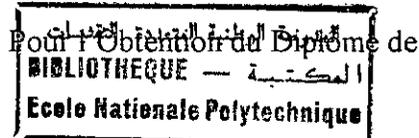


République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**Ecole Nationale Polytechnique**  
DER de Génie Electrique & Informatique

# THESE



## MAGISTER EN ELECTRONIQUE

Option : Acquisition et Traitement de l'Information

Présentée par

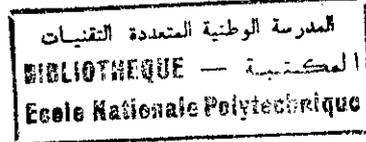
**KAMRI DJEKIDEL**

Ingénieur d'état en Electronique de l'USTHB

### Commande à Relais dans les Systèmes à Retard

Soutenue publiquement le 12 Mai 1999 devant le jury composé de:

MM	A. ZERGUERRAS	Professeur, L'ENP	Président
	M.S. AIT CHEIKH	Chargé de cours, L'ENP	Rapporteur
	C. LARBES	PhD, L'ENP	Examinateur
	B. BOUSEKSOU	Chargé de cours, L'ENP	Examinateur
	R. ILLOUL	Chargé de cours, L'ENP	Examinateur



# Commande à Relais dans les Systèmes à Retard

Présentée par

KAMRI DJEKIDEL

Thèse

Magister en Electronique

Option : Acquisition et Traitement de l'Information

Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

Avril 1999

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

A toute ma famille

A tous mes amis

A vous cher lecteur

## *Avant-Propos*

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire d'automatique du département du Génie Electrique de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger (ENP) sous la direction de **M.S. AIT CHEIKH**, chargé de cours à l'ENP, qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude pour les conseils avisés et l'encouragement constant qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail.

Mes remerciements les plus sincères sont adressés à Monsieur **A. ZERGUERRAS**, professeur à L'ENP, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du Jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements vont également à Monsieur **C. LARBES**, PhD à l'ENP, je suis très honoré de sa présence dans le jury de cette thèse.

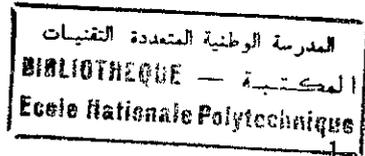
Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance envers Monsieur **B. BOUSEKSOU**, chargé de cours à l'ENP, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de faire partie du Jury d'examen.

Je remercie également Monsieur **R. ILLOUL**, chargé de cours à l'ENP, pour avoir bien voulu porter une attention à ce travail en me faisant l'honneur de participer à ce jury.

Je ne saurais terminer sans remercier chaleureusement mes amis : **K. BENAROUS**, **K. MECHRAOUI**, pour l'aide qu'ils m'ont apporté aussi bien sur le plan moral que matériel.

Et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ma formation et à l'élaboration de ce travail, trouvent ici l'expression de ma très vive reconnaissance.

# Table des matières



## Introduction générale.....

### Chapitre I

#### *Régulation Automatique et Commande à Relais*

1.1 Introduction.....	5
1.2 Performances de la régulation.....	6
1.3 Reglabilité.....	7
1.4 Régulateur PID.....	8
1.5 Robustesse .....	11
1.5.1 Fonction de sensibilité.....	12
1.5.2 Réduction de la fonction de sensibilité.....	13
1.6 Commande à relais.....	13
1.6.1 L'approximation de l'équivalent harmonique.....	13
1.6.2 Précision de l'approximation de l'équivalent harmonique...16	
1.6.3 Champ de validité de l'équivalent harmonique.....	17
1.6.4 Stabilité des oscillations limites.....	17
1.6.4.1 Critère de Loeb.....	18
1.6.4.2 Système à retard.....	20
1.7 Conclusion.....	24

### Chapitre II

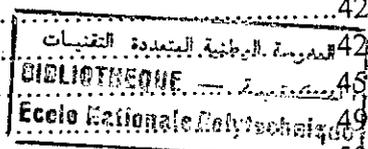
#### *Méthodes de Synthèse Conventionnelles pour la Commande des Systèmes à Retard*

2.1 Introduction.....	25
2.2 Effet du retard dans la commande.....	26
2.3 Elimination de retard.....	26
2.3.1 Méthode directe.....	26
2.3.2 Méthodes d'approximation.....	27
2.3.2.1 Méthode des moments.....	27
2.3.2.2 Exemples d'illustrations.....	29
2.4 Méthodes de synthèse conventionnelles.....	31
2.5.1 Méthode de Ziegler-Nichols.....	31
2.5.2 Méthode d'optimisation des paramètres.....	33
2.5.3 Méthode de compensation.....	35
2.5.4 Méthode prédictive.....	35
2.5.5 Méthode d'Astrom-Hagglund.....	38
2.5 Conclusion.....	41

## Chapitre III

### *Prédicteur de Smith : Propriétés et Robustesse*

3.1. Introduction.....	42
3.2. Méthode de Smith.....	42
3.3. Propriétés du prédicteur de Smith.....	45
3.4. Robustesse du prédicteur de Smith.....	49
3.5. Exemples d'illustration.....	50
3.6. Conclusion.....	57



## Chapitre IV

### *Commande à Relais dans le Prédicteur de Smith*

4.1 Introduction.....	58
4.2 Commande à relais dans le PS.....	59
4.2.1 Principe.....	60
4.2.2 Stabilité des oscillations limites.....	61
4.2.3 Procédure de test à relais.....	62
4.2.4 Exemples d'illustration.....	63
4.3 Investigation d'un PID dans le PS par la méthode d'Astrom-Hagg.....	68
4.3.2 Procédure.....	70
4.3.3 Exemples d'illustration.....	72
4.4 Conclusion.....	81

## Chapitre V

### *Utilisation de Relais en Identification et la Commande On-line des Systèmes à Retard*

5. Introduction.....	82
5.1 Identification.....	83
5.1.1. Choix de modèle.....	84
5.1.2. Développement.....	86
5.1.2.1 Systèmes de faibles réglabilités.....	87
5.1.2.2 Systèmes de grandes réglabilités.....	87
5.1.2.3 Systèmes de réglabilités moyennes.....	88
5.1.3 Précision sur la mesure de $a_0$ et $\omega_{cr}$ .....	90
5.1.4 Effets de perturbations statiques.....	91
5.1.5 Exemples d'illustration.....	93
5.2 Commande on-line.....	98
5.2.1 Système de réglabilité moyenne.....	98
5.2.2 Exemples d'illustration.....	100
5.2.3 Commande des procédés selon leur gamme de réglabilité.....	107
5.2.4 Exemples d'illustration.....	108
5.3 Robustesse.....	113
5.3.1 Simulation.....	114
5.4 Conclusion.....	117

## Chapitre VI

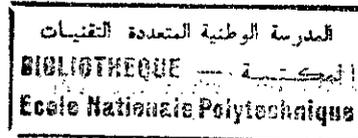
### *Extension des Techniques de Commande aux cas des Systèmes Multivariables*

6.1 Introduction.....	118
6.2 Analyse.....	119
6.3 Cmmande à relais dans les systèmes MIMO.....	121
6.3.1 Techniques de tests à relais pour les systtèmes MIMO.....	121
6.3.2 Synthèse à boucle dominante.....	124
6.4 Exemples d'illustration.....	126
6.5 Conclusion .....	134
 <i>VII- Conclusion générale</i> .....	 135
 <i>Annexe A</i> .....	 139
<i>Annexe B</i> .....	142
<i>Bibliographie</i> .....	145

## Liste des principaux symboles et notation

- $G(s)$  : fonction de transfert du procédé à retard  
 $G_0(s)$  : partie rationnelle de  $G(s)$   
 $G_m(s)$  : modèle du procédé à retard  
 $G_{m0}(s)$  : partie rationnelle de  $G_m(s)$   
 $H_r(s)$  : fonction de transfert du système en boucle fermée  
 $K$  : gain statique du procédé  
 $T$  : constante de temps du procédé premier ordre  
 $L$  : retard ou temps mort du procédé  
 $K_m, T_m, L_m$  : leur équivalents du modèle  
 $G_c(s)$  : fonction de transfert du régulateur  
 $G_{c0}(s)$  : fonction de transfert du régulateur primaire du prédicteur de Smith  
 $K_p$  : gain proportionnel du régulateur  
 $T_i$  : constante de temps d'intégration  
 $T_d$  : constante de temps de dérivation  
 $a_0, \omega_{cr}$  : amplitude et fréquence de l'oscillation limite  
 $a^*, \omega_{cr}^*$  : valeurs théoriques de  $a_0$  et  $\omega_{cr}$   
 $a_s, \omega_s$  : valeurs de simulation de  $a_0, \omega_{cr}$   
 $K_{cr}$  : gain critique du procédé  
 $M$  : amplitude du relais  
 $h$  : hystérisis du relais  
 $N(a)$  : gain équivalent du premier harmonique du relais  
 $\phi_m$  : marge de phase  
 $A_m$  : marge de gain  
 $\psi$  : angle formé entre le point critique et l'axe réel négatif  
 $C(a)$  : lieu critique de  $-1/N(a)$   
 $r_n$  : réglabilité du procédé  
 $U_1$  : coefficient du premier harmonique de la sortie du relais  
 $\gamma$  : perturbation statique constante  
 $N_{iy}$  : gain incrémental équivalent  
 $\beta$  : facteur de réglage de l'action proportionnelle  
 $\mu$  : facteur de réglage de l'action intégrale  
 $\mu_0$  : valeur du biais dans l'amplitude du relais  
 $L_p$  : horizon de prédiction pour le PI prédictif  
 $\alpha$  : facteur de proportionnalité entre  $T_d$  et  $T_i$  du PID .  
MIMO : systèmes multivariables  
SISO : système monovariables  
BO : boucle ouverte  
PS : prédicteur de Smith  
PPI : PI prédictif

# Introduction générale



Les méthodes d'étude des systèmes linéaires à partir de la fonction de transfert et de ses représentations équivalentes, ont conduit au développement de plusieurs techniques d'analyse et de synthèse des systèmes asservis, elles constituent actuellement un outil extrêmement puissant.

Cependant, l'application de ces techniques admet quelques hypothèses simplificatrices au sujet du procédé industriel en main, afin de pouvoir le représenter par un modèle linéaire simple. Par conséquent, le régulateur obtenu ne conduit pas toujours aux résultats souhaités. Un cas spécial et assez souvent rencontré dans la modélisation des procédés industriels, est celui de l'existence de retard pur entre l'application du signal d'entrée et la réaction correspondante. Des exemples typiques, sont ceux des systèmes de transferts de chaleur, transport de matériels, réacteurs chimiques, colonnes de distillation et la représentation analogiques des systèmes numériques [14]. Il y a aussi une large variété de systèmes où la présence en série de plusieurs petites constantes de temps sont approximées par un retard effectif. La présence du retard conduit à une représentation non-rationnelle du système; ce qui compliqué énormément l'aspect physique et analytique de la commande. En effet le problème majeur posé par l'existence du retard dans un système asservi est dû au fait que le régulateur ne voit pas l'effet de sa correction immédiatement. Après une action corrective de celui-ci, l'erreur reste inchangée durant un temps égal au retard pendant que la sortie non corrigée est asservie à l'entrée du régulateur. Ce dernier génère d'autres actions correctives ou plutôt des sur-corrrections. Ce qui montre l'effet déstabilisant du retard. Le problème est encore plus compliqué si la valeur de ce retard est mal estimée .

Un des phénomènes le plus exploité en matière d'asservissement est celui du pompage des systèmes sous certaines conditions, dont l'amplitude et la fréquence des oscillations entretenues caractérisent le procédé en main. L'exploitation de cette information a longtemps servi les automaticiens comme guide dans les méthodes de synthèse fréquentielles (méthode de Ziegler-Nichols 1942).

En considérant la structure de régulation en cascade suivante :

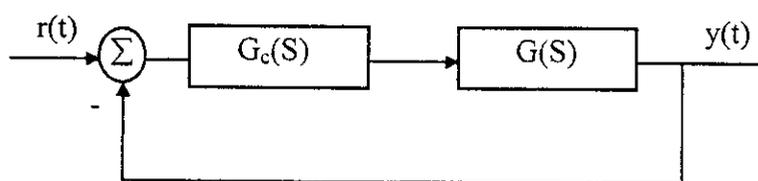


Fig 1 Système asservi standard

Il a été constaté [4][13][38] que l'emploi de relais à la place du régulateur  $G_c(S)$ , conduit à un phénomène similaire à celui du pompage où l'amplitude des oscillations est parfaitement contrôlable par les paramètres du relais. Cependant, la mesure de l'amplitude et la fréquence des oscillations peut être difficile en présence de bruits, ainsi un préfiltrage est nécessaire afin d'obtenir des résultats plus précis. Ces derniers sont utiles pour la détermination du régulateur convenable et éventuellement dans l'identification du modèle.

Pour les systèmes à retard qui se prêtent bien à ce genre de test, la technique est devenue révolutionnaire tant sur le plan de la synthèse [Astrom 1984] [4][5] que sur le plan de l'identification des systèmes depuis la publication de M.Luyben [1987][31][32][59].

Dans le cadre de ce travail, il nous a été proposé de combiner cette technique de commande à relais aux méthodes de synthèse des systèmes à retard, et plus spécialement le prédicteur de SMITH, dont la configuration est la suivante :

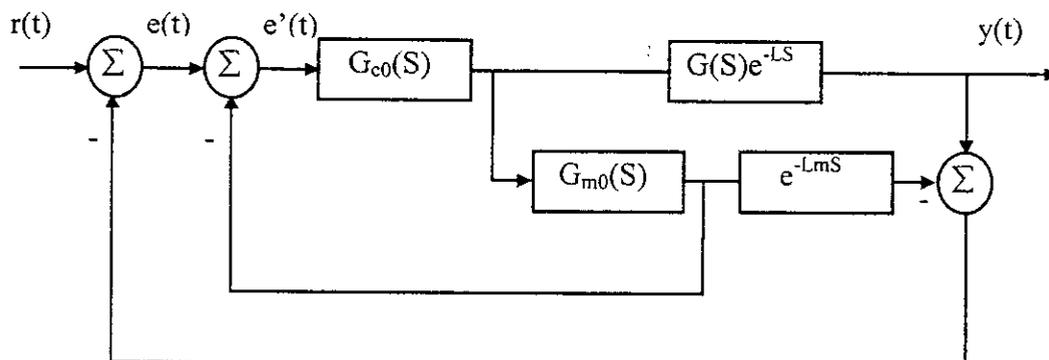


Fig 2 Configuration du prédicteur de Smith

A cause de la présence d'un modèle de représentation du procédé dans la configuration du prédicteur de SMITH, celui-ci présente une très grande sensibilité vis-

à-vis de la précision avec laquelle le modèle est obtenu. Par conséquent, l'emploi du prédicteur de Smith doit être précédé par une étude sérieuse de la sensibilité de celui-ci et les circonstances donnant lieu à une commande robuste. Il est bien connu que, l'adaptation continue des paramètres du modèle et/ou du régulateur, est généralement une opération coûteuse. Par conséquent, un auto-ajustage des régulateurs, tel que le prédicteur de Smith, effectué de temps en temps seulement lorsque c'est nécessaire, est plus recommandé dans les applications industrielles. Pour cela, une identification on-line des paramètres du modèle est nécessaire, où encore les paramètres critiques obtenus à partir de test à relais sont exploités pour estimer un modèle convenable. L'approximation au modèle du premier ordre est imposée par le nombre de tests de relais à réaliser ainsi que la pratique de la méthode.

L'efficacité et la simplicité de la technique de la commande à relais, a conduit les gens à penser à sa généralisation aux cas des systèmes multivariables beaucoup plus complexes à commander à cause de l'existence de termes de couplage entre boucles. Pour de tels systèmes, le relais paraît être un outil de synthèse très puissant. Mais, une solution générale est loin d'être trouvée où le développement de techniques de test est encore en cours. Une technique de synthèse à boucle dominante sera présentée .

## **Contenu de la thèse**

Les performances de la régulation et les différentes configurations des régulateurs PID, ainsi que l'introduction du relais dans la commande, sont présentées au *chapitre I* tout en mettant l'accent sur la sensibilité des systèmes.

L'étude des systèmes à retard, l'effet de celui-ci et les difficultés engendrées par sa présence dans la commande ainsi que les méthodes de synthèses conventionnelles, sont investiguées dans le *chapitre II*.

*Le chapitre III* est réservé au prédicteur de SMITH, ses propriétés et sa robustesse.

L'étude de l'emploi de relais dans le prédicteur de SMITH et la synthèse du régulateur primaire en présence d'erreurs de modélisation du temps mort seulement, sont détaillées dans le *chapitre IV*.

L'identification d'un modèle du premier ordre à partir de test à relais pour chaque gamme de réglabilité du procédé à commander et le réglage on-line du prédicteur de SMITH, sont détaillés au *chapitre V*. où un prédicteur PI pour une spécification de marge de phase a été aussi développé. Les performances et la robustesse sont comparées avec celles obtenues par d'autres méthodes conventionnelles, telles que la méthode d'optimisation et celle de Ziegler-Nichols modifiée.

*Le chapitre VI* Présente une extension de la technique à relais et des méthodes développées aux cas des systèmes multivariables. Une technique de synthèse à boucle dominante est introduite .

Enfin et à la lumière des résultats de simulation, nous terminons par une discussion générale sur l'amélioration des performances et les perspectives des techniques présentées .

# Chapitre I

## Régulation Automatique et Commande à Relais

### 1.1 Introduction

Une des premières étapes dans la commande de processus est l'obtention d'un modèle mathématique à partir duquel, une analyse du comportement dynamique et statique est possible. Naturellement, la précision des résultats d'analyse dépend énormément de celle avec laquelle le modèle est obtenu. En effet, l'ignorance des effets physiques secondaires et des non-linéarités éventuellement présentes dans le procédé, conduit à un modèle qui ne reflète pas toutes les dynamiques du procédé. Par conséquent, la satisfaction de toutes les exigences de fonctionnement ne peut être obtenue en se basant seulement sur le modèle théorique. L'opération de synthèse consiste à modifier (en introduisant un régulateur généralement dynamique) le comportement dynamique des systèmes de façon à satisfaire au mieux les exigences imposées. Le succès de cette opération, réside dans la prise en compte des erreurs de modélisation citées ci-dessus. Ce qui a conduit au développement de plusieurs méthodes de synthèse des régulateurs. Ce chapitre constitue une introduction à l'analyse et la synthèse de régulateur en injectant intentionnellement une non-linéarité (*relais*) dans l'asservissement, ce qui engendre des oscillations limites. La stabilité de celles-ci est analysée par la méthode de l'équivalent harmonique. Nous commençons par un rappel

de la forme des spécifications des performances habituelles dans l'asservissement et la structure des régulateurs (PID) classiques, ainsi que la sensibilité des systèmes.

## 1.2 Performances de la régulation

Dans le cas des systèmes linéaires, ils sont complètement spécifiés par leur réaction à des entrées typiques tels que l'échelon unitaire. Il est possible d'exprimer les performances de l'asservissement en termes de spécifications temporelles ou fréquentielles sur la réponse en boucle fermée. Les spécifications les plus directes et les plus précises, doivent être exprimées dans le domaine temporel. Elles portent sur le temps de réponse, l'amortissement et l'erreur statique. Toutefois ces spécifications temporelles sont plus au moins translatées dans le domaine fréquentiel [44]. Elles donnent lieux aux spécifications sur la bande passante et le pic de résonance ou leurs équivalents en boucle ouverte telles que la marge de gain et la marge de phase. L'objectif de la régulation serait de garder ces grandeurs proches des valeurs désirées malgré les perturbations et la variation et/ou l'ignorance des dynamiques du procédé à commander. Ainsi, l'introduction d'un correcteur dans une boucle d'asservissement doit permettre :

- de stabiliser le système ou accroître sa stabilité
- d'augmenter sa précision et en particulier diminuer l'erreur statique
- d'augmenter sa bande passante
- de diminuer les distorsions entrées/sorties en générale.

Un asservissement idéal serait que la sortie suive exactement et sans retard la consigne imposée, ce qui exige une transmittance globale égale à 1. Une telle solution n'étant pas réalisable en pratique, il convient de rechercher un réseau correcteur physiquement réalisable qui permet de satisfaire aux mieux les objectifs précédents.

Il convient donc :

- d'éloigner le lieu de Nyquist en BO du point  $(-1,0)$  de façon à accroître la stabilité en augmentant la marge de phase et de gain.
- d'augmenter le gain de la chaîne de transmission, en particulier du côté des basses fréquences afin d'améliorer la précision.
- d'augmenter la bande passante en provoquant un tassement des fréquences du côté des gains élevés en BO, ce qui permet de limiter les distorsions tout en diminuant le temps de réponse.

- de provoquer une avance de phase des fréquences moyennes et éventuellement un retard du côté des fréquences basses, afin d'aider à la stabilisation et la diminution des distorsions.

Cependant, ces tâches sont énormément compliquées par la diversité des contraintes imposées sur les signaux d'entrées, les bruits de mesure, les erreurs de modélisation, la saturation des actionneurs et la complexité du régulateur. Ces contraintes sont rarement toutes prises en compte.

Les régulateurs les plus employés durant toutes ces années restent incontestablement les régulateurs PID, ceux-ci est dû à leur simplicité et leur robustesse [7][18][39]. Leur succès réside dans la nature même de leurs actions sur le système. Ces actions résultent d'une combinaison de l'effet de spontanéité (action proportionnelle), l'entraînement passé (action intégrale) et la projection dans le future (action dérivée) ce qui leur permet la réalisation des tâches précédentes.

Si la structure de ce type de régulateurs est généralement retenue, le choix des coefficients de pondération de ses trois actions (réglage du PID) constitue encore un sujet de recherche.

### **1.1 Réglabilité**

Cette notion concerne principalement les procédés ayant un retard pur, qui sont justement l'objet de notre étude.

On définit la réglabilité d'un système à partir de son essai indiciel en BO par le rapport  $\frac{L}{T}$  où L est le retard à la réaction et T sa constante de temps.

En pratique, le procédé sera d'autant plus facile à régler que ce rapport sera petit.

#### **Systemes de faibles réglabilités**

De tels systèmes ne posent aucun problème, toute action sur l'entrée provoque immédiatement une réaction en sortie ce qui facilite la régulation.

#### **Systemes de grandes réglabilités**

Si  $\frac{L}{T}$  est grand, il faut attendre un temps élevé comparativement à la constante de temps du procédé, pour qu'une entrée commence à agir sur la sortie. Si on cherche à augmenter la précision par les méthodes usuelles comme l'accroissement du gain ou l'intervention d'une action intégrale, on a de grands risques de déstabiliser le système. En effet :

- L'augmentation du gain permet d'accroître la correction en présence d'une erreur faible, mais l'action correspondante est tardive et brutale. Ce qui provoque en générale une inversion de signe de l'erreur et un accroissement important de son module sans possibilité d'action rapide à cause du retard.
- La mise en oeuvre d'une action intégrale permet d'augmenter le gain en basses fréquences ce qui améliore l'insensibilité du système. Cependant, à cause du retard, l'apparition d'une erreur intégrée pendant un temps assez long produit la génération d'un signal de commande important dont les effets peuvent être désastreux. Ce dernier effet peut être limité en réalisant un gel de l'action d'intégration lorsque le signal de commande dépasse un certain niveau [6] [56].

De tels procédés ne peuvent pas en général être réglés par de simple PID mais nécessitent des commandes plus complexes telle que le prédicteur de SMITH. Ce dernier ne présente pas une méthode de synthèse spéciale mais une nouvelle structure de régulation, toujours basée sur un régulateur primaire qui peut être un simple PI ou PID. Nous présentons ci-dessous les différentes structures du régulateur PID.

#### 1.4 Régulateurs PID

En pratique, il y a au moins six différentes configurations pour le PID :

$$\text{PID1} \rightarrow \bar{U}(S) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S \right) \bar{e}(S) \quad (1-1)$$

$$\text{PID2} \rightarrow \bar{U}(S) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i S} + \frac{T_d S}{1 + \frac{T_d S}{N}} \right) \bar{e}(S) \quad (1-2)$$

$$\text{PID3} \rightarrow \bar{U}(S) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i S} \right) (1 + T_d S) \bar{e}(S) \quad (1-3)$$

$$\text{PID4} \rightarrow \bar{U}(S) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i S} \right) \left( \frac{1 + T_d S}{1 + \frac{T_d S}{N}} \right) \bar{e}(S) \quad (1-4)$$

$$\text{PID5} \rightarrow \bar{U}(S) = K_p \left[ \left( 1 + \frac{1}{T_i S} \right) \bar{e}(S) - T_d S \cdot Y_r(S) \right] \quad (1-5)$$

$$\text{PID6} \rightarrow \bar{U}(S) = K_p \left[ \beta y_r(S) - \bar{y}(S) + \frac{1}{\mu T_i S} \bar{e}(S) - T_d S \cdot Y_r(S) \right] \quad (1-6)$$

$$\text{Où } Y_r(s) = \frac{Y(S)}{1 + \frac{T_d}{N} s} \quad \text{avec } N \approx 10 \quad \text{est la dérivée filtrée de } Y(s) \quad (1-7)$$

$\beta$  : facteur de réglage de l'action proportionnelle.

$\mu$  : facteur de réglage de l'action intégrale.

**PID1** : est le régulateur standard, sa structure est plutôt académique que pratique puisqu'il n'est pas réalisable, cependant il est le plus connu, ses paramètres peuvent être ajustés indépendamment.

**PID2** : c'est la version réalisable du PID1 obtenue en filtrant le bruit HF.

**PID3** : c'est la structure interactive du PID préférée pour les procédés à retard, son intérêt est qu'elle peut être interprétée comme :

$$\bar{U}(S) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i S} \right) (e^{T_d S}) \bar{E}(S) \quad (1-8)$$

donnant lieu à un PI avec une pure prédiction d'horizon  $T_d$  puisque

$$e^{T_d S} \approx (1 + T_d S) \quad (1-9)$$

**PID4** : c'est la version réalisable du PID3.

**PID5** : il permet d'éviter le changement brutal du signal de commande dû à l'action dérivée [3].

**PID6** : même que PID5 mais en tenant compte aussi du changement brutal du signal de commande dû à l'action proportionnelle [7].

Ces différentes configurations ont été introduites afin d'améliorer les performances des PID. Elles ont conduit au développement de plusieurs méthodes de synthèse en vue d'obtenir des performances plus au moins optimales. Une des vieilles méthodes de synthèse est celle de Ziegler-Nichols, celle-ci est basée exclusivement sur la connaissance du point critique  $(-1,0)$  dans le plan complexe.

D'autres méthodes de synthèse sont basées sur l'optimisation d'une certaine fonction de coût telle que l'IAE ou l'ITSE (voir page 34) ou sur des spécifications de marges de gain et de phase, cette dernière étant bien liée à l'amortissement du système. Pour cela, on définit :

$$\arg[G_c(j\omega_{cr})G(j\omega_{cr})] = -\pi \quad (1-10)$$

$$A_m = 1/|G_c(j\omega_{cr})G(j\omega_{cr})| \quad (1-11)$$

$$|G_c(j\omega_g)G(j\omega_g)| = 1 \quad (1-12)$$

$$\phi_m = \pi + \arg[G_c(j\omega_g)G(j\omega_g)] \quad (1-13)$$

En raison de la complexité de ces équations, une solution analytique n'est pas possible. Pour  $A_m$  et  $\phi_m$  prédéfinies, seules des solutions numériques ou graphiques sont disponibles [64].

Une autre alternative, assez souvent utilisée lorsqu'on peut représenter le procédé par un modèle simple, consiste à synthétiser le régulateur pour que la réponse en boucle fermée ait une forme désirée. Des spécifications temporelles telles que les dépassements tolérables de la réponse en boucle fermée peuvent être utilisées [47].

La fonction de transfert en Boucle fermée du système compensé figure 1 est donnée par:

$$H_r(s) = \frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{G_c(S)G(S)}{1 + G_c(S)G(S)} \quad (1-14)$$

Ce qui donne :

$$G_c(S) = \frac{1}{G(S)} \frac{Y(S)}{1 - \frac{Y(S)}{R(S)}} \quad (1-15)$$

où  $G(S)$  représente le modèle du procédé, alors que  $Y(s)$  est la réponse désirée en boucle fermée. Pour les systèmes à retard, objet de notre étude, la forme désirée de la fonction de transfert en boucle fermée la plus utilisée est :

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{\lambda e^{-LS}}{S + \lambda} \quad (1-16)$$

Où  $L$  est le temps mort du procédé à commander, et  $\lambda$  un paramètre de réglage lié à l'amortissement et la rapidité de la réponse désirée.

En remplaçant l'équation (1-16) dans l'équation (1-15), on aura un régulateur qui a la forme suivante :

$$G_c(S) = \frac{\lambda e^{-LS}}{S + \lambda(1 - e^{-LS})} \frac{1}{G(S)} \quad (1-17)$$

Le retard au numérateur compense celui du modèle  $G(S)$  et disparaît de  $G_c(S)$ . Alors que le terme  $(1 - e^{-LS})$  au dénominateur représente le retard du compensateur recommandé par Smith [chapitre III], plus connu sous le nom de prédicteur de Smith. Ce dernier était très peu utilisé lorsqu'on devait réaliser le modèle analogiquement. Ce qui a conduit les gens à accepter d'approximer le retard par :

$$e^{-LS} \approx 1 - LS \quad (1-18)$$

et l'équation (1-17) devient :

$$G_c(S) = \frac{1}{G(S)} \frac{\lambda e^{-LS}}{S(1 + \lambda L)} \quad (1-19)$$

Ce qui conduit à un gain du régulateur de la forme :

$$K_p = \frac{\lambda T}{K(1 + \lambda L)} \quad (1-20)$$

Où T est la plus grande constante de temps du procédé compensé par l'action intégrale du régulateur.

Cette formule confirme bien le fait que la présence de retard ( $L \neq 0$ ) réduit le gain maximal admissible du régulateur.

**N.B :** Le choix de la valeur de  $\lambda$  pour un procédé donné est très important et très délicat. Martin et Al [47] fournissent des courbes de corrélations de la valeur de  $\lambda$  en fonction des paramètres du procédé (1<sup>er</sup> ordre et 2<sup>ème</sup> ordre) pour des dépassements de 1% et 5%.

Cette valeur de  $\lambda$  est généralement comprise dans l'intervalle  $[0.5L, 1.5L]$ .

### 1.5 Robustesse

Pour qu'une synthèse puisse aboutir à un régulateur capable de bien jouer son rôle dans un environnement industriel, on doit spécifier au préalable :

- le modèle nominal du procédé à régler
- les limites de variation de ses paramètres
- les types d'entrées et notamment les perturbations
- les performances désirées.

Pour le premier point, le modèle nominal est obtenu à partir de données expérimentales résultantes de tests ne stimulant pas tout le comportement du procédé. En effet, le processus de modélisation n'est pas exact par nature et un degré d'approximation est toujours présent. Cette approximation peut être chiffrée par la distinction entre effets primaires pris en compte dans la représentation et effets secondaires négligés et bornés d'avance. Les considérations de linéarité ne sont valables que pour des conditions de fonctionnement bien définies, Si ces conditions changent le modèle change.

Il est aussi clair qu'on ne peut désigner un régulateur qui satisfait tous les types d'entrées de références et de perturbations, il convient donc de décider quelles entrées

entrées sont les plus fréquentes. Par conséquent, il est indispensable de faire la synthèse du régulateur de façon à ce que le système réglé soit stable et satisfasse certaines performances pour toute une famille de procédés. Cette dernière est définie par la variation des paramètres du modèle autour de leurs valeurs nominales. On parle alors de régulateur robuste ou de commande robuste. Théoriquement, on chiffre cette notion de robustesse par la valeur d'une fonction exprimant la dégradation des performances suite à une éventuelle variation des paramètres : c'est la fonction de sensibilité.

### 1.5.1 Fonction de sensibilité

Pour un asservissement du type de la figure 1, l'introduction de la fonction de sensibilité  $S_G^{H_r}(S)$  a pour objectif de chiffrer les variations que subi le système en boucle fermée  $H_r(S)$  suite aux variations des dynamiques du procédé  $G(S)$  à commander [28].

$$S_G^{H_r}(S) = \frac{\partial H_r(S)}{H_r(S)} \bigg/ \frac{\partial G(S)}{G(S)} \quad (1-21)$$

Si on note par  $k_i$ , le paramètre de  $G(S)$  susceptible de varier alors :

$$S_{k_i}^{H_r}(S) = \frac{\partial G(S)/G(S)}{\partial k_i/k_i} \frac{\partial H_r(S)/H_r(S)}{\partial G(S)/G(S)} \quad (1-22)$$

$$= S_{k_i}^G S_G^{H_r} \quad (1-23)$$

C'est la fonction de sensibilité relative au paramètre  $k_i$ .

Dans le cas de la figure 1, on aura :

$$S_G^{H_r}(S) = \frac{1}{1 + G_c(S)G(S)} \quad (1-24)$$

En pratique, la fonction de sensibilité est utilisée pour lier les réponses fréquentielles et temporelles du système aux changements des pôles et des zéros. Elle peut être mesurée aussi par le rejet des perturbations extérieures. Toutefois, l'analyse de la sensibilité en automatique ne représente pas une méthode de synthèse, de plus elle ne peut prendre en considération les grandes variations.

### 1.5.2 Réduction de la fonction sensibilité

Plusieurs techniques ont été utilisées afin de réduire la sensibilité des systèmes aux grandes variations. Une des plus simples techniques, utilise le lieu des racines. Celle-ci exploite le fait que les pôles du système proches des zéros tendent à être moins sensibles aux variations des dynamiques du procédé. C'est une technique graphique qui permet de placer les pôles dominants désirés proches des zéros ou du moins limiter une région dans le plan complexe pour le placement des pôles. Cela n'est pratique que pour les systèmes d'ordres réduits où la dominance de certains pôles est bien claire.

Une considération générale, consiste à faire une synthèse robuste en spécifiant les limites de variations des paramètres [27][49].

### 1.6 Commande à relais

Un relais est un organe physique essentiellement non linéaire dont la sortie possède une grandeur constante et indépendante de l'entrée, son signe dépend de celui de l'entrée. Son utilisation dans la commande figure1-1 est très répandue pour la génération des auto-oscillations surtout dans les systèmes électromécaniques. La caractéristique entrée-sortie du relais est contraire au principe d'homogénéité des systèmes linéaires. Elle ne peut être linéarisable à moins de faire une certaine approximation sur la sortie.

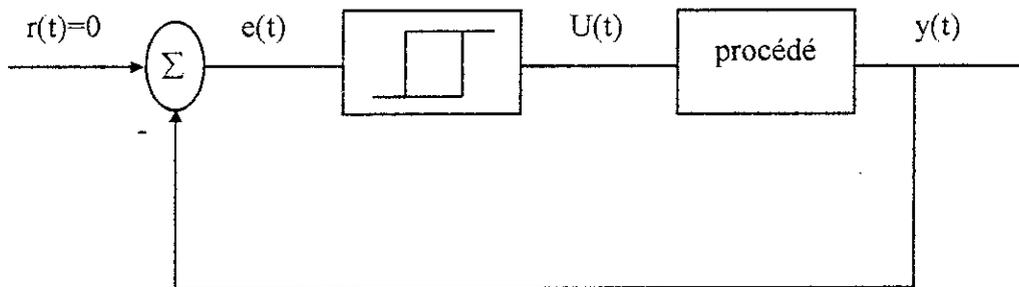


fig 1-1 Système sous test à relais

#### 1.6.1 L'approximation de l'équivalent harmonique

Si on applique une entrée sinusoïdale à un relais idéal selon la figure1-1, la sortie est une fonction en créneaux de même période que l'entrée [38]. La caractéristique est symétrique impaire pour une entrée :

$$e(t) = a \cos(\omega t) \quad (1-25)$$

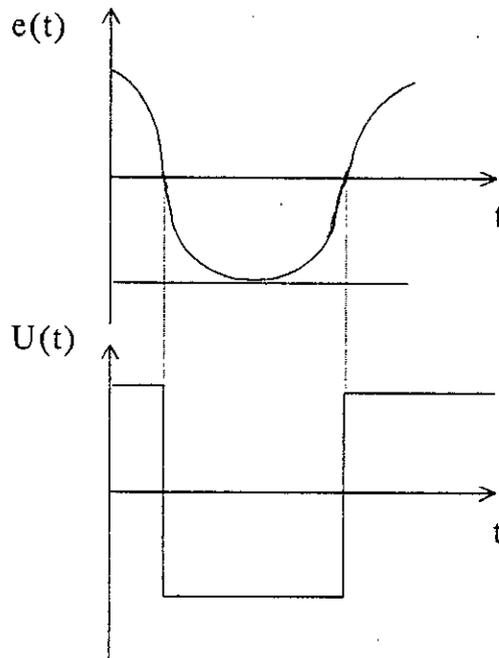


Fig 1-2 Formes des signaux entrée- sortie dans un relais

Le coefficient du premier harmonique de  $U(t)$  est donné par :

$$U_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(\omega t) \cos(\omega t) d(\omega t) \quad (1-26)$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} U(\theta) \cos(\theta) d\theta \quad (1-27)$$

Si on assimile  $U(t)$  à son premier harmonique :

$$U(t) \approx U_1 \cos \theta \quad (1-28)$$

On peut définir [13][38] alors une fonction de transfert pour le relais comme étant:

$$N(a) = \frac{U_1}{a} \quad (1-29)$$

$$= \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} U(\theta) \cos(\theta) d\theta \quad (1-30)$$

$N(a)$  est appelé ainsi gain équivalent

Si la caractéristique entrée - sortie du relais est donnée par :

$$U = n(e) = \pm M \quad (1-31)$$

et en faisant le changement de variable suivant :

$$e = a \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{e}{a} \quad (1-32)$$

On aura :

$$N(a) = \frac{4}{a^2} \int_0^a e.n(e)p(e)de \quad (1-33)$$

$$\text{avec : } p(e) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - e^2}} \quad (1-34)$$

$p(e)$  s'appelle amplitude de la densité de probabilité de la sinusoïde [13]. Son emploi permet de faciliter les calculs. Par exemple, si on veut faire une intégration par partie :

$$\begin{aligned} N(a) &= \frac{4}{a\pi} n(0^+) \\ &= \frac{4M}{a\pi} \end{aligned} \quad (1-35)$$

Généralement, dans un relais la relation entrée-sortie n'est pas univoque et la caractéristique a la forme d'une boucle d'hystérésis.

Dans ce cas le premier harmonique est donné par :

$$U(t) = U_0(=0) + U_{1a}\text{Cos}\omega t + U_{1b}\text{Sin}\omega t \quad (1-36)$$

La caractéristique du relais est définie par :

$$U = \begin{cases} n_1(e) & \text{pour } \frac{de}{dt} > 0 \\ n_2(e) & \text{pour } \frac{de}{dt} < 0 \end{cases} \quad (1-37)$$

encore :

$$\begin{aligned} U_{1a} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi U(\theta)\text{Cos}\theta d\theta \\ U_{1b} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi U(\theta)\text{Sin}\theta d\theta \end{aligned} \quad (1-38)$$

Le gain équivalent devient complexe :

$$\begin{aligned} N(a) &= \frac{1}{a}(U_{1a} - jU_{1b}) \\ &= N_p(a) + jN_q(a) \end{aligned} \quad (1-39)$$

Les valeurs de  $N_p(a)$  et  $N_q(a)$  sont données par [13][38]:

$$N_p = \frac{4M}{a\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{a}\right)^2} \quad (1-40)$$

$$N_q = \frac{-4Mh}{\pi a^2}$$

le lieu critique défini par  $C(a) = -\frac{1}{N(a)}$  est donné par :

$$-\frac{1}{N(a)} = -\frac{a\pi}{4M} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{a}\right)^2} - j\frac{h\pi}{4M} \quad (1-41)$$

### 1.6.2 Précision de l'équivalent harmonique

Afin de prouver que la méthode de l'équivalent harmonique représente la meilleure linéarisation possible de la caractéristique du relais, On la compare à une quasilinearisation de celle-ci.

Une quasilinearisation du relais conduit à :

$$\frac{U(\theta)}{e(\theta)} \approx K_n e^{j\phi} \quad \text{ou} \quad U(\theta) = K_n a \cos(\theta + \phi) \quad (1-42)$$

Où  $\phi$  est le déphasage dû à la présence de l'hystérésis  $h$ .

On définit l'erreur commise entre l'approximant de l'équivalent du premier harmonique par rapport à une quasilinearisation par :

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= N(a \cos \theta) - K_n a \cos(\theta + \phi) \\ &= U(\theta) - K_n a \cos(\theta + \phi) \end{aligned} \quad (1-43)$$

qui se réduit lorsque le relais est dépourvu d'hystérésis (juste pour la simplification) à :

$$\sigma(\theta) = U(\theta) - K_n a \cos \theta \quad (1-44)$$

Si on devait choisir  $K_n$  de façon à avoir une erreur minimale, on utiliserait le fameux critère des moindres carrés.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U(\theta) - K_n a \cos \theta)^2 d\theta \end{aligned} \quad (1-45)$$

Ainsi, le meilleur gain  $K_n$  de quasilinearisation est obtenu en minimisant l'intégral  $I$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I}{\partial K_n} &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(U(\theta) - K_n a \cos \theta)(-a \cos \theta) d\theta &= 0 \\
 \Rightarrow \int_0^{2\pi} U(\theta) \cos \theta d\theta &= K_n a \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = K_n a \pi \\
 \Rightarrow K_n &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} U(\theta) \cos \theta d\theta = N(a)
 \end{aligned}
 \tag{1-46}$$

On voit bien que, le gain équivalent  $N(a)$  est celui qui minimise l'erreur entre la sortie  $U(\theta) = N(a)a \cos \theta$  et la sortie trouvée par une quasilinearisation  $U(\theta) = K_n a \cos \theta$ . Ainsi, l'approximant de l'équivalent harmonique d'une non-linéarité est meilleur que toute autre quasilinearisation [13].

### 1.6.3 Champ de validité de l'équivalent harmonique

Il est clair que l'approche est justifiable si et seulement si la fréquence du premier harmonique est dans la bande passante du système. Ceci est en accord avec les systèmes ayant une caractéristique filtre.

De plus l'absence d'harmoniques de rangs paires dans le développement d'une caractéristique symétrique d'un relais (sans biais) favorise grandement l'application de l'approche.

### 1.6.4 Stabilité de l'équivalent harmonique

En appliquant le critère de revers au système de la figure 1-1, où l'équation caractéristique est donnée par :

$$\begin{aligned}
 1 + G(S).N(a) &= 0 \\
 \Rightarrow G(S) &= -\frac{1}{N(a)} = C(a)
 \end{aligned}
 \tag{1-47}$$

Lorsque l'amplitude de l'entrée du relais est constante  $a = a_0$ ,  $C(a_0)$  est un nombre fixe (complexe en présence d'hystérésis), la stabilité du système se ramène ainsi au cas d'asservissement linéaire par rapport au point critique  $C(a_0)$ . Maintenant, si  $a$  varie, le lieu  $C(a)$  obtenu est appelé lieu de transfert du point critique ou simplement le lieu critique. Par conséquent, l'intersection du lieu  $G(S)$  avec le lieu critique  $C(a)$  délimite la région de stabilité de celle de l'instabilité.

En présence d'hystérésis,  $C(a)$  possède une partie imaginaire négative et indépendante de  $a$ , ainsi le lieu  $C(a)$  est une droite parallèle à l'axe réel.

**Remarque**

- On tient à souligner que dans ce cas, la stabilité est relative par rapport à la valeur de  $a$ .
- L'intersection des deux lieux  $G(j\omega)$  et  $C(a)$  détermine la fréquence et l'amplitude de l'oscillation limite, elle constitue une limite entre les deux régions d'amplitudes de stabilité et d'instabilité.
- Si pour une gamme de variation de  $a$ , il n'y a pas d'intersection entre les deux lieux, la stabilité peut être étudiée par le nombre de fois que le lieu de Nyquist entoure les points  $C(a)$ .

**1.6.4.1 Critère de Loeb**

L'oscillation limite obtenue comme l'intersection des lieux  $G(j\omega)$  et  $C(a)$  possède une amplitude et une fréquence  $(a_0, \omega_{cr})$ , qui peuvent être déterminées analytiquement par la résolution de l'équation caractéristique du système :

$$1 + N(a)G(j\omega) = 0 \tag{1-48}$$

qui peut être écrite comme :

$$X(\omega, a) + jY(\omega, a) = 0 \tag{1-49}$$

Le principe affirme que l'étude de la stabilité d'une solution périodique se détermine par l'effet d'une petite perturbation sur cette solution, tout en considérant les variations possibles des paramètres agissant sur la solution [38]. Ainsi, l'effet d'une perturbation est de transformer l'oscillation  $e = a_0 e^{j\omega_{cr}t}$  en une autre fonction d'amplitude légèrement différente  $a_0 + \Delta a$  et de pulsation légèrement différente  $\omega_{cr} + \Delta\omega$ , affectée d'un léger amortissement (ou amplification)  $\sigma$ .

En d'autres termes, on peut supposer qu'à un moment donné l'oscillation perturbée est de la forme :

$$e(t) = \left[ (a_0 + \Delta a) e^{j(\omega_{cr} + \Delta\omega)t} \right] e^{-\sigma t} = \left[ (a_0 + \Delta a) e^{j(\omega_{cr} + \Delta\omega + j\sigma)t} \right] \tag{1-50}$$

En reportant les accroissements considérés dans l'équation caractéristique :

$$X(\omega_0 + \Delta\omega + j\sigma, a_0 + \Delta a) + jY(\omega_0 + \Delta\omega + j\sigma, a_0 + \Delta a) = 0 \tag{1-51}$$

Si on se limite au premier terme du développement de Taylor autour de la solution  $(a_0, \omega_{cr})$ , on aura :

$$\frac{\partial X}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial X}{\partial \omega} \Delta \omega + j \frac{\partial X}{\partial \omega} \sigma + j \frac{\partial Y}{\partial \omega} \Delta \omega - \frac{\partial Y}{\partial \omega} \sigma + j \frac{\partial Y}{\partial a} \Delta a = 0 \quad (1-52)$$

Autrement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial X}{\partial \omega} \Delta \omega - \frac{\partial Y}{\partial \omega} \sigma &= 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial Y}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial X}{\partial \omega} \sigma &= 0 \end{aligned} \quad (1-53)$$

En éliminant  $\Delta \omega$  entre ces deux équations, on aura :

$$\left[ \left( \frac{\partial X}{\partial \omega} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)^2 \right] \sigma = \left[ \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial X}{\partial \omega} \frac{\partial Y}{\partial a} \right] \Delta a \quad (1-54)$$

Or, pour qu'une oscillation limite  $(a_0, \omega_{cr})$  soit stable, il faut qu'une variation  $\Delta a$  positive conduit à un  $\sigma$  positive et vice versa. C'est-à-dire lorsque son amplitude augmente au delà de  $a_0$  ( $\Delta a > 0$ ), elle tend à s'amortir ( $\sigma > 0$ ) et inversement.

Autrement dit,  $\Delta a$  et  $\sigma$  doivent avoir le même signe, ce qui conduit à :

$$\frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial X}{\partial \omega} \frac{\partial Y}{\partial a} > 0 \quad (1-55)$$

si on a :

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \quad (1-56)$$

$$C(a) = P(a) + jQ(a)$$

d'où :

$$X(\omega, a) = U(\omega) - P(a) \quad (1-57)$$

$$Y(\omega, a) = V(\omega) - Q(a)$$

la condition de stabilité devient :

$$\frac{\partial U}{\partial \omega} \frac{\partial Q}{\partial a} - \frac{\partial V}{\partial \omega} \frac{\partial P}{\partial a} > 0 \quad (1-58)$$

Cela veut dire que le produit vectoriel :

$$\frac{dG(j\omega)}{d\omega} \wedge \frac{dC(a)}{da} \quad \text{doit être positif.}$$

Autrement dit, l'oscillation  $(a_0, \omega_{cr})$  est stable si l'intersection est telle que, en parcourant le lieu de Nyquist  $G(j\omega)$  dans le sens des fréquences croissantes, on laisse à sa gauche la direction des amplitudes croissantes sur le lieu  $C(a)$ .

#### 1.6.4.2 Système à retard

Dans notre étude qui porte sur les systèmes à retard, on doit chiffrer l'effet de la présence de retard dans le procédé  $G(S)$  sur les oscillations. Or cet effet se caractérise essentiellement (figure 1-3), par l'introduction d'un déphasage  $\phi = -\omega L$  qui peut être significatif aux hautes fréquences.

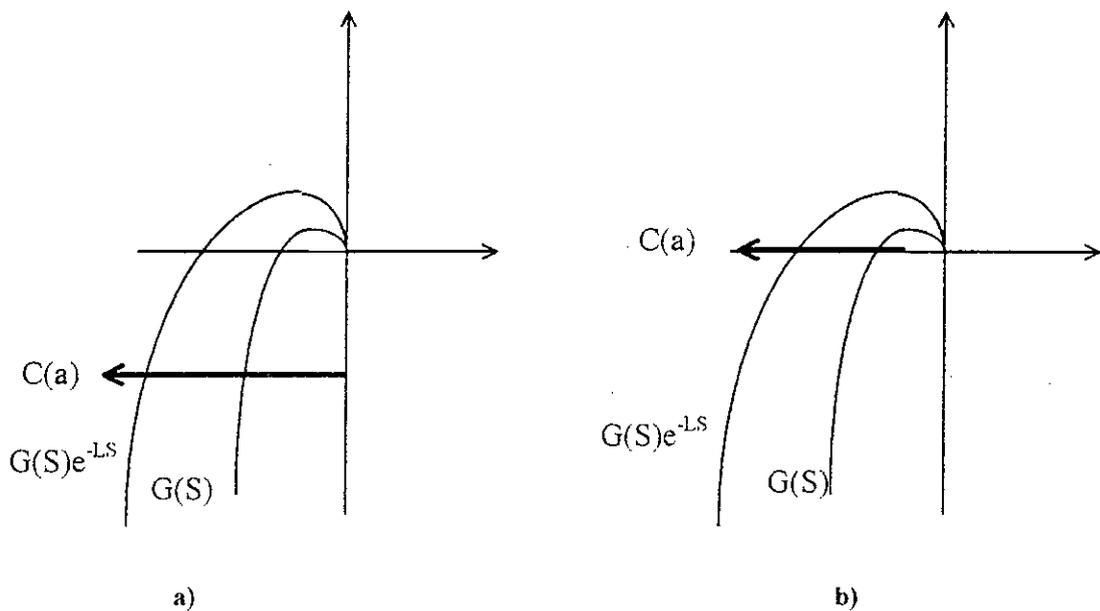


Fig 1-3 Lieu de Nyquist de système sous test à relais et effet de retard

On constate que, la présence de retard augmente l'amplitude de l'oscillation limite et diminue sa fréquence. Par conséquent, si un cycle limite est prédit d'être stable par le critère de Loeb, il peut être instable en présence de retard. Ceci est dû au fait que la perturbation considérée peut tomber dans la région instable [13].

De plus, la méthode de Loeb peut être invalide en présence de plusieurs cycles limites [chapitre IV]. L'avantage du critère réside dans sa facilité d'application avec l'approche de l'équivalent harmonique. D'autres méthodes plus exactes (Hamel, Cypkin ...) [38], peuvent être appelées pour analyser la stabilité des oscillations, mais leurs applications à la détermination exacte de la solution  $(\omega_{cr}^*, a^*)$  restent difficiles.

### Gain équivalent incrémental

Dans le cas de la régulation en présence de perturbation constante  $\gamma$ , on peut être amené à considérer une entrée de référence constante, ce qui revient à supposer que le relais est sous une entrée [13] de la forme :

$$e(t) = \gamma + a \cos \theta \quad (1-59)$$

où  $\gamma$  est un signal d'erreur constant

La sortie du relais qui est périodique, peut être développée en séries de Fourier dont les coefficients du premier harmonique sont :

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\theta) d\theta && \text{(composante continue)} \\ U_{1a} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\theta) \cos \theta d\theta \\ U_{1b} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\theta) \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (1-60)$$

Dans ce cas, le gain équivalent aura deux composantes, l'une appelée  $N(a, \gamma)$  correspondante à la sinusoïde  $a \cos \theta$  et l'autre  $N_\gamma(a, \gamma)$  résultante de la présence de  $\gamma$ , toutes les deux, fonction de  $a$  et  $\gamma$ .

