

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Ecole Nationale Polytechnique

Département Génie Civil.

Ecole Doctoral « Ingénierie et Environnement ».



Laboratoire de Génie Sismique et Dynamique des Structures

MEMOIRE DE MAGISTERE.

Présenté par :

Mohammed BELGHENOU

Ingénieur d'état en Génie Civil de l'École Nationale Polytechnique.

En vue de l'obtention de titre de MAGISTER en Génie Civil.

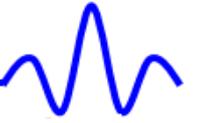
THÈME

***REPONSE SISMIQUE DES STRUCTURES A
AMORTISSEMENT INCERTAIN SOUS EXCITATIONS
STOCHASTIQUES PAR LA METHODE DES
PERTURBATIONS.***

Soutenue publiquement le 29/01/2012 devant le jury composé de :

Président :	Mr M. BOUABDALLAH	Professeur ENP
Directeur du mémoire :	Mr B. TILIOUINE	Professeur ENP
Examineur :	Mr F. BOUDJAMA	Professeur ENP
Examineur :	Mr M. HAMMOUTENE	Professeur ENP

10, Avenue Hassen Badi, BP 182, 16200, El-Harrach, Alger, Algérie.



ملخص :

يدرس هذا العمل التخميد و تأثير الإرتيابات في قيمه علا الإستجابة الزلزالية للهياكل ذات الخصائص المرتابة مع توضيح طريقة إستجابتها. لهذا الغرض، تم استعمال طريقة التحاليل الإضطرابية من الدرجة الثانية و قد أثبتت النتائج مدى تأثير الإرتيابات على الإستجابة الزلزالية، و أنها تزيد بزيادة قيمة الإرتياب على التخميد. الآثار هي أكثر وضوحا بالنسبة لتقلب أعلى من قيم التخميد.

كلمات مفاتيح :

التخميد, طريقة التحاليل الإضطرابية, الإرتياب, الإستجابة الزلزالية, الإهتزازات الإعتباطية

Résumé :

L'incertitude associée à l'amortissement dans les systèmes structuraux est identifiée et discutée. Une technique de perturbation de second ordre est utilisée pour examiner les effets de la variabilité d'amortissement sur la réponse transitoire et l'état d'équilibre dynamique des systèmes structuraux. Les résultats montrent que l'incertitude inhérente à l'amortissement influence sur la réponse du système. Les effets sont plus prononcés pour une plus grande variabilité des valeurs d'amortissement.

Mots-clés:

amortissement, incertitude, vibrations aléatoires, théorie des perturbations, réponse sismique.

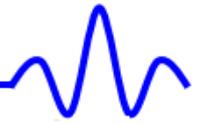
Abstract :

The uncertainty associated with damping in structural systems is identified and discussed. A second-order perturbation technique is utilized to examine the effects of damping variability on the transient and steady-state dynamic response of structural systems. The results demonstrate that the uncertainty in damping indeed influences the system response. The effects are more pronounced for higher variability of damping values.

Keywords:

damping, uncertainty, random vibration, perturbations théorie, sismique réponse.





A...

Mes parents

Mon frère Issam

Mes sœurs Asma et Nassiba

Mes collègues Malek, Issam et

Ghazia.



Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, le Clément et le Miséricordieux de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

*Je voudrai exprimer mes vifs remerciements à mon directeur de thèse Mr. Le Professeur **B. TILIOUINE** pour les orientations et les conseils qu'il a su me prodiguer tout au long de ce travail de recherche.*

*Je tiens à remercier vivement Mr. le Professeur **A. BOUABDELAH** pour l'honneur qu'il me fait d'avoir accepté de présider le jury et je tiens aussi à exprimer mes vifs remerciements à tous les membres du jury pour avoir pris la peine d'examiner le manuscrit.*

Merci aussi à tous les membres de l'équipe du Laboratoire de Génie Sismique et de Dynamique des Structures pour leur soutien et leur aide.

Je ne pourrai oublier de remercier tous les enseignants et travailleurs qui ont contribué directement ou indirectement à ma formation depuis mes classes de primaire à ce jour.

Mes remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin m'ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.



SOMMAIRE

CH I : Introduction générale	01
CH II : Notions d'incertitude.	04
2-1 Introduction.	04
2-2 Déférences entre les systèmes paramétriques excités et les systèmes désordonnés.	05
2-3 Incertitudes dans le processus de construction.	06
2-4 Incertitudes et fiabilité.	07
2-5 Incertitude et analyse de sensibilité.	09
2-6 Propagation d'incertitudes.	09
2-7 Conclusion.	11
CH III : L'amortissement dans les structures :	
3-1 Introduction.	12
3-2 Bref historique.	13
3-3 Les mécanismes de l'amortissement.	14
3-4 Compositions de l'amortissement.	15
3-5 Amortissement équivalent.	16
3-6 Coefficient de l'amortissem.	16
3-7 L'évaluation et traitement de l'incertitude inhérente a l'amortissement.	20
3-5 Conclusion.	21
CH IV : La méthode des perturbations.	
4-1 Introduction.	24
4-2 Historique.	25



4-3	Définition.	26
4-4	Principe de la méthode.	27
4-5	Convergence de la série perturbatrice ?	27
4-6	Utilisation de la méthode pour la quantification des incertitudes.	29

CH V : Notions sur les vibrations aléatoires

5-1	Introduction.	31
5-2	Processus aléatoire.	32
5-3	Caractérisation d'un processus aléatoire.	32
5-4	Réponse d'un système à un degré de liberté à une excitation aléatoire stationnaire.	34
5-5	Conclusion.	36

CH VI : Développement du modèle analytique.

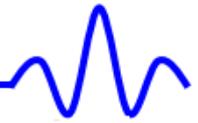
6-1	Introduction.	38
6-2	La philosophie de la méthode.	38
6-3	Formulation des équations de mouvement.	39
6-4	Détermination de la variance de la réponse modale.	41
6-5	Recherche des fonctions de transfert.	42
6-6	Pourquoi le choix de bruit blanc.	43
6-7	Recherche de Variance de la réponse.	47
6-8	Conclusion.	49

CH XII : Exemple Numérique.

7-1	Introduction.	50
-----	---------------	----



7-2	Evaluation et traitement de l'incertitude inhérente à l'amortissement.	51
7-3	Description du modèle.	52
7-4	Résultats.	53
7-5	Discutions des résultats.	54
7-6	Conclusion.	60
	Conclusion générale.	61



LISTE DES TABLEAUX

Tableau (3, 1) : Valeur d'amortissement pour quelque bâtiment réel.

Tableau (3.2) : tableau de $\xi(\%)$ dans l'RPA

Tableau (7, 1) : variance de la réponse pour un amortissement = 1 %

Tableau (7, 3) : variance de la réponse pour un amortissement = 5 %

Tableau (7,4) : erreurs sur la réponse de fonction des COV ξ (pour $\xi= 1 \%$).

Tableau (7,5) : erreurs sur la réponse de fonction des COV ξ (pour $\xi= 3 \%$).

Tableau (7,6) : erreurs sur la réponse de fonction des COV ξ (pour $\xi= 5 \%$).



LISTES DES FIGURES :

Figure (1, 1) : Exemple de structures à paramètres incertains.

Figure (3, 1) : vibration libre d'un système à amortissement critique
[Pecker 2006]

Figure (3, 2) : Vibration libre d'un système à amortissement sous critique [Pecker 2006].

Figure (3, 3) : influence d'amortissement sur la Vibration Libre d'un système sous-amorti [Pecker 2006].

Figure (5, 1) : Oscillateur à un degré de liberté.

Figure (7, 1) : exemple du système discrétisé.

Figure (7, 3) : Perturbation au 5^{ième} mode pour une perturbation de 2^{ieme} ordre.

Figure (7, 4) : Réponse d'une structure avec un amortissement incertain.

Figure (7, 5) : Réponse d'une structure avec un amortissement incertain, influence du N° de mode sur la réponse.

Figure (7, 6) : COV réponse en fonction de COV ξ (pour $\xi = 5\%$ et au 5^{ième} mode).



CHAPITRE I :

INTRODUCTION GENERALE.

La quête des ingénieurs concepteurs à toujours été la recherche d'un modèle qui simule le comportement réel de la structure étudiée. Et parmi les solutions proposées pour avoir des conceptions fiables c'est de changer le calcul traditionnelle « déterministe » par un calcul « probabiliste » plus exact.

Pour cette raison, beaucoup de travaux d'investigations sont lancés pour incorporer les incertitudes des paramètres dynamiques (masse, rigidité, amortissement, chargement,...) dans les calculs des réponses dynamiques des structures à une excitation quelconque.

A titre d'exemple, pour certaines structures, telles que les parkings de véhicules, les châteaux d'eau et les barrages, la masse relative à chaque niveau est fonction du temps (Jours, saisons) et il est pratiquement impossible de prédire sa valeur exacte lors d'un prochain séisme. En outre, si la structure considérée est fondée sur un sol meuble et que le phénomène d'interaction sol-structure ne peut être ignoré. Les caractéristiques de la structure dépendront des caractéristiques dynamiques du sol de fondation qui peuvent être différentes avant, pendant et après un tremblement de terre.

Ceci exige le développement d'outils mathématiques appropriés pour incorporer de telles incertitudes dans la modélisation des structures, de même que dans l'élaboration de méthodes pour analyser ces modèles mathématiques. Les processus aléatoires, par exemple, sont souvent utilisés en tant qu'outils mathématiques pour modéliser les variations temporelles des chargements incertains tels que ceux dus aux tremblements de terre ou aux vents. La théorie de vibration aléatoire peut être utilisée pour obtenir une description probabiliste de la réponse, telles que la moyenne et la covariance pour des processus Gaussiens, de même que les statistiques d'ordres supérieurs dans le cas des



processus non Gaussiens. Ces descriptions probabilistes peuvent être combinées avec les théories de réponses extrêmes approximatives pour obtenir diverses estimations de fiabilité pour la structure.

Le traitement des incertitudes contenues dans la modélisation des caractéristiques structurales, a suscité un intérêt croissant. Ces incertitudes, qui résultent de nombreuses hypothèses qui ont été fait lors de la modélisation de : la géométrie, des conditions aux limites et du comportement des matériaux constitutifs qui peuvent avoir un effet significatif sur la fiabilité de nombreuses structures.

Par conséquent, quand on considère un modèle structural comme un model d'éléments finis, on doit prendre en considération les incertitudes contenues dans la rigidité de chaque élément ou sous-structure, dans la masse et dans les coefficients d'amortissement modaux, dans les constantes de ressort qui modélisent les conditions aux limites, ou dans la rigidité équivalente de sol lors de la prise en considération de l'interaction de structures.

Dans ce qui suit, nous présentons les principaux résultats d'une investigation analytique et numérique de l'effet des incertitudes des valeurs de l'amortissement critique sur la réponse sismique maximale des systèmes à caractéristique aléatoires.

Pour ça, une technique de perturbation de 2^{ème} ordre a été utilisée pour mettre en évidence l'impact des fluctuations de l'amortissement sur la réponse du système.

Cette étude consiste, en premier lieu, la recherche d'un modèle mathématique qui mit en évidence l'effet de l'incertitude. Le modèle sera construit à la base des notions de la vibration aléatoire et le concept de la méthode des perturbations où on utilisera un amortissement critique définit par une moyenne et une fluctuation gaussienne.

Dans la 2^{ème} parties, une structure discrétisée sera présente pour illustrer et quantifier l'impact de l'incertitude, ainsi que quelques suggestions sur leur développement et leur prise en compte dans les dimensionnements.

La présentation de ce travail est faite par le biais de plusieurs chapitres, le premier chapitre porte sur la description des incertitudes. Les notions d'erreurs et d'incertitudes sont discutées. Les divers types et sources d'incertitudes sont également présentés. Le deuxième chapitre présente la théorie des perturbations comme un moyen mathématique efficace pour incorporer les incertitudes dans l'analyse et la conception.



Le troisième chapitre est réservé pour donner une description de l'amortissement et les différents types de cette caractéristique importante de la structure. Le traitement de l'incertitude inhérente à l'amortissement est aussi présenté.

Le quatrième chapitre donne les équations gouvernantes dans les systèmes dynamiques (input-output) et les différentes étapes constructives de notre modèle mathématique ainsi que les solutions analytiques de notre problème.

A la fin, un exemple numérique basé sur une structure discrétisée a été proposé et analysé pour pouvoir illustrer les effets des incertitudes et leur impact sur la réponse maximale de la structure. Et à la lumière des résultats, des remarques et des conclusions importantes ont été déduites.



CHAPITRE II :

NOTION D'INCERTITUDE.

2-1 Introduction :

Il est indésirable et peu économique, sinon impossible, de concevoir une structure à risque libre. Dans la plupart des cas d'importance pratique, le risque peut être réduit au minimum mais ne peut pas être éliminé complètement. Les centrales nucléaires sont relativement plus sûres que les bâtiments et les ponts ordinaires avec un coût élevé correspondant, mais elles ne sont pas absolument sûres. Faire une structure plus fiable, implique plus d'argent dans la plupart des cas. Pour une structure donnée, les risques correspondants pour différentes solutions de rechange de conception peuvent être estimés.

L'information sur le risque et les conséquences correspondantes de l'échec, y compris le coût de remplacement de la structure, peut être combinée en utilisant un cadre d'analyse de décision pour obtenir la meilleure alternative. Le concept de probabilité fournit un cadre unifié pour l'analyse quantitative de l'incertitude et de l'évaluation du risque comme la formulation de la compensation étudiée pour la prise de décision, la planification et la conception considérant les aspects du problème.

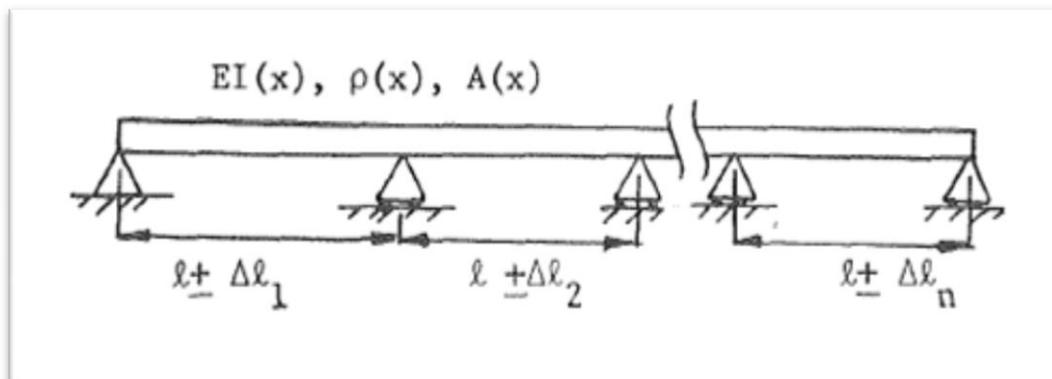
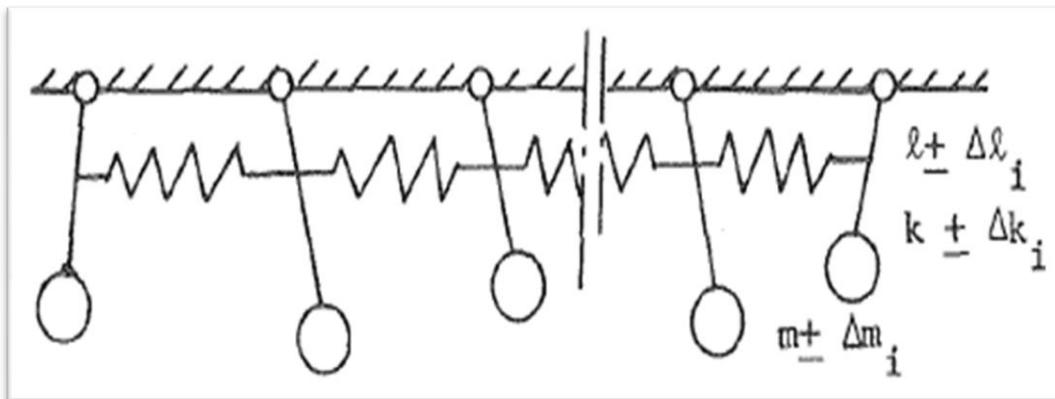
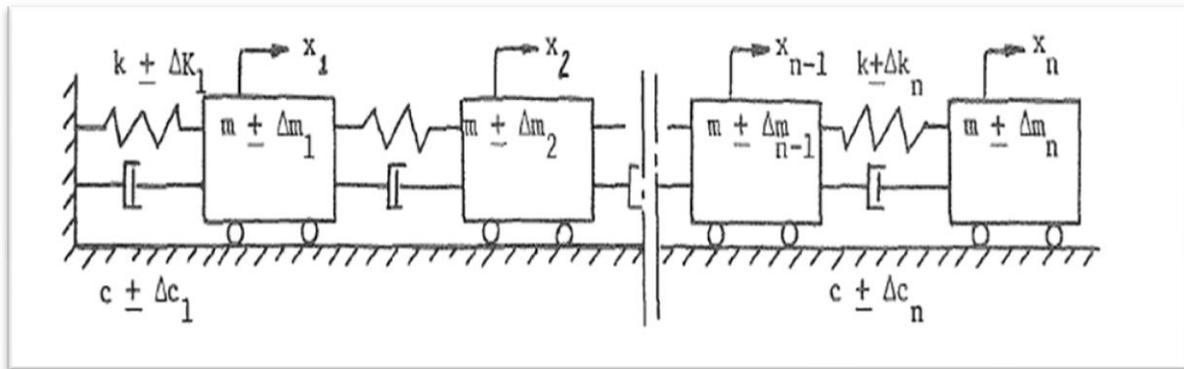


Figure (2, 1) : Exemples de systemes à parametres incertains.

