$.

En résolvant le système $\textcircled{1}$, les équations des lignes de courant,

lignes équipotentielles s'écrivent :

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{2\psi^2}{c} \left(x + \frac{\psi^2}{2c} \right) \\ y^2 &= \frac{2\varphi^2}{c} \left(\frac{\varphi^2}{c} - x \right) \end{aligned}$$

REMARQUE

→ $y^2 = \frac{2\psi^2}{c} \left(x + \frac{\psi^2}{2c} \right)$ sont des paraboles de foyer F à l'origine et d'ordonnée à l'origine $y = p = \frac{\psi^2}{c}$. Elles recoupent l'axe ox à l'ordonnée $x = -\frac{p}{2}$.

→ $y^2 = \frac{2\varphi^2}{c} \left(\frac{\varphi^2}{c} - x \right)$ sont des paraboles de foyer à l'origine F, l'ordonnée à l'origine est $y = q = \frac{\varphi^2}{c}$ et l'axe ox est recoupé à l'abscisse $x = +\frac{q}{2}$.

Pour la ligne de saturation, $\psi = c$, $\varphi = y$ d'où l'équation de

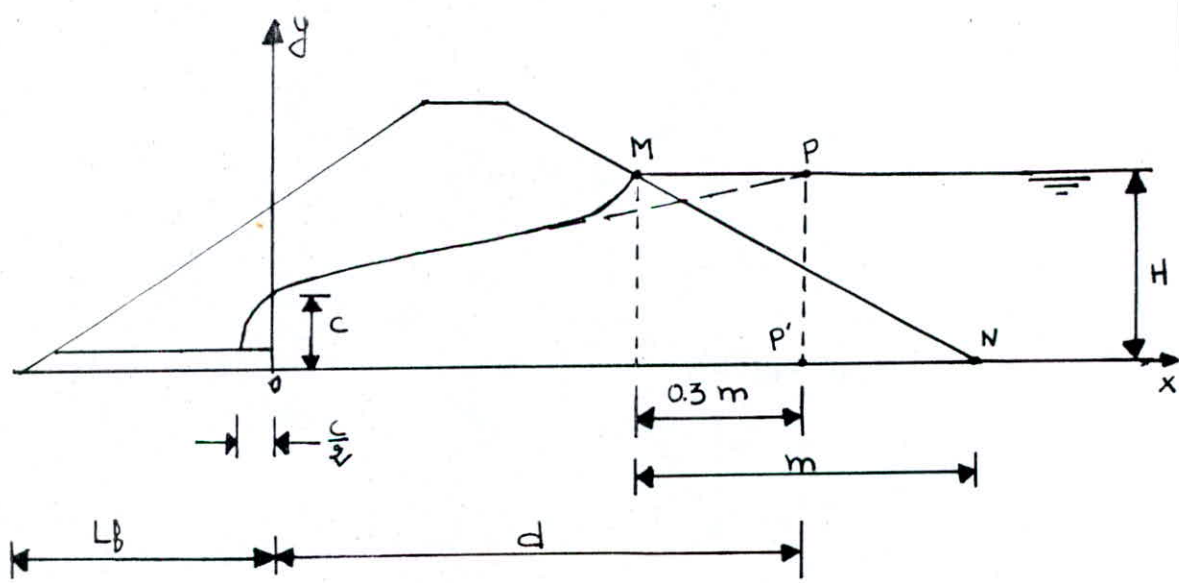
base de la ligne de saturation :

$$y^2 = 2 \frac{c^2}{c} \left(x + \frac{c}{2}\right) = 2c \left(x + \frac{c}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y^2 = c(2x + c)}$$

Paraboles de KOZENY.

CASAGRANDE a montré que celle de ces paraboles qui passe par le point p tel que PM soit égal au 3/10 de la projection horizontale m de la portion de la face amont du massif en contact avec l'eau de la retenue se confond sensiblement avec la ligne de saturation.

SCHEMA



En égalisant l'équation de KOZENY $y^2 = c(2x + c)$ et l'équation du cercle $x^2 + y^2 = R$ on obtient $x = R - c$.

Pour $x = d \Rightarrow c = R - d$ avec $R = \sqrt{d^2 + H^2}$ d'où $\boxed{c = \sqrt{d^2 + H^2} - d}$

avec H = hauteur de la retenue

$$d = L - 0,7m - L_f$$

L : largeur de la digue

L_f : largeur du tapis filtrant.

EXPRESSION DU DEBIT DE FUITE

q : débit traversant une tranche d'épaisseur unité de la digue se

calcule à partir de : $\varphi \cdot \psi = cy$

Pour la ligne de saturation :

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = y = H \\ \psi = \psi_p \end{array} \right\} \Rightarrow H\psi_p = cH \Rightarrow \underline{\psi_p = c}$$

Pour la ligne de courant coïncidant avec la surface de fondation $\psi_0 = 0$.


Le débit q est donné par $q = K(\psi_p - \psi_0)$

$$\Rightarrow q = K \cdot c \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{H^2 + d^2} - d$$

$$\text{d'où } \boxed{q = K(\sqrt{H^2 + d^2} - d)}$$

REMARQUE

Dans le cas anisotrope, si l'on désigne par K_v et K_h les perméabilités dans les directions verticale et horizontale $K_v \neq K_h$, on adopte un coefficient de perméabilité moyen $K = \sqrt{K_v \cdot K_h}$, et pour tracer la ligne de saturation, on déforme le profil de la digue en multipliant les dimensions horizontales par le facteur $\sqrt{K_v/K_h}$.



◦ ◦ ◦ ◦ CHAPITRE

-2-

ÉCOULEMENT NON PERMANENT

ÉCOULEMENT NON PERMANENT

INTRODUCTION

Les écoulements de filtration non permanents, possédant une surface libre, qui se déforme dans le temps par suite d'une variation brusque ou continue, d'une ou plusieurs conditions aux limites, peuvent être classés en deux catégories :

- → Les écoulements pour lesquels les composantes verticales de la vitesse sont négligeables devant les composantes horizontales.
- → Les écoulements pour lesquels les composantes verticales de la vitesse sont sensibles.

Dans notre suivante étude, nous nous placerons dans la première catégorie d'écoulement.

HYPOTHESES DE BASE

Nous admettons comme hypothèses les trois points suivants :

- → L'écoulement suit la loi de DARCY

$$\begin{cases} u = -K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = -K \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \quad \begin{array}{l} u, v \text{ composantes horizontale et} \\ \text{verticale de la vitesse de filtration.} \end{array}$$

K : coefficient de DARCY

φ = charge hydraulique $\varphi = \frac{p}{\rho g} + y$

Ces deux équations sont valables à chaque instant.

- → Le liquide filtrant et le milieu poreux sont incompressibles.

Cette hypothèse se traduit par l'équation de continuité :

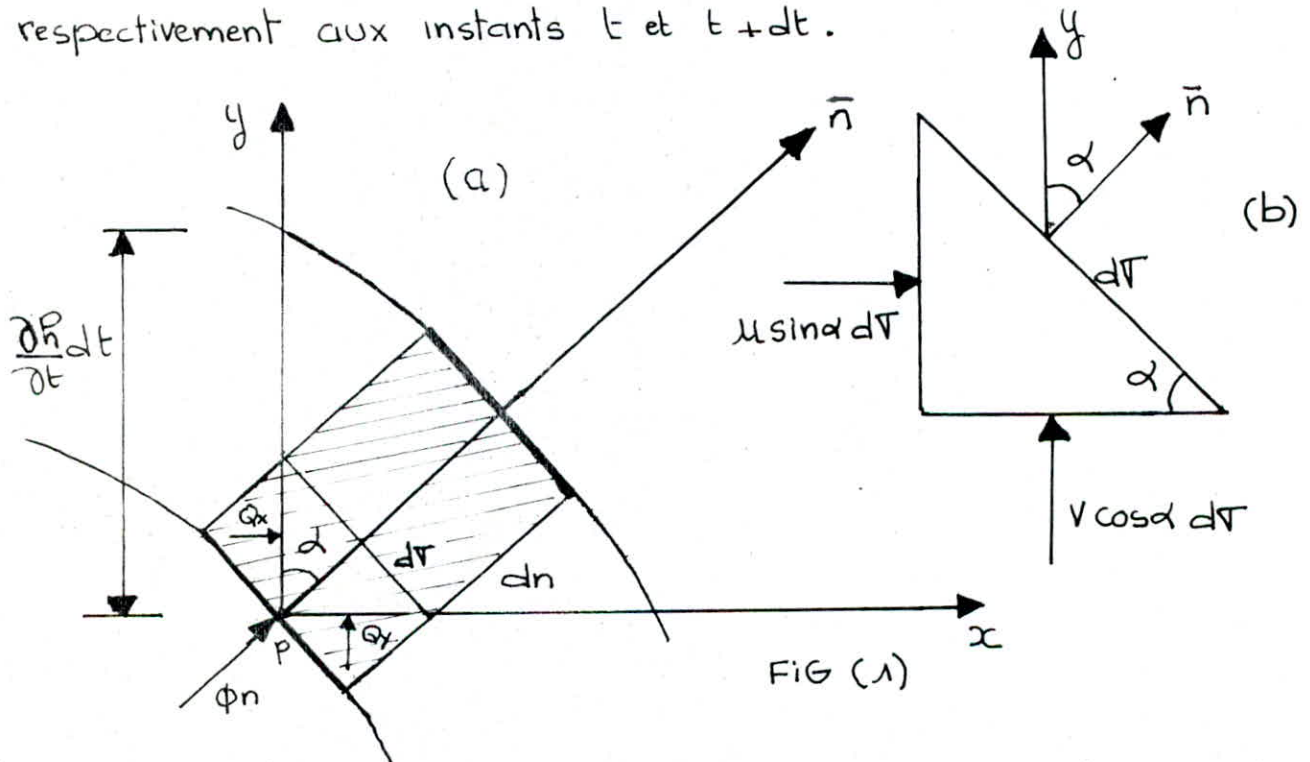
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

○ → L'inertie est négligeable.

Cette hypothèse est justifiée par le fait que les vitesses restent toujours très faibles, ainsi que leurs variations dans le temps.

○ MISE EN ÉQUATION DU MOUVEMENT DE LA SURFACE LIBRE ○

Soient deux surfaces libres successives (FIG 1) correspondant respectivement aux instants t et $t + dt$.



Le mouvement de la surface libre d'une position à l'autre se fait sous l'effet du flux qui la traverse.

Si nous appelons Φ_n le flux qui traverse l'unité de surface dS de normale \bar{n} , nous pouvons écrire que le flux qui la traverse pendant le temps dt , est égal au volume des vides du petit parallélépipède $dS \cdot dn$, hachuré sur la figure ①.

$$\Phi_n \cdot dS \cdot dt = e \cdot dS \cdot dn \quad \text{①}$$

$$[\Phi_n] = m/s$$

$$[d\tau] = m$$

$$[dt] = s$$

$$[dn] = m$$

e = indice des vides du milieu poreux.

= rapport du volume des vides au volume de la matière solide.

L'accroissement de la cote verticale h de la surface libre au point p de cette dernière est $\frac{\partial h}{\partial t} dt$.

Sur la figure (1-a) on a :
$$dn = \frac{\partial h}{\partial t} dt \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

α étant l'angle que fait la normale \bar{n} avec la verticale.

Par ailleurs, le flux qui traverse la petite surface $d\tau$ peut s'écrire en appliquant l'équation de continuité au petit prisme de la figure (1-b) :

$$\Phi_n d\tau = u \sin \alpha d\tau + v \cos \alpha d\tau \quad (3)$$

où u et v sont les composantes de la vitesse de filtration.

En combinant les équations (1), (2) et (3) on obtient :

$$e \frac{\partial h}{\partial t} \cos \alpha d\tau \cdot dt = u \sin \alpha \cdot d\tau \cdot dt + v \cos \alpha d\tau dt \quad (4)$$

$$\tan \alpha = - \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$u = -k \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v = -k \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

En les remplaçant dans (4)

$$\Rightarrow e \frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} - k \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Nous obtenons ainsi l'équation aux dérivées partielles qui régit

le mouvement de la surface libre :

$$\frac{e}{k} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (5)$$

On voit que deux fonctions figurent dans l'équation (5) d'une part l'élevation $y = h(x, t)$ de la surface libre, d'autre part la charge hydraulique $\varphi(x, y, t)$.

En régime non permanent à chaque instant la fonction φ sera déterminée par les conditions aux limites :

○ → surface imperméable $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \forall t$

○ → surfaces équipotentiels $\varphi = \text{constante}$

○ → surface libre $\varphi = y = h(t)$

Dérivons $\varphi = y = h$ à t constant le long de la surface libre :

$$\varphi = \varphi(x, y, t) = h(x, t)$$

⑥ À $t = \text{constante}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial x} \\ y = h &\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

On tire $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial h}{\partial x}} \quad \text{⑥}$$

Dérivons $\varphi = y = h$ à x constant en suivant la surface libre dans son mouvement $\varphi(x, y, t) = h(x, t)$

⑦ $x = \text{constant}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \text{avec } y = h$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \left(1 - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)} \quad \text{⑦}$$

En introduisant les relations (6) et (7) dans l'equation (5)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} / \left(1 - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} / \left(1 - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

$$\frac{e}{k} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} / \left(1 - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} / \left(1 - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\boxed{\frac{e}{k} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial \phi}{\partial y}} \quad (8)$$

Comme ϕ est une fonction harmonique par rapport à x et y .

Nous pouvons écrire :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 = \phi \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 = \phi \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

d'où l'equation (8) devient :
$$\boxed{\frac{e}{k} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial \phi}{\partial y}} \quad (9)$$

Comme la composante verticale de la vitesse est négligeable devant la composante horizontale, $\phi = h$.

L'equation précédente devient :

$$\boxed{\frac{e}{k} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right)} \quad (10)$$

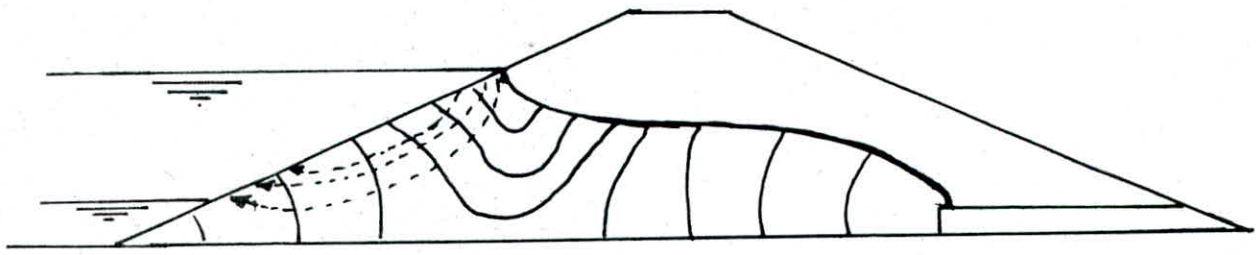
L'equation obtenue est appelée équation de Boussinesq.

ETUDE DE VARIATION DE LA SURFACE LIBRE AU COURS D'UNE VIDANGE RAPIDE

○ Définition d'une vidange rapide :

On parle d'une vidange rapide lorsque, le niveau d'eau de la retenue descend brusquement et que, la ligne de saturation reste (ou 95%)

à sa position initiale, les lignes de courant, les équipotentielles changent d'allure.



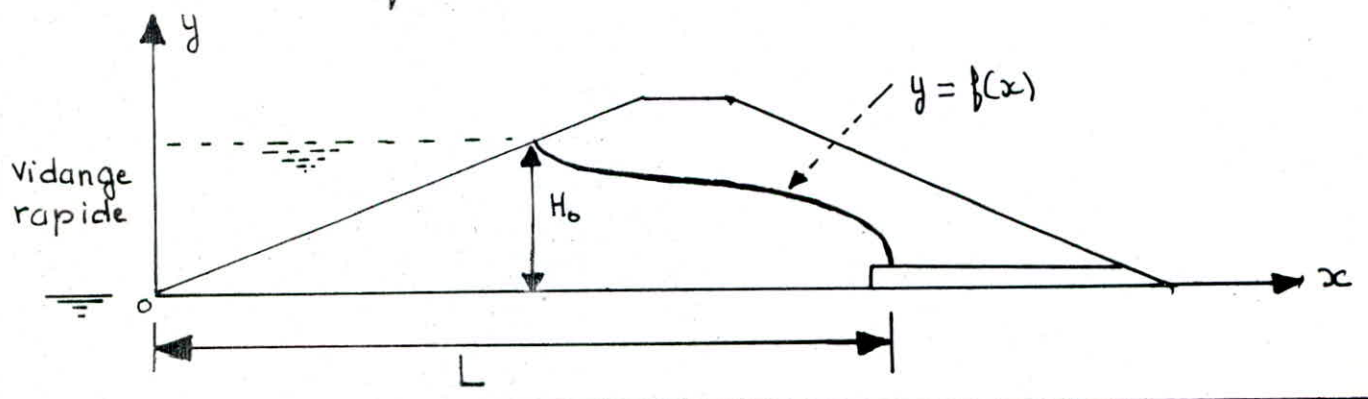
À la vidange rapide, du fait de la forte courbure de la surface libre, il peut y avoir de fortes variations de pression sur une même horizontale et ceci peut créer des risques pour la stabilité du parement amont. Il est donc nécessaire d'étudier assez finement le phénomène d'écoulement variable.

○ Problème à étudier

Notre problème consiste à déterminer à chaque instant (t) la position de la ligne de saturation en mouvement, c'est à dire $R(x,t)$, pour cela on utilise l'équation de Boussinesq:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(R \frac{\partial R}{\partial x} \right) = \frac{e}{k} \cdot \frac{\partial R}{\partial t}$$

Une méthode analytique permet la résolution de cette équation pour cela, on est amené à définir les conditions initiales et aux limites.



① → Conditions initiales

À $t=0$ l'écoulement étant permanent l'équation de la surface libre est donnée sous la forme :

$$h(x,0) = H_0 \sqrt{\frac{L-x}{L(1-B)}} = y(x)$$

② → Conditions aux limites

∀ t après la vidange rapide

$$0 \rightarrow h(0,t) = 0$$

$$0 \rightarrow h(L,t) = 0$$

③ Linéarisation de l'équation

$$\frac{e}{K} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (10)$$

C'est une équation différentielle non linéaire difficile à résoudre sauf dans quelques rares cas simples.

Dans le cas où les variations de h sont faibles par rapport à H , l'équation (10) peut être linéarisée, en utilisant h^2 comme une variable telle qu'elle la montre Polubarinova - Kochina (1962) $H = h^2$

Ainsi l'équation (10) devient :

$$\frac{e}{hK} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (11)$$

La linéarisation ~~de la forme~~ finale de cette équation est obtenue en remplaçant h par H_0 (hauteur de la retenue) dans l'équation (11)

$$\frac{e}{KH_0} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (12)$$

Posons $C_0^2 = \frac{e}{KH_0}$ l'équation (12) devient

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = C_0^2 \frac{\partial H}{\partial t}$$

C'est l'équation cherchée qui est une équation aux dérivées partielles

du second ordre analogue à l'équation dite "équation de la chaleur"

Les conditions initiales et aux limites énoncées précédemment deviennent:

$$\begin{cases} H(x, 0) = \frac{H_0^2}{L(1-B)} (L-x) = (c_f(x))^2 = f(x) \\ H(0, t) = 0 \\ H(L, t) = 0 \end{cases}$$

RESOLUTION PAR LA METHODE DE FOURIER

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{e}{kH_0} \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = c_0^2 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$H(x, 0) = H_0^2 \frac{L-x}{L(1-B)} \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\begin{cases} H(0, t) = 0 \\ H(L, t) = 0 \end{cases} \quad \forall t$$

Cherchons une solution particulière de l'équation donnée sous la forme : $H(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ ① satisfaisant aux conditions aux limites alors $H_{xx} = X''(x) \cdot T(t)$

$$H_t = X(x) \cdot T'(t)$$

Alors en remplaçant dans ① On obtient $X''(x) \cdot T(t) = c_0^2 X(x) \cdot T'(t)$

$$\implies \frac{X''(x)}{X} = c_0^2 \frac{T'(t)}{T} \quad ②$$

L'égalité ② a lieu seulement lorsque $\frac{X''}{X} = c_0^2 \frac{T'}{T} = \lambda$ est donc amené à résoudre les deux équations suivantes : $X'' - \lambda X = 0$ ③

$$c_0^2 T' - \lambda T = 0 \quad ④$$

La solution de l'équation ④ est $T(t) = \bar{c} e^{(\lambda/c_0^2)t}$

Ecrivons le polynôme caractéristique associé à ③ : $q(r) = r^2 - \lambda$

① \rightarrow 1^{er} cas $\lambda > 0, \lambda = 0$ conduisant à une solution triviale $H(x, t) \equiv 0$ et ceci est pas intéressant.

2

2^eme Cas

$\lambda < 0$ on peut poser $\lambda = -\omega^2 \implies$ la solution de l'équation (3)

est: $X(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

et $H(x,t) = X(x) \cdot T(t) = (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x) \cdot \bar{C} e^{\left(\frac{\omega^2 t}{c_0^2}\right)}$

Posons $H(x,t) = X(x) \cdot T(t) = (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x) e^{\left(\frac{-\omega^2 t}{c_0^2}\right)}$

\bar{C} étant introduite dans C_1 et C_2 .

Utilisons les conditions aux limites pour déterminer C_1 et C_2 .

$H(0,t) = C_1 e^{\left(\frac{-\omega^2 t}{c_0^2}\right)} = 0 \implies C_1 = 0$

$H(x,t) = C_2 \sin \omega x e^{\left(\frac{-\omega^2 t}{c_0^2}\right)}$

$H(L,t) = C_2 \sin \omega L e^{\left(\frac{-\omega^2 t}{c_0^2}\right)} = 0$

$\implies \left\{ \begin{array}{l} \text{si } C_2 = 0 \implies H \equiv 0 \text{ solution triviale} \\ \text{si } C_2 \neq 0 \implies \sin \omega L = 0 \implies \omega L = n\pi \end{array} \right.$

Les valeurs propres sont $\omega_k = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$

($n = 0$ est à exclure car $H \equiv 0$)

Les fonctions propres solutions sont: $H_n(x,t) = C_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot e^{\left(\frac{-n^2 \pi^2 t}{c_0^2 L^2}\right)}$

On peut alors montrer que $H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x,t)$ est une solution

du problème avec conditions aux limites $\left\{ \begin{array}{l} H_{xx} = c_0^2 H_t \\ H(0,t) = H(L,t) = 0 \end{array} \right.$

On peut la considérer comme solution générale du problème posé.

On choisit les constantes C_n telles que $H(x,t)$ satisfasse aux conditions initiales.