On a :

$$N_\gamma(a, \gamma) = \frac{U_0}{\gamma} \quad (1-61)$$

$$\begin{aligned} N(a, \gamma) &= \frac{1}{a} (U_{1a} - jU_{1b}) \\ &= N_p(a, \gamma) + jN_q(a, \gamma) \end{aligned} \quad (1-62)$$

En l'absence de  $\gamma$  et dans le cas d'une parfaite symétrie du relais, la composante continue  $U_0$  du signal de sortie  $U(\theta)$  est nulle. Donc  $U_0$  constitue le déplacement de la moyenne de la sortie causé par la présence de  $\gamma$ . Autrement dit,  $U_0$  mesure la stabilité de l'oscillation en présence d'une perturbation constante  $\gamma$ . D'où l'intérêt de l'étude de la fonction :

$$g(a, \gamma) = \frac{dU_0}{d\gamma} \quad (1-63)$$

Dont la limite lorsque  $\gamma \rightarrow 0$  donne le gain à n'importe quelle petite perturbation indépendante du signal  $a \cos \theta$ . Cette limite est appelée le gain équivalent incremental (IDF) et noté  $N_{iv}(a)$ , il est donné par :

$$N_{iv}(a) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} g(a, \gamma) \quad (1-64)$$

Une relation générale très importante permettant de calculer  $N_{iv}(a)$  à partir de  $N(a)$  peut être démontrée dans le cas simple de relais idéal et qui reste valable pour un relais à hystérésis [13]. Ainsi pour un relais idéal :

$$\begin{aligned} N_{iv}(a) &= g(a, 0) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{d}{d\gamma} \int_{-a}^a n(e + \gamma) p(e) de \\ &= \int_{-a}^a n'(e) p(e) de \end{aligned} \quad (1-65)$$

où 
$$n'(e) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{dn(e + \gamma)}{d\gamma} \quad \text{et} \quad p(e) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - e^2}} \quad (1-66)$$

Or :

$$\begin{aligned} N(a) &= \frac{4}{a^2} \int_0^a en(e) p(e) de \\ &= \frac{2}{a^2} \int_{-a}^a en(e) p(e) de \end{aligned} \quad (1-67)$$

Après intégration par partie, on aura :

$$\begin{aligned} N(a) &= \frac{2}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - e^2) n'(e) p(e) de \\ a^2 N(a) &= \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a n'(e) (a^2 - e)^{1/2} de \end{aligned} \quad (1-68)$$

En dérivant les deux membres par rapport à  $a$ , on aura :

$$\begin{aligned} a^2 \frac{dN(a)}{da} + 2aN(a) &= 2a \int_{-a}^a n'(e) p(e) de \\ \Rightarrow N_{iv}(a) &= N(a) + \frac{a}{2} N'(a) \end{aligned} \quad (1-69)$$

Des calculs simples montrent que si :

$$N(a) = \frac{4M}{a\pi} \quad (1-70)$$

ou

$$N(a) = \frac{4M}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{a}\right)^2} - j \frac{4M}{\pi} \frac{h}{a^2} \quad (1-71)$$

On aura respectivement [13] :

$$N_{iy}(a) = \frac{2M}{\pi a} \quad (1-72)$$

ou

$$N_{iy}(a) = \frac{2M}{\pi} \frac{1}{(a^2 - h^2)^{1/2}} \quad (1-73)$$

Puisque  $N_{iy}(a)$  représente le gain du relais à toute petite perturbation constante  $\gamma$ , il peut donc être utile pour l'étude de la stabilité [Chapitre IV].

*Normalement plus  $N_{iy}(a)$  est faible plus l'oscillation est stable.*

**N.B :**

En pratique, il est injustifiable de considérer une perturbation constante et indépendante de l'oscillation. Toutefois, si on considère une petite perturbation quelconque  $\delta(t)$  corrélée à l'entrée  $e(t)$  telle que :

$$\delta(t) = b \cos(\theta + \phi). \quad (1-74)$$

Le gain incrémental équivalent relatif à l'amplitude  $b$  de la perturbation, peut être obtenu à partir de la relation suivante [13].

$$N_{ib}(a) = N(a) + \frac{a}{2} N'(a) (1 + e^{-j2\phi}). \quad (1-75)$$

Où  $\phi$  est le déphasage possible entre  $\delta(t)$  et  $e(t)$ .

## 1.7 Conclusion

Contrairement à ce qu'il y a dans le test de Ziegler-Nichols, on peut dire que l'emploi de relais dans la commande selon la figure 1-1 est très utile pour amener le système à la limite de stabilité de façon contrôlable. Dans ce test, une simple mesure de l'amplitude et de la période des oscillations est possible après filtrage. Ces mesures constituent les paramètres critiques du système, elles sont nécessaires pour l'analyse et la synthèse de régulateur convenable (chapitre suivant). On verra que ces paramètres peuvent être aussi très utiles dans l'identification de modèles des procédés. On note aussi la simplicité de la méthode de l'équivalent harmonique qui conduit à de puissants outils d'analyse de la stabilité des oscillations limites. La validité de celle-ci concerne bien la plupart des procédés industriels.

# Chapitre II

## Méthodes de Synthèse Conventionnelles pour les Systèmes à Retard

### 2.1 Introduction

La présence de retard dans la plupart des procédés industriels, fait que ces systèmes réagissent aux sollicitations d'entrées qu'après un certain temps équivalent à ce retard. L'existence de cet effet n'est pas contraire au principe de superposition, mais la non-instantanéité qu'elle exprime ne conduit pas à des équations différentielles à coefficients constants. Alors que dans l'étude des systèmes à constantes localisées, les phénomènes sont supposés se propager à une vitesse infinie. Ainsi, le retard conduit à des systèmes plus difficiles à étudier mathématiquement. En effet, l'objectif de ce chapitre est de présenter une analyse des effets de la présence de retard dans les systèmes ainsi que les difficultés engendrées dans la commande. Nous rappelons aussi les méthodes les plus utilisées jusqu'à maintenant pour la synthèse de tels systèmes, en commençant par les tentatives d'élimination de retard des fonctions de transfert.

### Analyse fréquentielle

Le lieu de transfert d'un système à retard  $G_0(S)e^{-LS}$ , montre que :

$$\begin{aligned} |G_0(S)e^{-LS}| &= |G_0(S)| \\ \arg(G_0(S)e^{-LS}) &= \arg(G_0(S)) - \omega L \end{aligned} \quad (2-1)$$

Ainsi, le retard  $L$  entraîne un déphasage égal à  $-\omega L$ . Si la fréquence de coupure  $\omega_{cr}$  du système est élevée, le déphasage introduit dans la région critique, est important et le système à retard peut être instable.

## 2.2 Effet du retard dans la commande

La difficulté de commander un système à retard est due :

- Au fait que le correcteur ne voit pas l'effet de sa correction immédiatement. Après une action corrective de celui-ci, l'erreur reste inchangée durant un temps égal au retard, pendant que la sortie non corrigée est asservie au correcteur. Ce dernier, génère d'autres actions correctives et tend à sur-corriger le système pour une erreur donnée. Ce qui montre l'effet déstabilisant du retard [14][52].
- A l'analyse de la stabilité, où presque toutes les techniques développées concernent les systèmes dont la fonction de transfert est rationnelle ou une réalisation équivalente.

En considérant le système asservi standard de la figure 1 où  $G(S) = G_0(S)e^{-LS}$  la fonction de transfert en boucle fermée est donnée par :

$$H_r(S) = \frac{G_c(S)G_0(S)e^{-LS}}{1 + G_c(S)G_0(S)e^{-LS}} \quad (2-2)$$

Pour l'étude de la stabilité, on montre [13] qu'un système à retard tout comme celui sans retard, est stable si tous ses pôles sont à parties réelles négatives. C'est-à-dire, il faut que les racines de l'équation caractéristique ci-dessous soient à parties réelles négatives.

$$1 + G_c(S)G_0(S)e^{-LS} = 0 \quad (2-3)$$

Or lors du développement du terme  $e^{-LS}$  en séries de Maclaurin :

$$e^{-LS} = 1 - LS + \frac{(LS)^2}{2!} - \frac{(LS)^3}{3!} + \dots \quad (2-4)$$

l'équation caractéristique aura un nombre infini de racines. Ce qui complique l'analyse de la stabilité du système en boucle fermée sans une simplification au préalable.

## 2.3 Elimination du retard

### 2.3.1 Méthode directe

A première vue, une solution approchée consiste à faire une troncature dans le développement en série de  $e^{-LS}$  et se contenter de l'approximation au premier degré.

$$e^{-LS} \approx 1 - LS \approx \frac{1}{1 + LS} \quad (2-5)$$

Ainsi on approxime un retard pur par une constante de temps, or ceci n'est acceptable que si L est très faible devant la constante de temps du système [37].

### 2.3.2 Méthode d'approximation

Une alternative consiste à tronquer le développement de  $e^{-LS}$  à un certain degré élevé pour une meilleure approximation. Ce qui permet de représenter le système à retard par une fonction de transfert rationnelle mais de très grand degré, puis la simplifier généralement au sens de Padé [21].

#### 2.3.2.1 Méthode des moments

Parmi les méthodes d'approximation par les moments, nous avons choisi la version proposée par Zakian et Al-Swaha [16][21] initialement développée pour la réduction des fonctions de transfert.

##### Principe

Après approximation du terme  $e^{-LS}$  au sens de padé, la fonction de transfert du système à retard aura un ordre élevé.

Supposons que :

$$G(S) = G_0(S)e^{-LS} = A(S)/B(S) \quad (2-6)$$

où

$$\begin{aligned} A(S) &= \sum_0^k a_{i+1} S^i \\ B(S) &= \sum_0^l b_{i+1} S^i \end{aligned} \quad \text{avec } l > k \quad (2-7)$$

Si on veut approximer  $G_0(S)e^{-LS}$  par une fonction rationnelle  $G'(S) = A'(S)/B'(S)$

où

$$\begin{aligned} A'(S) &= \sum_0^m a'_{i+1} S^i \\ B'(S) &= \sum_0^n b'_{i+1} S^i \end{aligned} \quad \text{avec } n > m \quad (2-8)$$

pour que  $G'(S)$  soit une approximation de  $G(S)$ , il faut que :

- $n < l$  ou de préférence  $n \ll l$ .
  - $[g(t) - g'(t)]$  converge rapidement vers 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ .
  - $|g(t) - g'(t)| \ll \varepsilon$  pour tout  $t \in [0, \infty]$ .
- (2-9)

où  $g(t)$  et  $g'(t)$  sont les réponses impulsionnelles de  $G(S)$  et  $G'(S)$  et  $\varepsilon$  un nombre positif infiniment petit.

Ce critère de convergence est mieux défini par l'expression des moments comme suit :

$$M_k(g-g') = 0 \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, (m+n) \quad (2-10)$$

Où :

$$M_k(f(t)) = \int_0^\infty t^k f(t) dt \quad \text{définit le } k^{\text{ième}} \text{ moment de } f(t) \quad (2-11)$$

$g'(t)$  est le meilleur approximant au sens des moments si et seulement si elle satisfait l'équation 2-10 et  $m$  est le plus grand entier inférieur à  $n$ , où ce dernier est un entier préfixé.

Il a été montré [16] que si  $G'(S)$  est le  $m/n$  approximant de Padé de  $G(S)$  et elle est asymptotiquement stable alors l'équation 2-10 est vérifiée.

### Développement

Le développement de  $G(S)$  en séries de Maclaurin au voisinage de 0 est possible si elle est analytique en  $S = 0$  [16][21].

$$G(S) = \frac{\sum_0^k a_{i+1} S^i}{\sum_0^i b_{i+1} S^i} = \sum_0^\infty g_{i+1} S^i \quad (2-12)$$

où  $g_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (g_j b_{i-j+1})$  avec  $i = 2, 3 \dots (m+n+1)$  (2-13)

avec  $g_i = (-1)^i \frac{d^i G(S)}{dS^i} \Big|_{s=0}$  (2-14)

$$\begin{aligned} g_1 &= a_1 \\ b_1 &= 1 \end{aligned} \quad (2-15)$$

Les coefficients des polynômes  $A'(S)$  et  $B'(S)$  sont calculés en fonction des coefficients  $g_i$ , à partir des deux équations [16] ci-dessous :

$$z = Vy \quad (2-16)$$

$$Wx = u \quad (2-17)$$

tel que :

$$V = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_m & g_{m-1} & \dots & \dots & g_1 \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} g_{m+1} & g_m & \dots & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_{m+2} & g_{m+1} & \dots & \dots & g_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{m+n} & g_{m+n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & g_{m+1} \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} (a'_2 - g_2) \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ (a'_{m+1} - g_{m+1}) \end{pmatrix} ; y = \begin{pmatrix} b'_2 \\ b'_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ b'_m \\ b'_{m+1} \end{pmatrix} \quad (2-18)$$

$$u = - \begin{pmatrix} g_{m+2} \\ g_{m+3} \\ \bullet \\ \bullet \\ g_{m+n+1} \end{pmatrix} ; x = \begin{pmatrix} b'_2 \\ b'_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ b'_{n+1} \end{pmatrix}$$

**N.B :** Il a été montré [16][21] que le modèle réduit (obtenu) est stable, toutefois on peut confirmer ceci par un test de Routh.

### 2.3.2.2 Exemples d'approximations

Nous avons pris quelques exemples de différentes dynamiques afin de tester la réduction aux 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordres par la méthode des moments. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau ci-dessous. Alors que les courbes d'approximation sont montrées dans les figures ci-après. Nous constatons que la réduction au 1<sup>er</sup> ordre ne conduit pas à des résultats satisfaisants. L'amélioration de ces résultats exige un degré supérieur d'approximation, mais l'apparition de zéros instables rend celle-ci inutile.

Exemples	Approximant 1 <sup>er</sup> ordre	Approximant 2 <sup>ème</sup> ordre
1°) $\frac{2e^{-2s}}{(s+1)(s+2)}$	$\frac{0.286}{0.286+s}$	$\frac{0.475-0.46s}{0.475+1.201s+s^2}$
2°) $\frac{2e^{-1.29s}}{1+2.32s}$	$\frac{0.554}{0.277+s}$	$\frac{1.201-0.718s}{0.601+1.201s+s^2}$
3°) $\frac{e^{-2s}}{1+8s}$	$\frac{0.1}{0.1+s}$	$\frac{0.119-0.115s}{0.119+1.08s+s^2}$
4°) $\frac{e^{-5s}}{1+s}$	$\frac{0.167}{0.167+s}$	$\frac{0.165-0.314s}{0.165+0.675s+s^2}$
5°) $\frac{1}{(0.1s+1)(0.5s+1)(s+1)}$	$\frac{0.625}{0.625+s}$	////////////////////

tab 2-1 Procédés et leurs approximants 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordres

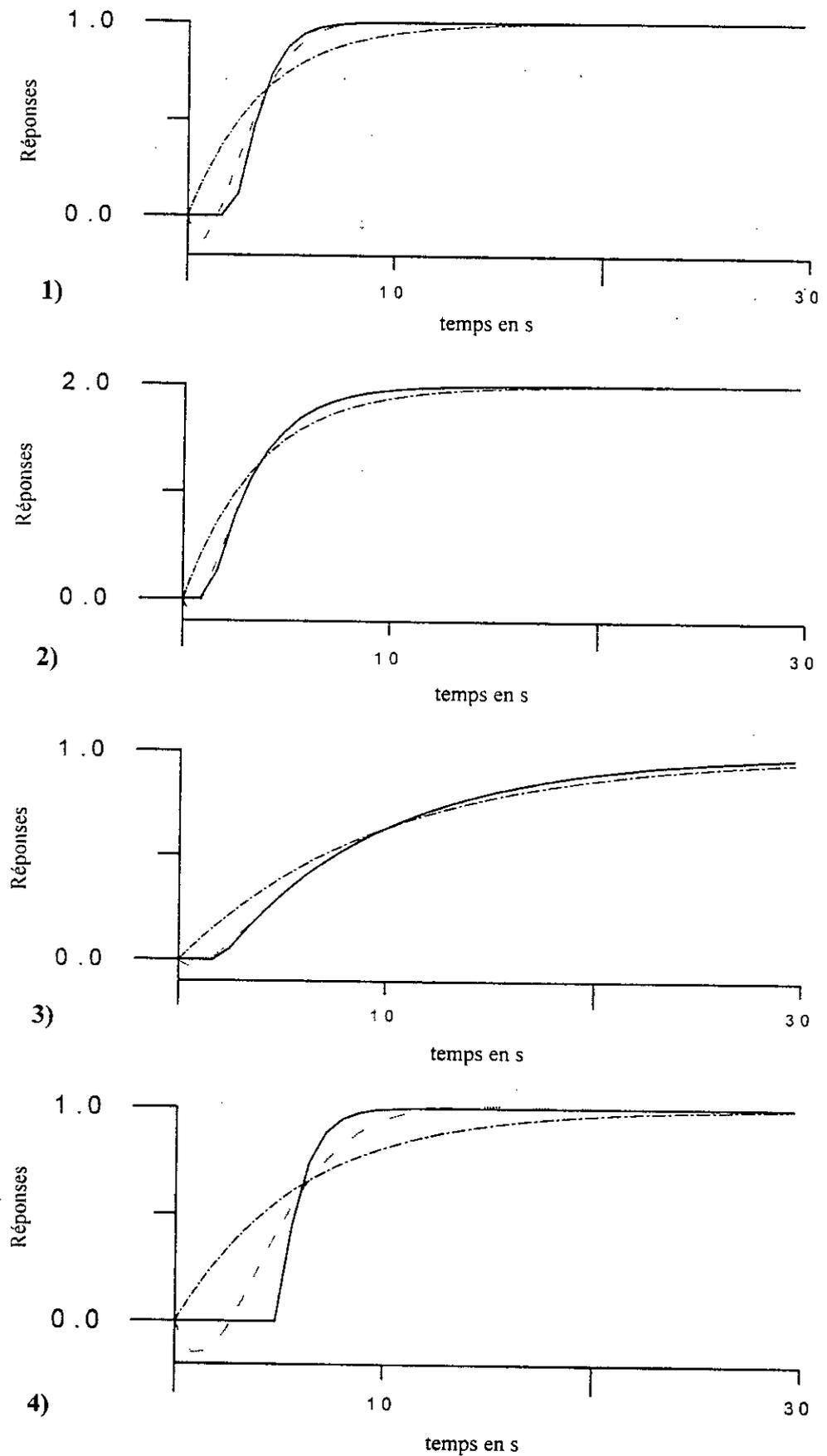


Fig 2-1 Les réponses indicielles en boucle ouverte

Système —, appx 1<sup>er</sup> ordre ----, appx 2<sup>ème</sup> ordre ..... .

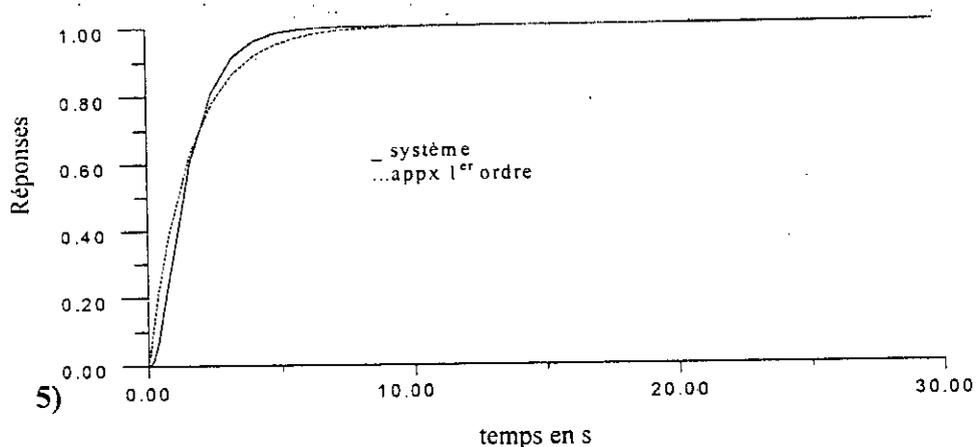


Fig 2-2 Réponses indicielles : réduction au 1<sup>er</sup> ordre d'un système sans retard

**N.B :** Les tentatives de synthèse de régulateurs à partir des modèles obtenus (modèles dépourvus de retard) n'ont pas pu donner de bons résultats pour la commande des systèmes originaux. Ce qui permet de conclure que cette méthode n'est intéressante que pour la réduction de l'ordre des systèmes et non pas pour l'élimination de retard (voir exemple 5).

## 2.4 Méthodes conventionnelles

Les principales techniques de commande utilisées pour les systèmes à retard sont : les méthodes de réglage, les méthodes prédictives et celles de la théorie optimale. Cette dernière est peu pratique, elle nécessite plus de capteurs ou d'observateurs pour l'estimation des états.

### 2.4.1 Méthode de Ziegler-Nichols

C'est la technique la plus utilisée pour les systèmes à retard, elle conduit à des régulateurs très simples dont les performances restent acceptables dans les applications moins exigeantes.

#### Seconde méthode de Ziegler-Nichols

Elle est basée sur la condition de stabilité critique sous l'effet d'un contrôle proportionnel (en boucle fermée) [15] [16]. Elle consiste à augmenter le gain proportionnel à partir d'une petite valeur jusqu'à ce qu'une petite perturbation produise des oscillations continues en sortie avec une amplitude fixe. On relève alors la valeur du gain  $K_{cr}$  appelé gain critique et on estime la période des oscillations  $T_{cr}$ . Les paramètres recommandés du régulateur sont donnés par le tableau ci-après :

Régulateur	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5 K_{cr}$	-	-
PI	$0,45K_{cr}$	$T_{cr}/1,2$	-
PID	$0,6 K_{cr}$	$T_{cr}/2$	$T_{cr}/8$

Tab 2-2 Paramètres des régulateurs proposés par Z-N

### Méthode de Ziegler-Nichols modifiée

On notera que malgré la plus grande popularité des formules de Ziegler-Nichols, elles ne sont utilisées en pratique que comme guide de l'opérateur pour en satisfaire certaines performances après un ajustement fin des paramètres. Cette limitation a conduit les chercheurs à les modifier en vue d'une amélioration des performances [7][14][18].

La plupart de ces publications modifièrent légèrement l'apparence du PID original tout en gardant la structure générale. Il a été montré [7] que les performances du régulateur de Ziegler-Nichols sont grandement liées au temps mort que présente le procédé à commander. En effet, même pour un système à petit retard où les performances sont acceptables en poursuite et en régulation, le phénomène de dépassement (1<sup>er</sup> pic) apparaît gênant. Ce phénomène a été sujet de plusieurs travaux de recherches, une des premières solutions proposées est la diminution du gain au prix d'une diminution de la rapidité des réponses en poursuite et en régulation. Une alternative consiste à filtrer l'entrée de référence. Le choix du filtre peut être fait en faisant un compromis entre la valeur du dépassement admissible et la rapidité de la réponse désirée, son avantage est que la réponse en régulation n'est pas affectée.

Récemment, une autre méthode [7] a été proposée pour réduire le 1<sup>er</sup> dépassement, elle consiste à pondérer la référence de l'action proportionnelle par un facteur  $\beta$ , comme suit :

$$U_c = K_p \left[ (\beta r(t) - y(t)) + \frac{1}{T_i} \int edt - T_d \frac{dy_f}{dt} \right] \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (2-19)$$

L'introduction du facteur d'ajustement  $\beta$  permet d'ajuster le zéro de la fonction de transfert en boucle fermée, agissant ainsi sur le dépassement. Cette méthode simple a bien prouvé sa supériorité relative [7]. Sachant que le premier dépassement diminue lorsque le temps mort du système augmente, mais dans ce cas là c'est le deuxième pic

négligable qui devient très gênant. Ce dernier phénomène peut aussi être réduit en augmentant l'action intégrale (diminution de  $T_i$ ). Les recommandations de cette modification pour un régulateur PID sont en fonction du gain critique normalisé  $K_0$  défini par :  $K_0 = K \cdot K_{cr}$ .

Où  $K_{cr}$  et  $K$  sont respectivement le gain critique et le gain statique du procédé.

Lorsque  $2.25 < K_0 < 15$ , seule l'introduction du facteur d'ajustement de l'action proportionnelle  $\beta$  est suffisante pour réduire le dépassement ou (overshoot). La valeur de  $\beta$  proposée pour assurer un dépassement  $\leq 20\%$  est de :  $\beta = 36/(27+5K_0)$ .

Lorsque  $1.5 < K_0 < 2.25$ , la réduction de la constante d'intégration  $T_i$  devient nécessaire afin de limiter le 2<sup>ème</sup> pic négatif ou (undershoot), les valeurs proposées pour assurer 20% du 1<sup>er</sup> pic et 10% du 2<sup>ème</sup> pic sont données par :

$$\beta = \frac{8}{17} \left( \frac{4}{9} K_0 + 1 \right) \quad (2-20)$$

$$T_i = \frac{4}{9} K_0 \cdot T_{iz} \quad (2-21)$$

Où  $T_{iz}$  est la valeur de  $T_i$  recommandée par Ziegler-Nichols

A noter que ces recommandations sont données par des formules empiriques, résultats de tests de simulation sur plusieurs procédés [7].

Dans la comparaison des performances du Prédicteur de Smith avec les méthodes conventionnelles, c'est cette dernière version du PID de Z-N modifiée que nous utiliserons.

#### 2.4.2 Méthode d'optimisation des paramètres

Lopez et Al [15][16] ont proposé une méthode de synthèse basée sur la technique d'optimisation. Ils démontrent qu'une performance optimale est obtenue en minimisant l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\infty} J(e,t) dt \quad (2-22)$$

où  $J$  est fonction de l'erreur  $e(t)$  à une entrée perturbatrice et de la variable du temps  $t$ . La minimisation de  $I$  conduit dans le cas d'un régulateur PID aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial K_p} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial T_i} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial T_d} = 0 \end{cases} \quad (2-23)$$

Le choix de la forme de  $J(e,t)$  afin d'obtenir les meilleures performances, est basé sur l'expérience et les jugements personnels. Par conséquent plusieurs fonctions  $J(e,t)$  ont été proposées dont les plus connues sont :

IAE (Somme des valeurs absolues des erreurs)  $\rightarrow J(e,t) = |e(t)|$

ITAE (Somme des temps multipliés par les erreurs)  $\rightarrow J(e,t) = t|e(t)|$  (2-24)

ISE (Somme des erreurs au carrées)  $\rightarrow J(e,t) = e^2(t)$

Pour arriver aux valeurs optimales des paramètres  $K/K_p$ ,  $T_i/L$  et  $T_d/L$  en fonction de  $T/L$  qui caractérise le système du premier ordre, les auteurs ont employé des techniques numériques de minimisation basées sur le gradient modifié (Steepest descent method) en utilisant les relations empiriques suivantes :

$$\begin{aligned} K/K_p &= a(T/L)^b \\ L/T_i &= c(T/L)^d \\ T_d/L &= e(T/L)^f \end{aligned} \quad (2-25)$$

Les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  et  $f$  sont données par le tableau 2-4 pour le régulateur PI, PID et les différents critères d'erreurs IAE, ITAE et ISE.

Au lieu de considérer la réponse à une entrée perturbatrice Rovira et Al [15][16] ont étudié le cas d'une entrée de référence avec des relations similaires. Les constantes sont données par le tableau 2-3 avec la seule différence que :

$$L/T_i = c + (T/L)^d \quad (2-26)$$

Correcteur	Critère d'erreurs	a	b	c	d	e	f
PI	IAE	0,99	0,99	0,61	-0,71	-	-
PI	ITAE	1,44	-0,92	0,88	-0,75	-	-
PID	IAE	1,44	-0,92	0,89	-0,75	0,48	1,14
PID	ITAE	1,36	-0,95	0,84	-0,74	0,38	0,10

Tab 2-3 Paramètres de la technique d'optimisation

(Poursuite)

Correcteur	Critère d'erreur	a	b	c	d	e	f
PI	IAE	0,76	-0,86	1,02	-0,32	-	-
PI	ITAE	0,59	-0,92	1,03	-0,17	-	-
PID	IAE	1,09	-0,87	0,74	-0,13	0,31	0,91
PID	ITAE	0,97	-0,85	0,80	-0,15	0,31	0,93

Tab 2-4 Paramètres de la technique d'optimisation  
(Régulation)

### 2.4.3 Méthode de compensation

La méthode de compensation [47], consiste à considérer le régulateur comme un compensateur dynamique dans la boucle. Par conséquent, le paramètre d'intégration  $T_i$  est considéré comme un zéro dans la fonction de transfert du régulateur afin de compenser la plus grande constante de temps du procédé. Le paramètre de dérivation  $T_d$  est considéré comme un 2<sup>ème</sup> zéro qui compense la 2<sup>ème</sup> constante de temps du procédé. Ces deux paramètres assurent la rapidité de la réponse. Le gain  $K_p$  du régulateur peut être ajusté afin de remplir certaines performances. Pour un système du premier ordre et  $\lambda$  un paramètre de réglage lié à l'amortissement et la rapidité de la réponse désirée, les relations suivantes ont été obtenues pour un régulateur PI:

$$T_i = T$$

$$K_p = \frac{\lambda T}{K (\lambda L + 1)} \quad (2-27)$$

Pour un système du second ordre, les relations suivantes ont été obtenues pour un régulateur PID :

$$T_i = T_1$$

$$T_d = T_2$$

$$K_p = \frac{\lambda T_1}{K (\lambda L + 1)} \quad (2-28)$$

En utilisant la simulation, des courbes de corrélation de gain donnant  $\lambda T$  pour  $T/L$  fixé ont été obtenues pour 1% et 5% de dépassement dans la réponse indicielle [47].

### 2.4.4 Méthode prédictive

Parmi les techniques les plus raisonnables pour résoudre le problème du retard est de prédire la sortie du système un certain temps auparavant. Ceci en utilisant la sortie en cours plus les valeurs précédentes et en cours de l'entrée, afin de compenser au mieux l'effet du retard [65]. Cette technique initialement développée pour la

commande numérique sur un modèle du 1<sup>er</sup> ordre, a conduit à ce qu'on appelle prédicteur analytique (prédicteur PI). Une généralisation de cette technique a permis de surmonter la contrainte liée à la limitation de la forme du compensateur et son extension aux régulateurs PID.

### Prédicteur PI

Considérons le cas où on utilise un compensateur contenant un pur terme de prédiction  $e^{s l_p}$ . Celui-ci va annuler l'effet du retard en introduisant une avance de phase et par suite augmenter la rapidité de la réponse du système compensé selon la figure ci-dessous [18].

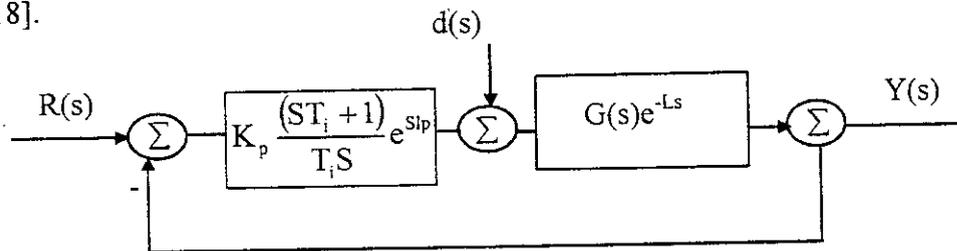


Fig 2-6 PPI non réalisable

Le problème est que  $e^{s l_p}$  est une pure prédiction qui ne peut être réalisée.

Le développement en séries de Maclaurin du terme  $e^{s l_p}$  donne.

$$e^{s l_p} = 1 + l_p S + \frac{l_p^2}{2!} S^2 + \dots + \frac{l_p^n}{n!} S^n \quad (2-29)$$

Si  $U_1(S) = U(S) e^{s l_p} \quad (2-30)$

On aura:  $U_1(t) = U(t) + l_p \frac{d(U(t))}{dt} + \frac{l_p^2}{2!} \frac{d^2(U(t))}{dt^2} + \dots + \frac{l_p^n}{n!} \frac{d^n(U(t))}{dt^n} \quad (2-31)$

Ceci montre que les dérivées actuelles (en cours) du signal temporel continu  $U(t)$ , peuvent être utilisées pour prédire le développement futur du signal. Or la prise en compte de dérivées d'un tel signal en présence de bruit n'est pas faisable à cause de l'amplification des bruits. La solution la plus simple consiste à utiliser les dérivées filtrées aux lieux des dérivées simples. Les dérivées filtrées sont obtenues du filtre de Gawthrop [18] :

$$\frac{d^i [U_f(t)]}{dt^i} = \frac{S^i}{M(S)} U(t) \quad (2-32)$$

pour  $i = 1, \dots, k$  et  $M(S) = \left(1 + \frac{l_p S}{N}\right)^k$

où 
$$U_r(s) = \frac{U(s)}{\left(1 + \frac{l_p}{N} S\right)^k} \tag{2-33}$$

Ainsi une réalisation approximative est donnée par :

$$U_1(t) = U_r(t) + l_p \frac{d(U_r(t))}{dt} + \frac{l_p^2}{2!} \frac{d^2(U_r(t))}{dt^2} + \dots \tag{2-34}$$

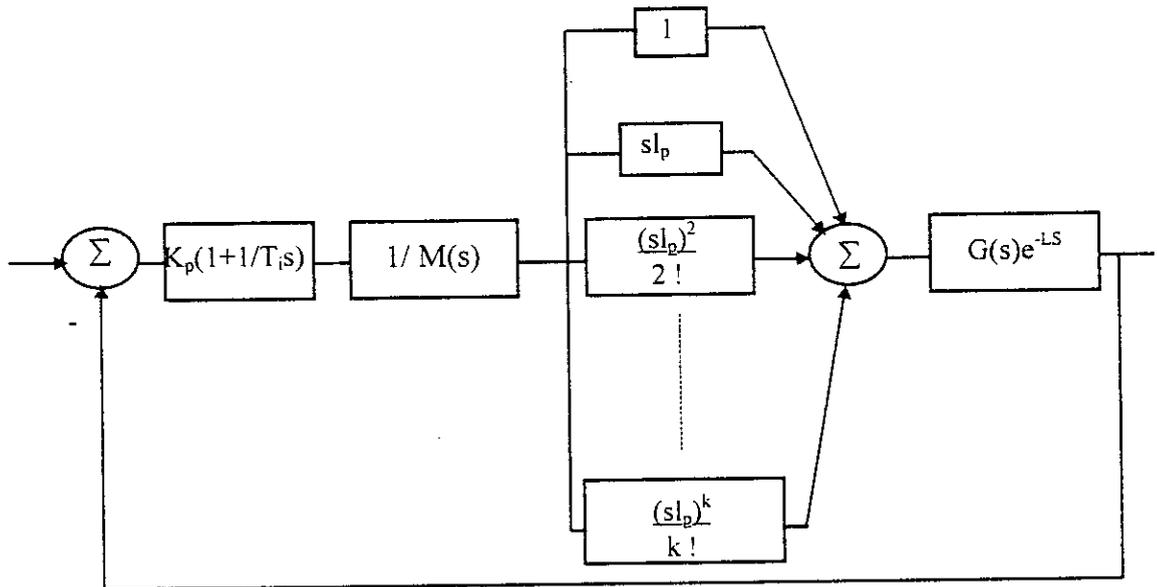


Fig 2-7 Version réalisable du PPI

### Synthèse du régulateur PPI

Une interprétation de la configuration du PPI montre qu'elle est formée d'un régulateur PI renforcé par un terme de prédiction. La synthèse du PPI est simple, il y a trois paramètres de réglage. On doit d'abord choisir un  $l_p$  convenable puis synthétiser le régulateur PI par la méthode de Ziegler-Nichols ou toute autre méthode. Pour les systèmes qui peuvent être représentés par un modèle du premier ordre à retard de la forme:

$$G(s) = \frac{Ke^{-LS}}{1 + TS} \tag{2-35}$$

Haalman [18] a proposé le régulateur PI suivant :

$$K_p = \frac{2T}{3KL} \quad \text{et} \quad T_i = T \tag{2-36}$$

### Choix de $l_p$

Le terme de prédiction  $e^{l_p s}$  réduit seulement le temps mort du système, puisqu'une compensation complète n'est pas possible. Ainsi,  $l_p$  doit être choisi selon le temps mort du système et sa constante de temps dominante. Pour une structure simple du PPI et comparable à celle du PID, l'ordre de prédiction peut être limité à  $k = 2$ . On montre [18] que ceci représente un bon compromis entre complexité et performance. Il a été aussi trouvé que (voir annexe A),  $l_p$  doit être inférieur ou égal à 63% de  $L$ .

Ainsi, la synthèse du PPI consiste :

- 1°) A approximer le système à commander par un modèle du 1<sup>er</sup> ordre à retard.
- 2°) A faire un choix adéquat du terme de prédiction  $l_p$ , qui doit être inférieur au temps mort apparent du système (limité à 63% de ce dernier).
- 3°) A réduire le temps mort apparent à  $(L - l_p)$ , par suite les formules de Haalman deviennent :

$$T_i = T$$

$$K_p = \frac{2T}{3K(L - l_p)} \quad (2-37)$$

La sensibilité du PI prédictif et l'obtention de limite supérieure de l'horizon de prédiction ( $l_p < 63\% L$ ) est présentée dans l'**annexe A**.

#### 2.4.5 Méthode d'Astrom-Hagglund

Récemment, Astrom et Al [4][5] ont proposé une autre technique de détermination du point critique d'un système. Ce point est défini par l'intersection du lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte avec l'axe réel. Cette précieuse information est habituellement utilisée dans la synthèse [méthode de Z-N].

Dans la méthode de Ziegler-Nichols, le réglage de l'amplificateur proportionnel  $K_p$  s'arrête lorsque le système commence à osciller sans possibilité de bien contrôler l'amplitude des oscillations. Or l'apparition d'oscillations n'est pas forcément une limite stricte de la stabilité, leurs amplitudes admissibles peuvent être déterminées par les variations tolérables relativement à la sortie. Ainsi, la détermination du point critique pour une certaine amplitude tolérable des oscillations n'est pas possible avec la méthode de Ziegler-Nichols. La technique d'Astrom et Al consiste à remplacer l'amplificateur  $K_p$  de Ziegler-Nichols par un relais selon la figure ci-après [4].

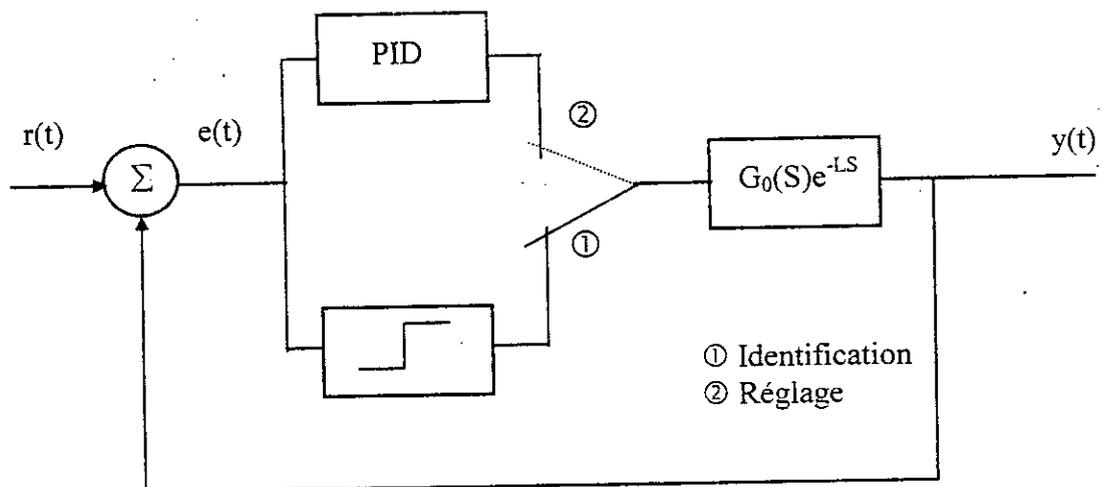


Fig 2-8 Réglage de système par un test à relais

On a démontré que l'introduction d'un relais dans le schéma de commande de la figure 2-8, conduit à une erreur  $e(t)$  périodique. Par conséquent, le point critique peut être déterminé en considérant que la composante fondamentale des oscillations.

Dans le cas où l'harmonique fondamentale domine le signal périodique (sinon un préfiltrage avant mesure est nécessaire), on peut facilement déterminer l'amplitude et la fréquence des oscillations par une simple mesure du temps entre deux passages par zéro et l'amplitude crête à crête. Les conditions d'oscillations ainsi que leur stabilité ont été détaillées dans le chapitre précédent.

### Méthode de synthèse

Une fois les conditions d'oscillations ainsi que leur stabilité ont été investiguées et les paramètres du point critique ( $K_{cr}$ ,  $\omega_{cr}$ ) mesurés. On peut soit utiliser directement les résultats de Ziegler-Nichols, afin de déterminer le régulateur pour des performances plus au moins optimales, soit procéder d'une manière générale selon les spécifications particulières du procédé à commander.

### Spécification sur la marge de phase

En se basant sur le principe de la compensation dans le plan complexe, il est possible de déplacer n'importe quel point à une position arbitraire en utilisant un relais idéal.

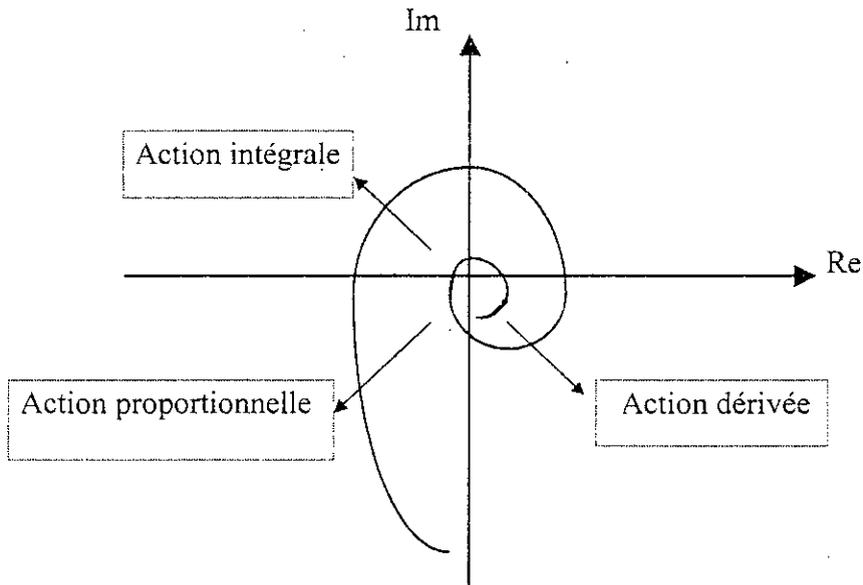


Fig 2-9 Compensation dans le plan complexe

En déplaçant le point critique jusqu'au cercle unité [37], il est possible d'obtenir un système avec une marge de phase  $\phi_m$  prescrite. Pour un système de fonction de transfert en boucle ouverte  $G(S)$ , la chaîne de transmission du système compensé par un régulateur PID est donnée par :

$$L(S) = K_p \left[ 1 + j \left( \omega T_d - \frac{1}{\omega T_i} \right) \right] G(j\omega) \quad (2-38)$$

Si le  $\omega_{cr}$  du système  $G(S)$  a été déterminé et que l'on désire avoir une marge de phase  $\phi_m$  pour le système compensé, alors on a, en déplaçant le point critique jusqu'au cercle unité :

$$\left| K_p \left[ 1 + j \left( \omega_{cr} T_d - \frac{1}{\omega_{cr} T_i} \right) \right] G(j\omega_{cr}) \right| = 1 \quad (a) \quad (2-39)$$

$$\arg \left\{ K_p \left[ 1 + j \left( \omega_{cr} T_d - \frac{1}{\omega_{cr} T_i} \right) \right] G(j\omega_{cr}) \right\} = \phi_m + \pi \quad (b)$$

On aura :

$$\begin{aligned} \arctg \left( \omega_{cr} T_d - \frac{1}{\omega_{cr} T_i} \right) + \arg G(j\omega_{cr}) &= \pi + \phi_m \\ \Rightarrow \omega_{cr} T_d - \frac{1}{\omega_{cr} T_i} &= \operatorname{tg} \phi_m \end{aligned} \quad (2-40)$$

une équation qui admet plusieurs solutions ( $T_d, T_i$ ). Une possibilité consiste à choisir  $T_i$  et  $T_d$  de façon à avoir  $T_i = \alpha T_d$ , ce qui donne :

$$T_d = \frac{\operatorname{tg}\phi_m + \sqrt{\frac{4}{\alpha} + \operatorname{tg}^2\phi_m}}{2\omega_{cr}} \quad (2-41)$$

**N.B :** Le choix de  $\alpha$  peut être fait selon les résultats de Ziegler-Nichols (voir tableau).

L'équation 2-39-a permet de déterminer le gain  $K_p$  du régulateur :

$$(a) \Rightarrow |K_p| \left| G(j\omega_{cr}) \left( 1 + j \left( \omega_{cr} T_d - \frac{1}{\omega_{cr} T_i} \right) \right) \right| = 1$$

$$\frac{|K_p|}{K_{cr}} \sqrt{1 + \left( \omega_{cr} T_d - \frac{1}{\omega_{cr} T_i} \right)^2} = 1 \quad (2-42)$$

$$\sqrt{1 + \frac{\operatorname{Sin}^2\phi_m}{\operatorname{Cos}^2\phi_m}} = \frac{K_{cr}}{K_p}$$

$$\frac{1}{\operatorname{Cos}\phi_m} = \frac{K_{cr}}{K_p}$$

$$\Rightarrow K_p = K_{cr} \operatorname{Cos}\phi_m \quad (2-43)$$

## 2.5 Conclusion

L'élimination du retard des fonctions de transfert exige une parfaite connaissance du modèle du procédé. Elle conduit à des modèles à déphasage non minimal généralement non désirés, de ce fait elle est peu pratique. L'importance et la simplicité de la méthode de Ziegler-Nichols et la possibilité de son application on-line, ont conduit au développement de plusieurs travaux de recherches [4][18][46]. A noter l'importance de l'amélioration des performances apportée par la modification faite par K. Astrom et al [7], c'est la version que l'on retiendra pour une éventuelle comparaison des performances tout en utilisant les paramètres critiques obtenus par le test à relais. L'idée du PI prédictive est très appréciée et très simple. Ce qui nous a conduit à développer pour la commande à relais, une version on-line qui ne nécessite pas l'approximation du procédé tout en augmentant l'horizon de prédiction. Nous avons aussi remarqué la simplicité de la méthode d'Astrom-Hagglund comme méthode complète de synthèse de PID à partir de test à relais et pour une spécification sur la marge de phase. L'extension de la méthode au cas d'un relais à hystérésis et son application pour la synthèse du régulateur primaire du prédicteur de Smith est développée dans le chapitre VI.

# Chapitre III

## Prédicteur de Smith

### Propriétés et Robustesse

#### 3.1 Introduction

Parmi les techniques spéciales qui ont été proposées pour commander les procédés ayant un temps mort, le contrôleur de Smith, appelé aussi prédicteur de Smith, est probablement le plus intéressant depuis les publications de Smith [1957,1959]. C'est une approche qui ne peut être considérée comme méthode de synthèse puisqu'elle propose seulement une autre construction du régulateur. Beaucoup de travaux ont montré l'amélioration des performances apportées par ce contrôleur par rapport aux méthodes conventionnelles [20][41][62]. D'autres notent les circonstances pour lesquelles le PS conduit à une véritable dégradation des performances, telle que l'instabilité du système [27][42][52][60]. C'est ce qui nous a conduit à présenter dans ce chapitre la méthode de Smith tout en mettant l'accent sur les propriétés et la robustesse de sa configuration. Quelques exemples de simulation sont présentés afin d'étendre les conclusions faites jusqu'à maintenant sur des systèmes du premier ordre à celles des systèmes d'ordre supérieurs.

#### 3.2 Méthode de Smith

Smith propose de diviser le système à retard en un retard pur et une fonction de transfert rationnelle, puis utiliser le modèle de celle-ci pour la prédiction durant le temps mort dû au retard (fig 2). Cette nouvelle structure permet d'extraire le temps mort de la boucle d'asservissement et synthétiser ainsi le régulateur primaire comme si le retard n'existait pas.

L'élégance de cette technique est qu'elle résout de façon rigoureuse les deux difficultés causées par la présence du retard.

- L'extraction du retard de la boucle d'asservissement permet d'éviter l'apparition d'une infinité de solution dans l'équation caractéristique. Ce qui autorise l'application des méthodes classiques et l'emploi de gain élevé.
- Elle élimine aussi la sur-correction du régulateur lorsque le procédé présente un temps mort. En effet, le signal d'entrée  $e(t)$  (fig 2) contient la sortie  $y(t)$  estimée durant le temps mort, par conséquent l'erreur ajustée  $e'(t)$  asservie à l'entrée du régulateur primaire contient la part d'erreurs causées par l'action de ce dernier. Ce qui régule l'action du correcteur par prédiction.

Rappelons que pour diminuer l'effet de la sur-correction dans les systèmes à retard, on était toujours contraint de réduire le gain afin de préserver la stabilité du système [47]. Ce qui dégrade les performances de ce dernier. Ainsi l'élimination de la sur-correction par prédiction permet d'augmenter le gain admissible. Une justification analytique de ces arguments qualitatifs peut être obtenue comme résultat de l'élimination du temps mort de l'équation caractéristique.

Une construction équivalente du prédicteur de Smith (fig 2) est présentée ci-dessous :

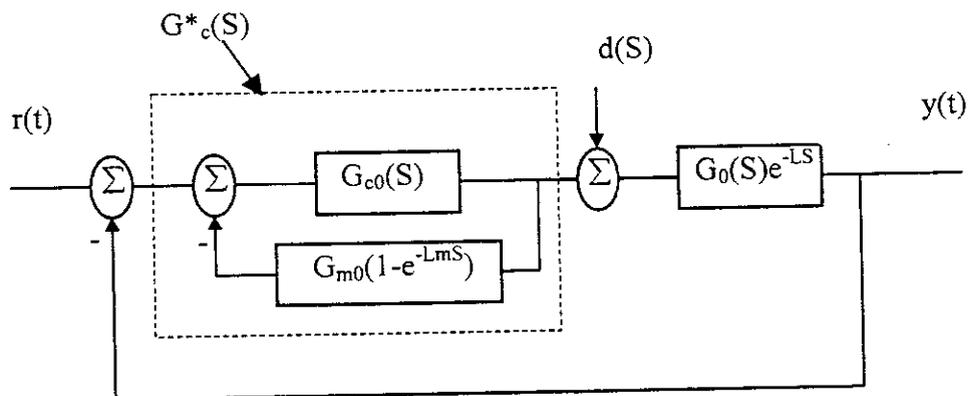


Fig 3-1 Schéma du prédicteur de Smith

Où  $G_{m0}(s)e^{-LmS}$  est le modèle du procédé  $G_0(s)e^{-LS}$  objet de la commande et  $G_{c0}(s)$  est le régulateur primaire généralement un simple PI ou PID.

La partie en pointillé constitue ce qu'on appelle le contrôleur de Smith dont la fonction de transfert est notée  $G_c^*(s)$ .

