

UNIVERSITÉ D'ALGER

1/74

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

1 Ex

DEPARTEMENT GENIE HYDRAULIQUE

THESE DE FIN D'ÉTUDES

CONTRIBUTION A LA VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE
DE LA THÉORIE DE LA LONGUEUR FLUIDODYNAMIQUE
EN ÉCOULEMENT BIDIMENSIONNEL ET EN CANAL DIÉDRIQUE

المدرسة لوطنية للعلوم الهندسية

— المكتبة —

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

BIBLIOTHÈQUE

PROPOSÉE PAR
M. GESA **LAPRAY**
Docteur Ingénieur

ÉTUDIÉE ET RÉALISÉE PAR
M. A. BENOUIBA
M. M. R. GUELLATI

Promotion 1974

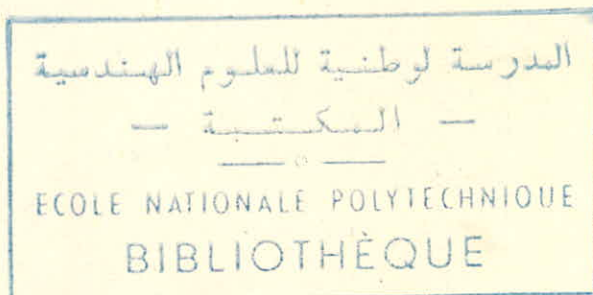
UNIVERSITÉ D'ALGER

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE HYDRAULIQUE

THESE DE FIN D'ÉTUDES

CONTRIBUTION A LA VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE
DE LA THÉORIE DE LA LONGUEUR FLUIDODYNAMIQUE
EN ÉCOULEMENT BIDIMENSIONNEL ET EN CANAL DIEDRIQUE



PROPOSÉE PAR
M. GESA DE LAPRAY
Docteur Ingénieur

ÉTUDIÉE ET RÉALISÉE PAR
M. A. BENOUHIBA
M. M. R. GUELLATI

Promotion 1974

Anos parents.

Cette étude a été réalisée sous la direction de M.G. LAPRAY, docteur ingénieur à l'École Nationale Polytechnique d'ALGER.

Nous tenons à lui exprimer notre profonde reconnaissance pour l'attention qu'il a portée à notre thèse et le soutien constant qu'il a su nous accorder.

Nous remercions également M. D. TASCA, notre ami et professeur de turbo-machines à l'E.N.P. pour les divers conseils qu'il nous a prodigués malgré ses occupations.

Nous exprimons notre gratitude à tous les professeurs de l'E.N.P. qui ont contribué à notre formation ainsi qu'à notre directeur M. OUABDSALEM.

Nos remerciements vont aussi à M. LOUALI et M. BOFFA pour l'aide matérielle qu'ils nous ont accordée, sans oublier tous les agents de l'école.

Nous profitons, par la même occasion qui nous est offerte, pour remercier M.M. les membres du jury pour avoir honoré la cérémonie de la soutenance de thèse.

SUJET

Détermination de la rugosité et du profil en long à partir des courbes du remous dans les écoulements graduellement non uniformes bidimensionnels et en canal diédrique.

SYMBOLES ET UNITES

A	aire d'une section	m^2
a	une dimension linéaire arbitrairement choisie de la section	m
b	largeur du fond d'une section trapézoïdale.	m
C	coefficient de la formule de Chézy.	$m^{1/2} s^{-1}$
D	diamètre d'une section circulaire	m
D_h	diamètre hydraulique.	m
e	largeur du plan d'un liquide	m
f	coefficient de frottement.	
f_{00H}	accélération de la pesanteur	$m s^{-2}$
H	charge moyenne	m
H_{max}	" maximale	m
h	profondeur	m
J	perte de charge par unité de longueur	sans dimension
J_0	pente du canal	"
J_p	gradient piézométrique.	"
K	profondeur critique.	m
L	longueur	m
p	pression	N/m^2
P	périmètre mouillé	m
Q	débit volume	m^3/s
Q_k	débit critique	"
Q_{k_0}	par. dim. du débit critique	sans dimension
q	débit unitaire	m^2/s
R_m	rayon moyen	m
R	nombre de Reynolds	sans dimension
R_p	nombre de Reynolds correspondant au seuil de Reynolds.	"
v	vitesse débitaire	$m s^{-1}$
V	Volume	m^3
β	coefficient de la formule (2)	$m^{-\beta}$
β	exposant " " " (3)	sans dimension
α	facteur de correction de l'énergie cinétique.	"
φ	cambrure	"
$\zeta = h/e$	par. de forme des sections paraboliques.	"
$\eta = b/h$	" " " " Trapezoïdales.	"
λ	Longueur fluidodynamique.	m
λ	facteur de transition.	sans dimension
ν	viscosité cinématique	m^2/s
$\xi = h/d$	par. de forme des profils circulaires partiellement occupés	sans dimension

ε rugosité absolue.
 $\bar{\omega}$ poids volumique.
 ρ masse volumique.
 $\bar{z} = \cotg \varphi$ inclinaison du talus
 $\chi = 2 \sqrt{1 + \bar{z}^2}$
 α coefficient
 $\sqrt{\quad}$
 $\sqrt{\quad}$

m
 $N/m^3, kgf/m^3$
 $kg/m^3, kgf s^2 m^{-4}$
 sans dimension
 $m^{0,35} s^{-1}$
 sans dimension
 "

Formules de base utilisées

- Formule générale des écoulements permanents uniformes incompressibles, dite de Darcy-Weissbach:

$$J = \frac{f}{D_h} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

- Formule de Chézy:

$$V = C \sqrt{R_m J}$$

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}}$$

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \cdot \sqrt{R_m J}$$

$$D_h = 4 R_m$$

$$V = 0,5 C \sqrt{D_h J}$$

$$V = \frac{2g}{f} \sqrt{D_h J}$$

$$Q = A \frac{2g}{f} \sqrt{D_h J}$$

- Pour les écoulements en régime turbulent rugueux, la formule de Nikurdse:

$$f^{-\frac{1}{2}} = 1,14 - 0,86 \text{ Log } \frac{\epsilon}{D_h}$$

- Pour les écoulements en régime de transition, la formule de Colebrook:

$$f^{-\frac{1}{2}} = -0,86 \text{ Log } \left(\frac{\epsilon/D_h}{3,7} + \frac{251}{R \sqrt{f}} \right)$$

- Formule générale exprimant la condition du régime critique d'un écoulement permanent uniforme à surface libre:

$$\frac{Q^2 \epsilon}{A^3 g} = 1$$

- Equation du profil en long d'un liquide en écoulement à surface libre, permanent, graduellement non uniforme, passant par un canal à section transversale sèche invariable:

$$L = \int_{h_1}^h \frac{1 - \frac{Q^2 \epsilon}{g A^3}}{J_0 - J}$$

TABLE DES MATIERES

- 1) Introduction.
- 2) Rappel sur la théorie de la longueur fluidodynamique.
- 3) Ecoulements graduellement non uniformes.
- 4) Installation.
- 5) Exploration des champs de vitesses.
- 6) Détermination de la rugosité par les courbes du remous.
- 7) Conclusion.

INTRODUCTION

Introduction

L'étude des écoulements permanents à surface libre, constitue une importante partie de l'hydraulique sur laquelle des ouvrages classiques s'étendent en général relativement peu. Le canal découvert possède, par rapport à la conduite fermée et entièrement remplie, une caractéristique qui rend son étude bien plus difficile: une surface libre, limite supérieure de l'écoulement dont la forme est une variable supplémentaire du problème. Ce problème apparaît comme particulièrement complexe et délicat à résoudre parce que l'équation de la surface libre comporte des paramètres qui, même dans le cas le plus simple: canal prismatique (c'est à dire tel que la forme et les dimensions de ses sections restent les mêmes en toute abscisse) et de section rectangulaire, ne dépendent pas directement de la profondeur d'eau.

Depuis un siècle et demi, on s'est efforcé d'intégrer cette équation et de nombreuses méthodes ont été développées et proposées, ce qui prouve que le problème est loin d'avoir reçu une solution définitive et satisfaisante.

Les paramètres de cette équation seraient des fonctions de la profondeur dans le seul cas du canal infiniment large à coefficient de Chézy supposé constant. Ce fut ce cas simple qui permit à Bresse d'établir le premier les courbes théoriques du remous (1860), compte tenu du frottement et de la variation de l'énergie cinétique de l'eau. Et l'on sait que la forme du canal peut avoir une influence notable, de sorte que les courbes de Bresse ne sont plus utilisables lorsqu'on désire une grande précision.

Des auteurs ont proposé de remplacer ces para-

mètres par des fonctions empiriques. Bakhmeteff après avoir introduit la notion de débitance a constaté que cette débitance est représentée, pour des canaux prismatiques de façon satisfaisante par une puissance constante de la profondeur d'eau et a établi également une série de tables d'intégration.

Mais, comme fait observer Rouse : "lorsqu'on a réussi, ce fut toujours au prix d'hypothèses simplificatrices supplémentaires et les fonctions obtenues sont en général plus fastidieuses à appliquer?"

C'est pourquoi Rouse et de nombreux chercheurs préconisent même pour les canaux prismatiques les plus simples la méthode par tronçons et approximations successives.

Cette méthode consiste à diviser le cours d'eau en tronçons de faibles longueurs et à calculer la profondeur d'eau à l'extrémité du tronçon, par approximations successives après avoir remplacé les différentielles par des différences finies dans l'équation de la surface libre. Cette méthode est rigoureuse dans la mesure où les hypothèses conduisant à l'équation sont justifiées, ~~mais~~ elle est d'autant plus précise que les tronçons sont plus courts, donc plus nombreux : mais elle conduit à des calculs lents et pénibles qui doivent être effectués avec une grande précision car ils font apparaître des différences faibles entre deux termes successifs à calculer.

L'originalité de la thèse que nous présentons consiste dans l'introduction de la théorie de la longueur fluidodynamique dont M. G. LAPRAY est l'auteur. Cette théorie applicable aussi bien aux conduites sous pression qu'aux écoulements à surface libre est obtenue par la mise en œuvre de paramètres adimensionnels et de la notion de longueur fluidodynamique.

Par cette même théorie M. Lapray vient de donner une analyse aussi complète que possible aux écoulements graduellement non uniformes, bidimensionnels et en canal diédrique dont la cambrure se rapproche le plus de la conduite circulaire.

Les avantages de cette méthode résident

- Dans l'utilisation de formules précises par le truchement de la théorie de la longueur fluidodynamique.
- Dans l'élimination de toute tentative et donne directement les résultats moyennant les abaques de validité

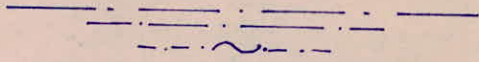
générale

- Dans l'introduction des nombres adimensionnels V et M .

Nous espérons inciter par cette thèse les ingénieurs hydrauliciens à se pencher sur l'étude de la théorie de la longueur fluidodynamique, ^{théorie} qui conduit à la résolution très expéditive des problèmes assez complexes, ce qui la rend particulièrement méritoire du point de vue applicatif.

RAPPEL SUR LA THEORIE
DE LA LONGUEUR FLUIDODYNAMIQUE

RAPPEL SUR LA THEORIE DE LA LONGUEUR FLUIDODYNAMIQUE



Dans un écoulement permanent d'un fluide incompressible passant par une conduite à profil constant, les éléments à considérer sont:

- Q - le débit volumique
 - J - le gradient de la perte de charge
 - ε - la rugosité absolue de la conduite
 - a - Une dimension linéaire arbitrairement choisie du profil (diamètre d'un profil circulaire, tirant d'eau...)
- Ainsi on a respectivement $\xi = \frac{h}{D}$, $\zeta = \frac{h}{e}$, ξ et η les paramètres de forme du profil circulaire, parabolique et trapézoïdal.
- ν - viscosité cinématique du fluide véhiculé

Les éléments énumérés ci-dessus ne sont pas indépendants les uns des autres. Ils sont liés entre-eux par des relations régies par une loi physique qui peut être rapprochée par les formules théoriques et empiriques usuelles (Darcy - Weissbach, Chézy, Nikuradse ...).