Posons $H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\left(\frac{-n^2 \pi^2 t}{L^2 c_0^2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

$H(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x) \implies C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n=1, 2, \dots$

et la solution de l'équation proposée satisfaisant aux conditions

aux limites et initiales est :

$$H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2 c_0^2}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}$$

Puisque $f(x) = H_0^2 \frac{L-x}{L(1-B)}$ $0 \leq x \leq L$ alors $C_n = \frac{2}{L} \int_0^L H_0^2 \frac{L-x}{L(1-B)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$

Pour le calcul de cette integrale Posons $A = \frac{2 H_0^2}{L^2(1-B)}$ et $a = \frac{n\pi}{L}$

$$C_n = A \int_0^L (L-x) \sin(ax) \cdot dx$$

Integrerons par parties: $\int u dv = uv - \int v du$

$$u = L-x \implies du = -1 \cdot dx$$

$$dv = \sin ax \implies v = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\implies C_n = A \left[-(L-x) \left(\frac{1}{a} \cos ax \right) - \frac{1}{a} \int \cos ax \, dx \right]$$

$$I' = \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$C_n = A \left[\frac{x-L}{a} \cdot \cos ax - \frac{1}{a^2} \sin ax \right]_0^L = \frac{2 H_0^2}{L^2(1-B)} \left[\frac{(x-L)L}{n\pi} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]_0^L$$

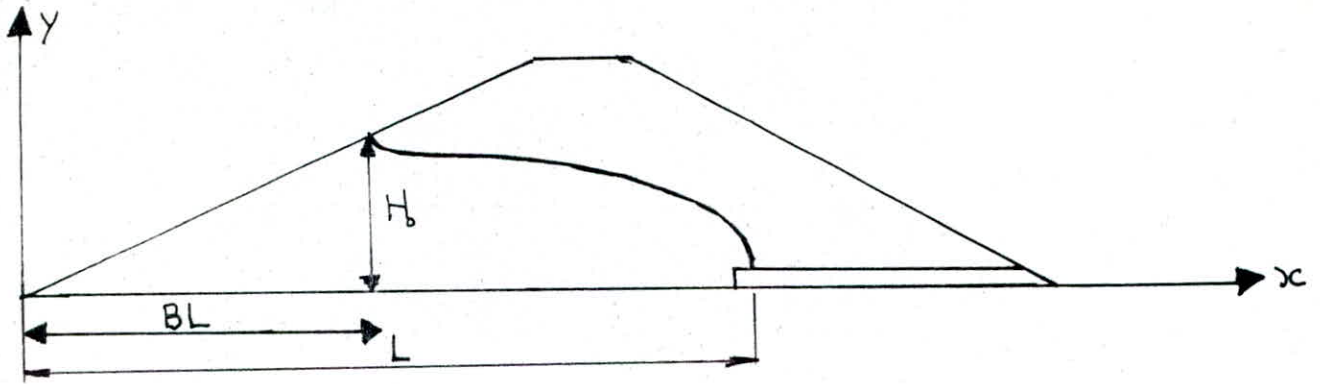
$$C_n = \frac{2 H_0^2}{L^2(1-B)} \cdot \frac{L^2}{n\pi} \implies C_n = \frac{2 H_0^2}{n\pi(1-B)}$$

$$H(x,t) = \frac{2 H_0^2}{1-B} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2 c_0^2}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{n\pi}$$

$$\implies \boxed{\hat{h}(x,t) = H_0 \sqrt{\frac{2}{1-B} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2 c_0^2}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{n\pi}}$$

Considerons maintenant le cas où On prend la fonction de KOZENY comme condition initiale.

$$\hat{h}(x,0) = \sqrt{2e(L-x)} \quad \text{avec } e = \sqrt{H_0^2 + d^2} - d$$



Les conditions aux limites : $\begin{cases} h(0,t) = 0 \\ h(L,t) = 0 \end{cases}$

Après linearisations $\begin{cases} H(x,0) = 2e(L-x) \\ H(0,t) = 0 \\ H(L,t) = 0 \end{cases}$

Pour la résolution de l'équation de Boussinesq linéarisée, on fait le même raisonnement avec le cas du Dutoit sauf que :

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L 2e(L-x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{4e}{L} \int_0^L (L-x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$C_n = \frac{4e}{L} \frac{L^2}{n\pi} \Rightarrow c_n = \frac{4eL}{n\pi}$$

$$H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4eL}{n\pi} \cdot \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2 c^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\Rightarrow R(x,t) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2 c^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}{n\pi}} \cdot 2\sqrt{eL}$$



• ○ ○ ○ CHAPITRE -3-

ETUDE SUR
MODELE HELE SHAW

MODELE HELE-SHAW

ECOULEMENT DE HELE SHAW

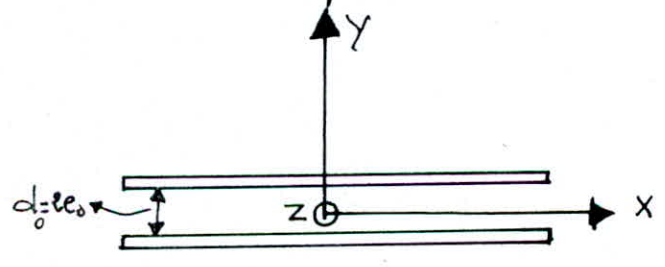
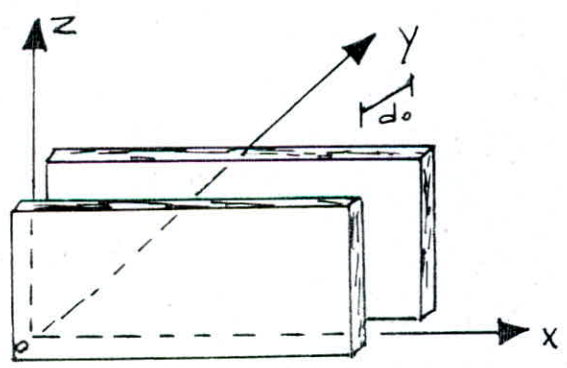
o Definition :

L'écoulement de Hele-Shaw est un écoulement visqueux en régime laminaire entre deux plaques verticales parallèles rapprochées.

Les conditions aux limites étant quelconques.

o Equations générales

Considérons l'écoulement d'un liquide visqueux entre deux plaques verticales rapprochées, placées à une distance $d = 2e$ l'une de l'autre (Fig 1). Le plan axial vertical étant confondu avec xOz .



(FIG N° 1)

Soient u, v et w les composantes de la vitesse \vec{V} suivant ox, oy et oz en un point du liquide.

L'écoulement étant assez lent d'où le régime est laminaire, obéissant aux équations de NAVIER-STOKES:

Projection suivant OX

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Projection suivant oy

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \gamma - \frac{dw^y}{dt} + \nu \Delta w^y \quad (I)$$

Projection suivant oz

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = z - \frac{dw^z}{dt} + \nu \Delta w^z$$

L'une des hypothèses de l'écoulement entre deux plans parallèles verticales impose que, les forces massiques sont négligeables $X=Y=Z=0$

En développant les équations (I) le système devient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\mu \frac{\partial v}{\partial x} - \nu \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial t} + \nu \Delta v \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial w}{\partial x} - \nu \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t} + \nu \Delta w \end{aligned} \right\} (II)$$

avec $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ opérateur laplacien.

Compte tenu de l'équation de continuité : $\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0}$

Le liquide étant incompressible, l'écoulement étant permanent donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \rho = \text{cte} \implies \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

ρ est constante $\implies \rho \text{div} \vec{v} = 0 \implies \boxed{\text{div} \vec{v} = 0}$

$$\boxed{\text{div} \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0} \quad (III)$$

L'écoulement de Héle-Shaw suppose valables les deux hypothèses suivantes :

- \longrightarrow L'écoulement est bidimensionnel de sorte que $w = 0$
- \longrightarrow La distance $d_0 = 2e_0$ est petite de sorte que les composantes u, v de la vitesse \vec{v} varient beaucoup plus rapidement dans

le sens oy que dans le sens ox, oz, Par suite les dérivées partielles

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial z}$ sont négligeables devant $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$.

en moyennant les hypothèses précédentes l'écoulement étant permanent

(v indépendante de t $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$)

Le système (II) devient:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \text{(IV)}$$

ANALOGIE DE HELE SHAW

o Définition :

c'est l'analogie qui existe entre l'écoulement d'un fluide visqueux entre deux plans de faible écartement et l'écoulement plan dans un milieu perméable.

o Principe de l'analogie HELE-SHAW :

Comme toute analogie, celle ci est fondée sur l'identité des modèles mathématiques en variables réduites, du phénomène prototype d'une part, et de l'écoulement entre faces d'autre part.

Partant du système IV

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ (1)} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \text{ (2)} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \text{ (3)} \end{aligned} \right\} \longleftrightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ p &= p(x, z) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \text{ avec } \nu = \frac{\gamma}{\rho}$$

Posons $\frac{\partial P}{\partial x} = a = f(y)$, l'équation ① devient : $\gamma \frac{d^2 u}{dy^2} = a$

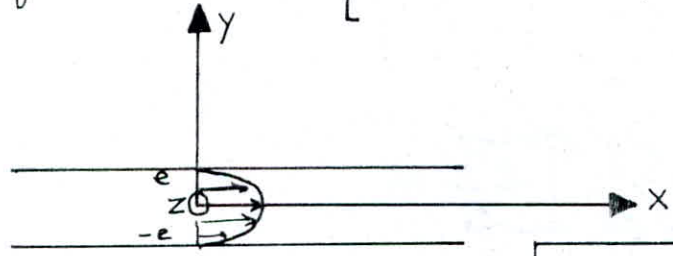
Intégrons l'équation $\gamma \frac{d^2 u}{dy^2} = a$ par rapport à y

$$\frac{du}{dy} = \frac{a}{\gamma} y + C_1$$

$$u = \frac{a}{2\gamma} y^2 + C_1 y + C_2$$

Déterminons les constantes C_1 et C_2 d'après les conditions aux limites:

Pour $y = \pm e$ $u = 0$ [adhérence du fluide sur les deux plaques]



$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{a}{2\gamma} e_0^2 + C_1 e_0 + C_2 \\ 0 &= \frac{a}{2\gamma} e_0^2 - C_1 e_0 + C_2 \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} C_2 &= -\frac{1}{2\gamma} a e_0^2 \\ C_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } u = \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} (y^2 - e_0^2)$$

En faisant la même démarche pour w on trouve l'expression de même

forme: $w = \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial P}{\partial z} (y^2 - e_0^2)$

finalment on a les composantes du vecteur vitesse \vec{V} :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{e_0^2}{2\gamma} \left(1 - \frac{y^2}{e_0^2}\right) \frac{\partial P}{\partial x} \\ v &= 0 \\ w &= -\frac{e_0^2}{2\gamma} \left(1 - \frac{y^2}{e_0^2}\right) \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}$$

En reportant u, v, w dans l'équation de continuité: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$-\frac{e_0^2}{2\gamma} \left(1 - \frac{y^2}{e_0^2}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{e_0^2}{2\gamma} \left(1 - \frac{y^2}{e_0^2}\right) \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$$

$$\implies \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \implies \Delta P = 0$$

o vitesse moyenne :

Considerons les valeurs moyennes u_m, w_m de u et w le long de y

$$\left. \begin{aligned} u_m &= 2 \frac{1}{2e_0} \int_0^{e_0} u dy = \frac{1}{e_0} \int_0^{e_0} u dy \\ w_m &= 2 \frac{1}{2e_0} \int_0^{e_0} w dy = \frac{1}{e_0} \int_0^{e_0} w dy \end{aligned} \right\}$$

$$u_m = \frac{1}{e_0} \int_0^{e_0} u dy = -\frac{1}{e_0} \int_0^{e_0} \frac{e_0^2}{2\gamma} (1 - y^2/e_0^2) \frac{\partial P}{\partial x} dy$$

$$w_m = \frac{1}{e_0} \int_0^{e_0} w dy = -\frac{1}{e_0} \int_0^{e_0} \frac{e_0^2}{2\gamma} (1 - y^2/e_0^2) \frac{\partial P}{\partial z} dy$$

d'où

$$\boxed{\begin{aligned} u_m &= -\frac{e_0^2}{3\gamma} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \\ w_m &= -\frac{e_0^2}{3\gamma} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}}$$

o Débits :

$$q_x = \int_{-e_0}^{e_0} u dy, \quad u = \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} (y^2 - e_0^2)$$

$$q_x = \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} \int_{-e_0}^{e_0} (y^2 - e_0^2) dy = \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} \left[\frac{y^3}{3} - e_0^2 y \right]_{-e_0}^{e_0}$$

$$q_x = \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{e_0^3}{3} - e_0^3 + \frac{e_0^3}{3} - e_0^3 \right) = -\frac{2}{3\gamma} e_0^3 \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\text{avec } e_0 = \frac{d_0}{2} \Rightarrow \boxed{q_x = -\frac{d_0^3 g}{12\nu} \frac{\partial h}{\partial x}}$$

$$\text{de même pour } \boxed{q_z = -\frac{d_0^3 g}{12\nu} \frac{\partial h}{\partial z}}$$

$$\text{Vectoriellement On peut écrire : } \boxed{q = -\frac{d_0^3 g}{12\nu} \vec{\text{grad}} h}$$

Les Composantes u_m, w_m du vecteur vitesse \vec{V}_m sont des dérivées partielles par rapport à x, z d'une fonction $\phi(x, z) = -\frac{e_0^2}{3\gamma} P(x, z)$ appelée potentiel des vitesses, on a affaire à un écoulement à potentiel de vitesse.

Les Composantes de la vitesse moyenne V_m s'écrivent :

$$u_m = \frac{\partial \phi}{\partial x} ; \quad w_m = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

donc

$$\vec{V}_m = \text{grad } \phi = -\frac{e_0^2}{3\gamma} \text{grad } P \quad (5)$$

En introduisant $P = \rho g H_m$ dans l'équation (5) on obtient :

$$\vec{V}_m = -\frac{e_0^2 \rho g}{3\gamma} \text{grad } H_m$$

$V_m =$ vitesse moyenne d'écoulement

$H_m =$ charge hydraulique confondue avec la hauteur piezométrique car l'énergie cinétique est négligeable.

- $\rho =$ masse volumique de l'huile
- $\gamma =$ viscosité dynamique.
- $e_0 =$ moitié de la distance (d) entre les deux plaques.

$$\vec{V}_m = -\frac{d^2 g}{12\nu} \text{grad } H_m \quad (7)$$

Comme le fluide est supposé incompressible et les parois indéformables, vu les faibles variations de pression l'équation de continuité à l'intérieur du domaine conduit à :

$$\text{div } \vec{V}_m = 0 \quad (8)$$

En posant $K_m = \frac{g d^2}{12\nu}$

Analysons les dimensions de K_m

$$\left. \begin{aligned} [g] &= m \cdot s^{-2} \\ [d^2] &= m^2 \\ [\nu] &= m^2 \cdot s^{-1} \end{aligned} \right\}$$

$$\implies [K_m] = \frac{m \cdot s^{-2} \cdot m^2}{m^2 \cdot s^{-1}} = m/s$$

On remarque bien que K_m a les dimensions d'une perméabilité, on peut le définir comme étant un coefficient de perméabilité fictif.

⊗ L'écoulement de filtration dans le barrage est caractérisé par la loi de DARCY : $\vec{V} = -K \text{grad } H$ (9)

- \vec{V} = vitesse fictive de filtration.
- K = tenseur de perméabilité.
- H = charge hydraulique.
- K = cste (terrain homogène et isotrope).

• équation de continuité : $\text{div } \vec{V} = 0$ (10)

• Dans le cas du milieu isotrope et homogène l'équation résultante est l'équation de Laplace :

$$\Delta H = 0$$

$$\text{div } \vec{V} = 0$$

$$\vec{V} = \begin{cases} u = -K \frac{\partial H}{\partial x} \\ v = -K \frac{\partial H}{\partial y} \\ w = -K \frac{\partial H}{\partial z} \end{cases}$$

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{div } \vec{V} = -K \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - K \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} - K \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$$

$$\text{div } \vec{V} = -K \Delta H = 0 \Rightarrow \Delta H = 0$$

Les couples d'équations (7; 8) et (9; 10) font apparaître une analogie entre l'écoulement dans le modèle de Hele-Shaw et celui dans le milieu poreux.

$$\vec{V}_m = -K_m \text{grad } H_m \iff \vec{V} = -K \text{grad } H$$

$$\text{div } \vec{V}_m = 0 \iff \text{div } \vec{V} = 0$$

o Remarque :

L'équation (7) n'est valable que pour un écoulement bidimensionnel

o MODELE HELE-SHAW

o Introduction :

Le mouvement des fluides à travers les milieux poreux est l'une des difficultés aussi bien mathématiques que expérimentales où insitu.

La résolution des équations différentielles non linéaires pour les écoulements de fluide se confronte à des difficultés tel que :

- o → Une définition inadéquate de la surface libre.
- o → Une zone variable de saturation partielle.
- o → Une perméabilité variable.

Des études sur modèle et particulièrement les analogies peuvent surmonter quelques problèmes.

Parmi ces analogies une analogie économique et simple est le modèle Hele-shaw.

o Définition :

Le modèle fluide visqueux de Héle-shaw consiste essentiellement à un espace formé par, deux plaques de verre parallèles rapprochées, formant un canal mince à travers duquel un fluide visqueux coule.

o Avantages du modèle :

Les plus grands avantages de Hele-shaw sont :

○ → Sa clareté dans la définition de la surface libre .

○ → l'élimination de capillarité ainsi que des zones de saturation partielles .

○ → permet une excellente visualisation de la surface libre et des trajectoires des molécules à chaque instant ainsi par cinématographie ou photographie , il est possible d'enregistrer l'évolution de l'écoulement transitoire .

○ → Peut atteindre une assez bonne précision théorique à condition que toutes les précautions soient prises pour maintenir l'écartement des plaques rigoureusement constant .

○ → Du point de vue de la rapidité des essais , ils seront souvent supérieurs aux modèles en sables .

o Inconvénients du modèle :

○ → Dans le modèle mathématique , On suppose que la frontière impénétrable est une ligne de courant or sur modèle Hele-shaw , à la paroi , la vitesse est nulle . Il existe donc sur tout le pourtour une zone où l'analogie n'est plus valable , mais l'étude des répartitions de vitesses montrent que , cette zone de fluide est limitée à une distance de la paroi inférieure à l'épaisseur . Cependant , dans certaines études dynamiques comme celles des instabilités interfacielles , l'influence de non glissement

à la paroi à une influence notable ceci est donc un défaut du modèle de Hele-shaw qu'il ne faut pas aggraver en augmentant inconsidérément l'épaisseur.

0 mise en œuvre du modèle :

• La représentation de la digue effectuée en similitude géométrique sera assurée très simplement en plaçant entre deux plaques de verre, ou de plexiglass formant le réservoir (retenue) une troisième plaque, découpée à la forme d'une digue tout en laissant entre cette plaque et celle du verre une épaisseur d .

On peut représenter des zones de perméabilité différentes, en faisant varier l'écartement des plaques. Pour cela on colle sur une des plaques une feuille ayant l'épaisseur voulue et la forme de la zone de perméabilité plus faible (ex barrage à noyau).

• Le choix du d_0 est très important puisque cette valeur intervient de manière décisive dans la valeur de la perméabilité.

En effet, pour un débit donné (q) la perte de charge sera inversement proportionnelle au d^3 . d'où l'influence d'une variation intempestive d'épaisseur sur la validité de la similitude ou plutôt sur la justesse du moyen de calcul constitué par le modèle de Hele-shaw.

① EFFET DE CAPILLARITE

① Définition de la tension superficielle :

Les particules du liquide se trouvent à la surface libre au contact avec un milieu gazeux, sont soumises à l'action des forces d'attraction. Ces forces sont les forces moléculaires intérieures c'est pourquoi on observe l'élévation de la surface libre.

① Hauteur de capillarité :

La hauteur de capillarité de l'huile entre les plaques de verre est déterminée à partir de la tension superficielle et de l'angle de contact de l'huile.

La condition d'équilibre pour un canal rectangulaire entre la force de soulèvement due à la tension superficielle et les forces de résistance due à la pression hydrostatique est :

$$2L\sigma\cos\theta = 2dL\rho gh \quad (1)$$

L = longueur du canal

σ = tension superficielle

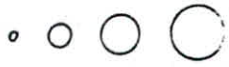
θ = angle de contact

h = hauteur de capillarité

De l'équation (1) on tire la valeur de $h \Rightarrow h = \frac{\sigma\cos\theta}{d\rho g}$

En première approximation on peut considérer l'hypothèse de l'angle de contact $\theta = 0$

$$\Rightarrow h = \frac{\sigma}{d\rho g}$$



SIMILITUDE

SIMILITUDE

○ SIMILITUDE MECANIQUE

On dit qu'il y a similitude mécanique complète des deux écoulements, s'il existe simultanément des similitudes géométriques, cinématiques et dynamiques.

- Similitude géométrique : signifie proportionnalité des dimensions correspondantes et l'égalité des angles correspondants.
- Similitude cinématique : signifie similitude des lignes de courant et la proportionnalité des vitesses et les accélérations correspondantes.
- Similitude dynamique : signifie proportionnalité des forces agissant sur les éléments correspondants de courant cinématique semblables ainsi que l'égalité des angles qui caractérisent la direction de ces forces.

autre définition : deux systèmes sont dynamiquement semblables, s'ils sont cinématiquement semblables et si les rapports entre toutes les forces homologues agissant sur l'espace homologue sont égales :

$$A_F = \frac{F_i(m)}{F_i(P)} = \frac{F_p(m)}{F_p(P)} = \frac{F_f(m)}{F_f(P)} = \frac{F_g(m)}{F_g(P)} = \frac{F_s(m)}{F_s(P)} = \frac{F_{el}(m)}{F_{el}(P)}$$

↓ inertie
 ↓ pression
 ↓ frottement
 ↓ gravité
 ↓ surface
 ↓ élastique

En général, la similitude complète est impossible par la nature différente des forces agissantes. Fort heureusement, dans chaque cas, certains facteurs qui sont moins importants peuvent être négligés. C'est pourquoi on choisit la condition de similitude la plus importante pour le phénomène considéré. On dit qu'il y a une similitude incomplète.

Dans notre cas nous étudierons seulement la similitude des écoulements des liquides incompressibles.

Soit λ_N le rapport de deux grandeurs homologues λ_1 (prototype) et λ_2 (modèle). Ainsi :

Le rapport de similitude géométrique est : $\lambda_L = \frac{L_e}{L_1}$

Le rapport des vitesses : $\lambda_v = \frac{v_e}{v_1} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{w_e}{w_1}$

Considérons maintenant notre cas : fluide non pesant, incompressible et visqueux.

Ecrivons les équations de NAVIER-STOKES

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= x - \frac{du}{dt} + \nu \Delta u \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= y - \frac{dv}{dt} + \nu \Delta v \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= z - \frac{dw}{dt} + \nu \Delta w \end{aligned} \right\}$$

considérons maintenant les fluides non pesant incompressibles et visqueux.

On suppose les forces massiques négligeables par rapport aux termes ($x=y=z=0$)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= - \frac{du}{dt} + \nu \Delta u \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= - \frac{dv}{dt} + \nu \Delta v \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= - \frac{dw}{dt} + \nu \Delta w \end{aligned} \right\}$$

Considérons la première de ces équations.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{du}{dt} + \nu \Delta u \quad (3)$$

Cette relation exprime l'égalité des forces de pression, de viscosité et d'inertie pour l'unité de masse.

- Exprimons maintenant le rapport des forces d'inertie et de viscosité.
- rapport des forces d'inertie de deux points homologues $\left[d_F = \frac{F_i(m)}{F_i(p)} \right]$

Force d'inertie unitaire (Par unité de masse) est : $-\frac{du}{dt}$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{du}{dt} &= -\frac{u}{L} \cdot \frac{du}{dt} \\ dL &= u dt \end{aligned} \right\} \implies \boxed{-\frac{du}{dt} = -u \frac{du}{dL}}$$

Faisant le rapport entre la force d'inertie du modèle et celle de prototype :

$$\frac{-\frac{du_2}{dt_2}}{-\frac{du_1}{dt_1}} = \frac{-u_2 \frac{du_2}{dL_2}}{-u_1 \frac{du_1}{dL_1}} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{du_2}{du_1} \cdot \frac{1}{\frac{dL_2}{dL_1}} = \frac{dv^2}{dL}$$

- rapport des forces de viscosité unitaire $\left[d_F = \frac{F\nu(m)}{F\nu(p)} \right]$

Force de viscosité = $\nu \Delta u$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \implies \boxed{\nu \Delta u = \nu \frac{d^2 u}{dx^2}}$$

Faisant maintenant le rapport entre les forces de viscosité du modèle et du prototype :

$$\frac{\nu_2 \Delta u_2}{\nu_1 \Delta u_1} = \frac{\nu_2 \frac{d^2 u_2}{dx_2^2}}{\nu_1 \frac{d^2 u_1}{dx_1^2}} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{d^2 u_2}{d^2 u_1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2} \implies \frac{\nu_2 \Delta u_2}{\nu_1 \Delta u_1} = d\nu \cdot \frac{dv^2}{dL}$$

Il va de l'équation (3), que les forces d'inertie et de viscosité doivent être dans le même rapport, (similitude dynamique) pour qu'il en soit de même pour les forces de pression.

Par conséquent: $\frac{dv^2}{dL} = dv \frac{dv}{dL}$ d'où $\frac{dv \cdot dL}{dv} = 1 \iff \boxed{\frac{U_1 L_1}{\nu_1} = \frac{U_2 L_2}{\nu_2}}$

On a trouvé bien le nombre de Reynolds $\boxed{Re = \frac{UL}{\nu}}$

Le nombre de Reynolds dans le modèle est bien égal au nombre de Reynolds dans le prototype.

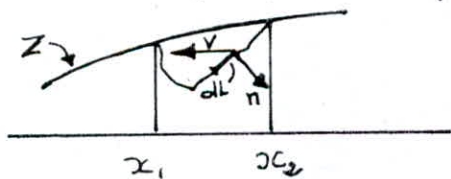
En conclusion la similitude utilisée par Hele-shaw est la similitude de Reynolds.

ECHELLE DE SIMILITUDE

Pour un écoulement en charge, les équations (7; 8; 9; 10) du chapitre suffisent pour définir les conditions de similitude.

Lorsqu'il existe une surface libre, on doit faire intervenir la condition de continuité de débit au voisinage de la surface.

Supposant l'écoulement plan dans le barrage suivant la figure ③ on obtient pour la longueur unité de la tranche de massif:



$$\int_{x_{01}}^{x_{02}} \rho \frac{\partial z_0}{\partial t_0} \cdot dx_0 = - \int \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dL_0 \quad (4)$$

ρ : densité du massif.