On a :

$$G_c^*(S) = \frac{G_{co}(S)}{1 + G_{co}(S)G_{m0}(S)(1 - e^{-LmS})} \quad (3-1)$$

La fonction de transfert globale du système bouclé est donnée par:

$$\begin{aligned} H_r(S) &= \frac{Y(s)}{R(s)} \Big|_{d(s)=0} = \frac{G_c^*(S)G_0(S)e^{-LS}}{1 + G_c^*(S)G_0(S)e^{-LS}} \\ &= \frac{G_0(S)G_0(S)e^{-LS}}{1 + G_{co}(S)G_0(S)e^{-LS} + G_{co}(S)G_{m0}(S)(1 - e^{-LmS})} \\ &= \frac{G_{co}(S)G_0(S)e^{-LS}}{1 + G_{co}(S)G_{m0}(S) + G_{co}(S)(G_0(S)e^{-LS} - G_{m0}(S)e^{-LmS})} \end{aligned} \quad (3-2)$$

\* Lorsque le modèle employé représente exactement le procédé, c'est-à-dire que :

$G_0(S) = G_{m0}(S)$  et  $L = L_m$ , la fonction de transfert en boucle fermée se réduit à :

$$H_r(S) = \frac{G_{co}(S)G_{m0}(S)e^{-LS}}{1 + G_{co}(S)G_{m0}(S)} \quad (3-3)$$

Dont l'équation caractéristique ne contient pas de temps mort. Ainsi  $H_r(S)$  représente aussi le système de la figure suivante :

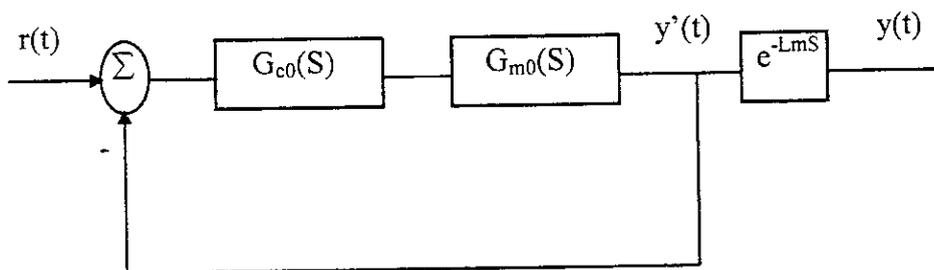


Fig 3-2 Représentation équivalente du prédicteur de Smith

L'équivalence de ces deux systèmes du point de vue entrée-sortie, a conduit beaucoup de gens à conclure qu'une synthèse robuste du régulateur primaire  $G_{co}(S)$  de la structure originale de Smith, peut être obtenue en considérant le système équivalent ci-dessus. C'est-à-dire comme s'il n'y avait pas de temps mort puisque  $y(t)$  est seulement une version retardée de  $y'(t)$ .

L'inexactitude de cette conclusion a été déjà mentionnée dans plusieurs articles [42][52]. L'ambiguïté apparente est que les deux systèmes ne sont équivalents que si le modèle employé représente exactement le procédé à commander, c'est-à-dire :  $G_0(S)=G_{m0}(S)$  et  $L=L_m$ . En pratique, il est impossible de modéliser exactement les dynamiques des procédés ni leurs retards, d'où l'absence de modèle parfait.

Lorsqu'on tient compte des erreurs de modélisation et en examinant la fonction de transfert globale correspondante et son équation caractéristique ci-dessous:

$$1 + G_{c0}(S)G_{m0}(S) + G_{c0}(S)[G_0(S)e^{-LS} - G_{m0}(S)e^{-LmS}] = 0 \quad (3-4)$$

On peut remarquer qu'une légère différence dans la modélisation du retard ou du modèle rationnel, affecte la position des pôles de l'équation caractéristique et ainsi la stabilité du système.

De ce fait, il faut noter que lorsque le procédé possède des pôles à parties réelles positives (systèmes instables), la différence minime et inévitable entre le procédé et son modèle conduit à une instabilité du système global. L'emploi du contrôleur de Smith simple ne convient pas dans ce cas [3]. Notre étude ne concerne que les procédés dont les pôles sont à parties réelles négatives.

Pour conclure, on peut dire que la stabilité du système à base du contrôleur de Smith, est grandement liée à la précision avec laquelle le modèle représente le procédé. Ainsi, le système global est devenu très sensible aux variations des dynamiques du procédé et les erreurs de modélisation. Par conséquent, l'emploi de la méthode de Smith doit être précédé par une étude sérieuse de la sensibilité de celui-ci et les circonstances donnant lieu à une commande robuste.

### **3.3 Propriétés du prédicteur de Smith**

Un bon asservissement est obtenu lorsque l'étendu en fréquence de la chaîne de transmission en boucle ouverte est aussi large que la bande passante du système en boucle fermée. Ceci afin d'assurer une bonne insensibilité aux bruits, celle-ci est chiffrée par une meilleure atténuation en dehors de la bande. En effet, la chaîne de transmission conduit à une restriction aux basses fréquences de la bande passante du système global. Ce qui ne permet pas à ce dernier de répondre aux variations rapides de la consigne (cas de la poursuite) à moins de filtrer cette consigne [6][52].

### Effet de la position de la fréquence de coupure du système en B.O

Si un procédé présente un retard  $L$ ,  $G(S) = G_0(S)e^{-LS} = G_0(j\omega)e^{-j\omega L}$

le déphasage apporté par le retard  $L$  est :

$$\phi = -\omega L \quad (3-5)$$

Si on s'intéresse seulement à la variation du retard, une erreur  $\Delta L$  à la fréquence critique  $\omega_{cr}$ , doit provoquer un déphasage supplémentaire au maximum égal à la marge de phase prévue. Or le déphasage provoqué par  $\Delta L$  à la fréquence  $\omega_{cr}$  est égal à :

$$\Delta\phi = \omega_{cr}\Delta L \quad (3-6)$$

d'où la relation :

$$\omega_{cr}\Delta L \leq \phi_m \quad \text{où} \quad \phi_m \text{ est la marge de phase prévue} \quad (3-7)$$

C.à.d :

$$\Delta L \leq \frac{\phi_m}{\omega_{cr}} \quad (3-8)$$

On voit clairement que si  $\omega_{cr}$  est élevée, la variation  $\Delta L$  sera petite malgré une large marge de phase  $\phi_m$ . D'où une limite supérieure de  $\omega_{cr}$ , est à envisager pour assurer une marge de stabilité.

Ainsi, aux très hautes fréquences ou lorsque  $\omega_{cr}$  est très élevée, pratiquement aucune erreur de modélisation ni variation dynamique des paramètres du système ne sont tolérables. Donc un compromis devrait exister entre la limite supérieure de  $\omega_{cr}$  afin d'assurer une certaine insensibilité du système vis-à-vis des erreurs de modélisation et la bande passante  $\omega_b$  du système global juste nécessaire. D'où la souplesse de la commande des procédés à retard, à  $\omega_{cr}$  faible et comparable à  $\omega_b$  désirée [42].

Le problème posé par un système à retard, est qu'il ne peut pas réagir rapidement aux sollicitations du régulateur, aussitôt l'entrée commande l'atteint. Ce qui conduit à la sur-correction du système. Ainsi la présence de retard augmente le temps de réponse du système, or généralement le temps de réponse du système est inversement proportionnel à sa bande passante [37]. Par conséquent toute tentative visant à réduire le temps de réponse s'accompagne d'un élargissement de la bande passante du système rendant celui-ci plus sensible aux perturbations HF. C'est ce qui a fait dire que le contrôleur de Smith initialement conçu pour améliorer les performances des systèmes à retard telle

que leur rapidité, possède un mauvais rejet des perturbations HF. Ce qui est néfaste dans le cas de la régulation qui consiste justement à réduire ces effets au maximum. En effet, ceci n'est pas dû à l'emploi du prédicteur de Smith mais au fait que le système est à retard.

Or en pratique, la différence entre régulation et poursuite n'est pas absolue et selon les variables auxquelles on s'intéresse et selon les conditions d'emploi un même système dynamique apparaît soit comme un régulateur, soit comme un système suiveur. Par conséquent, il est préférable de parler de système asservi considéré comme étant un régulateur ayant pour but de maintenir un écart minimal malgré les perturbations que présente la commande.

**N.B :**

Malgré que le point d'action des perturbations ne soit pas justifiable, il est toujours possible de définir une fonction de transfert relative à l'entrée de perturbation en posant par convention la commande  $r(t) = 0$ . Cette fonction de transfert caractérise la fonction de sensibilité du système vis-à-vis des perturbations.

En se référant toujours à la structure générale du contrôleur de Smith de la figure 3-1, on a :

$$H_d(S) = \left. \frac{Y(s)}{d(s)} \right|_{r(s)=0} = \frac{G_0(S)e^{-LS}}{1 + G_c^*(S)G_0(S)e^{-LS}} \quad (3-9)$$

où

$$G_c^*(S) = \frac{G_{c0}(S)}{1 + G_{c0}(S)G_{m0}(S)(1 - e^{-LmS})} \quad (3-10)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} H_d(S) &= \frac{G_0(S)e^{-LS} [1 + G_{c0}(S)G_{m0}(S)(1 - e^{-LmS})]}{1 + G_{c0}(S)G_{m0}(S)[1 - e^{-LmS}] + G_{c0}(S)G_0(S)e^{-LS}} \\ &= \frac{G_0(S)e^{-LS} [1 + G_{c0}(S)G_{m0}(S)(1 - e^{-LmS})]}{1 + G_{c0}(S)G_0(S) \left[ \frac{G_{m0}(S)}{G_0(S)} (1 - e^{-LmS}) + e^{-LS} \right]} \end{aligned} \quad (3-11)$$

Dans le cas où le modèle représente exactement le procédé à commander, on aura :

$$H_d(S) = \frac{G_{m0}e^{-LS} [1 + G_{c0}(S)G_{m0}(S)(1 - e^{-LmS})]}{1 + G_{c0}(S)G_{m0}(S)} \quad (3-12)$$

Il est bien clair que même sous ces conditions :

$$\lim_{S \rightarrow 0} H_d(S) \neq 0 \quad (3-13)$$

Cette limite dépend évidemment du type de modèle et de la forme du régulateur primaire employé. Un cas très particulier où le prédicteur de Smith conduit à des performances vraiment médiocres vis-à-vis des perturbations statiques, est celui des systèmes ayant un mode intégral [8][48][63]. Toutes les méthodes de synthèse de ce type de procédé n'ont pas pu conduire à des performances acceptables. En effet, la méthode de Ziegler-Nichols conduit à des réponses très oscillatoires, de même la commande modale (Internal Model Control) [34][49] a échoué de trouver une solution générale, alors que le prédicteur de Smith conduit à une grande erreur statique. Afin de résoudre le problème Watanabe et Ito [8] proposent une modification de la configuration de Smith (figure 3-3). Cette modification peut améliorer le rejet des perturbations statiques à condition que le retard soit bien estimé. Autrement, une petite erreur statique persiste. Ceci au prix d'une petite altération de la poursuite de la commande principale. Toujours dans le même but Astrom et Al [8] présentent une nouvelle structure du prédicteur de Smith (figure 3-4) pour un intégrateur pur de pente normalisée à 1. L'avantage de cette dernière réside dans le découplage des deux réponses en régulation et en poursuite. Ce qui permet de chercher d'améliorer d'avantage les performances de la régulation sans toucher à celles de la poursuite. Cependant, le régulateur proposé présente trois paramètres ajustables alors qu'en pratique, la simplicité tout comme l'optimalité est importante dans la synthèse du régulateur. L'ajustement de trois paramètres face à des performances bien désirées n'est pas facile.

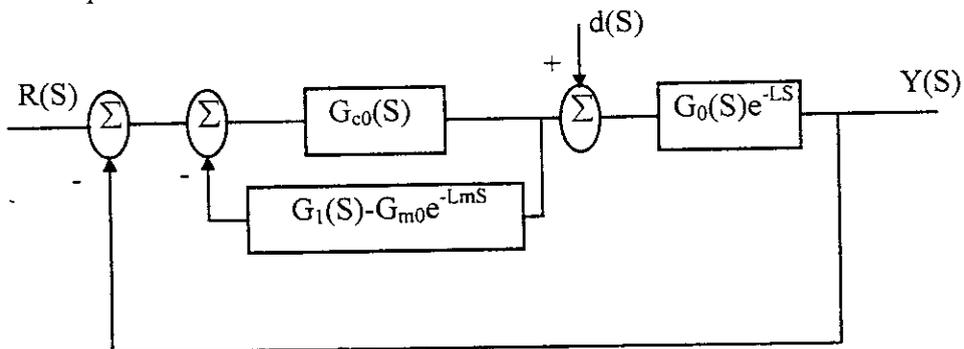


Fig 3-3 Schéma de Watanabe

où 
$$G_1(S) = \frac{G_{m0}(S)}{1 + L_m S} \quad (3-14)$$

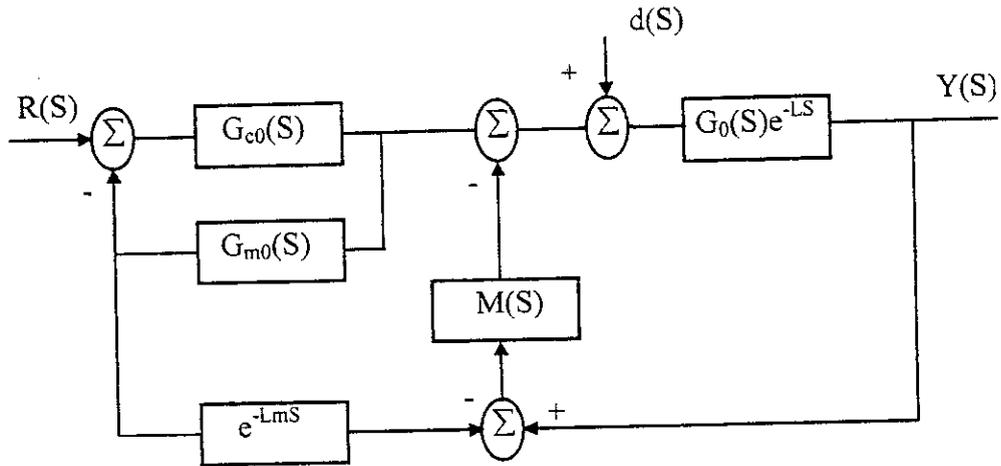


Fig 3-4 Schéma d'Astrom

où 
$$M(S) = \frac{k_4 + \frac{k_3}{S}}{1 + k_1 + \frac{k_2}{S} + \frac{k_3}{S^2} - \left(\frac{k_4}{S} + \frac{k_3}{S^2}\right) - \left(\frac{k_4}{S} + \frac{k_3}{S^2}\right) e^{-L_m S}} \quad (3-15)$$

avec

$$k_4 = k_2 + k_3 L_m \quad (3-16)$$

$$G_{m0}(S) = \frac{1}{S}$$

et

$$G_{c0}(S) = k_4 + \frac{k_3}{S} \quad (3-17)$$

### 3.4 Robustesse

Un examen simple des deux fonctions de transferts  $H_r(S)$  et  $H_d(S)$  qui possèdent toutes les deux le même dénominateur, montre que de façon générale la robustesse du prédicteur de Smith est toujours liée à la fonction  $H(S)$  :

$$H(s) = \frac{G_{m0}(s)}{G_0(s)} (1 - e^{-L_m s}) + e^{-L s} \quad (3-18)$$

$H(s)$  représente les erreurs de modélisation et/ou la variation dynamique des paramètres du procédé. On notera que dans le cas d'une parfaite représentation du système réel ( $G_{m0}(S)=G_0(S)$  et  $L_m = L$ ),  $H(S)$  se réduit à 1.

En pratique l'analyse de  $H(s)$  qui ne peut jamais évaluer 1, est très compliquée par le nombre de paramètres à considérer. Toutes les tentatives d'examen de la robustesse du prédicteur de Smith ont été faites sur le fameux modèle du premier ordre à trois paramètres, là encore l'examen des variations simultanées des trois paramètres reste difficile [25][27][19].

Presque tous les travaux entrepris sur ce modèle ont abouti pratiquement à la même conclusion suivante [41] :

- 1- La sensibilité des systèmes à retard aux hautes fréquences, n'est pas améliorée par l'utilisation du prédicteur de Smith, plutôt il l'a augmenté.
- 2- Dans le cas où le retard reste inférieur à la constante de temps, le système préserve toujours sa stabilité aux basses fréquences même en présence d'erreurs de modélisation.
- 3- Dans le cas où les paramètres du système varient, l'augmentation du retard et de la constante de temps ainsi que la diminution du gain du système réel sont moins dangereuses que leurs variations inverses généralement limitées à 50%.
- 4- de 3, il apparaît que si on veut tolérer des erreurs de modélisation, on doit représenter le procédé par un modèle ayant des paramètres légèrement :

$$\begin{aligned} L_m &< L \\ T_m &< T \\ K_m &> K \end{aligned} \quad (3-19)$$

Ces conclusions ont été tirées par l'examen de systèmes simples du premier ordre. Leurs extensions aux systèmes d'ordres supérieures ne sont pas confirmées. Ce qui nous a conduit à faire une étude de la robustesse du prédicteur de Smith sur des procédés ayant des modèles d'ordres supérieurs.

### **3.5 Exemples d'illustration**

Les performances et la robustesse du prédicteur de Smith sont testées sur des exemples d'ordres supérieurs et pour des variations individuelles des paramètres raisonnablement limitées à 50%. Notre choix s'est fait sur deux exemples du second ordre. Le premier ayant un retard nettement inférieur à la plus grande constante de temps, alors que le second exemple est à retard légèrement plus grand.

**Exemple1**

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{(1+s)(1+3s)} \quad \text{avec} \quad G_m(s) = \frac{K_m e^{-L_m s}}{(1+T_{1m}s)(1+T_{2m}s)} \quad (3-20)$$

Dans ce test, nous considérons un modèle  $G_m(s)$  parfaitement identique au procédé, et des variations individuelles des paramètres du modèle de  $\pm 20\%$  ou  $\pm 50\%$  autour des valeurs nominales. Les réponses indicielles du prédicteur de Smith pour des variations individuelles du gain et du retard du modèle, sont présentées dans la figure 3-5. Alors que, celles qui correspondent aux variations individuelles des deux constantes de temps du modèle, sont présentées dans la figure 3-6. D'après les courbes de simulation (fig3-5-a/d), Nous constatons que l'emploi de modèle à gain et retard légèrement inférieurs à leurs valeurs nominales, améliore les performances du PS. Ce qui n'est pas le cas lorsqu'ils sont surestimés .

Une petite amélioration est aussi constatée lorsque la plus grande constante de temps du modèle est légèrement supérieure à sa valeur nominale. Alors que l'influence de la plus petite constante de temps est très peu visible.

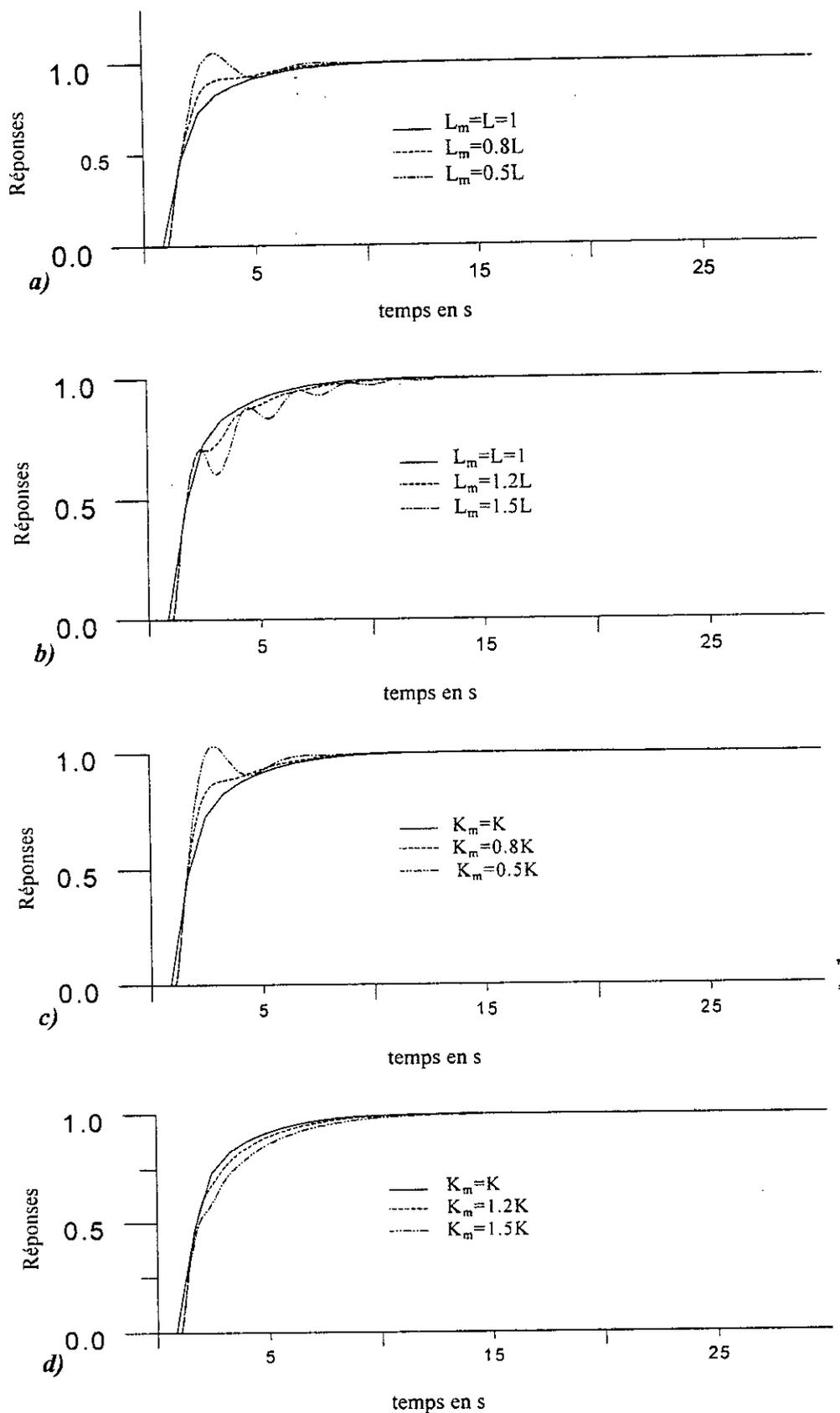


Fig 3-5 Exemple1: réponses indicelles pour des variations de gain et du retard

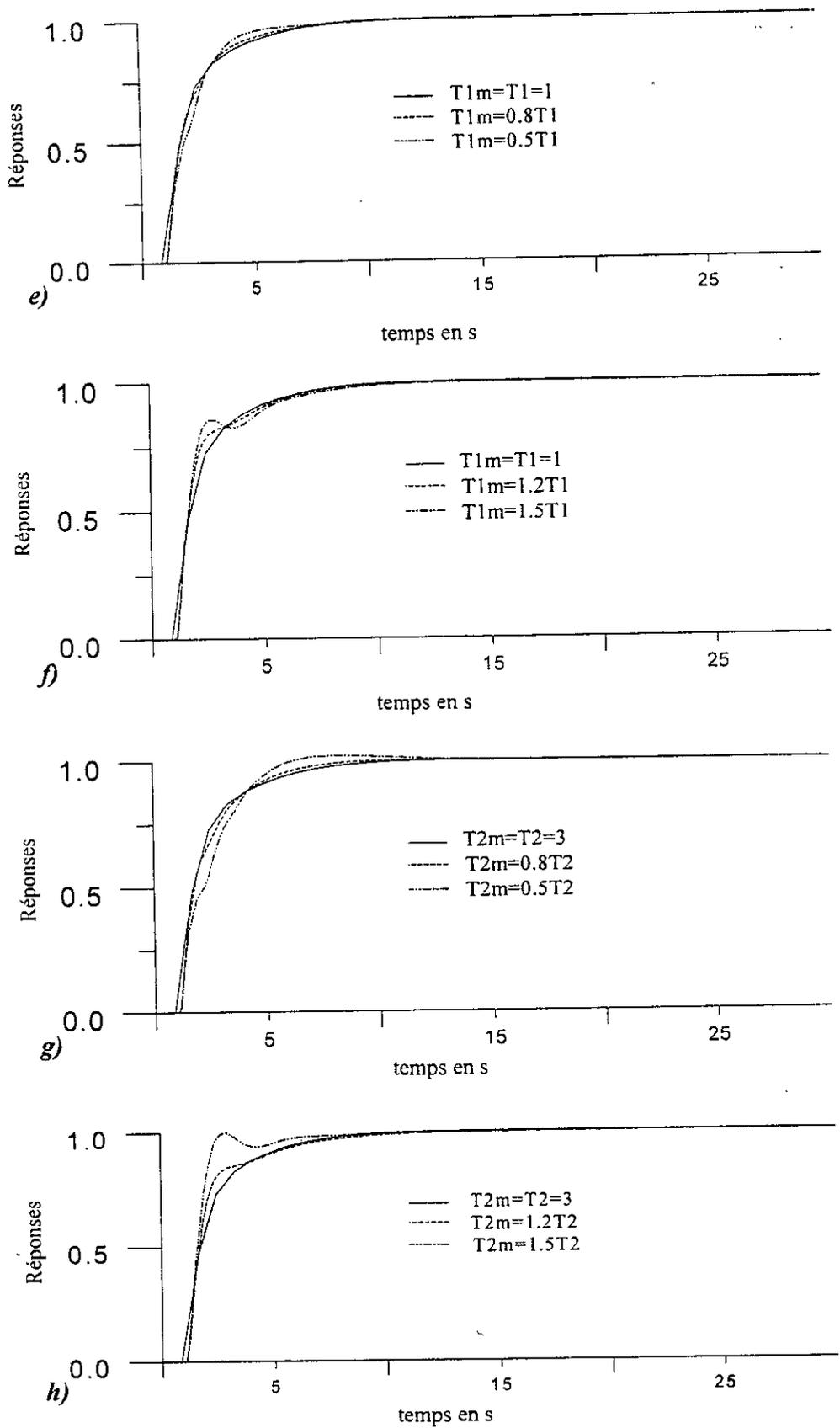


Fig 3-6 Exemple 1: réponses indicielles pour des variations des deux constantes de temps

**Exemple2**

$$G(s) = \frac{e^{-1.5s}}{(1+0.5s)(1+s)} \quad \text{avec} \quad G_m(s) = \frac{K_m e^{-L_m s}}{(1+T_{1m}s)(1+T_{2m}s)} \quad (3-21)$$

Dans cet exemple, le retard est supérieur à la plus grande constante de temps. Tout comme dans l'exemple précédent, nous considérons un modèle  $G_m(s)$  parfaitement identique au procédé, et des variations individuelles des paramètres du modèle de  $\pm 20\%$  ou  $\pm 50\%$  autour des valeurs nominales. Les réponses indicielles du prédicteur de Smith pour des variations individuelles du gain et du retard du modèle, sont présentées dans la figure 3-7. Alors que, celles qui correspondent aux variations individuelles des deux constantes de temps du modèle, sont présentées dans la figure 3-8. A cause du grand retard (par rapport à la plus grande constante de temps), une lenteur et une dégradation des performances des réponses du prédicteur de Smith sont constatées. Néanmoins, on peut toujours observer l'avantage de la sous-estimation du gain et du retard par rapport à leur surestimation (figure 3-7). L'influence des deux constantes de temps reste peu visible.

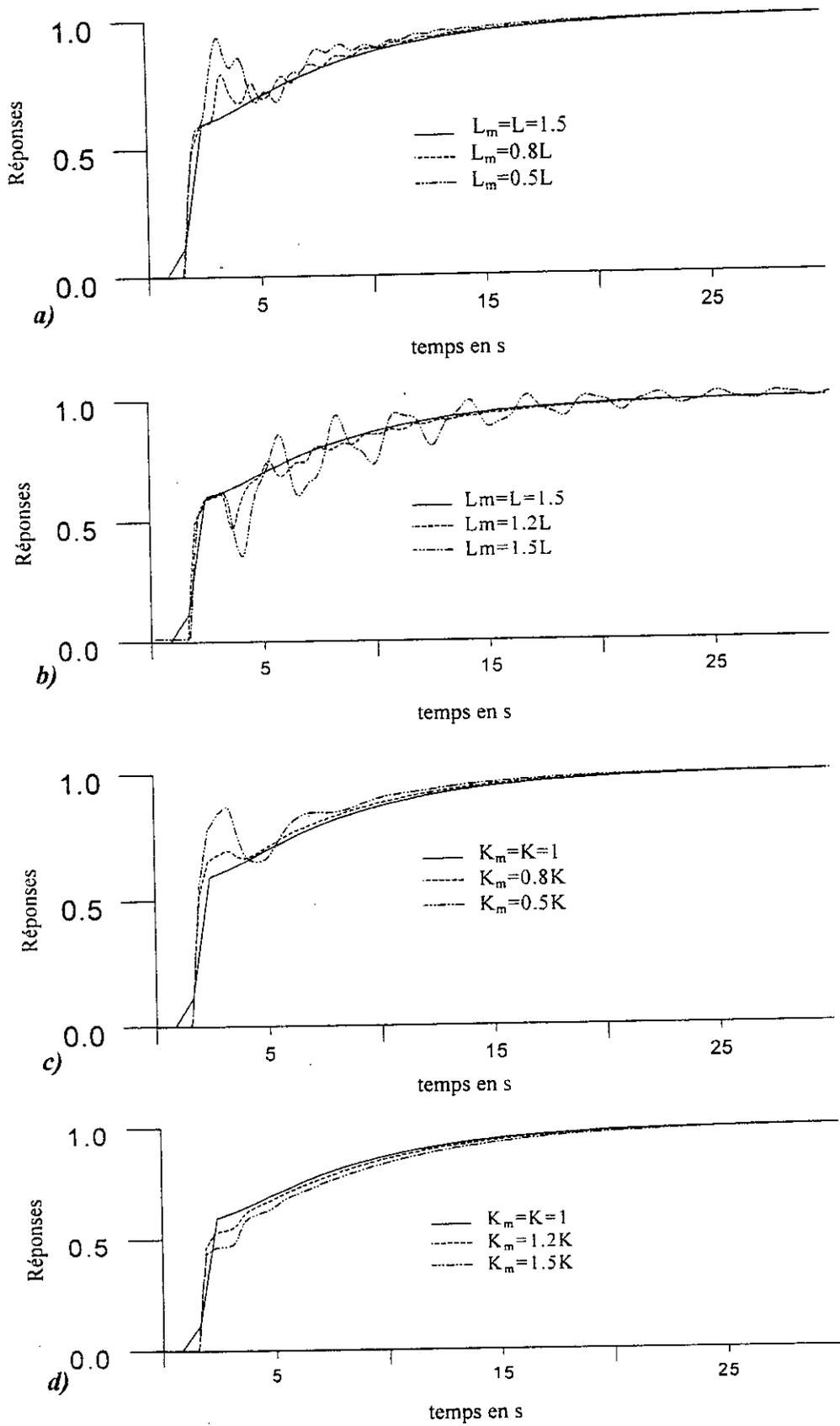


Fig 3-7 Exemple 2 : réponses indicielles pour des variations de gain et du retard

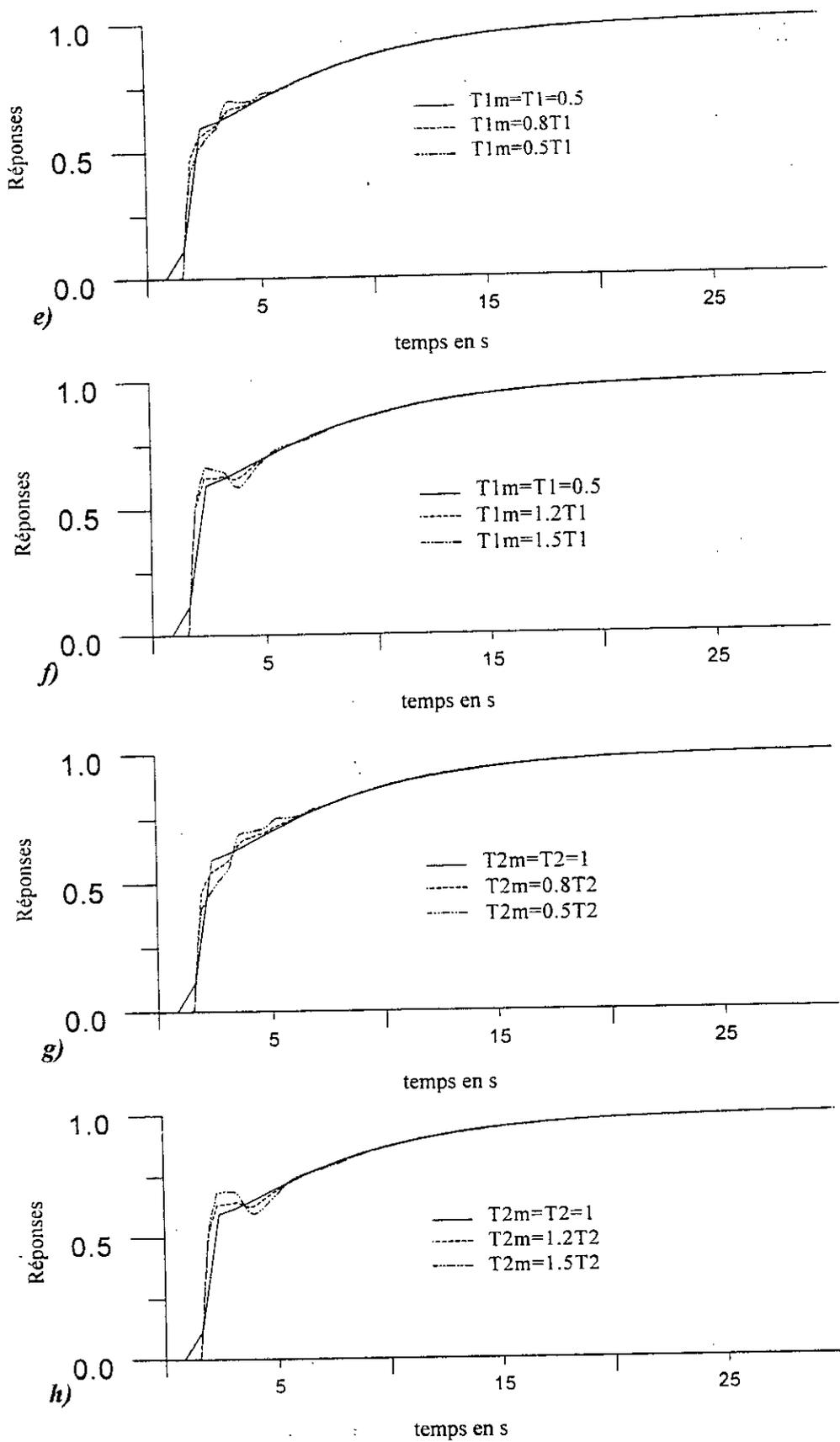


Fig 3-8 Exemple 2 : réponses indicielles pour des variations des deux constantes de temps

### **3.6 Conclusion**

En notant que les mêmes remarques peuvent être faites pour les deux exemples. Nous constatons que le prédicteur de Smith est beaucoup plus sensible aux erreurs de modélisation du retard et du gain statique relativement à celle de la constante de temps.

De plus, les résultats présentés montrent bien, le fait qu'une surestimation du gain est préférée n'est pas toujours exacte. Aussi les recommandations concernant la constante de temps dominante ne sont pas confirmées du moins lorsque le retard est faible devant celle-ci, plutôt quelquefois une surestimation est préférée.

Enfin, nous remarquons que le PS préserve plus au moins sa stabilité en présence d'erreurs de modélisation raisonnables et présente un certain degré de robustesse.

# Chapitre IV

## Commande à Relais dans le Prédicteur de Smith

### 4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons mis en évidence l'effet déstabilisant du temps mort présent dans la plupart des procédés industriels. Les conséquences de celui-ci sur les performances du système, se traduisent essentiellement par une restriction de la bande passante et la réduction du gain admissible. De plus nous avons vu la difficulté d'étudier la sensibilité du prédicteur de Smith vis à vis des erreurs de modélisation de tous les paramètres ensembles. D'où l'intérêt de l'étude de la sensibilité du PS vis-à-vis des paramètres les plus critiques seulement. Puisque la détermination du terme statique peut être faite avec une très grande précision, de ce fait le retard reste sans doute le paramètre le plus critique. Dans ce chapitre, nous ferons appel à la méthode d'Astrom-Hagglund [4] et son extension au prédicteur de Smith pour la détermination du régulateur primaire, tout en ne considérant que l'effet de l'erreur de modélisation et/ou la variation dynamique du retard. L'existence de cycles limites est analysée par la technique de l'équivalent harmonique (DF), alors que leur stabilité est étudiée par la méthode du gain incrémental équivalent [13]. Quelques exemples sont utilisés pour chiffrer les conséquences d'une mauvaise estimation du retard et/ou de sa variation dynamique sur la robustesse du prédicteur de Smith.



$H_L(s)$  s'écrit :

$$H_L(s) = 1 - e^{-L_m s} + e^{-Ls} \quad (4-4)$$

et 
$$H_L(j\omega) = (1 + \cos(\omega L) - \cos(\omega L_m)) + j(\sin(\omega L_m) - \sin(\omega L)) \quad (4-5)$$

$$= R_H + jI_H$$

### 4.2.1 Principe

Lorsqu'on remplace le correcteur primaire  $G_{co}(S)$  par un relais dans le schéma précédent, la sortie du système (figure 4-3) oscille autour de sa valeur moyenne. Cette oscillation entretenue est appelée cycle limite, dont la fréquence et l'amplitude peuvent être déterminées en considérant le gain complexe équivalent du relais [38].

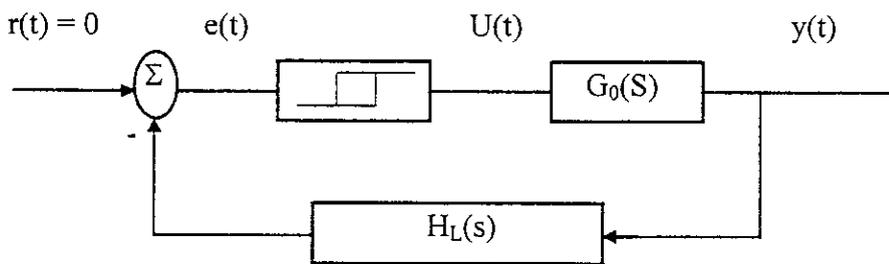


Fig 4-3 Test à relais dans le prédicteur de Smith

Le gain complexe équivalent d'un relais d'amplitude  $M$  et d'hystérésis  $h$  est donné par :

$$N(a) = \frac{4M}{a\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{a}\right)^2} - j \frac{4Mh}{\pi a^2} \quad (4-6)$$

où  $a$  est l'amplitude du signal (supposé sinusoïdal) d'entrée  $e(t)$  du relais.

La condition d'oscillation (i.e. existence de cycle limite) est qu'il y ait intersection entre le lieu de transfert  $G_0(S)H_L(S)$  et le lieu critique  $C(a) = -\frac{1}{N(a)}$ . Cette intersection détermine

l'amplitude et la fréquence ( $a_0, \omega_{cr}$ ) de l'oscillation limite.

Si 
$$R(\omega) = \text{Réelle}\{G_0(j\omega)H_L(j\omega)\} \quad (4-7)$$

$$I(\omega) = \text{Imaginaire}\{G_0(j\omega)H_L(j\omega)\}$$

Alors l'amplitude et la fréquence de l'oscillation limite sont déterminées en résolvant les équations non linéaires suivantes :

$$R(\omega) = \frac{-a\pi}{4M} \left[ 1 - \left(\frac{h}{a}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (4-8)$$

$$I(\omega) = \frac{-\pi h}{4M}$$

### 4.2.2 Stabilité des oscillations limites

#### Gain incrémental équivalent (IDF) :

Le gain incrémental équivalent noté  $N_{iv}(a)$  est défini comme étant le gain du relais à n'importe quelle petite perturbation  $\gamma$  constante et indépendante du signal d'entrée  $e(t)$ . Pour un relais d'amplitude  $M$  et d'hysteresis  $h$ , on a :

$$N_{iv}(a) = \frac{2M}{\pi} (a^2 - h^2)^{-1/2} \quad (4-9)$$

Normalement, plus ce gain est faible plus l'oscillation est stable. Son application à la stabilité des oscillations limites du système de la figure 4-3 se fait comme suit :

L'équation caractéristique qui est donnée par :

$$1 + H_L(s)G_{m0}(s)N(a) = 0 \quad (4-10)$$

où  $G_0(S)$  est remplacé par son modèle  $G_{m0}(S)$ .

L'équation différentielle correspondante s'écrit [13] :

$$q(D)e(t) + h(L, L_m)p(D)n(e(t)) = 0 \quad (4-11)$$

$$\text{Où } G_{m0}(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \quad (4-12)$$

et  $D$  désigne l'opérateur différentiel. Puisque  $H_L(s)$  est une expression de retard seulement, donc  $h_L(L, L_m)$  est un simple décalage temporel.

Si  $e^*(t)$  est la solution de l'équation 4-11 objet de perturbation  $\Delta e$ , le système est décrit par:

$$q(D)(e^* + \Delta e) + h_L(L, L_m)p(D)n(e^* + \Delta e) = 0 \quad (4-13)$$

En se limitant au premier terme dans le développement de Taylor de  $n(e^* + \Delta e)$  autour de la solution  $e^*(t)$ , c.à.d :

$$n(e^* + \Delta e) \approx n(e^*) + \Delta e n'(e^*) \quad (4-14)$$

L'équation 4-13 devient:

$$q(D)e^*(t) + h_L(L; L_m)p(D)n\{e^*(t)\} + q(D)\Delta e + h_L(L, L_m)p(D)n'\{e^*(t)\}\Delta e = 0 \quad (4-15)$$

Ce qui conduit à:

$$q(D)\Delta e + h_L(L, L_m)p(D)n'\{e^*(t)\}\Delta e = 0 \quad (4-16)$$

C'est une équation différentielle à coefficient variable à cause du terme  $n'\{e^*(t)\}$ . Une condition nécessaire pour la stabilité de cette équation variationnelle, est qu'elle soit stable autour de la moyenne  $\overline{n'\{e^*(t)\}}$  [13].

Où  $\overline{n\{e^*(t)\}} = N_{iv}(a^*)$  (4-17)

Ce qui conduit à :

$$\left[ 1 + N_{iv}(a)h_L(L, L_m) \frac{p(D)}{q(D)} \right] \Delta e = 0$$
 (4-18)

Ainsi, cette équation est stable, si tous les zéros de l'équation caractéristique correspondante ci-dessous sont à partie réelle négative.

$$1 + N_{iv}(a)G_{m0}(s)(1+e^{-LS} - e^{-LmS})=0$$
 (4-19)

Cette équation comporte des termes de retard et par suite le nombre de ses solutions est infini à moins de faire une approximation au préalable des retards.

Le meilleur moyen pour étudier la stabilité du système à travers cette équation est le critère de Nyquist dont l'énoncé est ci-dessous :

Le système figure 4-3 est stable à la solution  $a^*$  (déterminée par l'équation 4-8) si le lieu  $N_{iv}(a^*)G_{m0}(j\omega)H_L(j\omega)$  n'entoure pas le point (-1,0).

A noter lorsque  $N_{iv}(a^*)$  qui est une constante, augmente le lieu ci-dessus s'approche du point (-1,0). Ainsi, si  $N_{iv}(a^*)$  est élevé le lieu peut se trouver à gauche du point critique ce qui signifie l'instabilité.

### 4.2.3 Procédure

Lorsque le procédé  $G_0(s)$  est parfaitement représenté par son modèle  $G_{m0}(s)$ .

- 1 - Tracer le lieu de Nyquist de  $G_{m0}(j\omega)H_L(j\omega)$ , pour  $L_m$  légèrement différent de  $L$ .
- 2 - Ajuster  $\frac{h}{M}$  afin d'obtenir plusieurs cycles limites.
- 3 - Résoudre les équations :

$$[\text{Sin}(\omega L_m) - \text{Sin}(\omega L)]R_{G_0}(\omega) + [1 + \text{Cos}(\omega L) - \text{Cos}(\omega L_m)]I_{G_0}(\omega) = \frac{-\pi h}{4M}$$

$$\Rightarrow \omega_{cr} \text{ (fréquence de l'oscillation limite)}$$

$$[1 + \text{Cos}(\omega_{cr} L) - \text{Cos}(\omega_{cr} L_m)]R_{G_0}(\omega_{cr}) - [\text{Sin}(\omega_{cr} L_m) - \text{Sin}(\omega_{cr} L)]I_{G_0}(\omega_{cr}) = \frac{-\pi h}{4M} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow a_0 \text{ (amplitude de l'oscillation limite)}$$

- 4 - Superposer le lieu  $G_0(j\omega)H_L(j\omega)$  au lieu critique  $-\frac{1}{N(a)}$  pour vérifier la stabilité par le critère de Loeb.
- 5 - Observer si le lieu de Nyquist de  $N_{iv}(a^*)G_{m0}(j\omega)H_L(j\omega)$  contourne le point (-1,0) afin de vérifier la stabilité par IDF.

#### 4.2.4 Exemples d'illustration

Nous avons choisi 3 exemples de dynamiques différentes pour vérifier au mieux l'application des deux critères sur la stabilité des oscillations. A noter que nous avons pris des valeurs d'hystérésis faibles et raisonnables, ce qui nous a conduit à une certaine différence entre les valeurs mesurées et celles déterminées par la résolution des équations non linéaires (valeurs exactes). Pour que les mesures des paramètres d'oscillation soient proches des valeurs exactes, des rapports  $h/M$  exagérés sont nécessaires.

##### Exemple 1

Soit le système de fonction de transfert suivante :

$$G_0(s)e^{-Ls} = \frac{(1-s)e^{-s}}{(1+s)^5} \quad (4-20)$$

Dans la schématisation de la figure 4-3, l'amplitude du relais est fixée à 1, alors que l'hystérésis est variée afin d'obtenir différents cycles limites. Les paramètres de ceux-ci sont déterminés analytiquement en considérant le gain complexe équivalent.

Pour  $h=0.2$  et  $0.05$ , la stabilité des cycles limites est analysée par les deux techniques présentées au début de ce chapitre pour une certaine erreur d'estimation du retard. Dans cet exemple, le retard est supposé nul. Le lieu de transfert de la fonction  $G_0(j\omega)H_L(j\omega)$  est tracé dans la figure 4-4 avec les deux lieux critiques correspondants aux deux valeurs d'hystérésis  $0.2$  et  $0.05$ . Comme le montre la figure une seule oscillation de cycle limite est obtenue pour le premier cas alors qu'on observe deux cycles limites pour le deuxième cas.

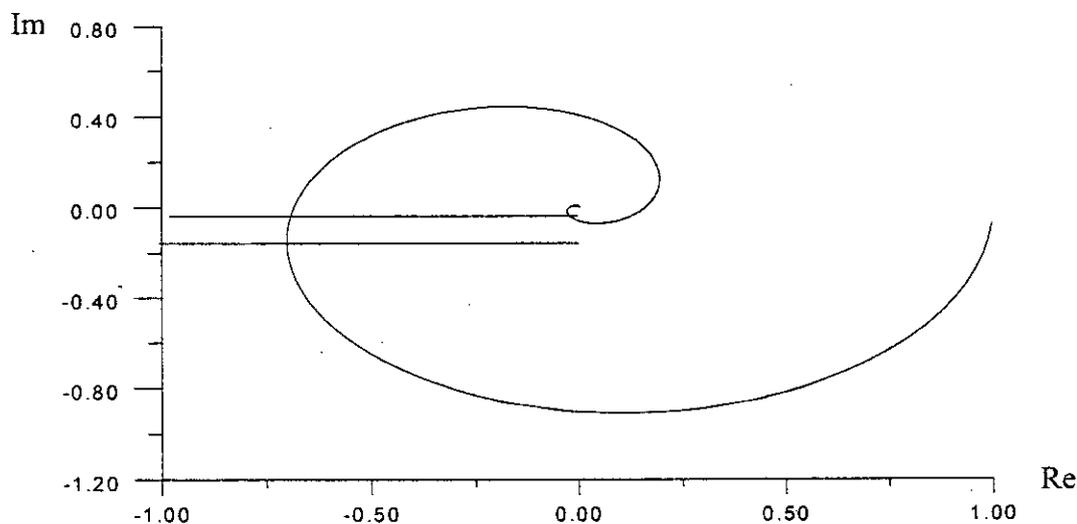


Fig 4-4 Exemple 1 : Lieu de Nyquist superposé aux deux lieux critiques correspondants aux deux valeurs d'hystérésis

Tous les cycles limites apparaissent comme stables par le critère de Loeb. Tandis que l'analyse par IDF (figure 4-6-a/c) montre que seulement l'oscillation de basse fréquence est stable. Le tableau suivant résume les résultats de l'analyse.

h/M	cycle limite	$\omega_{cr}^*$	$a^*$	critère de Loeb	IDF
0.2	1 <sup>er</sup> CL	0.4360	0.9131	stable	stable
0.05	1 <sup>er</sup> CL	0.4640	0.8812	stable	stable
	2 <sup>ème</sup> CL	1.8520	0.0563	stable	instable

Tab 4-1 Résultats d'analyse de la stabilité

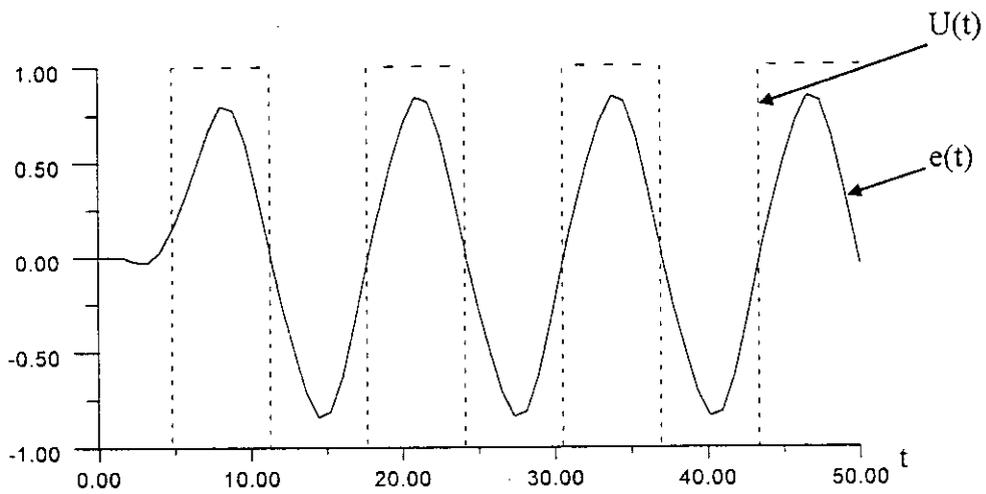


Fig 4-5 Formes des signaux d'entrée-sortie du relais pour h/M=0.05.