2-2 Déférénces entre les systèmes paramétriques excités et les systèmes désordonnés :

Il est très important de distinguer entre deux types de variations des paramètres rencontrés dans la dynamique des structures. Le premier type se pose en raison de l'excitation paramétrique aléatoire de systèmes avec des propriétés essentiellement fixes, tandis que la

deuxième classe est interne et est associée avec le système lorsque ses paramètres sont représentés dans un sens probabiliste. Dans le premier cas, les équations du système de mouvement sont des équations différentielles stochastiques à coefficients aléatoires représentés par des processus aléatoires [Ibrahim, 1987], tandis que dans le dernier cas, les équations du mouvement sont des équations différentielles avec des paramètres aléatoires représentés par des variables aléatoires. Les méthodes de traitement des systèmes dynamiques sous des excitations aléatoires sont différentes de celles utilisées dans la résolution des équations différentielles avec des coefficients variables et aléatoires.

La vibration aléatoire est essentiellement une combinaison de la théorie des processus stochastiques, équations différentielles stochastiques, et la dynamique appliquée des systèmes avec des incertitudes sur les paramètres (appelés dans la littérature comme «les systèmes désordonnés»), d'autre part, impliquent le problème des valeurs limites et la théorie des champs aléatoires [Vanmarcke, 1984]. Le terme «désordre» a été largement utilisé dans la littérature pour distinguer entre les cas de perturbation aléatoire des paramètres du système (décrit par une loi probabiliste) et le cas lorsque ces paramètres sont perturbés dans un sens déterministe.

2-3 Incertitudes dans le processus de construction :

Le processus de construction inclut la planification, la conception, la construction, et la démolition. Tous les composants du processus impliquent de diverses incertitudes.

Dans la dynamique des structures, ces incertitudes proviennent de deux sources principales [Prasthofer et Beadle, 1975]. La première est d'ordre statistique et est due, par exemple, à la rigidité ou l'amortissement des fluctuations causées par des variations aléatoires dans les propriétés du matériau, l'aléatoire dans les conditions aux limites, et les variations causées par la fabrication et des techniques d'assemblage. La seconde est non statistique et est due, par exemple, pour les inexactitudes et d'hypothèses introduites dans la modélisation mathématique de la structure.

Dans la première classe les propriétés mécaniques des systèmes dynamiques sont soumises à un certain degré d'incertitude parce que les propriétés physiques de leurs éléments ne sont pas mesurées exactement.

En outre, les propriétés physiques peuvent connaître des variations avec le passage du temps en raison de l'usure ou la détérioration simplement inhérente. Ces propriétés doivent être modélisées comme des variables aléatoires avec une distribution de probabilité représentant la distribution des valeurs mesurées. Cette modélisation des résultats de valeurs propres aléatoires, vecteurs propres, et les réponses aléatoires du système en question.

En raison de ces incertitudes, les charges et les résistances (ç-à-d., portances des éléments structuraux) sont des variables aléatoires. Il est commode de considérer un paramètre aléatoire (charge ou résistance) en fonction de trois facteurs:

- **Facteur de variation physique** : Ce facteur représente la variation de la charge et de la résistance qui est inhérente à la quantité étant considérée. Les exemples incluent une variation naturelle de pression de vent, de tremblement de terre, et de propriétés matérielles.
- **Facteur de variation statistique** : Ce facteur représente l'incertitude résultante d'estimer des paramètres bases sur un nombre d'échantillons limites. Dans la plupart des situations, la variation naturelle (facteur de variation physique) est inconnue et elle est quantifiée en examinant un nombre d'échantillons limités. Par conséquent, plus le nombre d'échantillons est grand, plus l'incertitude décrite par le facteur de variation statistique est petite.
- **Facteur de variation de modèle** : ce facteur représente l'incertitude due aux hypothèses simplificatrices, des conditions aux limites inconnues, et des effets inconnus d'autres variables. Il peut considérer comme rapport de la force réelle (résultat d'essai) et de la force prévue en utilisant le modèle. [Nowak. A. S 2000].

2-4 Incertitudes et fiabilité :

L'étude de la réponse des systèmes à paramètre incertain est très importante dans l'étude et la conception. Ces réponses peuvent aider le concepteur à établir des tolérances acceptables sur les composants d'un système.

Le principal problème qui concerne le concepteur est la manière de gouverner les



fluctuations des paramètres du système pour les opérations de sécurité. Par exemple, quand les valeurs du déplacement élastique de la structure sont importantes, le problème est de mettre en place une norme optimale pour la fabrication des composants d'une structure.

Généralement, l'optimisation de la conception des structures soumises à des exigences de fiabilité est considérée comme le but ultime de toute procédure de conception. L'approche de base dans l'optimisation structurelle est d'imposer un ensemble de contraintes sur la fiabilité globale du système ou de la probabilité de défaillance.

Une autre approche suggère de minimiser le coût total ou le poids d'une certaine probabilité non admissibles dans l'ensemble.

Il est à noter que les irrégularités des paramètres dynamiques peuvent entraîner des changements significatifs dans les caractéristiques dynamiques des systèmes structuraux. En particulier, ils peuvent provoquer l'apparition de la localisation de mode qui peut être utilisé comme un moyen de contrôle passif des vibrations. Dans le génie civil, les propriétés mécaniques et la résistance du matériau varie d'un point à un autre et sont rarement enclins à certaines mesures in situ, mais seulement à des estimations indirectes [Augusti et al, 1984].

L'incertitude de ces propriétés a une relation directe à la fiabilité de ces structures. Ces incertitudes se manifestent habituellement dans les charges appliquées, la raideur et des modèles théoriques qui sont utilisés pour décrire et concernent le chargement et la résistance. La conception des structures en situation d'incertitude implique un équilibre entre la prise de risque d'échec et le coût ou le poids.

Le risque est un facteur incontournable pour les problèmes d'optimisation structurelle. Il est d'usage dans la plupart des études de fiabilité pour mesurer le risque par la probabilité de défaillance (par exemple, la probabilité de survenue d'un état limite spécifiée). D'autre part, lorsque des restrictions et des contraintes de la conception sont décrites imprécise, les fonctions de conception objective deviennent floues. Récemment, la théorie des ensembles flous a été appliquée dans la conception multi-objectifs d'optimisation des structures floues grillage navire [Gangwu et Suming, 1986].

2-5 Incertitude et analyse de sensibilité :

Le degré de sensibilité des structures soit à des changements de conception déterministe ou stochastique est les variations des paramètres d'une grande importance dans la dynamique des structures. En particulier, il est essentiel de déterminer si de petites perturbations peuvent entraîner des modifications importantes des amplitudes de réponse libre ou forcée. Cette analyse de sensibilité est une grande préoccupation pour ceux qui sont impliqués dans le contrôle des grandes structures spatiales flexibles. Ces structures possèdent plusieurs modes denses dans les basses fréquences.

Quand ils sont discrétisés, des erreurs surviennent le modèle et les modes de vibration libre ne peuvent pas être déterminés avec précision. Ainsi, quand un système de contrôle est conçu pour des fréquences naturelles dont les valeurs sont supposées être exactes, les erreurs du modèle et des incertitudes structurelles qui pourrait détériorer la performance de la boucle de contrôle, et peut même rendre le système instable. Ce problème résulte de ce qui est connu comme la robustesse, c'est à dire un système de contrôle est appelé robuste s'il est relativement insensible aux erreurs de modèle et d'incertitudes structurelles.

2-6 Propagation d'incertitudes :

Alors que l'analyse de sensibilité sert à étudier les effets que les changements dans les valeurs d'entrée numériques ou les hypothèses du modèle ont sur la sortie, étudier la propagation d'incertitude où « comment l'incertitude liée aux paramètres d'entrée s'étend sur les paramètres de sortie du modèle ? ».

Une approche probabiliste est couramment utilisée pour analyser la propagation de l'incertitude.

Il ya de nombreux aspects qui peuvent conduire à l'incertitude des données, appelé aussi l'incertitude des paramètres. L'incertitude épistémique liée aux paramètres d'entrée, λ , n'est pas reflétée dans la fiabilité calculée. Ainsi la propagation des incertitudes est un remède utile pour analyser le niveau d'incertitude associée aux résultats.

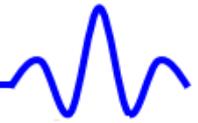


Le cadre probabiliste pour la propagation de l'incertitude qui suit un processus en deux étapes:

- Tout d'abord, assigner une fonction de densité de probabilité (FDP) pour chacun des paramètres aléatoires d'entrée (incertain). Le FDP reflète l'état des connaissances et représente l'incertitude épistémique lié au paramètre. Le FDP peut être sélectionné à partir des distributions différentes, selon ce que les propriétés qui est le mieux adapté pour la composante ou le système qu'ils représentent.
- Ensuite, la génération d'un FDP pour la fonction de sortie en combinant le FDP d'entrée.

La réponse probabiliste dynamique des systèmes incertains est exprimée en termes de paramètres incertains associés aux caractéristiques structurelles et les effets de charge. Les incertitudes associées à chaque variable de base sont propagées à travers les relations fonctionnelles qui les concernent à la réponse pour déterminer l'incertitude des estimations de réponse dynamique.

Dans le cadre de l'analyse par éléments finis probabilistes ou stochastiques, des concepts analytiques et informatiques tels que première ou deuxième série de Taylor pour des expansions, des techniques de perturbation, des champs aléatoires, des expansions Neumann et des techniques de simulation peuvent être utilisées pour la propagation de l'incertitude. Certaines de ces techniques sont actuellement en phase de développement.



2-7 Conclusion :

Plusieurs problèmes en dynamique des structures impliquant des incertitudes des paramètres ont été traités dans la littérature. Ces problèmes comprennent la valeur propre aléatoire des systèmes désordonnés, localisation en mode normal, la réponse au hasard, optimisation de la conception et la fiabilité. La théorie mathématique de la valeur propre aléatoire a atteint le stade de maturité, cependant, cette théorie n'a pas été pleinement mise en œuvre pour traiter les problèmes d'ingénierie.

Les problèmes traités dans la littérature ont été restreints dans le cadre de la théorie linéaire. Les limitations de la formulation linéaires doivent être définies.

Les études futures devraient inclure l'influence des non-linéarités géométriques et matérielles. Des études expérimentales sont également très importantes d'examiner l'influence des incertitudes des paramètres des structures sur leurs performances dynamiques.



CHAPITRE : III

L'AMORTISSEMENT DANS LES STRUCTURES.

3-1 Introduction :

L'évaluation de l'amortissement dans les systèmes structuraux pose un problème très difficile dans la dynamique des structures, car il n'est pas relié à un phénomène physique unique comme les autres caractéristiques intrinsèques d'un système « la masse et la rigidité ».

L'importance de l'amortissement devient de plus en plus significative quand les bâtiments deviennent plus grands et relativement plus flexibles. Les gratte-ciels modernes peuvent osciller excessivement pendant les orages de vent. Le niveau de ces oscillations peut ne pas être assez significatif pour endommager la structure, mais peut causer le malaise aux occupants de bâtiment. Les estimations de l'amortissement dans les systèmes structuraux ont une variabilité intrinsèque qui rend l'évaluation des états de limite d'utilité plus incertaine. N'importe quelle information précise au sujet des valeurs d'amortissement, à l'étape de conception, peut certainement alléger une source importante d'incertitude par habitude approuvée par des concepteurs des structures.



La contribution de l'amortissement dans les matériaux vient d'une interaction moléculaire complexe, car l'amortissement dépende du type des matériaux et des méthodes de fabrication et de procédés de finissage.

La complexité de la situation est encore augmentée par la réalité simple que les propriétés matérielles diffèrent d'un échantillon à un autre, ayant probablement comme conséquence de différences significatives dans des déperditions d'énergie parmi les membres distincts d'un système structural.

3-2 Bref historique :

Zeiler (1948) dans son livre, a discuté sur la dissipation d'énergie dans les matériaux. Mais la première monographie sur ce sujet a été publiée en Russie [Pisarenko, 1955] et la deuxième aux Etats-Unis [Lazan, 1968]. Le premier qui a parlé sur l'hystérésis dans les métaux, était Coulomb dans son "Mémoire sur la torsion" en 1784 [Lazan, 1968]. Lazan signalait, dans sa monographie, que seulement 25 articles sur l'amortissement ont été publiés au milieu du dix-neuvième siècle; en 1920 le nombre total était de 70, en 1945 de 500. Le nombre d'articles a dépassé 2500 en 1965, mais aucun article n'a utilisé une approche micro-mécanique des sciences des matériaux. Ceci est dû au fait que la totalité des articles sont écrits par des ingénieurs et non par des chercheurs en science des matériaux. L'histoire sur l'amortissement peut être divisée en trois époques:

- **La première époque :** de 1784 à 1920 où l'approche utilisée était simplement la philosophie.
- **La deuxième époque :** de 1920 à 1940 dans laquelle l'amortissement a été utilisé dans l'industrie pour traiter des problèmes de vibration dans les machines, les avions et les structures de grande envergure telles que les ponts et les bâtiments.
- **La troisième époque :** à partir de 1940 où les principes de la physique, de la mécanique appliquée et de la science des matériaux ont été utilisés pour décrire et étudier l'influence de l'amortissement sur les systèmes dynamiques. [Boudjelal, 1997].



3-3 Les Mécanismes de l'amortissement :

Une partie de l'énergie élastique emmagasinée dans les matériaux est dissipée au cours du temps; ce phénomène est dénommé de façon générale « amortissement ».

En affectés, l'amortissement peut résulter de différents mécanismes. Il peut s'agir d'un amortisseur physique (par exemple un amortisseur hydraulique) auquel on peut avoir recours dans les problèmes d'isolation vibratoire. La dissipation d'énergie peut également provenir d'effets thermiques liés au chargement répété du matériau, de frottements internes dans le matériau (glissements entre grains dans un assemblage de particules par exemple).

En règle générale et sauf cas exceptionnel, l'amortissement ne peut être calculé à partir des propriétés physiques du système. Par exemple dans le cas d'un bâtiment soumis à une sollicitation sismique significative. Les sources de dissipation d'énergie sont multiples : fissuration du béton, plastification des aciers, glissements relatifs entre la structure porteuse et les éléments secondaires (cloisons, baies vitré ...). Dans la pratique, les phénomènes de dissipation d'énergie sont donc caractérisés de façon très simplifiée en considérant qu'ils proviennent d'un amortisseur visqueux linéaire.

Un amortisseur visqueux linéaire est caractérisé par une relation linéaire entre la force développée dans l'amortisseur et la vitesse relative des deux extrémités de celui-ci :

$$F = c \cdot u \quad (3.1)$$

La constante de proportionnalité " c ", caractéristique de l'amortisseur, a pour unité : une masse par unité de temps. La description des phénomènes de dissipation d'énergie à l'aide d'un amortisseur équivalent est obtenue en écrivant que l'énergie dissipée dans un cycle de vibration du système est égale à l'énergie dissipée dans un amortisseur linéaire pour un cycle de même amplitude de déplacement.

La réponse des structures soumises aux forces sismiques, variables au cours de temps, dépend en particulier des propriétés d'amortissement des matériaux constructifs de la structure, des assemblages des différents éléments de structure et des liaisons avec le milieu environnant, donc de l'interaction sol-structure.



Les phénomènes physiques intervenant dans l'amortissement d'une structure ou du sol sont nombreux : frottement, viscosité et plasticité des matériaux,

3-4 Compositions de l'amortissement :

Du point de vue pratique, l'amortissement d'une structure se compose de :

- a) **L'amortissement interne ou structurel** : Il se produit dans les matériaux à l' occasion des déformations qu'ils subissent et représente la principale cause de dissipation d'énergie. Il comporte essentiellement deux termes : [Davidovici, 1985]
 - *L'amortissement visqueux* : lié a la viscoélasticité des matériaux et dépendant de la fréquence. Il caractérise la capacité d'absorption d'énergie dans le domaine élastique.
 - *L'amortissement d'hystérésis* : indépendant de la fréquence et il résulte de la non linéarité du comportement des éléments structuraux. Donc, il est bien évident que, tant que la structure reste dans le domaine élastique. Cet amortissement tend vers zéro.