Les formules de Darcy-Weissbach et de Chézy, avec le diagramme de Moody, permettent la détermination de chacune des autres variables comme Q , a , et paramètres de forme, seulement possible par tâtonnement ou approximations successives.

Dans le but de trouver une solution directe à ces problèmes, la théorie de la longueur fluidodynamique démontre que chacune des dimensions linéaires du profil d'un fluide en écoulement incompressible ou pouvant être considéré comme tel en raison d'un faible gradient de pression, peut être ramenée comme le produit de trois facteurs:

- le premier facteur a la dimension d'une longueur, appelé longueur fluidodynamique

$$\Lambda = f_1 \left(\frac{Q}{\sqrt{J}}, \varepsilon, g \right)$$

- le second facteur appelé dimensionnel est un paramètre sans dimension qui ne dépend que de la forme du profil, il est désigné par a_0

Pour les profils

circulaires	$a_0 = D_0 = f(\xi)$
paraboliques	$a_0 = e_0 = f_e(\xi)$
trapézoïdaux	$a_0 = h_0 = f_h(\xi, \eta)$
	$a_0 = b_0 = f_b(\xi, \eta)$

- le troisième facteur sera appelé facteur de transition désigné par λ , c'est un paramètre sans dimension fonction de la rugosité relative ϵ/D_H et du nombre de Reynolds.

$$\lambda = f(\epsilon/D_H, R)$$

Avec ces trois hypothèses on aboutit à la théorie fondamentale de la longueur fluidodynamique:

$$a = \lambda \Lambda a_0$$

Pour les écoulements, en régime turbulent rugueux caractérisés par $R \geq R_{lim}$, on a:

$$\lambda = 1$$

et l'équation se réduit à :

$$a = \Lambda a_0$$

Écoulements en régime turbulent rugueux:

Pour aboutir aux conclusions exposées précédemment nous nous bornerons dans notre étude à l'écoulement turbulent rugueux, correspondant à la zone droite supérieure du diagramme de Moody où les courbes $f = f(R, \epsilon/D_H)$ sont des lignes droites horizontales, devenant indépendantes du nombre de Reynolds par conséquent indépendantes de la viscosité car $R = \frac{VD_H}{\nu}$.

Il est notoire que la formule de Colebrook déterminant la valeur du coefficient de frottement f se confond, en régime turbulent rugueux, avec la formule de Nikuradse :

$$f^{-1/2} = 1,14 - 0,86 \ln\left(\frac{\epsilon}{D_H}\right) \quad (1)$$

la représentation graphique de cette dernière équation, en coordonnées bilogarithmiques, permet de constater que pour diverses valeurs de ϵ ces courbes représentant cette fonction sont très plates et peuvent être remplacées dans un domaine assez étendu de D_H par une droite sécante équilibrée. Avec une bonne approximation cette fonction peut être remplacée tronçon par tronçon par des fonctions de la forme:

$$\log \frac{1}{\sqrt{f}} = \nu \log D_H + \log \beta \quad (2)$$

$$\text{soit } f^{-1/2} = \beta D_H^\nu = \beta (4 R_m)^\nu \quad (3)$$

ν et β dépendent essentiellement de la rugosité ϵ et varient très peu en fonction de D_H dans un domaine déterminé. Si le domaine considéré se réduit à une seule valeur de D_H , on tire la valeur de ν en dérivant la formule de Nikuradse:

$$v = \frac{\partial \log f^{-1/2}}{\partial \log D_H} = \frac{0,86}{f^{-1/2}} = 0,86 f^{1/2} \quad (4)$$

avec la valeur de v ainsi déterminée, on tire:

$$\beta = \frac{1}{D_H^v \sqrt{f}} = \frac{0,86}{v D_H^v} \quad (5)$$

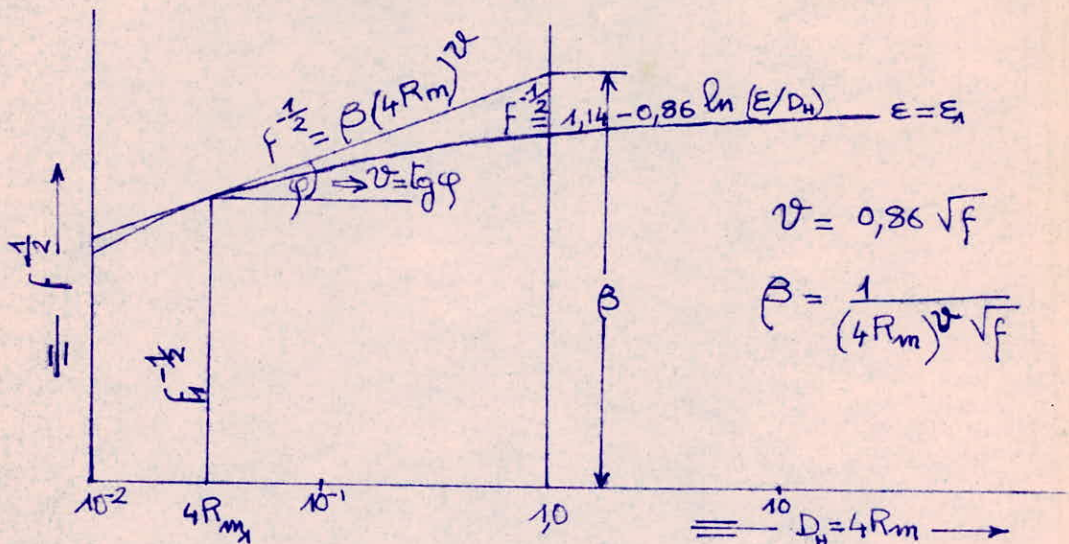
en posant $D_H = 4R_m$, on a:

$$v = \sqrt{\frac{8g}{f}} \cdot \sqrt{R_m J} = f^{-1/2} \sqrt{8g} \cdot \sqrt{R_m J} \quad (6)$$

en remplaçant $f^{-1/2}$ donné par Nikuradse, on obtient:

$$v = [1,14 - 0,86 \ln(\frac{\epsilon}{4R_m})] \cdot \sqrt{8g} \cdot \sqrt{R_m J} \quad (6a)$$

en substituant (3) à la place de (1), on a le même facteur $f^{-1/2}$ que si on représentait (3) avec le coefficient β et l'exposant v correspondant au cas particulier où $\epsilon = \epsilon_1$ et $R_m = R_{m1} \Rightarrow f_1^{-1/2}$ (Voir fig. ci-dessous)



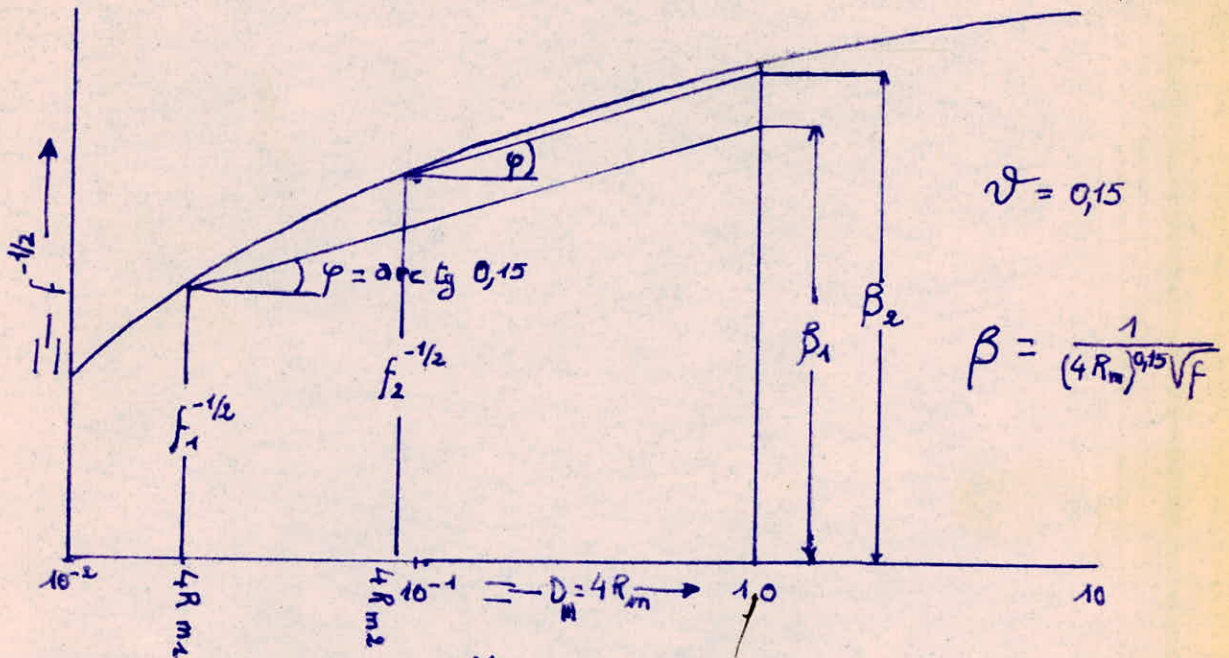
avec la valeur de $f^{-1/2}$ ainsi déterminée, l'équation (6a) devient:

$$v = \beta (4R_m)^v \cdot \sqrt{8g} \cdot \sqrt{R_m J} \quad (6b)$$

Comme v et β dépendent de ϵ et de R_m dans un domaine très restreint de R_m même pour ϵ constant, pour donner une solution aisée au problème, nous fûmes amenés à prendre $v = 0,15$ correspondant à sa valeur moyenne tout en

tenant compte des variations de ϵ , R_m et β .
la relation (5) devient:

$$\beta = \frac{1}{(4R_m)^{0,15} \sqrt{f}} \quad (5a)$$



avec la valeur de $f^{-1/2}$ ainsi déterminée l'équation (6b) devient:

$$V = \beta (4R_m)^{0,15} \sqrt{8g} \sqrt{R_m J} \quad (6c)$$

en posant $\alpha = 4^{0,15} \beta \sqrt{8g}$ (7)

(6c) devient: $V = \alpha R^{0,65} J^{0,5}$ (6d)

or par définition: $A/P = R_m$ ou $A = P R_m$ (8)

en introduisant le paramètre de cambrure:

$\varphi = R_m / P$ (9)
on tire en éliminant P entre (8) et (9)

$$A = R_m^2 / \varphi \quad (10)$$

et en éliminant R_m entre (8) et (9): $\varphi = A/P^2$ (11)

avec (10) l'équation (6d) devient:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\varphi Q}{R_m^2} = \alpha R_m^{0,65} J^{0,5} \quad (6e)$$

soit $\frac{\varphi Q}{\alpha \sqrt{J}} = R_m^{2/5}$
 d'où $R_m = \varphi^{1/2,65} \left(\frac{Q}{\alpha \sqrt{J}} \right)^{1/2,65}$ (8a)

soit en posant: $R_{m0} = \varphi^{1/2,65}$ (12)

et $\Lambda = \left(\frac{Q}{\alpha \sqrt{J}} \right)^{1/2,65}$ (13)

on tire $R_m = R_{m0} \Lambda$ (14)

Ceci illustre que le rayon moyen et par conséquent toutes les dimensions linéaires telles que diamètre, largeur du fond ... peuvent être définies comme le produit de deux facteurs:

le premier facteur, "paramètre de dimensions", désigné par la même lettre que la dimension considérée et distingué par l'indice "0" (Ex. R_{m0} , D_{H0} , h_0 , e_0 ...)

Le second facteur appelé "Longueur Fluidodynamique" " Λ " dépend de Q/\sqrt{J} et du coefficient α . La valeur de Λ ne peut être indépendante de la forme du profil car le coefficient α subit des variations lentes en fonction de D_H .