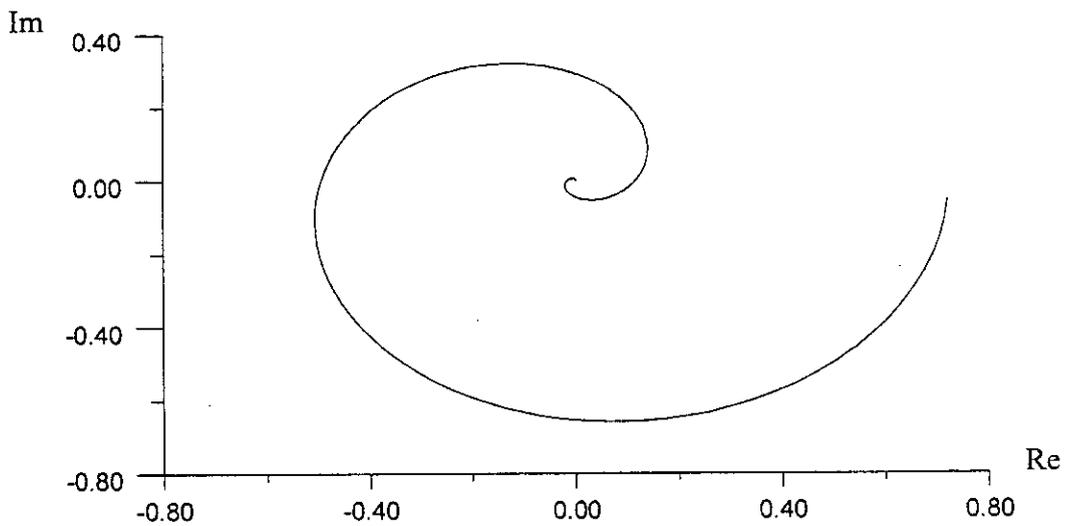


Fig 4-6-a Stabilité par IDF du cycle limite pour h/M=0.2

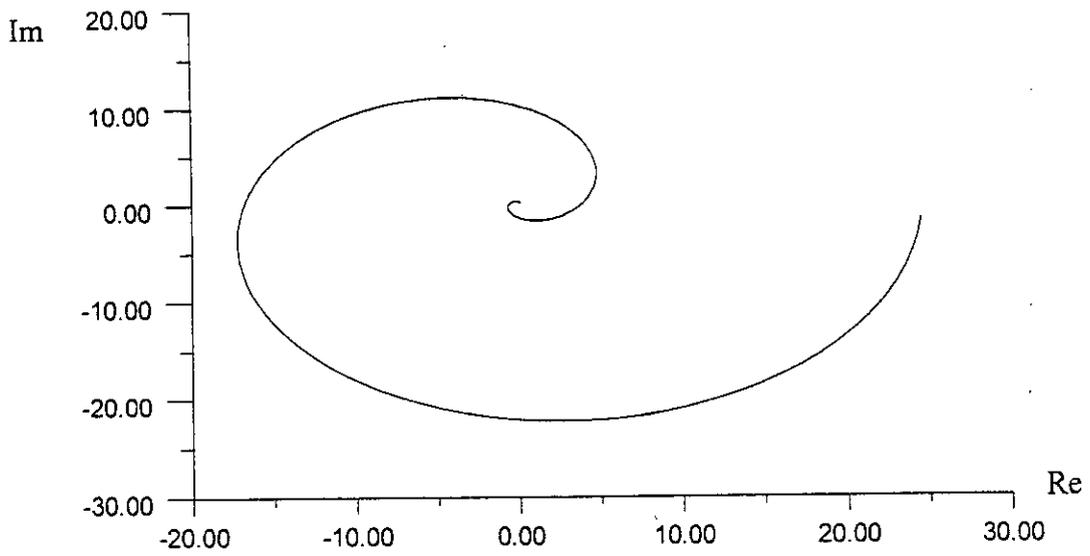


Fig 4-6-b Stabilité par IDF du 2<sup>ème</sup> cycle limite pour h/M=0.0.5

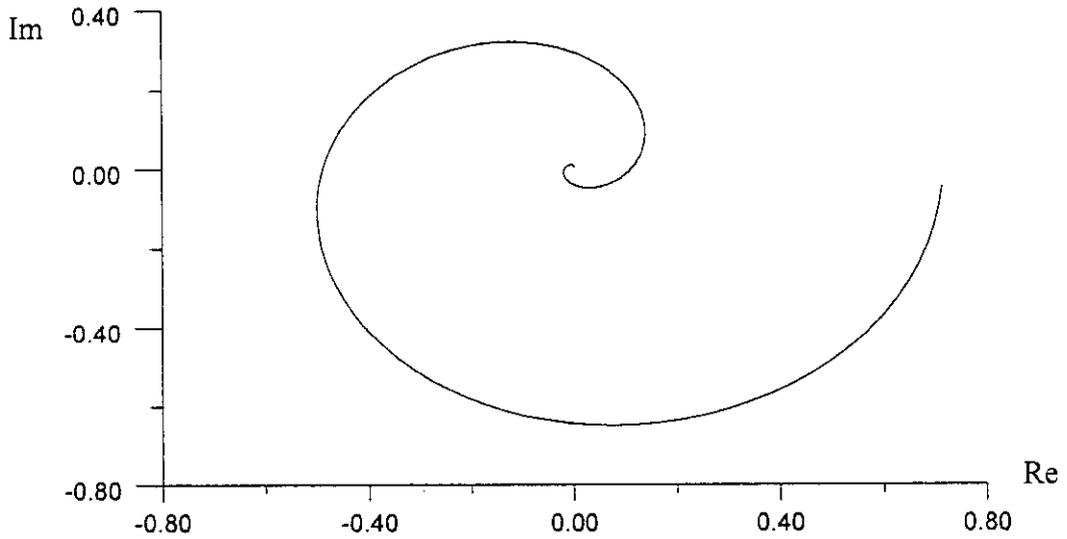


Fig 4-6-c Stabilité par IDF du 1<sup>er</sup> cycle limite pour h/M=0.0.5

### Exemple 2

Soit l'exemple du système à retard suivant :

$$G_0(s)e^{-Ls} = \frac{e^{-3s}}{(s+1)^3} \quad (4-21)$$

Où la valeur du retard dans le modèle est égale à 3.5. L'amplitude du relais toujours fixée à 1 tandis que la valeur d'hystérésis est variée entre 0.10 et 0.20. Les lieux de transfert de  $G_0(j\omega)H_L(j\omega)$  et  $C(a)$  ont été superposés dans la figure 4-7.

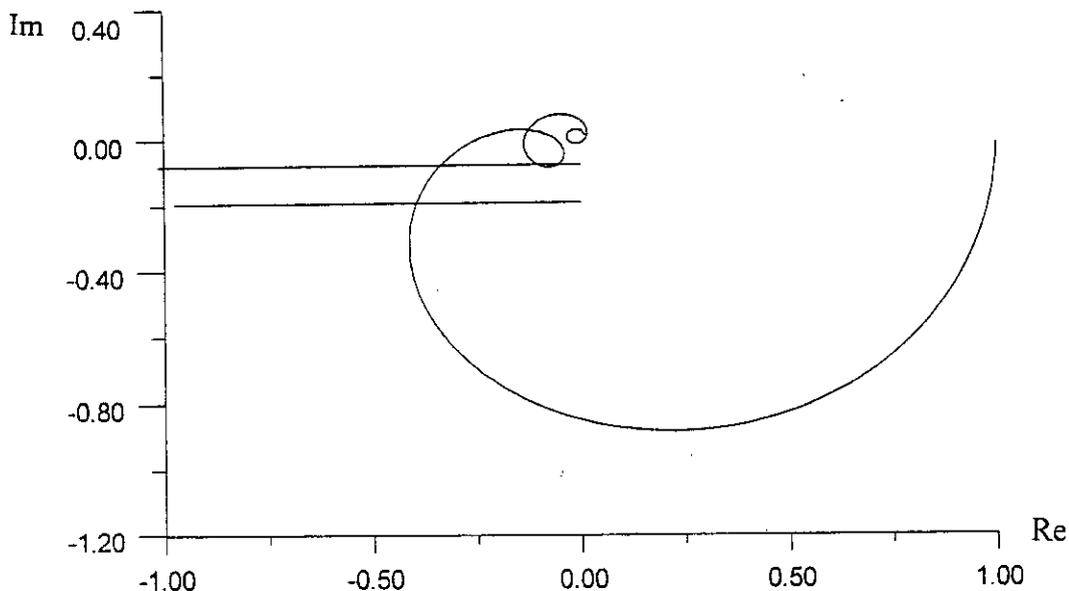


Fig 4-7 Exemple 2 : Lieu de Nyquist superposé aux deux lieux critiques correspondants aux deux valeurs d'hystérésis

Pour  $h/M=0.10$  un troisième cycle limite apparaît sur la figure 4-7, celui-ci est instable par le critère de Loeb. Pour les autres oscillations, le tableau 4-2, montre que tous les cycles limites semblent être stables par le critère de Loeb. Alors que seulement l'oscillation de basse fréquence est stable par l'IDF. Les formes des signaux d'entrée et de sortie du relais sont présentées dans la figure 4-8 pour  $h/M=0.1$

h/M	cycle limite	$\omega_{cr}^*$	$a^*$	critère de Loeb	IDF
0.2	1 <sup>er</sup> CL	0.9660	0.5253	stable	stable
0.1	1 <sup>er</sup> CL	1.0310	0.4398	stable	stable
	2 <sup>ème</sup> CL	1.9160	0.667	stable	instable

Tab 4-2 Résultats d'analyse de la stabilité

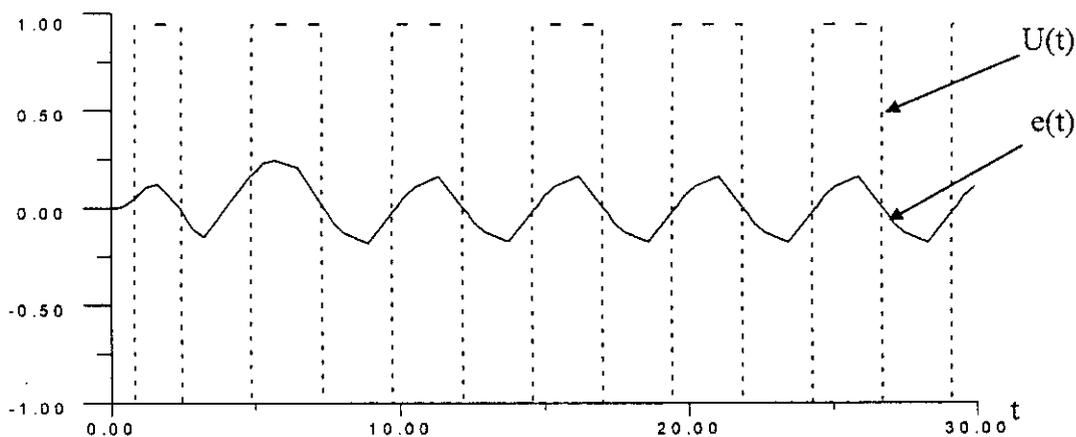


Fig 4-8 Formes des signaux d'entrée-sortie du relais pour  $h/M=0.1$

**Exemple 3**

Soit le procédé représenté par la fonction de transfert suivante :

$$G_0(s)e^{-Ls} = \frac{e^{-3s}}{(2s+1)(s+1)} \quad (4-22)$$

Où le retard est estimé égal à 2.5 et le rapport h/M est varié entre 0.05 et 0.20. Le tracé de Nyquist du système en boucle ouverte avec ceux des deux lieux critiques est présenté dans la figure 4-9. Le résumé des résultats dans le tableau 4-3 montre que seulement l'oscillation de basse fréquence est stable.

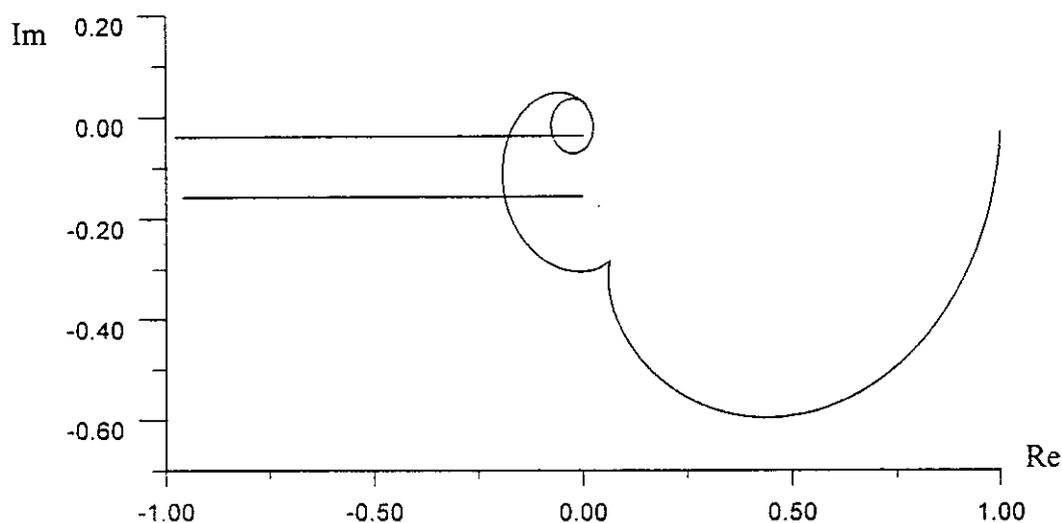


Fig 4-9 Exemple 3 : Lieu de Nyquist superposé aux deux lieux critiques correspondants aux deux valeurs d'hystérésis

L'analyse de ces trois exemples montre que le critère de Loeb ne peut être valable en présence de plusieurs cycles limites. L'examen par IDF permet de faire une analyse plus fine donnant lieu à une généralisation : seule l'oscillation de basse fréquence est stable.

h/M	cycle limite	$\omega_{cr}^*$	$a^*$	critère de Loeb	IDF
0.2	1 <sup>er</sup> CL	1.7830	0.3118	stable	stable
0.05	1 <sup>er</sup> CL	2.0600	0.2314	stable	stable
	2 <sup>ème</sup> CL	3.9290	0.1052	stable	instable

Tab 4-3 Résultats d'analyse de la stabilité

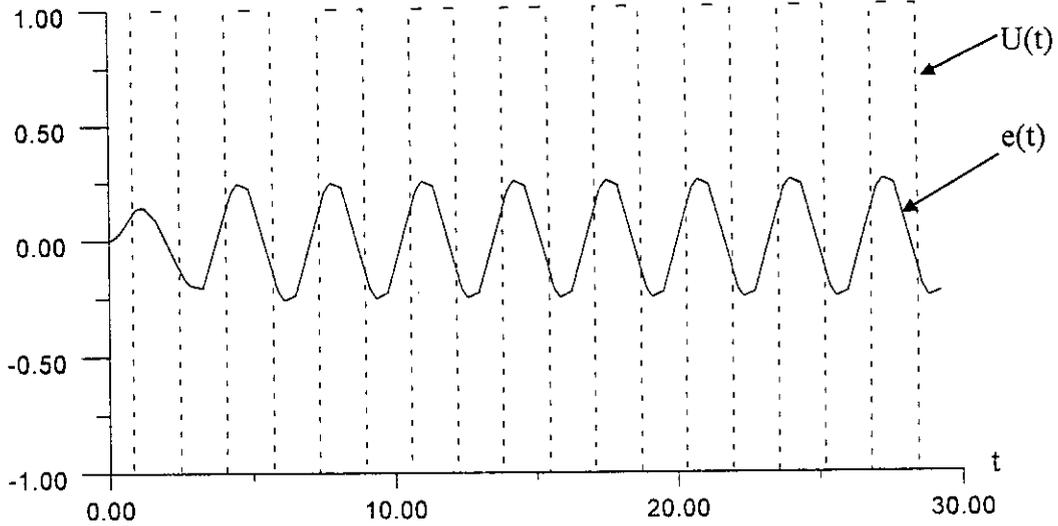


Fig 4-10 Formes des signaux entrée-sortie du relais pour  $h/M=0.20$ .

### 4.3.1 Investigation d'un PID dans le PS par la méthode d'Astrom-Hagglund

Dans cette section, nous ferons appel à la méthode d'Astrom-Hagglund pour déterminer les paramètres du correcteur primaire  $G_{c0}(s)$  du prédicteur de Smith. Nous examinons la sensibilité de celui-ci dans les deux cas suivants [57][17] :

- 1 - Le correcteur primaire  $G_{c0}(S)$  sous forme de PID est déterminé en supposant  $G_0(S)e^{-LS} = G_{m0}(S)e^{-LmS}$  c.à.d.  $H_L(s) = 1$ . Le PID ainsi obtenu, est testé en présence d'erreur d'estimation et/ou de la variation du retard. Cette méthode est référée par la méthode analytique.
- 2 - Dans le cas où  $H_L(s) \neq 1$ , pour un certain rapport  $h/M$ , nous aurons pour chaque erreur  $(L-L_m)_i$  une certaine fonction d'erreur  $H_{Li}(s)$  et une certaine oscillation limite  $(\omega_i, a_i)$  et par suite un certain  $PID_i$  : C'est une méthode on-line.

Dans les deux cas, l'objectif est de choisir les paramètres du correcteur primaire  $G_{c0}(s)$  sous forme d'un PID de façon à ce que le point d'intersection obtenu des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 G_0(j\omega_{cr})H_L(j\omega_{cr}) &= \frac{-\pi}{4M} \sqrt{a_0^2 - h^2} - j \frac{\pi h}{4M} \\
 &= \frac{-\pi a_0}{4M} \left[ \sqrt{1 - \frac{h^2}{a_0^2}} + j \frac{h}{a_0} \right] \\
 &= \frac{-\pi a_0}{4M} e^{j(\pi + \psi)}
 \end{aligned} \tag{4-23}$$

où 
$$\psi = \arcsin\left(\frac{h}{a_0}\right)$$

soit déplacé par le PID à une autre position sur le cercle unité, spécifiée par une marge de phase  $\phi_m$ . Cette position cible est donnée par  $e^{j(\pi+\phi_m)}$ .

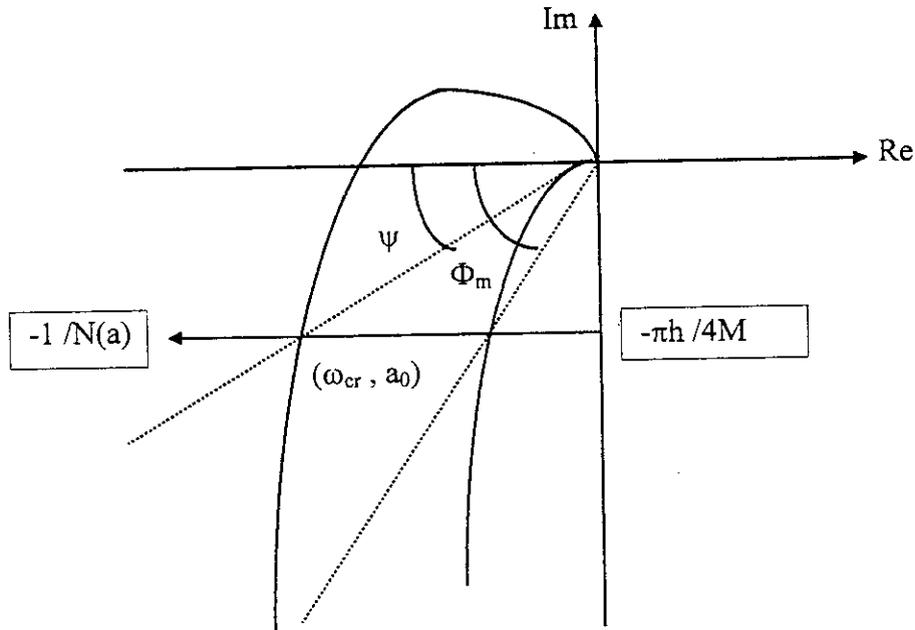


Fig 4-11 Compensation dans le plan complexe à partir de test à relais

$$\text{On a : } G_c(j\omega_{cr}) = K_p \left( 1 + j \left( \omega_{cr} T_d - \frac{1}{T_i \omega_{cr}} \right) \right) \quad (4-24)$$

Ainsi, le système compensé est donné par :

$$G(j\omega_{cr})H_L(j\omega_{cr})G_c(j\omega_{cr}) = e^{j(\pi+\phi_m)} \quad (4-25)$$

C'est-à-dire :

$$|G(j\omega_{cr})H_L(j\omega_{cr})| |G_c(j\omega_{cr})| e^{j(\pi+\psi+\phi_c)} = e^{j(\pi+\phi_m)} \quad (4-26)$$

où :

$$\phi_c = \text{arctg} \left( \omega_{cr} T_d - \frac{1}{\omega_{cr} T_i} \right) \quad (4-27)$$

$$\text{Ce qui conduit à : } \begin{cases} \omega_{cr} T_d - \frac{1}{\omega_{cr} T_i} = \text{tg}(\phi_m - \psi) \\ |G_c(j\omega_{cr})| = \frac{1}{|G_0(j\omega_{cr})H_L(j\omega_{cr})|} \end{cases} \quad (4-28)$$

La première relation admet plusieurs solutions ( $T_d$ ,  $T_i$ ). Une possibilité consiste à choisir une relation linéaire entre  $T_d$  et  $T_i$  telle que :

$$T_i = \alpha T_d \quad (4-29)$$

Le choix de la valeur de  $\alpha$  peut se faire selon la méthode de Ziegler-Nichols. Par suite les paramètres du régulateur PID sont déterminés par :

$$\begin{cases} T_i = \alpha T_d \\ T_d = \frac{\text{tg}(\phi_m - \psi) + \sqrt{4/\alpha + \text{tg}^2(\phi_m - \psi)}}{2\omega_{cr}} \\ K_p = \frac{4M}{\pi a_0} \text{Cos}(\phi_m - \psi) \end{cases} \quad (4-30)$$

L'existence de cycle limite est examinée par un choix approprié du rapport  $h/M$ . L'angle de déviation  $\psi$  qui dépend de ce rapport doit satisfaire la condition :  $\psi < \phi_m$ . Le choix d'une hystérésis inférieure à 10% de  $M$  fait que  $\psi$  est de faible valeur. Ainsi, ayant une spécification  $\phi_m$ , la valeur de  $\alpha$  et les paramètres du cycle limite ( $\omega_{cr}, a_0$ ) et ceux du régulateur PID sont complètement déterminés par les équations ci-dessus.

**N.B :** La valeur de  $\alpha$  est choisie selon Z-N, égale à 4. Une chose importante est que l'amplitude de l'oscillation à partir de laquelle on détermine le PID, doit avoir une valeur admissible d'environ 20% de la sortie. Celle-ci représente une contrainte pratique due à la tenue du matériel. On peut toujours la réduire en variant l'hystérésis  $h$ .

### 4.3.2 Procédure

#### A) Méthode analytique

- 1 - Remplacer  $G_{c0}(s)$  dans la figure 4-2 par un relais à hystérésis et sélectionner un rapport  $h/M$  approprié.
- 2 - Quand le régime permanent est atteint, mesurer l'amplitude et la fréquence des oscillations limites ( $\omega_{cr}, a_0$ ) ou bien les déterminer par les équations non linéaires, puis calculer  $\psi = \arcsin(h/a_0)$ .
- 3 - a) Si  $a_0 \leq 0,20$  utiliser les équations 4-25 pour déterminer les paramètres du PID  $G_{c0}(S)$ .  
b) Si  $a_0 > 0,20$  réduire l'hystérésis pour amener  $a_0 \leq 0,20$  puis revenir en 3-a.

#### B) Méthode on-line

On a pour chaque erreur d'estimation du retard un certain PID. Pour garder les mêmes performances obtenues par le régulateur  $G_{c0}(j\omega_{cr})$  en présence d'une certaine erreur ( $L-L_m$ ), il faut employer un régulateur primaire  $G_{cL}(j\omega_{cr})$  de façon que :

$$G_{cL}(j\omega_{cr})G_{m0}(j\omega_{cr})H_L(j\omega_{cr}) = G_{c0}(j\omega_{cr})G_{m0}(j\omega_{cr})$$

Cela veut dire que le lieu de Nyquist de  $G_{m0}(j\omega_{cr})H_L(j\omega_{cr})$  est déplacé par  $G_{cL}(j\omega_{cr})$  à la même position  $G_{c0}(j\omega_{cr})G_{m0}(j\omega_{cr})$ .

$$\Rightarrow G_{cL}(j\omega_{cr}) = \frac{G_{c0}(j\omega_{cr})}{H_L(j\omega_{cr})}$$

Ce qui conduit à :

$$G_{cL}(j\omega_{cr}) = \frac{K_{p0}}{\cos(\phi_m - \psi)} \frac{1}{|H_L(j\omega_{cr})|} e^{j(\phi_m - \psi - \psi_d)}$$

Où  $\psi_d$  est le déphasage introduit par  $H_L(j\omega_{cr})$ , qui est donné par :

$$\psi_d = \tan^{-1} \left[ \frac{\sin(L_m \omega_{cr}) - \sin(L \omega_{cr})}{1 + \cos(L \omega_{cr}) - \cos(L_m \omega_{cr})} \right]$$

Par identification de l'expression de  $G_{cL}(j\omega_{cr})$  avec la forme standard d'un PID, on aura :

$$\begin{cases} K_p = \frac{K_{p0}}{|H_L(j\omega_{cr})| \cos(\phi_m - \psi)} \cos(\phi_m - \psi - \psi_d) \\ T_d = \frac{\text{tg}(\phi_m - \psi - \psi_d) + \sqrt{\frac{4}{\alpha} + \text{tg}^2(\phi_m - \psi - \psi_d)}}{2\omega_{cr}} \\ T_i = \alpha T_d \end{cases}$$

Ce réglage est très simple dans le cas où le déphasage  $\psi_d$  à  $\omega_{cr}$  est faible. Cependant, à cause du comportement imprévisible de  $\psi_d$  le déphasage introduit par le régulateur ( $\phi_c = \phi_m - \psi - \psi_d$ ) peut être négatif si  $\psi_d > \phi_m - \psi$  ce qui réduit la marge de stabilité. Dans ce cas, il faut prévoir une grande marge de phase  $\phi_m$ .

De toute façon si  $\psi_d$  est très grand, il vaut mieux éviter cette approche.

### Identification du $\psi_d$

Ayant obtenu  $(\omega_{cr}, a_0)$  et la valeur de  $\psi$  des deux premières étapes de la méthode analytique, en faisant le même test lorsque  $H_L(s) \neq 1$  mais en changeant itérativement l'hystéresis  $h$  afin de localiser la même fréquence  $\omega_{cr}$  en appliquant la formule de récurrence suivante [17] :

$$h_{n+1} = h_n - (\omega_n - \omega_{cr}) \frac{h_n - h_{n-1}}{\omega_n - \omega_{n-1}}$$

Une fois la fréquence  $\omega_{cr}$  localisée, on relève l'hystéresis  $h_2$  et on mesure l'amplitude  $a_2$  puis on calcule l'angle de déviation  $\psi_2 = \arcsin(\frac{h_2}{a_2})$ . Ainsi le déphasage  $\psi_d$

introduit par l'erreur d'estimation du retard est :  $\psi_d = \psi_2 - \psi$

Ce qui permet de calculer les paramètres du régulateur ci-dessus.

### 4.3.3 Exemples d'illustration

Deux exemples ont été choisis, pour analyser la robustesse du prédictiveur de Smith à la base des deux techniques de ce chapitre. Pour chaque exemple, deux valeurs du retard sont considérées afin de chiffrer au mieux l'influence des erreurs d'estimation de ce dernier. Rappelons que pour la première technique le PID  $G_{c0}(s)$  est déterminé en considérant seulement la partie rationnelle du modèle, alors que pour la deuxième technique on a pour chaque erreur de modélisation du retard un certain PID  $G_{c0}(s)$ .

#### Exemple 1

Soit le système suivant :

$$G_0(s)e^{-Ls} = \frac{e^{-Ls}}{(s+1)^3} \quad (4-31)$$

A noter que lorsque le modèle représente exactement le procédé, les deux techniques donnent lieu au même PID.

#### 1°) Méthode analytique

Dans ce cas, on suppose une parfaite représentation du procédé en main, en utilisant un relais d'hystéresis  $h=0.01$  et d'amplitude  $M=\pm 1$ . Le point d'intersection (figure 4-11) qui détermine les paramètres de l'oscillation limite, forme un angle  $\psi=3.2725^\circ$  avec l'axe réel négatif. L'amplitude et la fréquence du cycle limite sont respectivement  $a^*=0.1752$  et  $\omega_{cr}^*=1.6590$ . L'objectif est de déterminer le PID qui déplace le point d'intersection ( $a^*$ ,  $\omega_{cr}^*$ ) à une autre position sur le lieu, spécifiée par une marge de phase  $\phi_m = \pi/4$ . Le PID ainsi obtenu, est donnée par :

$$\begin{aligned} G_{c0}(s) &= Kp(1+1/T_i s + T_d s / (1+0.1T_d s)). \\ &= 3.2547 ( 1 + 1/2.9605s + 0.6726s / ( 1 + 0.06726s)). \end{aligned}$$

a)  $\frac{e^{-s}}{(s+1)^3}$

Les réponses indicielles (en boucle fermée) du système compensé, sont présentées dans les figures 4-12 et 4-13 pour différentes valeurs de l'estimation du retard. Nous remarquons que les performances sont bonnes lorsque les erreurs de modélisation du retard restent inférieures à  $\pm 50\%$  autour de la valeur réelle.

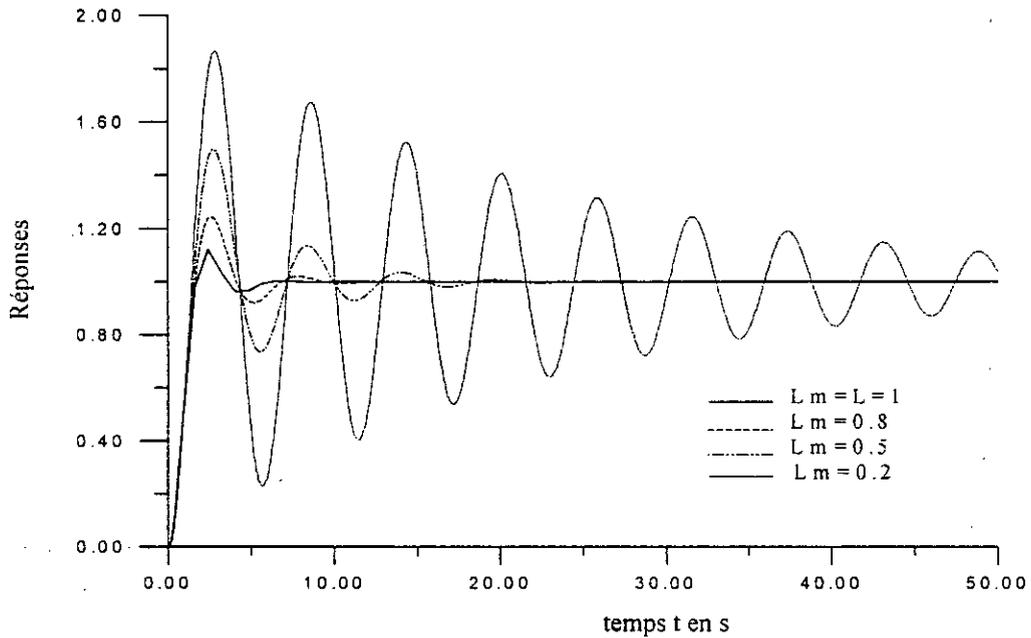


Fig 4-12 Exemple 1: Réponses indicielles, sous-estimation du retard, méthode analytique

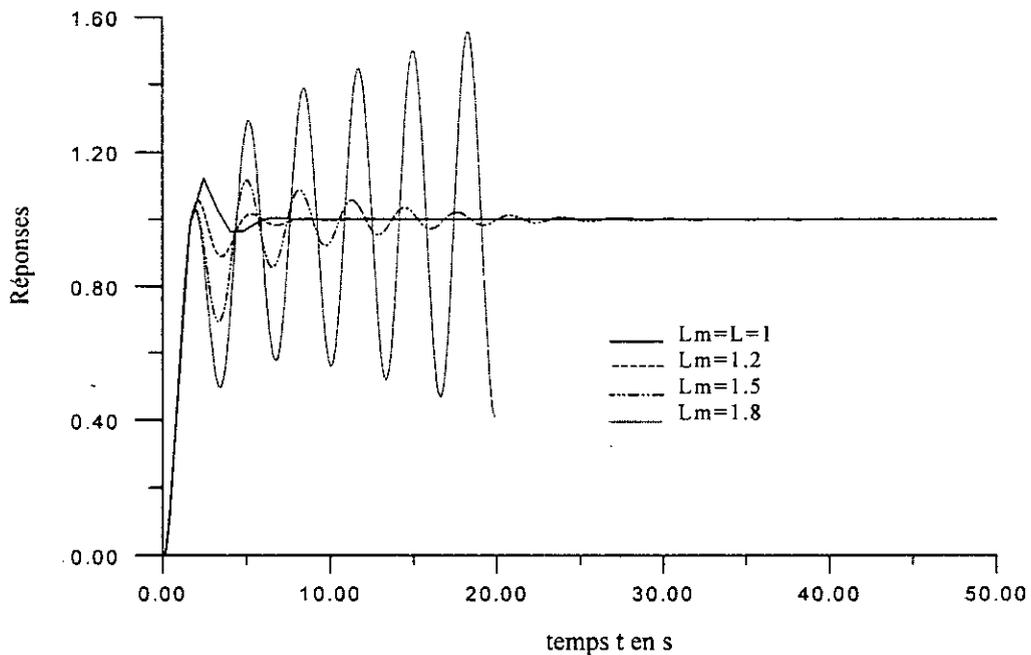


Fig 4-13 Exemple 1 : Réponses indicielles, surestimation du retard, méthode analytique

b)  $\frac{e^{-3s}}{(s+1)^3}$

Pour le même exemple, la valeur du retard est supposée égale à 3. Dans le cas d'une parfaite représentation, les mêmes valeurs des paramètres sont obtenues, c.à.d. le même PID et le même angle de déviation  $\psi$ . La figure 4-14 suivante montre que dans ce cas, seulement une légère erreur de modélisation du retard égale au maximum à  $\pm 20\%$  autour de la valeur réelle, est permise.

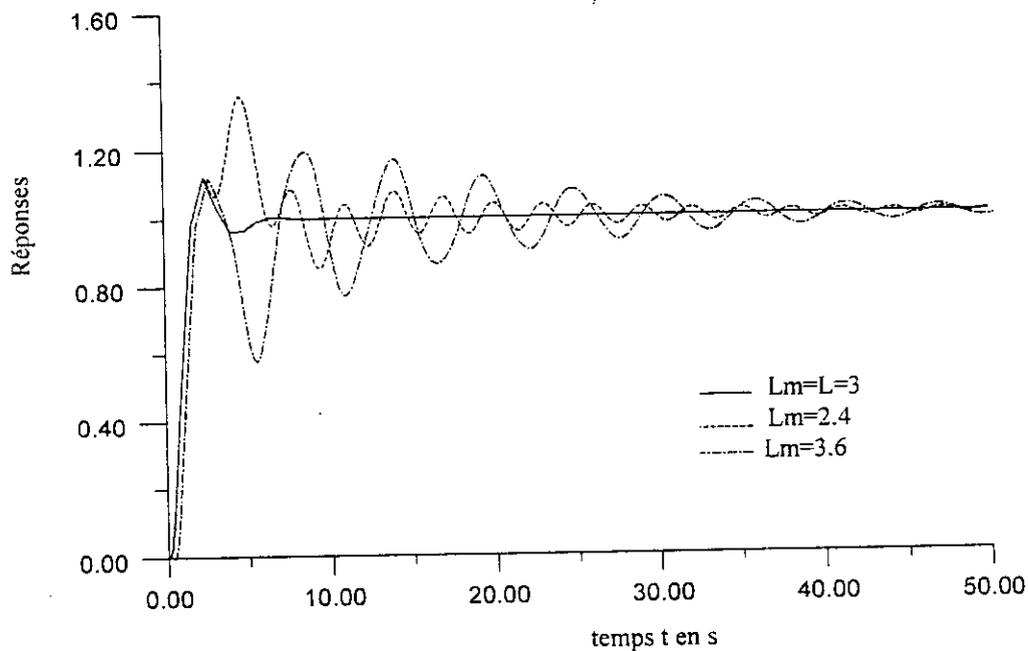


Fig 4-14 Exemple 1 avec retard=3 : Réponses indicielles: méthode Analytique

## 2°) Méthode on-line

Dans le but d'améliorer la réponse du PS lors d'une mauvaise estimation du retard, nous appliquons la méthode on-line. Cette dernière permet d'obtenir le PID en tenant compte du déphasage introduit par les erreurs de modélisation.

a)  $\frac{e^{-s}}{(s+1)^3}$

Les mêmes paramètres du relais que la première technique et la même marge de phase désirée sont maintenues. Pour différentes erreurs d'estimation du retard, l'angle de déviation  $\psi$  ainsi que les paramètres du cycle limite et du régulateur primaire  $G_{c0}(s)$  sous forme de PID, sont listés dans le tableau ci-dessous.

$L_m$	$\omega_{cr}^*$	$a^*$	$\psi^\circ$	$K_P$	$T_i$	$T_d$
0.2	0.9620	0.4111	1.3938	1.3455	4.8514	1.2128
0.5	1.1290	0.2560	2.2389	2.1911	4.0510	1.0128
0.8	1.5510	0.1414	4.0560	4.0815	2.8259	0.7065
<b>1</b>	<b>1.6590</b>	<b>0.1752</b>	<b>3.2725</b>	<b>3.2547</b>	<b>2.6905</b>	<b>0.6726</b>
1.2	1.6160	0.2442	2.3465	2.3003	2.8230	0.7057
1.5	1.5250	0.3611	1.5867	1.5366	3.0462	0.7615
1.8	1.4380	0.4827	1.1870	1.1420	3.2618	0.8154

Tab 4-4 Résultats de synthèse par la méthode on-line pour différentes valeurs d'estimation du retard

Un examen simple des résultats du tableau montre que pour les grandes erreurs d'estimation du retard, l'angle de déviation  $\psi$  devient très faible. Ce qui donne lieu à des actions proportionnelle et intégrale très limitées. Cela peut être observée à partir des expressions des équations 4-25. Les réponses indicielles (en boucle fermée) du système compensé pour différentes erreurs de modélisation du retard, sont présentées dans les figures 4-15 et 4-16. La réduction des actions proportionnelle et intégrale conduit à des réponses très lentes, mais restent quand même meilleures comparativement aux mêmes erreurs de modélisation dans la technique précédente. Une solution consiste à réduire la marge de phase à prévoir au fur et à mesure que l'erreur d'estimation augmente, mais le système devient moins robuste.

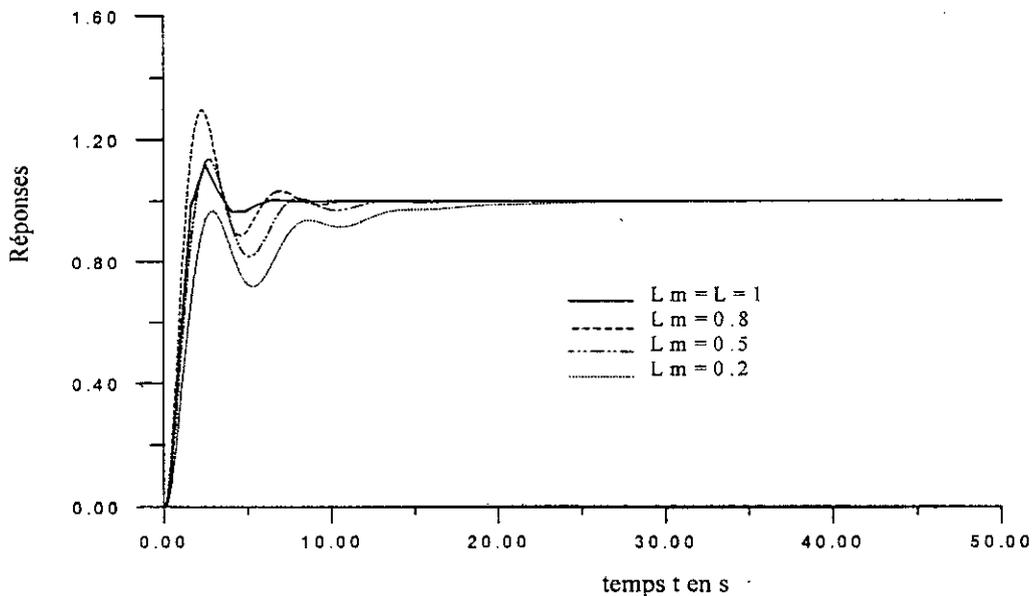


Fig 4-15 Exemple 1 : Réponses indicielles, sous-estimation du retard, méthode on-line

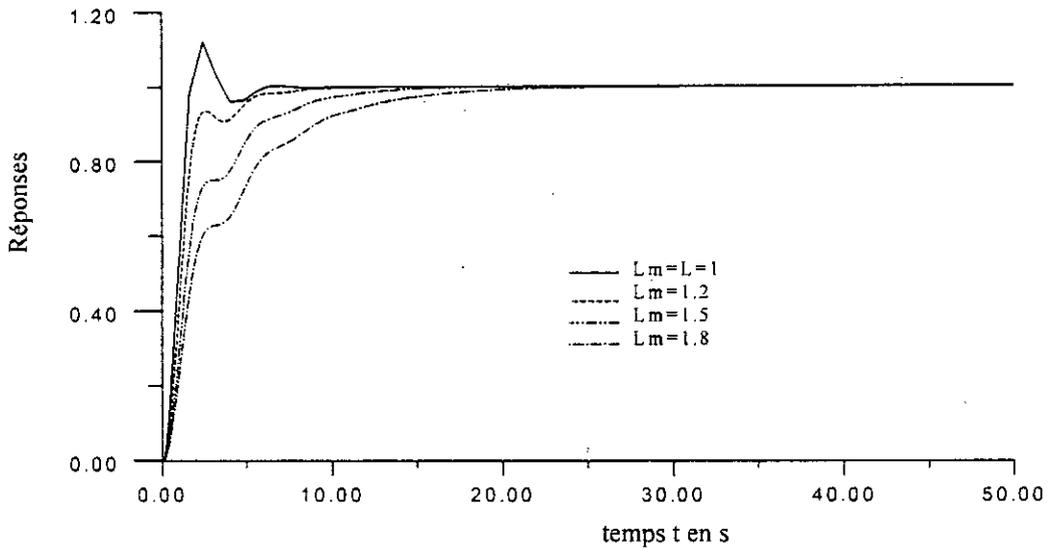


Fig 4-16 Exemple 1 : Réponses indicielles, surestimation du retard, méthode on-line

b)  $\frac{e^{-3s}}{(s+1)^3}$

Pour le même procédé et les mêmes paramètres de réglage mais avec un retard réel égal à 3. Le tableau et la figure ci-après montrent que seulement une légère erreur de modélisation de  $\pm 20\%$  est tolérée. Ce qui revient à dire que la robustesse des deux techniques présentées dépend énormément de la réglabilité du procédé à commander, qui est liée à la valeur du retard.

$L_m$	$\omega_{cr}^*$	$a^*$	$\psi^\circ$	$K_p$	$T_i$	$T_d$
2.4	1.7250	0.3194	1.7941	1.7433	2.6796	0.6699
<b>3</b>	<b>1.6596</b>	<b>0.1752</b>	<b>3.2725</b>	<b>3.2547</b>	<b>2.6905</b>	<b>0.6726</b>
3.6	1.0710	0.3872	1.4798	1.4306	4.3486	1.0872

Tab 4-5 Résultats de synthèse par la méthode on-line pour différentes valeurs d'estimation du retard

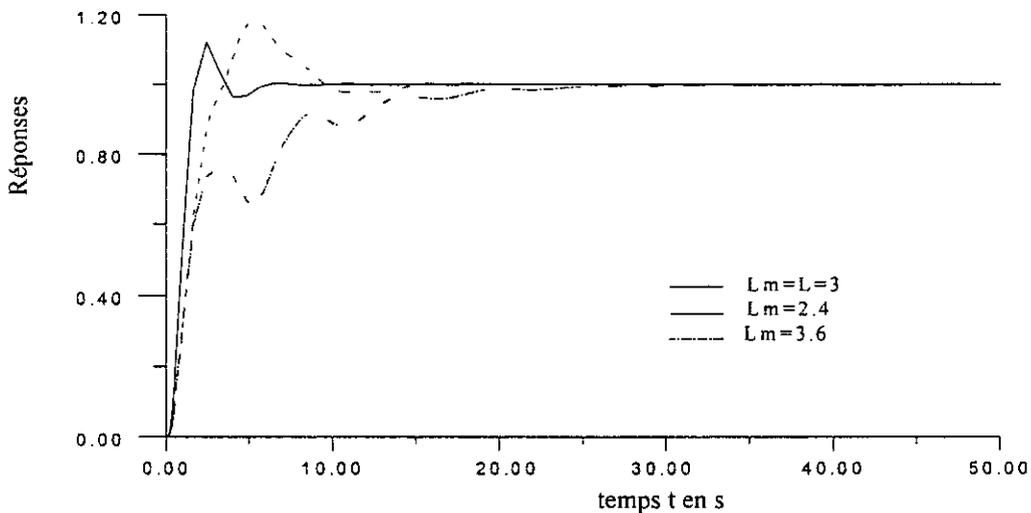


Fig 4-17 Exemple 1 avec un retard =3 : Réponses indicielles, méthode on-line

**Exemple 2**

Le système considéré ici est :

$$G_0(s)e^{-Ls} = \frac{e^{-Ls}}{2s^2 + 3s + 1} \quad (4-32)$$

C'est un système du second ordre à retard, où deux valeurs de ce dernier sont à considérer pour les deux techniques de synthèse du PS de ce chapitre.

**1°) Méthode analytique**

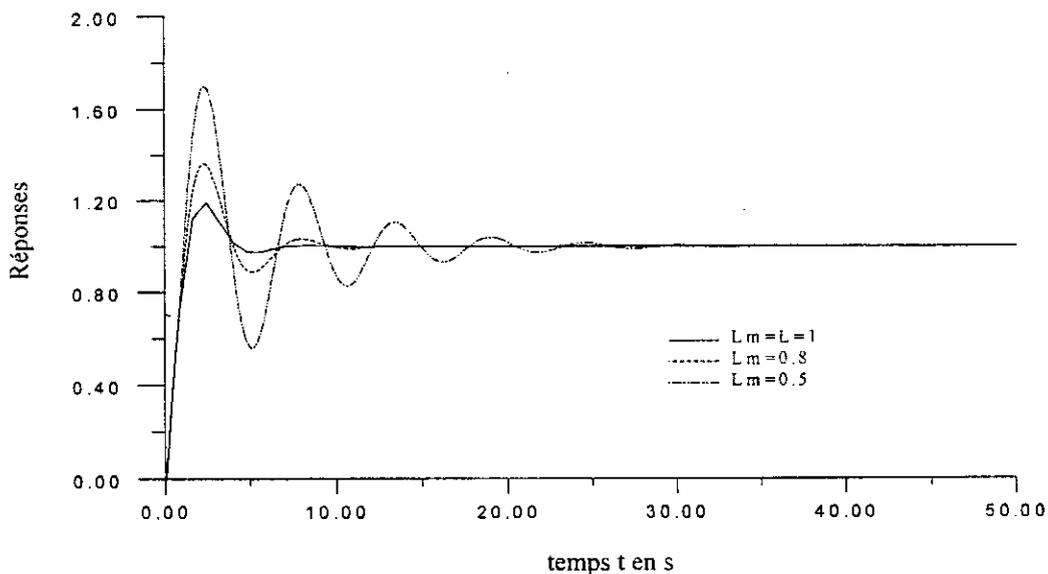
Dans ce cas là, une parfaite représentation du procédé est supposée, les paramètres du relais sélectionnés sont : Une amplitude  $M = \pm 1$  et une hystérésis  $h = \pm 0.1$ . Pour cet exemple le point d'intersection forme avec l'axe réel un angle  $\psi = 42.2164^\circ$ . L'amplitude et la fréquence du cycle limite sont respectivement,  $a^* = 0.1488$  et  $\omega_{cr}^* = 1.9160$ . La marge de phase prévue est de  $\phi_m = \pi/3$ . En utilisant les équations 4-25, le PID obtenu lorsque  $L = L_m$  est :

$$G_{c0}(s) = K_p ( 1 + 1/T_i s + T_d s / (1 + 0.1 T_d s) )$$

$$= 4.8879 ( 1 + 1/1.4310s + 0.3578s / (1 + 0.03578s) )$$

a)  $\frac{e^{-s}}{2s^2 + 3s + 1}$

Comme dans l'exemple 1, les erreurs de modélisation donnant lieu à des performances justes acceptables sont aussi limitées à  $\pm 50\%$  de la valeur réelle. Au-delà de cette limite le système devient instable.



**Fig 4-18 Exemple 2 : Réponses indicielles, sous-estimation du retard, méthode analytique**

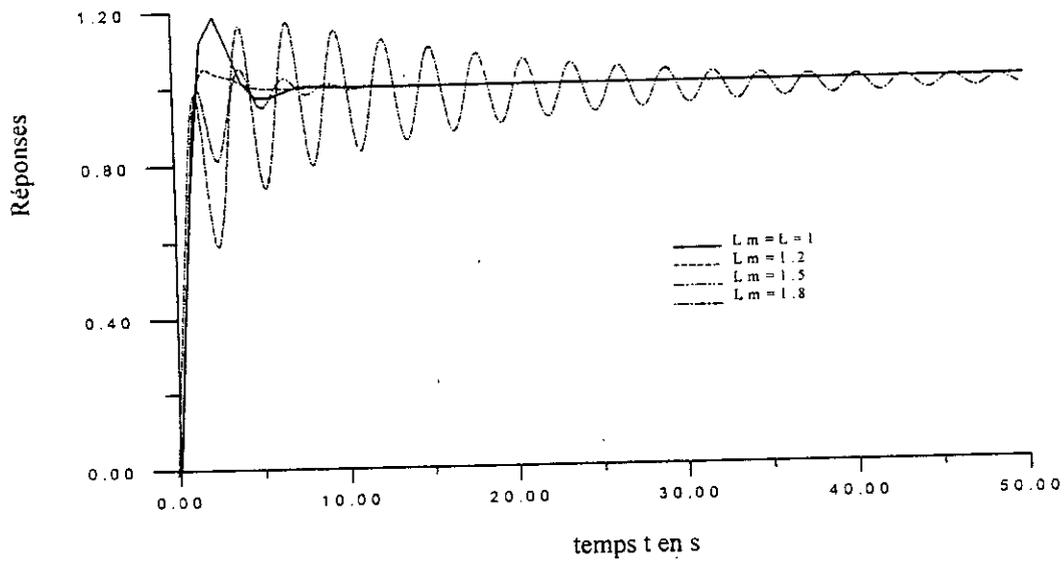


Fig 4-19 Exemple 2 : Réponses indicielles, surestimation du retard, méthode analytique

b)  $\frac{e^{-3s}}{2s^2 + 3s + 1}$

Même des erreurs de modélisation de  $\pm 20\%$ , ne permettent pas d'obtenir des performances acceptables lorsque le retard est égal à 3 voir figure ci-dessous. Cela est en accord avec ce qui a été dit pour l'exemple-1, c.à.d que les limites d'erreurs de modélisation tolérables sont bien liées à la réglabilité du procédé à commander.

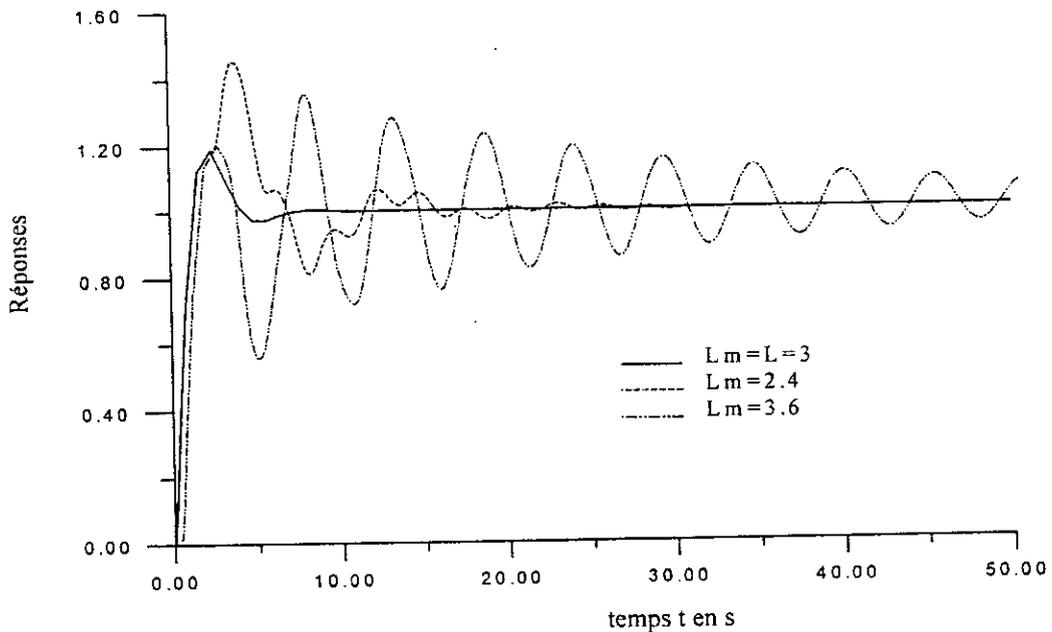


Fig 4-20 Exemple 2 avec un retard=3 : Réponses indicielles, méthode analytique

2° ) Méthode on-line

a)  $\frac{e^{-s}}{2s^2 + 3s + 1}$

Les mêmes paramètres du relais que la première technique et la même marge de phase désirée sont considérées. Pour différentes erreurs d'estimation du retard, l'angle de déviation  $\psi$ , les paramètres du cycle limite ainsi que ceux du régulateur primaire  $G_{c0}(s)$  sous forme de PID sont listés dans le tableau ci-dessous.