- b) **L'amortissement externe** : Il correspond à des frottements divers et se résume essentiellement a ceux qui interviennent le long des surfaces de contact entre la structure et les éléments non structuraux, lorsqu'ils existent. La contribution des éléments non structuraux à l'amortissement total est assez importante aux fortes amplitudes d'oscillation. Mais elle peut diminuer ou même s'annuler en cas d'endommagement ou ruine des éléments en cause. On classe dans cette famille le frottement entre les fondations et le sol, appelé aussi amortissement géométrique, pris en compte dans les modèles d'interaction sol-structures.

Pour faciliter le calcul, les amortissements externes et les amortissements d'hystérésis sont convertis en un amortissement équivalent de type visqueux donnant lieu globalement à la même dissipation d'énergie. Par la suite l'amortissement totale est exprime en termes d'amortissement effectif ξ .



3-5 Amortissement équivalent :

On entend par amortissement équivalent l'amortissement conduisant, pour un niveau de déformation comportant de faibles incursions dans le domaine plastique, à la même dissipation d'énergie par cycle que les amortissements et les frottements réels.

Pendant la réponse linéaire des structures, sous l'action sismique, l'absorption de l'énergie est due principalement à l'amortissement.

Lorsque la structure subit des incursions dans le domaine plastique. Les effets de l'augmentation réelle sont inclus dans le coefficient de comportement. On ne peut donc, dans ce cas, majorer les valeurs de l'amortissement et sa valeur est considérée conventionnellement comme constante pendant toute la durée du mouvement et quel que soit le mode de vibration. L'amortissement équivalent est pris en compte dans l'établissement du spectre de calcul.

Dans la réalité, les degrés d'amortissement, qui ont été déterminés à partir d'observation et de mesure, présentent une gamme de valeurs assez étendue : mais par prudence, pour l'amortissement équivalent (de type visqueux), on choisit généralement des valeurs d'amortissement inférieures aux valeurs estimatives médianes ou moyennes.

3-6 Coefficient d'amortissement :

Pour effectuer la lecture spectrale, il convient donc, pour chaque mode, de déterminer le coefficient d'amortissement ξ

L'amortissement ξ est le rapport de l'amortissement réel « C » à l'amortissement critique C_C .

$$\xi = \frac{C}{C_C} = \frac{C}{2m\omega} \quad (3.2)$$

L'amortissement critique est celui qui, dans un système à un degré de liberté, ne présenterait pas d'oscillations en absence d'une force extérieure.

Ce rapport fournit la mesure de l'efficacité de l'amortissement du point de vue de la réduction de la réponse.



On distingue trois situations :

a) *Système à amortissement sur critique* $C > C_C$; $\xi > 1$

L'amortissement effectif est supérieur à l'amortissement critique, la masse revient asymptotiquement au repos sans effectuer d'oscillations « amortissement très important ». La réponse est analogue à celle du système à amortissement critique, mais le retour à l'équilibre s'effectue d'autant moins rapidement que le pourcentage d'amortissement critique est élevé.

b) *Système à amortissement critique* $C = C_C$; $\xi = 1$

Comme dans le cas précédent, le mouvement ne présente pas d'oscillations, cas de l'amortissement critique, met en évidence l'instant où le mouvement perd son caractère vibratoire.

La figure 3.1 représente la vibration du système au cours de temps, celle-ci se reproduit à l'identité au bout d'un intervalle de temps égale à la période propre $T = \frac{2\pi}{\omega}$ de l'oscillateur et se prolonge indéfiniment avec une amplitude maximale égale à ρ .

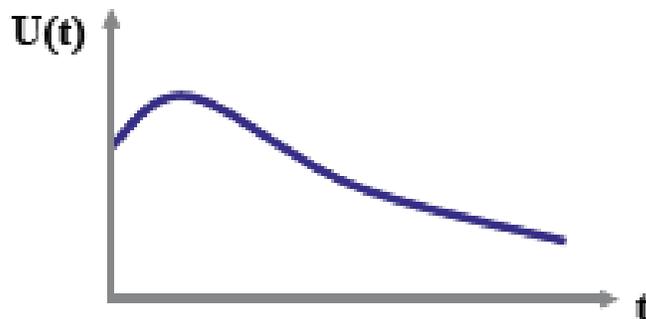


Figure 3.1 vibration libre d'un système à amortissement critique [Pecker 2006]

c) *Système à amortissement sous critique* $C < C_C$; $\xi < 1$

L'amortissement effectif est inférieur à l'amortissement critique, la masse effectue une série d'oscillations d'amplitude décroissante tendant asymptotiquement vers zéro « amortissement



faible ».c'est le seul cas intéressant pour l'analyse de comportement dynamique des structures, celles-ci ayant toujours un amortissement inférieur à l'amortissement critique.

Bien entendu, plus l'amortissement est important, plus l'amplification de spectre est faible.

L'examen de la figure 3.2 montre que la réponse passe par des extrema espacés d'un temps $T = \frac{27\pi}{\omega_D}$ L'amplitude des extrema, égale $\rho e^{-\xi\omega t}$ décroît en fonction de temps pour tendre vers 0 au bout d'un temps infini. Le système revient à l'équilibre en oscillant autour de la position neutre correspondant a un déplacement nul.

Ce retour à l'équilibre s'effectue d'autant plus rapidement, et avec moins d'oscillations, que le pourcentage d'amortissement critique ξ est élevé. (Figure 3.3)

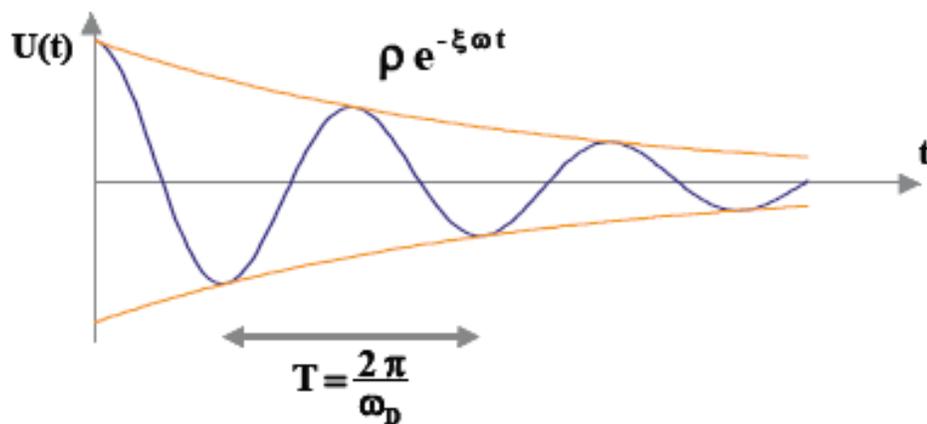


Figure 3.2 Vibration libre d'un système à amortissement sous critique [Pecker 2006].

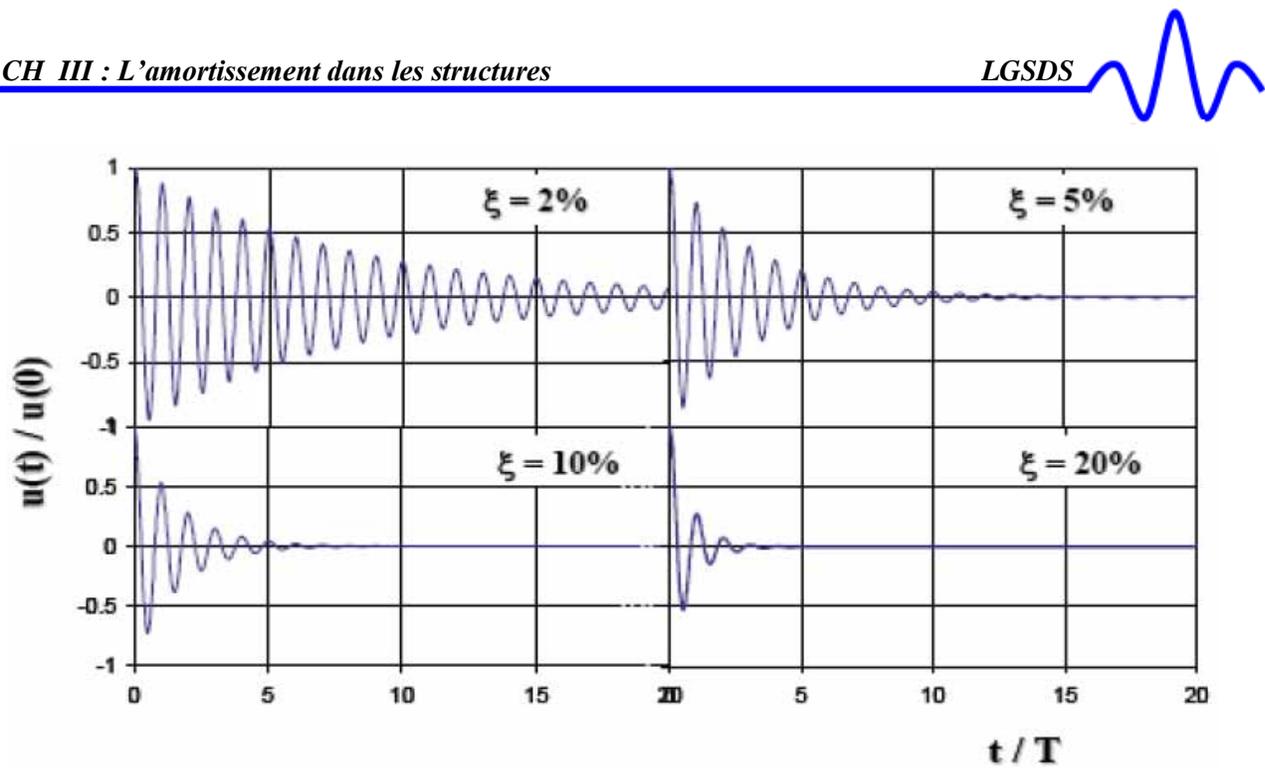


Figure 3.3 influence d'amortissement sur la Vibration Libre d'un système sous-amorti [Pecker 2006].

Tout en notant que le cas d'amortissement sous critique est le plus pertinent pour la majorité des systèmes physiques rencontrés dans la pratique. Pour les structures réelles, l'ordre de grandeur de ξ est de 1% pour les constructions en acier et 2% pour les constructions en béton.

Toutefois, dans le contexte sismique, il existe des facteurs additionnels d'amortissement, tels que des fissurations, des déplacements avec frottement dans les assemblages, des frottements entre cloisons et structures. Pour cette raison, on admet une valeur unique égale à 0,05, soit 5 % de l'amortissement critique pour cette valeur de ξ .

Le tableau 3.1 donne un sommaire des résultats trouvés dans la littérature appropriée de valeurs du pourcentage d'amortissement critique ξ (%), ces valeurs obtenues après une série d'expériences faites sur divers constructions.



Structure	Le Coefficient d'amortissement(%)
Gaz de San Diego et électrique CO. [P. C. Jennings]	1.6
Bâtiment de transport Amerique. San Francisco.[J. G. Bouwkamp]	0.9
Bâtiment de RC Skopje. [I. Petrovski]	1.1
Bâtiment Université de Cantorhary Physiques/Chimiques. [A. M. Reay.]	8.5
Bâtiment de neuf étages en charpente. [N. N. Neilsen.]	0.6
Ralph Parsons; [D. A. houteli I]	2.5
Tour de centre Oak. [R. M. Stephen]	1.7

Tableau (3, 1) : Valeur d'amortissement pour quelques bâtiments réels.

Le tableau 3.2 présente des valeurs de pourcentage d'amortissement critique rapporté dans les règlements parasismique algérien RPA en fonction en fonction des matériaux constructifs, du type de structure et de l'importance des remplissages.

remplissage	portiques		Voiles ou murs
	Béton armé	acier	Béton armé/maçonnerie
Léger	6	4	10
dense	7	5	

Tableau (3.2) : tableau de ξ (%) dans l'RPA

3-7 L'évaluation et traitement de l'incertitude inhérente à l'amortissement :

La sélection d'une valeur appropriée à l'amortissement est un point compliqué dans la pratique en matière de conception. La situation actuelle présente dans la conception des grands bâtiments est telle qu'il est difficile de prévoir l'amortissement structurel plus étroitement que plus ou moins



30% jusqu'à ce que le bâtiment soit accompli. Ceci est essentiellement assuré sur la base de la connaissance des bâtiments existants, du matériel semblable et des systèmes structuraux sur lesquels des essais ont été effectués. Bien qu'on propose généralement que les valeurs de l'amortissement changent avec l'amplitude de mouvement, leur description fondamentale est plutôt incertaine et limitée. Sans parler de la nature complexe des mécanismes d'amortissement, les méthodes utilisées pour établir les valeurs de l'amortissement des structures et de l'analyse et l'interprétation des données présentent une incertitude additionnelle.

L'évaluation de l'amortissement dans les structures a été étudiée par plusieurs investigateurs. Un prélèvement de telles études peut être trouvé en Jeary et Ellis (1981), Yokoo et Akiyama (1972), Hudson (1977), Hart et Vasudcvan (1975), Taoka et autres (1975), Raggett (1975), Celebi et Safak (1992) et Trifunac (1972).

L'information fournie par des expériences complètes a été assemblée par Haviland (1976), Davenport et Hill-Carroll (1986), Jeary (1986), Logomarsino (1993) et Tamura et autres (1994), entre d'autres.

Haviland (1976) a rapporté un éventail de données pour les niveaux différents des amplitudes de réponse, des classes larges des systèmes structuraux et des tailles de bâtiment. Le coefficient de variation (COV) d'estimation de l'amortissement change dans la gamme de 42-87%. Davenport et Carroll (1986) ont réexaminé la base de données et ont noté que le COV s'est étendu de 33% à 78% et a suggéré une valeur de 40%. Basé sur des données mesurées, ESDU (1983), Jeary (1986), Logomarsino (1993) et Tamura et autres (1995) ont établi des expressions pour la variation de constante d'amortissement en fonction du niveau de déplacement structurel. Il est important de noter que la plupart des bases de données ont un grand chevauchement d'information puisqu'elles ont beaucoup de bâtiments en communs.

3-8 Conclusion :

L'amortissement joue un rôle important dans plusieurs applications de vibration. Souvent les forces d'amortissement des systèmes vibratoires ont des faibles valeurs comparativement aux forces élastiques et d'inertie. Cependant, ces forces d'amortissement peuvent avoir une grande influence sur le comportement dynamique des systèmes. La détermination d'un modèle



d'amortissement pour les systèmes vibratoires, qui simule le plus fidèlement possible la dissipation d'énergie, est par conséquent d'un grand intérêt pour les ingénieurs responsables de la conception et de l'évaluation des systèmes vibratoires. Si les méthodes numériques ont amené l'ingénieur à faire des calculs très précis des masses et des rigidités des structures même complexes, la modélisation de l'amortissement par contre est restée sur sa phase primaire. Généralement, on fait un simple choix sur les valeurs d'amortissement modal. Pour ramener l'analyse de dissipation d'énergie (amortissement) au même niveau de sophistication que celle des masses et des rigidités, une méthodologie rationnelle et concrète devrait être investiguée.



CHAPITRE : IV

LA METHODE DES PERTURBATIONS.

4-1 Introduction :

Dans les équations décrivant un système physique, la théorie des perturbations s'utilise lorsqu'une action (perturbation) agissant sur le système peut être considérée comme petite. La méthode consiste à résoudre exactement le problème en l'absence de perturbation et à calculer la correction introduite par la perturbation. Le résultat obtenu peut à son tour servir d'approximation zéro pour le calcul d'une nouvelle correction. Il en résulte l'expression de la solution cherchée sous la forme d'une série en puissance croissante de la perturbation. Lorsque la perturbation est réellement petite on peut se limiter aux premiers termes de la série. Historiquement la théorie des perturbations a été pour la première fois utilisée en mécanique céleste pour la résolution approchée du problème à trois corps. Ici l'approximation zéro est le problème de l'orbite képlérienne du problème à deux corps. Le troisième corps introduit une perturbation que l'on considère comme petite.

La théorie des perturbations est largement utilisée en mécanique quantique pour la résolution de l'équation de Schrödinger chaque fois que l'interaction peut être scindée en deux termes, un terme principal déterminant essentiellement l'état du système et un terme beaucoup plus petit provoquant une légère modification de cet état. La théorie des perturbations joue un rôle fondamental en théorie quantique des champs et en électrodynamique quantique, où elle permet de calculer les corrections apportées par les interactions entre particules. Les termes des séries de perturbation peuvent recevoir une



interprétation comme des processus virtuels et se prêter à une représentation graphique (diagrammes de Feynmann). D'une manière générale c'est cette interprétation des termes correctifs comme des effets physiques à part entière qui constitue l'attrait essentiel de la théorie des perturbations, avec cependant toutes les ambiguïtés physiques d'une telle démarche interprétative. C'est ainsi que la théorie des perturbations appliquée aux électrons sagement localisés sur les liaisons chimiques d'une molécule exprime l'interaction entre ces électrons en termes de polarisation et de délocalisation, comme cherche à le faire la théorie classique de la structure moléculaire en terme de charges et de circulation d'électrons. Les difficultés de la représentation de Kékulé du benzène prennent dans ce cadre une dimension nouvelle. L'interprétation picturale des termes correctifs cherche à pallier à la pauvreté figurative de la mécanique quantique.