En éliminant β entre (5a) et (7) on tire :

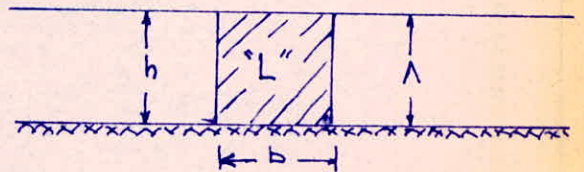
$$\alpha = 4^{0,15} (D_H)^{-0,15} \sqrt{8g/f} \quad (15)$$

comme $D_H = 4R_m$ on a: $\alpha = R_m^{-0,15} \sqrt{8g/f}$ (15a)

Une famille de courbes représentant α calculé en application de (7) en fonction de ϵ et de D_H .

Signification physique de la théorie de la longueur fluidodynamique:

Elle est donnée par la longueur $\Lambda = h = b$ du côté de la tranche quadratique hachurée (carré "L") découpée dans une section droite quelconque d'un courant permanent à profondeur constante, passant sur un plan incliné indéfiniment large, véhiculant un débit Q passant par le carré "L" soit un débit unitaire $q = Q/\Lambda$.



Adaptation à la théorie de la longueur fluidodynamique
 ~ de la formule du nombre de Reynolds ~

Pour obtenir une formule simple exprimant le nombre de Reynolds par Q et $\lambda\Lambda$, on tire de $a = \lambda\Lambda a_0$ et de l'équation de continuité des écoulements permanents incompressibles:

$$R = \frac{v D_H}{\nu} = \frac{Q}{\nu A_0} \cdot \frac{\lambda \Lambda D_{H_0}}{\lambda^2 \Lambda^2} = \frac{1}{\nu} \frac{Q}{\lambda \Lambda} \frac{D_{H_0}}{A_0} \quad (16)$$

en tenant compte de la relation:

$$D_{H_0} = \frac{4 A_0}{P_0}$$

on tire:

$$D_{H_0} / A_0 = \frac{4}{P_0}$$

En éliminant D_{H_0} de cette dernière équation et (16), on tire finalement:

$$R = \frac{4}{P_0} \cdot \frac{Q}{\lambda \Lambda} \cdot \frac{1}{\nu} \quad (17)$$

ÉCOULEMENTS EN RÉGIME CRITIQUE

Dans le cas des écoulements à surface libre, il est souvent intéressant de connaître les valeurs du débit Q_k et le gradient J_k de la perte de charge, correspondant au régime critique (limite du régime fluvial et torrentiel).

on a: $H = h + \frac{v^2}{2g}$

or $v = \frac{Q}{A}$ et $A = eh$ (section mouillée)
 e étant la largeur du plan d'eau dans la section A
 La hauteur critique est donnée par $\frac{dH}{dh} = 0$

$$H = h + \frac{Q^2}{A^2} \cdot \frac{1}{2g}$$

$$\frac{dH}{dh} = 1 - \frac{2Q^2}{2gA^3} \frac{dA}{dh} = 0 \quad \text{avec } dA = e dh$$

$$\Rightarrow \frac{Q^2 e}{A^3 g} = 1 \quad (18)$$

C'est la formule qui exprime la condition du régime critique.
 En exprimant A et e par la longueur fluidodynamique Λ et par les paramètres dimensionnels A_0 et e_0 , on a:

$A = A_0 \Lambda^2$ $e = e_0 \Lambda$
 d'où en éliminant A et e entre ces dernières équations et
 (18) on tire :

$$Q_k^2 = g \Lambda^5 \frac{A_0^3}{e_0}$$

et

$$Q_k = g^{1/2} \Lambda^{5/2} \sqrt{A_0^3/e_0} \quad (19)$$

en introduisant le paramètre du débit critique :

$$Q_{k_0} = \sqrt{A_0^3/e_0} \quad (20)$$

l'équation (19) devient :

$$Q_k = g^{1/2} \Lambda^{5/2} Q_{k_0} \quad (21)$$

Q_{k_0} est adimensionnel, les figures (9 à 16) représentent $Q_{k_0}(\xi)$, $Q_{k_0}(\zeta)$ et $Q_{k_0}(\eta)$.

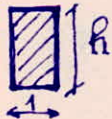
- Cas des écoulements bidimensionnels à surface libre :

En vue de déterminer Λ_k (longueur fluidodynamique critique) on exprime le gradient de la perte de charge par la formule de Darcy Weisbach $J = \frac{f}{D_h} \cdot \frac{V^2}{2g}$

et la formule (15a) $\alpha = R_m^{-0,15} \sqrt{\frac{2g}{\rho}}$

d'où $J = \frac{V^2}{\alpha^2 R_m^{1,30}} \quad (22)$

pour un écoulement bidimensionnel en régime critique on a :



$$A = h \cdot 1 \Rightarrow A/P = R_m = h$$

$$P = 1$$

d'autre part pour un écoulement critique $h = h_c = \sqrt[3]{q^2/g}$

$$\Rightarrow R_m = h = K = (q^2/g)^{1/3} \quad (23)$$

en éliminant R_m entre (22) et (23) on tire :

$$J_k = \frac{q^2}{(q^2/g)^{2/3} \alpha^2 (q^2/g)^{1,30/3}} = \alpha^{-2} g^{1,1} q^{-0,2} \quad (24)$$

or en appliquant (13) à l'écoulement passant par le carré "L" on a :

$$h = b_c = \Lambda = \left(\frac{Q}{\alpha \sqrt{J}} \right)^{1/2,65} = \left(\frac{\Lambda q}{\alpha \sqrt{J}} \right)^{1/2,65}$$

$$\text{d'où : } \Lambda^{\frac{1,65}{2,65}} = \left(\frac{q}{\alpha \sqrt{J}} \right)^{1/2,65}$$

$$\text{soit : } \Lambda^{1,65} = \left(\frac{q}{\alpha \sqrt{J}} \right)$$

$$\text{et enfin : } h = b = \Lambda = \left(\frac{q}{\alpha \sqrt{J}} \right)^{1/1,65} \quad (25)$$

en éliminant J_k entre (25) et (24) on tire :

$$\Lambda_k = \left(\frac{q}{\alpha \sqrt{J}} \right)^{1/1,65} = \left(\frac{q}{\alpha \alpha^{-1} g^{0,55} q^{0,1}} \right)^{1/1,65}$$

$$\text{soit : } \Lambda_k = \left(\frac{q^{1,1}}{g^{0,55}} \right)^{1/1,65} = \frac{q^{2/3}}{g^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = K \quad (26)$$

Ainsi il est démontré que pour les écoulements bidimensionnels la longueur fluidodynamique critique Λ_k se confond avec la profondeur critique K .

Calcul de la hauteur critique dans le cas d'une section de forme quelconque.

D'une manière générale, on a pour une section quelconque A :

$$H = h + \frac{Q^2}{2gA^2}$$

et dans la section critique $A = A_c$

$$\frac{\partial H}{\partial h} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial h} = 0$$

mais $\partial A / \partial h = B_c$ est la largeur de la section à la hauteur de la surface de l'eau pour $h = K$, de sorte qu'on a :

$$A_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2 B_c}{g}}$$

d'où l'on déduit aussi K . Toute fois cette formule générale doit être encore adaptée aux différents cas particuliers pour être utilisable dans les calculs numériques.

- Cas particulier du canal de section trapézoïdale :

Soient b la largeur du fond, θ l'angle d'inclinaison du talus et h la hauteur de l'eau. on a

$$A = h(b + h \cotg \theta) ; \quad \frac{\partial A}{\partial h} = B_c = b + 2h \cotg \theta$$

de sorte que pour $h=k$ on a

$$A_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2 (b + 2k \cot \theta)}{g}} = k (b + k \cot \theta)$$

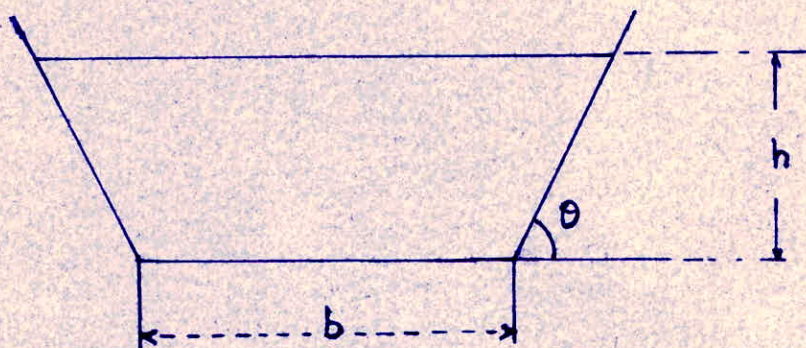
$$k = \sqrt[3]{\frac{Q^2 (b + 2k \cot \theta)}{g (b + k \cot \theta)^3}}$$

d'où l'on tire k sans trop de peine

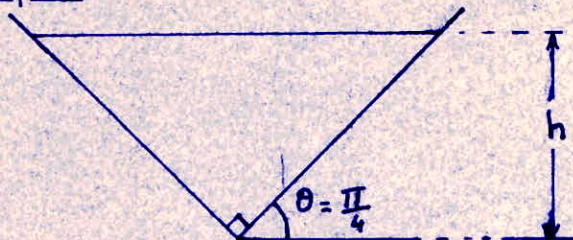
Pour $b=0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ on se ramène au cas du canal diédrique

$$\text{d'où } k = \sqrt[5]{\frac{2Q^2}{g}} \quad (27)$$

- Profil trapézoïdal:



- Profil diédrique:



On tire également la profondeur critique d'un courant liquide, passant par un canal diédrique en application de (18)

$$\frac{Q^2 e}{g A^3} = \frac{2 I h Q^2}{g I^3 h^6} = 1 \Rightarrow h = K = \sqrt[5]{\frac{2 Q^2}{g I^2}}$$

La longueur fluidodynamique correspondant au régime critique est:

$$\Lambda_k = \frac{K}{h_0}$$

avec le paramètre adimensionnel:

$$h_0 = \frac{\lambda^{0,245}}{I^{0,623}} = \frac{(2\sqrt{1+I^2})^{0,245}}{I^{0,623}}$$

dont la valeur déterminée par le talus des deux plans constituant le dièdre, reste constante quelle que soit la profondeur du liquide en écoulement dans le canal.

L'aire de la section critique:

$$A_k = I K^2 = I h_0^2 \Lambda_k^2$$

la vitesse critique:

$$V_k = \frac{Q}{I K^2} = \frac{Q}{I h_0^2 \Lambda_k^2}$$

la charge totale correspondante est:

$$H_k = K + \frac{Q^2}{2g I^2 K^4}$$

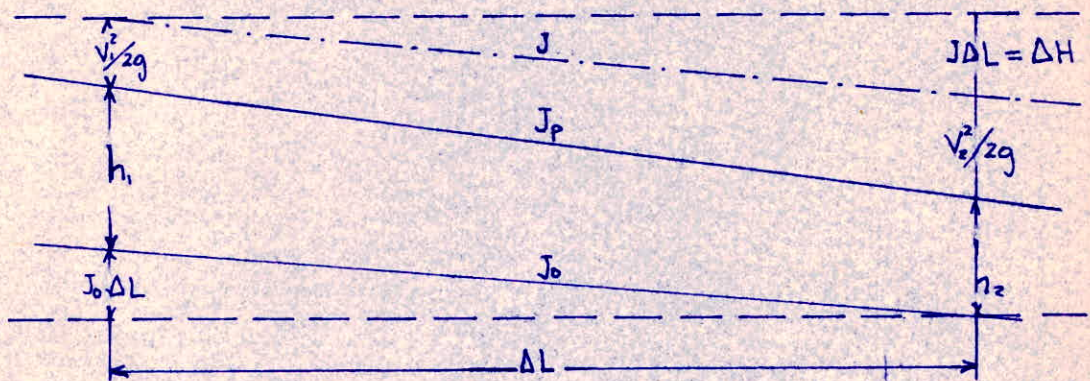
soit:
$$H_k = K + \frac{K^5}{4K^4} = 1,25 K$$

ECOULEMENTS
GRADUELLEMENT NON UNIFORMES

GENERALITES

Ils constituent un cas spécial des écoulements permanents non uniformes. La profondeur du liquide, la ~~profondeur du liquide~~, l'aire de la section mouillée, la pente du fond et le rayon moyen varient graduellement le long du canal. On admet que le gradient de la perte de charge J dans une section donnée ne dépend que du débit Q , de la rugosité ϵ , de la forme et des dimensions du profil. On peut déterminer la valeur de J par la formule de Darcy Wessbach, ou en application de la figure 8, ou encore de la règle "L".