$L_m$	$\omega_{cr}^*$	$a^*$	$\psi^\circ$	$K_p$	$T_i$	$T_d$
0.2	1.0420	0.3209	8.1586	1.7737	4.2950	1.0738
0.5	1.1900	0.2082	28.7086	3.1358	2.9883	0.7471
0.8	1.5940	0.1392	45.9420	5.3255	1.6076	0.4019
<b>1</b>	<b>1.9160</b>	<b>0.1488</b>	<b>42.2164</b>	<b>4.8879</b>	<b>1.4310</b>	<b>0.3578</b>
1.2	1.9700	0.1902	1.7122	3.5361	1.6993	0.4248
1.5	1.8810	0.2707	1.6733	2.2138	2.1951	0.5489
1.8	1.7600	0.3563	16.3002	1.5502	2.6577	0.6644

Tab 4-6 Résultats de synthèse par la méthode on-line pour différentes valeurs d'estimation du retard

Le tableau ci-dessus montre que pour les grandes erreurs d'estimation du retard, les actions proportionnelle et intégrale sont très faibles. Les réponses indicielles (en boucle fermée) du système compensé pour différentes erreurs de modélisation du retard, sont présentées dans les figures 4-21 et 4-22. La rapidité des réponses est grandement affectée par la réduction des actions proportionnelle et intégrale. Rappelons que la solution de réduire la marge de phase à prévoir au fur et à mesure que l'erreur d'estimation augmente, est toujours valable.

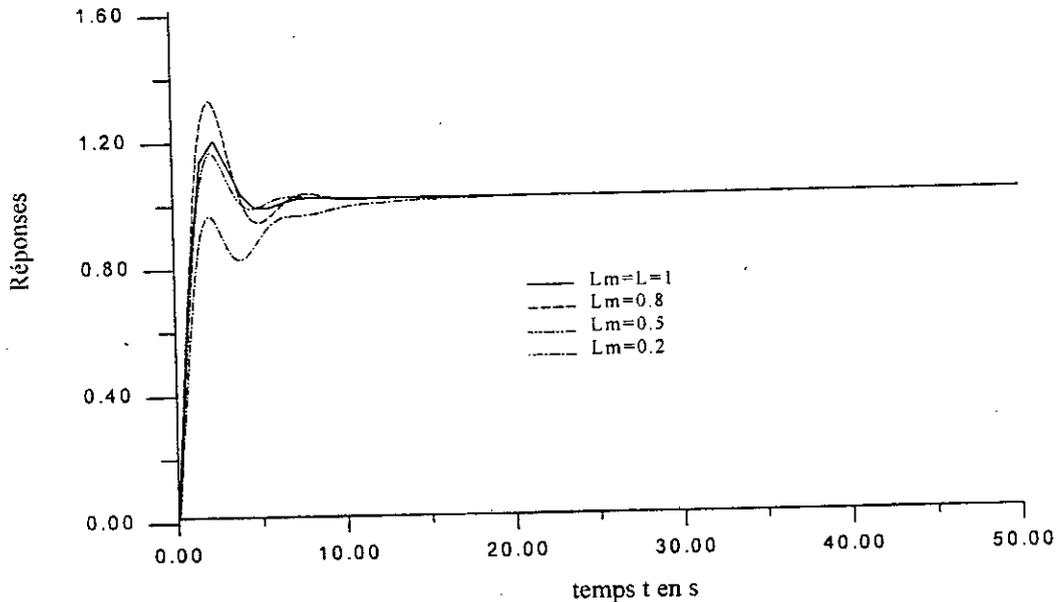


Fig 4-21 Exemple2 : Réponses indicielles, sous-estimation du retard, méthode on-line

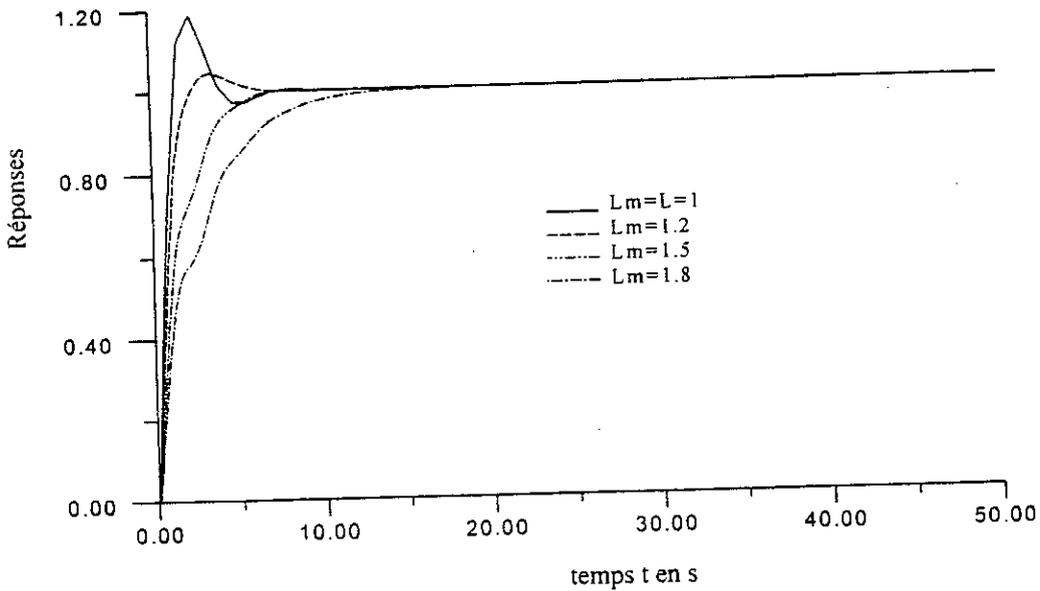


Fig 4-22 Exemple 2 : Réponses indicielles, surestimation du retard, méthode on-line

b) 
$$\frac{e^{-3s}}{2s^2 + 3s + 1}$$

Encore une légère erreur d'estimation du retard de  $\pm 20\%$  conduit le système à la limite de stabilité lorsque le retard est grand.

$L_m$	$\omega_{cr}^*$	$a^*$	$\psi^\circ$	$K_p$	$T_i$	$T_d$
2.4	1.9880	0.2805	20.8820	2.1127	2.1148	0.5287
<b>3</b>	<b>1.9160</b>	<b>0.1488</b>	<b>42.2164</b>	<b>4.8879</b>	<b>1.4310</b>	<b>0.3578</b>
3.6	1.1500	0.2655	22.1289	2.2716	3.5556	0.8889

Tab 4-7 Résultats de synthèse par la méthode on-line pour différentes valeurs d'estimation du retard

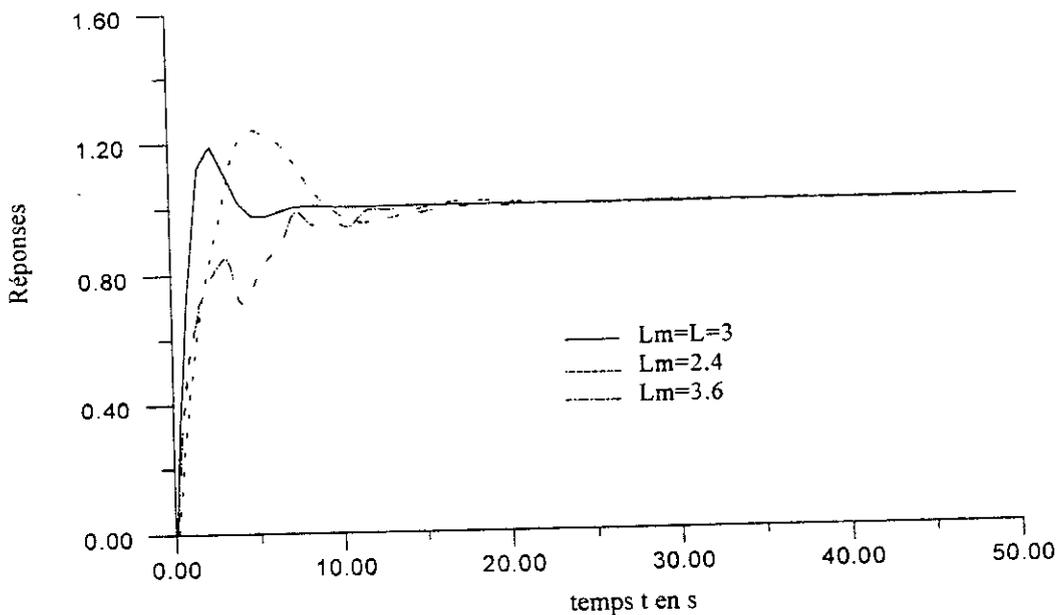


Fig 4-23 Exemple 2 avec un retard=3 : Réponses indicielles, méthode on-line

#### **4.4 Conclusion**

Une première constatation fait que, la méthode du gain incrémental [13] est un outil très puissant pour l'analyse de la stabilité des cycles limites. Sa supériorité a été prouvée sur une grande variété de systèmes. La comparaison des deux techniques i.e. analytique et on-line fait que cette dernière qui synthétise  $G_{co}(s)$  en présence d'erreur d'estimation du retard, est beaucoup plus performante. L'amélioration des réponses lorsque la rapidité du système compensé est mise en défaut est toujours possible et simple par une réduction de la marge de phase à prévoir. Toutefois une limite d'application de ces deux techniques est vite atteinte lorsque l'ordre de grandeur du temps mort du procédé est significatif. En effet, la prise en compte d'erreur de modélisation du retard seulement, suppose une parfaite connaissance du modèle rationnel ce qui n'est pas le cas en pratique. Une méthode on-line beaucoup plus pratique est présentée dans le chapitre suivant.

# Chapitre V

## Utilisation de Relais en Identification et la Commande On-line des Systèmes à Retard

### 5. Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons mis l'accent sur la grande sensibilité du prédicteur de Smith à la précision avec laquelle le modèle représente le procédé. Sachant qu'une bonne synthèse de régulateur fait que ce dernier est fonction des dynamiques du modèle de procédé [33]. Par conséquent, une meilleure approche pour la commande des procédés dont les dynamiques varient et/ou connues approximativement, est d'identifier chaque fois que c'est nécessaire le procédé on-line puis réajuster les paramètres du régulateur et/ou du modèle. Ce qui conduit à la méthode d'autoréglage beaucoup plus préférée qu'une adaptation continue des paramètres. Les méthodes d'identification sont nombreuses et plus au moins compliquées. Leurs techniques reposent sur la quantité d'informations auxiliaires préalablement requises sur le procédé [Goodwine, Landau...]. Dans ce chapitre, à partir de test à relais, nous présentons une technique d'identification de procédés sous forme de modèle du premier ordre. Ce dernier est jugé suffisant pour approximer les dynamiques de la plupart des procédés industriels. Le modèle et les paramètres critiques obtenus sont utilisés par quatre méthodes de synthèse de commande. Une version on-line du PI prédictif est développée à partir du test à relais. Nous ferons une comparaison des performances et de la robustesse des quatre méthodes. La robustesse est testée par les erreurs commises lors de la mesure des paramètres critiques qui sont obtenus à partir de test à relais.

## **5.1 Identification de modèle à partir de tests à relais**

Une des vieilles méthodes d'identification, est celle basée sur les courbes de réaction du procédé à un certain type d'entrée tel que l'échelon unité, c'est l'approche la plus directe. Cependant, la qualité du modèle obtenu est grandement affectée par les perturbations et/ou la non-linéarité du procédé [58][59]. Une autre alternative devenue très populaire depuis la publication de M. Luyben [1987], est le test à relais. Le succès de cette dernière réside dans la détermination d'un point très important sur le lieu de Nyquist. Ce point correspond à la fréquence critique et le gain critique du système en boucle ouverte généralement proche du point de résonance du système bouclé.

Le test consiste à insérer un relais selon la figure 1-1 pour produire des cycles limites. L'amplitude et la période des oscillations permettent de déterminer le gain critique et la fréquence critique du procédé. L'avantage de l'emploi du relais est l'obtention du point critique d'une manière contrôlable.

Luyben [1987] fut le premier à avoir utiliser le relais pour calculer les paramètres du modèle du procédé [31][32]. Puisqu'un seul test ne fournit que l'information du gain critique  $K_{cr}$  et la fréquence critique  $\omega_{cr}$ , d'autres informations sur le procédé (tel que le gain statique) sont nécessaires pour identifier un modèle du premier ordre (éq 5-2).

Afin de pouvoir identifier tous les paramètres du modèle, Li et al [1991], Leva [1994] et Palmor [1994] ont proposé l'utilisation de deux ou plusieurs tests à relais. Ce qui permet de déterminer deux ou plusieurs points sur le lieu de Nyquist afin d'estimer tous les paramètres par la méthode des moindres carrés. Les tests supplémentaires sont réalisés en insérant des temps morts additionnels ou d'autres valeurs d'hystérésis [32][53][59].

C'est une méthode très pratique et surtout simple et rapide ne demandant pas beaucoup d'effort de calcul. Elle conduit toujours à un modèle plus représentatif du procédé. Mais, la complication de la procédure d'identification augmente avec le nombre de tests à réaliser. Par conséquent, son application on-line en autoréglage, de temps en temps nécessaire pour réajuster les paramètres du régulateur et/ ou du modèle, devient de plus en plus coûteuse.

Toujours, dans le but d'identifier tous les paramètres du modèle du premier ordre, tout en réduisant la complexité de la procédure et se limitant à un seul test à relais, Tseng et Wu [1992], Wu et al [1994] et Shih haur shen et al [1996] déterminent le gain statique du procédé en utilisant une référence non nulle pendant le test à relais. Le même résultat

peut être obtenu en utilisant un relais biaisé [35][55][59]. La forme des oscillations est asymétrique, voir figure ci-dessous.

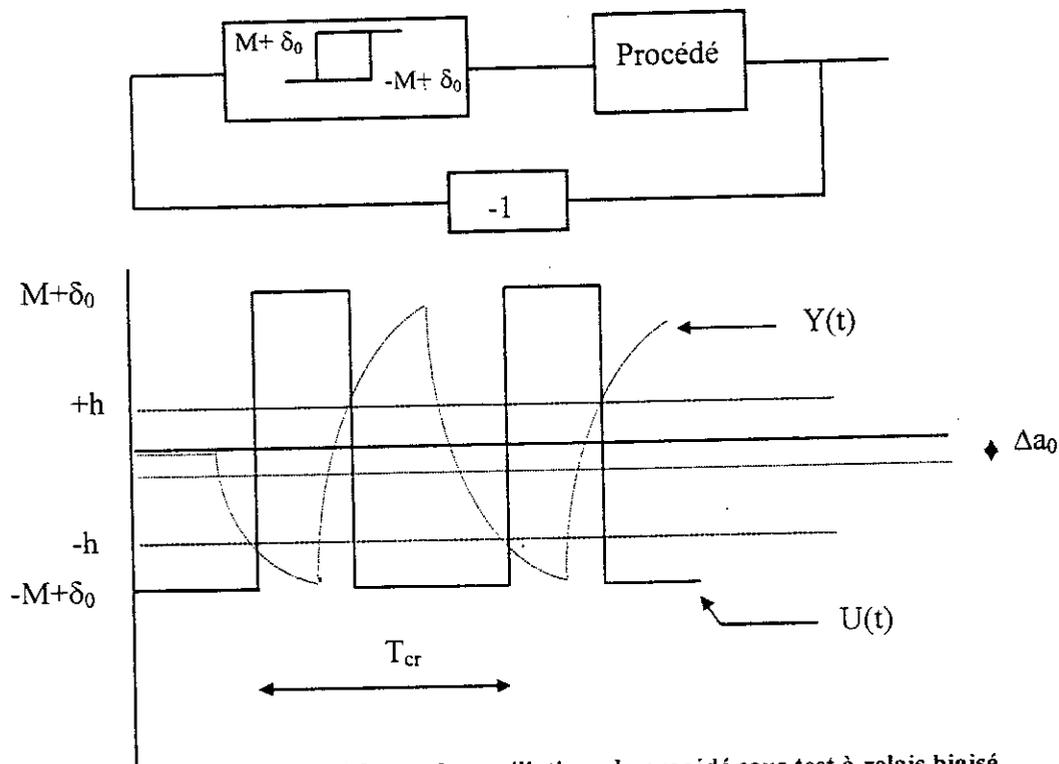


Fig 5-1 Fig 5-4 forme des oscillations de procédé sous test à relais biaisé

Dans ce cas, l'entrée du relais est exprimée par :

$$e(t) = a \sin \omega t + \Delta a_0 \quad (5-1)$$

Où  $\Delta a_0$  est l'amplitude du signal biaisé, alors que  $a$  est l'amplitude de la partie sinusoïdale. Cela est bien connu sous le nom Dual-Input Describing Function DIDF [13]. Ainsi la sortie du relais est constituée de 2 parties :

- partie oscillatoire : gain du signal sinusoïdal.
- partie statique : gain du signal biaisé à la fréquence nulle. Celle-ci est bien liée au gain statique du procédé.

### 5.1.1 Choix du modèle

Le modèle le plus utilisé et particulièrement en industrie chimique et électromécanique, est le modèle du premier ordre à trois paramètres (éq.5-2), dont les dynamiques peuvent approcher la plupart des procédés. Un cas particulièrement important et assez souvent rencontré dans les procédés industriels, est celui où la constante de temps est très large devant le temps mort [35]. De tels systèmes ont une faible réglabilité.

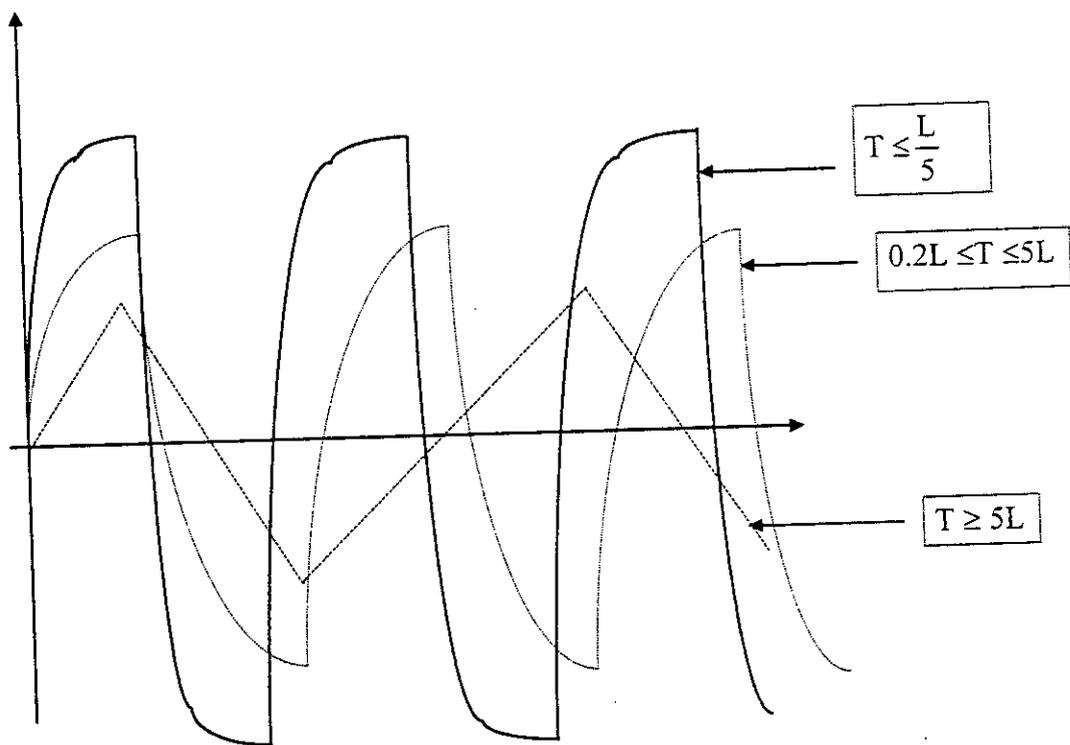
En considérant le modèle du premier ordre suivant :

$$G(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{1 + TS} \quad (5-2)$$

Où la réglabilité est définie par :

$$r_n = \frac{L}{T} \quad (5-3)$$

Les différentes formes de cycles limites obtenues à partir de simulation de test à relais, sont représentées dans la figure 5-2 pour différentes gammes de valeurs de  $\frac{L}{T}$ .



**Fig 5-2** Formes d'oscillation critiques en fonction du temps pour un système sous test à relais

Nous observons que : lorsque la constante de temps  $T \geq 5L$ , la forme du cycle limite est presque une onde triangulaire qui est la réponse d'un intégrateur à temps mort.

Alors que pour  $T \leq 0.2L$  : la réponse est proche d'une onde rectangulaire qui représente la réponse d'un retard pur.

Le cas intermédiaire : est plus au moins proche d'une sinusoïde, c'est le cas le plus rencontré. En effet les systèmes d'ordres élevés et ceux à déphasage non minimal peuvent toujours être approximés par des modèles du premier ordre de moyennes réglabilités.

### 5.1.2 Développement

Un relais d'hystérésis  $h$  et d'amplitude  $M$  est caractérisé par :

$$\begin{aligned} \frac{-1}{N(a)} &= -\frac{a\pi}{4M} \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}} - j \frac{h\pi}{4M} \\ &= -\frac{a\pi}{4M} \left[ \sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}} + j \frac{h}{a} \right] \end{aligned} \quad (5-4)$$

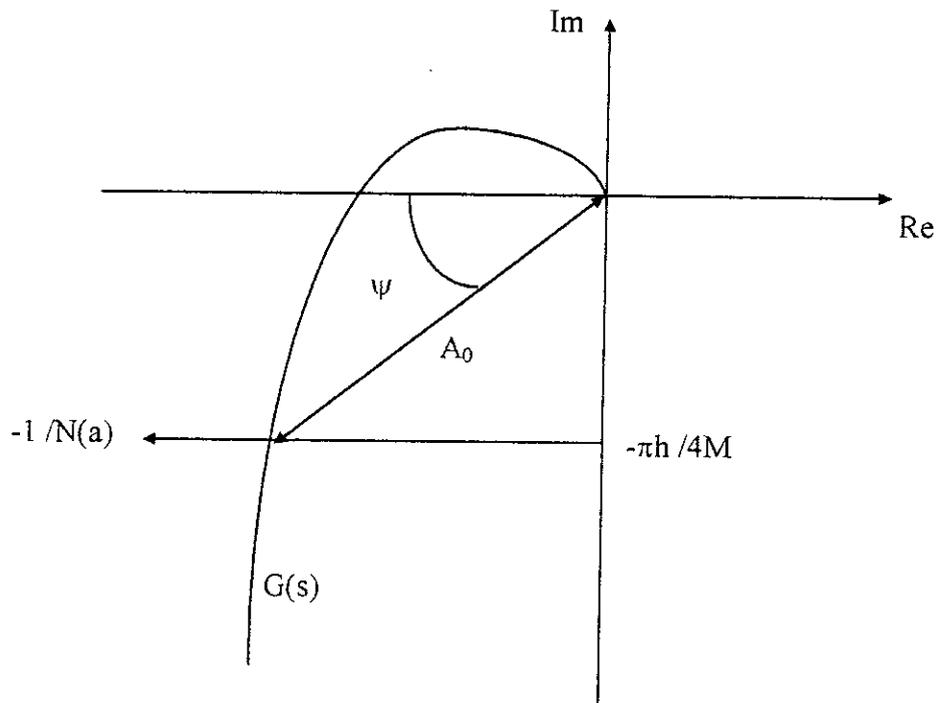


Fig 5-3 Lieu de Nyquist : procédé  $G(s)$  sous test à relais

Avec:

$$A_0 = \frac{a_0 \pi}{4M} \quad (5-5)$$

$$\psi = \arcsin(h/a_0) \quad (5-6)$$

#### 5.1.2.1 Systèmes de faibles reglabilités ( $L \ll T$ )

Lorsque le but de la modélisation est la synthèse de systèmes asservis, il n'est pas nécessaire de déterminer le gain statique et la constante de temps si cette dernière est très grande (relativement au temps mort), seule leur rapport suffit. Dans ce cas, le modèle obtenu est un intégrateur plus temps mort à deux paramètres (éq 5-8), facilement identifiables par un seul test à relais.

En effet, lorsque  $r_n \ll 1$ , l'effet de la variation de la constante de temps sur le comportement du système bouclé n'est pas significatif :

$$G(s) = \frac{\left(\frac{K}{T}\right)e^{-Ls}}{S + \frac{1}{T}} \quad (5-7)$$

Ainsi, on pourra négliger  $\frac{1}{T}$  devant 1, Ce qui conduit au modèle suivant :

$$G(s) \equiv \frac{\left(\frac{K}{T}\right)e^{-Ls}}{S} = \frac{K_i e^{-L_1 s}}{S} \quad (5-8)$$

Une représentation à deux paramètres seulement, pouvant facilement être déterminés par un seul test à relais.

$$G(s) \equiv \frac{\left(\frac{K}{T}\right)e^{-Ls}}{S} = \frac{K_i e^{-L_1 s}}{S} = \frac{K_i e^{-jL_1 \omega_{cr}}}{j\omega_{cr}} = \frac{K_i e^{-j(L_1 \omega_{cr} + \frac{\pi}{2})}}{\omega_{cr}} \quad (5-9)$$

Or d'après la figure 5-3, nous avons :

$$\left. \begin{aligned} |G(j\omega_{cr})| = A_0 &\equiv \frac{K_i}{\omega_{cr}} \\ \arg(G(j\omega_{cr})) = \pi + \psi &\equiv \frac{-\pi}{2} - \omega_{cr} L_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} K_i = A_0 \omega_{cr} \\ L_1 = \frac{1}{\omega_{cr}} \arccos\left(\frac{h}{a_0}\right) \end{cases} \quad (5-10)$$

### 5.1.2.2 Systèmes de grandes réglabilités ( $L \gg T$ )

De même lorsque la constante de temps est très faible devant le temps mort du procédé, on pourra négliger la première et ne considérer que le modèle gain plus temps mort suivant :

$$G(s) = \frac{K_m e^{-L_m s}}{1 + T_m s} \equiv K_g e^{-L_g s} \quad (5-11)$$

En se référant encore à la figure 5-3, nous avons :

$$\left. \begin{aligned} |G(j\omega_{cr})| = A_0 &\equiv K_g \\ \arg(G(j\omega_{cr})) = \pi + \psi &\equiv -\omega_{cr} L_g \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} L_g = \frac{1}{\omega_{cr}} \arcsin\left(\frac{h}{a_0}\right) \\ K_g = A_0 \end{cases} \quad (5-12)$$

Nous avons noté par  $K_i$  et  $L_i$  avec un indice  $i$ , les paramètres du modèle intégrateur plus temps mort ; par  $K_g$  et  $L_g$  avec un indice  $g$ , les paramètres du modèle gain plus temps mort.

La précision de ces deux représentations dépend énormément de l'ordre de grandeur du rapport  $\frac{L}{T}$  dans le modèle premier ordre à trois paramètres.

Toujours à partir des résultats du test à relais, M.Friman et K.V.Waller [35] ont proposé les approximations suivantes :

$T \gg L$

$T \ll L$

$$\begin{cases} L_i = \frac{\pi}{2\omega_{cr}} \\ K_i = \frac{a_0}{L_i M} \end{cases} \quad (5-13)$$

$$\begin{cases} L_g = \frac{\pi}{\omega_{cr}} \\ K_g = \frac{a_0}{M} \end{cases} \quad (5-14)$$

### 5.1.2.3 Systèmes de moyennes réglabilités

Les systèmes du premier ordre dont la réglabilité est comprise entre 0.2 et 5 ne permettent aucune simplification et doivent être caractérisés par au moins 3 paramètres. De tels systèmes produisent en général des cycles limites de la forme suivante:

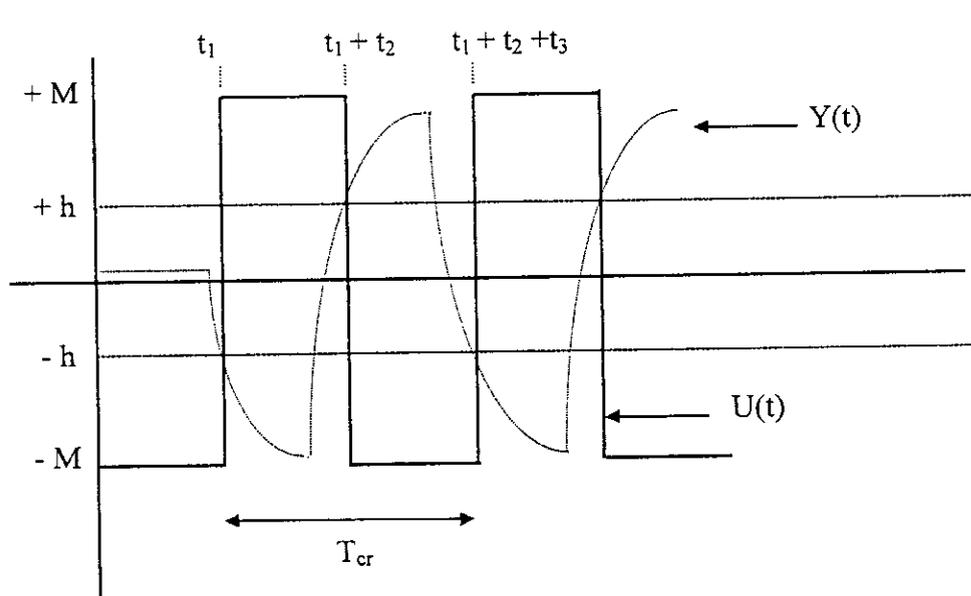


Fig 5-4 Forme des oscillations de procédés de moyennes réglabilités sous test à relais

Nous pensons qu'un test à relais préliminaire est toujours nécessaire pour confirmer le signe du gain statique et estimer la fréquence des oscillations afin de caler le filtre éventuellement présent dans la chaîne de mesure [4]. Ce test peut être profitable en injectant un faible biais dans le relais. Ce qui permet de déplacer la composante continue de la sortie du système et pouvoir ainsi calculer le gain statique directement [55][58][59] par :

$$G(0) = \frac{\int_0^{T_{cr}} y(t) dt}{\int_0^{T_{cr}} u(t) dt} = K_m \quad (5-15)$$

Alors que le gain  $A_0$  à la fréquence  $\omega_{cr}$  est donné par :

$$|G(j\omega_{cr})| = \frac{\int_0^{T_{cr}} y(t) e^{-j\omega_{cr} t} dt}{\int_0^{T_{cr}} u(t) e^{-j\omega_{cr} t} dt} = A_0 \quad (5-16)$$

Où  $\omega_{cr} = \frac{2\pi}{T_{cr}}$  est la fréquence critique (5-17)

C'est une formule qui calcule la valeur exacte du gain à la fréquence  $\omega_{cr}$ . Une valeur approchée est donnée par l'approximation de l'équivalent harmonique équation 5-5 .

Pour les systèmes premier ordre de l'équation 5-2,  $A_0$  est aussi donné par :

$$A_0 = \frac{K_m}{\sqrt{(\omega_{cr} T_m)^2 + 1}} \quad (5-18)$$

Ce qui permet de calculer la constante de temps  $T_m$ .

$$\Rightarrow T_m = \frac{\sqrt{(K_m / A_0)^2 - 1}}{\omega_{cr}} \quad (5-19)$$

Or d'après la figure 5-3, nous avons :

$$\pi + \psi \cong 2\pi - L_m \omega_{cr} - \arctg(T_m \omega_{cr}) \quad (5-20)$$

Ce qui donne :

$$L_m = \frac{1}{\omega_{cr}} (\pi - \psi - \arctg(T_m \omega_{cr})) \quad (5-21)$$

Ainsi, le modèle de l'équation 5-2 est complètement identifié par le système des équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_m = G(0) = \frac{\int_0^{T_{cr}} y(t) dt}{\int_0^{T_{cr}} u(t) dt} \\ T_m = \frac{\sqrt{(K_m / A_0) - 1}}{\omega_{cr}} \\ L_m = \frac{1}{\omega_{cr}} (\pi - \psi - \arctg(T_m \omega_{cr})) \end{array} \right. \quad (5-22)$$

A partir des résultats de test à relais et en approximant les montés et les descentes du signal dans la forme des oscillations (fig 5-4) par des exponentielles, Qing Wang et al [55] ont obtenu les expressions suivantes:

$$T_{cr} = 2T \text{Ln} \left( \frac{2MK e^{1/T} - MK + h}{MK - h} \right) \quad (5-23)$$

$$a_0 = MK \left( 1 - e^{-1/T} \right) + h e^{-1/T} \quad (5-24)$$

La démonstration de ces formules est donnée en **annexe B**.

Ce qui a conduit aux formules d'identification du modèle du premier ordre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_m = A_0 \sqrt{(\omega_{cr} T_m)^2 + 1} \\ T_m = \frac{T_{cr}}{2} \left[ \text{Ln} \left( \frac{MK_m + a_0}{MK_m - a_0} \right) \right]^{-1} \\ L_m = T_m \text{Ln} \left( \frac{MK_m - h}{MK_m - a_0} \right) \end{array} \right. \quad (5-25)$$

Le choix de représentation du procédé entre un modèle du premier ordre à 3 paramètres, intégrateur à retard ou retard pur, peut se décider selon la forme des oscillations observées en figure 5-2.

### 5.1.3 Précisions sur la mesure de $a_0$ et $\omega_{cr}$

La précision du modèle obtenu est directement liée à la précision avec laquelle  $a_0$  et  $\omega_{cr}$  sont mesurées. De plus l'extraction de modèle linéaire et l'utilisation de l'équivalent harmonique constituent une technique de linéarisation. Par conséquent, si le procédé en main présente un certain degré de non-linéarité, cela conduit à des oscillations asymétriques et par suite à une mesure erronée de  $a_0$  et  $\omega_{cr}$  si on ne prend pas soin de restaurer la symétrie au préalable.

Comme les perturbations statiques sont assez fréquentes et larges en industrie, leurs effets se manifestent par la présence d'une composante statique dans les oscillations, ce qui altère les mesures.

De plus, dans un environnement réel le bruit de mesure est inévitable, et toute méthode d'identification doit conduire à des résultats aussi précis que possible en présence de bruits. Il a été montré [4][58] que l'utilisation d'hystérésis dans le relais réduit l'influence des bruits de mesure.

### 5.1.4 Effets de perturbations statiques

Un test à relais en présence de perturbations statiques [58][43] (figure 5-5) est le siège d'oscillations asymétriques semblables à celles observées lorsque le relais est biaisé (fig 5-1).

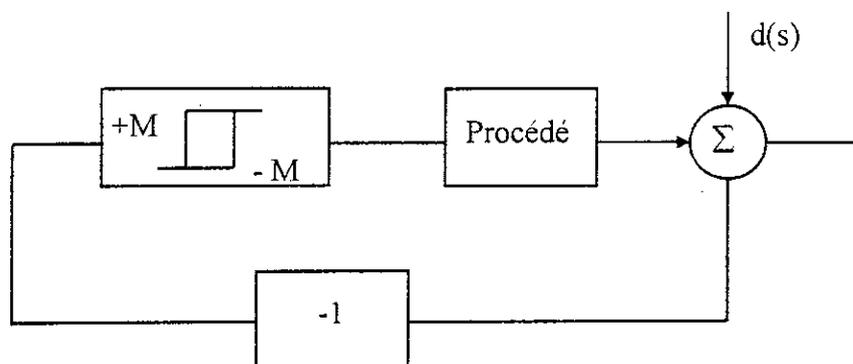


Fig 5-5 Système sous test à relais et effet de perturbations statiques

Dans ce cas l'entrée  $e(t)$  du relais est de la forme :

$$e(t) = a \sin \omega t + \Delta a_0 \quad (5-26)$$

La composante statique  $\Delta a_0$  constitue le gain statique du signal de perturbation  $d(s)$ , alors que  $a$  est l'amplitude de l'oscillation limite. Ces deux composantes d'entrée constituent ce qu'on a déjà vu : Dual-Input Describing Function (DIDF) [13].

La sortie  $U(t)$  de l'élément non linéaire peut être développée en séries de Fourier.

$$U(t) = U_0 + \sum A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t \quad (5-27)$$

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(t) d(\omega t) = \frac{-2M}{\pi} \arcsin\left(\frac{\Delta a_0}{a_0}\right) \quad (5-28)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(t) \cos \omega t d(\omega t) = \frac{4M}{n\pi} \sin\left(n \arcsin\left(\frac{\Delta a_0}{a_0}\right)\right) \quad n = 2,4,6 \dots \quad (5-29)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{4M}{n\pi} \cos\left(n \arcsin\left(\frac{\Delta a_0}{a_0}\right)\right) \quad n = 1,3,5 \dots \quad (5-30)$$

Il est bien clair que la présence de  $U_0$  et des termes additionnels  $A_2, A_4 \dots$  détériore l'approximation de l'équivalent harmonique et par conséquent, la mesure de  $a_0$  et  $\omega_{cr}$ .

Le premier harmonique est donné par :

$$\begin{aligned} U_1(t) &= U_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ &= U_0 + \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sin\left(\omega t + \arctg\left(\frac{B_1}{A_1}\right)\right) \end{aligned} \quad (5-31)$$

La relation entrée-sortie du relais est caractérisée par deux parties bien séparées :

$$\text{Partie oscillatoire : } N(a_0) = \frac{\hat{U}_1}{a_0} e^{j\varnothing} \quad (5-32)$$

$$\text{Partie statique : } N_y(a_0) = \frac{\bar{U}_0}{\Delta a_0} \quad (5-33)$$

**Remarque :**

En présence de perturbation et/ou de non linéarité du procédé sous test, la sortie présente des oscillations asymétriques semblables à celles obtenues par un relais biaisé (fig 5-1). Dans tous les cas, la mesure de l'amplitude  $a_0$  n'est pas affectée si on prend toujours soin de mesurer la valeur moyenne :

$$a_0 = \frac{a_{0\max} + a_{0\min}}{2} \quad (5-34)$$

Seule la mesure de la fréquence d'oscillation  $\omega_{cr}$  sera affectée. Les perturbations sont variables et imprévisibles et leurs points d'action non justifiables. De plus l'offset  $\Delta a_0$  ne provient pas seulement de la présence des perturbations mais aussi de la non-linéarité éventuellement présente dans le procédé. La solution de contrebalancer l'offset  $\Delta a_0$  et restaurer ainsi la symétrie par l'utilisation de relais biaisé, déplace le point de

fonctionnement du système [43][35][58][59], et donc ne peut être retenue. De plus, la détermination de la valeur exacte du biais du relais à considérer pour contrebalancer l'offset  $\Delta a_0$  n'est pas facile. Puisque l'offset  $\Delta a_0$  est une composante statique, effet de perturbation de très basse fréquence sur les oscillations limites, elle peut être facilement éliminée par un simple filtre passe-haut. De façon plus pratique, on utilisera un filtre passe-bande pour réduire aussi l'effet des bruits HF. Evidemment, la bande passante du filtre doit être centrée sur la fréquence propre du système sous test. La mesure préliminaire de la fréquence des oscillations bruitées peut être utile pour le choix du filtre.

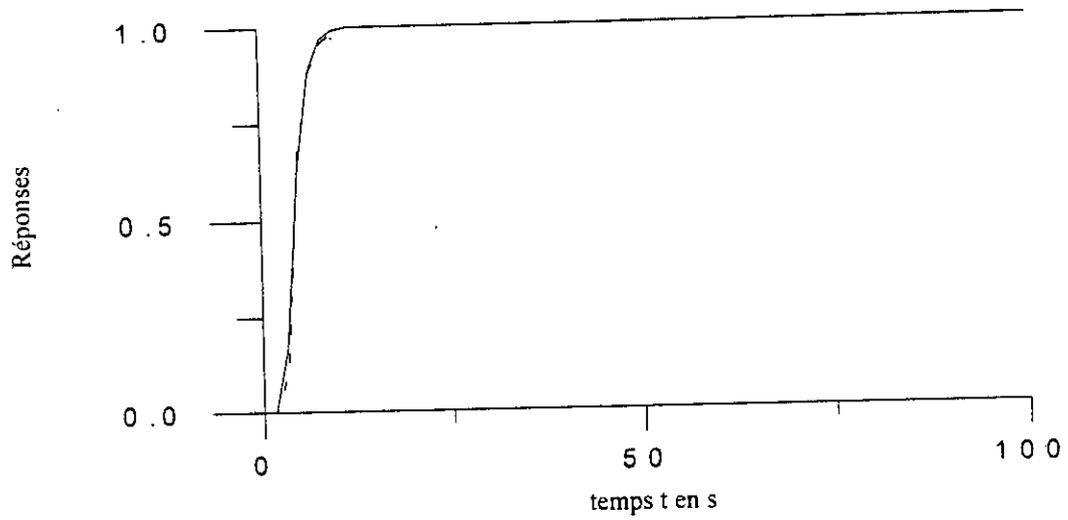
### 5.1.5 Exemples d'illustration

Pour mieux vérifier la représentativité des procédés par les modèles obtenus, nous avons choisi d'appliquer la technique d'identification à relais sur un très grand nombre d'exemples de différentes dynamiques, allant du 2<sup>ème</sup> ordre à retard jusqu'aux procédés de 5<sup>ème</sup> ordre à déphasage non minimal avec retard.

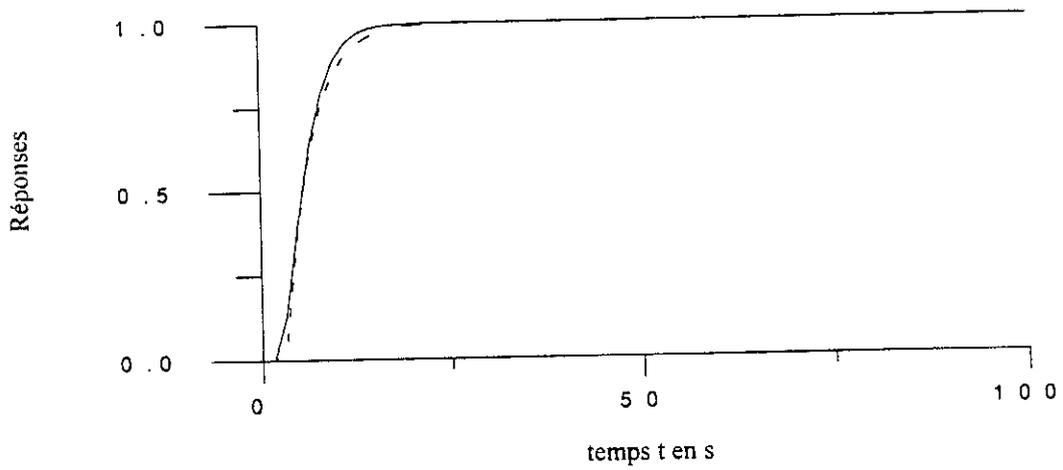
Nous avons représenté le système en trait continu et son approximant en pointillé dans les figures ci-après.

n° d'exemple	Exemples	$K_m$	$T_m$	$L_m$
1	$\frac{e^{-2.5s}}{(s+1)^2}$	1.0000	1.5532	3.0601
2	$\frac{e^{-2s}}{(2s+1)^2}$	1.0000	3.4398	3.0543
3	$\frac{1}{(s+1)^5}$	1.0000	3.0965	2.6992
4	$\frac{1-1.4s}{(1+s)^3}$	1.0000	1.2349	2.5823
5	$\frac{1-s}{(1+s)^5}$	1.0000	2.3370	3.8427
6	$\frac{(1-s)}{(1+s)^5} e^{-2s}$	1.0000	2.1828	5.9479

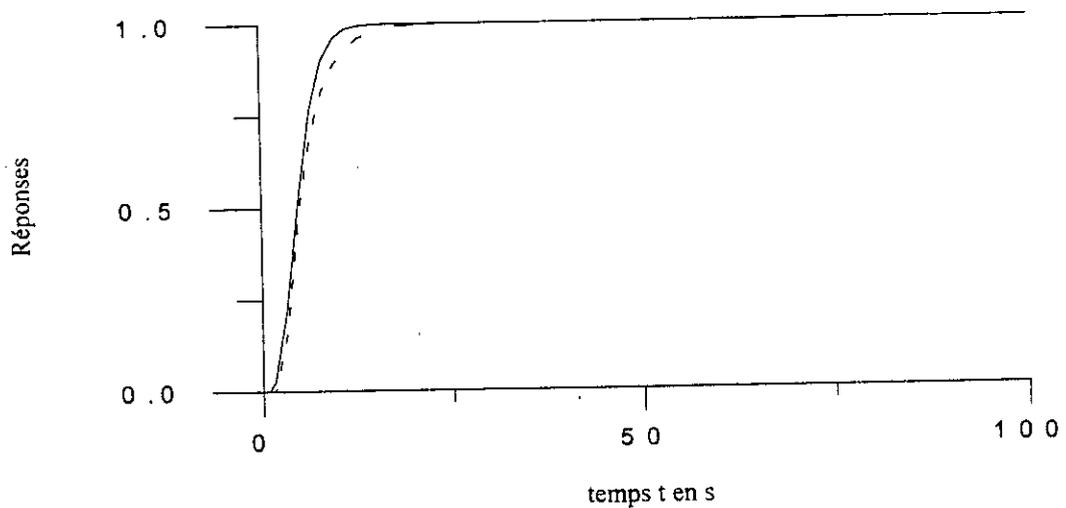
Tab 5-1 Procédés et leurs approximants 1<sup>er</sup> ordre obtenus à partir de test à relais



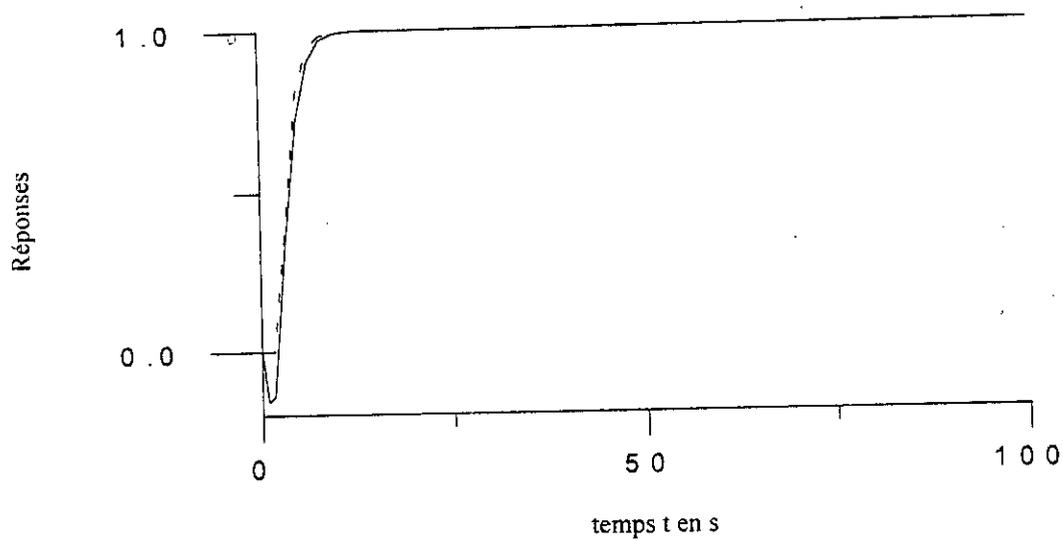
**Fig 5-6 Exemple 1 : Réponses indicielles en B.O**



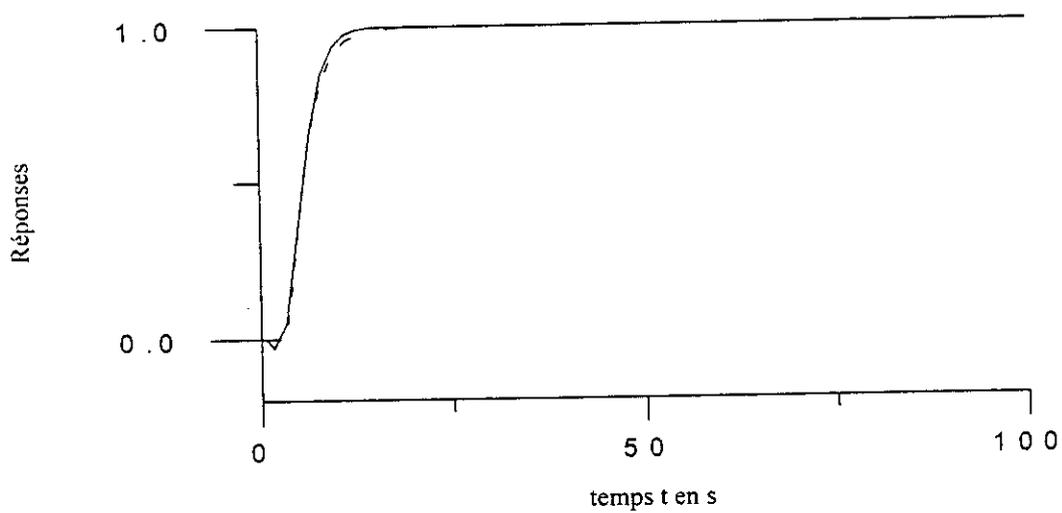
**Fig 5-7 Exemple -2 : Réponses indicielles en B.O**



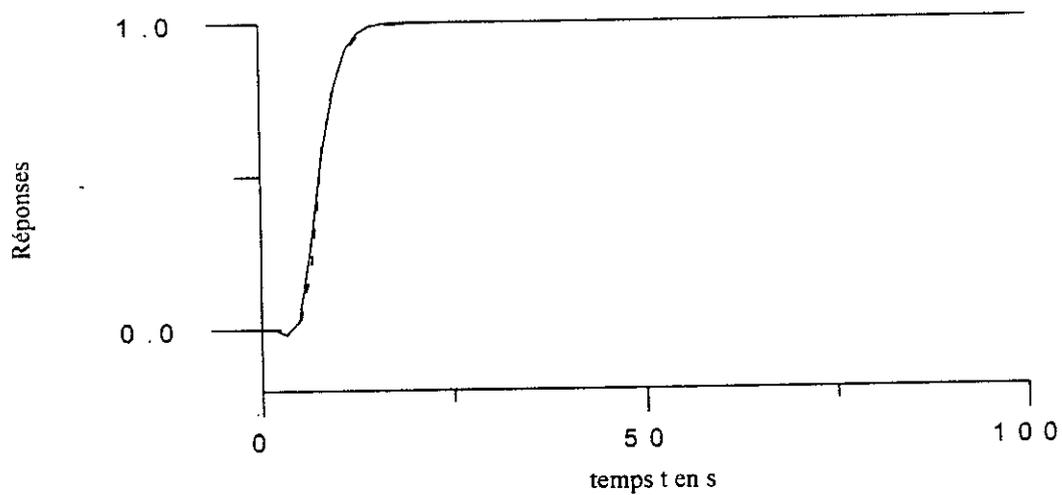
**Fig 5-8 Exemple -3 : Réponses indicielles en B.O**



**Fig 5-9 Exemple-4 : Réponses indicielles en B.O**



**Fig 5-10 Exemple 5 : Réponses indicielles en B.O**



**Fig 5-11 Exemple-6 : Réponses indicielles en B.O**

### Remarque

Afin de mieux comparer nos résultats de modélisation avec ceux obtenus par Q.Wang et al [55], nous avons présenté les erreurs commises par les deux méthodes sur les réponses indicielles des exemples précédents.

En notant par  $y(t)$  la réponse indicielle en boucle ouverte du système original,  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  respectivement celles de notre modèle du premier ordre et de Q. Wang et al. Nous avons défini les erreurs comme suit:

$$\begin{aligned} e_{r1} &= y(t) - y_1(t). \\ e_{r2} &= y(t) - y_2(t). \end{aligned} \tag{5-35}$$

La figure 5-12 montre le tracé des deux erreurs pour chacun des exemples précédents. Nous constatons que, les erreurs commises par notre méthode de modélisation sont les plus faibles, elles ne dépassent pas 0.1 (trait continu). A noter aussi que, malgré les approximations dans les expressions de Q.Wang et al, elles constituent une bonne représentativité des procédés (trait discontinu).