4-2 Historique :

La théorie de la perturbation est apparue la première fois dans une des branches les plus anciennes des mathématiques appliquées : mécanique céleste, l'étude des mouvements des planètes.

De l'antiquité, de diverses méthodes mathématiques ont été employées pour décrire ces mouvements (comme vu de la terre), habituellement sans la tentative d'énoncer leurs causes.

Après la formulation de Newton de la loi de la pesanteur, il est devenu possible de déduire les mouvements planétaires des lois physiques qui ont été considérées plus fondamentales. Si seulement le soleil et une planète sont considérés, le résultat est mouvement elliptique avec le soleil à un foyer. Cependant, ceci ne correspond pas tout à fait au mouvement réellement observé. L'explication est que les planètes exercent les forces de la gravité sur l'un l'autre, et perturbe donc, c.-à-d., modifier, leurs mouvements. La théorie de la perturbation dans son sens original se rapporte à de diverses manières de tenir compte de ces modifications. Essentiellement, on commence par « la solution non-perturbée, » c'est-à-dire, avec le mouvement purement elliptique, comme une première approximation, puis calcule les forces que les planètes exerceraient sur l'un l'autre si ce mouvement non-perturbé étaient correct, et puis corrigent la solution non-perturbée en conséquence.

Les premières corrections ne sont toujours pas précises, puisque leur construction a dépendu de la solution non-perturbée, et ainsi un deuxième ensemble de corrections peut



être calculé, et ainsi de suite. La somme de la solution non-perturbée et de l'ordre des corrections forme une série, et on espère qu'une somme partielle d'un nombre raisonnable de limites donne à approximation proportionnée au mouvement pendant peut-être quelques cent années.

La portée de la théorie de la perturbation est à l'heure actuelle beaucoup plus large que ses applications à la mécanique céleste, mais l'idée principale est identique.

Dès le début du XVIIIe siècle, la théorie des perturbations a été utilisée par les astronomes pour les besoins de la mécanique céleste : en effet, les équations différentielles décrivant un système de N corps en interaction gravitationnelle n'a pas de solution exacte générale pour $N > 3$. Cet aspect de la théorie des perturbations a été synthétisé à la fin du XIXe siècle dans les ouvrages classiques de Laplace, Tisserand et Poincaré, avant de connaître de nouveaux développements dans la seconde moitié du XXe siècle avec l'avènement en 1954 de la « théorie KAM », du nom de ses trois concepteurs : Kolmogorov, Arnold et Moser.

La méthode a par ailleurs été abondamment utilisée au XXe siècle pour les besoins de la physique quantique, d'abord en mécanique quantique non relativiste, puis en théorie quantique des champs perturbatrices.

4-3 Définition :

D'un point de vue heuristique, la théorie des perturbations est une méthode mathématique générale qui permet de trouver une solution approchée d'une équation mathématique $(E\lambda)$ dépendante d'un paramètre λ lorsque la solution de l'équation $(E0)$, correspondant à la valeur $\lambda = 0$, est connue exactement. L'équation mathématique $(E\lambda)$ peut être une équation algébrique, une équation différentielle, une équation aux valeurs propres, ... La méthode consiste à chercher la solution approchée de l'équation $(E\lambda)$ sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre λ , cette solution approchée étant supposée être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte, mais inconnue, que la valeur absolue du paramètre λ est plus « petite ».

4-4 Principe de la méthode.

Très fréquemment en physique (de pointe), un problème mathématique ne peut pas être résolu de manière exacte. Si la solution est connue il y a parfois une telle dépendance de paramètres que la solution est difficile à utiliser en tant que tel.

Il peut être le cas, cependant, qu'un paramètre identifié, disons ε par tradition, tel que la solution est disponible est raisonnablement simple pour $\varepsilon = 0$.

Le souci ensuite est de savoir comme la solution est altérée pour un ε non-nul mais petit quand même. Cette étude est le centre de la théorie des perturbations

4-5 Convergence de la série perturbatrice ?

On a vu qu'on cherchait ici la solution approchée de l'équation $(E\lambda)$ sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre λ ; la question de la convergence de cette série se pose alors. Ce problème a été réglé pour l'astronomie par Poincaré en 1892 : la « série » de perturbation doit être comprise mathématiquement comme un développement asymptotique au voisinage de zéro, et non comme une série ordinaire convergente uniformément. Le chapitre VIII de la Mécanique céleste de Poincaré commence par le commentaire suivant :

« Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment.

Ainsi, pour prendre un exemple simple, considérons les deux séries qui ont pour terme général :

$$\frac{1000^n}{n!} \quad \text{et} \quad \frac{n!}{1000^n}$$



Les géomètres diront que la première converge, et même qu'elle converge rapidement, parce que le millionième terme est beaucoup plus petit que le 999 999 ème ; mais ils regarderont la seconde comme divergente, parce que le terme général peut croître au delà de toute limite.

Les astronomes, au contraire, regarderont la première série comme divergente, parce que les 1000 premiers termes vont en croissant ; et la seconde comme convergente, parce que les 1000 premiers termes vont en décroissant et que cette décroissance est d'abord très rapide.

Les deux règles sont légitimes : la première, dans les recherches théoriques ; la seconde, dans les applications numériques. Toutes deux doivent régner, mais dans deux domaines séparés et dont il importe de bien connaître les frontières. »

Pour conclure cette discussion qualitative sur la convergence, le mathématicien Jean-Pierre Ramis précise :

« On peut ainsi parler de séries convergentes « au sens des géomètres » ou « au sens des astronomes ». Notons que pratiquement, dans les applications, on constate que, presque toujours, les séries convergentes au sens des astronomes ont un terme général qui croît très vite après avoir d'abord diminué. Ainsi, ce que Poincaré envisageait comme possibilité est en fait la règle. »

C'est d'ailleurs ce qui fait l'efficacité pratique de la théorie des perturbations en physique théorique : il suffit le plus souvent de calculer les quelques premiers termes du développement asymptotique - ceux qui semblent commencer par converger - pour obtenir une très bonne approximation du résultat exact inconnu. Ainsi, dans le cadre de l'électrodynamique quantique, Dyson a montré en 1948 que la série perturbatrice était divergente, alors que la prise en compte des trois ou quatre premiers termes seulement donne des prédictions théoriques en accord remarquable avec les résultats expérimentaux.

Notons qu'il existe certaines procédures de « sommation » qui permettent de donner un sens à certaines séries divergentes, comme par exemple la sommation de Borel ou l'approximant de Padé.



4-6 Utilisation de la méthode pour la quantification des incertitudes :

Dans la dynamique des structures, un problème que l'on rencontre fréquemment, c'est comment prendre en compte les changements dans les caractéristiques d'un système après que les étapes d'analyse et de calcul ont été réalisées. Dans le cas de grande différence, un nouveau calcul est nécessaire mais si les changements sont relativement de faible taille par rapport aux données initiales, on peut utiliser une approche qui a pour but d'« ajuster » le premier calcul.

Pour résoudre un tel problème, on utilise la « technique des perturbations »

La technique de perturbation est une méthode très efficace pour évaluer l'incertitude de la réponse. Les variables structurelles aléatoires sont décrites par leurs valeurs moyennes, écarts-types et les coefficients de corrélation. La présente procédure évalue la réponse moyenne et son écart-type en une seule analyse structurale.

La méthode est basée sur le développement en série de Taylor des équations gouvernantes. L'incertitude du comportement structurel est évaluée en prenant en compte les termes autour de la moyenne des valeurs des variables de base. La réponse moyenne et sa variance peut être trouvée en termes de moyenne et la variance des variables de base de caractère aléatoire et leur corrélation.

Revenant au problème cité au-dessus

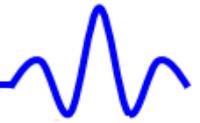
Pour un système dynamique, l'équation de mouvement est donnée par :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t)$$

Avec :

- $M = M_0 + \delta M$
- $C = C_0 + \delta C$
- $K = K_0 + \delta K$
- $F = F_0 + \delta F$

Où :



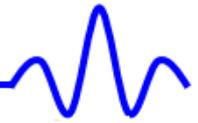
M_0, C_0, K_0 et F_0 présentent les valeurs « initiale » des caractéristiques du système.

Et :

$\delta M, \delta C, \delta K$ et δF sont les changements sur les caractéristiques.

A l'aide de la technique des perturbations, on trouve la solution du système du type :

$$x(t) = x_0(t) + \delta x(t)$$



CHAPITRE : V

NOTIONS SUR LA VIBRATION ALEATOIRE.

5-1 Introduction :

L'étude des propriétés statistiques nécessaires à la caractérisation d'un phénomène aléatoire relève de la théorie des vibrations aléatoires. Ces dernières années, la théorie des processus aléatoires c'est largement développé et constitue le fondement pour l'analyse stochastique des structures.

Historiquement, les premières tentatives d'application de la théorie des vibrations aléatoires dans l'analyse des structures datent du début des années 50, pour l'étude des vibrations induites par les jet-moteurs sur les panneaux du fuselage des avions à réaction. Le domaine d'application de la théorie des vibrations aléatoires c'est rapidement étendu aux différentes disciplines de la mécanique des structures, entre autre le génie civil, principalement pour l'étude de la réponse des structures aux sollicitations aléatoires et complexes tel que le vent, les vagues marines, et les mouvements sismiques.

Aujourd'hui, la théorie des vibrations aléatoires représente un des outils de base dans le génie parasismique. La réponse des structures linéaires à des processus gaussiens a été pleinement explorée, et des algorithmes de calcul sont maintenant incorporés dans des codes informatiques et qui sont actuellement à usage commun.

Les outils de la théorie des vibrations aléatoires exposés dans ce chapitre, donnent la possibilité d'étudier des systèmes dynamiques simples, et d'obtenir des informations sur

les statistiques des paramètres de sortie, indispensable à l'évaluation de leur niveau de fiabilité.

5-2 Processus aléatoire :

En dynamique, beaucoup de phénomènes physiques sont modélisés par des fonctions dépendant du temps, de l'espace,...etc. Si la quantité qui nous intéresse est le résultat d'un événement aléatoire, alors la fonction qui le décrit sera, elle aussi, aléatoire. Une fonction aléatoire est appelée un processus aléatoire (P.A) quand elle est fonction d'un seul paramètre t (en particulier quand t indique le temps), et un champ aléatoire quand les variables sont plus d'une. Les champs aléatoires sont essentiellement des fonctions aléatoires multidimensionnelles c'est-à-dire dépendant de plus d'un paramètre, comme dans le cas des fonctions qui dépendent des coordonnées spatiales (x, y, z) .

Si $X(t)$, indique un processus aléatoire, un échantillon particulier du processus est noté par la fonction $x(t)$. Chaque échantillon (c'est à dire chaque réalisation d'un phénomène aléatoire) est différent d'un autre car il dépend de circonstances uniques qui ne se répéteront pas à l'occasion d'autres mesures. Cependant, tous les échantillons ont un certain nombre de traits communs qui s'expriment à travers les mêmes propriétés statistiques.

5-3 Caractérisation d'un processus aléatoire :

1. Fonction de densité de probabilité :

D'une manière générale, pour caractériser les processus aléatoires de façon complète dans le sens probabiliste, on définit une valeur de la probabilité à chaque élément $x(t)$ de $X(t)$. Pour une valeur donnée du paramètre t , le processus se réduit à une variable aléatoire (V.A) $X(t)$,

qui est complètement décrite par sa *fonction de densité de probabilité*, $f_X(x,t)$. Pour un nombre fini $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ des valeurs de T , on a n V.A: $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$, ..., $X_n = X(t_n)$, qui sont complètement caractérisées par leur fonction de densité de probabilité conjointe.

Un processus stochastique est défini par conséquent par une infinité de fonctions de densité conjointes relatives à chaque nombre fini du paramètre t . La distribution associée à n points le long de l'axe t , est appelée *densité d'ordre n* :



$$\begin{array}{ll}
 f_X(x, t) & \text{d'ordre 1} \\
 f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) & \text{d'ordre 2} \\
 \vdots & \\
 f_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) & \text{d'ordre } n
 \end{array}$$

Toutes ces densités sont des fonctions non négatives et symétriques par rapport à leurs arguments. Elles vérifient la condition de normalisation suivante :

$$\underbrace{\iiint}_{n \text{ fois}} f_X(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

2. Moyenne et auto-corrélation d'un processus aléatoire :

Une deuxième alternative de caractérisation d'un processus aléatoire consiste à définir les moments conjoints d'ordre 1, 2 ..., n comme suit :

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx \quad \text{ordre 1}$$

$$E[X_1(t)X_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 \quad \text{ordre 2}$$

$$\vdots$$

$$E[X_1(t)X_2(t) \dots X_n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 dx_n \quad \text{ordre 3}$$

Les deux premiers moments sont d'une importance pratique considérable. Ils sont désignés respectivement par *la moyenne* et *la fonction d'autocorrélation*. Ils contiennent les informations les plus importantes du processus aléatoire : la tendance et la dispersion.

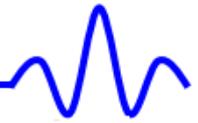
La *moyenne* ou *valeur attendue* d'un processus est une fonction de t , et dépend de la distribution d'ordre 1 seulement:

$$m_x = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx$$

La *fonction d'auto-corrélation* d'un processus aléatoire est définie comme le moment conjoint (d'ordre deux) entre les valeurs du processus à deux instants t_1 et t_2 . Elle est donc fonction de t_1 et t_2 , et obtenu à partir de la fonction de densité de probabilité d'ordre deux comme suit :

$$R_{XX}(t_1, t_1) = E[X_1(t)X_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$$

Le moment central conjoint d'ordre deux est appelée *la fonction d'auto-covariance*.



$$\begin{aligned}\Gamma_{XX}(t_1, t_2) &= E\left[(X(t_1) - m_{X1})(X(t_2) - m_{X2})\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t_1) - m_{X1})(x(t_2) - m_{X2}) f_X(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2\end{aligned}$$

avec : $m_{X1} = m_X(t_1)$ et $m_{X2} = m_X(t_2)$

L'auto-corrélation et l'auto-covariance sont reliées par l'expression :

$$\begin{aligned}\Gamma_{XX}(t_1, t_2) &= E\left[(X(t_1) - m_{X1})(X(t_2) - m_{X2})\right] \\ &= R_{XX}(t_1, t_2) - m_{X1}m_{X2}\end{aligned}$$

D'autres fonctions utiles sont reliées aux deux premiers moments sont :

La variance :

$$\sigma_X^2 = E\left[(X(t) - m_X)^2\right] \quad (2.7)$$

l'écart type :

$$\sigma_X = \sqrt{E\left[(X(t) - m_X)^2\right]}$$

et le coefficient de corrélation :

$$\rho_{XX}(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_{XX}(t_1, t_2)}{\sigma_{X1} \cdot \sigma_{X2}}$$



5-4 Réponse d'un système à un degré de liberté à une excitation aléatoire stationnaire.

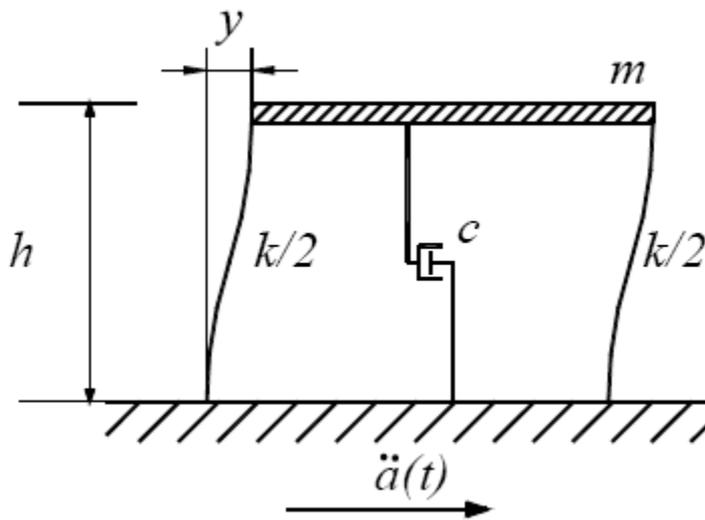


Figure (5.1)- Oscillateur à un degré de liberté.

L'équation du mouvement d'un oscillateur simple de masse m , de facteur d'amortissement c et d'une raideur k , et soumis à une accélération d'appuis $\ddot{a}(t)$ (Fig. 2.1) s'écrit :

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2y(t) = -\ddot{a}(t)$$

on désigne la fréquence propre et ξ la fraction de l'amortissement critique définies par :

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad ; \quad 2\xi\omega_n = \frac{c}{m}$$

La solution de l'équation de mouvement pour des conditions initiales nulles s'écrit sous la forme d'un produit de convolution comme suit :

$$y(t) = \int_0^t \ddot{a}(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) \cdot \ddot{a}(t-\tau) d\tau = h * \ddot{a}$$

Cette expression exprime la relation entrée sortie dans le domaine temporel d'un système linéaire à un degré de liberté soumis à une excitation d'appuis $\ddot{a}(t)$ à support positif ($\ddot{a}(t) = 0$ pour $t < 0$) et $h(t-\tau)$ exprime la réponse impulsionnelle du système qui est donnée par :



$$h(t - \tau) = -\frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{\omega_d} \cdot \sin \omega_d(t - \tau)$$

Où $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ désigne la fréquence propre amortie.