En considérant la figure ci-dessous :



on a :
$$J = \lim_{\Delta L} \frac{\Delta H}{\Delta L}$$

si ΔL tend vers zéro.

La valeur de J ainsi définie équivaut à la pente de la ligne des charges totales définie par le sinus de l'angle formé par la ligne des charges totales et l'horizontale.

Dans le cas d'un écoulement graduellement non uniforme chacune des pentes :

- J_0 du fond de la conduite (pente géométrique)
- J_p de la surface libre du liquide (gradient piézométrique).

J de la ligne de charges totales (gradient des p.d.c.) a une valeur différente.

On peut déterminer les éléments caractéristiques d'un écoulement graduellement non uniforme :

- Par la méthode dite "tronçon par tronçon" facilitée par l'application de la théorie de la longueur fluidodynamique à chacun des tronçons considérés.
- Par la méthode directe, basée sur la théorie de la longueur fluidodynamique, applicable aux écoulements bidimensionnels et en canal ~~diédrique~~ ~~quelle que soit la pente~~.
- Par la méthode de l'intégration numérique rationalisée par l'introduction du paramètre dimensionnel Q_{K_0} dans les applications de la longueur fluidodynamique.

Dans notre étude, on utilisera la méthode directe.

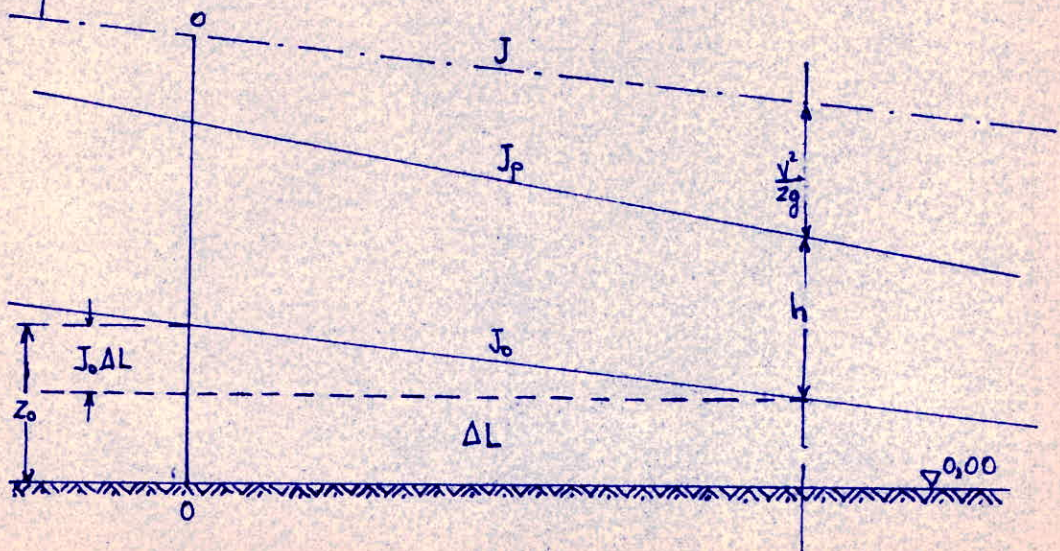
METHODE DIRECTE

Comme pour la méthode de l'intégration numérique, ce procédé n'est applicable qu'aux écoulements, passant par des canaux à profil sec constant et à pente géométrique invariable. Il est basé sur une équation différentielle établie entre L et h et sur l'intégration consécutive de celle-ci.

En faisant tendre ΔL vers zéro (voir fig. ci-dessous) la variation de la charge totale par unité de longueur se confond avec le gradient J de la perte de charge, c'est à dire:

$$J = \frac{d}{dL} \left(\frac{v^2}{2g} + z_0 - J_0 L + h \right) \quad (28)$$

z_0 désignant la cote du fond du canal dans la section déterminée par $L=0$



En exécutant la dérivation l'équation (28) devient:

$$J = -\frac{v}{g} \frac{dv}{dL} + J_0 - \frac{dh}{dL} \quad (29)$$

(le signe - s'explique par le fait que quand L croit, le gradient de la p.d.c. J décroît)

En application de l'équation de continuité on a pour un écoulement permanent:

$$vA = Q = C^{\text{te}}$$

en dérivant cette dernière suivant L, on tire:

$$\frac{dv}{dL} A + v \frac{dA}{dL} = 0$$

en posant: $dA = e dh$

e désignant la largeur du plan d'eau, on a:

$$\frac{dv}{dL} = -\frac{ve}{A} \frac{dh}{dL} = -\frac{Qe}{A^2} \frac{dh}{dL}$$

en éliminant $\frac{dv}{dL}$ entre cette dernière équation et (29) et en exprimant $\frac{dv}{dL}$ v par l'équation de continuité, on tire:

$$\frac{Q^2}{gA^2} e \frac{dh}{dL} + J_0 - \frac{dh}{dL} = J$$

en tirant dL , on a:

$$dL = \frac{1 - Q^2 e / gA^3}{J_0 - J} dh \quad (30)$$

Écoulements bidimensionnels graduellement non uniformes

Appliquons l'équation (30) à un écoulement bidimensionnel, passant sur un fond constitué par un plan incliné large, on a:

$$q = \frac{Q}{b} \quad ; \quad A = R \quad ; \quad P = 1 \quad R_m = h$$

et (30) devient:

$$dL = \frac{1 - q^2 / gh^3}{J_0 - J} dh \quad (31)$$

en éliminant q^2/g entre (31) et (26) on tire :

$$dL = \frac{1 - K^3/h^3}{J_0 - J} dh \quad (32)$$

en posant :

$$h_+ = \frac{h}{K} \quad \text{et} \quad L_+ = \frac{L}{K} \quad (33)$$

(32) devient :

$$dL_+ = \frac{1 - h_+^{-3}}{J_0 - J} dh_+ \quad (34)$$

Pour un écoulement bidimensionnel l'équation (25) devient :

$$V = \frac{q}{h} = \alpha h^{0,65} J^{0,5}$$

d'où :

$$J = \frac{q^2}{\alpha^2 h_+^{3,3}} \quad (35)$$

en éliminant q et h entre (33), (35) et (26) on tire :

$$J = \frac{g}{\alpha^2 h_+^{3,3} K^{0,3}} \quad (36)$$

En éliminant J entre (34) et (36) on tire :

$$dL_+ = \frac{1 - h_+^{-3}}{J_0 - g/\alpha^2 h_+^{3,3} K^{0,3}} dh_+ \quad (37)$$

en multipliant et le dénominateur et le numérateur par $\alpha^2 K^{0,3} h_+^{3,3}$ (37) devient :

$$dL_+ = \frac{(1 - h_+^{-3}) \alpha^2 K^{0,3} h_+^{3,3}}{J_0 \alpha^2 K^{0,3} h_+^{3,3} - g} dh_+ \quad (38)$$

en posant

$$\sqrt{C} = \frac{\alpha^2 K^{0,3}}{g} \quad (39)$$

on tire :

$$dL_+ = \sqrt{C} \frac{h_+^{3,3} - h_+^{0,3}}{J_0 \sqrt{C} h_+^{3,3} - 1} dh_+ \quad (40)$$

en passant :

$$\mathcal{F}(h_+, J_0 \sqrt{\mathcal{L}}) = \frac{h_+^{3,3} - h_+^{0,3}}{J_0 \sqrt{\mathcal{L}} h_+^{3,3} - 1} \quad (41)$$

(40) devient :

$$dL_+ = \sqrt{\mathcal{L}} \mathcal{F}(h_+, J_0 \sqrt{\mathcal{L}}) dh_+ \quad (42)$$

En intégrant on tire :

$$L_+ = \sqrt{\mathcal{L}} \int_{h_{1+}}^{h_{2+}} \mathcal{F}(h_+, J_0 \sqrt{\mathcal{L}}) dh_+ = \sqrt{\mathcal{L}} \int_{h_{1+}}^{h_{2+}} \frac{h_+^{3,3} - h_+^{0,3}}{\sqrt{\mathcal{L}} J_0 h_+^{3,3} - 1} dh_+ \quad (43)$$

le facteur $\sqrt{\mathcal{L}}$ défini par (39) ainsi que tous les termes des équations (40), (41), (42) et (43) sont adimensionnels.

en posant :

$$\mathcal{L} = \int_{h_{1+}}^{h_{2+}} \mathcal{F}(h_+, J_0 \sqrt{\mathcal{L}}) dh_+ = \int_{h_{1+}}^{h_{2+}} \frac{h_+^{3,3} - h_+^{0,3}}{J_0 \sqrt{\mathcal{L}} h_+^{3,3} - 1} dh_+ \quad (44)$$

$$\text{on a : } \frac{L}{h_1} = K \sqrt{\mathcal{L}} \int_{h_{1+}}^{h_{2+}} \mathcal{F}(h_+, J_0 \sqrt{\mathcal{L}}) dh_+ \quad (45)$$

Ecoulement graduellement non uniforme passant par un canal diédrique.

La détermination du profil en long et de la surface libre dans ce cas se fait également en application de (30)

$$dL = \frac{1 - Q^2 e / g A^3}{J_0 - J}$$

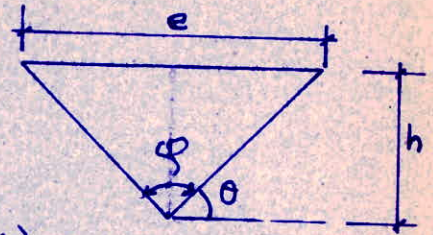
Pour le profil en triangle isocèle, on a :

$$A = \frac{eh}{2}$$

$$I = \cot^2 \theta = \frac{e}{2h}$$

d'où $e = 2Ih$, $A = Ih^2$

$$\frac{e}{A^3} = \frac{2Ih}{I^3 h^6} = \frac{2}{I^2 h^5} \quad (46)$$



d'autre part on a la profondeur critique (27):

$$K = \sqrt[5]{\frac{2Q^2}{gI^2}}$$

en éliminant Q , e et g entre (30), (46) et (27) et en

posant: $h_+ = \frac{h}{K}$ et $L_+ = \frac{L}{K}$ (33)

on tire: $\frac{dL}{dh} = \frac{1 - \frac{Q^2}{g} \cdot 2I^{-2} h^{-5}}{J_0 - J}$

soit $\frac{dL}{dh} = \frac{1 - \frac{2}{g} \frac{Q^2}{I^2} h^{-5}}{J_0 - J} = \frac{1 - K^5/h^5}{J_0 - J} = \frac{1 - h_+^{-5}}{J_0 - J}$ (47)

Pour un écoulement passant par un canal diédrique, l'équation (25) devient:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{Ih^2} = \alpha \left(\frac{I}{\lambda} h \right)^{0,65} J^{0,5}$$

avec $\lambda = 2\sqrt{1+I^2}$
en élevant le tout au carré.

$$\frac{Q^2}{I^2 h^4} = \alpha^2 I^{1,3} \lambda^{-1,3} h^{1,3} J$$

d'où $J = \frac{Q^2}{\alpha^2 I^{3,3} \lambda^{-1,3} h^{5,3}}$ (48)

en multipliant et le numérateur et le dénominateur par $2gK^{0,3}$ l'équation (48) devient:

$$J = \frac{2 \alpha^2 g K^{0,3}}{2 g I^2 I^{1,3} \chi^{1,3} h^{5,3} K^{0,3} \alpha^2}$$

$$\text{ou } J = \frac{K^{5,3} g}{h^{5,3} 2 \alpha^2 I^{1,3} \chi^{-1,3} K^{0,3}} = \frac{h_+^{-5,3} g \chi^{1,3}}{2 \alpha^2 I^{1,3} K^{0,3}} \quad (49)$$