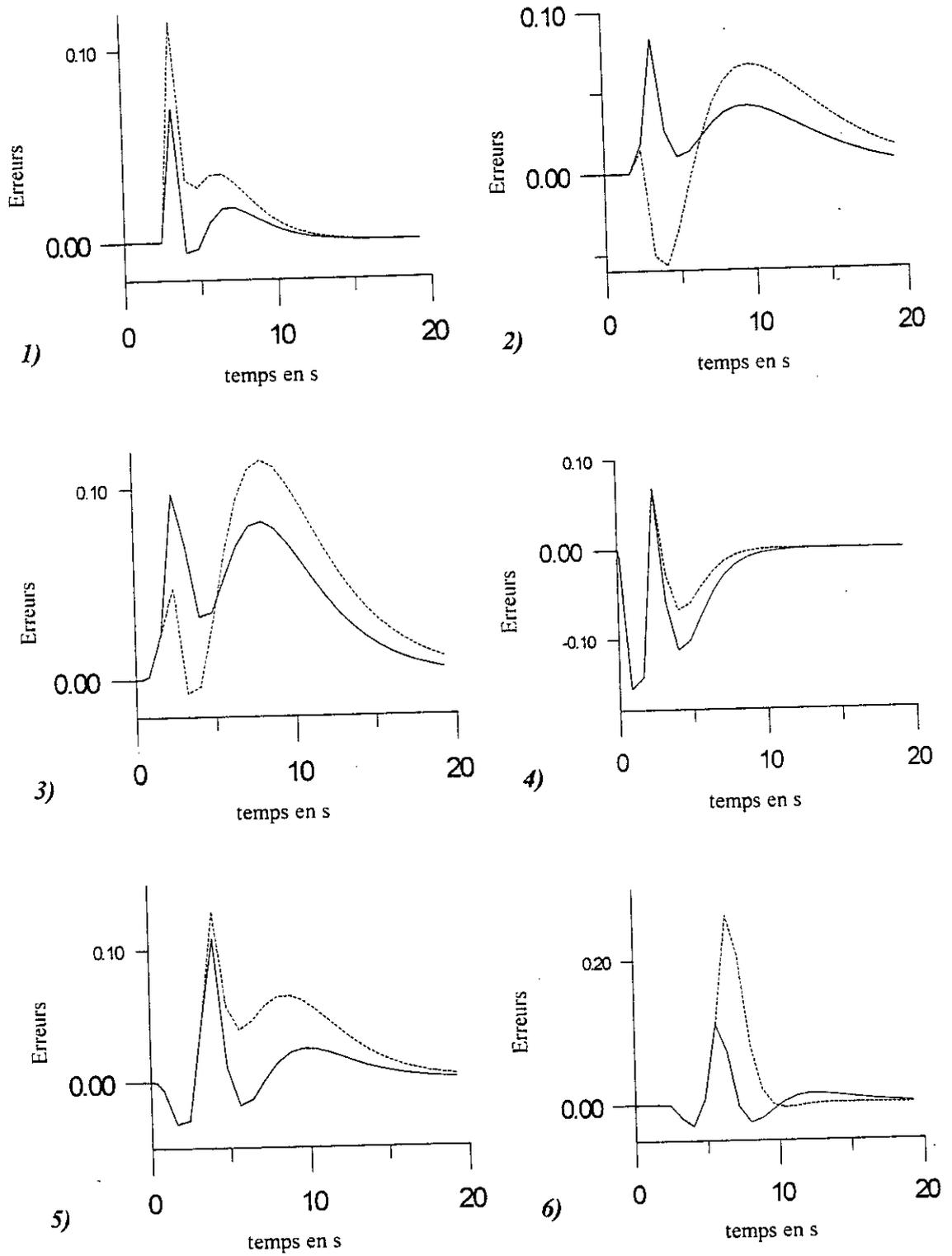


Fig 5-12 Erreurs commises sur les réponses indicelles lors de l'identification de modèle 1<sup>er</sup> ordre.  $e_{r1}$  en continu et  $e_{r2}$  en pointillé.

## 5.2 Commande on-line

L'observation de la forme des oscillations limites permet de choisir le modèle du procédé à considérer. La mesure de l'amplitude  $a_0$  et la période  $T_{cr}$  des oscillations limites permet en un seul test à relais de :

- Déterminer les paramètres du modèle.
- Déterminer les paramètres du régulateur pour une spécification de marge de phase.

Cette opération se fait on-line et peut se répéter chaque fois que c'est nécessaire.

### 5.2.1 Systèmes de moyennes réglabilités

Pour de tels procédés, nous proposons le réglage on-line du prédicteur de Smith et celui du PI prédictif. Ce dernier est jugé très simple à régler et peut donner de très bons résultats. Son application on-line dans la commande à relais, pour une spécification de marge de phase prédéfinie, est présentée ci-dessous.

#### PI prédictif dans la commande à relais

Nous avons développé la section du PPI pour déterminer les paramètres du régulateur PI à partir de test à relais. Tout en se basant, sur une spécification de marge de phase  $\phi_m$  prédéfinie.

Le déplacement du point critique vers une position, est spécifiée par une marge de phase  $\phi_m$ , cette position cible est caractérisée par  $e^{j(\pi+\phi_m)}$ . Ainsi, le système compensé doit satisfaire :

$$G_c(j\omega_{cr})G(j\omega_{cr}) = e^{j(\pi+\phi_m)} \quad (5-36)$$

Avec:

$$G_c(j\omega_{cr}) \cong K_p \left( 1 + \frac{1}{j\omega_{cr}T_i} \right) e^{j\omega_{cr}l_p} \quad (5-37)$$

$$|G_c(j\omega_{cr})| = K_p \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_{cr}^2 T_i^2}}$$

$$\arg G_c(j\omega_{cr}) = \omega_{cr}l_p - \arctg \frac{1}{\omega_{cr}T_i} = \phi_c \quad (5-38)$$

et  $l_p$  horizon de prédiction.

Il apparaît que:

$$\begin{aligned}
 |G_c(j\omega_{cr})| |G(j\omega_{cr})| e^{j(\pi+\psi+\phi_c)} &= e^{j(\pi+\phi_m)} \\
 \Rightarrow \phi_c &= \phi_m - \psi \\
 \Rightarrow \omega_{cr} l_p - \phi_m + \psi &= \arctg\left(\frac{1}{\omega_{cr} T_i}\right) \\
 \Rightarrow \operatorname{tg}(\omega_{cr} l_p + \psi - \phi_m) &= \frac{1}{\omega_{cr} T_i}
 \end{aligned} \tag{5-39}$$

D'autre part :

$$K_p \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_{cr} T_i}\right)^2} \left(\frac{1}{K_{cr}}\right) = 1 \tag{5-40}$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{cases}
 T_i = \frac{1}{\omega_{cr} \operatorname{tg}(\omega_{cr} l_p + \psi - \phi_m)} \\
 K_p = \frac{4M}{\pi a_0} \operatorname{Cos}(\omega_{cr} l_p + \psi - \phi_m)
 \end{cases} \tag{5-41}$$

Nous constatons que dans cette synthèse du régulateur PI prédictif, nous levons les deux contraintes de la méthode. Ainsi nous n'aurons pas besoin :

- d'approximer le système en un modèle du 1<sup>er</sup> ordre.
- ni de majorer  $l_p$  pour avoir la stabilité.

Originellement le  $l_p$  [18] a été limité à :  $l_p \leq 0,63 L_m$ . Dans notre méthode, l'horizon de prédiction  $l_p$  peut être augmenté jusqu'à  $L_m$ , nous prendrons ainsi :

$$l_p = L_m \tag{5-42}$$

Pour évaluer les performances de cette technique on-line qui, par nature est plus robuste que toute autre technique off-line, nous avons simulé la commande on-line de procédés de différentes dynamiques. Nous comparons les résultats obtenus, par quatre méthodes de synthèse toutes appliquées on-line selon la figure ci-après.

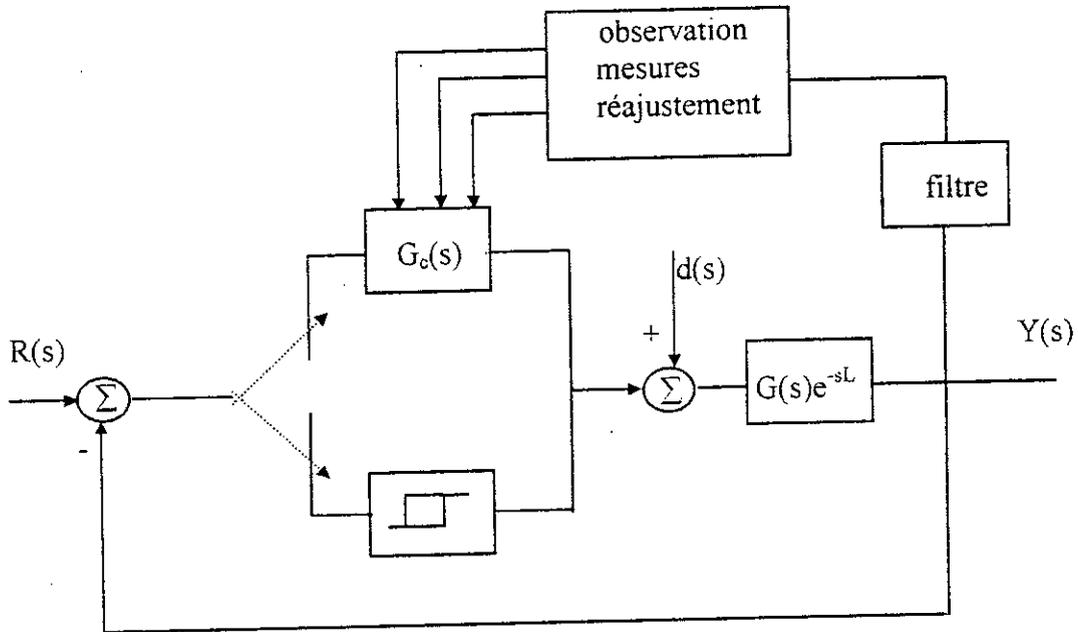


Fig 5-13 Emploi de relais en autoréglage

- L'observation permet de distinguer les formes d'oscillations, puis décider le choix du modèle à considérer.
- L'opération de mesure détermine  $a_0$  et  $\omega_{cr}$ .
- Le réglage dans cette phase, permet de calculer les paramètres du modèle, du régulateur et la fonction  $M(s)$  dans le cas du PPI.

Les quatre méthodes de synthèse appliquées dans ce chapitre sont les suivantes :

- Prédicteur de Smith On-line noté : PS
- PI prédictif On-line noté : PPI
- Méthode de Ziegler-Nichols (modifiée) On-line notée : MZN
- Méthode d'optimisation On-line notée : OPM

### 5.2.2 Exemples d'illustration

Trois exemples de différentes dynamiques sont choisis, afin de bien comparer les résultats obtenus par l'application on-line des quatre méthodes. Rappelons que le PS utilise le modèle obtenu dans sa configuration alors que son compensateur primaire est déterminé selon la méthode d'Astrom-Hagglund-modifiée. Dans notre PPI nous n'aurons pas besoin d'approximer le procédé au premier ordre, à moins que le retard ne soit pas apparent (exemple 3). Pour la méthode d'optimisation, les paramètres du modèle sont utilisés pour calculer le régulateur principal. Sachant que pour les trois exemples, le gain statique est égal 1, nous présentons dans la figure ci-après les courbes

de corrélation du gain critique en fonction de la réglabilité pour les trois exemples à simuler.

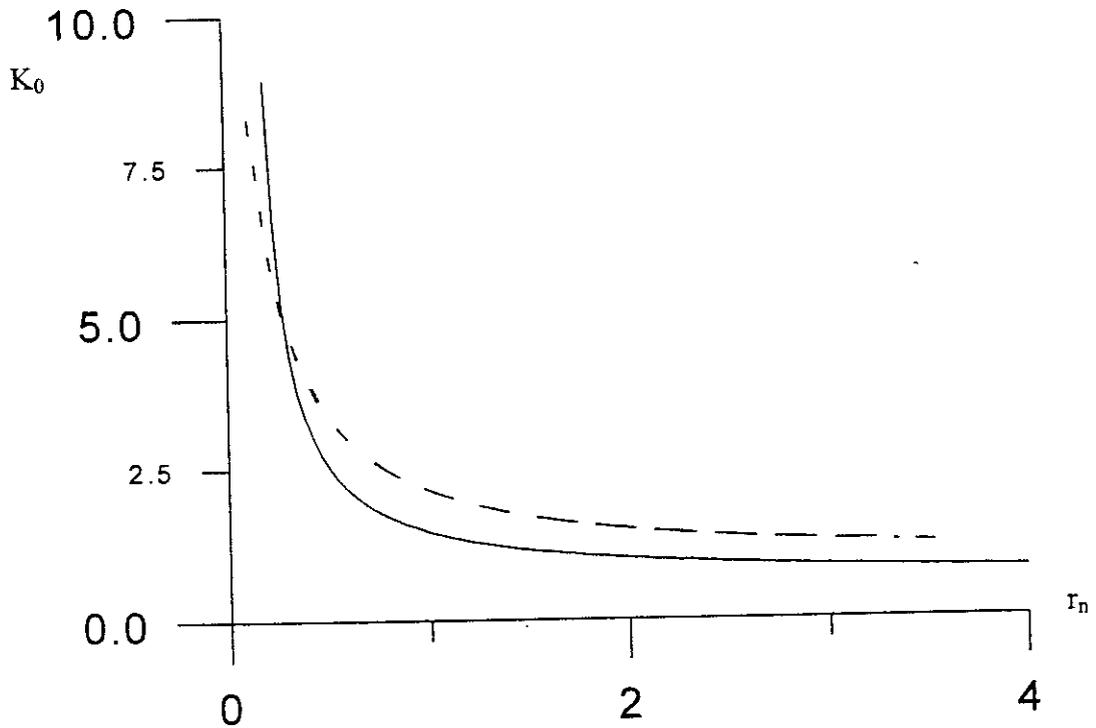


Fig 5-14 courbes de corrélation du gain critique en fonction de la réglabilité pour les 3 exemples à simuler.

Nous constatons qu'en moyenne les courbes ressemblent bien à l'approximation proposée par Astrom [7] (trait continu) sous la forme de la relation empirique suivante :

$$K_0 = 2 \left( \frac{11r_n + 13}{37r_n - 4} \right) \quad \text{avec } K_0 = K_{cr}K \quad (5-43)$$

à partir de laquelle les formules de la modification de Ziegler-Nichols sont validées.

### Exemple 1

$$G_1(s) = \frac{e^{-s}}{(2s+1)^2} \quad (5-44)$$

Dans cet exemple, le retard est faible devant la constante de temps apparente, ce qui donne une faible réglabilité du procédé. L'horizon de prédiction \$l\_p\$ est pris égal au retard du procédé. Les réponses indicielles du système compensé (fig 5-15), montrent que les meilleures performances sont obtenues par notre PPI et le prédicteur de Smith avec une légère rapidité du premier. Celui-ci est préféré à cause de sa simplicité

d'implémentation. La réponse du régulateur d'optimisation de Lopez est légèrement plus lente.

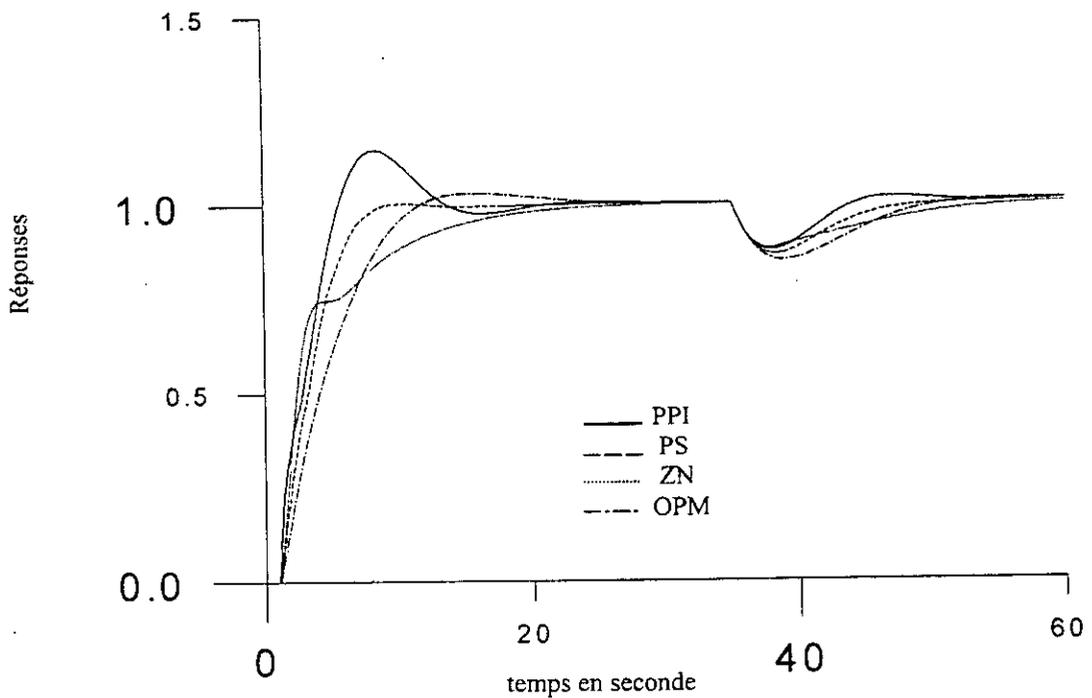


Fig 5-15 Exemple 1: Réponses indicielles du système compensé

### Exemple 2

$$G_2(s) = \frac{e^{-s}}{(s+1)^3} \quad (5-45)$$

Un autre procédé de faible réglabilité est considéré à titre de démonstration. Pour cet exemple, les résultats de commande de notre PPI avec un horizon de prédiction égal au retard du procédé et ceux obtenus par la méthode d'optimisation des paramètres de Lopez conduisent aux meilleures performances (fig 5-16). Cette dernière nécessite bien l'approximation du procédé par un modèle du premier ordre, alors que notre PPI ne souffre d'aucune contrainte d'implémentation, tout est obtenu à partir de test à relais. A noter que la réponse du PS reste acceptable et meilleur que celle obtenue par la méthode de Ziegler-Nichols (modifiée).

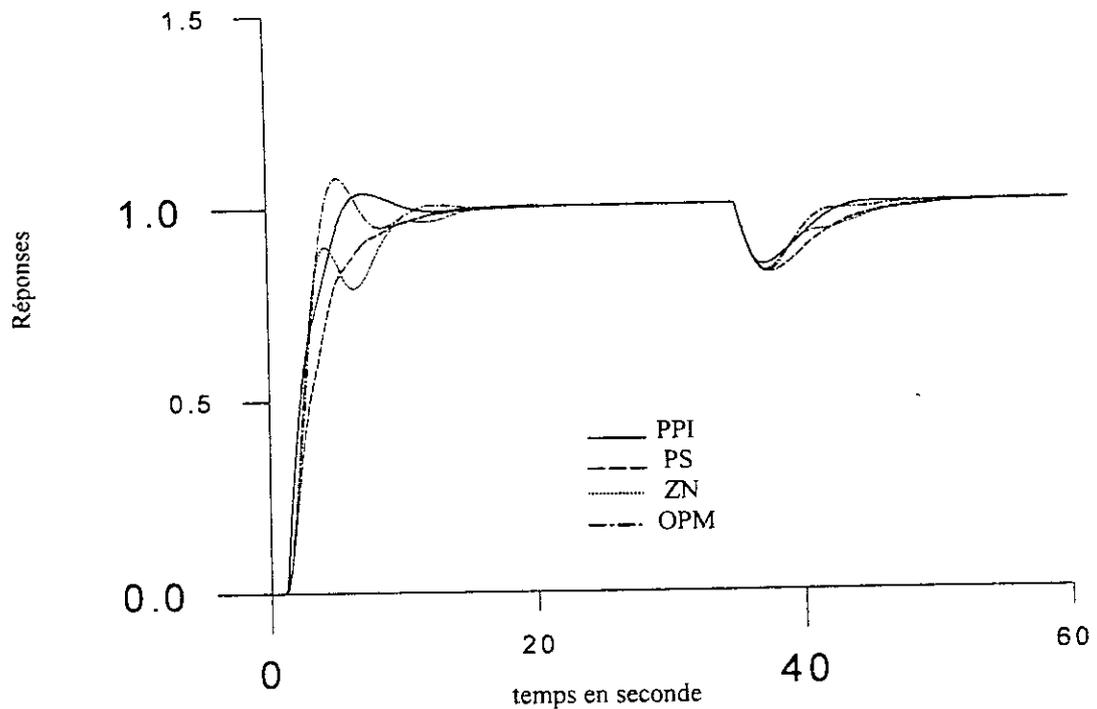


Fig 5-16 Exemple 2: Réponses indicielles du système compensé

### Exemple 3

$$G_3(s) = \frac{1 - \eta s}{(s+1)^5} \quad (5-46)$$

#### a) Cas où $\eta=0$

Dans ce cas, le procédé est du cinquième ordre sans retard, il est approximé par un système du premier ordre à retard de réglabilité moyennement faible (équation 5-22). Cela est nécessaire afin de faire apparaître le temps mort effectif du procédé à commander. Les résultats de simulation des réponses unitaires en boucle fermée du procédé compensé par les régulateurs des quatre méthodes citées ci-dessus sont présentés dans la figure 5-17. Les signaux de commande correspondants aux quatre méthodes sont aussi représentés dans la figure 5-21. De bonnes performances sont obtenues par la méthode du PI prédictif et celle de l'optimisation des paramètres de Lopez. La réponse du PS présente un léger ralentissement alors que celle de ZN est un peu dégradée. Relativement parlant notre PPI est celui qui présente la meilleure réponse. Mais, il présente un grand effort de commande à l'instant de mise en marche, ce qui peut être gênant pour les actionneurs à seuils de saturation (fig 5-21).

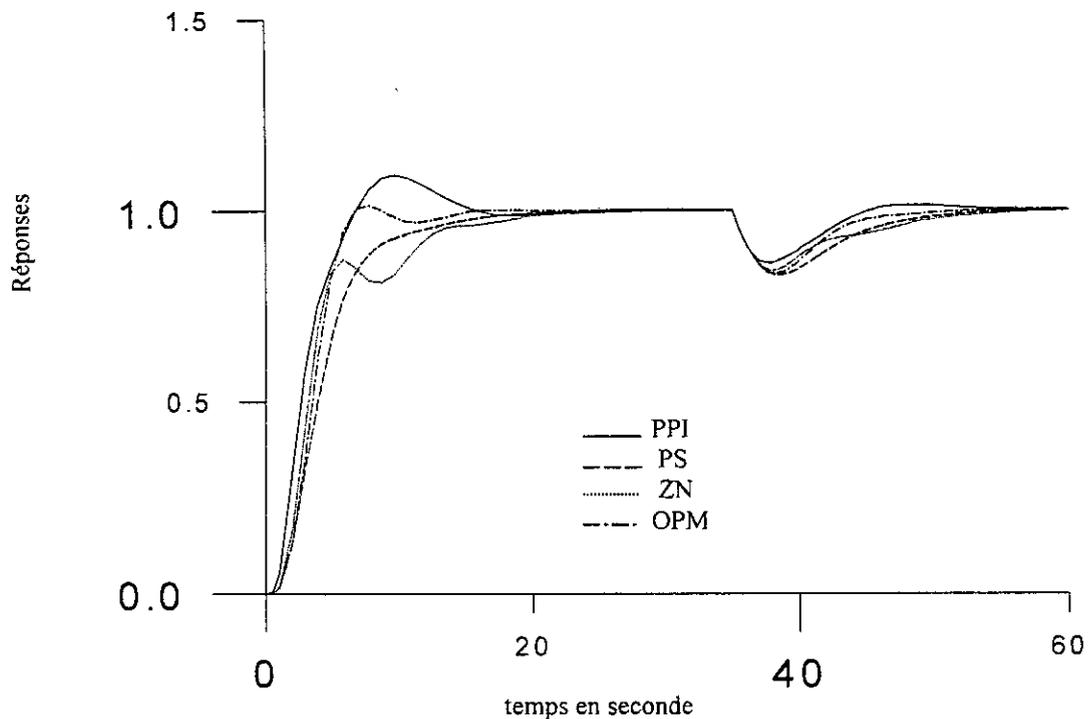


Fig 5-17 Exemple 3: Réponses indicielles du système compensé

#### b) Cas où $\eta=1$

Lorsque  $\eta=1$ , le procédé devient à déphasage non minimal. Il est approximé par un système du premier ordre de réglabilité supérieure à l'unité (équation 5-22). Dans La figure 5-18 sont représentées les réponses unitaires du système compensé par les quatre méthodes. La méthode d'optimisation a conduit le système à l'instabilité totale, sa réponse n'est pas représentée, alors que notre PPI présente une réponse très oscillatoire celle du PS est apériodique lente. Seule la méthode de Ziegler-Nichols modifiée conduit à des performances acceptables avec le minimum effort de commande voir figure 5-22.

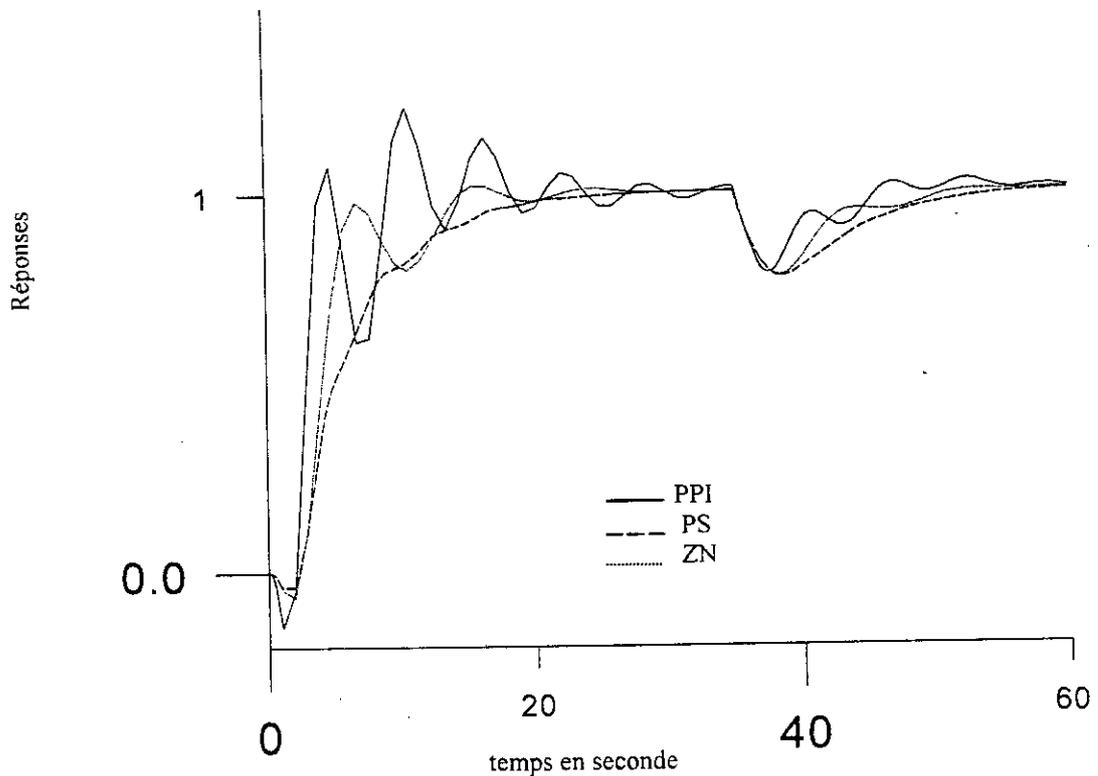
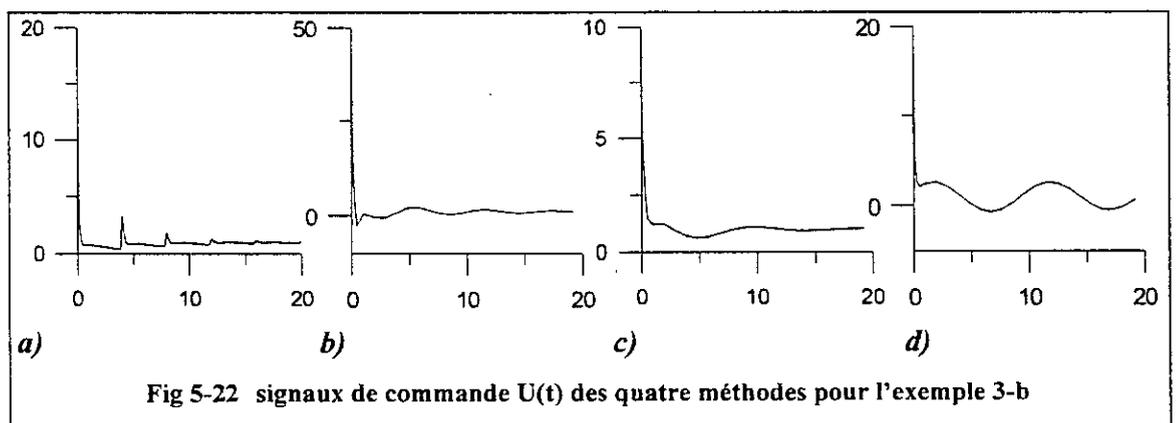
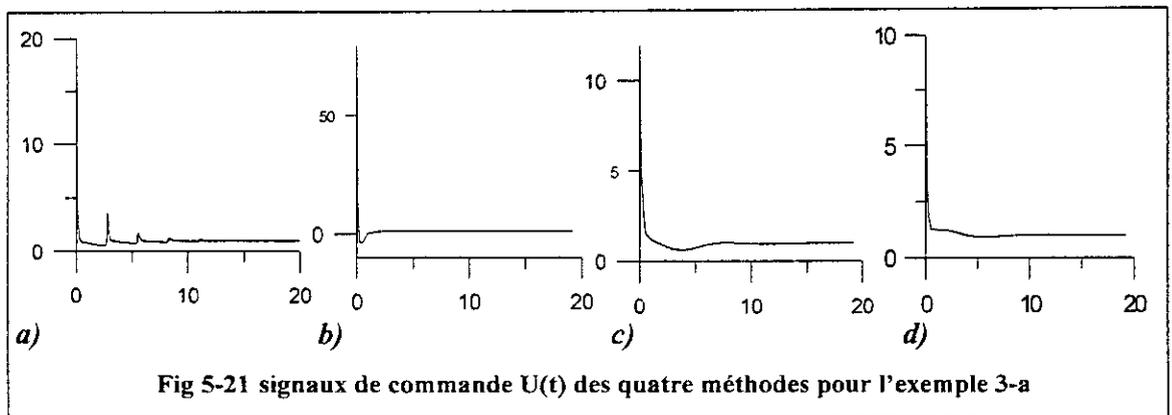
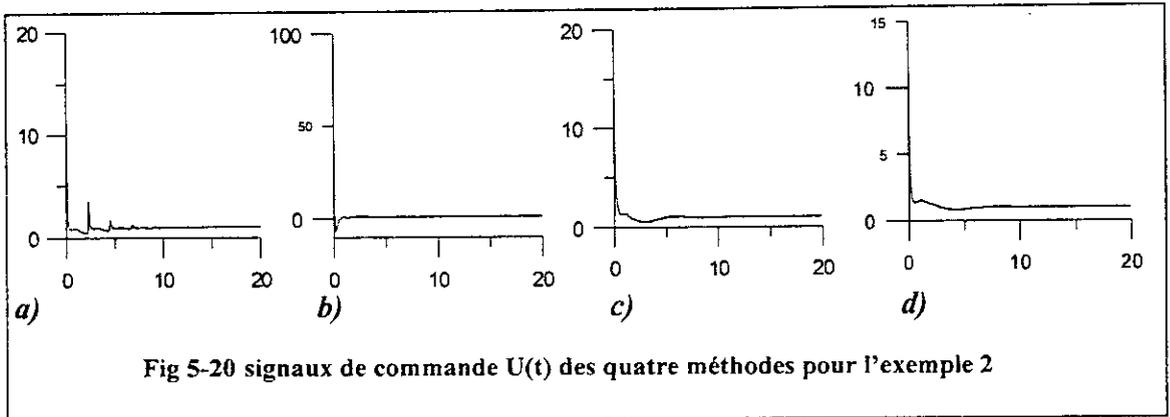
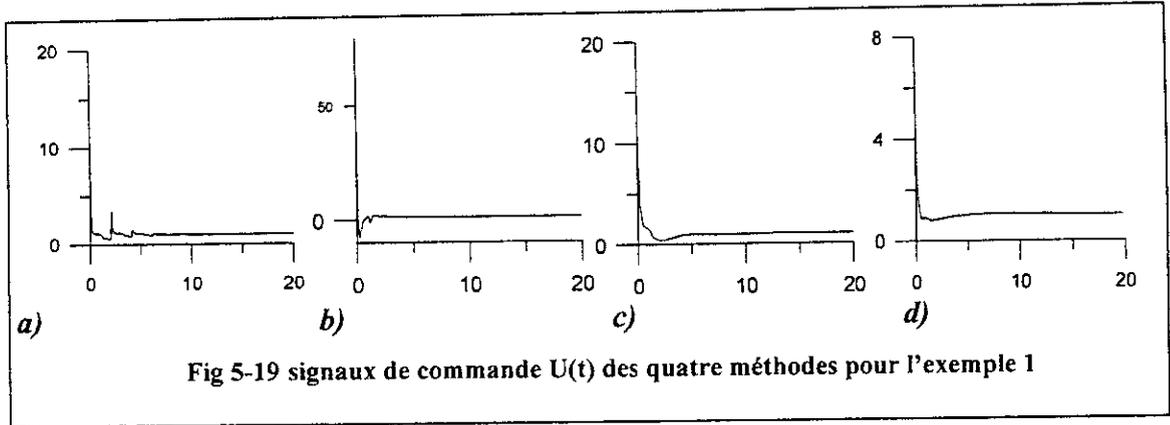


Fig 5-18 Exemple 4 : Réponses indicielles du système compensé

### Remarque

En plus de ces quatre exemples, la simulation faite sur un très grand nombre d'exemples nous a permis de tirer des conclusions générales pour l'application des quatre méthodes de synthèse. Notre PI prédictif conduit à de très bons résultats pour tous les procédés de réglabilités moyennement faibles. Ses performances sont meilleures que tous les régulateurs étudiés ou du moins comparables à celles de la méthode d'optimisation de Lopez et du prédicteur de Smith. Néanmoins, la simulation sur un très grand nombre d'exemples, montre que le PPI ne peut être appelé pour les procédés classifiés à retard dominant ou ceux ayant un grand déphasage non minimal. Mais, à cause de sa simplicité, il peut être préféré pour tous les procédés à faibles retards. Son seul désavantage est le développement d'un grand effort de commande à l'instant de mise en marche, ce qui peut être gênant pour les actionneurs à seuils de saturation. Une solution consiste à réduire les actions proportionnelle-dérivée au démarrage et procéder à une introduction progressive du régulateur [3]. A noter que les réponses de la méthode de Z-N modifiée sont toujours plus lentes et reste relativement acceptables lorsque la réglabilité est grande.



### 5.2.3.1 Commande des procédés selon leur gamme de réglabilité

Le meilleur moyen pour confirmer tous les résultats de modélisation obtenus, est la synthèse des régulateurs et la commande de procédés sur la base des modèles obtenus. Puisque le prédicteur de Smith utilise le modèle obtenu dans sa configuration, celle-ci est choisie à titre de démonstration pour la commande de toutes les gammes de réglabilité. Dans la section 5-1, nous avons identifié le modèle 1<sup>er</sup> ordre pour les trois gammes de réglabilités. Pour chaque exemple, nous retiendrons les notations suivantes :

$$\text{modèle 1 : } G_{m1}(s) = \frac{k_i}{s} e^{-L_i s} \quad (5-47)$$

$$\text{modèle 2 : } G_{m2}(s) = k_g e^{-L_g s} \quad (5-48)$$

$$\text{modèle 3 : } G_{m3}(s) = \frac{k_m e^{-L_m s}}{1 + T_m s} \quad (5-49)$$

Pour chaque exemple, nous varions la réglabilité du procédé en prenant plusieurs valeurs du retard. Ainsi, le modèle convenable sera employé dans la gamme de variation du retard correspondante. Par exemple le modèle 1 sera employé pour des petites valeurs du retard donnant lieu à des procédés à constante de temps dominante. Alors que le modèle 2 est utilisé pour les procédés à retard dominant.

Le modèle 3 est préféré pour tous les procédés de moyennes réglabilités, mais il reste valable pour les autres gammes.

A noter que la configuration de Smith ne convient pas pour les procédés de faibles réglabilités (modèle 1). Pour ceux-ci, nous avons fait appel à la version modifiée de Watanabe [8]. Nous retiendrons pour ce type de procédés, les formules du PID de M.Chien et Fruehauf [35] suivantes :

$$K_p = \frac{2}{k_i (T_c + L_i / 2)} \quad (5-50)$$

$$T_i = 2T_c + L_i \quad (5-51)$$

$$T_d = \frac{T_c + L_i^2 / 4}{2T_c + L_i} \quad (5-52)$$

Avec  $T_c$  un paramètre de réglage, lié à la rapidité désirée de la réponse du système compensé, la valeur proposée est  $T_c = L_i \sqrt{10}$ .

Pour les procédés de grandes réglabilités, représentés par le modèle 2, Morari et Zafiriou [35] ont proposé les formules du PI suivantes :

$$K_p = \frac{L_g}{(L_g + 2T_c)k_g} \quad (5-53)$$

$$T_i = \frac{L_g}{2} \quad (5-54)$$

Avec  $T_c = L_g \sqrt{10}$ .

### 5.2.3.2 Exemples d'illustration

En reprenant deux exemples de la section précédente, les figures ci-après montrent les réponses indicielles (en boucle fermée) du système compensé par les techniques suivantes :

- a - le régulateur (éq 5-50/52) à base de notre modèle 1 à deux paramètres (éq 5-47) est employé comme correcteur primaire dans la version de Watanabe.
- b - le régulateur (éq 5-53/54) à base de notre modèle 2 à deux paramètres (éq 5-48) est employé comme correcteur primaire dans le prédicteur de Smith.
- c - Le procédé est représenté par notre modèle 3 à 3 paramètres (éq 5-49), la méthode de synthèse est celle du PS on-line de la section précédente.

#### Exemple 1

$$G_1(s) = \frac{e^{-1s}}{(2s+1)^2} \quad (5-55)$$

La variation de la réglabilité du procédé est réalisée en considérant plusieurs valeurs du retard. Nous constatons que lorsque la réglabilité est faible, les réponses à base du modèle 1 conduisent à de bons résultats, elles commencent à se dégrader au fur et à mesure que celle-ci augmente (fig 5-23). Pour des valeurs moyennes de cette dernière, les meilleures réponses sont celles obtenues à base du modèle 3 (fig 5-24). Alors que pour les grandes valeurs de réglabilité seules les réponses à base du modèle 2 restent acceptables avec une certaine lenteur à cause du grand retard (fig 5-25).

Le tableau ci-après résume les résultats de modélisation du procédé pour les différentes gammes de réglabilité.

Retard	Modèle 1 à 2 paramètres eq 5-10		Modèle 2 à 2 paramètres eq 5-12		Modèle 3 à 3 paramètres eq 5-22		
	$L$	$K_i$	$L_i$	$K_g$	$L_g$	$K_m$	$L_m$
0	0.3257	0.3159	//	//	//	//	//
0.3	0.4088	0.6184	//	//	//	//	//
0.5	0.4463	0.7882	//	//	//	//	//
1	0.4919	1.1505	//	//	1.00	1.5037	1.8537
2	//	//	//	//	1.00	2.5445	1.6347
3	//	//	//	//	1.00	3.5627	1.5507
5	//	//	0.8949	2.2824	1.00	5.5741	1.4621
8	//	//	0.9432	3.0124	//	//	//
10	//	//	0.9559	3.5505	//	//	//
15	//	//	0.9719	4.9156	//	//	//

Tab 5-2 Exemple 1 : Identification de modèle 1<sup>er</sup> ordre pour les 3 gammes de réglabilité

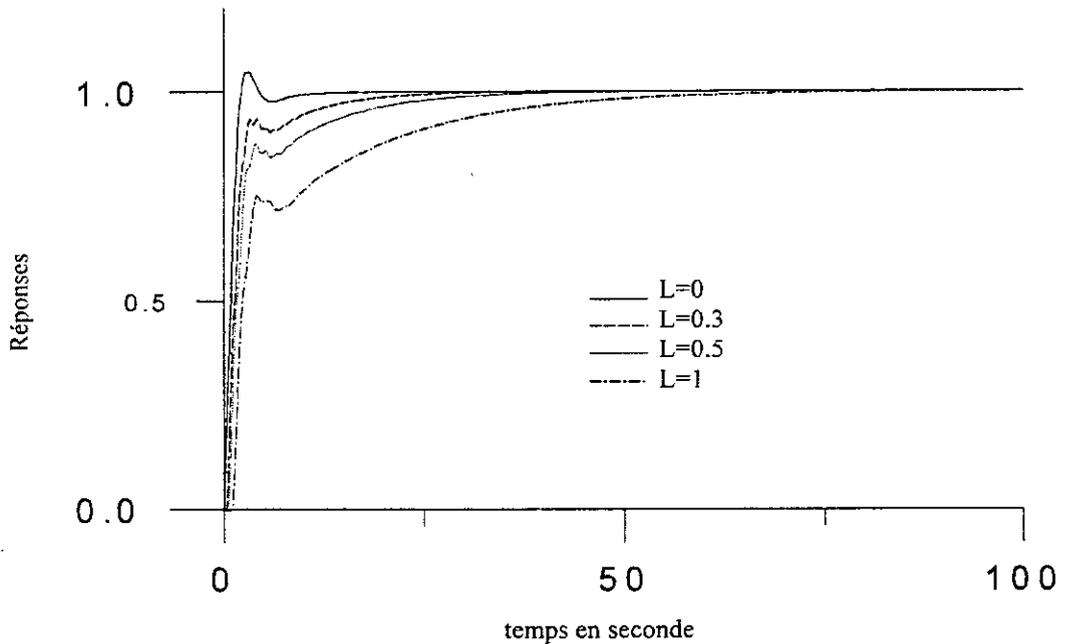


Fig 5-23: Exemple1: Réponses indicielles: Watanabe à base du modèle 1

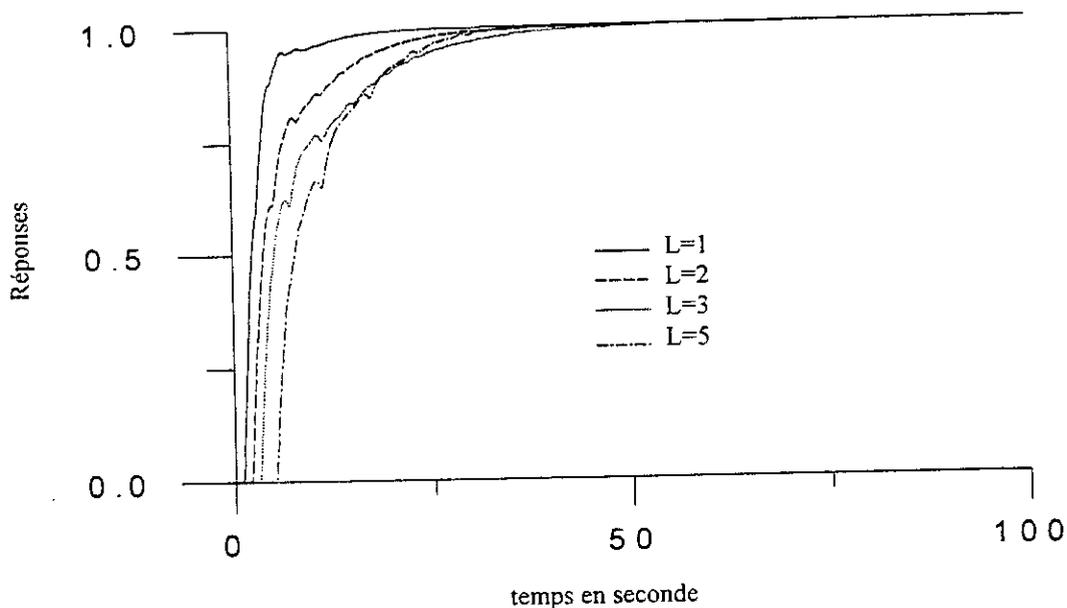


Fig 5-24: Exemple1: Réponses indicielles du PS à base du modèle 3

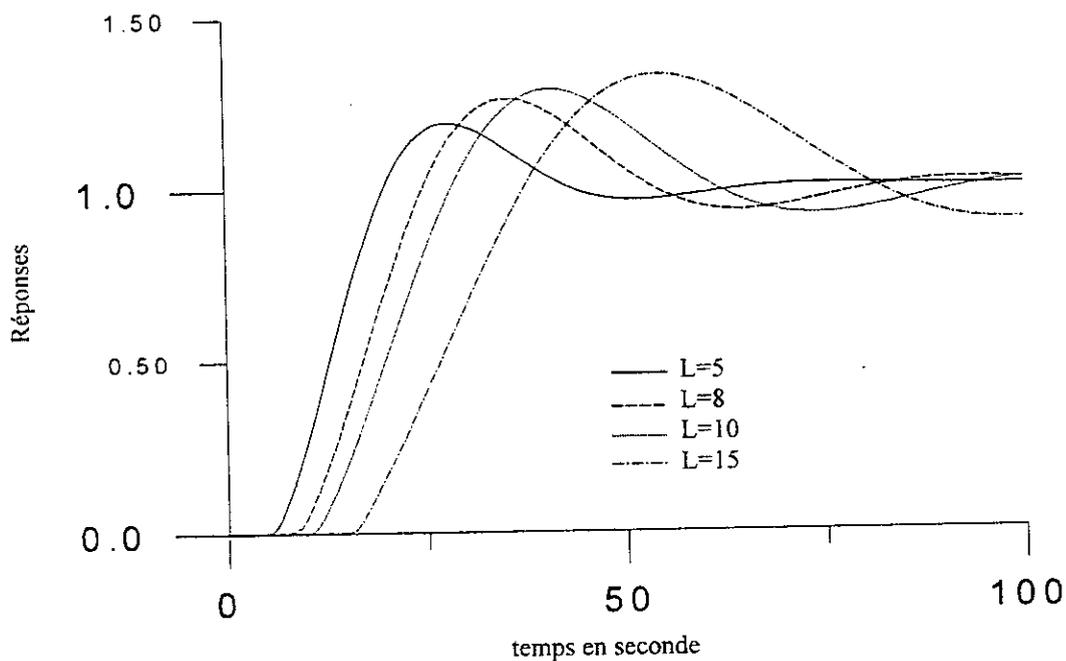


Fig 5-25: Exemple1: Réponses indicielles du PS à base du modèle 2

### Exemple 2

$$G_2(s) = \frac{1-s}{(s+1)^5} e^{-Ls} \quad (5-56)$$

Cet exemple est introduit à titre de comparaison, nous constatons que même pour un retard nul, le zéro instable est équivalent à un grand retard. Ce qui ne permet en aucun cas de représenter le procédé par le modèle 1 (figure 5-26). Les deux autres modèles

restent toujours valables dans leurs gammes de réglabilités et les résultats de commande sont bons. Les résultats de modélisation du procédé pour les différentes gammes de réglabilité, sont résumés dans le tableau suivant :

Retard	Modèle 1 à 2 paramètres eq 5-10		Modèle 2 à 2 paramètres eq 5-12		Modèle 3 à 3 paramètres eq 5-22		
	$K_i$	$L_i$	$K_g$	$L_g$	$K_m$	$L_m$	$T_m$
0	0.3373	2.6329	//	//	//	//	//
0.3	0.3324	2.8132	//	//	//	//	//
0.5	0.3287	2.9275	//	//	1.00	4.1753	2.2984
1	//	//	//	//	1.00	4.9472	2.1619
2	//	//	0.8461	2.8563	1.00	5.9473	2.1498
5	//	//	0.9106	3.4933	//	//	//
8	//	//	0.9365	4.2756	//	//	//

Tab 5-3 Exemple 2 : Identification de modèle 1<sup>er</sup> ordre pour les 3 gammes de réglabilité

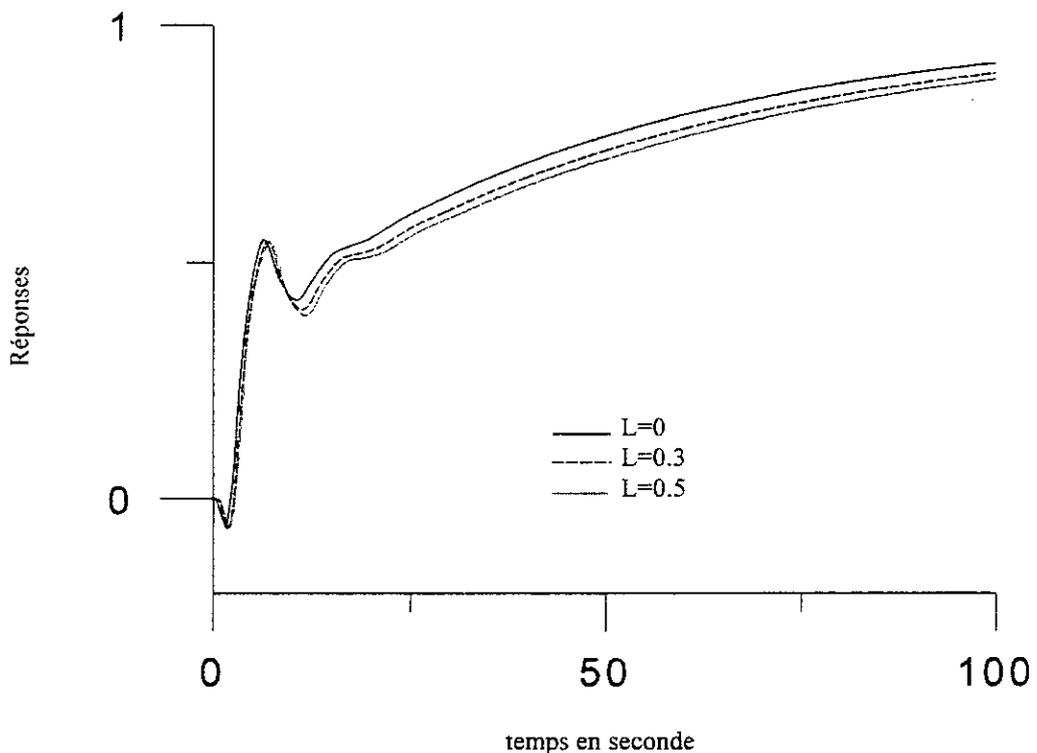


Fig 5-26: Exemple2: Réponses indicielles: Watanabe à base de modèle1

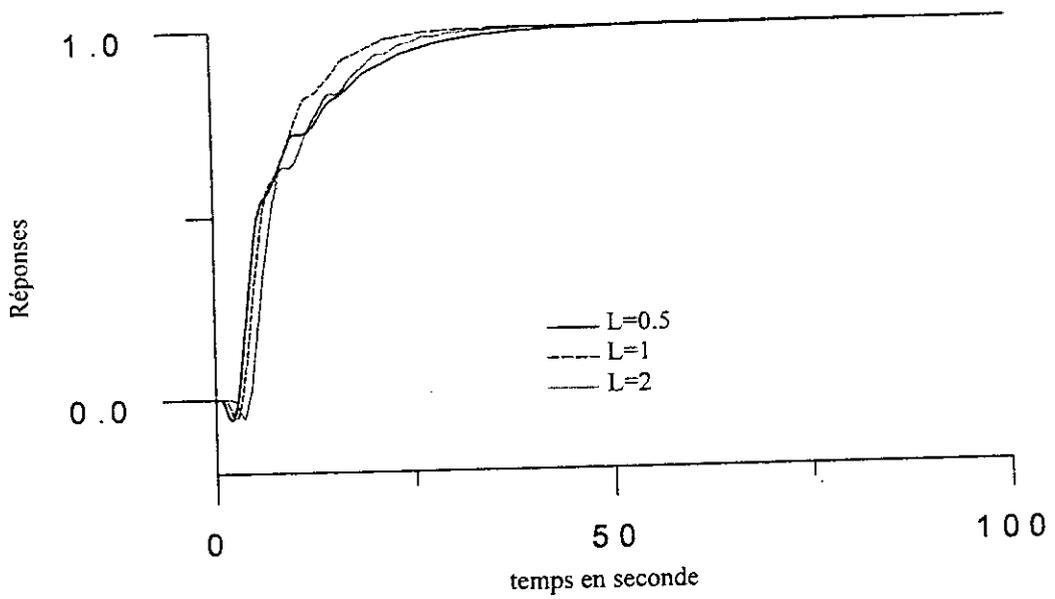


Fig 5-27: Exemple2: Réponses indicielles du PS à base de modèle 3

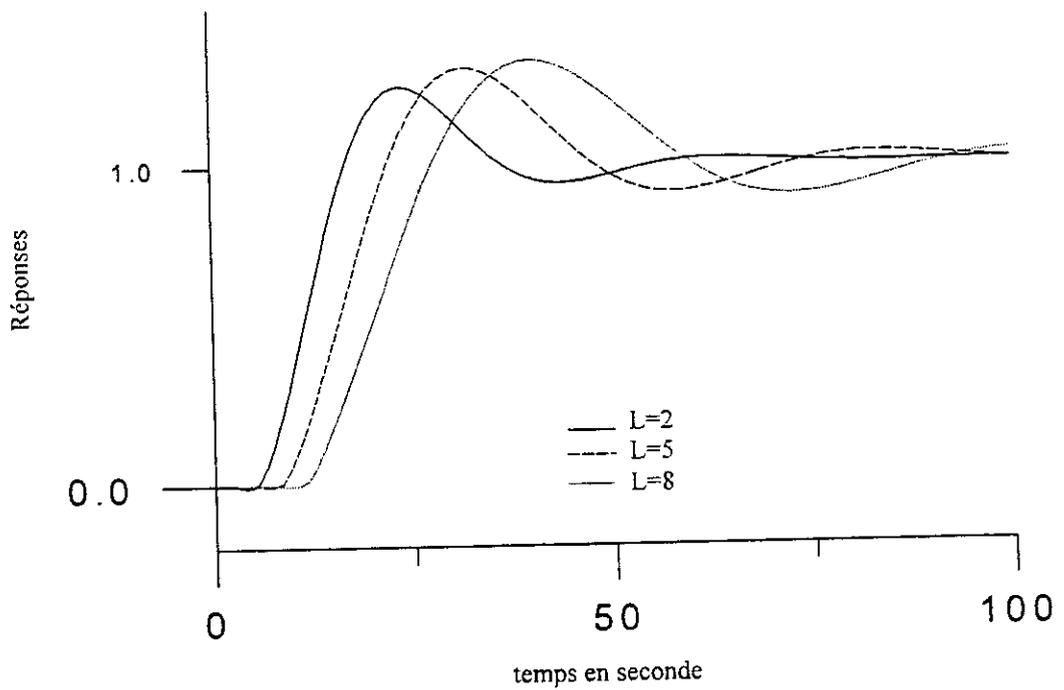


Fig 5-28: Exemple2: Réponses indicielles du PS à base de modèle 2

### Remarque

Pour ne pas alourdir l'exposé de ce chapitre, les résultats de commande à base des modèles de M.Friman et Qing Wang n'ont pas été représentés. Mais, une comparaison avec nos résultats montre la supériorité de ces derniers. Le modèle intégrateur à retard de M. Friman est plutôt utile lorsque la réglabilité est moyennement faible.