De même pour la portion géométriquement semblable du modèle Hele-shaw la condition de continuité du débit s'écrit:

$$\int_{x_{m1}}^{x_{m2}} d \cdot \frac{\partial z_m}{\partial t_m} \cdot dx_m = - \int \vec{v}_m \cdot \vec{n} \cdot dL_m \quad (5)$$

soient $\lambda_L, \lambda_H, \lambda_T, \lambda_K, \lambda_v$ les échelles correspondantes respectivement aux longueurs, charges hydrauliques, temps, perméabilités et vitesses, puisqu'il s'agit d'un phénomène à surface libre $\boxed{\lambda_L = \lambda_H}$

Soient (u, w) ; (u_m, w_m) respectivement les composantes des vitesses \vec{v} ($\vec{v} = -K \text{ grad } H$); \vec{v}_m ($\vec{v}_m = -K_m \text{ grad } H_m$).

$$\vec{v} = \begin{cases} u = -K \frac{\partial H}{\partial x_0} \\ w = -K \frac{\partial H}{\partial z_0} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{v}_m = \begin{cases} u_m = -K_m \frac{\partial H_m}{\partial x_m} \\ w_m = -K_m \frac{\partial H_m}{\partial z_m} \end{cases}$$

Le rapport des vitesses donne: $\frac{u_m}{u} = \frac{-K_m \cdot \frac{\partial H_m}{\partial x_m}}{-K \frac{\partial H}{\partial x_0}} = \frac{K_m}{K} \cdot \frac{\partial H_m}{\partial H} \cdot \frac{\partial x_0}{\partial x_m}$

$$\text{d'où } du = dk \cdot \frac{dH}{dL}$$

De même $dw = dk \frac{dH}{dL}$

$dH = dL \Rightarrow du = dw = dk$ donc $dv = dk$ (6)

Intégrons les équations (4) et (5):

$$\int_{x_{01}}^{x_{02}} p \frac{\partial z_0}{\partial t_0} dx_0 = - \int \vec{v} \cdot \vec{n} dL_0 \Rightarrow p \frac{\partial z_0}{\partial t_0} \Delta x_0 = -V n \cos \alpha_0 \Delta L_0 \quad (7)$$

$$\int_{x_{m1}}^{x_{m2}} d \frac{\partial z_m}{\partial t} dx_m = - \int \vec{v}_m \cdot \vec{n} dL_m \Rightarrow d \frac{\partial z_m}{\partial t} \Delta x_m = -V_m \cdot n \cos \alpha_m \Delta L_m$$

$$\frac{\partial z_m}{\partial t} \Delta x_m = -V_m \cdot n \cos \alpha_m \Delta L_m \quad (8)$$

faisant apparaître le rapport des équations (8) et (7):

$$\frac{\frac{\partial z_m}{\partial t} \Delta x_m}{p \frac{\partial z_0}{\partial t_0} \Delta x_0} = \frac{-V_m \cdot n \cdot \cos \alpha_m \cdot \Delta L_m}{-V n \cos \alpha_0 \cdot \Delta L_0} \quad (9)$$

Etant donné qu'on a une similitude géométrique $\alpha_m = \alpha$

$\Rightarrow \cos \alpha_m / \cos \alpha_0 = 1$, l'équation (9) peut s'écrire:

$$\frac{1}{p} \frac{\partial z_m}{\partial z_0} \cdot \frac{\partial t_0}{\partial t} \cdot \frac{\Delta x_m}{\Delta x_0} = \frac{V_m}{V} \cdot \frac{\Delta L_m}{\Delta L_0}$$

$$\frac{1}{p} dL \cdot \frac{1}{dt} \cdot dL = dv \cdot dL \quad \text{d'où} \quad dv = \frac{1}{p} \cdot \frac{dL}{dt} \quad (10)$$

• ○ ○ ○

3

ETUDE EXPERIMENTALE

ETUDE EXPERIMENTALE

INTRODUCTION

● Cette étude est consacrée non pas à l'étude d'infiltration à travers un barrage réel, mais une infiltration simulée par l'analogie visqueuse, les résultats expérimentaux pourront être comparés à des résultats théoriques.

CARACTERISTIQUES DU LIQUIDE UTILISÉ

Le liquide utilisé dans nos expériences est un huile de véhicule (20/40) que l'on trouve sur le marché, ses caractéristiques : densité, viscosité et tension superficielle sont déterminées dans le laboratoire par des moyens que l'on dispose.

① MESURE DE LA DENSITE

● Définition :

La densité d'un liquide est égale au quotient de la masse m_1 d'un certain volume du liquide par la masse m_2 d'un égal volume d'eau.

● DETERMINATION DE LA DENSITE DE L'HUILE

La détermination de la densité des liquides comporte deux opérations :

→ mesure de la masse m_1 d'un certain volume de l'huile.
Il s'agit de mesurer exactement la masse de l'huile dans un volume déterminé, une cuvette par exemple.

→ mesure de la masse m_2 d'un égal volume d'eau, la même cuvette remplie d'eau, nous fournit par le même procédé le poids de l'eau dont le volume est égal à celui de l'huile.

La densité sera donc :

$$d = \frac{m_1}{m_2}$$

TABLEAU DES MESURES

— On a fait des pesées pour six (6) valeurs différentes à fin d'obtenir une bonne précision sur la densité.

— Les pesées sont faites à une température $t = 25^\circ\text{C}$

— La masse de la cuvette est $m = 16\text{g}$.

Volume (cm^3)	masse cuv.+huile	masse cuv.+eau	masse l'huile	masse de l'eau	d	Δd
30	40 (g)	46 (g)	24 (g)	30 (g)	0.80	0.06
50	57	64	41	48	0.85	0.04
60	65	75	49	59	0.83	0.03
90	92	107	76	91	0.83	0.02
100	100	115	84	99	0.85	0.02
110	110	125	94	109	0.86	0.02

La moyenne de ces valeurs nous donne :

$$d = 0.84$$

CALCUL D'INCERTITUDE SUR d

Graduation de la balance utilisée pour les pesées = 1g

$$d = \frac{m_1}{m_2} \implies \frac{\Delta d}{d} = \frac{\Delta m_1}{m_1} + \frac{\Delta m_2}{m_2}$$

m_1 = masse de l'huile

m_2 = masse d'un égal volume d'eau

m = masse de la cuvette

M = masse cuvette + huile

M' = masse cuvette + eau

$$m_1 = M - m \implies \Delta m_1 = \Delta M + \Delta m$$

$$m_2 = M' - m \implies \Delta m_2 = \Delta M' + \Delta m$$

$$\Delta M = \Delta M' = \Delta m = 0.5 \text{ g}$$

$$\Delta m_2 = \Delta m_1 = 0.5 + 0.5 = 1 \text{ g}$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \implies \boxed{\Delta d = d \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$$

$$\Delta d_m = 0.03 \implies d\rho_m = 0.03 \text{ g/cm}^3$$

$$\boxed{d = 0.84 \pm 0.03}$$

$$\boxed{\rho = (0.84 \pm 0.03) \text{ g/cm}^3}$$

② MESURE DE VISCOSITE CINEMATIQUE

Definition de la viscosite

Tous les fluides ont une propriété de résister aux efforts tangentiels qui tendent à faire déplacer les couches du fluide les unes par rapport aux autres. Les expériences ont montrées qu'il ya une

relation entre tension et la vitesse d'écoulement.

$$\tau^n = \gamma \frac{du}{dn}$$

Pour des liquides newtonniens :

$$\tau = \gamma \frac{du}{dn}$$

γ : Coefficient de proportionnalité ou Coefficient de viscosité dynamique

$$\gamma = f(P, t, \text{matière du fluide}) \quad P: \text{Pression}$$

La viscosité cinématique est donnée sous la forme :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

mesurée en $[st] = 10^{-4} [m^2/s]$

$$[cst] = 10^{-6} [m^2/s]$$

Mesure de la viscosité par un viscosimètre capillaire

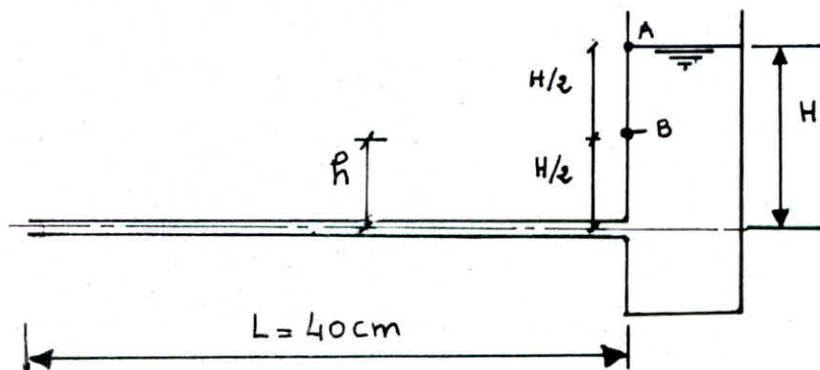
→ Description de l'appareil

Viscosimètre capillaire se compose de :

— Un tube vertical de diamètre $\Phi_2 = 2 \text{ cm}$, qui laisse écouler l'huile qu'il contient par un tube capillaire horizontal de diamètre $\Phi_1 = 2,5 \text{ mm}$ et de longueur $L = 40 \text{ cm}$.

$$\Phi_1 = d$$

$$\Phi_2 = D$$



$$\Phi_1 = 2,5 \text{ mm}$$

$$\Phi_2 = 2 \text{ cm}$$

$$L = 40 \text{ cm}$$

$$H = 5 \text{ cm}$$

→ Principe du viscosimètre capillaire

L'écoulement étant très lent, le régime est laminaire dans le tube capillaire horizontal le débit est donné par la formule de Poiseuille :

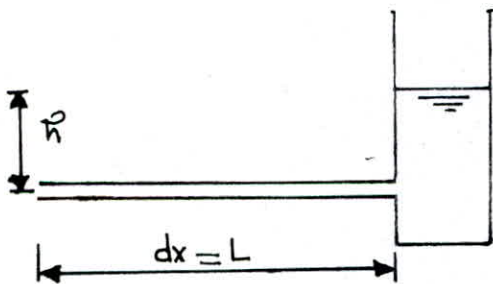
$$q_1 = \frac{\pi d^4}{128 \gamma} \frac{dp}{dx}$$

avec $\frac{dp}{dx} = \frac{\rho g h}{L}$

$$q_1 = \frac{\pi d^4 \rho g h}{128 \gamma L}$$

Le débit donné par l'abaissement de l'huile dans le tube vertical :

$$q_2 = -\frac{\pi D^2}{4} \frac{dh}{dt}$$



$$q_1 = q_2 \implies \frac{\pi d^4 \rho g h}{128 \gamma L} + \frac{\pi D^2}{4} \frac{dh}{dt} = 0$$

$$\frac{dh}{dt} + \frac{d^4 \rho g}{D^2 \gamma L 32} \cdot h = 0$$

On pose $A = \frac{\rho g d^4}{32 \gamma L D^2}$

$$\frac{dh}{dt} + Ah = 0 \implies h = c e^{-At}$$

à $t=0 \implies h=H \implies c=H$

$$h = H \cdot \exp\left(-\frac{\rho g d^4}{32 \gamma L D^2} \cdot t\right)$$

$$\ln \frac{h}{H} = -\frac{g d^4 t}{32 L D^2 \nu} \implies \nu = -\frac{g d^4 t}{32 L D^2 \ln \frac{h}{H}}$$

En fin

$$\nu = -\frac{g}{32} \cdot \frac{d^4}{L} \cdot \frac{t}{D^2 \ln \frac{h}{H}} \quad (1)$$

Si on définit t comme étant le temps mis par la surface de l'huile pour descendre de A jusqu'à B.

La hauteur parcourue ainsi sera $h = \frac{H}{2}$

D'où la valeur de la viscosité : $\nu = -\frac{(9.81)(2.5)^4 (10^{-3})^4}{32 \cdot 40 \cdot 10^2 (2 \cdot 10^2) \ln(1/2)}$

La formule finale de la viscosité est

$$\nu = 0.108 t$$

$t =$ en s

$\nu =$ en Centistokes

Remarque 1

Du fait de la variation considérable de la viscosité en fonction de la température pendant toutes nos expériences, on est amené à mesurer chaque fois la viscosité de l'huile utilisée, ainsi que la température.

Exemple : à $\theta = 22^\circ\text{C}$ $t = 32' 52'' = 1972'' \Rightarrow \underline{\underline{\nu = 213 \text{ Centistokes}}}$

Remarque 2

Une série de résultats a été vérifiée avec celle donnée par le viscosimètre d'Oswald du département Génie chimique. La différence relative était de l'ordre de 3 à 4%, ce qui juge la justesse des valeurs données par notre viscosimètre réalisé par nous même, vu la non disponibilité d'un viscosimètre au sein de notre département.

• Calcul d'incertitude

Partant de l'équation (1)

$$\nu = - \frac{g}{32} \cdot \frac{d^4}{L} \cdot \frac{t}{D^2 \ln \frac{H}{R}} = \frac{g}{32} \cdot \frac{d^4}{L} \cdot \frac{t}{D^2 \ln \frac{H}{R}}$$

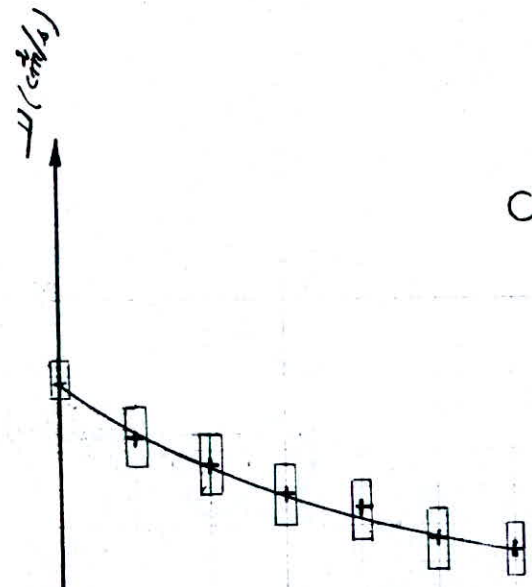
$$\ln \nu = \ln \left[\frac{g}{32} \cdot \frac{d^4}{L} \cdot \frac{t}{D^2 \ln \frac{H}{R}} \right]$$

$$\ln \nu = \ln g - \ln 32 + 4 \ln d - \ln L + \ln t - 2 \ln D - \ln \left(\ln \frac{H}{R} \right)$$

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{dg}{g} + \frac{4d(d)}{d} - \frac{dL}{L} + \frac{dt}{t} - 2 \frac{dD}{D} - \frac{d(\ln H/R)}{\ln(H/R)}$$

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{dg}{g} + 4 \frac{d(d)}{d} - \frac{dL}{L} + \frac{dt}{t} - 2 \frac{dD}{D} - \frac{1}{\ln \frac{H}{R}} \left[\frac{dH}{H} - \frac{dR}{R} \right]$$

COURBE DE LA VISCOSITE EN FONCTION DE LA TEMPERATURE



relevée au cours de nos expériences

echelle x : 1cm \rightarrow 1°
y : 2cm \rightarrow 1cm²/s

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta g}{g} + 4 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{2 \Delta D}{D} + \frac{1}{\ln \frac{H}{R}} \left[\frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta R}{R} \right]$$

g, d, L, D, H sont des valeurs fixes

$$\Delta g = \Delta d = \Delta L = \Delta D = \Delta H = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta t}{t} + \frac{1}{\ln \left[\frac{H}{R} \right]} \left[\frac{\Delta R}{R} \right]}$$

- $\Delta R = 1 \text{ mm}$
- $H = 50 \text{ mm}$
- $R = 25 \text{ mm}$
- $\Delta t = 0,5 \text{ s}$

$$\boxed{\Delta v = v \left(0,057 + \frac{0,5}{t} \right)}$$

t en s
 v en stocks

③ MESURE DE LA TENSION SUPERFICIELLE

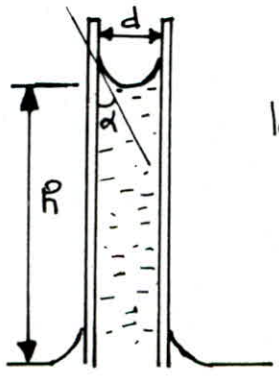
Pour la mesure de la tension superficielle on a utilis e la méthode des tubes capillaires basée sur la loi de Jurin.

→ Loi de Jurin :

La denivellation h est proportionnelle à la tension superficielle liquide - air et inversement proportionnelle au rayon interieur du tube:

$$\boxed{h = \frac{2 \sigma \cos \alpha}{r \rho g}}$$

$$r = \frac{d}{2}$$



lorsque $\alpha = 0$ (le liquide mouille parfaitement la parois du tube)

La loi de Jurin s ecrit $h = \frac{2 \sigma}{r \rho g}$ d'où

$$\boxed{\sigma = r \rho g h / 2}$$

- σ = tension superficielle
- ρ = masse volumique de l'huile
- r = rayon du tube.

→ Définition :

Un tube est dit capillaire lorsque son diametre interieur n'excède pas quelques millimetres (8 mm).

● Mesure de la dénivellation R

Le tube capillaire gradué est d'abord nettoyé puis rincé avec de l'eau distillé. son bout est plongé verticalement dans le liquide.

On observe l'ascension de h jusqu'à un niveau donné, on relève cette valeur de h. Connaissant le diamètre du tube utilisé, la densité de l'huile et la constante g. On peut déterminer la valeur de la tension superficielle.

Pour cela on a utilisé trois tubes capillaires de diamètres différents, à fin d'avoir plus de précision.

⊖ mesures

→ 1^{er} tube : $\begin{cases} d = 2,5 \text{ mm} \\ R = 3,5 \text{ mm} \end{cases}$

$$\sigma = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,84 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{4} = 18,02 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

→ 2^{eme} tube : $\begin{cases} d = 4 \text{ mm} \\ R = 2,2 \text{ mm} \end{cases}$

$$\sigma = \frac{2,2 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,84 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{4} = 18,10 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

→ 3^{eme} tube : $\begin{cases} d = 2 \text{ mm} \\ R = 4,5 \text{ mm} \end{cases}$

$$\sigma = \frac{2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,84 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{4} = 18,54 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

$\bar{\sigma} \pm \theta = 21^\circ \quad \boxed{\sigma_m = 18,22 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}}$

● Calcul d'incertitude

$$\sigma = \frac{d \cdot \rho \cdot g \cdot R}{4} \implies \frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta R}{R}$$

$\Delta d = \Delta g = 0$

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta R}{R}$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta\rho &= 0.03 \text{ g/cm}^3 \\ \rho &= 0.84 \text{ g/cm}^3 \\ \Delta h &= 0.50 \text{ mm} \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta T = T \left[0.035 + \frac{0.5}{h} \right]$$

$$T = (18.22 \pm 1.00) 10^{-3} \text{ N/m}$$

● Mesure de la hauteur de la capillarité dans le canal de Heléshaw

D'après la formule trouvée au chapitre (3) Concernant la hauteur capillaire.

La condition d'équilibre des forces dans le canal Helé-shaw

impose : $2L T \cos\theta = 2d_0 L \rho g h \Rightarrow h = \frac{T}{\rho g d_0}$

d = distance entre les deux plaques.
 L = longueur du canal.
 θ = angle de contact.

$$\begin{aligned} T &= 18.22 \cdot 10^{-3} \text{ N/m} \\ \rho &= 0.84 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3 \\ d_0 &= 3 \text{ mm} \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \Rightarrow \underline{h} = \frac{18.22 \cdot 10^{-3}}{0.84 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 9.81} = \underline{\underline{0.74 \text{ mm}}}$$

La valeur $h = 0.74 \text{ mm}$ trouvée est une valeur faible, ce qui explique l'influence négligeable de la hauteur capillaire sur la visualisation de la ligne de saturation.

○ Dispositif expérimental

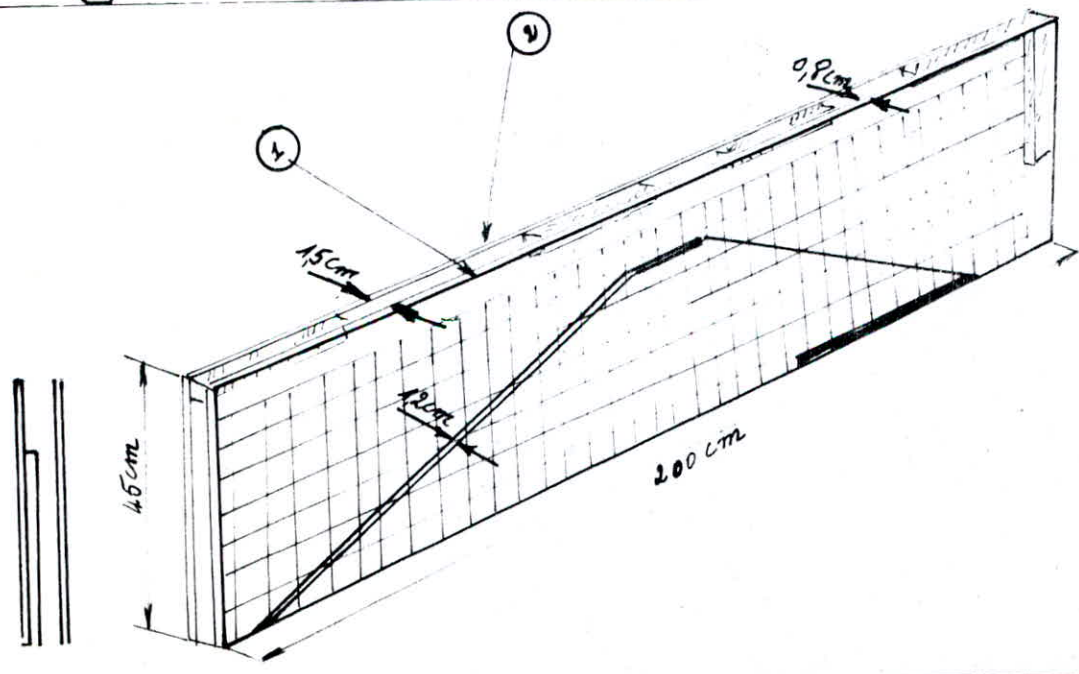
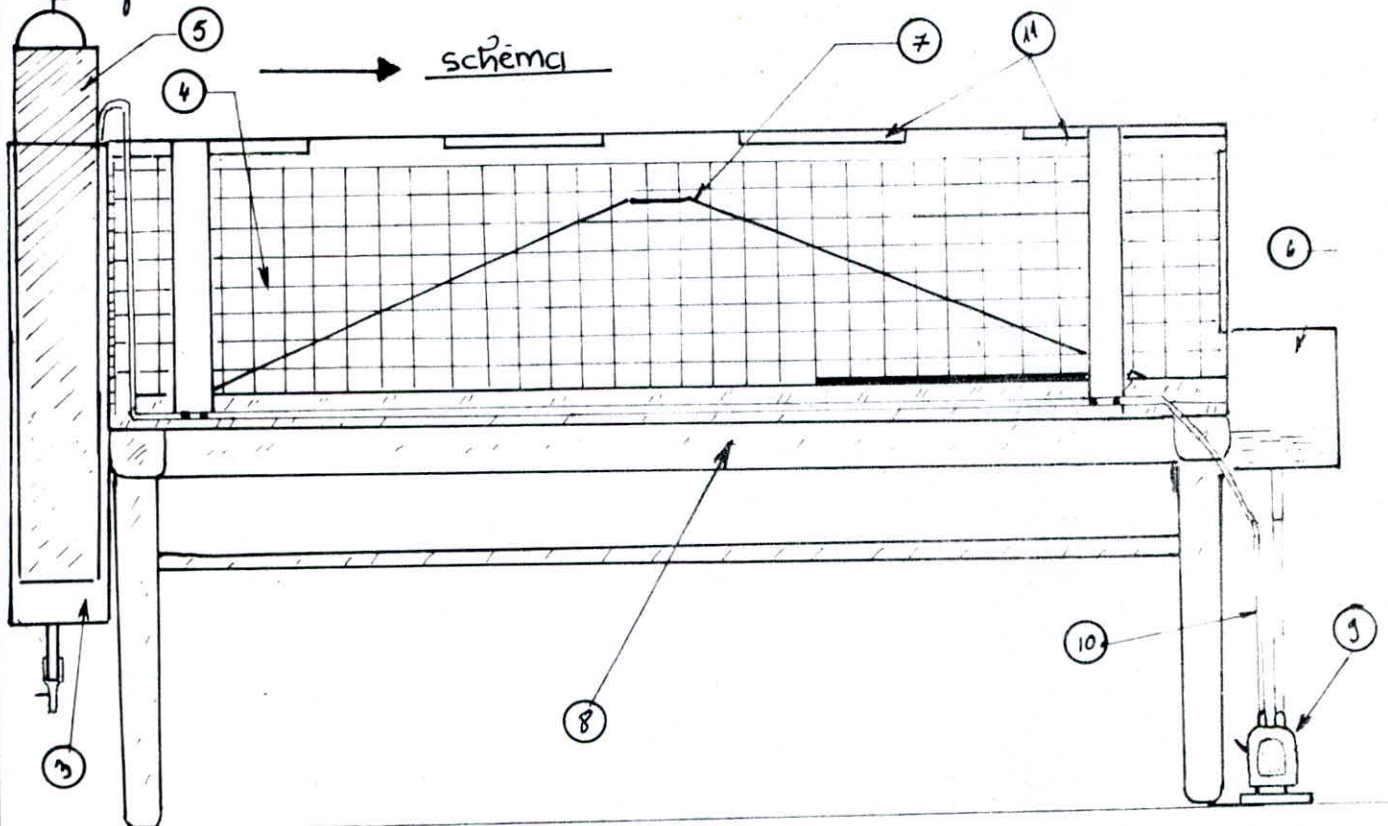
on tient à préciser que le modèle Hélé-Shaw sur lequel on a travaillé est un modèle construit dans notre laboratoire par des moyens simples disponibles.