La réponse complète peut alors être considérée comme une succession d'impulsions, chacune produisant une réponse du type exprimé dans l'équation précédente. En intégrant de 0 à t, on obtient la réponse du système linéaire à l'instant t :

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{a}(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t - \tau) d\tau$$

L'expression est connue sous le nom d'intégral de Duhamel pour les systèmes amortis.

D'un autre côté, si l'accélération est de la forme $\ddot{a}(t) = \ddot{A}(\omega)e^{i\omega t}$ et que la réponse est de la forme $y(t) = Y(\omega)e^{i\omega t}$, l'équation de mouvement se transforme en :

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot \ddot{A}(\omega)$$

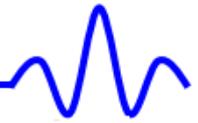
Qui exprime la relation entrée sortie dans le domaine fréquentiel d'un système linéaire à un degré de liberté.

Où $H(\omega)$ est la fonction de transfert d'un système à un degré de liberté, donnée par :

$$H(\omega) = \frac{-1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_n\omega}$$

5-5 Conclusion :

A travers ce chapitre, nous avons vu que pour la classe des systèmes linéaires, la relation entrée - sortie s'exprime par des produits de convolution dans le domaine temporel et des multiplications dans le domaine fréquentiel. Il s'ensuit que la plupart des traitements



s'effectuent plus simplement dans le domaine fréquentiel. La facilité avec laquelle la relation entrée - sortie s'exprime dans le domaine fréquentiel est d'ailleurs une caractéristique attrayante des systèmes linéaires. En effet, la réponse d'un système linéaire à une excitation Gaussienne est également Gaussienne. De tels processus sont entièrement caractérisés par leurs propriétés statistiques du deuxième ordre, en occurrence la moyenne et la fonction d'auto-corrélation ou de densité spectrale de puissance.



CHAPITRE : VI

DEVELOPEMENT DU MODELE ANALYTIQUE.

6-1 Introduction :

La réponse des composants linéaires de structure avec des paramètres incertains peuvent être déterminées en utilisant des techniques standard telles que l'impulsion et les fonctions de réponse en fréquence et les méthodes de perturbation, ou d'approches numériques telles que les méthodes des éléments finis stochastiques et la simulation de Monte Carlo.

Dans cette étude une approche basée sur la théorie de perturbation a été utilisée pour mettre en évidence l'effet des incertitudes sur la réponse dynamique.

6-2 La philosophie de la méthode :

L'incertitude associée à l'amortissement introduit une variabilité dans la représentation de la réponse d'un système. Pour l'amortissement proportionnel, la matrice de dumping peut être découplée par l'approche en mode normal en termes de taux d'amortissement. D'autre part, si le taux d'amortissement est connu, on peut obtenir sa matrice.

Dans ce travail, La variabilité de l'amortissement est exprimée en termes des ratios d'amortissement critique. Et une technique de perturbation de second ordre est utilisée pour représenter la réponse incertaine et faciliter ainsi une solution pratique. Même dans cette situation, l'analyse exige que la partie moyenne de la matrice de dumping soit proportionnelle, sinon on a besoin de recourir à des techniques alternatives telles que la refonte du problème en variables d'état $2N$.



Compte tenu de l'impossibilité de déterminer des coefficients d'amortissement et de la pratique d'ingénierie générale de l'ex appuyant amortissement structural en terme des ratios d'amortissement critique, la formulation de cette étude est fondée sur l'incertitude de l'amortissement exprimé en termes de la moyenne et d'une fluctuation gaussienne.

Malgré l'importance de la variabilité de l'amortissement, il ne faut pas négliger d'autres sources d'incertitude dans les caractéristiques d'un système structural.

La rigidité et la masse d'une structure ont des variabilités intrinsèques dues à une variété de raisons. Leur quantification et leur variation a longtemps été un sujet d'intérêt pour les chercheurs en mathématiques appliquées, ainsi que génie mécanique. Plus récemment, la nécessité d'étudier l'influence de ces incertitudes sur la réponse du système est devenue un sujet d'intérêt considérable qui est orienté vers le développement d'une méthodologie d'analyse structurelle probabiliste.

6-3 Formulation des équations de mouvement :

Les équations de mouvement d'un système à plusieurs degrés de libertés chargé soumis a un chargement et a une excitation à la base poids sont donnés par les équations :

$$\begin{cases} M.\ddot{X} + C.X + K.X = F(t) & (6,1) \\ M.\ddot{X} + C.X + K.X = -M.I.\ddot{X}_g(t) & (6,2) \end{cases}$$

Ou :

- M : Matrice Masse du système (valeur déterministe).
- K : Matrice Rigidité du système (valeur déterministe).
- C : Matrice Amortissement du système (Valeur probabiliste).
- X : Vecteur de réponse.
- $F(t)$: Excitation externe :
- $\ddot{X}_g(t)$: Accélération à la base.
- I : Vecteur d'identité ($I = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots]$).

On transformant le système au coordonné généralise avec :

$$X = \Phi_i * q_i \quad (6,3)$$



Ou :

- Φ_i : Vecteur modal.
- q_i : Coordonné généralisé.

Donc les équations (6, 1) et (6, 2) nous donne :

$$\begin{cases} \ddot{q}_i + 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot \dot{q}_i + \omega_i^2 \cdot q_i = p_i(t) & (6,4) \\ \ddot{q}_i + 2 \cdot \xi_i \cdot \omega_i \cdot \dot{q}_i + \omega_i^2 \cdot q_i = \Gamma_i \cdot \ddot{X}_g(t) & (6,5) \end{cases}$$

Avec :

- $p_i(t) = \Phi_i^T * F(t)$
- $\Gamma_i = \Phi_i^T \cdot (-M) \cdot I$

Ou $p_i(t)$ et Γ_i présentent les coordonnées principales de chargement généralisé.

L'amortissement au $i^{\text{ème}}$ mode sera présenté avec une moyenne et une valeur perturbée tel que :

$$\xi_i = \xi_i^0 \cdot (1 + \alpha_i) \quad (6,6)$$

Avec :

- ξ_i^0 : est la valeur moyenne du coefficient d'amortissement.
- α_i : une petite fluctuation Gaussienne.

Et utilisant le principe de la méthode des perturbations, la réponse sera aussi une fonction de la valeur moyenne et des valeurs perturbées. Et comme on va utiliser une perturbation du second ordre, la réponse sera exprimée de la façon suivante :

$$q_i = q_i^0 + \alpha_i \cdot q_i' + \alpha_i^2 \cdot q_i'' \quad (6,7)$$

Avec :

- q_i^0 : la valeur moyenne.
- q_i' : la réponse perturbée d'ordre 1.
- q_i'' : réponse perturbée d'ordre 2.



On remplace les équations (6,6) et (6,7) dans les équations (6,4) et (6,5) :

$$\begin{cases} (\ddot{q}_i^0 + \alpha_i \ddot{q}_i' + \alpha_i^2 \ddot{q}_i'') + 2 \xi_i^0 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot \omega_i \cdot (\dot{q}_i^0 + \alpha_i \dot{q}_i' + \alpha_i^2 \dot{q}_i'') \\ \quad + \omega_i^2 \cdot \xi_i^0 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot (q_i^0 + \alpha_i q_i' + \alpha_i^2 q_i'') = p_i(t) \\ (\ddot{q}_i^0 + \alpha_i \ddot{q}_i' + \alpha_i^2 \ddot{q}_i'') + 2 \xi_i^0 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot \omega_i \cdot (\dot{q}_i^0 + \alpha_i \dot{q}_i' + \alpha_i^2 \dot{q}_i'') \\ \quad + \omega_i^2 \cdot \xi_i^0 \cdot (1 + \alpha_i) \cdot (q_i^0 + \alpha_i q_i' + \alpha_i^2 q_i'') = \Gamma_i \cdot \ddot{X}_g(t) \end{cases}$$

On arrangeant les termes et égalisant suivant l'ordre de puissance de α_i on trouve les équations d'ordre zéro, un et deux respectivement :

Pour l'ordre 0 :

$$\begin{cases} \ddot{q}_i^0 + 2 \xi_i \cdot \omega_i \cdot \dot{q}_i^0 + \omega_i^2 \cdot q_i^0 = p_i(t) & (6,8) \\ \ddot{q}_i^0 + 2 \xi_i \cdot \omega_i \cdot \dot{q}_i^0 + \omega_i^2 \cdot q_i^0 = \Gamma_i \cdot \ddot{X}_g(t) & (6,9) \end{cases}$$

Pour le 1^{er} ordre :

$$\ddot{q}_i' + 2 \xi_i \cdot \omega_i \cdot \dot{q}_i' + \omega_i^2 \cdot q_i' = -2 \xi_i \cdot \omega_i \cdot \dot{q}_i^0 \quad (6,10)$$

Pour le 2^{ième} ordre :

$$\ddot{q}_i'' + 2 \xi_i \cdot \omega_i \cdot \dot{q}_i'' + \omega_i^2 \cdot q_i'' = -2 \xi_i \cdot \omega_i \cdot \dot{q}_i' \quad (6,11)$$

6-4 Détermination de la variance de la réponse modale :

Dans le domaine des fréquences, pour trouver la variance, on intègre la fonction de densité spectrale, qui résulte du produit de la fonction de transfert et de la densité spectrale de l'excitation.

Ce qui s'exprime Analytiquement par :

$$\sigma_{q_i^{(r)}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{q_i^{(r)}}(\Omega)|^2 \cdot S(\Omega) \cdot d\Omega \quad (6,12)$$

Avec :

- $\sigma_{q_i^{(r)}}^2$: Variance de la réponse modale d'ordre « r » au « i^{ème} » mode.



- $H_{q_i^{(r)}}(\Omega)$: la fonction de transfert du système (au « $r^{\text{ième}}$ » ordre et au mode i).
- $S(\Omega)$: densité spectrale.

6-5 Recherche des fonctions de transfert :

On suppose une excitation externe $\ddot{X}_g(t) = e^{i\omega t}$ et la réponse du système sera $q_i^{(r)}(t) = H_{q_i^{(r)}}(\Omega) \cdot e^{i\omega t}$

Ce qui nous donne les valeurs de H_i aux 3 modes :

Ordre « 0 » :

$$H_{q_i^0}(\Omega) = \frac{\Gamma_i}{\omega^2 + 2i\xi_i\omega_i\Omega - \Omega^2} \quad (6,13)$$

1^{er} ordre :

$$H_{q_i'}(\Omega) = \frac{-2i\Gamma_i\xi_i\omega_i\Omega}{(\omega^2 + 2i\xi_i\omega_i\Omega - \Omega^2)^2} \quad (6,14)$$

2^{ième} ordre :

$$H_{q_i''}(\Omega) = \frac{-4\Gamma_i\xi_i^2\omega_i^2\Omega^2}{(\omega^2 + 2i\xi_i\omega_i\Omega - \Omega^2)^3} \quad (6,15)$$

Calcul de $\sigma_{q_i^0}^2$:

On calcule l'intégrale :

$$\sigma_{q_i^0}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\Gamma_i}{\omega^2 + 2i\xi_i\omega_i\Omega - \Omega^2} \right|^2 \cdot S(\Omega) \cdot d\Omega \quad (6,16)$$

On prend comme excitation externe un bruit blanc de densité spectrale S_0 :



6-6 Pourquoi le choix d'un bruit blanc ?

Un bruit blanc est une réalisation d'un processus aléatoire dans lequel la densité spectrale de puissance est la même pour toutes les fréquences.

En toute rigueur, un bruit blanc ne peut exister car une densité spectrale identique pour toutes les fréquences conduirait à une variance, mesurée par l'aire sous la courbe, infinie (et donc une puissance infinie).

Cette solution est néanmoins intéressante dans certains problèmes pratiques car, bien qu'il ne puisse exister, on montre que la réponse à un bruit blanc d'un système amorti reste finie. Le remplacement d'une excitation quelconque par un bruit blanc fournit donc, en simplifiant considérablement les calculs, une approximation d'autant meilleure que l'amortissement du système est plus faible.

Donc :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{q_i}^2 &= S_0 \cdot \Gamma_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\xi_i^2 \omega_i^2 \Omega^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2} \cdot d\Omega \\
 &= S_0 \cdot \Gamma_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\xi_i^2 \omega_i^2 \Omega^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2} \cdot d\Omega \\
 &= S_0 \cdot \Gamma_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_i^4 + (4\xi_i^2 \omega_i^2 - 2\omega_i^2)\Omega^2 + \Omega^4} \cdot d\Omega \\
 &= S_0 \cdot \Gamma_i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a + b \cdot \Omega^2 + \Omega^4} \cdot d\Omega
 \end{aligned}$$

Avec $a = \omega_i^4$ et $b = 4\xi_i^2 \omega_i^2 - 2\omega_i^2$

On calcule maintenant l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a + b \cdot \Omega^2 + \Omega^4} \cdot d\Omega$$

On utilisant le changement de variable :



$$x = \Omega^2 \quad \text{Donc} \quad d\Omega = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

On trouve :

$$I = a \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x-x_1)} dx + b \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x-x_2)} dx$$

$$I = a.I_1 + b.I_2$$

Calcul de I_1 :

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{(x-x_1)} dx$$

On prend : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sa transforme de Laplace est $F(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$

Et $G(x) = \frac{1}{(x-x_1)}$ sa transforme inverse de Laplace est : $g = e^{x_1 x}$

A l'aide de l'inégalité de Perceval : $\int f(x).G(x)dx = \int F(x).g(x)dx$

Ce qui donne :

$$I_1 = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{x_1 x} . x^{-1/2} dx$$

On utilisant le changement de variable $x_1 x = u$ et les caractéristiques de la fonction Gamma on trouve

$$I_1 = \sqrt{\pi} . \left(\frac{-i}{\sqrt{x_1}} \right) . \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-i\pi}{\sqrt{x_1}}$$

De la même façon on trouve :

$$I_2 = \frac{i\pi}{\sqrt{x_2}}$$

Donc $I = a.I_1 + b.I_2 =$

Remplaçons a, b, I_1 et I_2 par leur valeur et simplifiant l'expression de I on trouve :



$$\sigma_{q_i}^2 = \frac{S_0 \cdot \Gamma_i^2 \cdot \pi}{2\xi_i^2 \omega_i^3} \quad (6,17)$$

Calcul de $\sigma_{q_i}^2$:

On a :

$$\begin{aligned} \sigma_{q_i}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{q_i'}(\Omega)|^2 \cdot S(\Omega) \cdot d\Omega \\ &= S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{q_i'}(\Omega)|^2 \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (6,18)$$

Avec :

$$\begin{aligned} H_{q_i'}(\Omega) &= \frac{-2i\Gamma_i \xi_i \omega_i \Omega}{(\omega^2 + 2i\xi_i \omega_i \Omega - \Omega^2)^2} \\ &= \frac{-2i\Gamma_i \xi_i \omega_i \Omega}{\omega^4 + 2i\xi_i \omega_i^3 \Omega + 2\omega_i^2(1 - 2\xi_i^2)\Omega^2 - 2i\xi_i \omega_i \Omega^3 + \Omega^4} \end{aligned} \quad (6,19)$$

Pour calculer cette intégrale, des tables de calcul ont été proposés [Pavelle 1985] pour le calcul de l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\Omega)|^2 \cdot d\Omega \quad (6,20)$$

Dans notre cas, on peut écrire $H_{q_i'}(\Omega)$ de la forme suivante :

$$H_{q_i'}(\Omega) = \frac{i\omega B_1}{A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2 - i\omega^3 A_3 + \omega^4 A_4} \quad (6,21)$$

Suivant les références citées plus haut, la solution est donnée par :

$$I = \frac{\pi A_3 B_1^2}{A_1(A_2 A_3 - A_1 A_4) - A_0 A_3^2} \quad (6,22)$$

Par égalisation des équations (6,19) et (6,21) on trouve :

$$B_1 = -2\Gamma_i \xi_i \omega_i$$



$$A_0 = \omega^4$$

$$A_1 = 2\xi_i \omega_i^3$$

$$A_2 = -2\omega_i^2(1 - 2\xi_i^2)$$

$$A_3 = 2\xi_i \omega_i$$

$$A_4 = 1$$

Ce qui nous donne la valeur de la variance :

$$\sigma_{q_i'}^2 = \frac{S_0 \cdot \Gamma_i^2 \cdot \pi}{4\xi_i^2 \omega_i^3} \quad (6,23)$$

Calcul de $\sigma_{q_i}^2$:

$$\sigma_{q_i}^2 = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{q_i}''(\Omega)|^2 \cdot d\Omega \quad (6,24)$$