### 5.3 Robustesse

Il a été signalé que l'effet des erreurs de modélisation ensembles de tous les paramètres du système à commander, est difficile à chiffrer même pour un modèle simple du premier ordre.

Pour les méthodes on-line de ce chapitre où le procédé à commander, est modélisé par un modèle du premier ordre à 3 paramètres obtenus à partir de deux mesures :

- mesure de la période des oscillations
- mesure de l'amplitude des oscillations

Le test de robustesse le plus direct et le plus pratique, est celui qui prend en considération les erreurs commises lors de la mesure de ces deux paramètres (i.e. l'amplitude et la période des oscillations). Ainsi l'identification à relais facilite davantage l'examen de la robustesse en réduisant le nombre de paramètres mis en jeu.

Nous considérons des erreurs de mesure individuelles et collectives de  $\pm 25\%$  sur les valeurs exactes  $a^*$  et  $T_{cr}^*$  (obtenues par la résolution de l'équation  $G(s) = -1/N(a)$ ). Pour deux exemples de la section précédente et les valeurs de simulation du tableau ci-dessous, nous présentons les tests de robustesse dans les figures ci-après.

Cas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T_{crs}$	$T_{cr}^*$	$T_{cr}^*$	$T_{cr}^*$	$1.25T_{cr}^*$	$0.75T_{cr}^*$	$0.75T_{cr}^*$	$0.75T_{cr}^*$	$1.25T_{cr}^*$	$1.25T_{cr}^*$
$a_s$	$a^*$	$1.25a^*$	$0.75a^*$	$a^*$	$a^*$	$1.25a^*$	$0.75a^*$	$1.25a^*$	$0.75a^*$

Tab 5-4 Valeurs des paramètres critiques de simulation

Pour mieux chiffrer la robustesse de cette technique à relais, et pouvoir tirer des conclusions solides et claires, nous subdivisons ce tableau en quatre ensembles. Chacun est testé par les quatre méthodes de synthèse de ce chapitre. Dans tous les ensembles le cas n°1 où les paramètres de simulation sont les valeurs exactes, est pris comme référence.

Ensembles	Les cas regroupés	Observation
a	1-2-3	période exacte avec erreur d'estimation sur l'amplitude.
b	1-4-5	Amplitude exacte avec erreur d'estimation sur la période.
c	1-7-8	comparaison entre la surestimation et la sous-estimation des deux paramètres.
d	1-6-9	erreurs d'estimation inverses des deux paramètres.

Tab 5-5

### 5.3.1 Simulation

Pour les deux exemples de la section précédente, nous avons tracé les graphes des quatre ensembles par les quatre méthodes de synthèse de la section 5.2.1. Nous avons constaté que seulement le cas 5 présente une certaine amélioration de la réponse idéale (cas 1), cela est valable pour toutes les méthodes de synthèse et tous les exemples étudiés. Nous avons aussi remarqué que notre PPI tout comme le prédicteur de Smith sont plus robustes de tous les régulateurs étudiés. Alors que le régulateur d'optimisation de Lopez est très sensible vis-à-vis des erreurs de modélisation. A noter que dans le cas 5, la période des oscillations est sous-estimée et la valeur de leur amplitude est la valeur exacte. Encore, dans le cas 5, les paramètres du modèle du premier ordre obtenu sont légèrement inférieurs à ceux du cas idéal (cas 1). Ce qui permet de retrouver les recommandations de sous-estimer tous les paramètres lors de l'identification du modèle du premier ordre (chapitre-3). Puisque la mesure des paramètres de l'oscillation est toujours entachée d'erreurs voir section 5.1, notre recommandation est de sous-estimer la période des oscillations alors que la valeur exacte de l'amplitude peut toujours être obtenue en mesurant la moyenne de la valeur pic à pic.

Pour les deux exemples étudiés et parmi les courbes de simulation des 9 cas considérés, nous avons choisi de représenter seulement les cas 1 et 5 par les méthodes ci-dessous. Tous les autres cas présentent une certaine dégradation de la réponse idéale.

Rappelons que les deux exemples étudiés sont les suivants :

$$\text{Exemple 1: } G_1(s) = \frac{e^{-2s}}{(2s+1)^2}$$

$$\text{Exemple 2: } G_2(s) = \frac{1-s}{(s+1)^5}$$

Nous avons représenté la courbe du cas idéal en continu, celle du cas 5 en pointillé dans les figures ci-après.

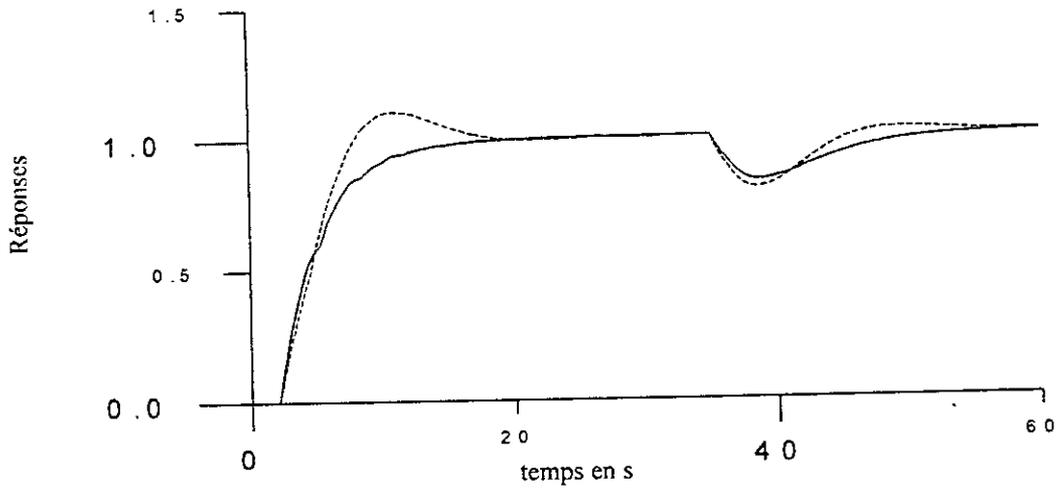


Fig 5-29 Exemple1: test de robustesse de la réponse indicielle du PS

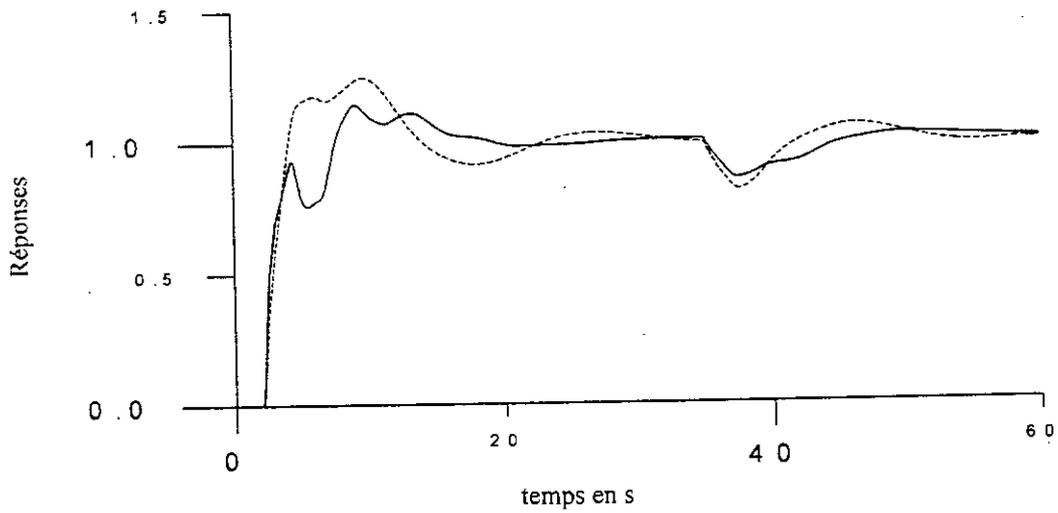


Fig 5-30 Exemple1: test de robustesse de la réponse indicielle du PPI

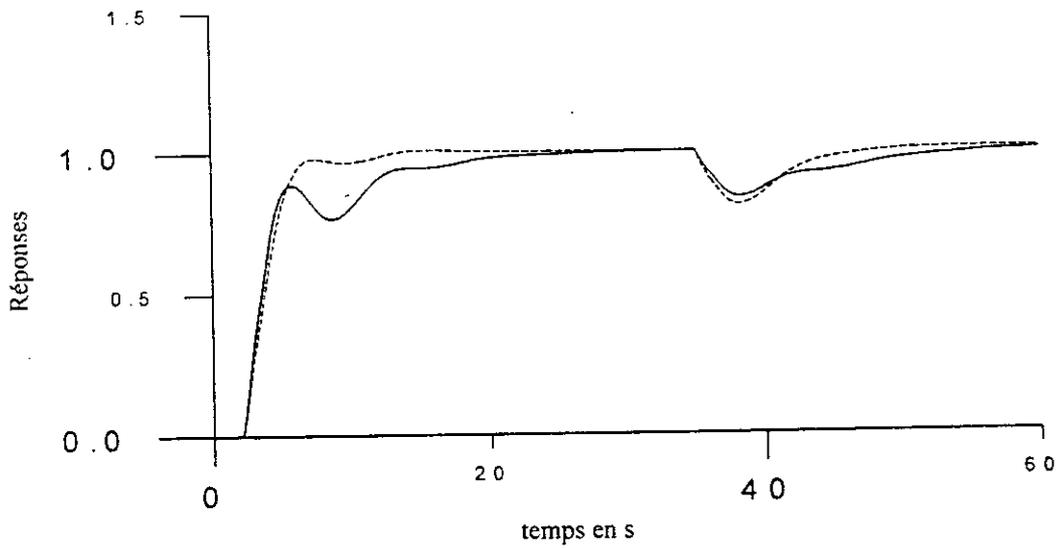


Fig 5-31 Exemple1: test de robustesse de la réponse indicielle de MZN

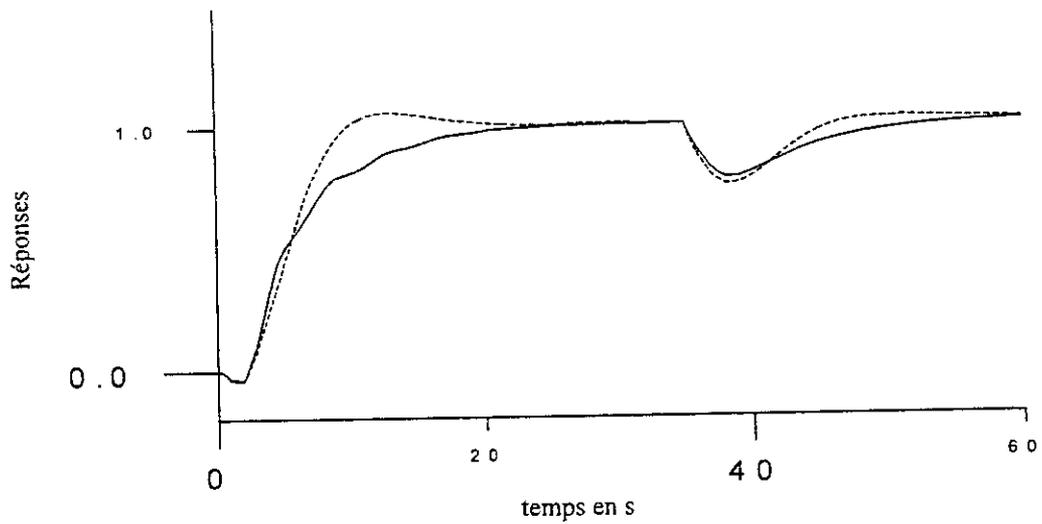


Fig 5-32 Exemple2: test de robustesse de la réponse indicielle du PS

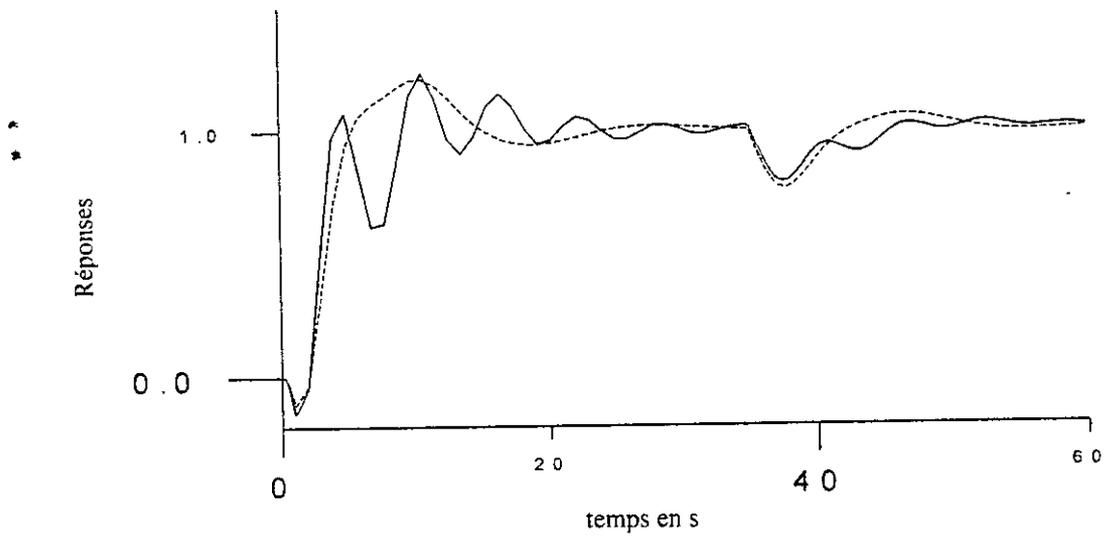


Fig 5-33 Exemple2: test de robustesse de la réponse indicielle du PPI

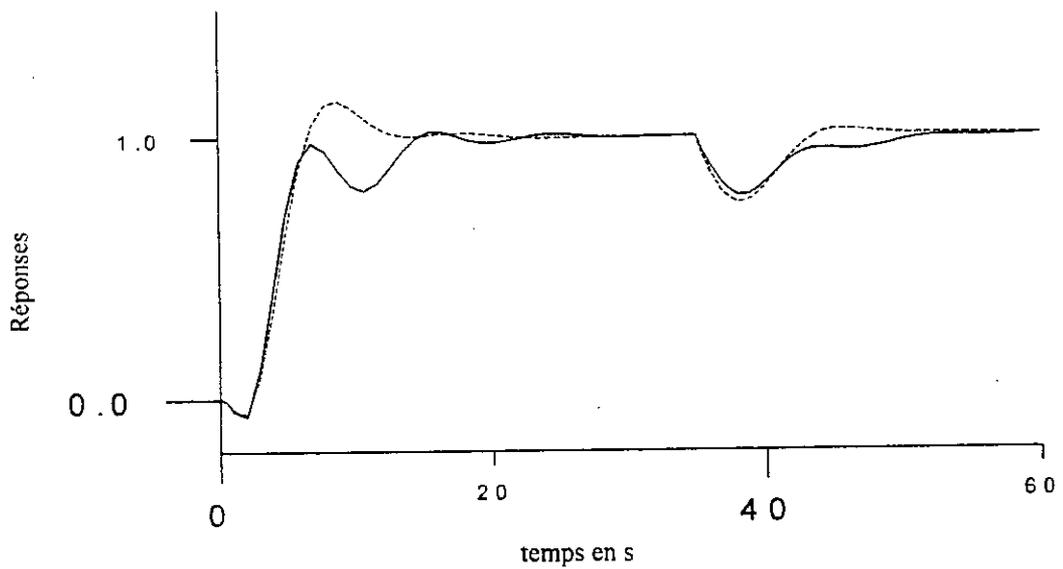


Fig 5-34 Exemple2: test de robustesse de la réponse indicielle de MZN

## 5.4 Conclusion

Nous constatons que les modèles du premier ordre obtenus dans la section 5-1, à partir de test à relais constituent une très bonne représentativité des procédés originaux. Cela est confirmé dans la section 5-2 où de bonnes performances dans la commande sont obtenues sur la base de ces modèles. D'après les courbes de simulation des 4 exemples dans la section 5-2 et sur d'autres exemples, nous remarquons que notre PPI conduit à de très bons résultats pour tous les procédés de réglabilités inférieures ou égales à l'unité. La méthode ne souffre d'aucune contrainte de réglage ou d'implémentation, tout est obtenu à partir de test à relais. Ses performances sont meilleures ou du moins comparables à la méthode d'optimisation de Lopez. Son seul désavantage est qu'il présente un grand effort de commande à l'instant de mise en marche. D'autres parts, nous pensons que les résultats médiocres de la méthode de Z-N modifiée sont principalement dues aux modifications recommandées dans [7] qui ne peuvent être valables pour tous les types de procédés (figure 5-14). En ce qui concerne la robustesse, d'après la simulation des réponses des deux procédés étudiés et la simulation sur plusieurs autres exemples, nous pouvons dire que notre PI prédictif tout comme le prédicteur de Smith présentent un bon degré de robustesse vis à vis des erreurs de modélisation. Dans le cas 5, une nette amélioration de la réponse idéale est visible avec toutes les méthodes de synthèse considérées et pour tous les exemples étudiés. Dans ce cas, la période des oscillations est sous-estimée alors que l'amplitude exacte  $a^*$  peut toujours être mesurée même en présence de perturbations. *Ainsi notre recommandation pour le test à relais est de sous-estimer la période des oscillations.*

Nous constatons aussi que la réglabilité seule ne peut chiffrer les dynamiques d'un procédé et l'examen de la valeur du gain critique (normalisé) est bien nécessaire. A titre de comparaison, les cas 4 et 5 du même tableau montrent que les valeurs de  $K_0$  et  $r_n$  (non représentées) du cas 4 sont les plus proches aux valeurs exactes mais n'améliorent pas la réponse idéale comme le fait le cas 5. Cela est dû au fait que les paramètres  $T_m$  et  $L_m$  du modèle de premier ordre sont surestimés dans le cas 4 et sous-estimés dans le cas 5 mais avec le même sens de variation de  $K_0$  et  $r_n$ . Ainsi, nous retrouvons les recommandations du chapitre-III où une sous-estimation des paramètres du modèle 1<sup>er</sup> ordre est préférable. Seulement cette fois-ci, les recommandations sont valables pour toute la procédure de modélisation et toutes les méthodes de synthèse.

A noter que l'application on-line des techniques développées, présente une grande souplesse, et constitue une orientation beaucoup plus pratique dans le domaine industriel.

# Chapitre VI

## Extensions des Techniques de Commande aux cas des Systèmes Multivariables

### 6.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié quelques techniques de modélisation, d'analyse et de synthèse des procédés ayant une seule entrée et une seule sortie. Or en pratique et même pour les procédés les plus simples, on est presque toujours contraint de contrôler plusieurs grandeurs de sorties toutes en agissant aux niveaux de plusieurs points de commande. De tels systèmes, sont appelés systèmes multivariables. Dans ce cas, nous aurons à faire à des vecteurs d'entrées et de sorties liés par une matrice de transfert. Dans ce chapitre, nous essayons de faire une extension des techniques et des méthodes développées pour les systèmes monovariabiles aux cas des systèmes multivariables. Une technique de synthèse à base de dominance de boucle, jugée très simple à appliquer est présentée.

Malgré que la représentation d'états est l'approche la plus commode pour les systèmes multivariables, néanmoins l'extension du concept de la fonction de transfert des systèmes monovariabiles semble être plus naturelle. En effet, pour un système à  $r$  entrées représentées par le vecteur  $R(s)$  et  $m$  sorties représentées par le vecteur  $Y(s)$ , la relation entrées- sorties peut être caractérisée par la matrice de transfert  $G(s)$  de dimension  $m \times r$ .

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1r}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{m1}(s) & \cdot & \cdot & \cdot & g_{mr}(s) \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

Si on suppose que  $m = r$ , et que les composantes de  $R(s)$  et  $Y(s)$  soient ordonnées de façon à ce que le plus fort couplage soit entre  $r_i(s)$  et  $y_i(s)$  pour  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Dans ce cas, on peut considérer  $g_{ii}(s)$  comme étant la principale fonction de transfert entre  $r_i(s)$  et  $y_i(s)$ . Les termes de couplage  $g_{ij}(s)$  avec  $i \neq j$  constituent alors des fonctions de transfert secondaires ou bien des entrées perturbatrices agissant sur  $y_i(s)$ . Ainsi lorsque les termes  $g_{ii}(s)$  sont dominants, le système peut être considéré comme constitué par  $m$  sous-systèmes monovariables, ce qui facilite énormément la stratégie de commande.

Malgré le développement de plusieurs approches pour la commande des systèmes MIMO, il n'y a pas eu jusqu'à maintenant de solution complète qui prend en compte toutes les contraintes posées par de tels systèmes. En effet, les méthodes de découplage et le INA (inverse Nyquist array) demandent un grand effort de calcul et sont peu pratiques. Alors que les méthodes LQG (linear quadratic Gaussian), d'optimisation et le IMC (internal model control) nécessitent une parfaite connaissance du modèle du procédé.

## 6.2 Analyse

En réalité, la difficulté de commander les systèmes MIMO provient du fait que pour toutes les méthodes de synthèse, il n'est pas facile de localiser la gamme de fréquence la plus importante pour la synthèse du régulateur. Cela est bien dû aux interactions entre boucles. Cette gamme ne coïncide pas nécessairement avec les fréquences de coupures individuelles des termes de la matrice de transfert [11][46].

Si les interactions rendent la commande plus difficile, l'examen de la robustesse sera beaucoup plus compliqué. En effet, contrairement aux systèmes SISO, des petites erreurs dans les gains statiques du système peuvent conduire à l'instabilité totale du système global [32][49]. De plus, il est nécessaire de spécifier dans quel élément de la matrice de

transfert se trouve localisé les erreurs de modélisation les plus importantes. Il est aussi important de connaître laquelle des entrées est la plus significative.

Malgré toutes ces difficultés, il y a des outils qui permettent d'analyser le comportement des systèmes MIMO.

Le critère de Nyquist classique pour les systèmes SISO, peut être généralisé aux cas multivariables comme suit [32] :

*Si le lieu  $q(s) = \det[ I + G(s)G_c(s) ]$  n'entoure pas l'origine du plan complexe dans la direction des aiguilles d'une montre, alors le système MIMO en boucle fermée est stable.*

Ce théorème peut être utile pour l'analyse de la stabilité relative du système bouclé.

Si on considère les fonctions scalaires  $T(j\omega)$  et  $H(\omega)$  suivantes :

$$T(j\omega) = -1 + \det[ I + G(j\omega)G_c(j\omega) ] \quad (6-2)$$

$$H(\omega) = 20 \log_{10} |T(j\omega) / (1 + T(j\omega))| \quad (6-3)$$

$T(j\omega)$  est comparable à la chaîne de transmission du gain  $G(j\omega)G_c(j\omega)$  des systèmes SISO, alors que  $H(\omega)$  est le gain de sa fonction de transfert en boucle fermée.

Par analogie avec les systèmes SISO, la stabilité relative des systèmes MIMO peut être déterminée par le rapprochement du lieu  $T(j\omega)$  au point  $(-1,0)$  du plan complexe. Alors que la fréquence de résonance est obtenue en localisant le pic dans le tracé de  $H(\omega)$ . Les alentours de cette fréquence constituent la région des fréquences critiques du système MIMO. Une parfaite connaissance de tous les éléments de la matrice de transfert  $G(s)$  est nécessaire dans cette région pour en assurer la stabilité du système compensé.

En plus que cette fréquence est différente des fréquences de coupures individuelles des éléments de  $G(s)$ , elle dépend aussi de la méthode de synthèse de la matrice régulatrice  $G_c(s)$ .

De ce fait, il faudra d'abord :

- Identifier tous les éléments  $g_{ij}(s)$  de la matrice de transfert  $G(s)$  (du moins dans la région des fréquences critiques)
- Choisir une méthode de synthèse et déterminer la matrice régulatrice  $G_c(s)$
- Vérifier la stabilité par le tracé de  $T(j\omega)$ .

### **6.3 Commande à relais pour les systèmes MIMO**

Tout comme dans les systèmes Siso, si on ignore les dynamiques du procédé à commander ou si elles sont connues qu'approximativement, l'emploi de relais s'avère très utile pour déterminer les paramètres critiques. La difficulté de déterminer la fréquence critique exacte du système MIMO a conduit au développement de plusieurs techniques de test à relais [11][32][46][54].

#### **6.3.1 Techniques de tests à relais pour les systèmes MIMO**

Toutes les techniques de test à relais proposées pour les systèmes multivariables, ne sont que des variantes des principales considérations suivantes :

Le système est supposé être constitué de plusieurs sous-systèmes et les termes de couplage comme des perturbations, ce qui permet de tester toutes les boucles indépendamment l'une de l'autre. Ou bien la prise en compte des interactions provenant des termes de couplage où, un test de toutes les boucles simultanément est nécessaire.

Nous ne retiendrons que les trois techniques suivantes :

a) tests à relais indépendants pour toutes les boucles :

Pendant qu'une seule boucle est sous test, toutes les autres boucles sont maintenues ouvertes. Cette procédure ne garantit pas la stabilité globale du système lorsque toutes les boucles sont fermées simultanément. C'est un test en boucle ouverte et les interactions ne sont pas excitées [32][46].

b) tests à relais séquentiels pour toutes les boucles :

L'idée est de tester le système boucle par boucle, en fermant chaque boucle une fois testée jusqu'au réglage de toutes les boucles. Dans ce cas, un autre problème apparaît, c'est par quelle boucle il faut commencer. Une petite analyse des interactions fait qu'on doit suivre un ordre décroissant en commençant par la boucle la plus rapide [46]. En effet puisque la boucle la plus lente est la plus sensible aux interactions, et mettre celle-ci sous test en première ne permettrait pas aux interactions de se manifester. D'autre part, si elle est la dernière à être testée, cela permettra de prendre en compte toutes les interactions résultantes de la fermeture des boucles plus rapides. La stabilité globale est assurée tant que les oscillations sont contrôlées à chaque fermeture de boucle.

c) test à relais décentralisé :

Où toutes les boucles sont placées sous test simultanément [11][55], comme le montre la figure suivante :

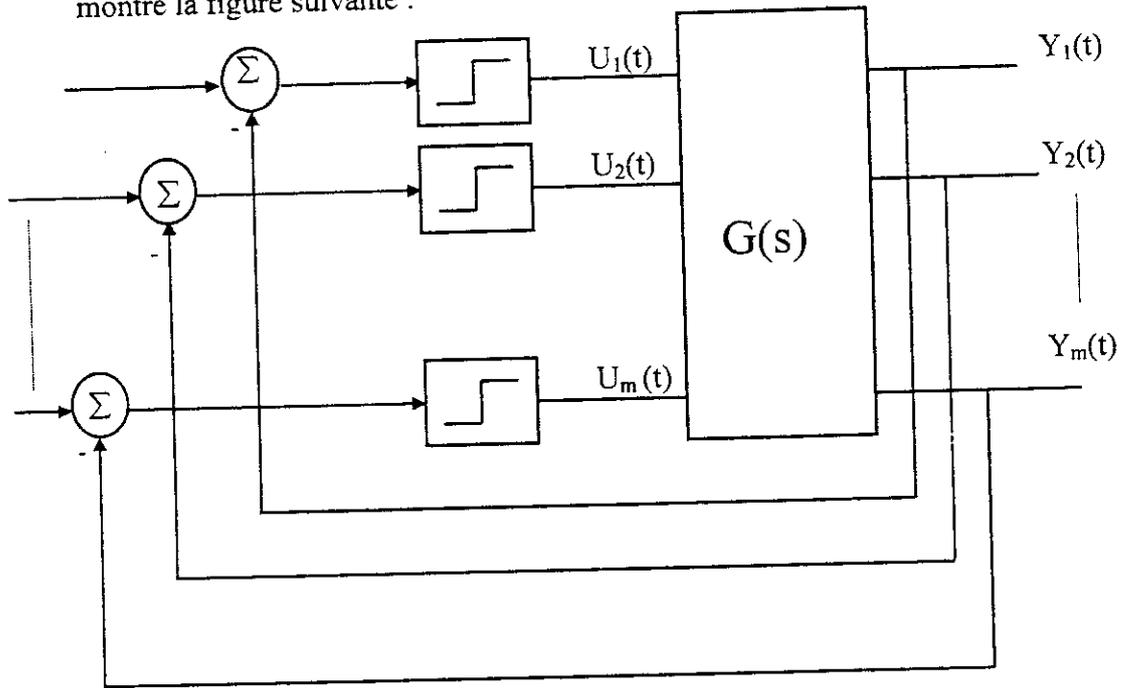


Fig 6-1 Système MIMO sous test à relais

Cette configuration permet de tenir compte de toutes les interactions et de bénéficier de tous les avantages du test en boucle fermée.

Un  $m \times m$  système sous test à relais décentralisé, conduit après un certain temps transitoire à l'apparition de cycles limites où chaque sortie possède sa propre fréquence d'oscillation. Alors qu'il a été trouvé [54] que dans de tel système sous test et avec un ajustement approprié des amplitudes des relais, normalement toutes les  $m$  sorties auront la même fréquence d'oscillation  $\omega_{cr1} = \omega_{cr2} = \dots = \omega_{crm} = \omega_{cr}$  mais, avec des phases différentes. Cette fréquence commune est appelée fréquence critique du système multivariable.

Si les  $m$  relais sont caractérisés par la matrice diagonale  $N(a) = \text{diag}(N_1, N_2, \dots, N_m)$  où  $N_i$  désigne le gain équivalent du  $i^{\text{ème}}$  relais. Il a été montré que si un système MIMO sous test oscille à une fréquence commune  $\omega_{cr}$ , alors l'un des  $m$  lieux caractéristiques  $N(a)G(j\omega)$  passe plus proche du point  $(-1,0)$  à une fréquence presque égale à  $\omega_{cr}$ .

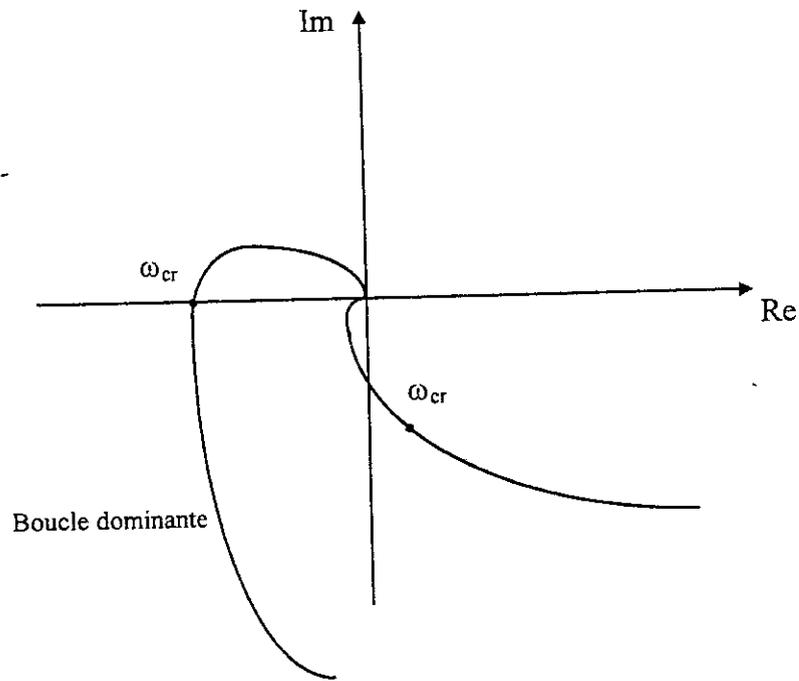


Fig 6-2 Lieu de Nyquist d'un système à 2 entrées et 2 sorties

Ce lieu est le lieu caractéristique de la boucle la plus externe, qu'on appelle généralement boucle dominante [11][55].

En effet, la condition d'oscillation à une fréquence commune du système fig 6-1 est donnée par :

$$G(j\omega_{cr})N(a) U(a, \omega_{cr}) = - U(a, \omega_{cr}) \quad (6-4)$$

$$\text{où } U(a, \omega_{cr}) = [a_1 \cos(\omega_{cr}t) \dots a_m \cos(\omega_{cr}t)]^t \quad (6-5)$$

$$\text{c.à.d. : } [I + G(j\omega_{cr})N(a)] U(a, \omega_{cr}) = 0 \quad (6-6)$$

$$\text{qui se réduit à : } \det [I + G(j\omega_{cr})N(a)] = 0 \quad (6-7)$$

C'est l'équation caractéristique du système multivariable.

### 6.3.2 Synthèse à boucle dominante

Comme il a été déjà signalé auparavant, il n'y a pas de stratégie de commande générale pour les systèmes multivariables. Néanmoins, sous certaines simplifications quelques techniques sont applicables.

Dans cette section, on suppose l'existence de boucle dominante dans le système MIMO. Nous essayerons d'exploiter le fait que, la fréquence critique de la boucle dominante est très proche de la fréquence critique du système MIMO. Ainsi nous n'aurons pas à déterminer cette dernière, des tests à relais indépendants suffisent pour déterminer la boucle ayant la plus *basse* fréquence critique. Cette dernière est utilisée dans la synthèse de toutes les boucles, ce qui permet de prendre en considération les interactions indirectement. Dans les tests envisagés, chaque boucle aura son gain critique  $K_{cri}$  et sa fréquence critique  $\omega_{cri}$ , la plus *petite* de toutes les  $\omega_{cri}$  est prise comme étant la fréquence critique  $\omega_{cr}$  du système MIMO.

Pour garder la même technique de synthèse étudiée pour les systèmes SISO, une extension aux cas multivariable de la méthode du déplacement du point critique à une position spécifiée par une marge de phase  $\phi_m$  est faite.

#### Remarque

- Nous constatons que, dans la synthèse à boucle dominante (boucle la plus lente), si nous envisageons la même marge de phase  $\phi_m$  pour les deux boucles, la boucle la plus interne aura une marge de phase supérieure à celle prévue (voir figure 6-2).
- Inversement, dans la synthèse par rapport à la boucle la plus interne (boucle la plus rapide), si nous envisageons la même marge de phase  $\phi_m$  pour les deux boucles, la boucle dominante aura une marge de phase inférieure à celle prévue.
- Le problème ci-dessus ne se pose pas, lorsque les fréquences critiques individuelles des boucles sont proches l'une de l'autre (voir figure 6-2).
- Ainsi, dans un système MIMO sous test décentralisé; la boucle lente tend à diminuer le rythme d'oscillations du système global à sa fréquence critique. Alors que la boucle la plus rapide tend à accélérer le rythme d'oscillation de celui-ci à sa fréquence critique. De ce fait, et selon les termes de couplage se fixe le rythme d'oscillations du système global.

Un exemple typique des systèmes MIMO, est le système à deux entrées et deux sorties représenté ci-dessous.

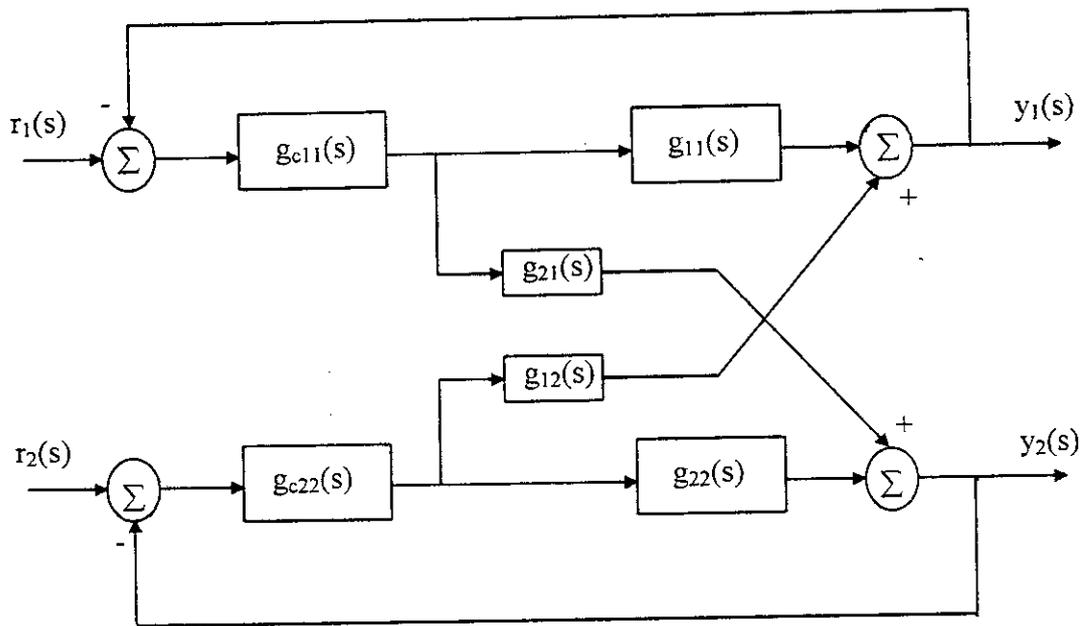


Fig 6-3 Système MIMO à 2 entrées et 2 sorties

Ainsi, l'objectif est de déterminer le régulateur diagonal  $G_c(s)$  sous forme de PID :

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} g_{c11} & 0 \\ 0 & g_{c22} \end{bmatrix}$$

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} K_{p1} \left(1 + \frac{1}{T_{i1}s} + T_{d1}s\right) & 0 \\ 0 & K_{p2} \left(1 + \frac{1}{T_{i2}s} + T_{d2}s\right) \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

$$= \begin{bmatrix} K_{m1} & 0 \\ 0 & K_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{c1} & 0 \\ 0 & \phi_{c2} \end{bmatrix}$$

Puisque à la fréquence  $\omega_{cr}$ , le lieu caractéristique de la boucle dominante passe par le point  $(-1,0)$ . Alors l'avance de phase  $\phi_{ci}$  qui devrait être apportée à la  $i^{\text{ème}}$  boucle est égale à la marge de phase  $\phi_{mi}$  désirée (en absence d'hystérésis).

Nous aurons :

$$\begin{cases} \phi_{ci} = \phi_{mi} \\ |G(j\omega_{cr})G_c(j\omega_{cr})| = 1 \end{cases} \quad (6-9)$$

C.à.d :

$$\begin{cases} \omega_{cr} T_{di} - \frac{1}{\omega_{cr} T_{ii}} = \text{tg}(\phi_{mi}) \\ |G(j\omega_{cr})G(j\omega_{cr})| = 1 \end{cases} \quad (6-10)$$

Pour un facteur de proportionnalité  $\alpha_i$  entre  $T_{di}$  et  $T_{ii}$ , nous aurons :

$$\begin{cases} T_{ii} = \alpha_i T_{di} \\ T_{di} = \frac{\text{tg}(\phi_{mi}) + \sqrt{\frac{4}{\alpha_i} + \text{tg}^2(\phi_{mi})}}{2\omega_{cr}} \\ K_{pi} = K_{cri} \cos(\phi_{mi}) \end{cases} \quad (6-11)$$

Pour une même marge de phase  $\phi_m$  et le même facteur  $\alpha$ , seul  $K_{p1} \neq K_{p2}$ .

Mais dans notre cas, l'introduction du régulateur se fait selon la méthode d'Astrom-Hagglund modifiée, le facteur  $\alpha$  sera pris à tout moment égal à :

$$\alpha_i = \frac{4}{9} K_i K_{cri} \quad (6-12)$$

alors que les  $\beta_i$  sont calculés selon la valeur de  $K_{cri}$ .

#### 6.4 Exemples d'illustration

Nous avons choisi les deux exemples étudiés dans la référence [11] afin de pouvoir comparer avec leurs résultats. Ces exemples sont obtenus par la modélisation de procédés industriels réels. Le premier exemple est un système à retard et à diagonal légèrement dominant, alors que le second présente de fortes interactions.

##### Exemple 1

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)} \begin{bmatrix} 2e^{-0.5s} & 0.2e^{-0.1s} \\ 0.3 & 1.1e^{-0.5s} \end{bmatrix} \quad (6-13)$$

C'est un exemple typique de système à retard ayant les éléments de la diagonale légèrement dominants. La référence [11] fourni les paramètres des deux régulateurs obtenus à partir de test à relais décentralisé.

La méthode de synthèse d'Astrom - Hagglund notée A-H-d, pour une

marge de gain  $A_m = 2$  et un rapport d'amplitudes des deux relais égal à  $m_1/m_2 = 1.5$  est utilisée. A noter qu'avec une marge de phase  $\phi_m = \pi/4$ , l'auteur a obtenu une instabilité totale du système. Pour mieux comparer notre technique que nous avons appelé synthèse à boucle dominante avec la synthèse faite à partir de test à relais décentralisé, nous avons utilisé la même méthode d'Astrom-Hagglund notée A-H\_bd et pour la même marge de gain  $A_m = 2$ . Les résultats de simulation sont présentés ci-dessous. Nous constatons une nette supériorité de la technique de synthèse à boucle dominante. Le test à relais décentralisé conduit à de très grands dépassements allant entre 40% et 60% pour les deux boucles.

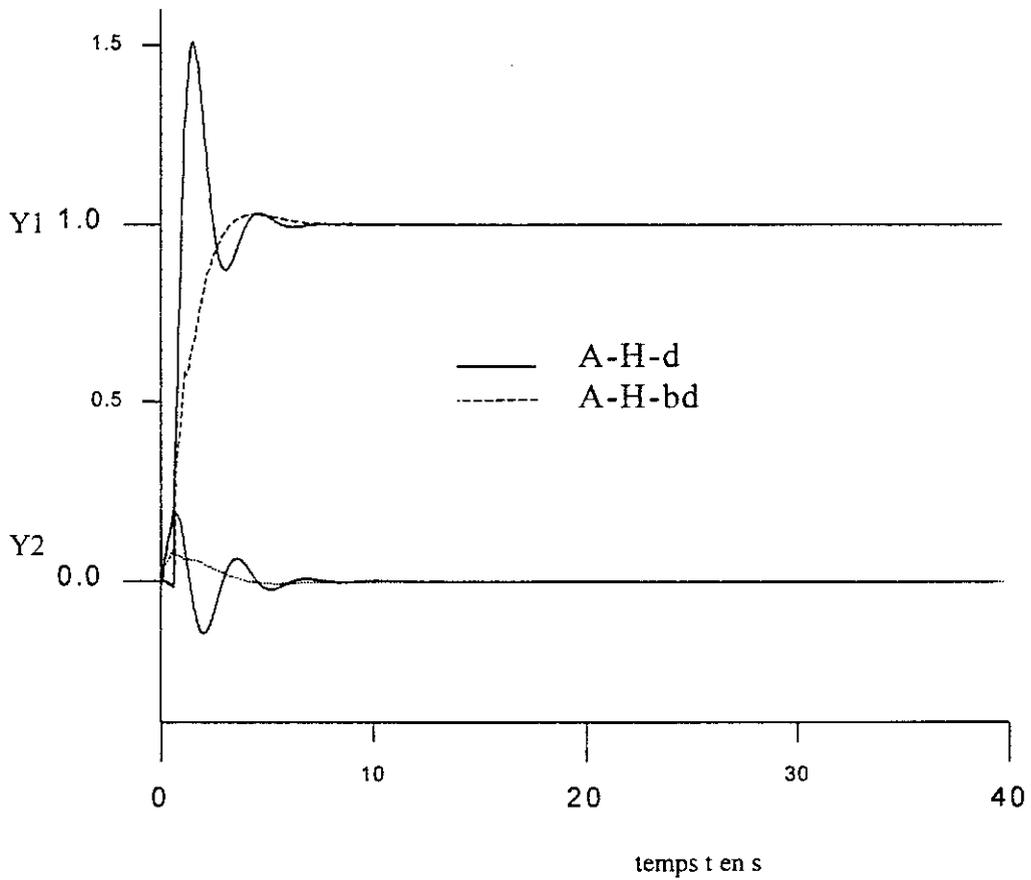


Fig 6-4 Exemple 1 : Réponses indicielles de la boucle n°1

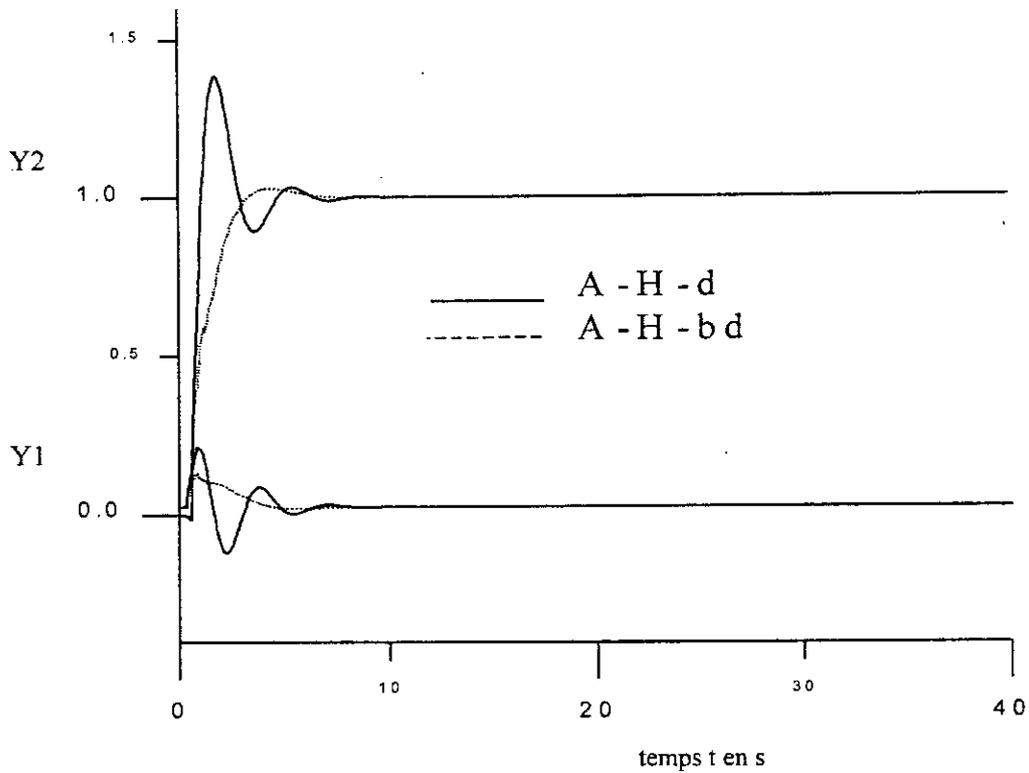
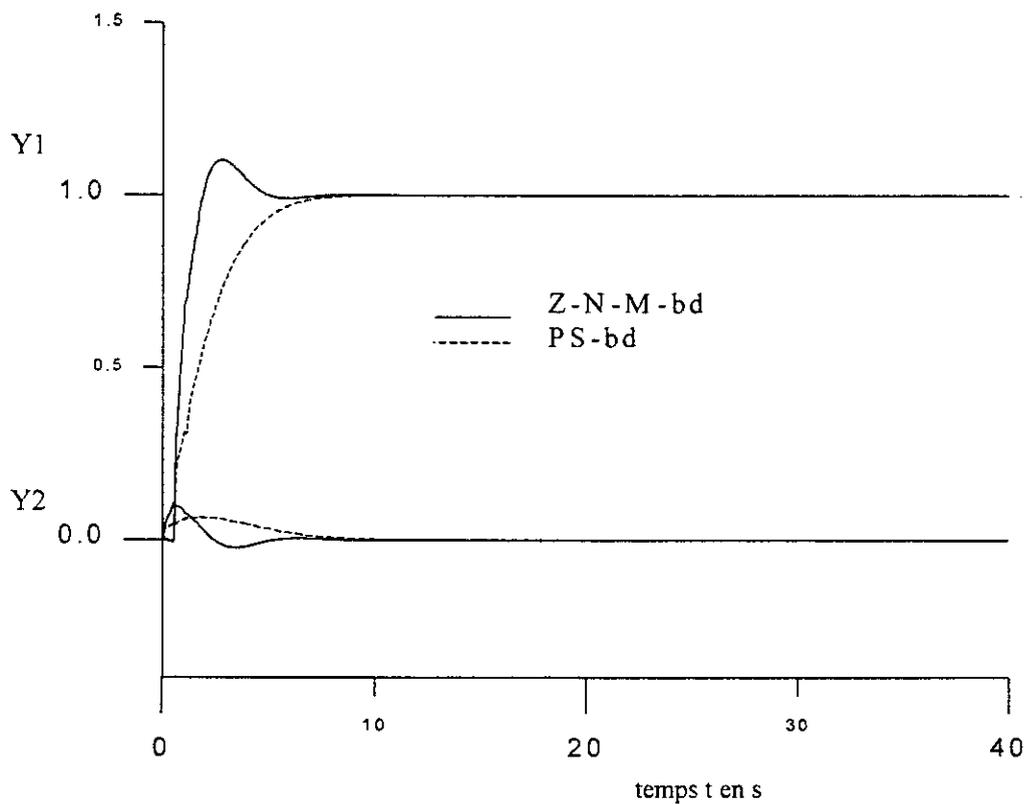


Fig 6-5 Exemple 1 : Réponses indicielles de la boucle n°2

(A-H-d)*	A-H-bd	PS (A-H-M-bd)	Z-N-M-bd
$K_{p1}=0.993$	$K_{p1}=0.4758$	$K_{p1}=0.4038$	$K_{p1}=0.5710$
$T_{d1}=0.145$	$T_{d1}=0.2723$	$T_{d1}=0.3372$	$T_{d1}=0.2138$
$T_{i1}=0.580$	$T_{i1}=0.9212$	$T_{i1}=1.1411$	$T_{i1}=0.7235$
$K_{p2}=1.452$	$K_{p2}=0.8652$	$K_{p2}=0.7341$	$K_{p2}=1.0382$
$T_{d2}=0.145$	$T_{d2}=0.2723$	$T_{d2}=0.3372$	$T_{d2}=0.2138$
$T_{i2}=0.580$	$T_{i2}=0.9212$	$T_{i2}=1.1411$	$T_{i2}=0.7235$
$K_{cr1}=1.99$	$K_{cr1}=0.9517$	$K_{cr1}=0.9517$	$K_{cr1}=0.9517$
$K_{cr2}=2.91$	$K_{cr2}=1.7303$	$K_{cr2}=1.7303$	$K_{cr2}=1.7303$
$M_1/M_2=1.5$	$M_1/M_2=1$	$M_1/M_2=1$	$\omega_{cr}=3.67\text{rd/s}$
$\omega_{cr}=3.46\text{rd/s}$	$\omega_{cr}=3.67\text{rd/s}$	$\omega_{cr}=3.67\text{rd/s}$	$m1/m2=1$
$\alpha_1 = \alpha_2 = 4$		$\alpha_1 = 3.38$	$\beta_1=0.8687$
		$\alpha_2 = 3.37$	$\beta_2=0.8687$
			$\alpha_1 = 3.38$
			$\alpha_2 = 3.37$

Tab 6-1 Résultats de synthèse de l'exemple 1

Autres que cette comparaison, les deux méthodes de synthèse investiguées pour cet exemple sont : la méthode de Ziegler-Nichols modifiée notée Z-N-M-bd, et la méthode d'Astrom-Hagglund modifiée pour la détermination du régulateur primaire du Prédicteur de SMITH notée PS. Les paramètres des deux régulateurs obtenus par la technique à boucle dominante pour un rapport d'amplitudes des deux relais  $M_1/M_2=1$  et une marge de phase  $\phi_m$  égale à  $\pi/4$ , sont résumés dans le tableau 6-1. Les figures 6-6 et 6-7 montrent les résultats de simulation. De très bonnes performances sont obtenues par les deux méthodes avec une certaine lenteur de la réponse du prédicteur de SMITH .