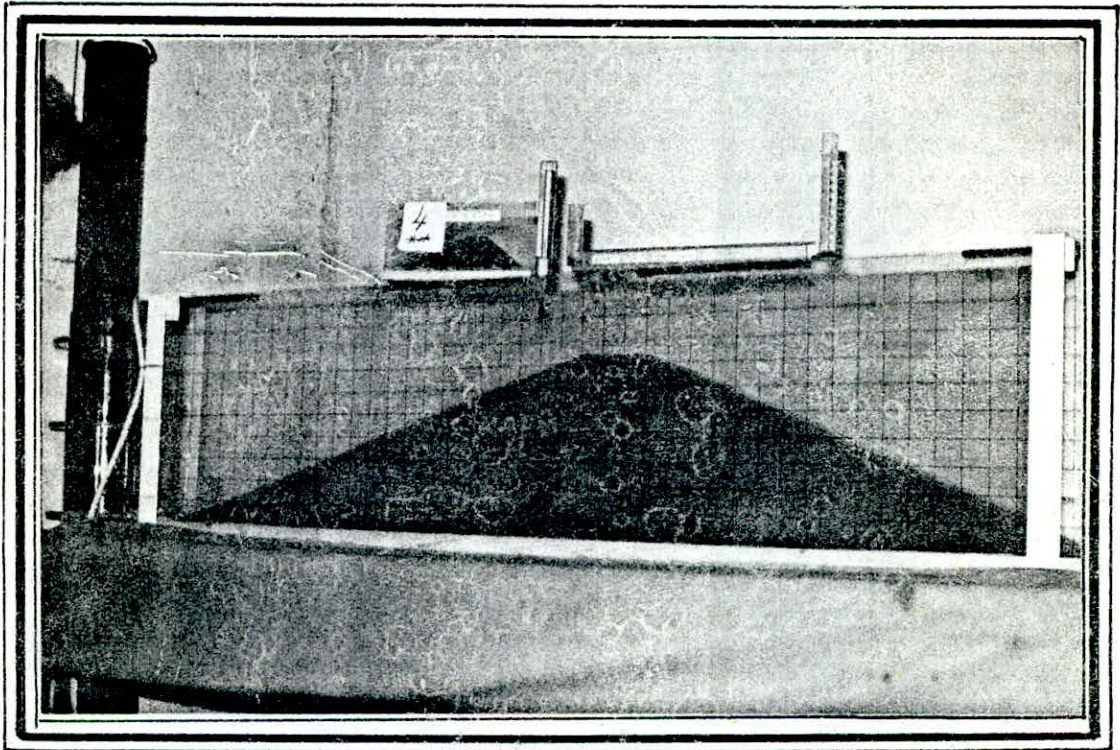
→ Description de l'installation

L'installation se compose de :

- Deux plaques en verre verticales fixes ① et ② de longueur 2 m , de hauteur $h = 45\text{ cm}$ et d'épaisseur $8\text{ mm} = e$, placées parallèlement l'une de l'autre à une distance de 15 mm .
 - Une première cuve cylindrique ③ de dimensions : $\begin{cases} D = 16\text{ cm} \\ h = 100\text{ cm} \end{cases}$ partiellement remplie de l'huile en communication directe avec le réservoir principal (retenue) ④.
 - Un flotteur cylindrique ⑤ de diamètre $d = 12\text{ cm}$ et de hauteur $H = 110\text{ cm}$ relié à une manivelle par un fil qui plonge dans la cuve ③.
- L'immersion de ce flotteur entraîne une variation du niveau de la retenue.
- Une deuxième cuve cylindrique ⑥ de diamètre 16 cm et de hauteur $24,5\text{ cm}$ placée à l'autre extrémité permettant la récupération de l'huile s'écoulant entre les deux plaques.
 - Une troisième plaque en plexiglass de couleur verte d'épaisseur 12 mm ⑦ simulant le barrage en terre avec tapis filtrant collée à la plaque en verre ② de dimensions : $h = 32\text{ cm}$, $L = 180\text{ cm}$
 $m_1 = m_2 = 3$, drain : $h_d = 2\text{ cm}$, $L_d = 4,5\text{ cm}$

- Un support ⑧ sur lequel repose le système.
- Une pompe ⑨ reliant les deux réservoirs par l'intermédiaire d'un tuyau ⑩, qui permet de garder un régime permanent.
- Des entretoises ⑪ placées entre les deux plaques en verre pour garder l'intervalle constant (15 cm).





ÉCOULEMENT PERMANENT

mode opératoire :

→ Pour avoir une hauteur de la retenue voulue, on fait descendre le flotteur à une position donnée, une fois l'huile dans le réservoir principal pénètre dans le canal de Héle-Shaw (intervalle entre la plaque ① et ③), la ligne de saturation s'établit d'elle-même.

→ On positionne la pompe à un débit donné égal approximativement au débit sortant, et on attend un bon moment jusqu'à avoir un régime permanent.

→ Une fois le régime permanent établi, le niveau de la retenue est lu directement sur une règle collée sur la plaque ① (partie amont).

→ La ligne de saturation peut être photographiée ou calquée directement sur la plaque en verre ①

→ Le débit sortant est mesuré simplement par une cuvette graduée (connaissant le volume V pour un temps t).

→ En faisant varier le flotteur on peut avoir d'autres formes de lignes de saturation et différents débits.

● techniques des mesures :

Les mesures effectuées ont été basées sur les caractéristiques du modèle : perméabilité fictive $K = d^2g/12V$; viscosité cinématique. Ainsi pour chaque essai on mesure la viscosité et la température correspondante.

Relevé des surfaces libres :

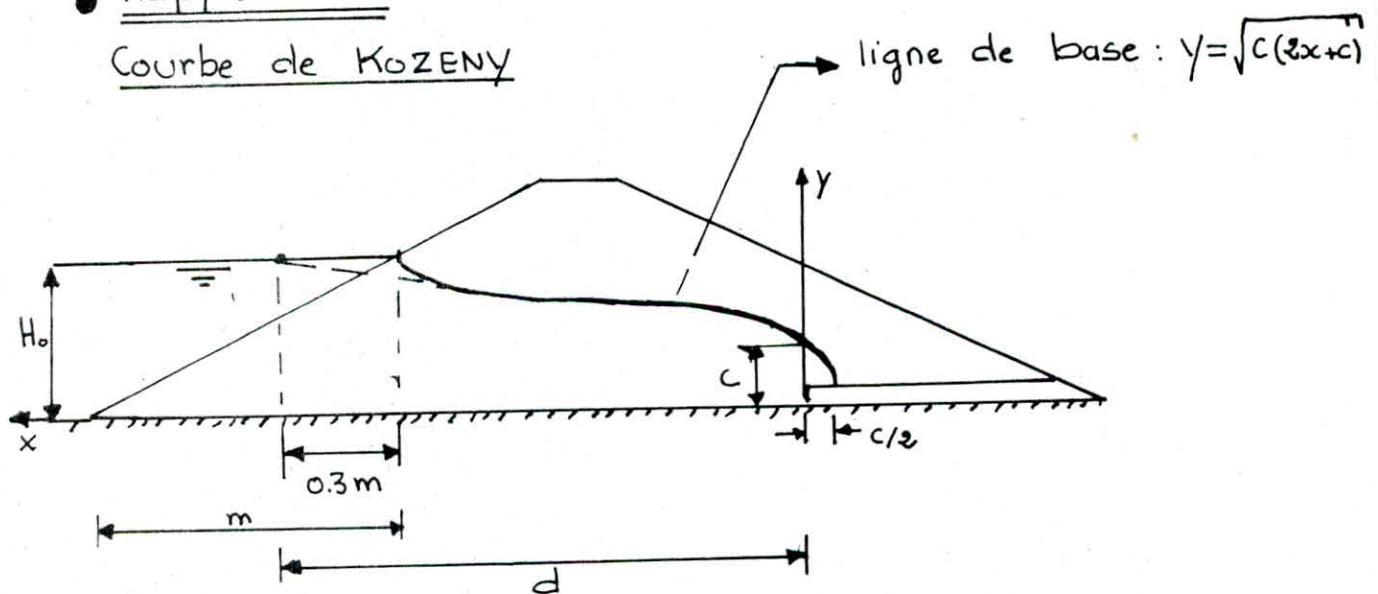
En régime permanent les surfaces libres ont été relevées directement sur du papier calque collé à la première plaque en verre.

Les courbes tracées ont été reportées sur papier millimétré à fin de les comparer avec les courbes théoriques données par deux méthodes, Kozeny et hydraulique.

Ainsi pour chaque courbe donnée par le modèle Hefé-show les deux courbes Kozeny, hydraulique sont tracées à la même échelle et sur le même papier millimétré.

● Rappel

Courbe de KOZENY

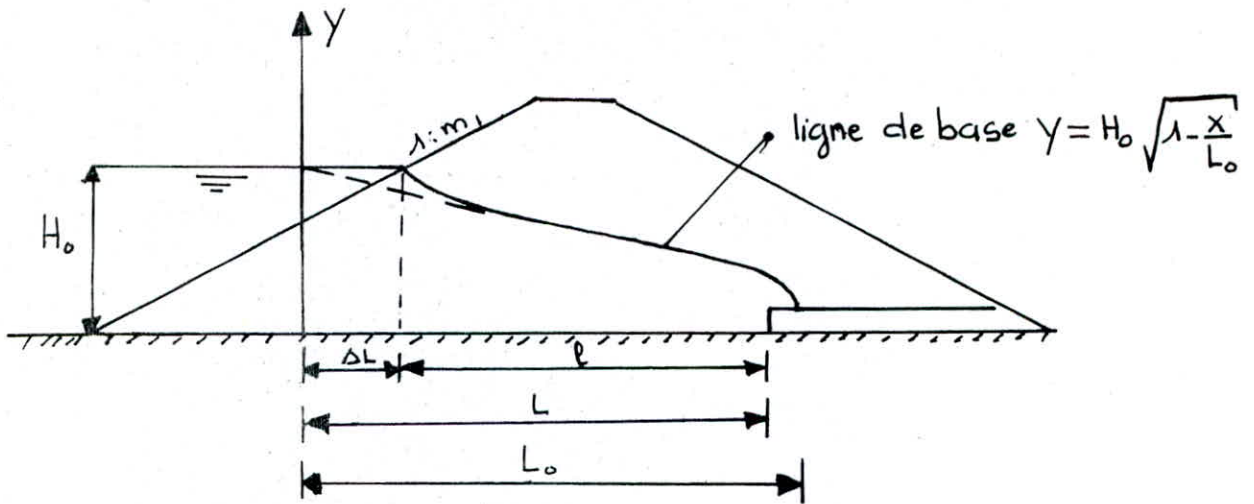


$$y^2 = c(2x + c)$$

$$c = \sqrt{d^2 + H_0^2} - d$$

$$q = K(\sqrt{H_0^2 + d^2} - d)$$

Courbe donnée par la méthode hydraulique



$$\Delta L = \frac{m_1}{1 + em_1} \cdot H_0$$

$$R = \sqrt{L^2 + H_0^2} - L$$

$$L = l + \Delta L$$

$$R = \frac{H_0^2}{2L_0} = \frac{q}{k}$$

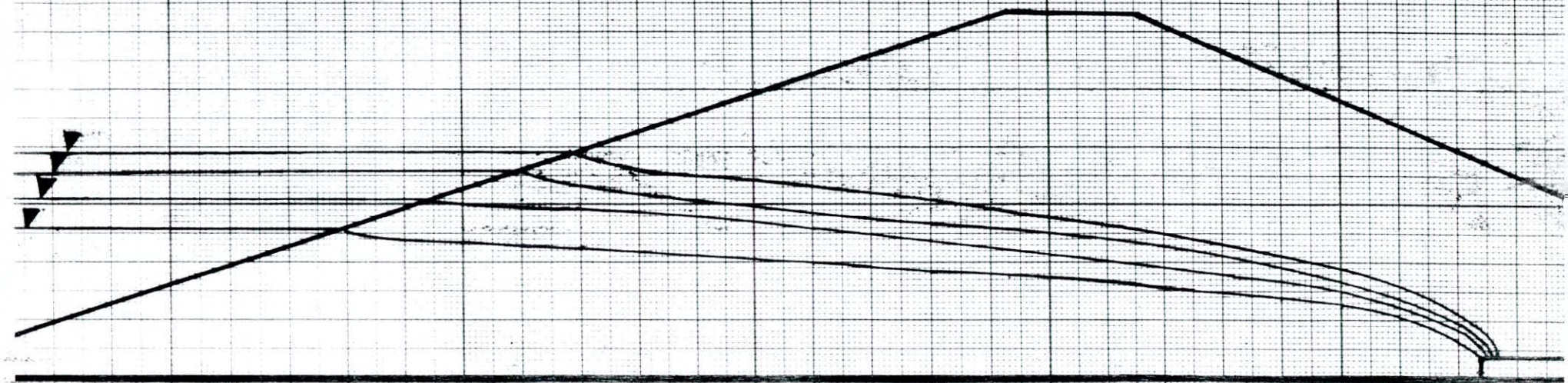
$$y = H_0 \sqrt{1 - \frac{x}{L_0}}$$

$$q = \frac{kH_0^2}{2L_0}$$

Remarque

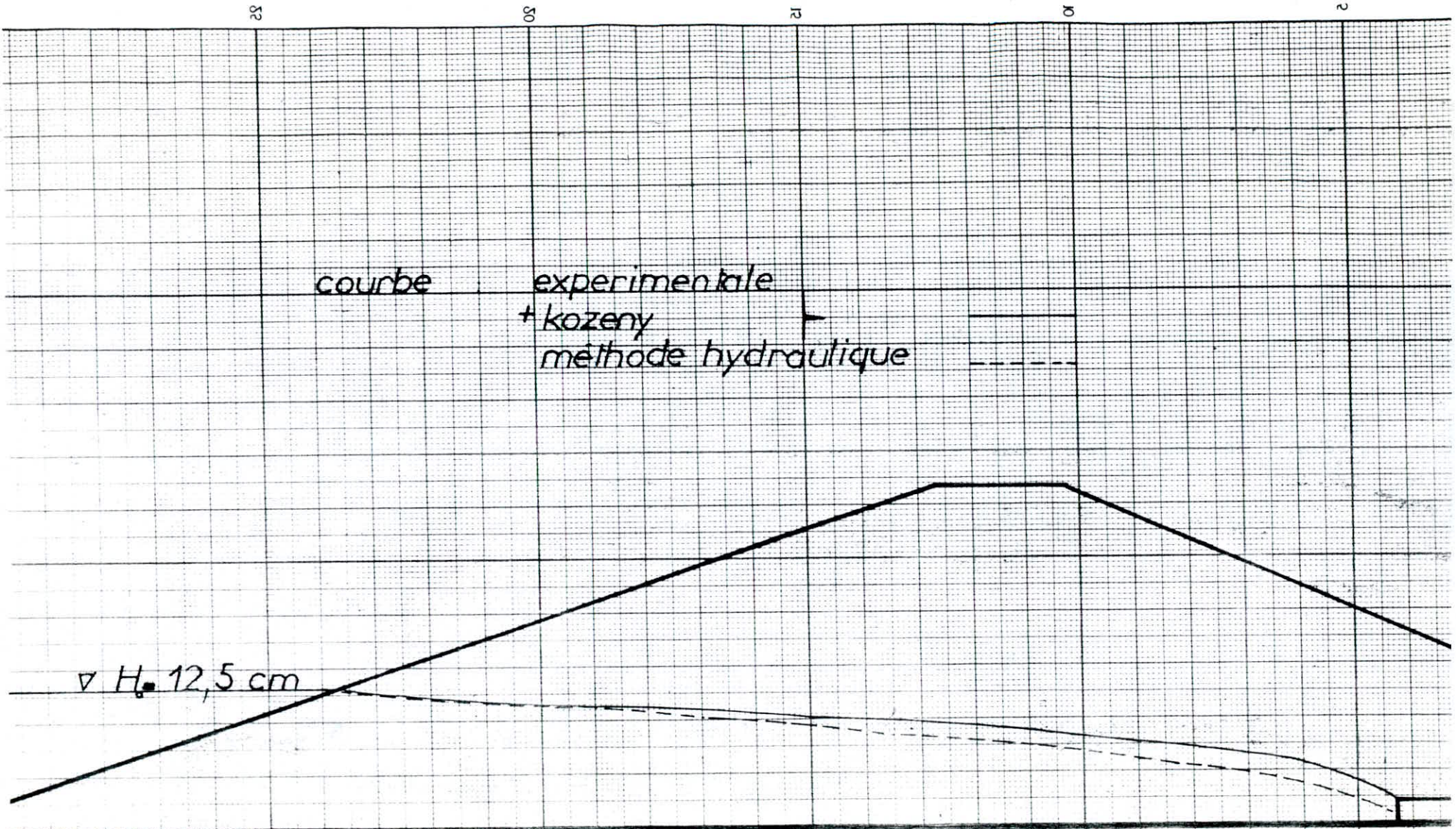
Durant l'écoulement permanent la surface libre (ligne de courant) entre en intersection avec le parement amont avec un angle droit. Cette condition n'est pas satisfaite dans le modèle Hefè-shaw, cela est due essentiellement au phénomène de la tension superficielle qui tend à soulever la surface libre du liquide, par contre l'angle droit est observé dans la partie drainante.

COURBES EXPERIMENTALES POUR DIFFERENTES
HAUTEURS 12,5 15 17,6 19,5

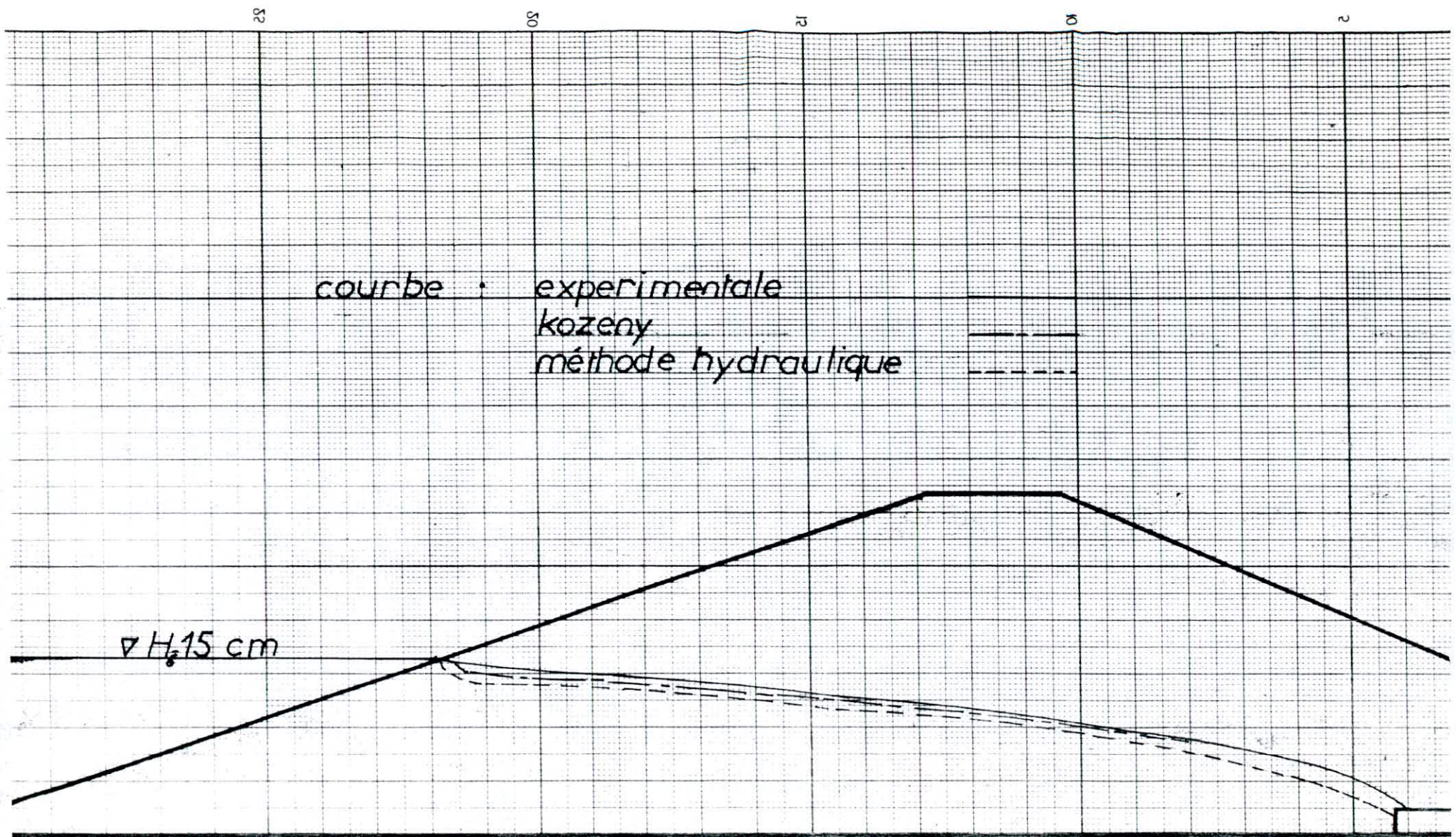


echelle : x:1cm → 5cm
y:1cm → 5cm

A small coordinate system is drawn below the text, with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. The x-axis is labeled 'x' and the y-axis is labeled 'y'.



echelle : x : 1cm → 5cm
 y : 1cm → 5cm



echelle : x : 1cm → 5cm
 y : cm → 5cm

28

50

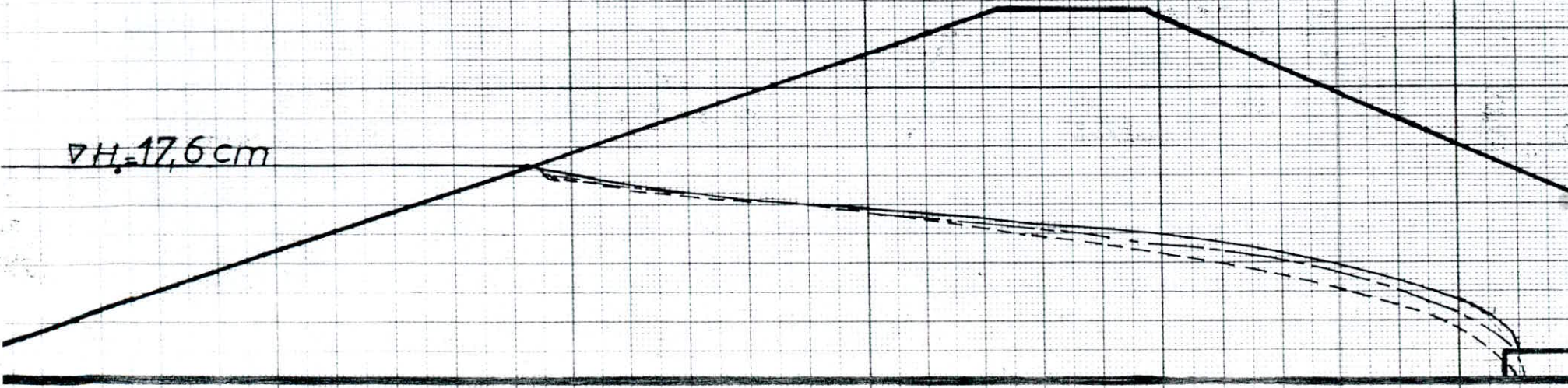
12

00

2

courbes :
 experimentale
 kozeny
 méthode hydraulique

$\nabla H = 17,6 \text{ cm}$



echelle : x: 1cm → 5cm
 y: 1cm → 5cm

82

50

12

10

2

courbes :

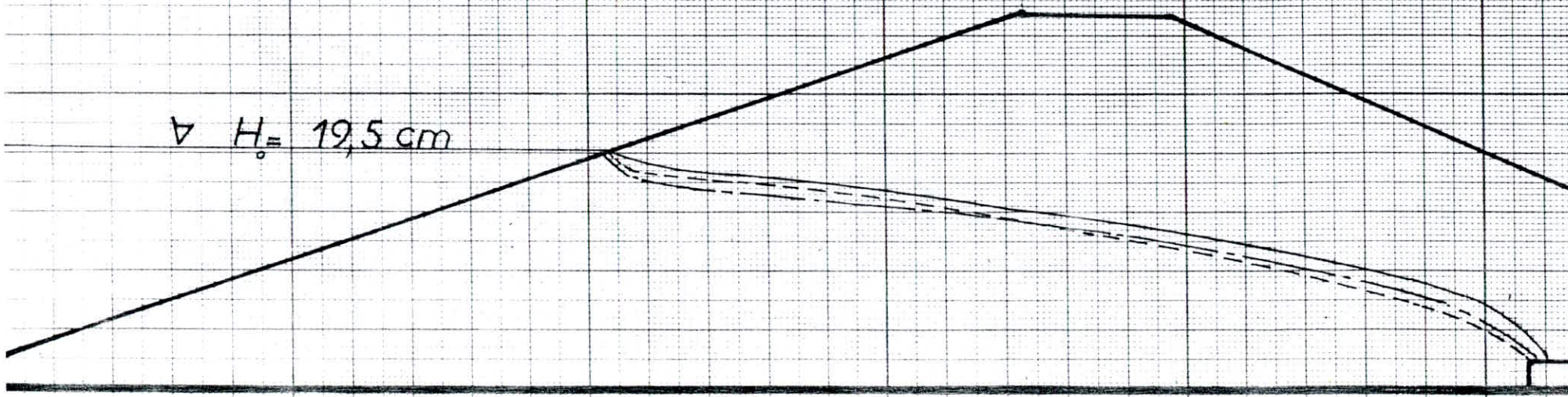
experimentale

kozyeny

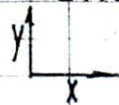
méthode hydraulique



$\Delta H_0 = 19,5 \text{ cm}$



echelle : x : 1cm → 5cm



y : 1cm → 5cm

○ Comparaison des courbes

Cette étude comparative a été effectuée pour quatre (4) courbes de niveaux de retenues différents, la concordance paraît satisfaisante. On observe cependant une excellente coïncidence entre les trois courbes (expérimentale, Kozeny et hydraulique) en particulier pour le niveau de retenue égal à 10,5 cm.