Avec :

$$\begin{aligned} H_{q_i}''(\Omega) &= \frac{-4\Gamma_i \xi_i^2 \omega_i^2 \Omega^2}{(\omega^2 + 2i\xi_i \omega_i \Omega - \Omega^2)^3} \\ &= \frac{-4\Gamma_i^2 \xi_i^2 \omega_i^2 \Omega^2}{(\omega^6 + 4i\xi_i \omega_i^5 \Omega + \omega_i^4(1 - 8\xi_i^2)\Omega^2 - 2i\xi_i \omega_i^3(1 + 2\xi_i^2)\Omega^3 - \omega_i^2(1 - 8\xi_i^2)\Omega^4 + 4i\xi_i \omega_i \Omega^5 - \Omega^6)} \end{aligned} \quad (6,25)$$

Où elle est sous la forme :

$$H_{q_i}'(\Omega) = \frac{-\omega^2 b_2}{a_0 + i\omega a_1 - \omega^2 a_2 - i\omega^3 a_3 + \omega^4 a_4 - \omega^5 a_5 + \omega^6 a_6} \quad (6,26)$$

Et la solution est donné par

$$I = \frac{\pi S_0 a_0 b_2 (a_0 a_3 a_5 + a_1^2 a_6 - a_1 a_2 a_5)}{a_0 (a_0^2 a_5^3 - 2a_0 a_1 a_4 a_5^2 - a_0 a_2 a_3 a_5^2 + a_0 a_2^2 a_3 a_4 + a_1^2 a_5 a_2^2 + a_1^3 a_4^2 + a_0 a_3^2 a_4 a_5 - a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)} \quad (6,27)$$

Avec égalisation, on trouve :



$$b_2 = (4\Gamma_i \xi_i^2 \omega_i^2)^2$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 6\xi_i^2 \omega_i$$

$$a_2 = 3\omega_i^2(1 + 4\xi_i^2)$$

$$a_3 = 4\xi_i \omega_i^3(2 + 3\xi_i^2)$$

$$a_4 = -\omega_i^2(1 + 4\xi_i^2)$$

$$a_5 = 6\xi_i \omega_i^5$$

$$a_6 = \omega_i^6$$

Ce qui nous donne :

$$\sigma_{q_i}^2 = \frac{S_0 \cdot \Gamma_i^2 \cdot \xi_i \cdot \pi}{24(1 + \xi_i^2)\omega_i^3} \quad (6,28)$$

6-7 Recherche de Variance de la réponse :

La réponse du système au $n^{\text{ième}}$ mode est exprimée par :

$$X_n(t) = \sum_{i=1}^M \Phi_{ni} q_i(t) \quad (6,29)$$

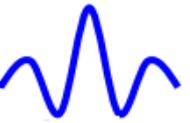
Où:

- Φ_{ni} indique le $n^{\text{ième}}$ élément du $i^{\text{ième}}$ mode.

Donc :

$$X_n(t) = \Phi_{n1} q_1 + \Phi_{n2} q_2 + \dots + \Phi_{nm} q_m$$

Et d'après l'équation (6, 7).



$$X_n(t) = \Phi_{n1}(q_1^0 + \alpha_i \cdot q_1' + \alpha_i^2 \cdot q_1'') + \Phi_{n2}(q_2^0 + \alpha_i \cdot q_2' + \alpha_i^2 \cdot q_2'') + \dots \\ + \Phi_{nm}(q_m^0 + \alpha_i \cdot q_m' + \alpha_i^2 \cdot q_m'')$$

$$X_n(t) = \begin{cases} \Phi_{n1} \cdot q_1^0 + \Phi_{n2} \cdot q_2^0 + \dots + \Phi_{nm} \cdot q_m^0 + \\ + \Phi_{n1} \alpha q_1' + \Phi_{n2} \alpha q_2' + \dots + \Phi_{nm} \alpha q_m' + \\ + \Phi_{n1} \alpha^2 q_1'' + \Phi_{n2} \alpha^2 q_2'' + \dots + \Phi_{nm} \alpha^2 q_m'' \end{cases}$$

$$X_n(t) = \begin{pmatrix} \Phi_{n1} \\ \Phi_{n2} \\ \vdots \\ \Phi_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \\ \vdots \\ q_m^0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \Phi_{n1} \\ \Phi_{n2} \\ \vdots \\ \Phi_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha q_1' \\ \alpha q_2' \\ \vdots \\ \alpha q_m' \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \Phi_{n1} \\ \Phi_{n2} \\ \vdots \\ \Phi_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^2 q_1'' \\ \alpha^2 q_2'' \\ \vdots \\ \alpha^2 q_m'' \end{pmatrix}^T.$$

Ce qu'il peut être exprimé matriciellement par :

$$X_n(t) = \Phi^T \cdot \theta \quad (6,30)$$

Avec :

$$\Phi^T = [\Phi_n^T \quad \Phi_n^T \quad \Phi_n^T] \quad \text{et} \quad \theta = [q_i^0 \quad \alpha q_i' \quad \alpha^2 q_i'']$$

Et la matrice de covariance de $X_n(t)$ est donnée par :

$$\sum_{X_n} = \Phi^T \cdot \sum_{\theta\theta} \cdot \Phi \quad (6,31)$$

Et

$$\sum_{\theta} = \begin{bmatrix} E(q_i^0 q_i^{0T}) & E(q_i^0 \alpha q_i'^T) & E(q_i^0 \alpha^2 q_i''^T) \\ & E(\alpha q_i' \alpha q_i'^T) & E(\alpha q_i' \alpha^2 q_i''^T) \\ \text{Symetrie} & & E(\alpha^2 q_i'' \alpha^2 q_i''^T) \end{bmatrix} \quad (6,32)$$

Dans lequel l'opérateur $E()$ indique les moyennes. Compte tenu de l'indépendance implicite des α et des q_i et de ses composantes, et en utilisant les relations pour les moments d'ordre supérieur des processus gaussiens (ref voir papier), Les termes dans l'équation précédente peut être évalué.

Certains de ces termes s'évanouissent en vertu de la gaussianité des variables. La contribution des termes hors diagonale est relativement faible par rapport aux termes diagonaux principaux.



Donc, la valeur quadratique moyenne de la réponse au $n^{\text{ième}}$ nœud est donnée par :

$$\sigma_{x_n}^2 = \sum_{i=1}^m \Phi_{ni}^2 \left[\sigma_{q_i^0}^2 + \alpha^2 \sigma_{q_i'}^2 + \alpha^4 \sigma_{q_i''}^2 \right] \quad (6,33)$$

6-8 Conclusion :

Un modèle mathématique a été proposé dans cette section pour exprimer l'importance de la prise en compte des incertitudes dans les calculs dynamiques.

Ce modèle est construit sur la base de la théorie des perturbations en prenant une quantité d'amortissement perturbé défini par une moyenne et une fluctuation gaussienne.

On a choisit aussi comme excitation externe un bruit blanc car, bien qu'il ne puisse exister, on montre que la réponse à un bruit blanc d'un système amorti reste finie. Le remplacement d'une excitation quelconque par un bruit blanc fournit donc, en simplifiant considérablement les calculs, une approximation d'autant meilleure que l'amortissement du système est plus faible.



CHAPITRE : VII

EXEMPLE NUMERIQUE.

7-1 Introduction :

Dans le but d'estimer de manière plus fiable la réponse sismique d'une construction. Il est indispensable de prendre en considération l'effet des incertitudes des paramètres dynamiques sur la réponse structurale. Ces incertitudes, causées essentiellement par la variation des propriétés des matériaux et les approximations dans l'estimation des paramètres des modèles mathématiques des structures, peuvent introduire une variation significative de la réponse structurale. Pour certaines structures, telles que les parkings de véhicules par exemple, la masse relative de chaque niveau est fonction du temps (jours, saisons) et il est pratiquement impossible de prédire sa valeur exacte lors d'un prochain séisme.

Dans le chapitre précédent, un développement théorique a été proposé pour montrer l'influence des incertitudes inhérente à l'amortissement sur la réponse dynamique d'une structure.

Dans ce chapitre on va proposer un modèle discrétisé pour mettre en évidence l'importance de la prise en compte des fluctuations dans le calcul des structures.

7-2 Evaluation et traitement de l'incertitude inhérente à l'amortissement :

La sélection d'une valeur appropriée de l'amortissement est un sujet polémique dans la pratique en matière de conception. L'évaluation de l'amortissement dans des structures complètes a été entreprise par plusieurs investigateurs. Un prélèvement de telles études

peut être trouvé en :Teary et Ellis (1981). Yokoo et Akiyama (1972). Hudson (1977), Hart et Vasudevan (1975), Taoka et autres (1975), Raggett (1975), Celebi et Safak (1992) et Trifunac (1972). L'information fournie par des expériences complètes a été assemblée par Haviland (1976). teary et Ellis (1981), Yokoo et Akiyama (1972). Davenport et Hill-Carroll (1986). teary (1986), Lagomarsino (1993) et Tamura et autres (1994), entre d'autres. Haviland (1976) a rapporté un éventail de données pour les différents niveaux des amplitudes de réponse, des classes larges des systèmes structuraux et des tailles de bâtiment. Cette étude a prouvé que le coefficient de variation (COV) d'amortissement basé sur ces résultats a changé dans la gamme de 42-87%. Davenport et Carroll (1986) ont réexaminé la base de données et ont noté que le COV s'est étendu de 33% à 78% et a suggéré une valeur de 40%. Basé sur des données mesurées, ESDU (1983), Jeary (1986), Logomarsino (1993) et Tamura et autres (1995) ont établi des expressions pour la variation de constante d'amortissement en fonction du niveau de déplacement structural.

7-3 Description du modèle :

Pour le modèle numérique, on utilise une construction de 5 étages modélisé par un système masse-ressort qui a comme caractéristique :

- Masse des étages : $m_1 = m_2 = \dots = m_5 = 7,44 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{cm}$.
- Rigidité entre les niveaux : $k_1 = k_2 = \dots = k_5 = 17130 \text{ kg}/\text{cm}$.

Et comme excitation externe, on a pris un bruit blanc d'intensité $S_0 = 51,62 \text{ cm}^2/\text{s}^3$.

Et on a pris l'hypothèse que la valeur de l'amortissement est constante dans chaque étage.

Les calculs ont été faits pour différentes valeurs de ξ : 1%, 3% et 5%, et pour chaque valeur des perturbations qui varie de 10 à 40 % (avec un pas de 10 %) ont été affectés.

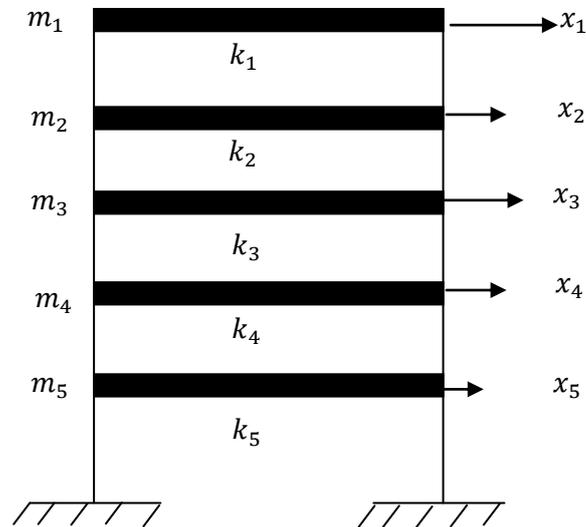


Figure (7, 1) : exemple du système discrétisé.

La matrice des masses :

$$M = \begin{pmatrix} 7,44 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 7,44 & 0 & 0 & 0 \\ & & 7,44 & 0 & 0 \\ & \text{sym} & & 7,44 & 0 \\ & & & & 7,44 \end{pmatrix} \text{ kg. s}^2/\text{cm.}$$

Et la matrice de rigidité :

$$K = \begin{pmatrix} 34260 & -17130 & 0 & 0 & 0 \\ -17130 & 34260 & -17130 & 0 & 0 \\ 0 & -17130 & 34260 & -17130 & 0 \\ 0 & 0 & -17130 & 34260 & -17130 \\ 0 & 0 & 0 & -17130 & 17130 \end{pmatrix} \text{ cm}^2/\text{s}^3.$$



7-4 Résultats :

Les résultats des simulations sont donnés dans le tableau ci-joint :

Pour $\xi = 0,01$

Ordre de perturbation	Étage 1	Étage 2	Étage 3	Étage 4	Étage 5	α
0	0,645414	1,22682	1,70561	2,050796	2,234946	00 %
1	0,654812	1,245108	1,73101	2,08153	2,26822	10 %
2	0,65532	1,245616	1,731772	2,082292	2,269236	
1	0,683006	1,298448	1,804924	2,17043	2,365248	20 %
2	0,687324	1,306576	1,816608	2,1844	2,380488	
1	0,727202	1,382522	1,922018	2,311146	2,518664	30 %
2	0,747776	1,421638	1,976374	2,376678	2,590038	
1	0,785114	1,492504	2,074926	2,495042	2,71907	40 %
2	0,844042	1,604518	2,230628	2,68224	2,923032	

Tableau (7, 1) : variance de la réponse pour un amortissement = 1 %

Pour $\xi = 0,03$

Ordre de perturbation	Étage 1	Étage 2	Étage 3	Étage 4	Étage 5	α
0	0,372618	0,708406	0,984758	1,184148	1,29032	
1	0,378206	0,71882	0,99949	1,201674	1,309624	0,1
2	0,378206	0,719074	0,999744	1,202182	1,310132	
1	0,394208	0,749554	1,042162	1,253236	1,365758	0,2
2	0,396748	0,75438	1,048766	1,26111	1,374394	
1	0,419862	0,798322	1,109726	1,334516	1,45415	0,3
2	0,4318	0,820928	1,141222	1,372108	1,495298	
1	0,453136	0,861822	1,197864	1,440434	1,56972	0,4
2	0,487172	0,926338	1,28778	1,548638	1,687576	

Tableau (7, 2) : variance de la réponse pour un amortissement = 3 %.



Pour $\xi = 0,05$

Ordre de perturbation	Étage 1	Étage 2	Étage 3	Étage 4	Étage 5	α
0	0,288544	0,54864	0,762762	0,917194	0,99949	00 %
1	0,292862	0,556768	0,774192	0,93091	1,014476	10 %
2	0,293116	0,557022	0,774446	0,931164	1,014984	
1	0,305308	0,580644	0,807212	0,970534	1,05791	20 %
2	0,30734	0,584454	0,812292	0,976884	1,064514	
1	0,32512	0,618236	0,859536	1,033526	1,12649	30 %
2	0,334518	0,635762	0,88392	1,06299	1,15824	
1	0,351028	0,667512	0,927862	1,115822	1,215898	40 %
2	0,377444	0,71755	0,997458	1,199642	1,307338	

Tableau (7, 3) : variance de la réponse pour un amortissement = 5 %

7-5 Discussions des résultats :