**Fig 6-6 Exemple 1 : Réponses indicielles de la boucle n°1**

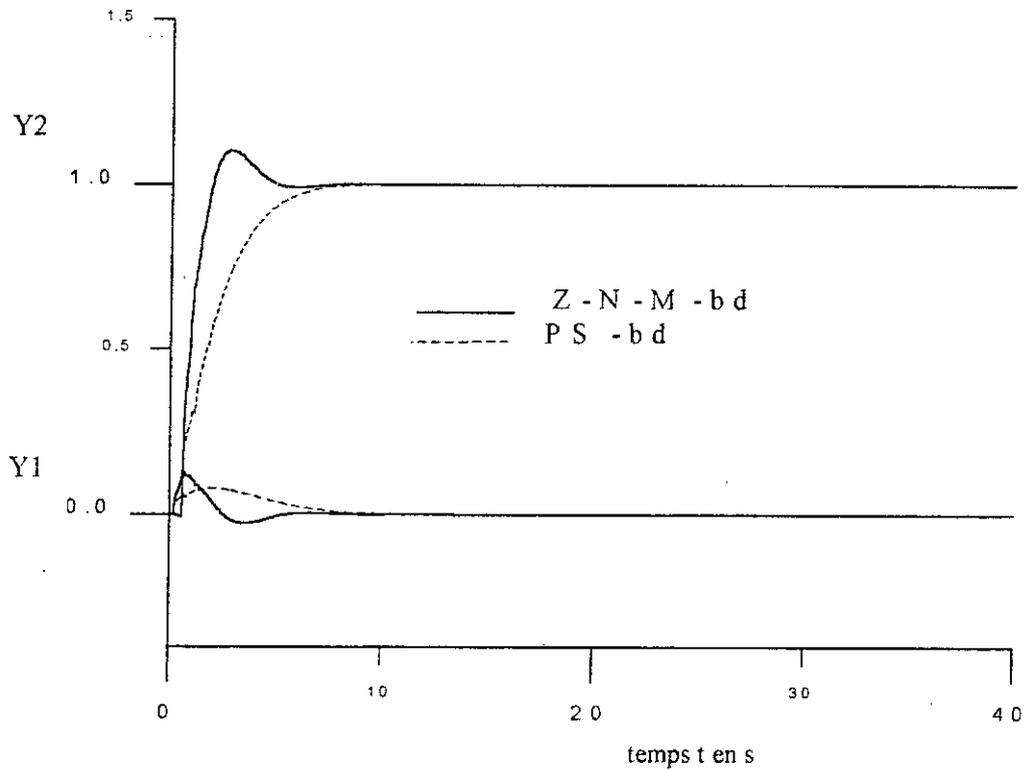


Fig 6-7 Exemple 1 : Réponses indicielles de la boucle n°2

### Exemple 2

$$G(s) = \frac{1}{(1+0.1s)(1+0.2s)^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-2.4}{(1+0.5s)} \\ \frac{0.5}{(1+0.1s)} & 1 \end{bmatrix} \quad (6-14)$$

C'est un système difficilement commandable, puisqu'il n'est pas représenté par une matrice à diagonale dominante et présente de fortes interactions, aussi il a un grand gain négatif dans l'un des termes de couplage. Cet exemple, est pris de la même référence [11]. Les deux termes diagonaux sont égaux ( $\omega_{cr1} = \omega_{cr2}$ ) et la dominance ne peut être détectée avec des tests à relais indépendants, nous prendrons  $\omega_{cr} = \omega_{cr1} = \omega_{cr2}$ . De plus pour faire une comparaison, la même méthode de synthèse d'Astrom-Hagglund est utilisée pour les deux techniques et pour une même marge de phase  $\phi_m = \pi/4$ . Les figures 6-8 et 6-9 montrent les réponses indicielles des deux boucles du système. Les performances obtenues sont comparables.

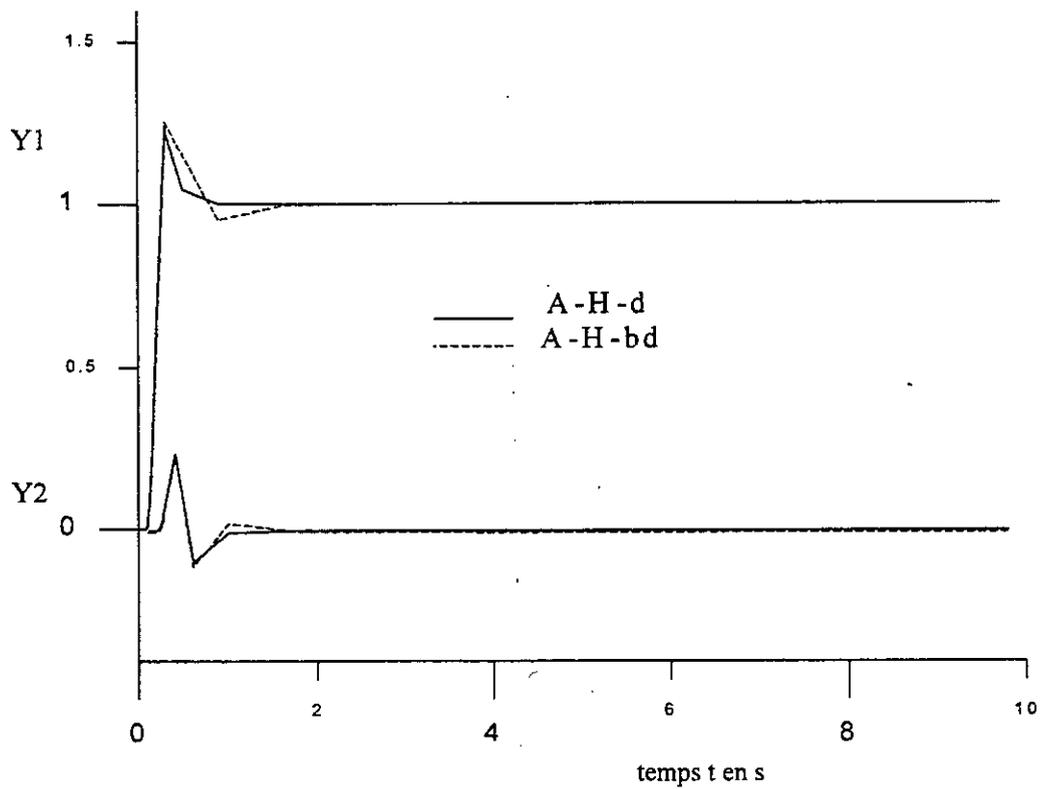


Fig 6-8 Exemple 2 : Réponses indicielles de la boucle n°1

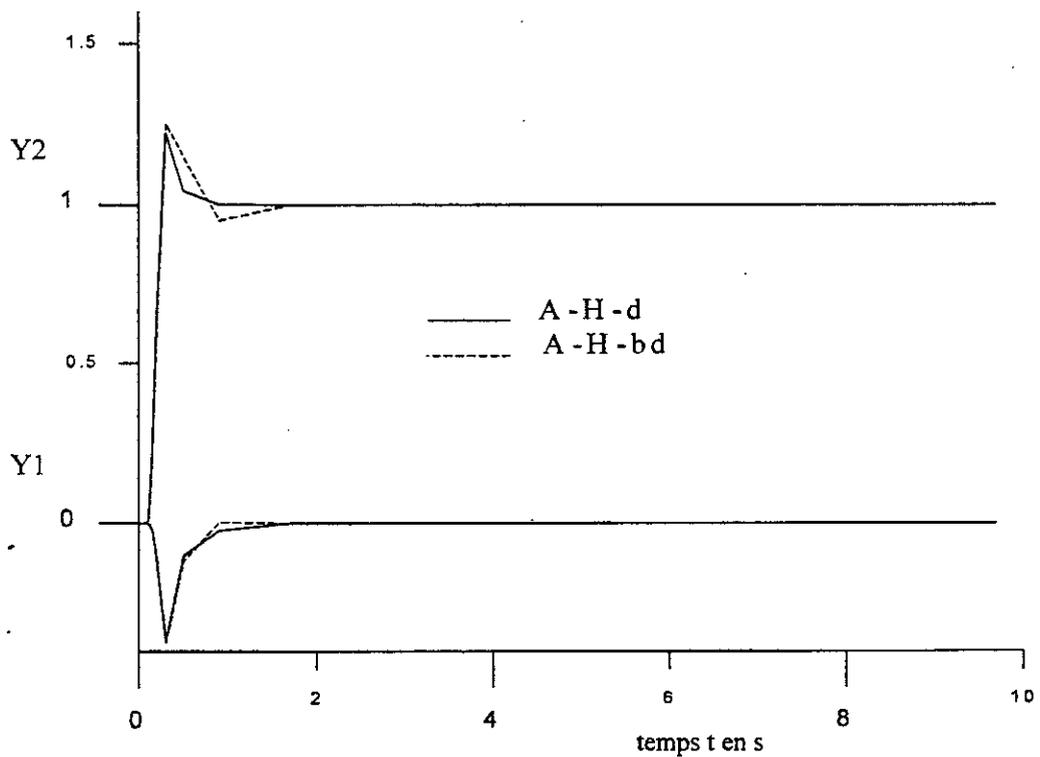


Fig 6-9 Exemple 2 : Réponses indicielles de la boucle n°2

Dans le même tableau, nous présentons aussi les résultats obtenus par notre technique avec la méthode du PI prédictif développée, et ceux de Ziegler-Nichols modifiée pour une même marge de phase  $\phi_m = \pi/4$ . Une comparaison est faite avec les résultats de l'optimisation des paramètres (ISTE) à partir de test à relais décentralisé [11].

Les réponses indicielles des deux boucles fortement intercouplées et régulées par les trois méthodes proposées pour cet exemple, sont présentées dans les figures 10-6 et 6-11.

Nous constatons que, l'extension aux cas des systèmes multivariables de la section développée du PI prédictif, se fait avec une grande souplesse et simplicité d'application avec la technique à dominance de boucle.

(A-H_d)*	(ISTE)*	A-H_bd	Z-N-M_bd	PPI_bd
$K_{p1}=5.83$	$K_{p1}=6.12$	$K_{p1}=6.3737$	$K_{p1}=5.4082$	$K_{p1}=3.3757$
$T_{d1}=0.14$	$T_{d1}=0.213$	$T_{d1}=0.1079$	$T_{d1}=0.0702$	$T_{i1}=0.0714$
$T_{i1}=0.561$	$T_{i1}=0.841$	$T_{i1}=0.4316$	$T_{i1}=0.2808$	$K_{p2}=3.3757$
$K_{p2}=5.83$	$K_{p2}=6.33$	$K_{p2}=6.3737$	$K_{p2}=5.4082$	$T_{i2}=0.0714$
$T_{d2}=0.14$	$T_{d2}=0.213$	$T_{d2}=0.1079$	$T_{d2}=0.0702$	$L_{p1}=0.1503$
$T_{i2}=0.561$	$T_{i2}=0.841$	$T_{i2}=0.4316$	$T_{i2}=0.2808$	$L_{p2}=0.1503$
$K_{cr1}=8.25$		$K_{cr1}=9.0137$	$K_{cr1}=9.0137$	
$K_{cr2}=8.25$		$K_{cr2}=9.0137$	$K_{cr2}=9.0137$	
$\omega_{cr}=8.6\text{rd/s}$		$M_1/M_2=1$	$M_1/M_2=1$	
$M_1/M_2=1.11$		$\omega_{cr}=11.188\text{rd/s}$	$\omega_{cr}=11.188\text{rd/s}$	
$\alpha_1 = \alpha_2 = 4$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 4$	$\beta_1=0.2493$	
			$\beta_2=0.2493$	
			$\alpha_1 = \alpha_2 = 4$	

Tab 6-2 Résultats de synthèse de l'exemple 2

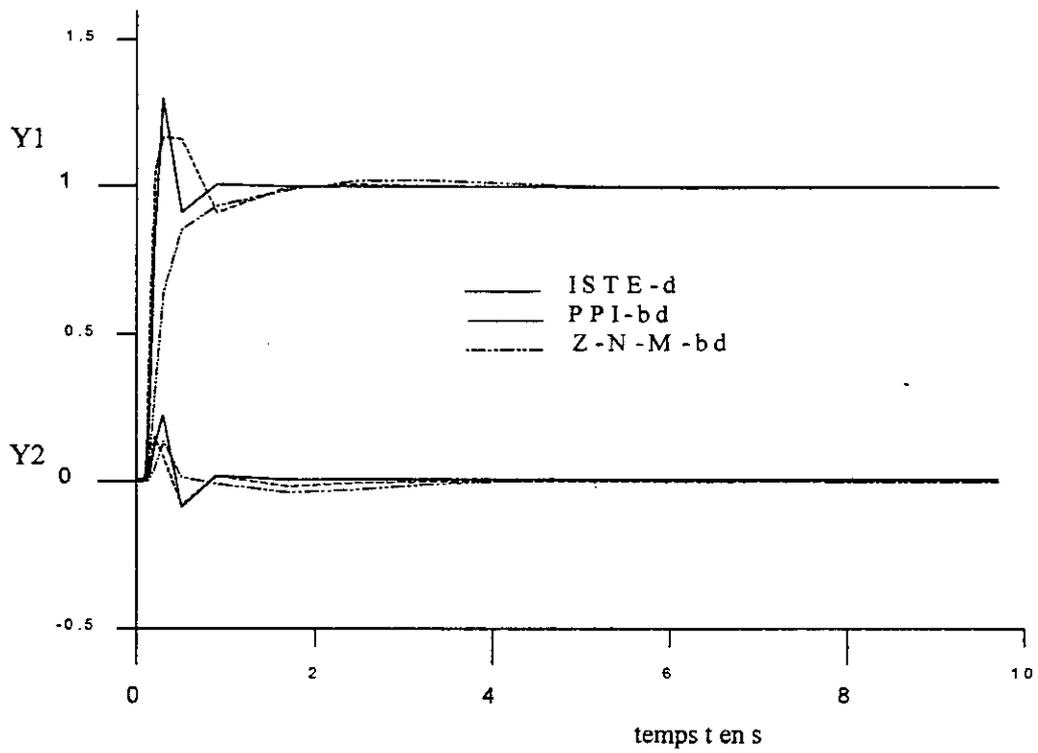


Fig 6-10 Exemple 2 : Réponses indicielles de la boucle n°1

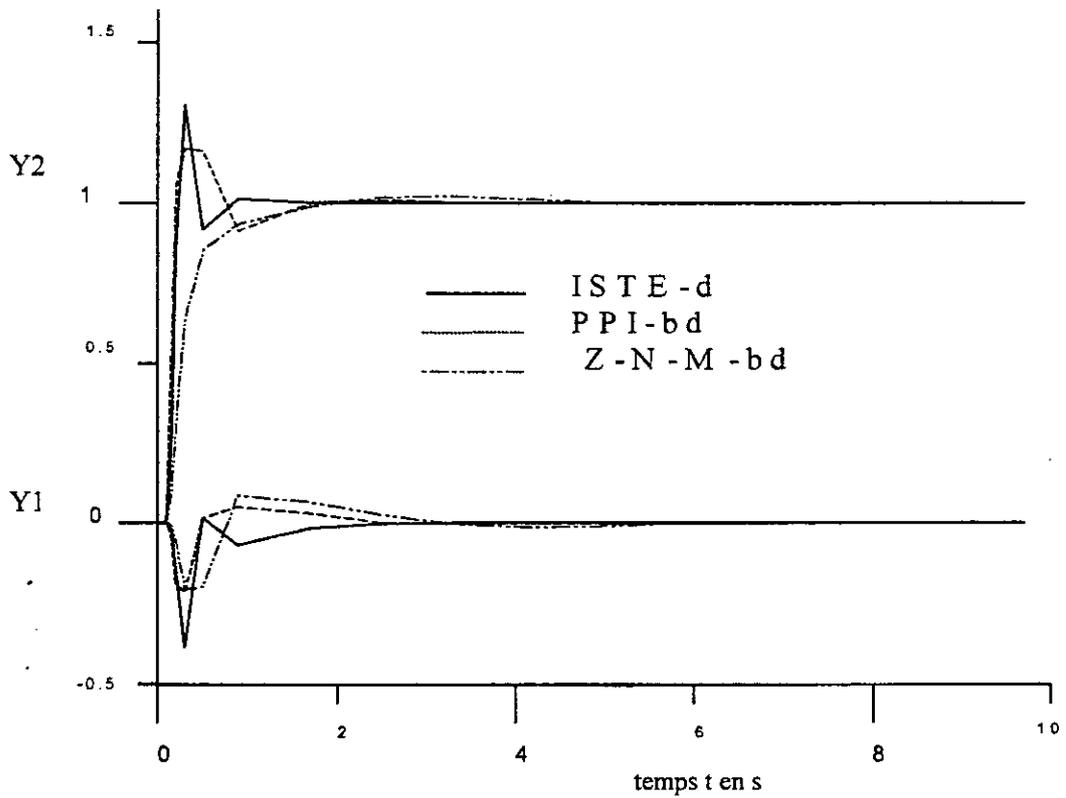


Fig 6-11 Exemple 2 : Réponses indicielles de la boucle n°2

## 6.5 Conclusion

A noter que la technique de synthèse à boucle dominante se contente de tests à relais indépendants beaucoup plus simples. L'idée d'utiliser la fréquence de coupure de la boucle dominante dans la synthèse des régulateurs de toutes les boucles, constitue en elle-même une prise en compte indirecte des interactions. Elle permet aussi d'ajuster les boucles indépendamment l'une de l'autre et à envisager même des performances différentes. D'autres part, la méthode permet de prévoir des marges de gain ou de phase différentes et de bénéficier des modifications de la méthode de Z-N indépendamment. Elle permet aussi d'éviter l'ajustement des rapports d'amplitudes des relais (tache difficile surtout lorsque le nombre d'entrées-sorties est grand). De plus, elle est facilement applicable aux systèmes à plus de deux entrées et deux sorties. Relativement parlant, la simulation sur plusieurs exemples montre que la technique conduit à de bonnes performances.

Dans beaucoup de cas le prédicteur de SMITH dont l'application aux systèmes multivariables est complexe, conduit à des performances comparables à celles obtenues par les méthodes de régulateurs cascades classiques telles que la méthode de Ziegler-Nichols modifiée (exemple 1). Pour les systèmes multivariables dont les temps morts de ses sous-systèmes ne sont pas très grands, notre PI Prédictif conduit à des résultats acceptables avec une grande simplicité de réglage et d'implémentation.

En effet la limitation du travail confié, nous a amené à se contenter de la recherche de méthodes simples et applicables dans un environnement industriel. Les systèmes multivariables constituent un domaine très vaste et difficile à maîtriser, alors que l'introduction du relais dans la commande et l'identification de tels systèmes, est à ses débuts.

## VII Conclusion générale

L'objectif du travail présent, l'élaboration d'une méthode d'analyse et de synthèse des systèmes à retard, a donc été atteint par des procédures de commande simples, efficaces et surtout applicables dans un environnement industriel. Toutes ces méthodes sont implémentées en Matlab en utilisant le diagramme de blocks Simulink.

Dans les deux premiers chapitres, il a été montré que la commande classique des systèmes à retard ne conduit pas à des performances satisfaisantes.

Quand la fonction de transfert du procédé à commander, est modélisée de façon précise, on peut éliminer le temps mort représenté par le terme exponentiel en utilisant la méthode d'approximation par les moments. Les résultats de la réduction au 1<sup>er</sup> ordre rationnel ne sont pas acceptables même lorsque le retard est faible devant la constante de temps. L'amélioration de la réduction est nette avec l'approximations d'ordre supérieurs (2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> ordres) mais, au prix de l'apparition de zéros instables.

Le prédicteur de Smith, Malgré la complication de sa configuration, demeure toujours, le seul régulateur capable de surpasser toutes les difficultés introduites par la présence de retard. Mais, d'autres problèmes qui lui sont propres apparaissent telle que, sa grande sensibilité vis-à-vis des erreurs de modélisation. Cette sensibilité se manifeste par une réduction de la région de stabilité et peut même aller jusqu'à l'instabilité du système. Nous avons essayé d'étudier la robustesse du prédicteur de Smith sur une large variété de systèmes du second ordre et de déterminer les paramètres les plus critiques. Le PS est plus sensible aux erreurs de modélisation du gain statique et à ceux du retard. Contrairement à ce qu'il a été déjà mentionné, les résultats de simulation obtenus montrent, qu'une sous-estimation du gain statique est toujours préférable et que le PS préserve ses performances pour des erreurs de modélisation raisonnables.

Puisque le gain statique ne pose pas de problème en général et peut facilement être obtenu avec une certaine précision, nous avons jugé utile d'étudier le prédicteur de Smith lorsque seul le paramètre du retard est sujet aux erreurs d'estimation. Pour cela, Nous avons utilisé la méthode d'Astrom-Hagglund dans la synthèse du régulateur primaire où l'analyse de la stabilité des cycles limites a été investiguée par la technique du gain incrémental. Cette dernière, a bien prouvé son efficacité pour les systèmes à retard où l'application du critère de Loeb s'avère impuissante.

La synthèse du régulateur primaire sous forme de PID a été investiguée pour les deux cas suivants :

- 1- Les paramètres du régulateur primaire sont déterminés en supposant une modélisation parfaite du procédé, et restent insensibles aux faibles erreurs d'évaluation du retard. « méthode analytique ».
- 2- Pour chaque erreur d'estimation du retard, un certain PID est déterminé en prenant en considération le déphasage introduit par la présence de l'erreur. « méthode d'autoréglage » .

La première technique a conduit à des performances acceptables lorsque les erreurs d'estimation du retard sont faibles. La deuxième technique constitue une amélioration de la première avec une certaine lenteur des réponses lorsque les erreurs sont grandes. La réduction de la marge de phase ne peut être retenue comme solution optimale à ce problème puisqu'elle rend le système plus sensible. De toutes les façons, la prise en compte d'erreur de modélisation du seul retard, suppose une modélisation parfaite du procédé ce qui n'est pas le cas en pratique.

Une technique d'autoréglage beaucoup plus pratique a été présentée dans le chapitre 5. Le modèle premier ordre du procédé à commander et les paramètres du régulateur sont déterminés en un seul test à relais. Des modèles très représentatifs du procédé ont été obtenus pour les trois gammes de réglabilité. Une comparaison de nos résultats de modélisation avec ceux de M.Friman et al d'une part et Q.Wang d'autre part nous a montré la précision de nos expressions. Cela est bien confirmé par les bonnes performances des résultats de commande de procédés originaux à base des modèles obtenus. Pour la commande, la méthode d'Astrom-Hagglund utilisée dans la synthèse du régulateur primaire du prédictif de Smith a été légèrement modifiée en prenant un facteur de proportionnalité  $\alpha = (4/9)KK_c$  selon [7]. Nous avons développé aussi une version on-line du régulateur PI prédictif selon le principe à déplacement du point critique dans le plan complexe. Ce régulateur ne souffre d'aucune contrainte de réglage ou d'implémentation, tout est obtenu à partir de test à relais. Ses performances sont testées sur un très grand nombre d'exemples de différentes dynamiques, elles sont meilleures ou du moins comparables à celles de la méthode d'optimisation de Lopez et du prédictif de Smith. Son seul désavantage est qu'il présente un grand effort de commande à l'instant de mise en marche, ce qui peut être dangereux pour les actionneurs à seuils de saturation. Les résultats médiocres obtenus avec la méthode de Z-N modifiée sont principalement dues aux

modifications recommandées dans [7] qui ne peuvent être valables pour tous les types de procédés. Les cas de modèles du premier ordre ayant une grande constante de temps et ceux à retard dominant ont été aussi étudiés. Un modèle du premier ordre à deux paramètres pour chacune des deux gammes de réglabilité a été déterminé. Nous constatons que l'emploi du PS à base de ces deux modèles ne fait que compliquer la structure de commande puisque des performances comparables peuvent être obtenues par les régulateurs cascades.

Le test de robustesse que nous avons prévu est concluant. D'après la simulation des réponses des procédés étudiés et la simulation sur plusieurs autres exemples, nous pouvons dire que notre PI prédictif tout comme le prédicteur de Smith présente un bon degré de robustesse vis à vis des erreurs de modélisation. Dans la mesure des paramètres de l'oscillation, une sous-estimation de sa période est toujours bénéfique par rapport à une mesure précise. Cela confirme bien qu'une sous-estimation des paramètres du modèle du premier ordre utilisé en commande soit la solution préférée pour toutes les méthodes de synthèse étudiées.

Un dernier chapitre a été réservé à la commande à relais pour les systèmes multivariables. Parmi les diverses stratégies de commande, la synthèse basée sur la dominance de boucle est l'une des plus simples et des plus pratiques. Celle-ci se suffit de tests à relais indépendants, tout en considérant les interactions entre boucles. Elle est plus avantageuse que la technique de test à relais décentralisé et elle est d'application plus aisée. Ce travail peut être exploité entre autres dans :

- L'emploi de test à relais dans l'identification et la synthèse des systèmes multivariables à fortes interactions et en présence de perturbation, qui reste un domaine de recherche ouvert.

- L'étude du fonctionnement même du relais. Par exemple, un relais multi-niveaux peut être très utile pour le test à relais décentralisé.

- La discrétisation des méthodes développées afin de les adapter à la commande numérique.

Enfin, on notera la simplicité et la souplesse de l'application on-line des techniques à relais.

# *Annexes*

## Annexe A :

### Sensibilité du PPI :

On a la fonction de transfert du PPI :

$$PPI(S) = PI(S)e^{lpS} \cong PI(S)F(S) \quad (1)$$

où  $F(S)$  est une approximation réalisable du terme de prédiction :

$$F(S) = \frac{0,51_p^2 S^2 + 1_p S + 1}{(0,11_p S + 1)^2} \quad (2)$$

Si on définit une fréquence normalisée  $\lambda = \omega l_p$ , on aura :

$$F(j\lambda) = \frac{-0,5\lambda^2 + j\lambda + 1}{(0,1j\lambda + 1)^2} \quad (3)$$

Le tracé de Bode de  $F(j\lambda)$  et  $e^{j\lambda}$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1,2$  montre que :

$$\begin{aligned} 1 \leq |F(j\lambda)| \leq 1,21, \\ [\arg(F(j\lambda)) - \arg(e^{j\lambda})] < 7^\circ \end{aligned} \quad (4)$$

Pour $\lambda = 1,2$
$F(j\lambda) = 1,2 \angle 63,18^\circ$
$e^{j\lambda} = e^{j1,2} = 1 \angle 68,75^\circ$

En introduisant :

$$\text{- l'erreur de prédiction } E_m(S) = F(S) e^{-lpS} \quad (5)$$

$$\text{- l'erreur de modélisation } E(S) = \frac{G(S)}{G_m(S)} \quad (6)$$

où 
$$G_m(S) = \frac{K_m e^{-sL_m}}{1 + T_m S}$$

On peut déterminer une limite supérieure de  $l_p$  afin de garantir la stabilité du système en boucle fermée.

**N.B.** : Sachant que les erreurs de modélisation ne sont significatives qu'aux hautes fréquences et au-delà de la fréquence de coupure du système  $\omega_{cr} = \frac{1}{T}$ .

$$\text{Ainsi } E(S) \cong 1 \angle 0^\circ \quad \text{pour } \omega < \omega_{cr} \quad (7)$$

En effet, la chaîne de transmission du système :

$$\begin{aligned} L(S) &= PPI(S)G(S) \\ &= F(S)PI(S)G(S) = F(S)PI(S)G_m(S)E(S) \end{aligned} \quad (8)$$

On doit montrer que :

$$\begin{aligned} |L(j\omega)| &\leq 1 \\ \arg(L(j\omega)) + 180^\circ &> 0 \end{aligned} \quad (9)$$

On a selon Haalman :

$$PI(S) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i S} \right) = \frac{2T}{3K(L-1_p)} \frac{1+TS}{TS} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(S) &= \frac{2T}{3K(L-1_p)} F(S) \frac{Ke^{-sL}}{TS} E(S) \\ &= \left( F(S)e^{-sL_p} \right) \frac{e^{-s(L-1_p)}}{\frac{3}{2}S(L-1_p)} E(S) \\ &= E_m(S)E(S) \frac{e^{-s(L-1_p)}}{\frac{3}{2}S(L-1_p)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$|L(j\omega)| = \frac{|E_m(S)||E(S)|}{\left| j\omega \frac{3}{2}(L-1_p) \right|} \quad (12)$$

Considérons la fréquence de coupure de l'intégrateur :  $\omega_i = [(3/2)(L-1_p)]^{-1}$

$$\text{Si } \omega_i 1_p \leq 1,2 \Rightarrow \frac{1_p}{3/2(L-1_p)} \leq 1,2 \Rightarrow \frac{1_p}{L} \leq \frac{1,8}{1,8+1} = 0,643 \quad (13)$$

$$\text{Si } \frac{1_p}{L} \leq 0,643 \Rightarrow \omega_i \leq \frac{1}{0,536L} \quad (14)$$

On voit que :

$$\text{si } 1_p \leq (0,643)L \Rightarrow \omega_i 1_p \leq 1,2 \Rightarrow |F(j\omega_i)| \cong 1 \quad (15)$$

$$\text{par suite : } |E(j\omega_i)| = 1. \quad (16)$$

Si on se limite aux systèmes à retard moyen relativement à sa constante de temps T, c'est-à-dire  $L/T < 2,5$ .

On aura :

$$\left. \begin{aligned} \omega_c &= \frac{1}{T} \\ \frac{L}{T} &< 2,5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_c L < 2,5 \Rightarrow \omega_c < \frac{2,5}{L} \quad (17)$$

Puisque :  $\omega_i \leq \frac{1}{0,536L}$  (18)

alors :  $\omega_c > \omega_i$

Par suite :  $|E(j\omega_i)| \cong 1$  (19)

Ainsi :

$$|L(j\omega_i)| = \frac{|E_m(j\omega_i)||E(j\omega_i)||e^{-j\omega_i(L-l_p)}|}{\left|\frac{3}{2}(L-l_p)j\omega_i\right|} \quad (20)$$

$$|L(j\omega_i)| \leq 1 \quad \text{pour} \quad \frac{l_p}{L} \leq 0,643 \quad (21)$$

$$\arg(L(j\omega_i)) = \arg E(j\omega_i) + \arg E_m(j\omega_i) - \pi/2 - \omega_i(L - l_p) \quad (22)$$

$$l_p \omega_i \leq 1,2 \quad (23)$$

\*  $\arg E_m(j\omega_i) \geq -7^\circ$ . Considérons le minimum :  $\arg E_m(j\omega_i) = -7^\circ$ . (24)

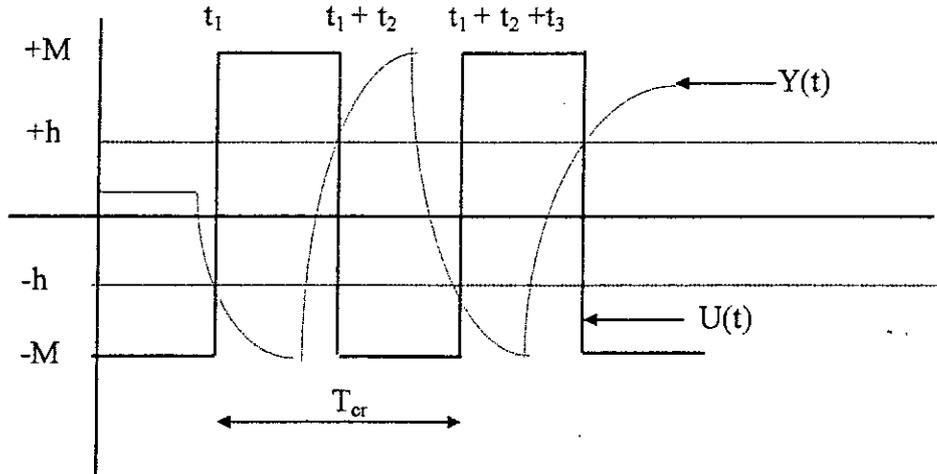
$$\Rightarrow \arg[L(j\omega_i)] \geq \arg E(j\omega_i) - 90^\circ - 7^\circ - \underbrace{\left[\frac{2}{3}\text{rad}\right]}_{38,2^\circ} \quad (25)$$

$$\Rightarrow \arg[L(j\omega_i)] + 180^\circ \geq \arg E(j\omega_i) + 44,8$$

Or  $\arg E(j\omega_i) \cong 0$  (26)

$\Rightarrow$  marge de phase du système supérieure à 0 et le système est stable.

## Annexe B :



En supposant  $y(0) > 0$

La sortie du relais passe à  $-M$  à  $t = 0$

$$Y(t) = y(0)e^{-\frac{(t-L)}{T}} - MK(1 - e^{-\frac{(t-L)}{T}})$$

(1)

$$= y'(0)e^{-\frac{t}{T}} - MK(1 - e^{-\frac{(t-L)}{T}}) \quad (2)$$

Avec  $y'(0) = y(0)e^{\frac{L}{T}}$  (3)

- à  $t = t_1$  la sortie du relais passe à  $+M$  valable pour  $L < t < t_1 + L$

$$y(t_1) = y'(0)e^{-\frac{t_1}{T}} - MK\left(1 - e^{-\frac{(t_1-L)}{T}}\right) = -h \quad (4)$$

$$(y'(0) + MKe^{\frac{L}{T}})e^{-\frac{t_1}{T}} = MK - h$$

et

$$\hat{y}(t) = y'(0)e^{-\frac{t}{T}} - MK(1 - e^{-\frac{(t-L)}{T}}) + 2MK\left(1 - e^{-\frac{(t-t_1-L)}{T}}\right) \quad (5)$$

- à  $t = t_1 + t_2$  le relais passe à  $-M$  valable pour  $t_1 + L \leq t \leq t_1 + t_2 + L$

$$y(t_1 + t_2) = y'(0)e^{-\frac{(t_1+t_2)}{T}} - MK\left(1 - e^{-\frac{(t_1+t_2-L)}{T}}\right) + 2MK\left(1 - e^{-\frac{(t_2-L)}{T}}\right) = h \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow y'(0)e^{-\frac{(t_1+t_2)}{T}} + MKe^{-\frac{(t_1+t_2-L)}{T}} - 2MKe^{-\frac{(t_2-L)}{T}} = h - MK \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow y'(0)e^{-\frac{t_1}{T}}e^{-\frac{t_2}{T}} + MKe^{-\frac{(t_1-L)}{T}}e^{-\frac{t_2}{T}} - 2MKe^{-\frac{(t_2-L)}{T}} = h - MK$$

$$\Leftrightarrow \left( MK - h \right) e^{-\frac{t_2}{T}} - 2MKe^{-\frac{(t_2-L)}{T}} = h - MK$$

$$\Leftrightarrow \left( MK - h \right) e^{-\frac{t_2}{T}} - 2MKe^{-\frac{t_2}{T}} e^{\frac{L}{T}} = h - MK \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \left( MK - h - 2MKe^{\frac{L}{T}} \right) e^{-\frac{t_2}{T}} = h - MK$$

$$\Leftrightarrow t_2 = T \operatorname{Ln} \left[ \frac{-MK + h + 2MKe^{\frac{L}{T}}}{-h + MK} \right] \quad (9)$$

**Encore**

$$y(t) = y'(0)e^{-\frac{t}{T}} - MK \left( 1 - e^{-\frac{(t-L)}{T}} \right) + 2MK \left( 1 - e^{-\frac{(t-t_1-L)}{T}} \right) - 2MK \left( 1 - e^{-\frac{(t-t_1-t_2-L)}{T}} \right) \quad (10)$$

• à  $t=t_1+t_2+t_3$  la sortie du relais passe à  $+M$  : pour  $t_1+t_2+L \leq t \leq t_1+t_2+t_3+L$

$$y(t_1+t_2+t_3) = y'(0)e^{-\frac{(t_1+t_2+t_3)}{T}} - MK \left( 1 - e^{-\frac{(t_1+t_2+t_3-L)}{T}} \right) + 2MK \left( 1 - e^{-\frac{(t_2+t_3-L)}{T}} \right) - 2MK \left( 1 - e^{-\frac{(t_3-L)}{T}} \right) = -h \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow y'(0)e^{-\frac{(t_1+t_2)}{T}} e^{-\frac{t_3}{T}} - MK \left( 1 - e^{-\frac{(t_1+t_2-L)}{T}} e^{-\frac{t_3}{T}} \right) + 2MK \left( 1 - e^{-\frac{(t_2-L)}{T}} e^{-\frac{t_3}{T}} \right) - 2MK \left( 1 - e^{-\frac{L}{T}} e^{-\frac{t_3}{T}} \right) = -h \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow \left[ y'(0)e^{-\frac{(t_1+t_2)}{T}} + MKe^{-\frac{(t_1+t_2-L)}{T}} - 2MKe^{-\frac{(t_2-L)}{T}} \right] e^{-\frac{t_3}{T}} - MK + 2MKe^{\frac{L}{T}} e^{-\frac{t_3}{T}} = -h \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow \left( (h - MK) e^{-\frac{t_3}{T}} - MK + 2MKe^{\frac{L}{T}} e^{-\frac{t_3}{T}} \right) = -h$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{t_3}{T}} \left[ h - MK + 2MKe^{\frac{L}{T}} \right] = MK - h \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow t_3 = T \operatorname{Ln} \left[ \frac{2MKe^{\frac{L}{T}} + h - MK}{MK - h} \right] = t_2 \quad (15)$$

On voit bien que :

$$t_2 = t_3 = \frac{T_{cr}}{2} \quad T_{cr} \text{ périodes des oscillations limites} \quad (16)$$

Pour l'amplitude des oscillations on a :

$$\begin{aligned} a_0 &= y(t_1 + L) = y(t_1 + t_2 + L) \\ y(t_1 + L) &= y'(0)e^{\frac{t}{T}} - MK \left( 1 - e^{\frac{(t-L)}{T}} \right) \quad \text{avec} \quad t = t_1 + L \\ &= y'(0)e^{\frac{(t_1+L)}{T}} - MK \left( 1 - e^{\frac{t_1}{T}} \right) \\ &= \left[ y'(0)e^{\frac{t_1}{T}} - MK \left( 1 - e^{\frac{(t_1-L)}{T}} \right) \right] e^{\frac{L}{T}} - MK + MK e^{\frac{L}{T}} \end{aligned} \quad (17)$$

- h

$$\Rightarrow a_0 = -he^{\frac{L}{T}} - MK \left( 1 - e^{\frac{L}{T}} \right) \quad (18)$$

**Remarque :**

Si on est en présence de perturbations statiques, on aura des oscillations asymétriques, et par suite

$$t_2 \neq t_3 \quad \text{et} \quad y(t_1 + L) \neq y(t_1 + t_2 + L) \quad (19)$$

Dans ce cas :

$$T_{cr} = t_2 + t_3 \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{y(t_1 + L) + y(t_1 + t_2 + L)}{2} \quad (20)$$

# Bibliographie

- [1] Ahmed. K. El Sakkary: A new criterion for estimating time delays for closed loop stability IEEE AC, vol 35, n° 2, 1990
- [2] Anraoi M. De Paor et Ruth P. K. Egan : Extension and partial optimization of a modified Smith predictor and controller for unstable processes with time delay  
Int J. of control, vol. 30, n° 4, 1989.
- [3] K. J Astrom and B. Wittenmark : Computer-controlled systems : theory and design,  
Prentice-Hill, International Editions, 1990.
- [4] K. J Astrom et T. Hagglund : Automatic tuning of simple regulators for  
phase and amplitude margins specifications : Proceedings IFAC workshop on adaptive systems  
in control and signal processing. 1983
- [5] K. J. Astrom et T. Hagglund : Automatic tuning of simple regulators  
Proceeding IFAC workshop on adaptive systems in control and signal processing. 1984
- [6] K. J. Astrom et B. Wittenmark : Practical issues in the implementation of self tuning control.  
Automatica, vol. 20, n° 5, 1984
- [7] K. J. Astrom, C. C. Hang et B. K. Ho : Refinements of the Ziegler-Nichols tuning formula.  
IEE proceedings -D, vol 138, n° 2, 1991
- [8] K.J Astrom, C.C. Hang et B.C. Lim : A new Smith predictor for controlling a process with an  
integrator and long dead-time IEEE. AC, vol 39, n° 2, 1994
- [9] K.J Astrom et T. Haggland : Industrials adaptatives controllers based on frequency responses  
techniques. Automatica, vol 27, n°4, 1991
- [10] D.P Atherton et M. Zhuang : Automatic tuning of optimum PID controllers.  
IEE proceedings-D, vol 140, n° 3, 1993
- [11] D.P Atherton et M. Zhuang : PID controller design for TITO system  
IEE Proc, Control theory Appl, vol 141, n° 2, 1994.
- [12] D.P. Atherton : Early developments in nonlinear control  
0272-1708/96/105.00 c 1996 IEEE
- [13] D.P. Atherton : Stability of nonlinear systems 1984.  
Research studies press of John Wiley and sons LTD
- [14] A. T. Bada : Design of delayed controls systems with Zakian's method.  
Int. J. of control ,vol 40, n° 4, 773-781, 1984 .

- [15] A. T. Bada : Design of delayed controls systems using Zakian's framework.  
IEE. Proceedings, vol 132, Pt. D. n°6, November 1985.
- [16] A. T. Bada : Computer aided design of controls systems  
These PhD university de Manchester, UK 1986
- [17] M. Benouarets : Some design methods for linear and nonlinear controllers  
These PhD university de Sussex, UK 1993
- [18] A. Besharati RAD et Wai Lun LO : Predictive PI controller  
Int .J. of control, vol 60, n°5, 1994.
- [19] Bezi. M. Habermayer and G. Tevesz : Adaptive smith control of a  
distillation plant IFAC / IFORS conference (1988)
- [20] M. Habermayer : Robustness proprieties of smith predictor control  
IFAC / IFORS conference 1990
- [21] P.Borne et al : modélisation et identification des processus  
Edition : Technip, tome 2 , 1992
- [22] B. E. Brookes and R. A. Johnson : limit cycles in time-delay relay systems  
Int .J. of control, vol 9, n°4, 1969.
- [23] Chien-Hua Lee and Tzoo -Hzeng S.LI  
New results for the stability of uncertain time-delay systems  
Int. J. of control, vol 26, n°4, 1995.
- [24] Chi-Tsung Huang and Chin-Jui Chou : Estimation of the underdamped  
second-order parameters from the system transient  
Ind. Eng. Chen. Res, 33, 1994
- [25] A. Chotai, D.H. Owens, A. Raya and H. M. Wang  
Design of smith control schemes for time-delays systems based on plant step data.  
Int. J. of control, vol 40, n°2, 1984
- [26] C. C. Hang, K. W. Lim and B. W. Chong  
A dual-rate adaptive digital smith predictor. Automatica, vol 25, n°1, 1989
- [27] Daniel L. Laughlin , Daniel. E. Rivera and Manfred. Morari  
Smith predictor design for Robust performance .Int. J. of control, vol 46, n° 2 , 1987
- [28] J..J Dazzo and C.H Houpis Feedback control system: analysis and design  
Second Edition Mc Graw-Hill 1960
- [29] Dietmar Salamon : On controllability and observability of time delay systems  
IEEE, AC, vol 29, n°5 , 1984

- [30] Edward J. Davison and Brian R. Copeland  
Gain margin and time lag tolerance constraints applied to the stabilization problem and robust servomechanism problem. IEEE, AC, vol 30, n°3, 1985
- [31] Wei. Li, Esref Eskinat and W.L. Luyben  
An Improved autotune identification Method .Ind. Eng. Chem. Res, 30, 1991
- [32] Esref Eskinat , S.H. Johnson and W. L. Luyben  
Use of auxiliary information in system identification. Ind. Eng. Chem. Res, 32, 1993.
- [33] Eykhoff P. : Every good regulators of a system must be a model of that system.  
Modelling, Identification and Control, vol. 15, n°3 , 1994
- [34] Firdaus. E. Udawadia and Ravi kumar. Time delayed control of classically damped structural systems. Int.J. of control, vol 60, n° 5 , 1994
- [35] M. Friman and kurt V. Waller : Autotuning of multiloop control systems  
Ind. Eng. Chem. Res., 33 , 1994
- [36] R.F. Giles et T.M Bartley Gain-adaptive deadtime compensation  
ISA Transactions, vol. 16, n° 1,1977
- [37] J. Ch Gille P. Decaulne M. Pelegrin  
Théorie et calcul des asservissements linéaires. Ed. Dunod 1992
- [38] J. Ch. Gille P. Decaulne M. Pelegrin: Systèmes asservis non linéaires. Ed. Dunod 1988
- [39] Hsiao-Ping Huang , Cheng-Liang Chen, Chi-Wei Lai and Gow-Bin Wang  
Autotuning for model-based PID controllers . Aiche Journal, 42, n° 9, 1996
- [40] H.S. Chiang and L.D. Durbin. Variable gain dead time compensation for the second-order time lag case. ISA, vol. 20, n°3, 1981
- [41] A.C. Ioannides , G.J. Rogers and V. Latham  
Stability limits of a smith controller in simple systems containing a time delay.  
Int. J. of control, vol. 29, n° 4 , 1979
- [42] Isaac. Horowitz : Some properties of delayed controls (smith regulator)  
Int. J. of control, vol 38, n° 5, 1983
- [43] Jin Hyun park, Su Whan Sung and In-Beum Lee  
Improved Relay auto-tuning with static Load disturbance  
Automatica, vol 33, n°4, 1997
- [44] K. R. Krishnan and A. Cruickshanks  
Frequency-domain design of feedback systems for specified insensitivity of time -domain response to parameter variation. Int. J. of control, vol. 25, n° 4, 1977

- [45] T.H Lee, Q.G Wang and K.K. Tan  
Robust Smith-predictor controller for uncertain delay systems  
Aich Journal. vol 42, n° 4, 1996
- [46] Ai P. Loh, Chang C. Hang, Choon K. Quek and Vinod U. Vasnani  
Autotuning of multiloop proportional-Integral controllers using relay  
Feedback Ind. Eng. Chem. Res, 32, 1993
- [47] J. Martin , A.B. Corripio et C.L. Smith  
How to select controller modes and tuning parameters from simple process models.  
ISA, vol. 15, n° 4, 1976
- [48] M.R. Matausek and A.D Micié  
A modified Smith predictor for controlling a process with an Integrator and long dead-time  
IEEE, AC, vol 41, n° 8, 1996
- [49] M. Morari : Robust process control . Chem. Eng . Res. Des, vol 65, 1987
- [50] M. Morari and Peter campe .  
Response to comment on Internal Model control : PID Design .  
Ind .En .Chem .Res, Vol 26, 1987
- [51] J. D. Morningred , Duncan A. Mellichamp, and D. E. Seborg  
On-line adaptation of predictive controllers  
the 1987 American control conférence Minneapolis, 1731-1739.
- [ 52] Z. Palmor : Stability properties of smith dead-time compensator controllers  
Int. J. of control, vol 32 , n° 6 , 1980
- [53] Z. J. Palmor and M. Blau : An auto-tuner for smith dead-time compensator  
Int. J. control, vol 60, n°1, 1994
- [54] Qing-Gun Wang, Biao Zou, Tong-Heng Lee and Qiang Bi  
Auto-tuning of multivariable PID controllers from decentralized relay feedback  
Automatica vol 33, n°3 , 1997
- [55] Qing-Guo Wang , Chang-Chiech Hang and Biao Zou  
Low order Modeling from relay feedback. Ind. Eng. Chem.Res, 36, 1997
- [56] B. Ruth and Mari Habermayer  
Investigation of saturation effect in linear one-step Ahead.  
Predictive control Algorithms automation 95 (Budapest 1995)
- [57] C. Santacesaria and Scattolini  
Easy tuning of Smith predictor in presence of Delay Uncertainty  
Automatica, vol 29, n°6, 1993

- [58] Shih-Haur Shen, Jiun-Sheng Wu, and Cheng-ching Yu  
Autotune identification under load disturbance  
Ind. Eng. Chem. Res, 35 , 1996
- [59] Shih-Haur Shen, Juin-Shen Wu and Cheng Ching Yu .  
Use of Biased-relay feedback for system identification  
Aiche Journal, vol 42, n° 4 , 1996
- [60] K . K .Tan , Q.G. Wang , T.H Lee , and Q.Bi  
New approach to Analysis and Design of Smith-predictor controllers  
Aiche Journal , vol 42, n° 6 , 1996
- [61] Thomas J. Harris and B. D. Tyreus : Comments on Internal Model control.4. PID controller  
Design. Ind. Eng. Chem. Res. 1987, 26, 2161-2162
- [62] K. Walton and J. E. Marshall  
Mismatch in predictor control scheme : some closed-form solutions  
Int. J. of control. Vol.40, n°2, 1984
- [63] Wei Dong Zhang and You Xian Sun  
Modified Smith predictor for controlling Integrator / time delay processes.  
Ind, Eng. Chem, Res, 35, 1996
- [64 ] Weng. Khuen. Ho, Chang Chieh Hang and Lisheng S. Cao.  
Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications  
Automatica , vol 31, n° 3, 1995
- [65] S.K.P Wong and D.E. Seborg : A theoretical Analysis of Smith and Analytical predictors  
Aiche.J. vol 32. n° 10, 1986
- [66] V. Zakian. The performance and sensitivity of classical control systems  
Int. J. systems sci., vol. 9, n°3 , 1978
- [67] R.B .Zmood. and D.K .Anand : Controls systems  
Butterworth-Heinemann, Ltd, 3<sup>ème</sup> edition, 1995
- [68] Zvi Artstein: Linear systems with delayed controls : a reduction  
IEEE, AC vol 27, n°4 , 1982