Par conséquent au vue de cette comparaison, les deux méthodes de tracé de la courbe de saturation sont parfaitement satisfaisantes lors de l'étude des infiltrations à travers les barrages de faible hauteur, Une construction d'un modèle est nécessaire dans le cas des grands ouvrages.

○ Comparaison des débits

● mesures des débits :

Les mesures des débits ont été effectuées au niveau aval (juste au niveau de la fente aval), ceux ci consistaient à recueillir pendant un intervalle de temps donné une quantité d'huile.

D'autre part une mesure de viscosité a été effectuée pour une température $\vartheta = 22^{\circ}\text{C}$ à fin de déterminer la perméabilité fictive K_m .

— RESULTATS OBTENUS —

● Débits expérimentaux

Pour chaque niveau de retenue des quatre courbes précédemment tracées, le débit de fuite est mesuré. ainsi : $Q_1 = 0,77 \text{ cm}^3/\text{s}$
 $Q_2 = 1,2 \text{ cm}^3/\text{s}$, $Q_3 = 1,7 \text{ cm}^3/\text{s}$, $Q_4 = 2,18 \text{ cm}^3/\text{s}$.

● calcul d'incertitude

$$Q = V/t$$

V: Volume donné par la cuvette.

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta t}{t}$$

t = temps de mesure.

$$t = 10 \text{ s}$$

$$\Delta t = 0,5 \text{ s}$$

$$\Delta V = 0,1 \text{ cm}^3$$

$$\Delta Q = Q \left(\frac{0,1}{V} + 0,05 \right)$$

Le tableau suivant donne les valeurs des débits correspondants à chaque hauteur.

Hauteur (cm)	Volume (cm ³)	temps t (s)	Q (cm ³ /s)	ΔQ (cm ³ /s)
15,0	12,0	10,0	1,20	0,07
19,5	21,8	10,0	2,18	0,12
17,6	17,0	10,0	1,70	0,09
12,5	7,7	10,0	0,77	0,05

La mesure de la viscosité pendant la manipulation permet de calculer la valeur de la perméabilité fictive qui est donnée par

la formule :
$$K_m = \frac{d_0^2 g}{12 \nu}$$

Ainsi à une température $\theta = 22^\circ \text{C}$ la valeur de la viscosité est:

$$\nu = 2,13 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

Remplaçant les valeurs $d_0 = 0,3 \text{ cm}$, $g = 9,81 \text{ cm/s}$, $\nu = 2,13 \text{ cm}^2/\text{s}$ dans

la formule de K_m \longrightarrow
$$K_m = 3,45 \text{ cm/s}$$

cette perméabilité fictive permet de déterminer les débits théoriques donnés par Kozeny et la méthode hydraulique.

● Débits de fuite donnés par Kozeny

$$Q_1 = K_m (\sqrt{d_f^2 + H^2} - d_f) \cdot d_0 \quad d_0 = \text{intervalle entre les deux plaques égal à } 3\text{mm.}$$

pour chaque hauteur on a les débits suivants donnés sous forme de tableau.

hauteur (cm)	Débit (cm ³ /s)
15.0	1.14
17.6	1.60
19.5	2.05
12.5	0.80

● Débits de fuite donnés par la méthode hydraulique

$$Q = K_m \frac{H_0^2}{2L_0} d_0$$

Pour chaque hauteur de retenue on calcul le débit de fuite. Le tableau suivant donne les valeurs calculées.

hauteur (cm)	Débit (cm ³ /s)
12.5	0.85
15.0	1.22
17.6	1.79
19.5	2.29

● Tableau de comparaison des débits

Hauteur de la retenue (cm)	Débit expérimental (cm^3/s)	Débit donné par KOZENY (cm^3/s)	Débit donné Par la M. Hyd
12.5	0.77 ± 0.05	0.80	0.85
15.0	1.20 ± 0.07	1.14	1.22
17.6	1.70 ± 0.09	1.60	1.79
19.5	2.18 ± 0.12	2.05	2.29

● Conclusion

Les valeurs de débits obtenues expérimentalement sont bonnes comparées aux résultats théoriques. Une petite différence est due aux erreurs systématiques dans les mesures expérimentales.

○ ÉCOULEMENT NON PERMANENT ○

● mode opératoire

→ Une fois le régime permanent est établi, on fait remonter rapidement le flotteur à fin de vidanger la retenue (réservoir principal).

→ L'évolution de la ligne de saturation est suivie par des prises de photos à des intervalles de temps réguliers.

● Relevé des surfaces libres :

Une vidange brusque de la retenue amont est effectuée, la ligne de saturation commence à se mouvoir. D'une manière générale, on observe que l'évolution de la

surface libre est rapide au début de l'essai, puis devient de plus en plus lente au cours du temps jusqu'à l'établissement d'un régime sensiblement permanent.

Au cours de l'évolution de la surface libre, une série de photos est prise, chaque pose correspond à une position de la surface libre à t donné.

Aussi vu la lenteur du mouvement de la surface libre (non pas juste après la vidange de la retenue) les positions prises par celle-ci au cours du temps peuvent être calquées rapidement sur un calque collé à la première plaque.

○ Tracé des courbes obtenues par la solution de l'équation de Boussinesq (type équation de la chaleur)

Comme il a été exposé précédemment la résolution de l'équation de Boussinesq nous a permis de donner h en fonction de x et de t .

$$\textcircled{1} \quad h(x,t) = H_0 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\beta} \cdot \frac{\exp(-\frac{n^2 \pi^2}{eL^2} H_0 t)}{n\pi} \cdot \sin(\frac{n\pi x}{L})}$$

Pour la même hauteur de retenue qui a servi à l'étude expérimentale, on a déterminé les valeurs suivantes :

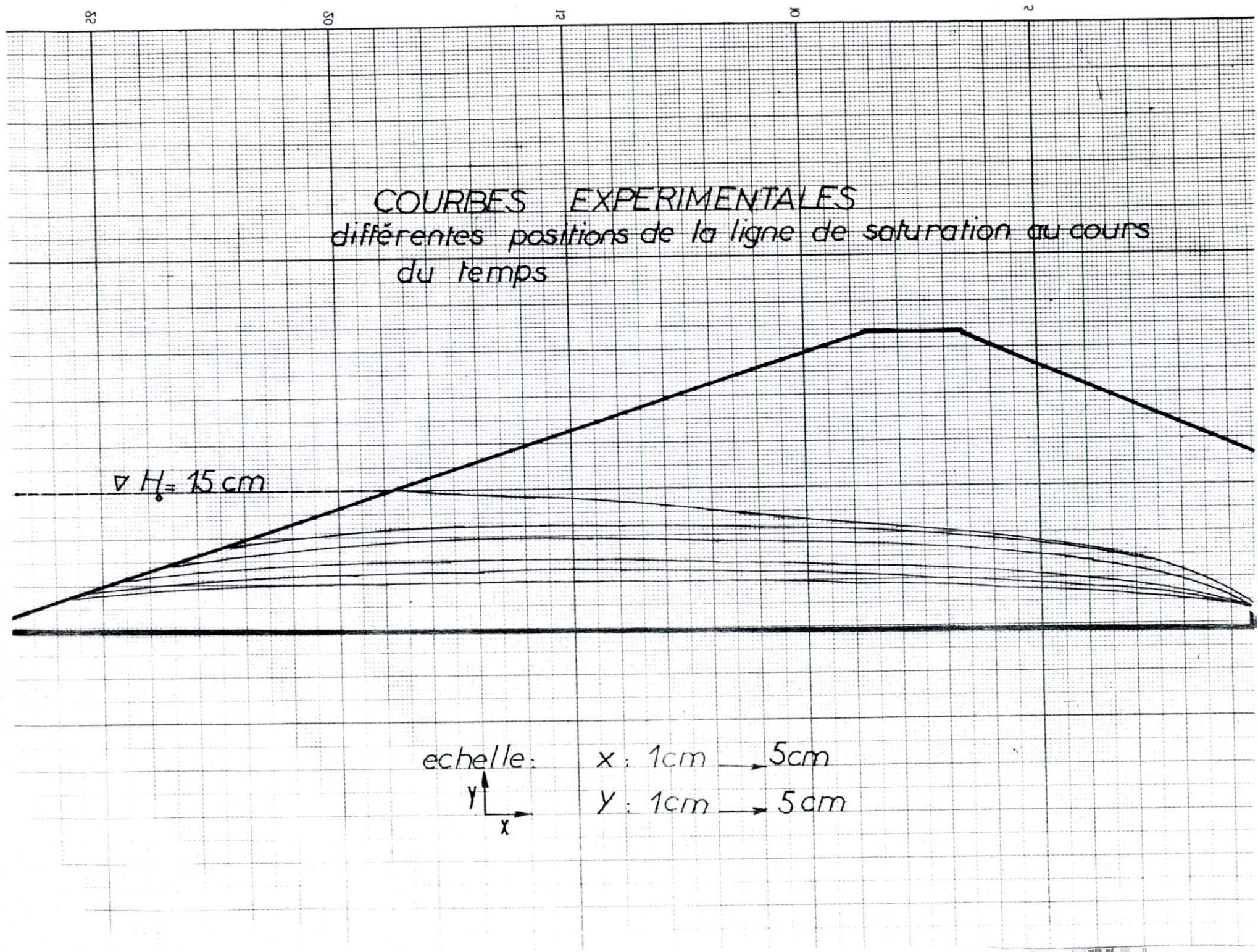
$$H_0 = 15 \text{ cm}, \quad L = 135.5 \text{ cm}, \quad \beta = 0.27.$$

Une mesure de viscosité cinématique nous a permis de calculer la perméabilité fictive $K_m = 3.45 \text{ cm/s}$

COURBES EXPERIMENTALES
différentes positions de la ligne de saturation au cours
du temps

$\nabla H_0 = 15 \text{ cm}$

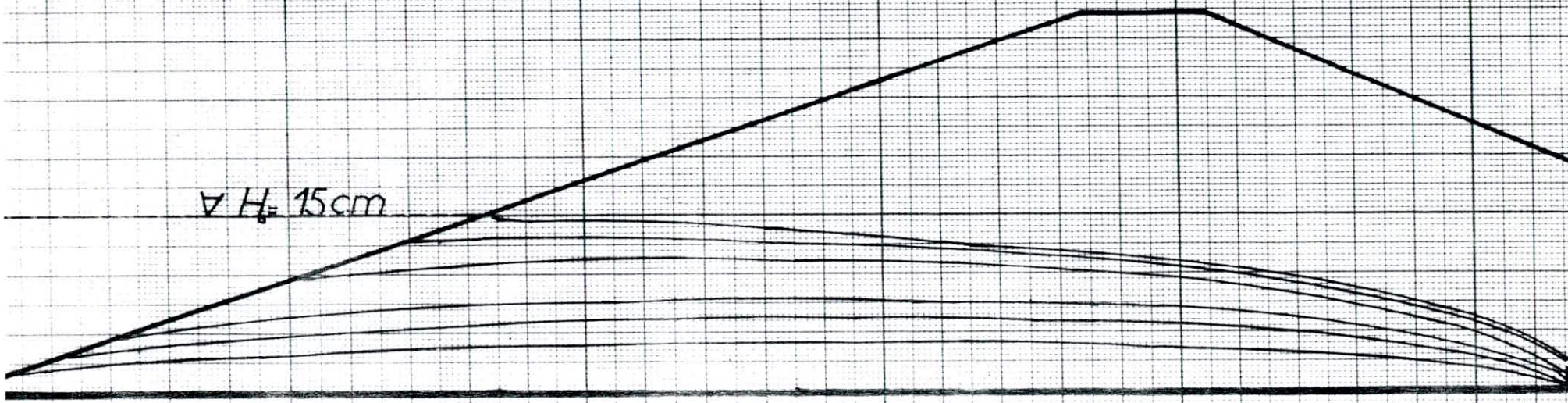
echelle: $x: 1 \text{ cm} \rightarrow 5 \text{ cm}$
 $y: 1 \text{ cm} \rightarrow 5 \text{ cm}$



52 50 40 30 20 10

COURBES THEORIQUES

différentes positions de la ligne de saturation au cours du temps

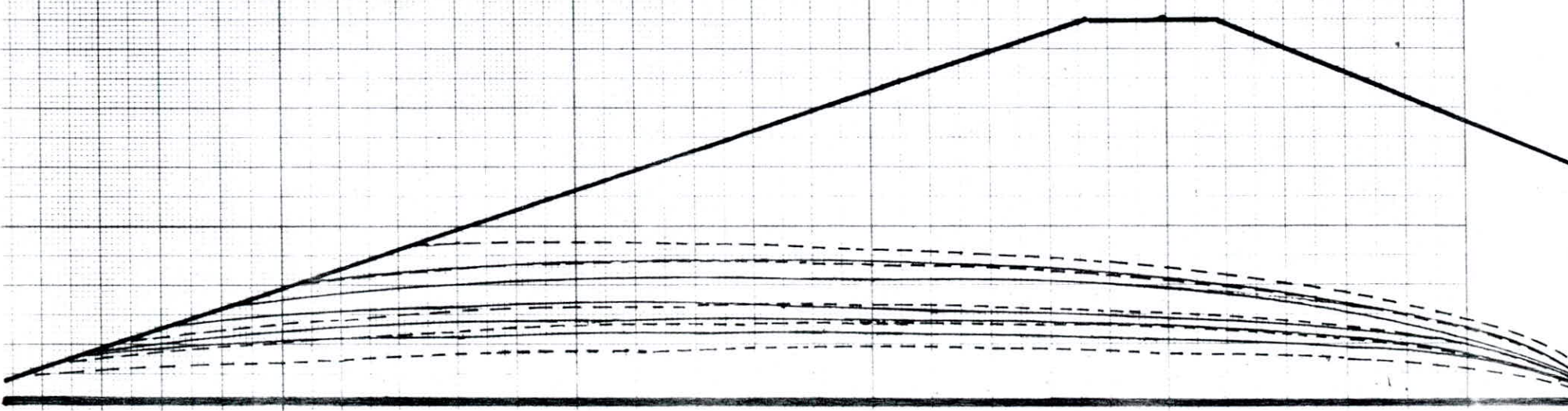


échelle : x : 1cm → 5cm
y : 1cm → 5cm

COURBES EXPERIMENTALES ET THEORIQUES

experimentales ———

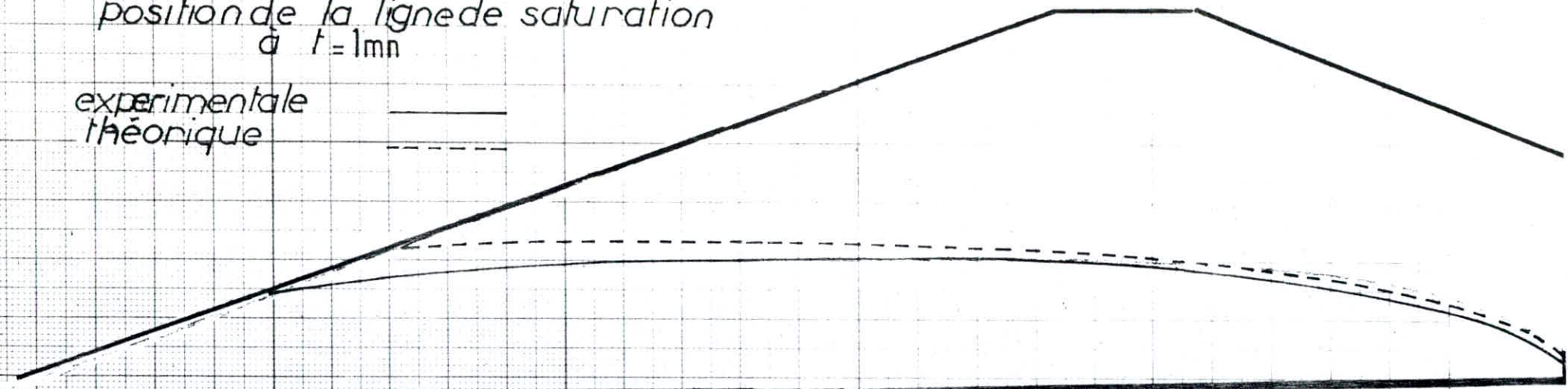
théoriques - - - - -



echelle : x : 1cm → 5cm
y : 1cm → 5cm

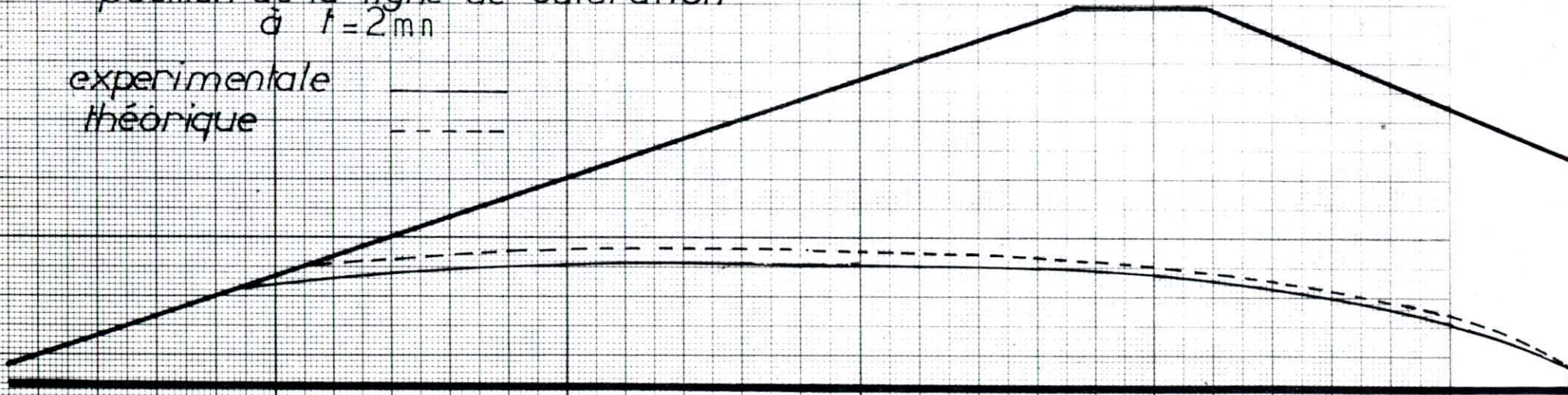
position de la ligne de saturation
à $t = 1 \text{ mn}$

experimentale
théorique



position de la ligne de saturation
à $t = 2 \text{ mn}$

experimentale
théorique



echelle

y ↑

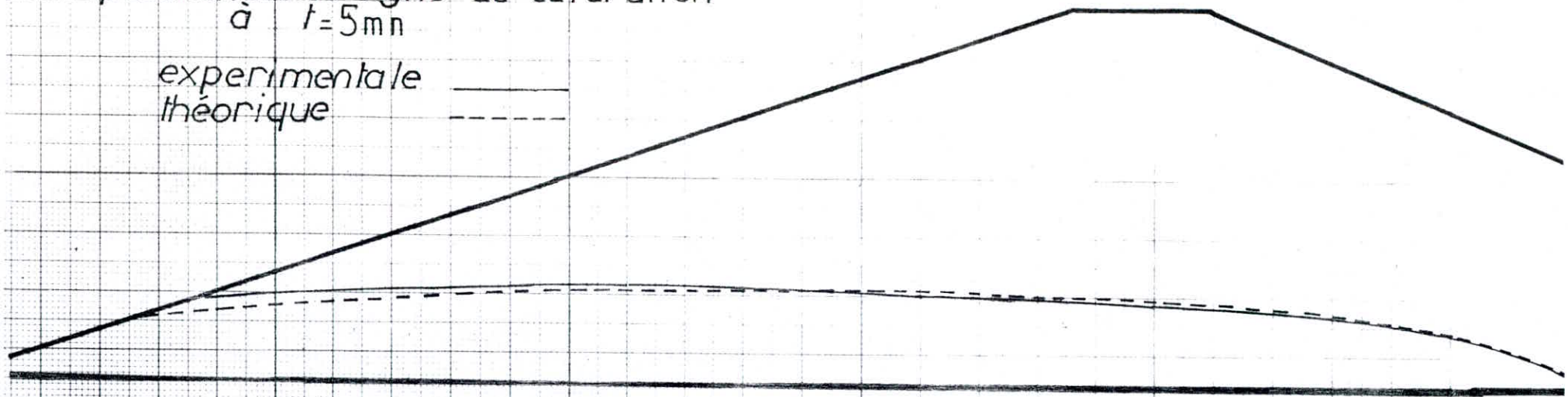
x →

x : 1 cm → 5 cm

y : 1 cm → 5 cm

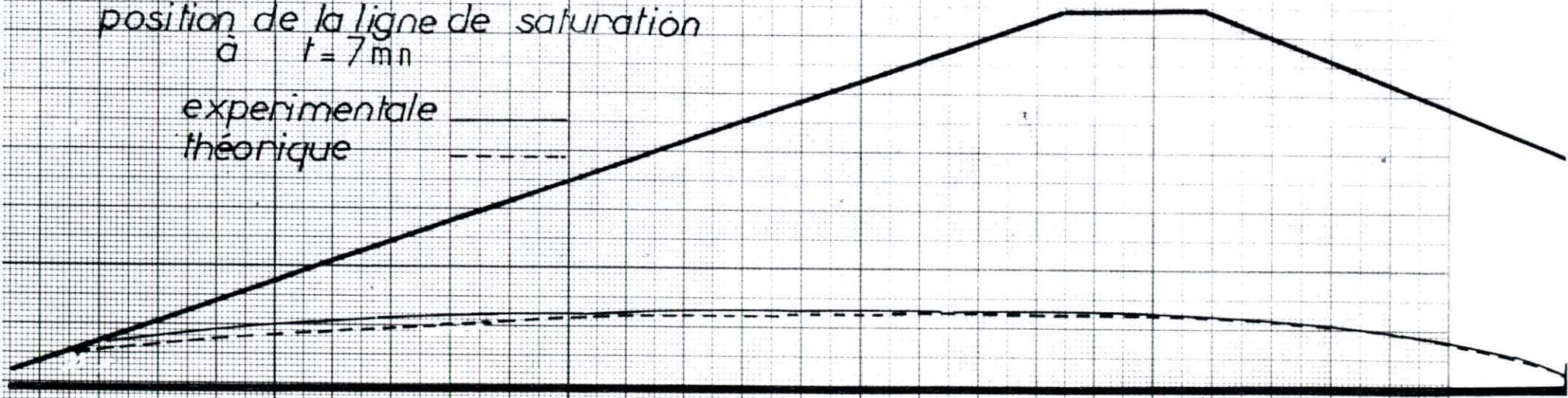
position de la ligne de saturation
à $t=5mn$

experimentale
théorique



position de la ligne de saturation
à $t=7mn$

experimentale
théorique

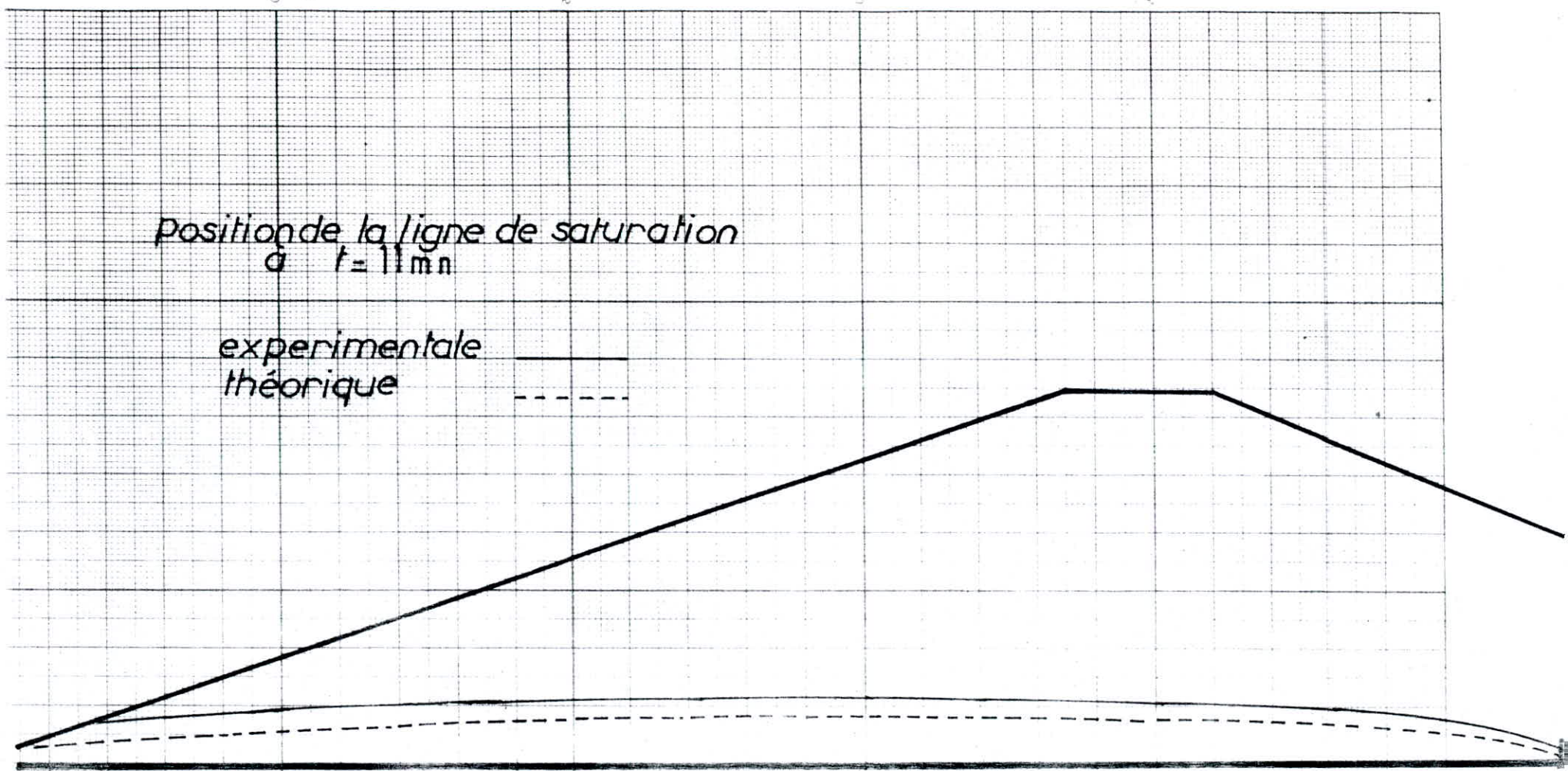


echelle : x:1cm → 5cm
y:1cm → 5cm

A small coordinate system diagram is shown below the scale information, with a vertical y-axis and a horizontal x-axis.

position de la ligne de saturation
à $t = 11 \text{ mn}$

experimentale
théorique



echelle : $x: 1 \text{ cm} \rightarrow 5 \text{ cm}$
 $y: 1 \text{ cm} \rightarrow 5 \text{ cm}$

Les calculs de la solution ① ont été programmés en langage BASIC pour être exécutés sur micro ordinateur (AMSTRAD CPC 664)
Le programme utilisé est donné ci dessous

REMARQUE

Pendant tous les essais effectués on a remarqué la chose suivante
le remplissage du corps d'un barrage en terre est beaucoup plus rapide que la vidange et ceci est dû essentiellement à la pente faible du parement amont, caractéristique d'un barrage en terre.