En éliminant J entre (47) et (49), on tire :

$$\frac{dL}{dh} = \frac{dL_+}{dh_+} = \frac{1 - h_+^{-5}}{J_0 - g / 2 \alpha^2 I^{1,3} \chi^{-1,3} K^{0,3} h_+^{5,3}} \quad (50)$$

en multipliant haut et bas par $2 \alpha^2 I^{1,3} \chi^{-1,3} K^{0,3} h_+^{5,3}$ (50) devient :

$$\frac{dL_+}{dh_+} = \frac{(1 + h_+^{-5}) (2 \alpha^2 I^{1,3} \chi^{-1,3} K^{0,3} h_+^{5,3})}{J_0 2 \alpha^2 I^{1,3} \chi^{-1,3} K^{0,3} h_+^{5,3} - g} \quad (50a)$$

$$\text{en posant } \mathcal{V} = \frac{2 \alpha^2 I^{1,3} \chi^{-1,3} K^{0,3}}{g} \quad (51)$$

\mathcal{V} est sans dimension.

$$\text{on tire : } \frac{dL_+}{dh_+} = \mathcal{V} \frac{(1 - h_+^{-5}) h_+^{5,3} g}{\mathcal{V} J_0 g - g}$$

$$\frac{dL_+}{dh_+} = \mathcal{V} \frac{h_+^{5,3} - h_+^{0,3}}{\mathcal{V} J_0 - 1} \quad (52)$$

$$L \frac{h_2}{h_1} = K \mathcal{V} \int_{h_+}^{h_2} (h_+, \mathcal{V} J_0) = \mathcal{V} (K) \int_{h_+}^{h_2} \frac{h_+^{5,3} - h_+^{0,3}}{\mathcal{V} J_0 - 1} dh \quad (53)$$

Dans le cas où $I = 1$ et $J_0 = 0$, on a :

$$\mathcal{V} = \frac{2 \alpha^2 (2,828)^{-1,3} K^{0,3}}{g}$$

$$\text{ou } \mathcal{M} = \frac{2\alpha^2 K^{0,3}}{9,8 \cdot 3,865} = \frac{\alpha^2 K^{0,3}}{18,94}$$

et (52) devient:

$$\frac{dL}{dh} = \mathcal{M} (h_+^{5,3} - h_+^{0,3}) \quad (54)$$

$$\text{d'où } L = \mathcal{M} K \int_{h_1}^{h_2} (h_+) = \mathcal{M} K \int_{h_1}^{h_2} (h_+^{5,3} - h_+^{0,3}) dh_+ \quad (55)$$

et en intégrant (55), on obtient:

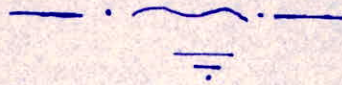
$$L = \mathcal{M} K \int_{h_1}^{h_2} (h_+) = \mathcal{M} K \left(\frac{h_+^{1,3}}{1,3} - \frac{h_+^{6,3}}{6,3} \right)_{h_1}^{h_2} \quad (56)$$

En considérant les équations (45) et (53), on voit que la connaissance des fonctions adimensionnelles $\mathcal{L}(h_+, J_0 \mathcal{M})$ et $\mathcal{E}(h_+, J_0 \mathcal{M})$ permettent la solution directe simple et rapide de tous les problèmes d'écoulements graduellement non uniformes, bidimensionnels ou en canal diédrique.

Ces dites fonctions ne peuvent pas être exprimées d'une manière plus simple car il n'y a pas de solution analytique de l'intégration. Pour cette raison les valeurs de $\mathcal{L}(h_+, J_0 \mathcal{M})$ et $\mathcal{E}(h_+, J_0 \mathcal{M})$ ont été calculées par intégration numérique, exécutée sur ordinateur.

Les familles de courbes déduites de ces fonctions furent représentées graphiquement dans un système de coordonnées à division logarithmique.

Classement de profils en long des écoulements graduellement non uniformes



L'étude des équations (39), (40) (45) révèle l'existence de plusieurs types de profil en long des écoulements bidimensionnels graduellement non uniformes, ayant chacun des caractéristiques bien déterminées.

La pente géométrique peut être : adverse, horizontale, suave, critique ou prononcée.

La profondeur du liquide peut être supérieure, égale ou inférieure à la profondeur "normale", correspondant à l'écoulement dit uniforme. A ce point de vue l'écoulement peut être classé, respectivement, comme "super normal", "normal" ou "subnormal".

Le régime de l'écoulement peut être torrentiel, critique ou fluvial.

Le profil en long est critique si pour $h=K$, soit $h_+ = 1$, on a $J = J_0$, soit si, en tenant compte de (36) on a :

$$\frac{g}{\alpha^2 K^{0,3}} = J_0$$

c'est à dire lorsque :

$$\frac{J_0 \alpha^2 K^{0,3}}{g} = \sqrt{J_0} = 1 \quad (57)$$

ou encore si

$$\sqrt{\zeta} = \frac{1}{J_0} \quad (57a)$$

Dans le cas où la profondeur normale h_0 correspondant à $J = J_0$, est inférieure à la profondeur critique K , on a :

$$\sqrt{\zeta J_0} > 1 \quad (58)$$

$$\text{et } \sqrt{\zeta} > \frac{1}{J_0} \quad (58a)$$

on est en présence d'un profil en long à pente géométrique prononcée.

Finalement dans le cas où $h_0 > K$ et par voie de conséquence $h_+ > 1$, on a :

$$\sqrt{\zeta J_0} < 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{\zeta} < \frac{1}{J_0} \quad (59a)$$

le profil en long de l'écoulement peut correspondre :

- à une pente géométrique suave si on a :

$$J_0 > 0$$

- à une pente géométrique horizontale si on a :

$$J_0 = 0$$

- à une pente géométrique adverse si on a :

$$J_0 < 0$$

Profil en long à pente géométrique critique.

Dans le cas où la profondeur normale du liquide en écoulement se confond avec la profondeur critique, on dit que la pente géométrique est critique. Les tranches de courbes désignées par K_1 et par K_3 représentent (voir fig. ci-dessous) le profil en long de la surface libre, correspondant respectivement au cas où :

$$h > h_0 = K$$

et à l'autre cas où :

$$h < h_0 = K$$

En éliminant $\sqrt{\quad}$ entre (40) et (57a), on tire :

$$\frac{dL}{dh} = \frac{dL_+}{dh_+} = \frac{1}{J_0} \frac{h_+^{3,3} - h_+^{0,3}}{h_+^{3,3} - 1} \quad (60)$$

Le numérateur et le dénominateur sont positifs pour K_1 et négatifs pour K_3 . Par conséquent la profondeur d'eau h augmente vers l'aval dans les deux cas.

Si $h_+ \rightarrow \infty$, $dL/dh \rightarrow 1/J_0$, ce qui permet de conclure que la courbe se rapproche asymptotiquement à l'horizontale. Pour $h = K$, on a $h_+ = 1$ et la formule (60) donne :

$$\frac{dL}{dh} = \frac{1}{J_0} \frac{0}{0} \quad \text{indéterminé}$$

En ayant recours à la règle de l'Hospital on tire :

$$\lim_{h_+ \rightarrow 1} \frac{h_+^{3,3} - h_+^{0,3}}{h_+^{3,3} - 1} = \frac{3,3 - 0,3}{3,3} = 0,909 \quad (61)$$

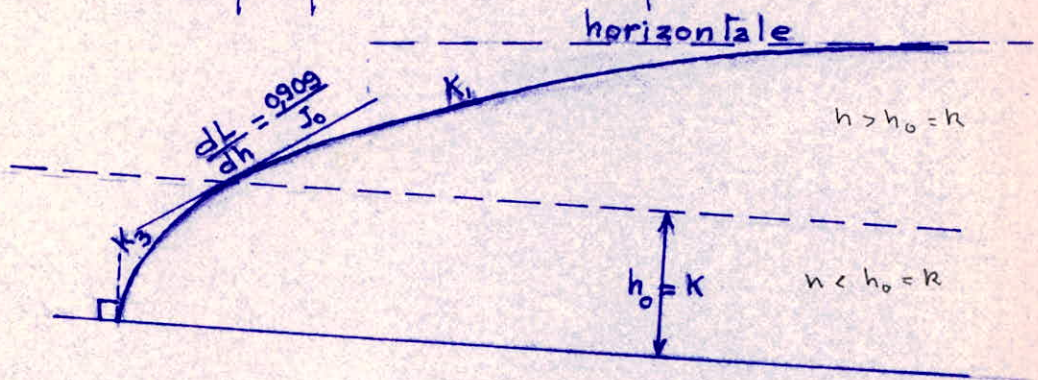
Ainsi pour $h_+ = 1$ on a :

$$\frac{dL}{dh} = \frac{0,909}{J_0} \quad (62)$$

Pour $h=0$, on a $h_+ = 0$. En substituant cette valeur de h_+ en (60) on tire :

$$\frac{dL}{dh} = 0$$

Ce qui permet de conclure que dans le point singulier hypothétique de l'écoulement où la profondeur devient zéro, la tangente de la courbe est perpendiculaire au fond.

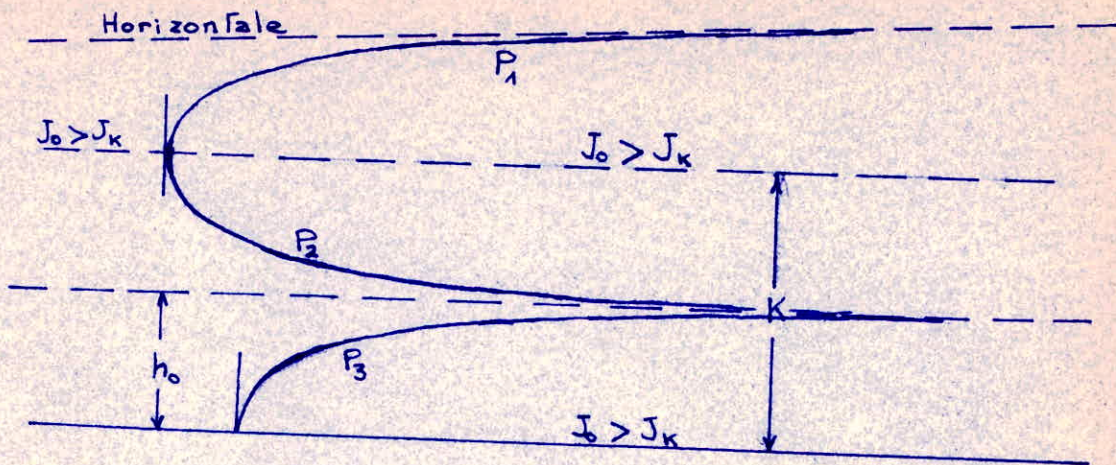


Profil en long à pente géométrique prononcée

Dans le cas où l'écoulement bidimensionnel uniforme est en régime torrentiel on a $h_0 < K$ et par conséquent $h_0 < 1$.

On a aussi: $\pi J > 1$ d'où $\pi > 1/J_0$ on dit dans ce cas que la pente est prononcée (ou forte).

la courbe désignée par P_1 (voir figure ci-dessous) constitue un profil en long caractéristique d'un écoulement fluvial ($h > K$, $h_+ > 1$) se produisant sur un plan incliné ayant sa pente prononcée dans ce cas, et le numérateur et le dénominateur du membre droit de (40) sont positifs de sorte que la profondeur croît dans le sens aval. Si $h \rightarrow \infty$, $dL/dh \rightarrow 1/J_0$ ce qui signifie que la courbe se rapproche asymptotiquement à l'horizontale. A l'extrémité opposée de la courbe, pour $h_+ = 1$, on a $dL/dh = 0$, dans ce cas singulier, hypothétique (qui ne peut pas exister en raison du ressaut). La tangente de la courbe deviendrait perpendiculaire au fond. La courbe désignée par P_2 (voir fig. ci-dessous) constitue un profil en long caractéristique d'un écoulement bidimensionnel, graduellement non uniforme, torrentiel, supernormal ($h_0 < h < K$ soit $h_0 < h_+ < 1$) se produisant sur un plan incliné ayant sa pente géométrique prononcée.