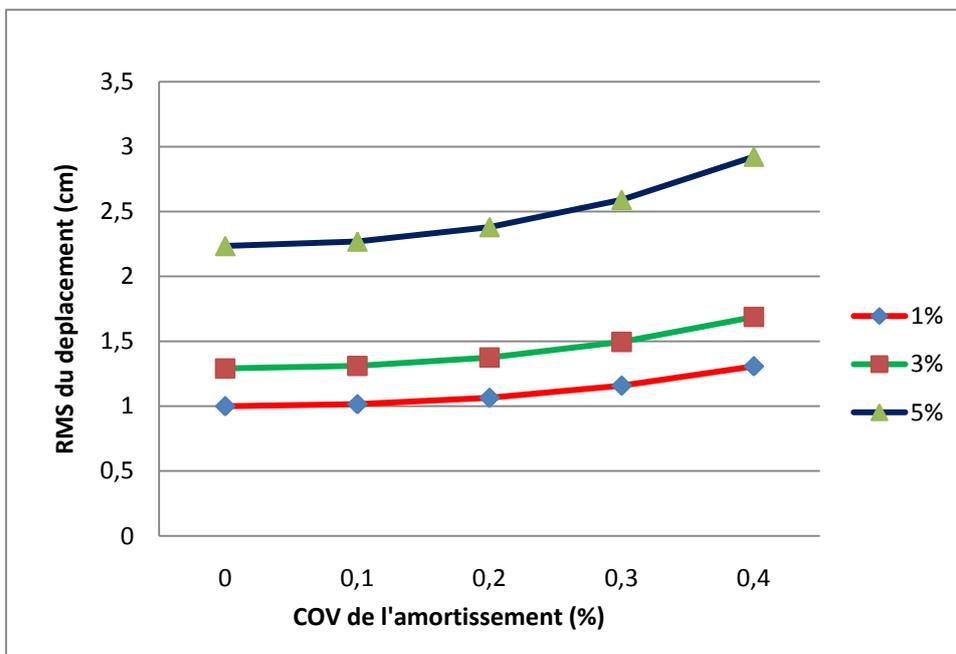
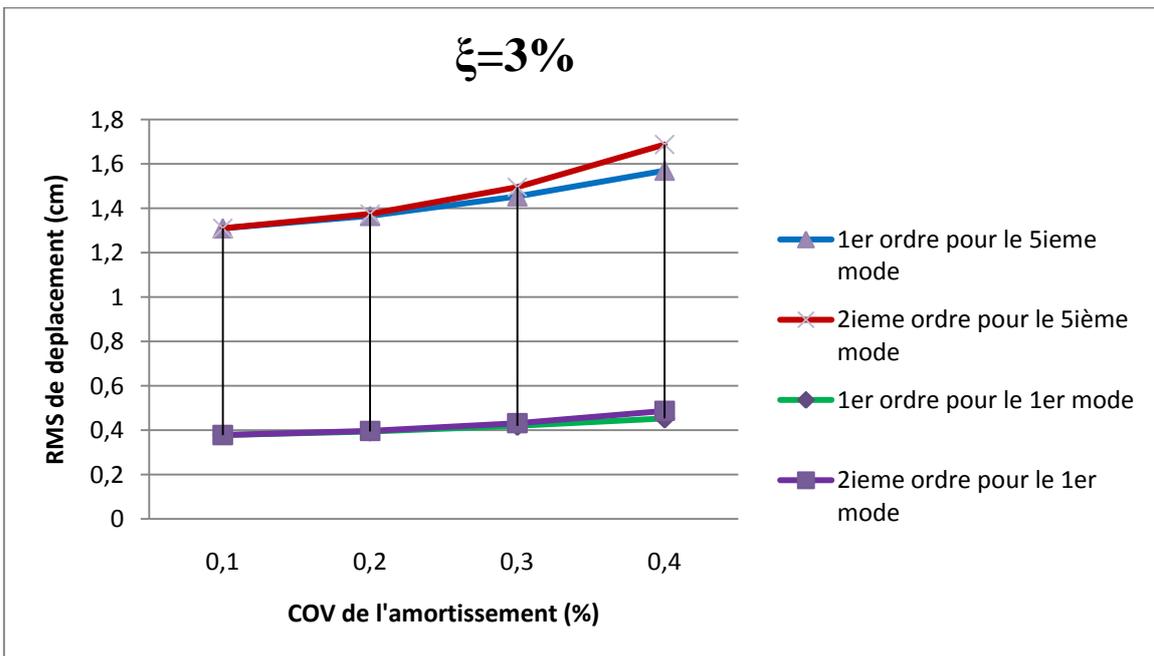
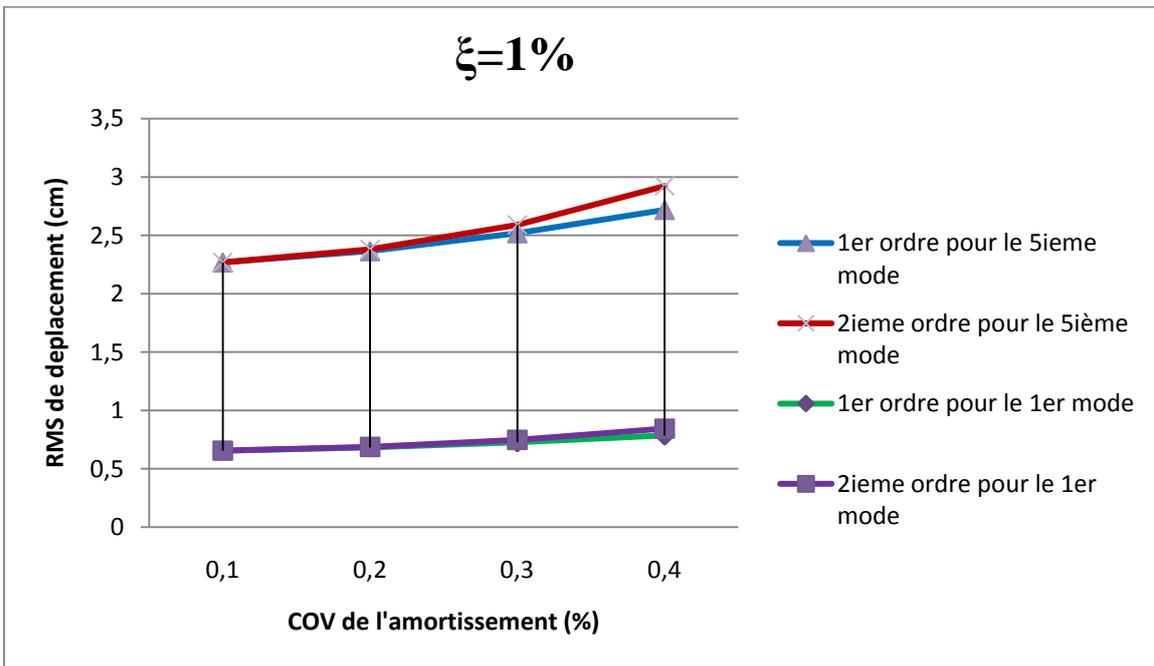


Figure (7, 3) : Perturbation au 5^{ème} Étage pour une perturbation de 2ieme ordre.



7-5-a Participation des ordres de perturbations.



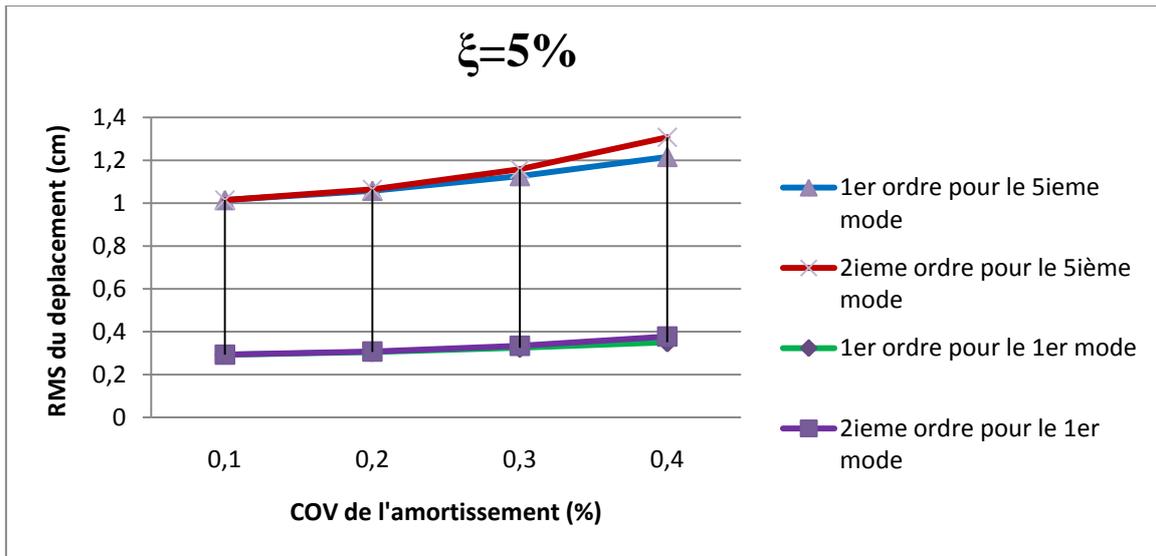


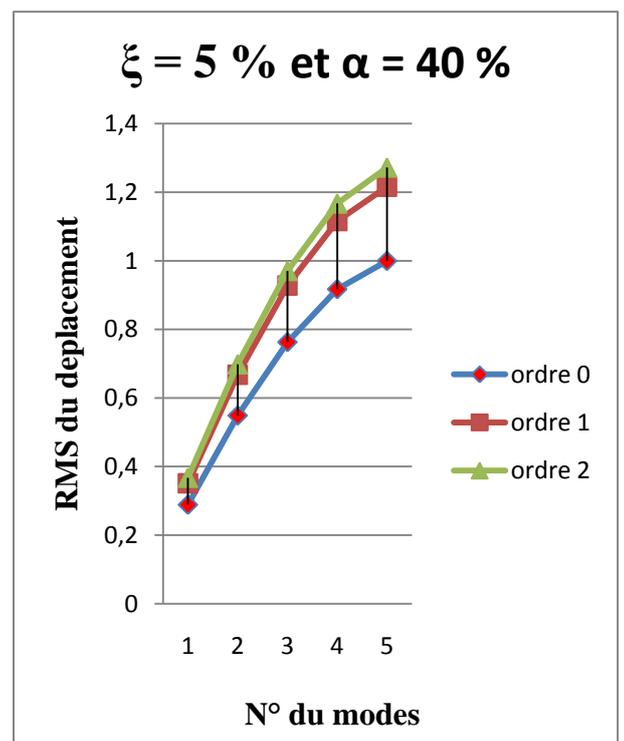
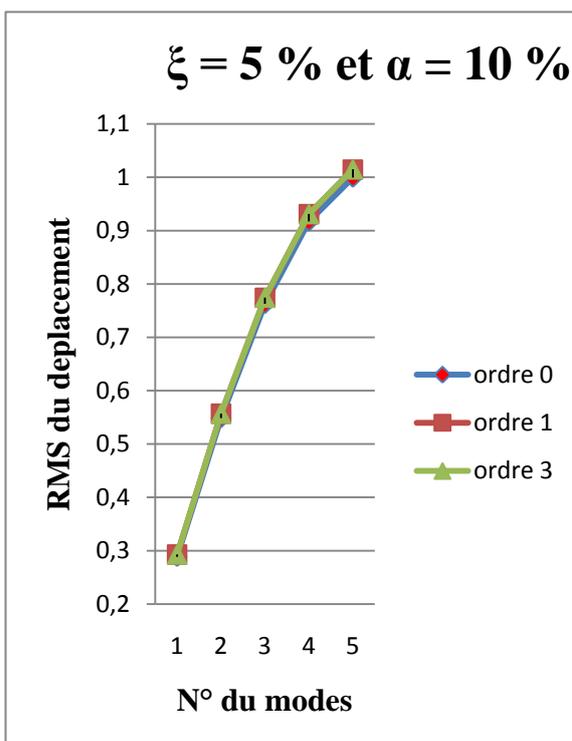
Figure (7, 4) : Réponse d'une structure avec un amortissement incertain.

On constate en premier lieu que la participation du second ordre est insignifiante pour les Étages inférieures et pour de petites valeurs de COV de l'amortissement.

Cette participation devient plus importante en passant aux Étages supérieurs.

Donc pour les constructions de faible hauteur, On peut se limiter dans les calculs à une perturbation du 1^{ère} ordre.

7-5-b Influence de l'incertitude sur la réponse du système :



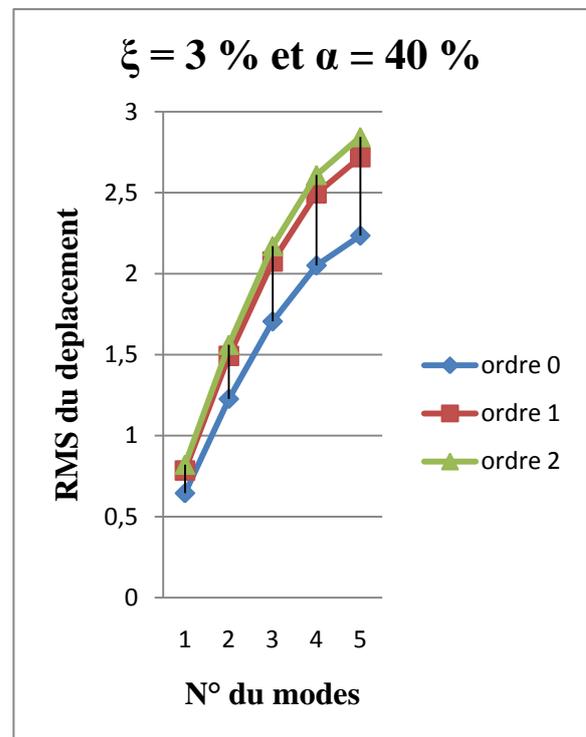
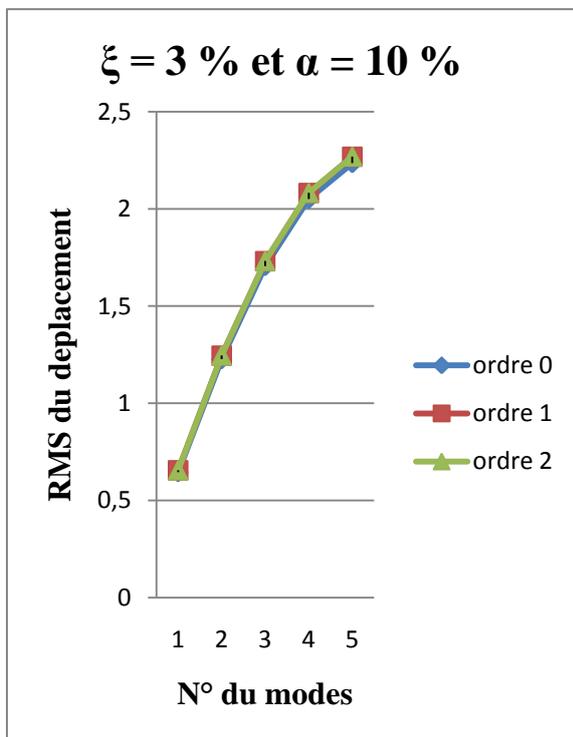
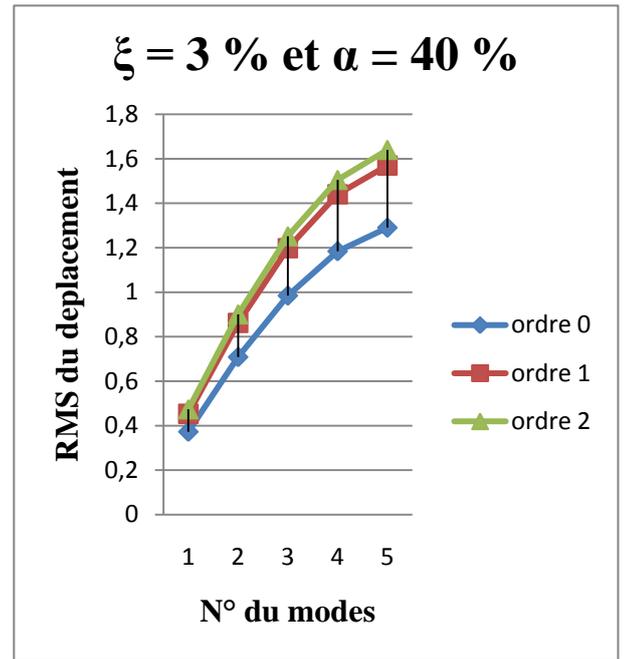
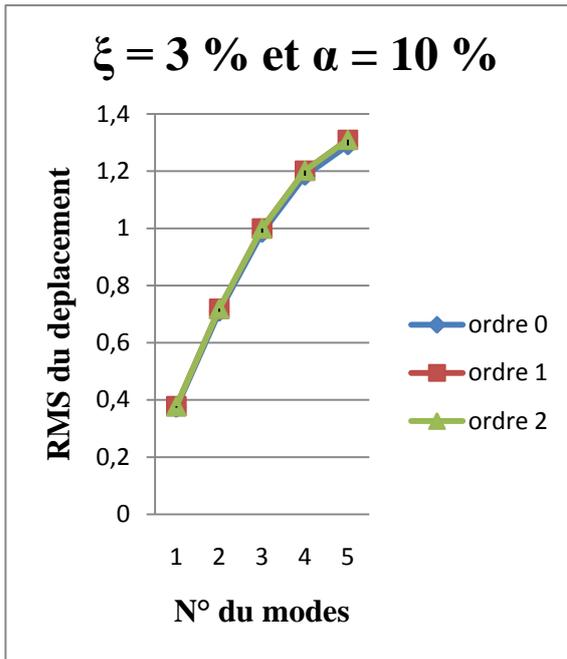


Figure (7, 5) : Réponse d'une structure avec un amortissement incertain, influence du N° de Étage sur la reponse.



En remarque dans les graphes ci-dessous que l'erreur sur la réponse induite par les fluctuations attribuées à l'amortissement est insignifiante pour des petites valeurs de COV ξ , indépendamment du Étage et de la valeur de l'amortissement critique moyen.

Mais pour des valeurs de COV ξ importante, l'erreur sur la réponse augmente.

7-5-c Quantification de l'effet des incertitudes.

Ci-dessous, un tableau qui quantifie les erreurs sur la réponse de la structure en fonction des COV de l'amortissement pour un amortissement critique de 5 %.

Ordre de perturbation	Étage 1	Étage 2	Étage 3	Étage 4	Étage 5	α
1	1,50%	1,47%	1,50%	1,48%	1,50%	0,1
2	1,50%	1,51%	1,52%	1,52%	1,54%	
1	5,79%	5,81%	5,83%	5,83%	5,85%	0,2
2	6,48%	6,49%	6,50%	6,50%	6,52%	
1	12,68%	12,69%	12,69%	12,70%	12,70%	0,3
2	14,72%	14,72%	14,73%	14,71%	14,73%	
1	21,61%	21,66%	21,64%	21,64%	21,65%	0,4
2	27,08%	27,10%	27,11%	27,12%	27,13%	

Tableau (7,4) : erreurs sur la réponse de fonction des COV ξ (pour $\xi=1\%$).