INTERPRETATION DES COURBES

Pour les mêmes temps les courbes théoriques et expérimentales sont tracées à la même échelle pour être comparées. Aux premiers temps on remarque que la position de la ligne de saturation donnée par la solution théorique est au dessus de la position donnée expérimentalement, c'est à dire que la descente de la ligne de saturation est lente par rapport au cas réel (experimental), ceci est due aux composantes verticales des vitesses qui sont considérables dans le cas experimental, alors que l'hypothèse faite au début pour le cas théorique suppose les composantes verticales de la vitesse négligeables. Ce qui explique la différence existante entre les deux positions correspondantes.
A la fin du temps la surface libre (théorique) rattrape et dépasse celle donnée par l'expérience, ceci est dû probablement à

l'introduction de H_0 dans l'équation linéarisée.

Au vue de cette étude comparative toutes les approximations faites pour aboutir à la fonction trouvée $h = f(x,t)$ se trouvent en défaut immédiatement après la vidange rapide. Nous conseillons au cas où cette étude est poursuivie de faire une étude comparative entre le modèle Hélé-shaw et une solution numérique par exemple.



• • ● PROGRAMME ● • •

```

10  k = 3.45 : L = 135.5
20  H0 = 15 : B = 0.27
30  e = 1
40  INPUT " t1, t2, dt "; T1, T2, DT
50  INPUT " x1, x2, dx "; X1, X2, DX
55  CLS
90  T = T1
100 X = X1
110 H = 0
120 S = 0
130 N = 1
140 An = EXP(-((K*H0*T)/e*(n*PI/L)2)
150 Bn = (SIN(n*PI/2*X)/(n*PI))
160 Ds = An*Bn
170 S = S + Ds
180 HA = H0*SQR(2*S/(1-B))
190 HB = HA - H
200 IF HB < 0.01 THEN GOTO 240
210 H = HA
220 N = N + 1
230 GOTO 140
240 PRINT "x = "; X, "h = "; H, "t = "; T
246 H2 = H / 5
247 PRINT "h2 = "; H2
250 IF X > X2 THEN GOTO 280
260 X = X + DX
270 GOTO 110
280 PRINT "t = "; T
290 IF T > T2 THEN GOTO 320
300 T = T + DT
310 GOTO 100
320 END

```

CHAPITRE 4

REALISATION D'UN MODELE HELE SHAW

A PLAQUE CHANGEABLE

REALISATION DU MODELE HELE SHAW A PLAQUE CHANGEABLE.

INTRODUCTION

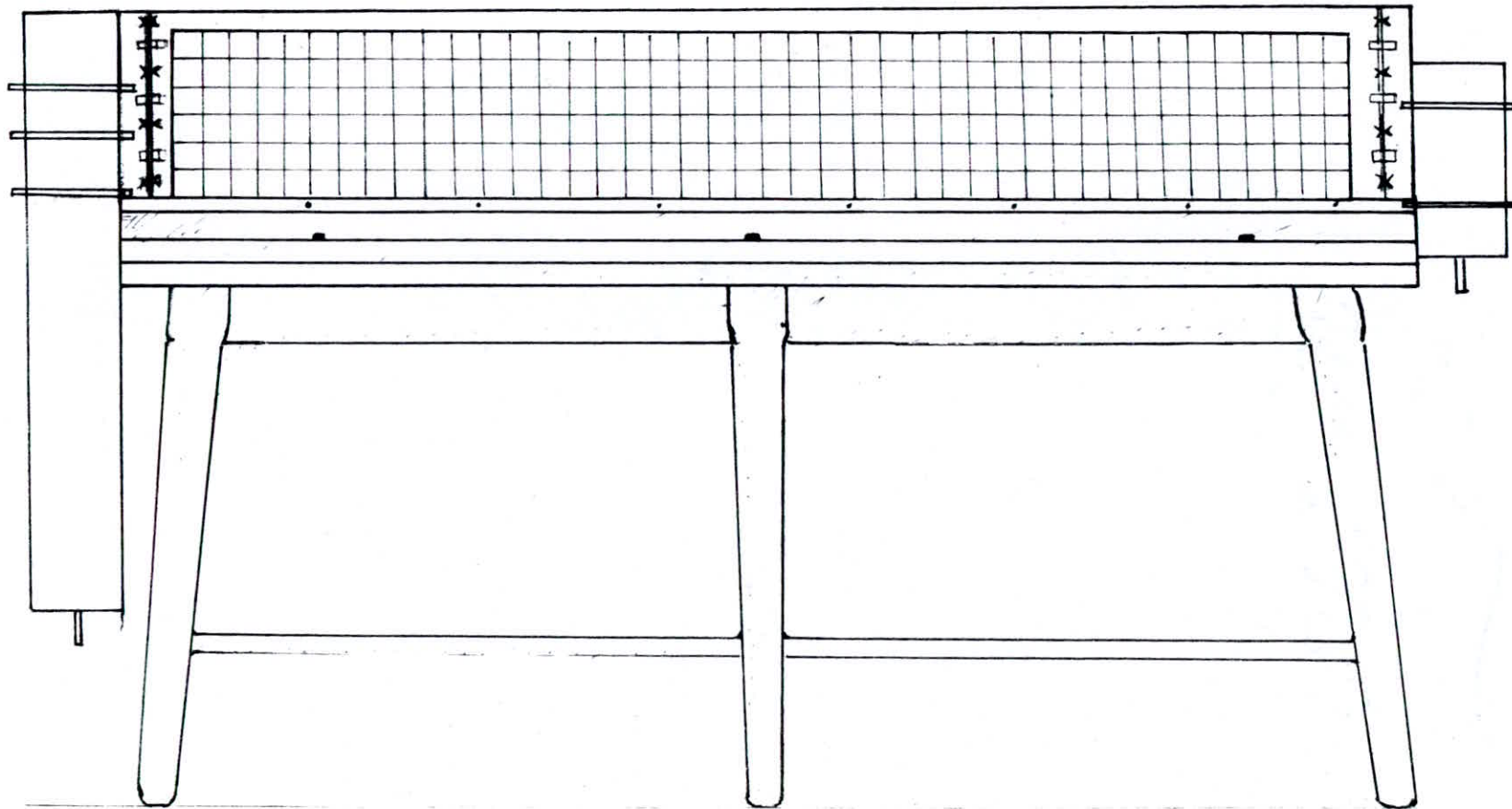
Compte tenu des bons résultats donnés par le premier modèle, qui était ainsi mis en épreuve, il nous a été proposé de construire un autre modèle avec une plaque fixe et l'autre variable, sur laquelle peuvent être fixés des barrages différents. Son utilisation peut être envisagée dans des études futures, non seulement étude des barrages mais aussi des études des nappes souterraines, tranchées, drainage etc...

Au terme de ce travail on tient à remercier monsieur *KHTIB* le menuisier de l'atelier du bois à qui revient une grande part de ce modeste travail.

DESCRIPTION DU MODELE

Le modèle se compose de deux parties :

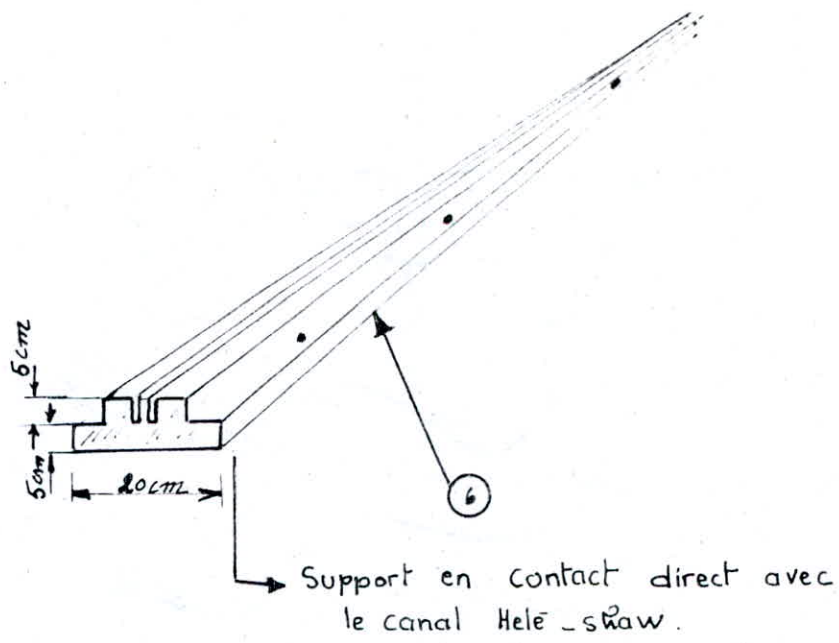
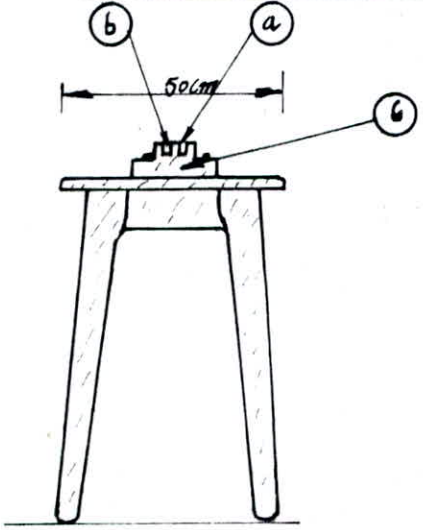
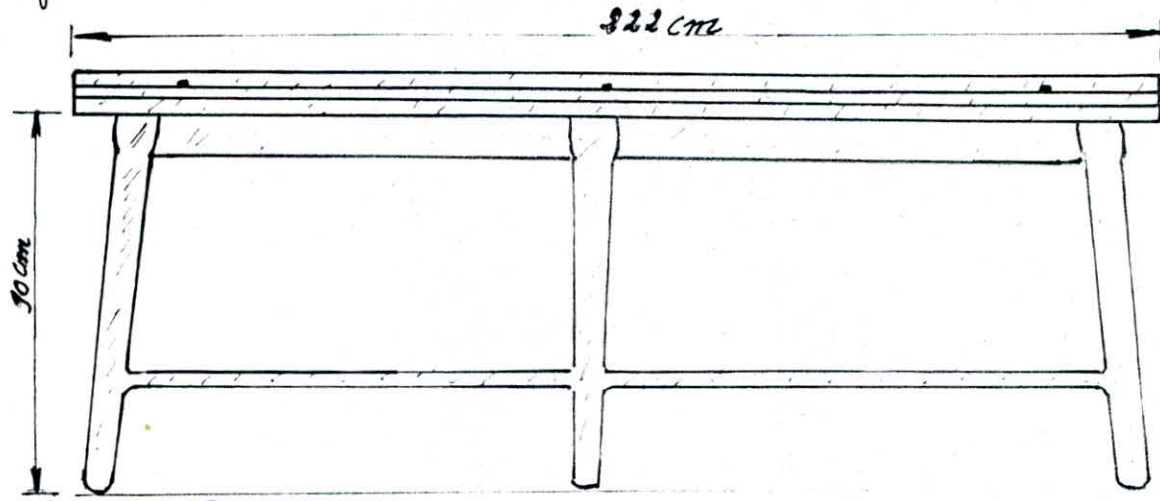
- support sur lequel repose le modèle
- le modèle Hele-shaw en lui même (canal Hele shaw)



MODELE HELE SHAW A PLAQUE CHANGEABLE

⊙ Le support :

Les dimensions en longueur et en largeur avec un schéma sont données ci dessous : longueur = 222 cm , hauteur = 90 cm , largeur = 50 cm .



① Canal Hèlè-shaw :

Le canal se compose de :

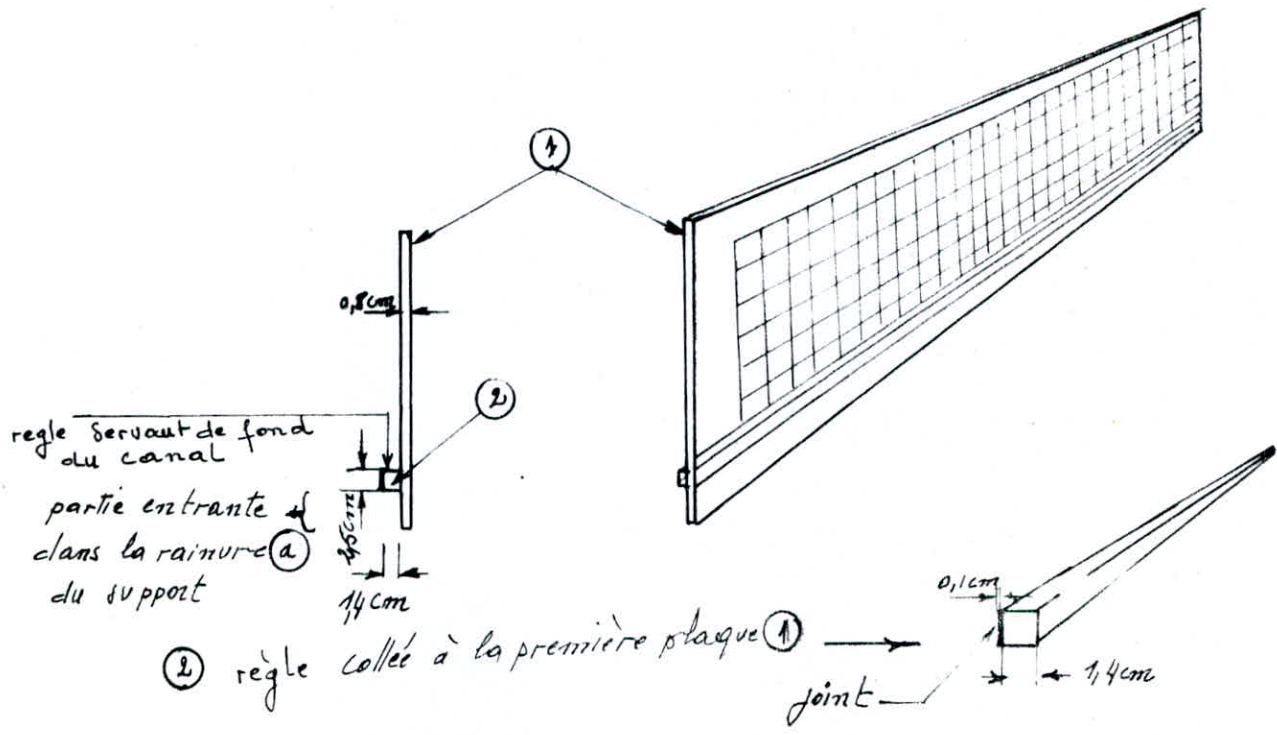
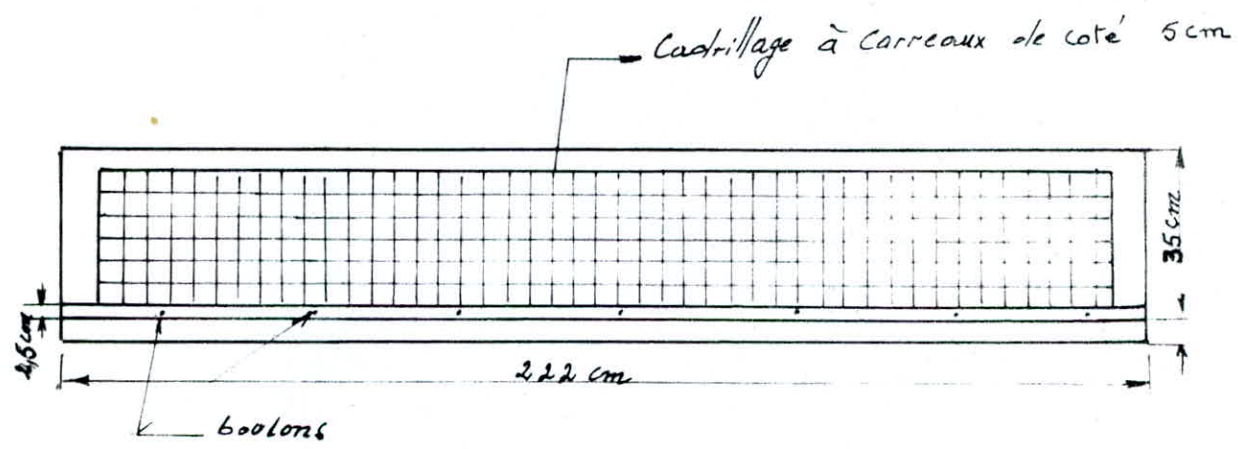
→ Deux plaques en plexiglass dont l'une fixe et l'autre variable, sur la première plaque est tracé un cadrillage à carreau de côté cinq (5) cm conçu pour le cas où une prise de photos est nécessaire.

La deuxième plaque sur laquelle on peut fixer avec des vis différents corps de barrages à étudier.

→ Deux ^{Cylindres} ~~scovettes~~, l'une à l'amont et l'autre à l'aval. La première servant à alimenter le réservoir principal la seconde servant à recueillir l'huile s'écoulant entre les deux plaques.

PREMIERE PLAQUE

La première plaque est une plaque en plexiglass de longueur 222 cm, largeur 40 cm et d'épaisseur 0,8 cm tous les détails sont donnés ci dessous.



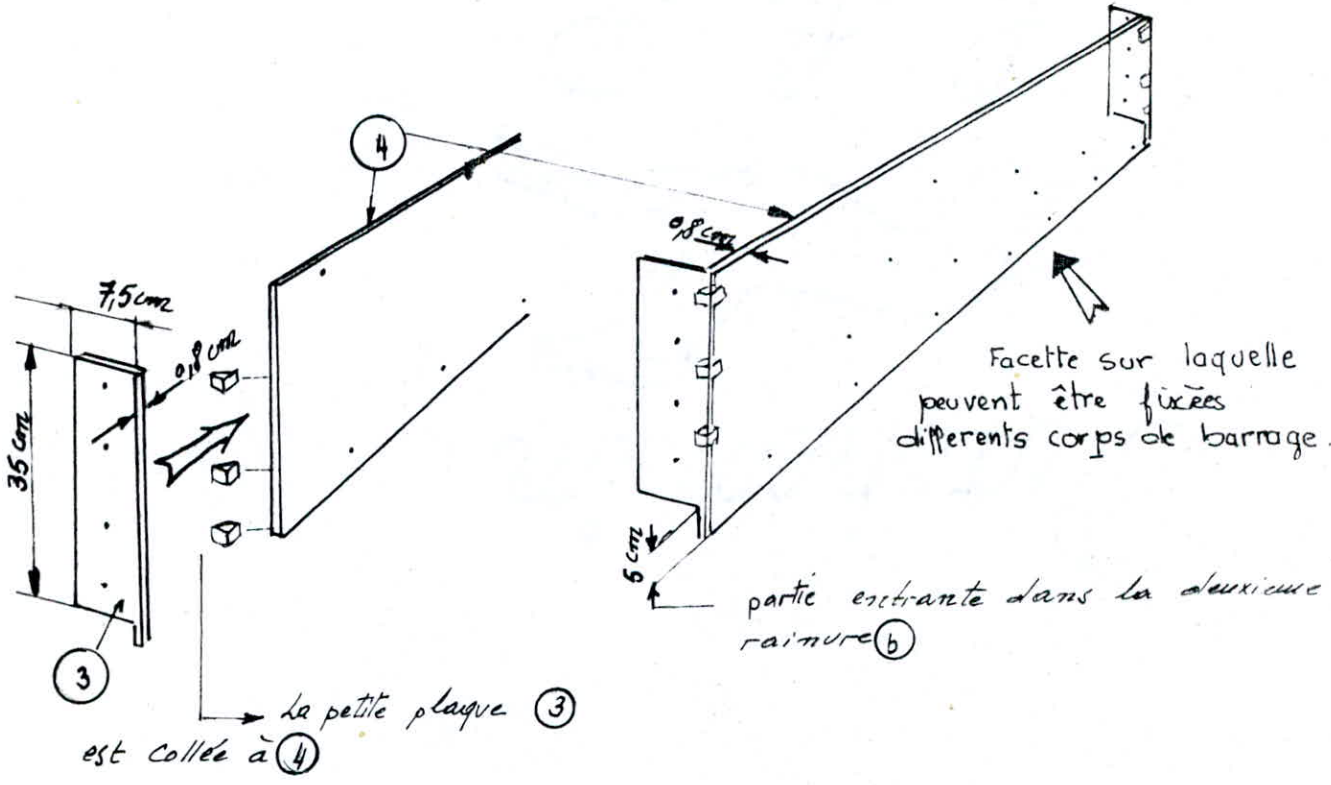
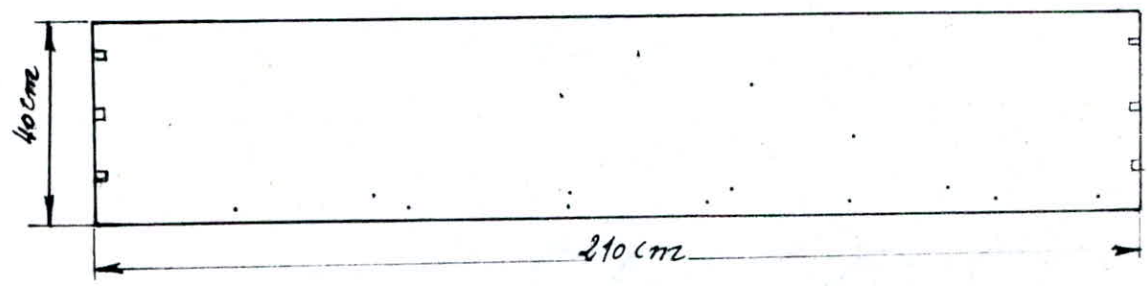
regle servant de fond
du canal
partie entrante
dans la rainure (a)
du support

② règle collée à la première plaque

joint

DEUXIEME PLAQUE

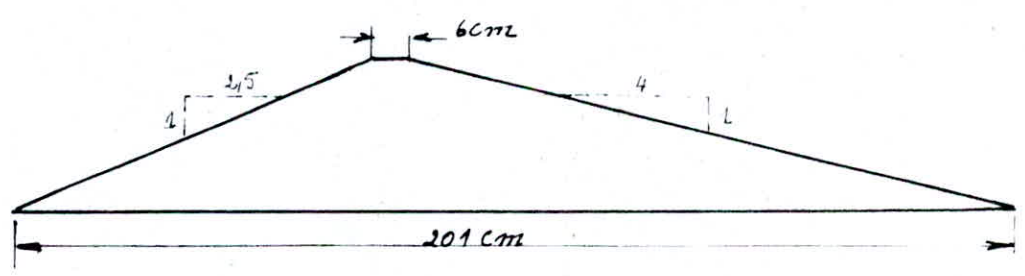
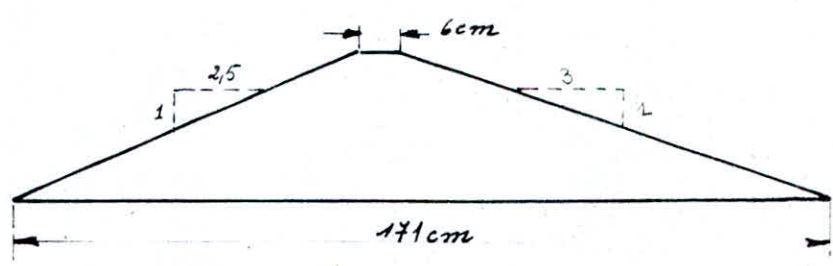
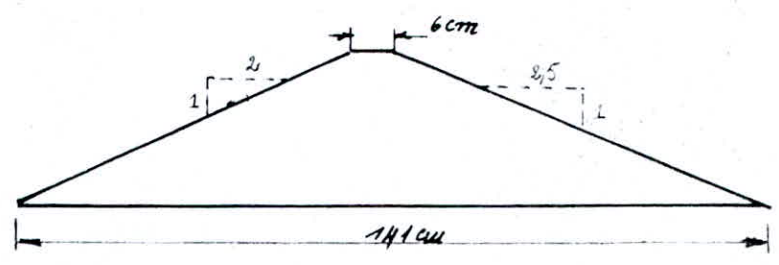
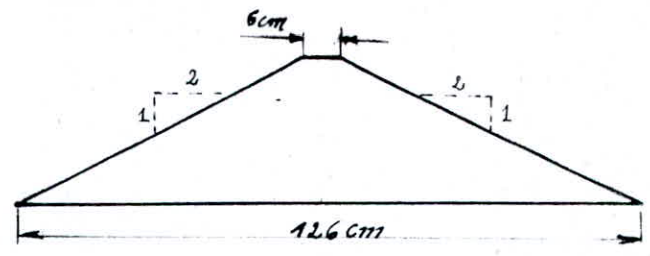
La deuxième plaque est une plaque en plexiglass de longueur 210 cm, de hauteur 40 cm et d'épaisseur 0.8 cm. Les différentes plaques simulant les différents corps de barrages seront fixées sur cette deuxième plaque par des vis.