Dans ce cas le numérateur de (40) est négatif et le dénominateur est positif, mais ce dernier devient zéro pour :

$$h_+ = h_{0+} = (\sqrt[3]{J_0})^{-1/3} \quad (63)$$

Dans ce cas la valeur de dL/dh devient égale à l'infini ce qui signifie que la courbe P_2 s'approche asymptotiquement à la ligne d'eau normale.

La courbe désignée par P_3 constitue un profil en long caractéristique d'un écoulement bidimensionnel, graduellement non uniforme, torrentiel, subnormal ($h < h_0 < K$ soit $h_+ < h_{0+} < K$) se produisant sur un plan incliné ayant sa pente géométrique prononcée. Cette courbe est ascendante puisque $dL/dh > 0$.

Le dénominateur et le numérateur sont tous deux négatifs. Comme dans le cas de la courbe P_2 , le dénominateur devient zéro pour :

$$h_+ = h_{0+} = (\sqrt[3]{J_0})^{-1/3}$$

La valeur de dL/dh devient infinie, la courbe P_3 s'approche asymptotiquement de la ligne d'eau normale.

Profil en long à pente géométrique suave.

On dit que la pente géométrique est suave si l'écoulement uniforme, se produisant sur une telle pente, est en régime fluvial, c'est à dire si la profondeur normale $h_0 > K$. Dans ce cas on a :

$$h_{0+} > 1 \quad \sqrt[3]{J_0} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{J_0} < \frac{1}{J_0}$$

On distingue trois types de profil en long suivant la position de la surface libre désignés par S_1 , S_2 et S_3 .

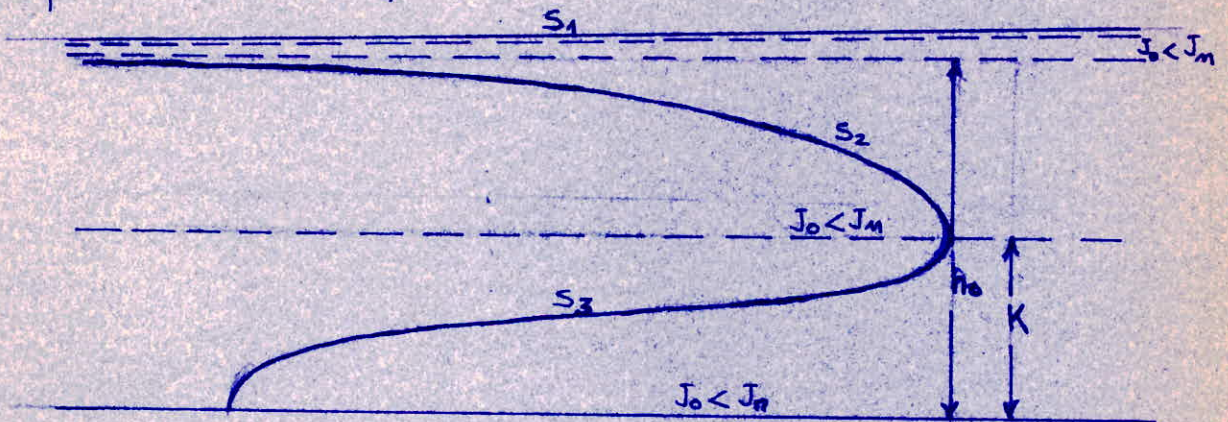
S_1 constitue le type de profil en long correspondant au cas

où $h > h_0$ soit $h_+ > 1$. On a $dL/dh > 0$, tendant vers $\frac{1}{J_0}$, par conséquent la courbe S_1 ascendante se rapproche asymptotiquement à l'horizontale si $h \rightarrow \infty$. D'autre part, puisque le dénominateur tend vers zéro si $h \rightarrow h_0$, la ligne d'eau normale, ayant sa position déterminée par (63) constitue une autre asymptote de la courbe S_1 .

S_2 constitue le type de profil en long de la surface libre dans le cas où $h_0 > h > K$ soit $h_{0+} > h_+ > 1$. Ce cas est caractérisé par $dL/dh < 0$ par conséquent la courbe est descendante.

Pour $h = h_0$ correspondant au h_{0+} défini par (63), la valeur de dL/dh devient égale à $-\infty$ et l'écoulement devient normal (uniforme). Pour cette raison la courbe se rapproche à l'amont asymptotiquement à la ligne d'eau normale.

S_3 constitue le type de profil en long de la surface libre dans le cas où $h < K$ soit $h_+ < 1$. Dans ce cas on a $dL/dh > 0$ donc la courbe est ascendante. Pour $h = 0$ et pour $h = K$ soit pour $h_+ = 0$ et $h_+ = 1$ on a $dL/dh = 0$, dans ces trois points singuliers et hypothétiques, la tangente à la courbe S_3 deviendrait perpendiculaire au fond.



Profil en long à pente géométrique horizontale:

Dans ce cas la pente géométrique $J_0 = 0$, la profondeur normale h_0 devient infinie. On a $\sqrt{J_0} < 1 \Rightarrow \sqrt{J} < \frac{1}{3}$.

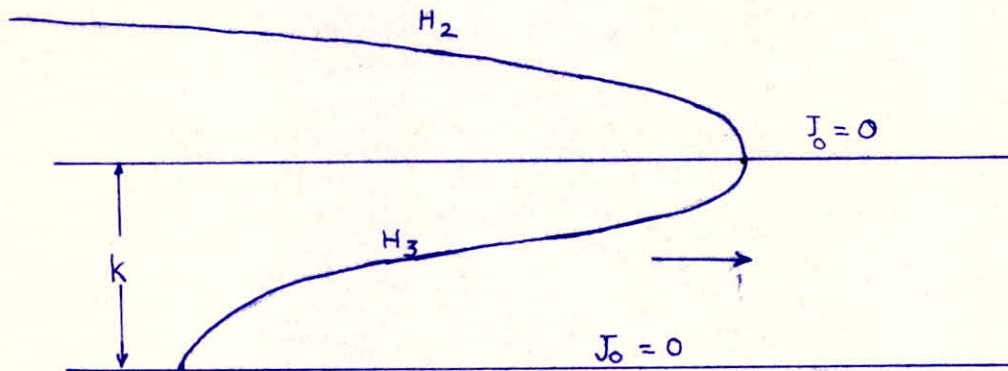
Le régime peut être torrentiel ou fluvial. L'équation (40) prend la forme:

$$\frac{dL}{dh} = \frac{dL_+}{dh_+} = \sqrt{(h^{0,3} - h^{3,3})} \quad (63a)$$

Dans le cas où $h < K$ soit $h_+ < 1$, le régime est torrentiel.

$dL/dh > 0$ par conséquent la profondeur croit dans le sens aval. Pour $h=0$ et $h=K$, soit $h_+ = 0$ et $h_+ = 1$, on a $dL/dh = 0$. Dans ces points singuliers la tangente à la courbe deviendrait perpendiculaire au fond (Courbe H_3).

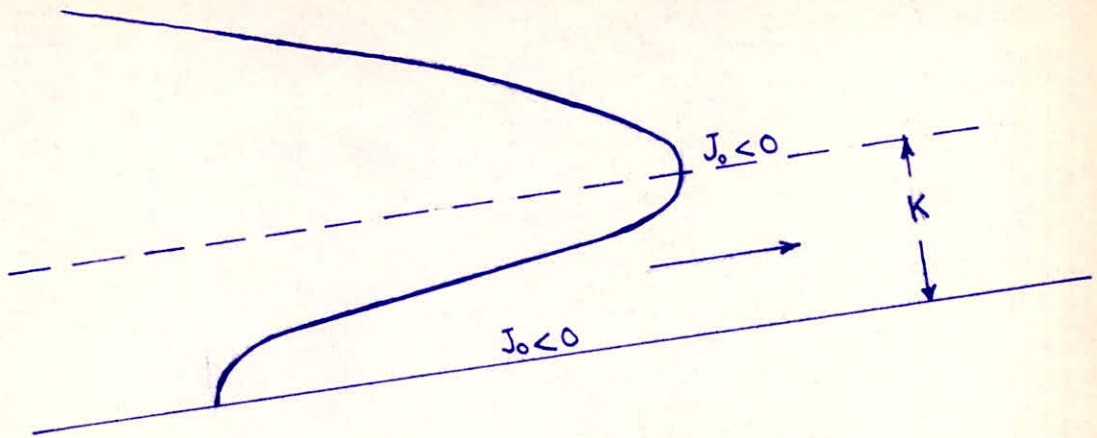
Dans le cas où $h > K$ soit $h_+ > 1$, le régime est fluvial et $dL/dh < 0$, la profondeur du liquide en écoulement décroît dans le sens aval. Le profil en long de la surface libre est représenté par la courbe H_2 .



Profil en long à pente géométrique adverse:

Lorsque le plan incliné constituant le fond est en contre-pente, le profil en long de la surface libre est appelé adverse. La profondeur normale h_0 n'a pas de signification physique. Cependant la profondeur réelle peut être soit supérieure ou inférieure à la profondeur critique K , la pente géométrique J_0 est négative le dénominateur de (40) reste dans tous les cas négatif. Lorsque le régime de l'écoulement est torrentiel, on a $h_+ < 1$ et le numérateur est négatif. Dans ce cas on a $dL/dh > 0$ et la profondeur du liquide s'accroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne vers l'aval. Le profil en long de cette surface libre est représenté par la courbe A_3 .

Lorsque le régime de l'écoulement est fluvial, le numérateur est positif et $dL/dh < 0$, la profondeur du liquide décroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne vers l'aval. Si $h \rightarrow \infty$ $dL/dh \rightarrow 1/J_0$ ce qui signifie que la courbe se rapproche asymptotiquement à l'horizontale, mais l'ordonnée déterminant la dite asymptote horizontale étant infinie, celle-ci ne peut pas être représentée sur le plan de la figure. Dans le cas où $h=K$ on a $h_+ = 1$ et $dL/dh = 0$, ce qui signifie que dans ce cas singulier et hypothétique (ne pouvant pas exister dans la réalité en raison du ressaut) la tangente de la courbe serait perpendiculaire au fond. Le profil en long de la surface libre est représenté par A_3 .



* Le classement des écoulements graduellement non uniforme, passant par une conduite à ciel ouvert, constituée par des éléments diédriques se fait suivant les mêmes principes que le classement des écoulements bidimensionnels graduellement non uniformes. On y retrouve les mêmes divers types de profil en long avec les mêmes asymptotes et l'allure des courbes représentant le profil en long de la surface libre est déterminée par des équations analogues à celles qui définissent la configuration de la surface libre des courants bidimensionnels.