Ordre de perturbation	Étage 1	Étage 2	Étage 3	Étage 4	Étage 5	α
1	1,46%	1,49%	1,49%	1,50%	1,49%	10%
2	1,53%	1,53%	1,53%	1,54%	1,53%	
1	5,82%	5,84%	5,82%	5,83%	5,83%	20%
2	6,49%	6,50%	6,51%	6,51%	6,51%	
1	12,67%	12,69%	12,69%	12,70%	12,69%	30%
2	14,70%	14,72%	14,72%	14,73%	14,73%	
1	21,65%	21,66%	21,65%	21,66%	21,66%	40%
2	27,24%	27,26%	27,25%	27,26%	27,26%	

Tableau (7,5) : erreurs sur la réponse de fonction des COV ξ (pour $\xi=3\%$).

Ordre de perturbation	Étage 1	Étage 2	Étage 3	Étage 4	Étage 5	α
1	1,50%	1,48%	1,50%	1,50%	1,50%	10%
2	1,58%	1,53%	1,53%	1,52%	1,55%	
1	5,81%	5,83%	5,83%	5,82%	5,84%	20%
2	6,51%	6,53%	6,49%	6,51%	6,51%	
1	12,68%	12,69%	12,69%	12,68%	12,71%	30%
2	14,77%	14,72%	14,73%	14,74%	14,72%	
1	21,65%	21,67%	21,65%	21,66%	21,65%	40%
2	27,28%	27,26%	27,24%	27,26%	27,27%	

Tableau (7,6) : erreurs sur la réponse de fonction des COV ξ (pour $\xi = 5\%$).

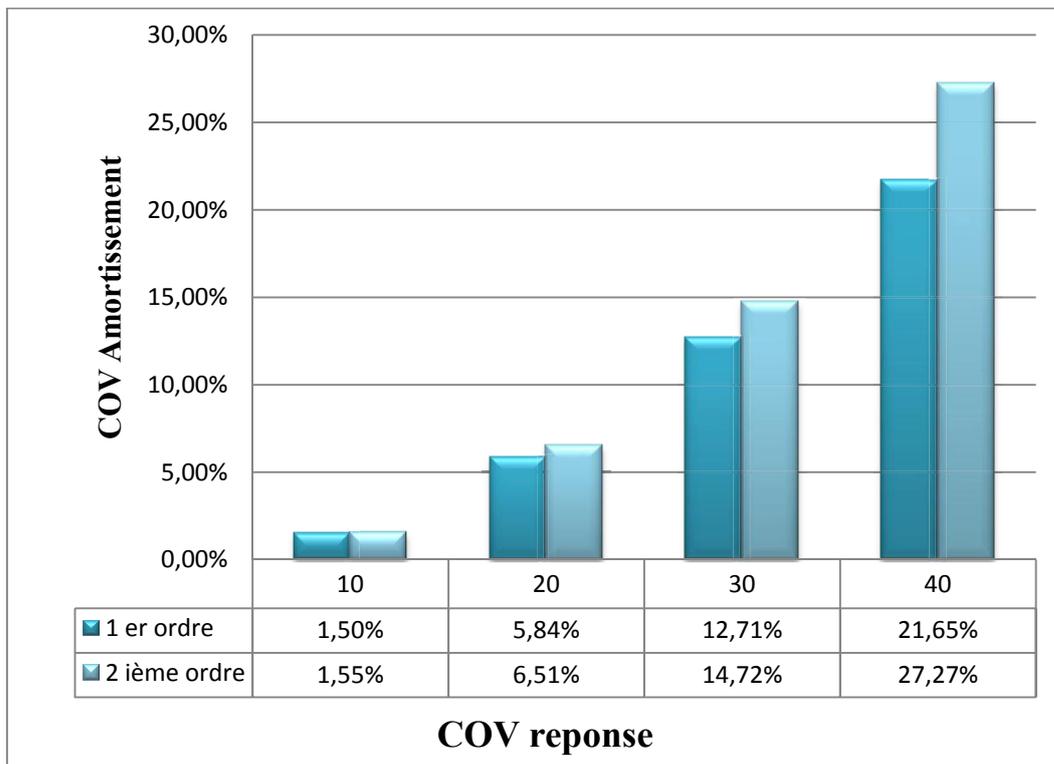


Figure (7, 6) : COV reponse en fonction de COV ξ (pour $\xi = 5\%$ et au 5^{ème} Étage).

On remarque, dans les tableaux ci-dessus que les erreurs sur la réponse sont presque constante dans chaque Étage est ça, indépendamment de la valeur de l'amortissement critique utilisé.

Et la variation n'est facteur que de la fluctuation prise dans les calculs.

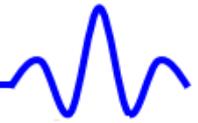


En constate aussi que la prise en compte des erreurs dans les calculs de la réponse est très important. A titre exemple, une variation des valeurs de l'amortissement de l'ordre de 40 % conduit à une erreur de 21% au 1^{er} ordre et de 27% au 2^{ième} ordre.

7-6 Conclusion :

Pour une estimation probabiliste de la réponse dynamique, on a utilisé la technique des perturbations de 2^{ième} ordre, où on a varié les COV de l'amortissement de 10 à 40 % pour visualiser la propagation des incertitudes dans le système.

Les résultats numériques trouvé et représenté dans ce chapitre, ont montré l'importance de la prise en considération des incertitudes dans le dimensionnement des structures. Et que même des petites incertitudes peuvent avoir une incidence significative sur les réponses.



CONCLUSION GENERALE.

Dans ce travail de recherche qui rentre dans le cadre de la préparation de mémoire de Magister, nous avons été amenés à étudier l'effet des incertitudes inhérentes à l'amortissement sur la réponse dynamique des structures.

Pour l'estimation probabiliste de la réponse sismique, un modèle mathématique a été construit sur la base de la théorie des perturbations en prenant une quantité d'amortissement perturbé défini par une moyenne et une fluctuation gaussienne.

On a choisi aussi comme excitation externe un bruit blanc car, bien qu'il ne puisse exister, on montre que la réponse d'un système amorti à une telle excitation reste finie. Le remplacement d'une excitation quelconque par un bruit blanc fournit donc, une simplification considérable des calculs, et une approximation d'autant meilleure que l'amortissement du système est plus faible.

L'effet des fluctuations des valeurs de l'amortissement sur celles de la réponse sismique montre que plus les fluctuations de l'amortissement augmentent, plus celles de la réponse augmentent, et ceci, quelles que soient la fonction de densité de probabilité et l'action sismique considérées.

On a constaté aussi que la prise en compte des erreurs dans les calculs de la réponse est très importante. À titre exemple, une variation des valeurs de l'amortissement de l'ordre de 40 % conduit à une erreur de 21 % au 1^{er} ordre et de 27 % au 2^{ième} ordre.

Cette étude a montré l'importance de la prise en considération des incertitudes sur les caractéristiques structurales dans la conception et le design des structures, il a été montré que les valeurs de coefficient de variation des fluctuations de la réponse peuvent atteindre les 27 %. Cette variabilité très importante de la réponse structurale n'exclut pas



l'occurrence de niveaux de sollicitation très importante rendant la structure très vulnérable si celle-ci a été dimensionnée pour des seuils moyens de réponse.

Dans l'analyse présentée dans le document, l'excitation est supposée être représentée par un bruit blanc gaussien. Cette représentation permet une solution analytique au problème. Toutefois, la procédure est également applicable aux charges dues au vent, aux vagues et aux séismes, seuls ou en combinaison, qui sont caractérisés par un processus de bruit blanc filtré. Dans ce cas, une quadrature numérique ou des manipulations symboliques peuvent devenir nécessaires.

Les résultats montrent que les incertitudes inhérentes à l'amortissement influent en sur la réponse du système. Selon la valeur moyenne du ratio d'amortissement, les effets sont plus prononcés pour une plus grande variabilité des valeurs d'amortissement.



RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

- **Augusti. G et Al (1984)**, 'Probabilistic Methode in structural Engineering', Chapman and Hall, London.
- **Bellmen. Richard**, 'Perturbation Techniques in Mathematics, Physics, and Engineering', Holt, Rinehart And Winston, Inc.1993.
- **Berglund, Nils.2001**. 'Perturbation Theory of Dynamical Systems', Department of mathematics. ETH Zurich. Switzerland.
- **Boudjelal Tahar Mohamed (1997)**, 'Modélisation de l'amortissement par une approche thermodynamique et son application a l'analyse dynamique de l'interaction pont-véhicule', Thèse Présentée a la Faculté des études supérieures de l'université Laval pour l'obtention du grade de Philosophie Doctor (Ph.D.).
- **Caravani. P. and Thomson. W.T, 1973** 'Frequency response of a dynamic system with statistical damping', AIAA J, 11, No. 2, 170-173
- **Damping of Structures, Part I : Tall buildingd**, Engineering Science Data Units, Item N°. 83009. London, Sept. 1983
- **Davenport. A.G. and Hill-Carroll, P.** 'Damping in tall buildings; its variability and treatment in design', Building Motion in Wind, Proc. ASCE Convention, Seattle, WA, 1986
- **Davidovici V (1985)**, ED, Génie Parasismique, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France.
- **Haviland, R.** 'A study of the uncertainties in the fundamental translational periods and damping values for real buildings', Res. Rep. No. 5, Pub. No. R76-12, Dept of Civ. Engng, MIT, Cambridge, MA, 1976
- **Ibrahim, R.A. and Heo, H. 1987** 'Stochastic response of nonlinear structures with parameter random fluctuations', A1AA J, 25, No. 2. 331-338.



- **Ibrahim. R.A, 1987,** 'Structural dynamics with parameter uncertainties', Appl. Mech. Rev. vol 40, no 3, Mar 1987.
- **Jeary. AP. (1986).** «Damping in tall : a mechanism and a predictor, Earthquake engng and Struct. Dyn. 1986.14.733-75.
- **Jeary. AP. and Ellis. B. R. (1981).** «vibration tests of structures at varied amplitudes', Proc. ASCE/EMD Specialty Conf. Dynamic Response of structures. Atlanta, GA, 1981.
- **Jensen. H and W. D. Iwan.** 'Response of systems with uncertain parameters to stochastic excitation'. J. eng. mech. ASCE 1181012-1025 (1992).
- **Jensen. H and W. D. Iwan (1991),** 'Response variability in structural dynamics', Earthquake eng. struct. dyn. 20. 949-959.
- **Kareem, A. and Sun, Wei-Joe.** 'Probabilistic response of structures with parametric uncertainties', Proc. 5th Int. Conf on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering
- **Kareem, A. and Sun, Wei-Joe,** 1990. 'Dynamique response of structures with uncertain damping', Eng. Struct. Vol 12.
- **Kareem.A, (1996),** 'Damping in structures: it's évaluation and treatment of uncertainty', journal of wind engineering and industrial aerodynamics.
- **Kareem. A, (1996),** Damping in structures: its evaluation and treatment of uncertainty, journal of wind engineering and industrial aerodynamics.
- **Loren D. Lutes, Shahram Sarkani.** 'Random Vibrations Analysis of Structural and Mechanical Systems'. Elsevier Butterworth–Heinemann.2004.
- **Newland, D.E, (1984).** An introduction to random vibrations and spectral analysis. Longman Inc., New York.
- **Pecker Alain.** 'Dynamique des structures et des ouvrages', Edition 2006.
- **Pisarenko, G.S., 1960.** Dissipation of energy in mechanical vibration (in Russian), Izdvo Acad. Nauk, Kiev, Ukrainian SSR 1955, translated in WADD TR-582, AFSC, Wright Patterson AFB.OH
- **Preumont, A. (1990).** Vibrations aléatoires et analyse spectrale. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne.
- **Ibrahim, R.A. and Heo, H,** 1987, 'Stochastic response of nonlinear structures with parameter random fluctuations', AIAA J. 1987, 25, No. 2. 331-338



- **Prasthofer. P.H et Beadle. C.W (1975)**, 'Dynamic response of structures with statistical uncertainties in their stiffness, J. Sound Vib 42(4), 477-493.
- **Vanmarcke. E, (1984)**, 'Random fields : analysis and synthesis', MIT Press, Cambridge MA.
- **Weigel, R.L. 1970**, '(Ed.) Earthquake Engineering', Prentice-Hall**Lazan, B.J. 1968**. 'Damping of materials and members in structural mechanics'. Pergamon Press. New York. U.S.A.
- **Yokoo. Y and Akiyama. H. 1972**. 'Lateral vibration and damping due to wind and earthquake effects', Proc. Intand. Conf. on Planning Design of Tall Building, II-17, ASCE, NY, 1972.
- **ZENER. C. (1948)**. "Elasticity and Anelasticity of Metals", University of Chicago, Press Chicago, U.S.A.
- **Zermout, S. (2004)**. Investigation de la réponse stochastique des structures sous excitations sismiques. Thèse de magister ENP Alger.
- **Z. Guangwu and S. Suming (1986)**, 'Fuzzy optimisation design', Springer-Verlag, Tokyo.



ANNEXE A

TABLES D'INTÉGRALE UTILISÉ POUR LE CALCULE DE LA RÉPONSE MOYENNE QUADRATIQUE :

La liste des intégrales de la forme :

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} |H_n(\omega)|^2 d\omega$$

Où :

$$H_n(\omega) = \left\{ \frac{B_0 + (i\omega) B_1 + (i\omega)^2 B_2 + \dots + (i\omega)^{n-1} B_{n-1}}{A_0 + (i\omega) A_1 + (i\omega)^2 A_2 + \dots + (i\omega)^n A_n} \right\}$$

Pour calculer la réponse moyenne quadratique il faut que le système soit stable, donc les racines λ de l'équation caractéristique :

$$(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots + \lambda^n A_n) = 0$$

Doivent avoir une partie réelle négative, si cette solution n'est pas satisfaite, une condition alternative équivalente est utilisée, il faut que les racines ω :

$$(A_0 + (i\omega) A_1 + (i\omega)^2 A_2 + \dots + (i\omega)^n A_n) = 0$$



Doit être situé dans la partie supérieure du plan ω .

Les solutions sont données de la forme suivante :

$$\text{For } n = 1, \quad H_1(\omega) = \frac{B_0}{A_0 + i\omega A_1},$$

$$I_1 = \frac{\pi B_0^2}{A_0 A_1}$$

$$\text{For } n = 2, \quad H_2(\omega) = \frac{B_0 + i\omega B_1}{A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2},$$

$$I_2 = \frac{\pi \left\{ A_0 B_1^2 + A_2 B_0^2 \right\}}{A_0 A_1 A_2}$$

$$\text{For } n = 3, \quad H_3(\omega) = \frac{B_0 + i\omega B_1 - \omega^2 B_2}{A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2 - \omega^3 A_3},$$

$$I_3 = \frac{\pi \left\{ A_0 B_1^2 + A_2 B_0^2 \right\}}{A_0 A_1 (A_0 A_3 - A_1 A_2)}$$

$$\text{For } n = 4, \quad H_4(\omega) = \frac{B_0 + i\omega B_1 - \omega^2 B_2 - \omega^3 B_3}{A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2 - i\omega^3 A_3 + \omega^4 A_4},$$

$$I_4 = \frac{\pi \left\{ A_0 B_3^2 (A_0 A_3^2 - A_1 A_2) + A_0 A_1 A_4 (2B_1 B_3 - B_2^2) - \right. \\ \left. A_0 A_3 A_4 (B_1^2 - 2B_0 B_2) + A_4 B_0^2 (A_1 A_4 - A_2 A_3) \right\}}{A_0 A_4 (A_0 A_3^2 + A_1^2 A_4 - A_1 A_2 A_3)}$$



$$\begin{aligned}
 \text{For } n = 5, \quad H(\omega) &= \frac{B_0 + i\omega B_1 - \omega^2 B_2 - i\omega^3 B_3 + \omega^4 B_4}{A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2 - i\omega^3 A_3 + \omega^4 A_4 + i\omega^5 A_5}, \\
 I &= \frac{\pi \{ A_0 B_4^2 (A_0 A_3^2 + A_1^2 A_4 - A_0 A_4 A_5 - A_1 A_2 A_3) + \\
 &\quad + A_0 A_5 (2B_2 B_4 - B_3^2) \cdot (A_1 A_2 - A_0 A_3) + \\
 &\quad + A_0 A_5 (2B_0 B_4 - 2B_1 B_3 + B_2^2) \chi (A_0 A_5 - A_1 A_4) + \\
 &\quad + A_0 A_5 (2B_0 B_4 - B_1^2) \chi (A_3 A_4 - A_2 A_5) + \\
 &\quad + A_5 B_0^2 (A_1 A_4^2 + A_2^2 A_5 - A_0 A_4 A_5 - A_2 A_3 A_4) \} }{A_0 A_5 (A_0^2 A_5^2 - 2A_0 A_1 A_4 A_5 - A_0 A_2 A_3 A_5 + \\
 &\quad + A_1 A_2^2 A_5 + A_1^2 A_4^2 + A_0 A_3^2 A_4 - A_1 A_2 A_3 A_4)}
 \end{aligned}$$