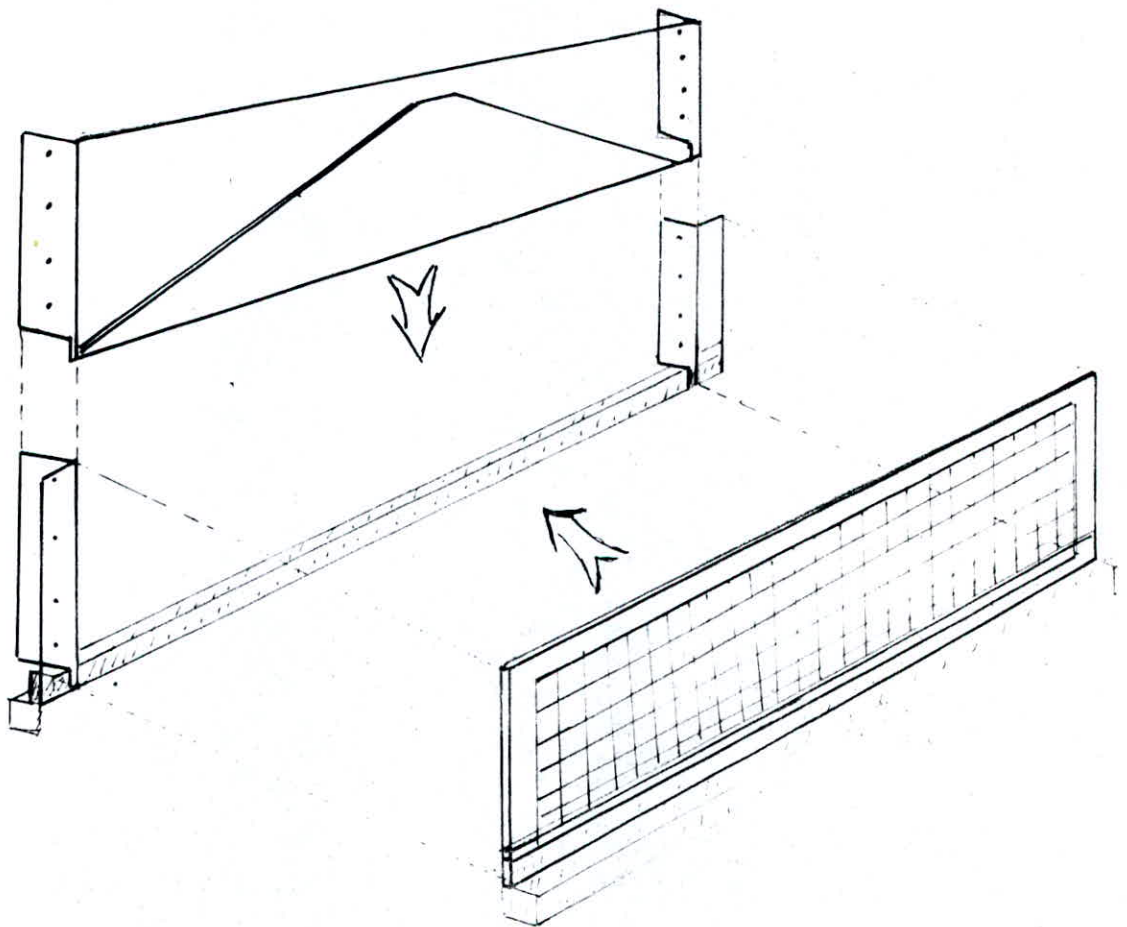
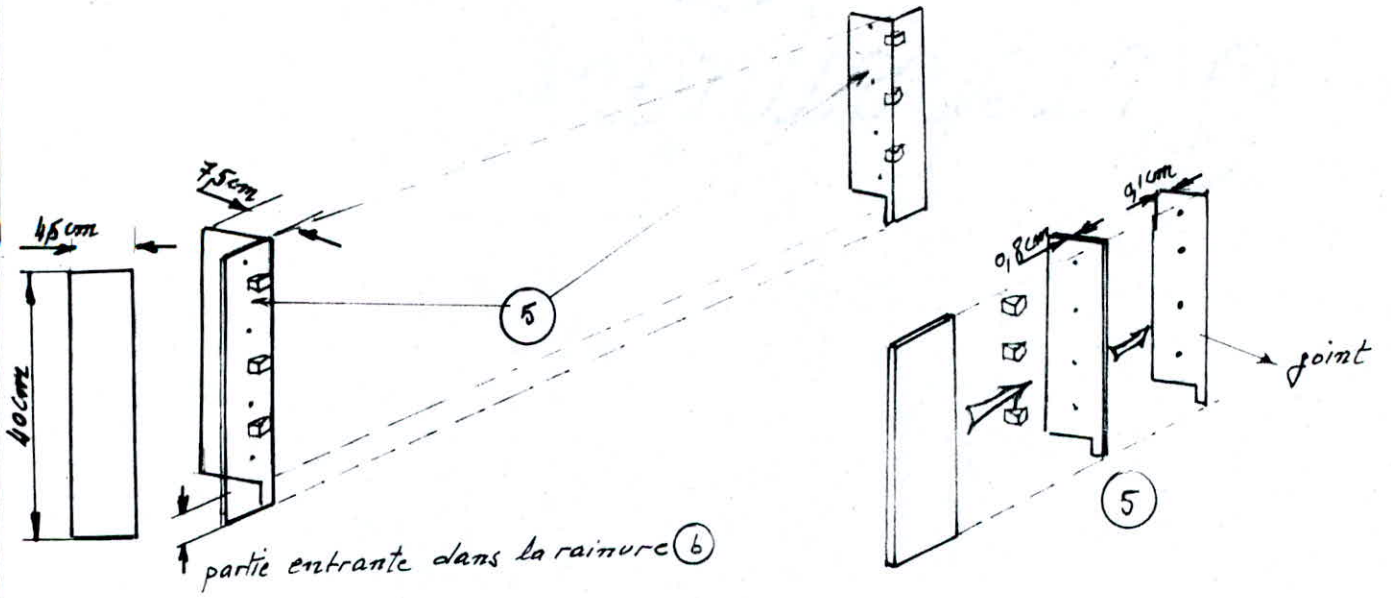


trois petits prismes pour renforcer le système

le même une même plaque (3) est collée à l'autre extrémité de la plaque (4)

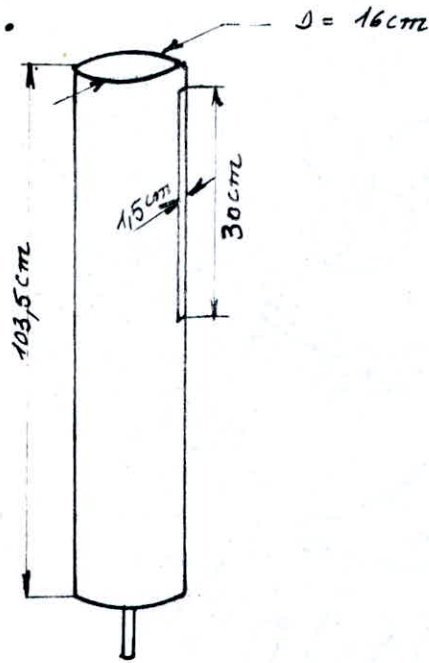
DIFFERENTES PLAQUES



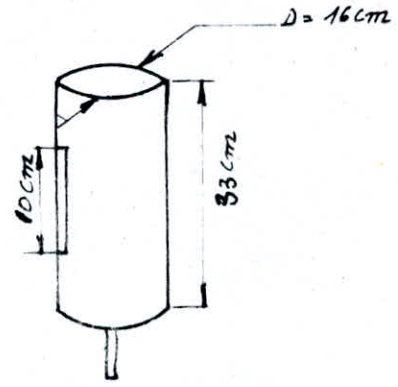


⊙ Deux cylindres:

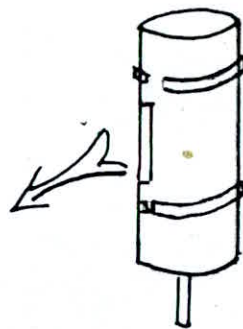
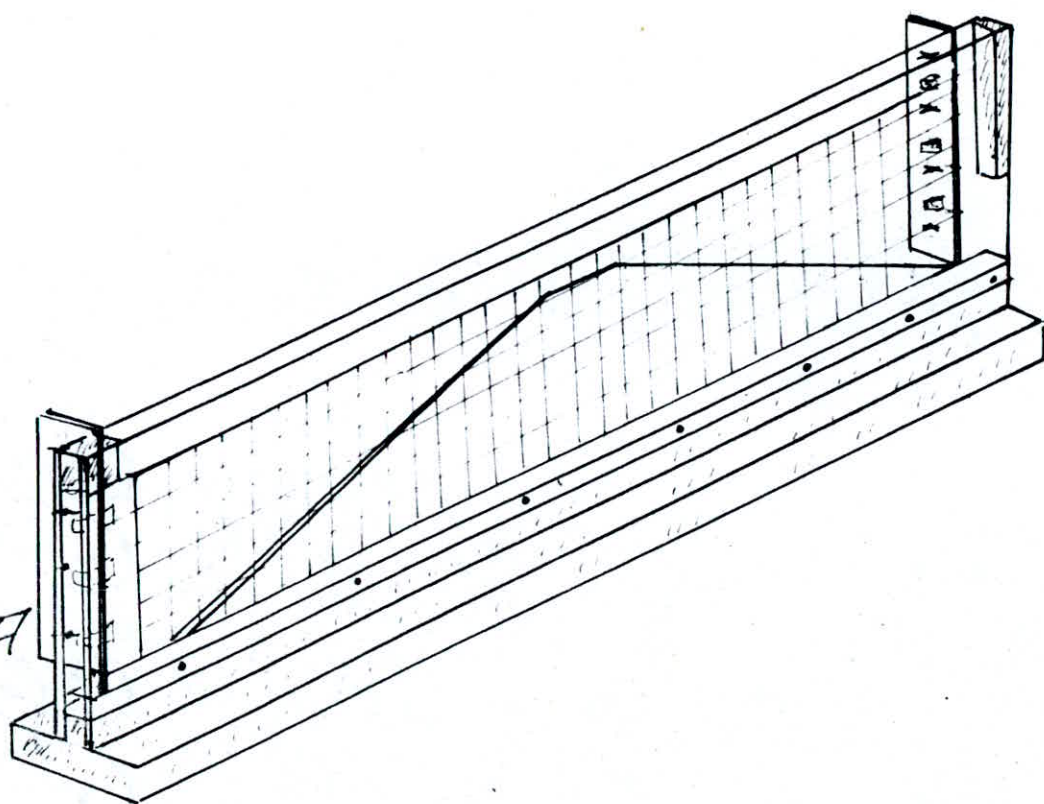
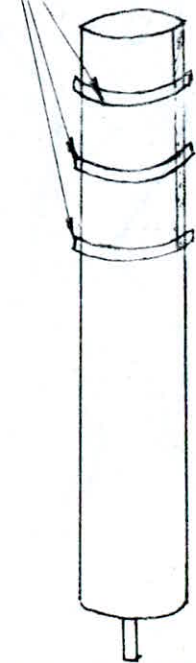
→ Cylindre amont: placé à l'extrémité amont de diamètre 16 cm, hauteur 103,5 cm possédant une fente de hauteur 31 cm d'épaisseur 1,5 cm.



→ Cylindre aval: placé à l'extrémité aval de diamètre 16 cm hauteur 33 cm possédant une fente de hauteur 10 cm d'épaisseur 1,5 cm.



Couronnes



Couronnes pour renforcer le fixage du cylindre sur le canal Hépé - shaw.

ETUDE EXPERIMENTALE SUR LE NOUVEAU MODELE

DIGUE N°1: DIGUE AVEC SUINTEMENT

A / Ecoulement permanent

o Relevé des surfaces libres :

- Rappel
→ Théorie de Dupuit

Ligne de saturation donnée par Dupuit

La ligne de saturation donnée par la théorie de Dupuit est donnée

sous la forme : $y^2 = \frac{x}{L} (H_1^2 - H_2^2) + H_2^2$

L: longueur entre les deux hauteurs H_1, H_2

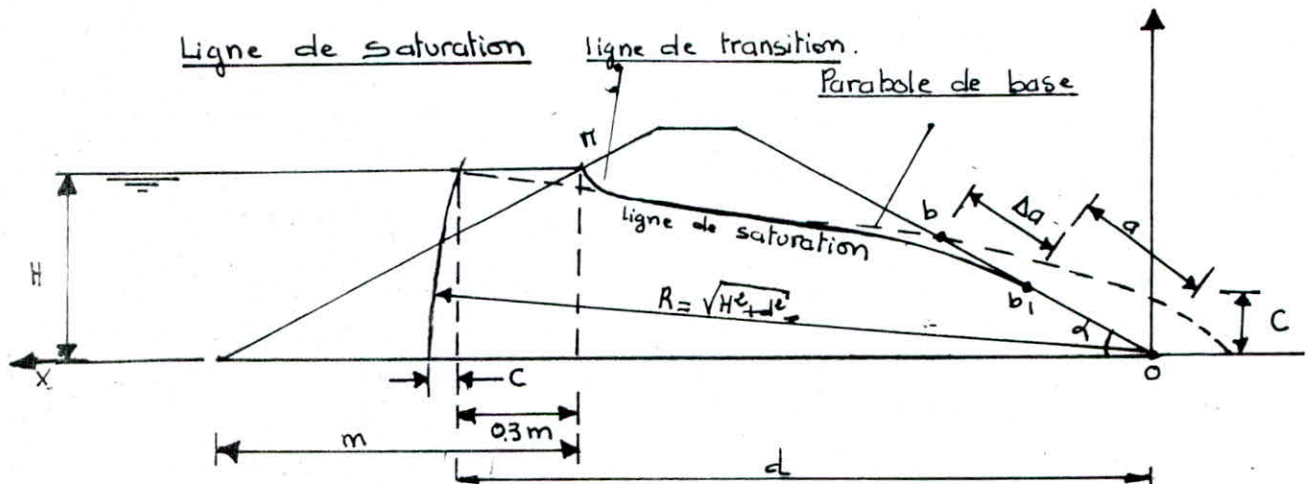
H_1 : hauteur amont

H_2 : hauteur aval.

Expression du débit

$$Q = \frac{K}{2L} (H_1^2 - H_2^2) \cdot d_0 \quad d_0: \text{distance entre les deux plaques.}$$

→ Méthode semi-empirique de KOZENY



La parabole de base a pour équation $y = \sqrt{c(2x+c)}$.

Le point b intersection de la parabole avec la face aval peut être rapidement trouvé à partir de l'équation en coordonnées polaires l'origine étant au foyer $\rho = \frac{c}{1 - \cos \alpha} = a + \Delta a$.

CASAGRANDE a montré que la distance Δa varie avec la pente du parement.

Un graphique donne en fonction des angles du talus aval avec l'horizontale les valeurs correspondantes du rapport $\frac{\Delta a}{a + \Delta a}$.

Expression du débit

$$q = K(\sqrt{H^2 + d^2} - d) d^3$$

● Comparaison des courbes :

Les courbes théoriques et expérimentales sont tracées ci-dessous pour deux hauteurs différentes $h = 22,5 \text{ cm}$; $13,4 \text{ cm}$.

● Comparaison des débits :

Pour les deux hauteurs citées plus haut, on relève le débit de fuite :

$$\text{pour } h = 22,5 \text{ cm} \longrightarrow Q = 2,30 \pm 0,12 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$h = 13,4 \text{ cm} \longrightarrow Q = 0,70 \pm 0,04 \text{ cm}^3/\text{s}$$

La mesure de la viscosité pendant la manipulation nous a permis de calculer la valeur de la perméabilité fictive qui est donnée par

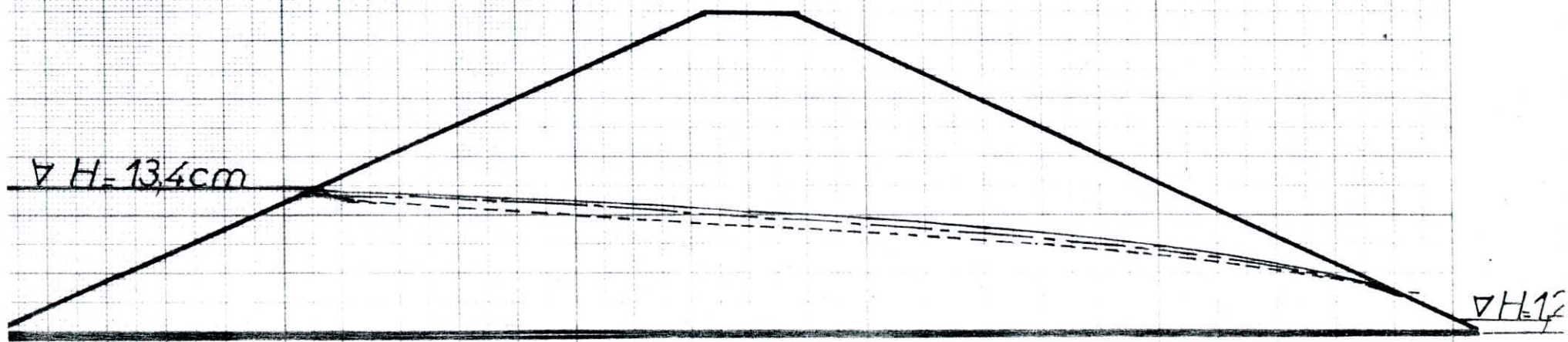
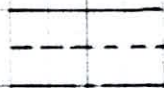
$$\text{la formule } K_m = \frac{d^3 g}{12 \nu} \quad \nu = 2,53 \text{ cm}^2/\text{s} \quad \text{à } \theta = 23^\circ \longrightarrow K_m = 2,91 \text{ cm/s}$$

Tableau de comparaison des débits

Hauteur de la retenue	débit expérimental	Débit de KOZENY	Débit de Dupuit
13,4 (cm)	$0,70 \pm 0,04$ (cm ³ /s)	0,72 (cm ³ /s)	0,79 (cm ³ /s)
22,5	$2,30 \pm 0,12$	2,37	2,97

LIGNES DE SATURATION EXPERIMENTALES ET THEORIQUES

experimentale
d'après
kozény

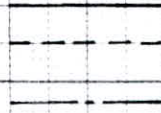


echelle : x : \rightarrow 5cm

y : \uparrow 5cm

LIGNES DE SATURATION EXPERIMENTALE ET THEORIQUES

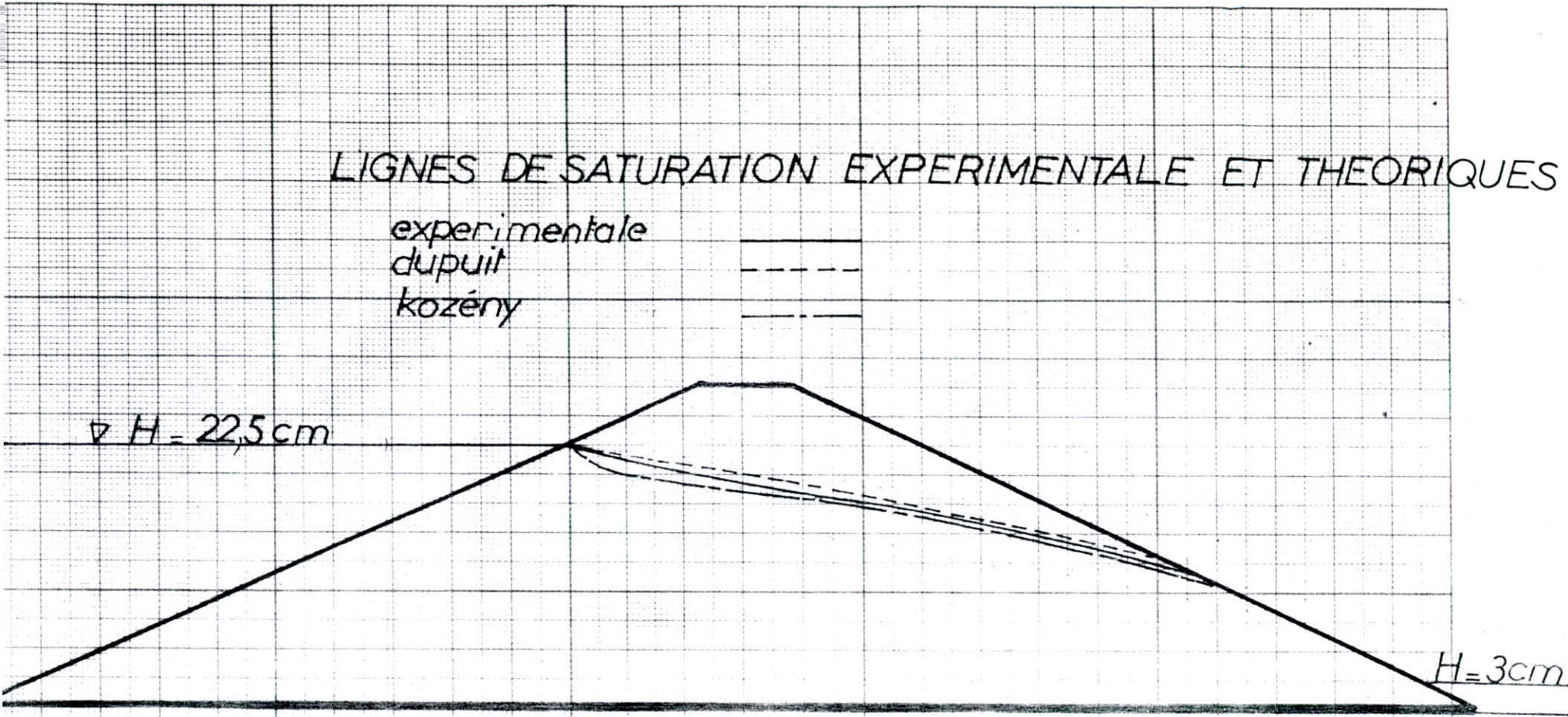
experimentale
dupuit
kozény



$\nabla H = 22,5 \text{ cm}$

$H = 3 \text{ cm}$

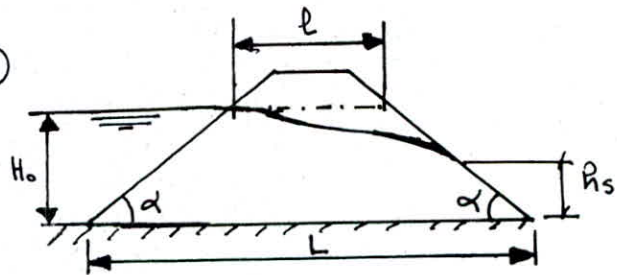
echelle : x : 1cm \longrightarrow 5cm
y : 1cm \longrightarrow 5cm



Comparaison des résultats expérimentaux avec ceux donnés par Huard de la Marre.