La pente géométrique est critique si :

$$\sqrt{\tau} J_0 = 1 \quad \text{ou} \quad \sqrt{\tau} = \frac{1}{J_0} \quad (64)$$

Elle est prononcée si :

$$\sqrt{\tau} J_0 > 1 \quad \text{ou} \quad \sqrt{\tau} > \frac{1}{J_0} \quad (65)$$

Finalement dans le cas où :

$$\sqrt{\tau} J_0 < 1 \quad \text{ou} \quad \sqrt{\tau} < \frac{1}{J_0} \quad (66)$$

le profil en long peut correspondre :

- à une pente géométrique suave si on a :
 $J_0 > 0$
- à une pente géométrique horizontale si on a :
 $J_0 = 0$
- à une pente géométrique adverse si on a :
 $J_0 < 0$

Pour les profils en long à pente géométrique critique l'équation (60) devient:

$$\frac{dL}{dh} = \frac{dL_+}{dh_+} = \frac{1}{J_0} \frac{h_+^{5,3} - h_+^{0,3}}{h_+^{5,3} - 1} \quad (67)$$

et (61) devient:

$$\lim_{\text{qd } h_+ \rightarrow 1} \frac{h_+^{5,3} - h_+^{0,3}}{h_+^{5,3} - 1} = \frac{5,3 - 0,3}{5,3} = 0,944 \quad (68)$$

(62) devient:

$$\frac{dL}{dh} = \frac{0,944}{J_0} \quad (69)$$

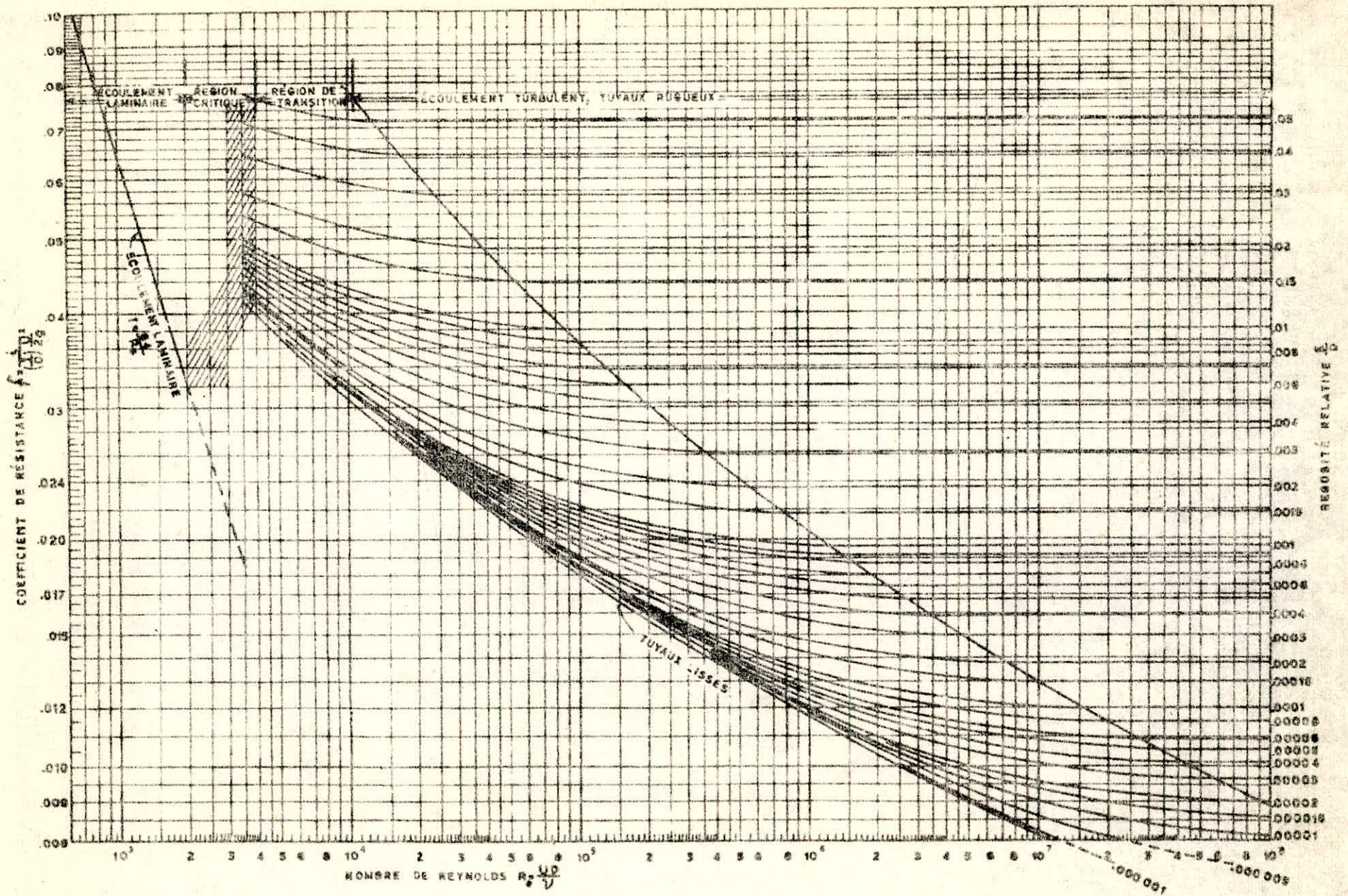
L'équation (63) définissant la valeur de la profondeur normale devient:

$$h_{0+} = (\sqrt[5]{J_0})^{-1/5,3} \quad (70)$$

Pour un canal horizontal l'équation (65) devient:

$$\frac{dL}{dh} = \frac{dL_+}{dh_+} = \sqrt[5]{(h_+^{0,3} - h_+^{5,3})} \quad (71)$$

Pour déterminer R_c , voir l'abaque 43 et 45; pour déterminer $\frac{\epsilon}{D}$, voir la table 41 et l'abaque 42.



Exemple: $R_e = 3 \times 10^5$; $\frac{\epsilon}{D} = 0.0002$; $\lambda = 0.0164$

Coefficient de frottement f suivant Nikuradse
 en fonction de ξ et de D_n

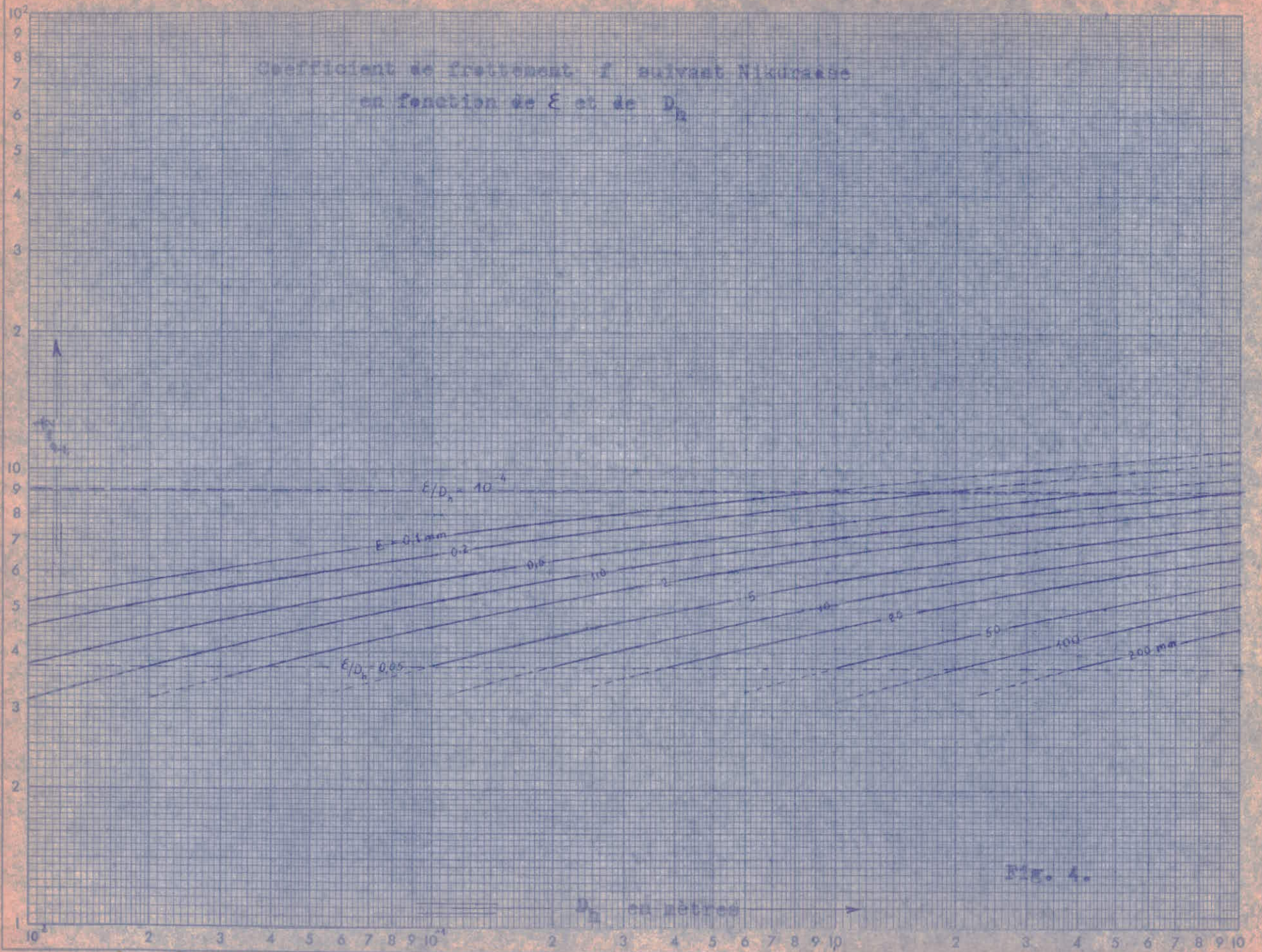
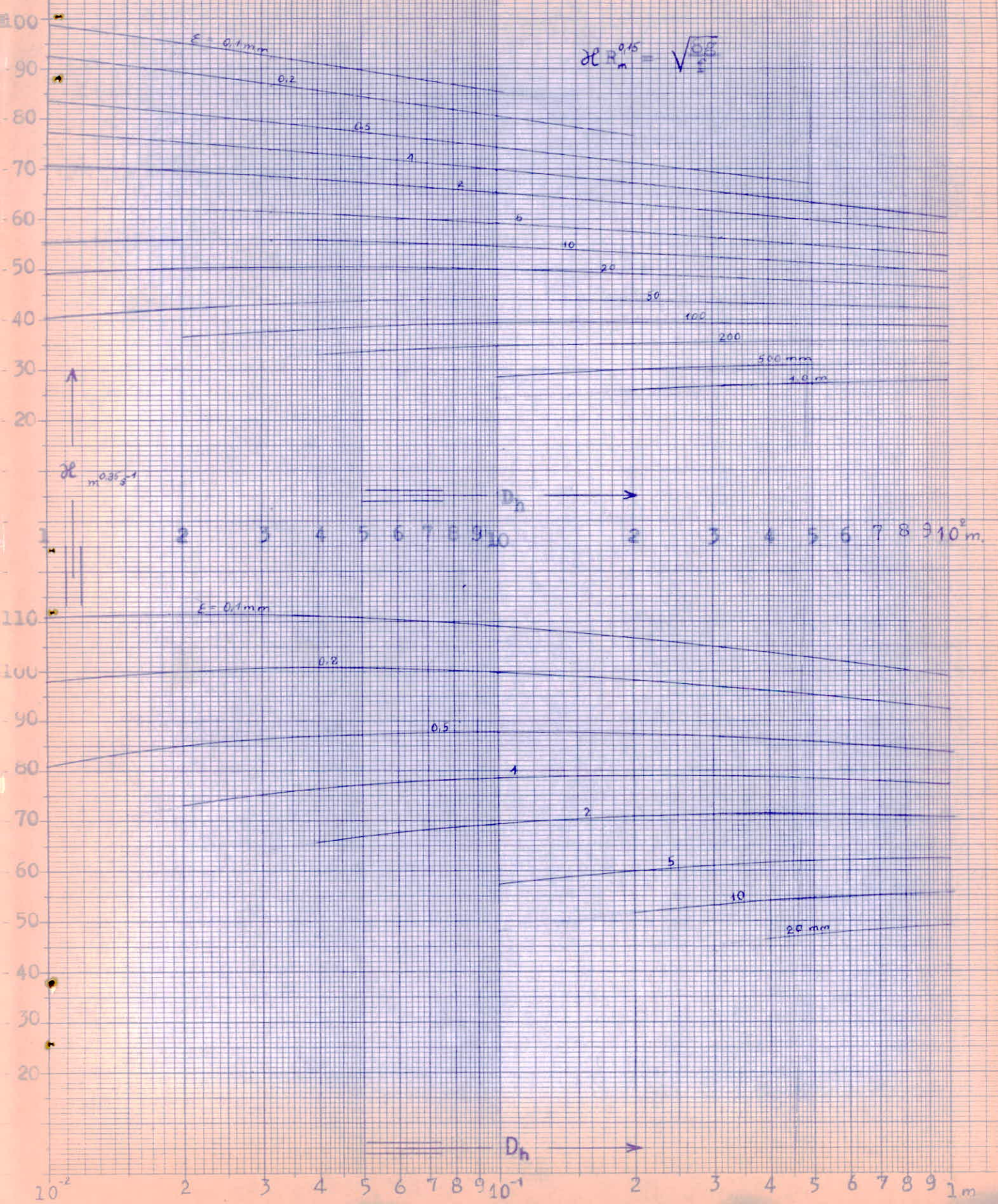


Fig. 4.