Huard de la Marre a étudié le cas des digues symétriques sous filtre aval au moyen de la méthode de l'analogie électrique. Il obtient pour le débit la formule approchée suivante :

$$q = K \frac{H_0^2}{L + l} \quad (1)$$



La formule (2) donne une approximation un peu meilleure

$$q = K \frac{H_0^2}{(0,8 + 0,0045 \alpha)L + 1,18l} \quad (2)$$

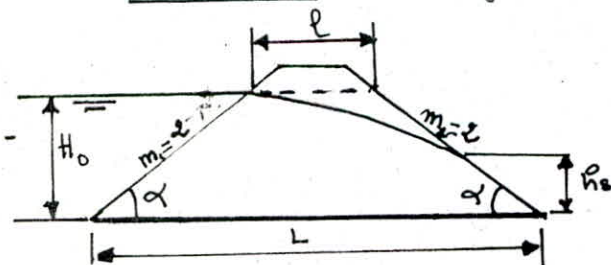
α , en degré.

$$20^\circ \leq \alpha \leq 70^\circ$$

Remarque : Ces formules s'appliquent pour des digues en terre homogènes sur fondation imperméable ne comportant pas de tapis filtrant.

Application

1° cas (voir graphique précédent).



$$\begin{aligned} L &= 126 \text{ cm} \\ H_0 &= 22,5 \text{ cm} \\ l &= 30 \text{ cm} \\ \alpha &= 26,56^\circ \\ V &= 2,53 \text{ cm}^3/\text{s} \rightarrow K_m = 2,91 \text{ cm/s} \\ h_s &= 11,5 \text{ cm} \end{aligned} \quad Q_{\text{exp}} = (2,30 \pm 0,12) \text{ cm}^3/\text{s}$$

• Pour la formule ① : $Q_1 = \frac{K_m H_0^2}{L+l} \cdot d_0 = \frac{2,91 \cdot (22,5)^2 \cdot 0,3}{126 + 30} = \underline{2,83 \text{ cm}^3/\text{s}}$

$d_0 = 3 \text{ mm}$: distana entre la digue et la plaque fixe.

• Pour la formule ② : $Q_2 = \frac{K H_0^2}{(0,8 + 0,0045 \alpha) \cdot L + 1,18 l} \cdot d_0 = \frac{2,91 \cdot (22,5)^2 \cdot 0,3}{(0,8 + 0,0045 \cdot 26,56) \cdot 126 + 1,18 \cdot 30}$

$Q_2 = \underline{2,92 \text{ cm}^3/\text{s}}$

• $Q_{\text{exp}} = \underline{(2,30 \pm 0,12) \text{ cm}^3/\text{s}}$

hauteur H_0 (cm)	Q_{exp} cm^3/s	Q_1 cm^3/s	Q_2 cm^3/s
22,5	2,30	2,83	2,92

2° cas

$L = 126 \text{ cm}$
 $H_0 = 13,4 \text{ cm}$
 $D = 22,5 \text{ cm}$ $K_m =$
 $\alpha = 26,56$
 $K_m = 2,91 \text{ cm/s}$
 $R_s = 3 \text{ cm}$
 $Q_{\text{exp}} = 0,70 \text{ cm}^3/\text{s}$

hauteur H_0 (cm)	Q_{exp} (cm^3/s)	Q_1 (cm^3/s)	Q_2 (cm^3/s)
13,4 cm	0,70	0,78	0,78

- Concernant la position de la surface libre, l'examen des résultats de Huard de la Marre montre que l'on a sensiblement : $\frac{R_s}{H_0} = f(\alpha) \frac{H_0}{L+l}$ (voir figure - 1 -)

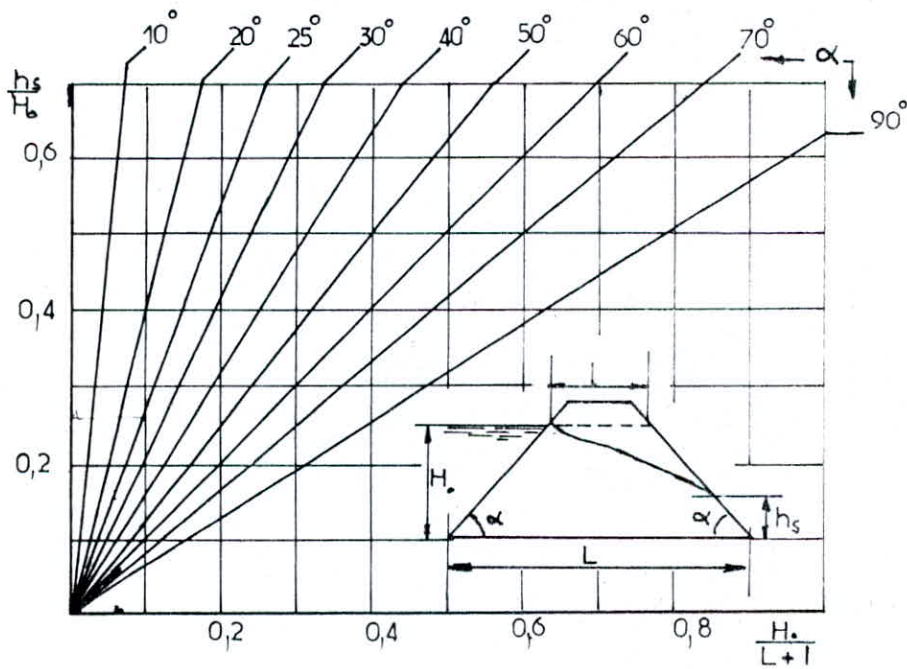


fig. 1-

Application : on a fait une comparaison entre R_s donnée par l'abaque (Fig. 1-) et R_s trouvée expérimentalement pour les hauteurs citées ci-dessus ($H_0 = 22,5$ cm, $H_0 = 13,4$ cm)

Tableau

Hauteur H_0 cm	R_s expérimentale (cm)	R_s de Huard de la Marre (cm)
22,5	11,50	10,12
13,4	3,00	2,68

B/ REGIME NON PERMANENT

● Relevé de la surface libre

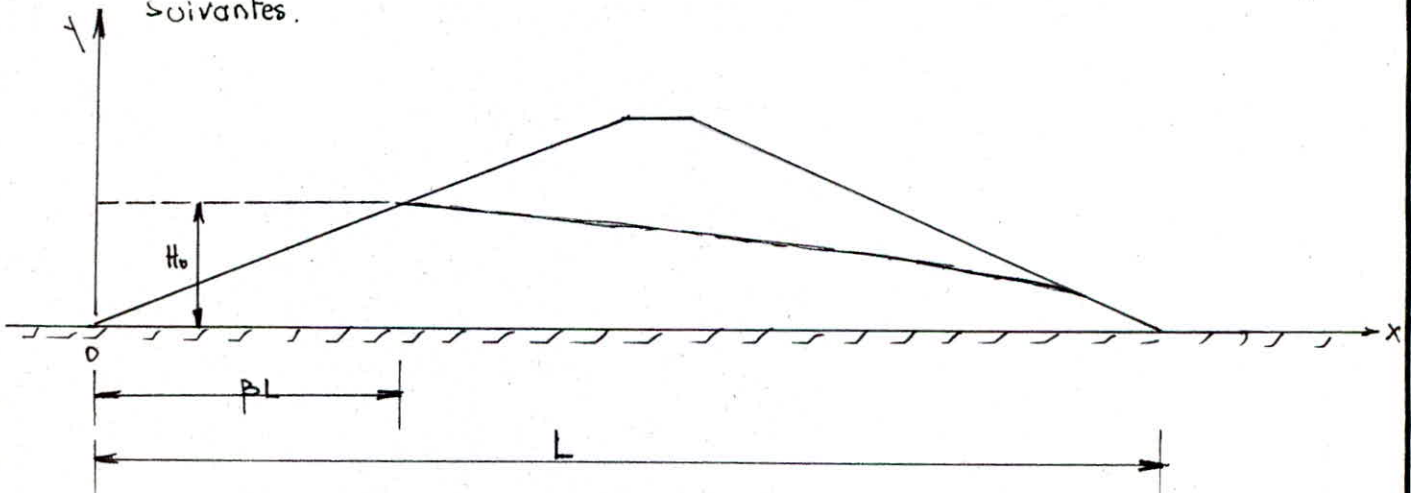
Le relevé de la surface libre au cours du temps est effectué de la même façon que précédemment.

Pour les courbes théoriques, la même fonction est utilisée :

$$h(x,t) = H_0 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1-\beta} \cdot \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 K H_0 t}{L^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \cdot \frac{1}{n \pi}}$$

$$\begin{aligned} H_0 &= 13,4 \text{ cm} \\ L &= 186 \text{ cm} \\ \beta &= 0,21 \\ K &= 2,66 \text{ cm/s} \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Les courbes expérimentales et théoriques sont données dans les pages suivantes.



COURBES EXPERIMENTALES

differentes positions de la ligne de saturation au cours du temps

$t_0 = 0 \text{ mn}$, $t_1 = 1 \text{ mn}$, $t_2 = 3 \text{ mn}$, $t_3 = 8 \text{ mn}$

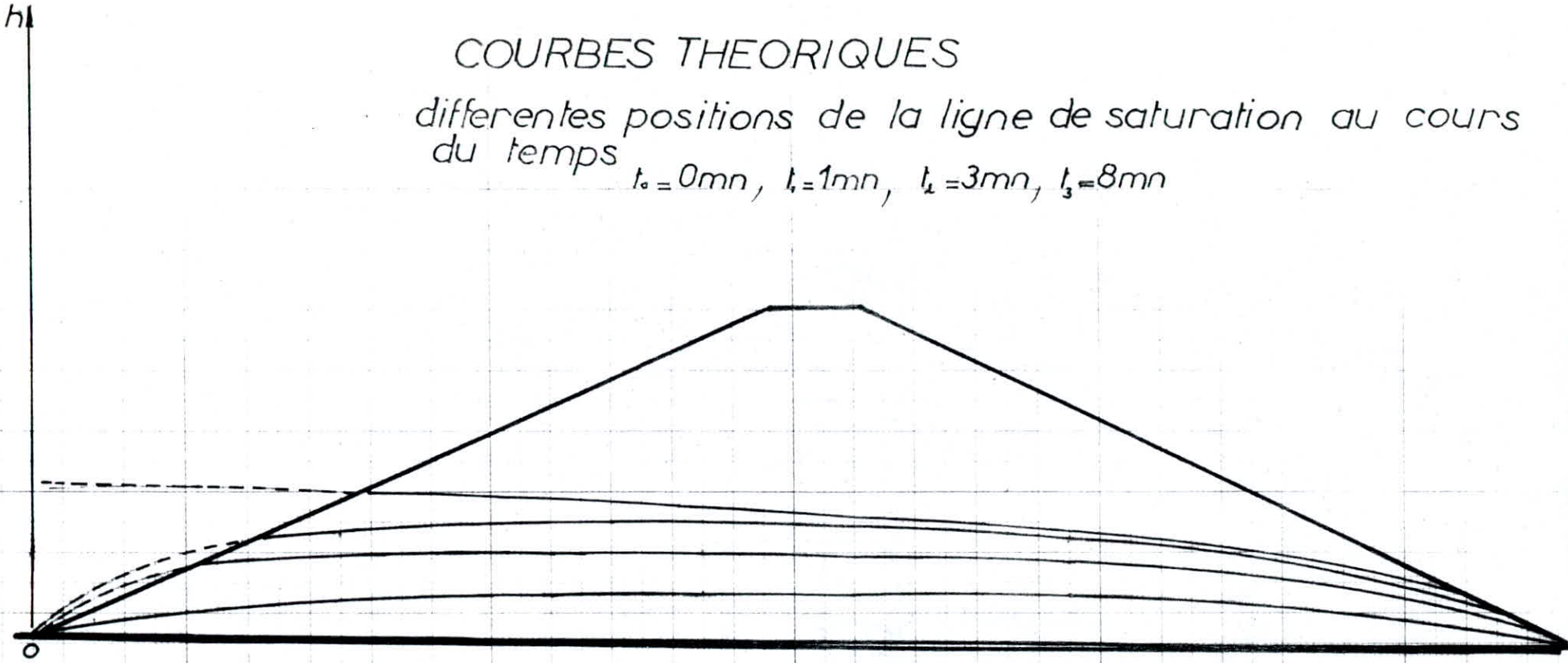


echelle: $x: 1 \text{ cm} \rightarrow 5 \text{ cm}$
 $y: 1 \text{ cm} \rightarrow 5 \text{ cm}$

COURBES THEORIQUES

differentes positions de la ligne de saturation au cours du temps

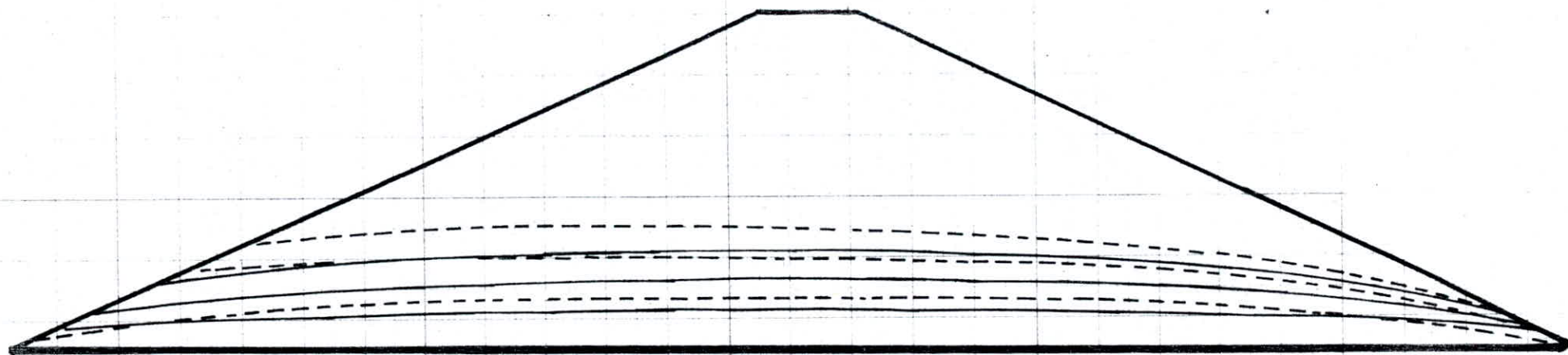
$t_0 = 0mn$, $t_1 = 1mn$, $t_2 = 3mn$, $t_3 = 8mn$



echelle : x : 1cm → 5cm
 y : 1cm → 5cm

COURBES EXPERIMENTALES ET THEORIQUES

experimentales ———
theoriques - - - - -



echelle : x: 1cm → 5cm
 y: 1cm → 5cm

A small coordinate system is shown below the scale information. It consists of a vertical y-axis and a horizontal x-axis, both ending in arrows. The x-axis is labeled 'x' and the y-axis is labeled 'y'.

CONCLUSION

Dans notre présent projet, on a étudié en première partie la ligne de saturation en régime permanent Par analogie visqueuse.

Une étude comparative a été faite avec des méthodes classiques (Dupuit, KOZENY).

Les résultats obtenus sont satisfaisants.

La deuxième partie a été consacrée à l'étude de la vidange rapide.

Les solutions obtenues sont comparées aux solutions de l'équation de la chaleur, et il est montré que l'approximation de l'équation de Boussinesq linéarisée est en défaut, ceci est dû aux composantes verticales relativement importantes de la vitesse le long de la surface libre dans les instants qui suivent immédiatement la vidange rapide.

L'analogie HÉLÉ-SHAW s'est révélée être un moyen d'étude efficace et rapide à condition de prendre toutes les dispositions possibles tel que un refroidisseur pour garder une température constante, des appareils de mesure de précision...

Vu les bons résultats obtenus par le premier modèle, on a réalisé un modèle à plaque changeable sur laquelle

peuvent être fixées différentes digues.

Son plus grand avantage c'est qu'on peut étudier n'importe quelle digue typique de nombreux endiguement utilisés en Algérie, des nappes, tranchées, drainage etc...

Noos souhaitons que ce modèle servira d'outil de travaux pratiques et de recherches.



• ○ ○ ○ ○ BIBLIOGRAPHIE ○ ○ ○ ○ •

- - Hydraulique générale et appliquée - CARLIER Eyrolles 2^e édition 1980.
- - Hydraulique Souterraine - SCHNEEBELI Eyrolles 1978.
- - Hydraulique générale et souterraine - première partie INH Boumerdes 1969.
- - Hydraulique générale et souterraine - deuxième partie INH Boumerdes 1969.
- - Calcul différentiel et équations différentielles - Cours de M012 office des Publications Universitaires OPU. 1983.
- - mécanique des fluides - JEAN-PIERRE LEROUX, PHILIPPE BAUDUIN. technologie et Université JUNOD. ~~1972~~
- - Les infiltrations à travers les barrages en terre homogène et isotrope reposant sur une assise imperméable - Thèse janvier 87. - ENP.
- - Barrage en terre Compacté - Méthode américaine POST et LONDE. ~~édition~~ Paris 195.
- Théorie générale des écoulements des fluides souterrains par J. FERRANDON. Revue de la société hydro-technique de France, VI^{ème} journées de l'hydraulique (Nancy 1960).
- Régimes d'écoulement en milieu poreux et limite de la loi de DARCY par G. CHAUVETEAU et CL THIRRIOT La houille blanche N°2 1967 pages 141 - 148.

- - L'hydraulique souterraine dans son Cadre historique -
par CHARPOUTHIER pages 1-10
revue de la société hydrotechnique de France
VIÈME Journées de l'hydraulique (Nancy 1960).
- - Sur la Théorie des écoulements de filtration - par
G SCHNEEBELI pages 186 - 192 la Houille blanche
N° Spécial 1/1953.
- - Quelques résultats Théoriques récents Concernant les
écoulements des nappes d'eau souterraines -
par R. MEYER. la Houille blanche janvier - février
1955 pages 86 - 93.
- - Écoulement dans les digues et barrages en terre. Modèles
analogiques, modèles physiques Que représente la notion
de la surface libre? - par G VACHAUD la houille blanche
/ 1973 pages 429 - 430
- - Recherche de l'écoulement non permanent de la nappe
souterraine à l'aide d'un modèle à fente mince
Hele - shaw - par V. HALEK et J. CISTIN pages 1-9
revue de la Société hydrotechnique de France VIÈMES
Journées de l'hydraulique (Nancy 1960) Rapport N° 8
- - Unsteady flow in Porous media by means of a Hele
Shaw viscous fluid Model - par DAVID K TODD pages 905-915
Transactions American Geophysical Union Volume 35
Number 6 DECEMBER 1954.

٤٤/٨٧

ANNEXE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique



- Page ① : → La dernière ligne : lire $K =$ coefficient dépendant du milieu poreux.
- Page ② : → Ne pas tenir compte de la dernière et l'avant dernière ligne.
- Page ③ : → Ne pas tenir compte de la 3^{ème} conditions de validité de la loi de DARCY.
- Page ⑤ : → Ne pas tenir compte de la phrase : (il faut faire appel à d'autres lois, qui ne rentrent pas dans notre cadre).
- Page ④ → lire $R_c (1 \div 10)$ au lieu de R_c .
- Page ④ → En conclusion : Ajouter une 4^{ème} hypothèse : ((Milieu saturé)).
- Page ④ → Lire seulement la phrase :
« En considérant l'équation de continuité $\text{div} \vec{v} = 0$ »
- Page ⑤ → Lire $(F = [0, 0, -g])$ dérive d'un potentiel au lieu de $(F = [0, 0, -g])$ dans le cas d'un milieu poreux.
- Page ⑤ → Ajouter : $\phi = z + \frac{p}{\omega} = H$
- Page ⑥ → (Fig No. 1) : $-dx$ au lieu de dx .
: $M'M = 4$
- Page ⑦ → Lire : « lorsque la pente de la nappe »

au lieu de « lorsque la pente superficielle de la nappe ».

- Page ⑧ → Ne pas tenir compte de la remarque
- Page ⑨ → Lire « cas d'un barrage homogène avec tapis filtrant » au lieu « cas d'un barrage homogène avec drain ».
- Page ⑫ → Ajouter à la 3^{ème} condition :
 $\psi = \psi_0$ condition sur surface libre \equiv condition sur surface de suintement.
- Page ⑮ → Lire « On adopte une perméabilité moyenne » au lieu « on ~~ad~~ adopte un coefficient de perméabilité moyen ».
- Page ⑮ → Ajouter à la Remarque : $q = \sqrt{k_x k_y} \cdot C$
- Page ⑮ → Lire « les composantes verticales de la vitesse sont importantes » au lieu de « les composantes de la vitesse sont sensibles ».
- Page ⑮ → lire « Dans notre étude » au lieu « Dans notre suivante étude ».
- Page ⑮ → Lire « K : Perméabilité » au lieu de « K : Coefficient de DARCY ».
- Page ⑰ → remplacer (e) par (P) : Porosité efficace dans la formule ①.
- Page ⑰ → Ajouter à la figure ① t et $t+dt$;
 $R(x,t)$ et $R(x,t+dt)$.
- Page ⑱ → Ne pas tenir compte des dimensions de ϕ_n , dt , dt , dn .
- Page ⑱ → Ajouter à la dernière ligne : « En

Page 19 → Lire « d'une part la côte ... »
au lieu « ... d'une part l'élevation ... »

Page 21 → remplacer « $\Delta = -\omega^2$ » par
« $\Delta = -\omega_1^2$ »

Page 24 → Ajouter le paragraphe suivant:
« Pour chaque valeur de ω ; donc pour
chaque valeur de x nous pouvons choisir
la constante C_n .

Comme l'équation de la chaleur est homogène
et linéaire la somme des solutions est aussi une
solution.

la série ne sera solution que dans le cas
où les coefficients C_n sont tels que la série
converge et que les séries après dérivations
terme à terme pour tout x et $t > 0$ ».

Page 25 → Lire juste après les conditions
aux limites et initiales:
« $t = 0 \quad H(x, 0) = \sum C_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x)$ si $f(x)$
est telle qu'on peut la développer en série de
Fourier dans l'intervalle $[0, L]$ ».

Page 25 → $R(x, 0) = \sqrt{g(L-x)}$ est obtenue après
changement d'axes.

Page 26 → mentionner sur la figure 4 la
longueur L .

Page 28 → Ajouter à la ligne ③:
 $\text{div } \rho \vec{v} = \rho \text{div } \vec{v} + \vec{g} \text{grad } \rho = \rho \vec{g} \text{grad } v + \vec{v} \text{grad } \rho$.

Page 29 → Lire à la ligne 13: « fluide pesant... »

Page ④ → ligne 8 : Lire «... Par des (moyens dont on dispose)». au lieu «... Par des moyens que l'on dispose».

Page ④ → Lire Ligne 2: Lire « on considère g, d, L, D, H comme valeurs fixes » au lieu de « g, d, L, D, H sont des valeurs fixes ».

Page ④ → Lire « En égalisant (1) et (2) $\Rightarrow \frac{K}{2x} (y_1^2 - H_2^2) = \frac{K}{2L} (H_1^2 - H_2^2)$ » au lieu « En égalisant () et () $\Rightarrow \frac{K}{2L} (y^2 - H_2^2) = \frac{K}{2L} (H_1^2 - H_2^2)$ ».

Page ④ → Lire « $R = \frac{q}{k}$ » au lieu de « $R = \frac{q}{k}$ »

Page ④ → Ajouter sur la figure $OP = R = \sqrt{d^2 + a^2} = d$

Page ④ → ~~le~~ remplacer P par q.

Page ④ → ligne 12 lire « ... les variations de \bar{h} sont faibles par rapport à H . » au lieu de « ... les variations de \bar{h} sont faibles par rapport à R ».

Page ④ → ~~le~~, ~~la~~ Lignes 12, 13 : Lire « $L_0 =$ largeur de la digue » au lieu de « L largeur de la digue ».