THEORIE DE LA LONGUEUR FLUIDODYNAMIQUE

Diagramme du coefficient λ

$$\lambda R_m^{0.15} = \sqrt{\frac{64}{f}}$$



détermination de la longueur fluïdynamique
 en fonction de Q/\sqrt{V} et de ξ de NIKURADSE

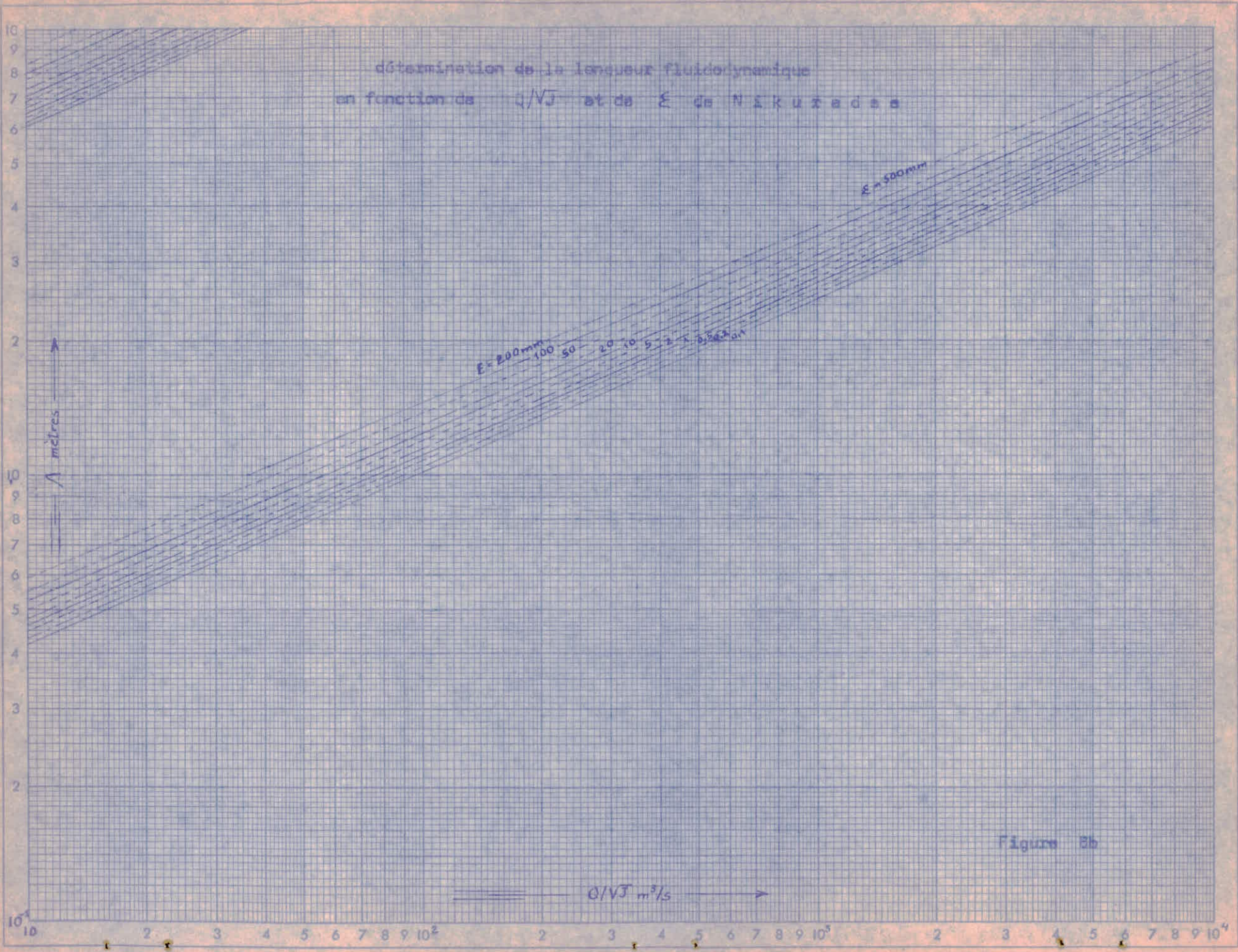
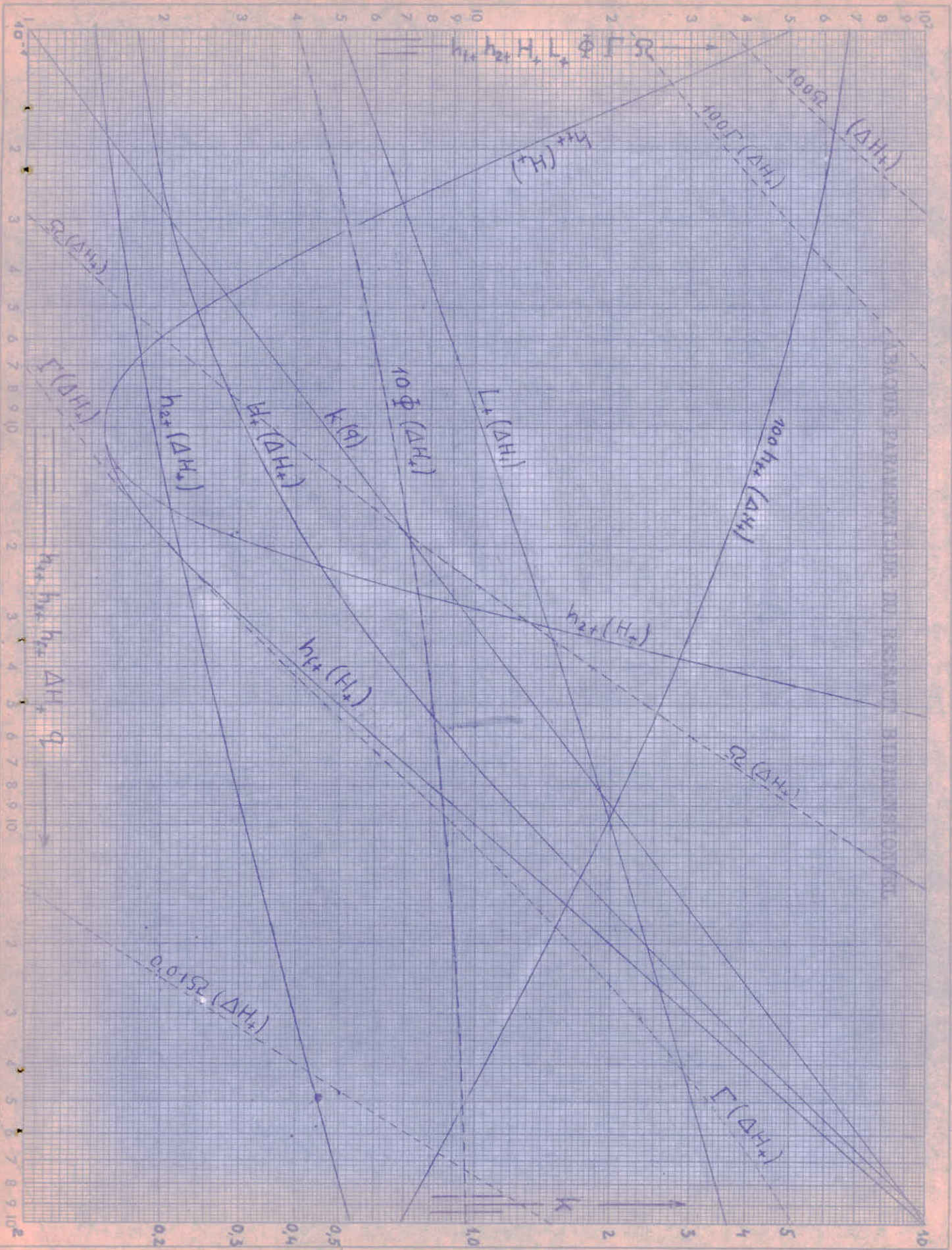


Figure Eb



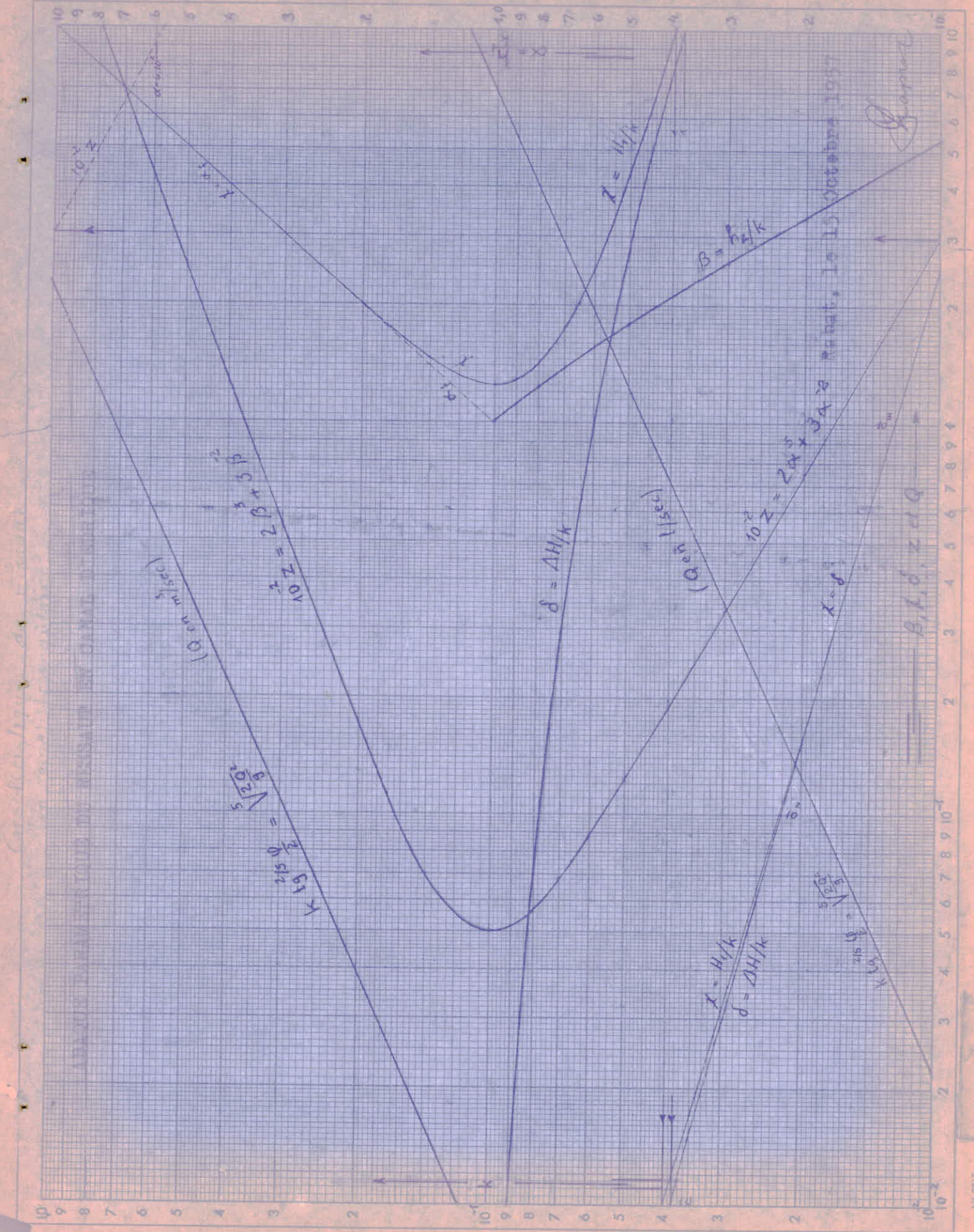
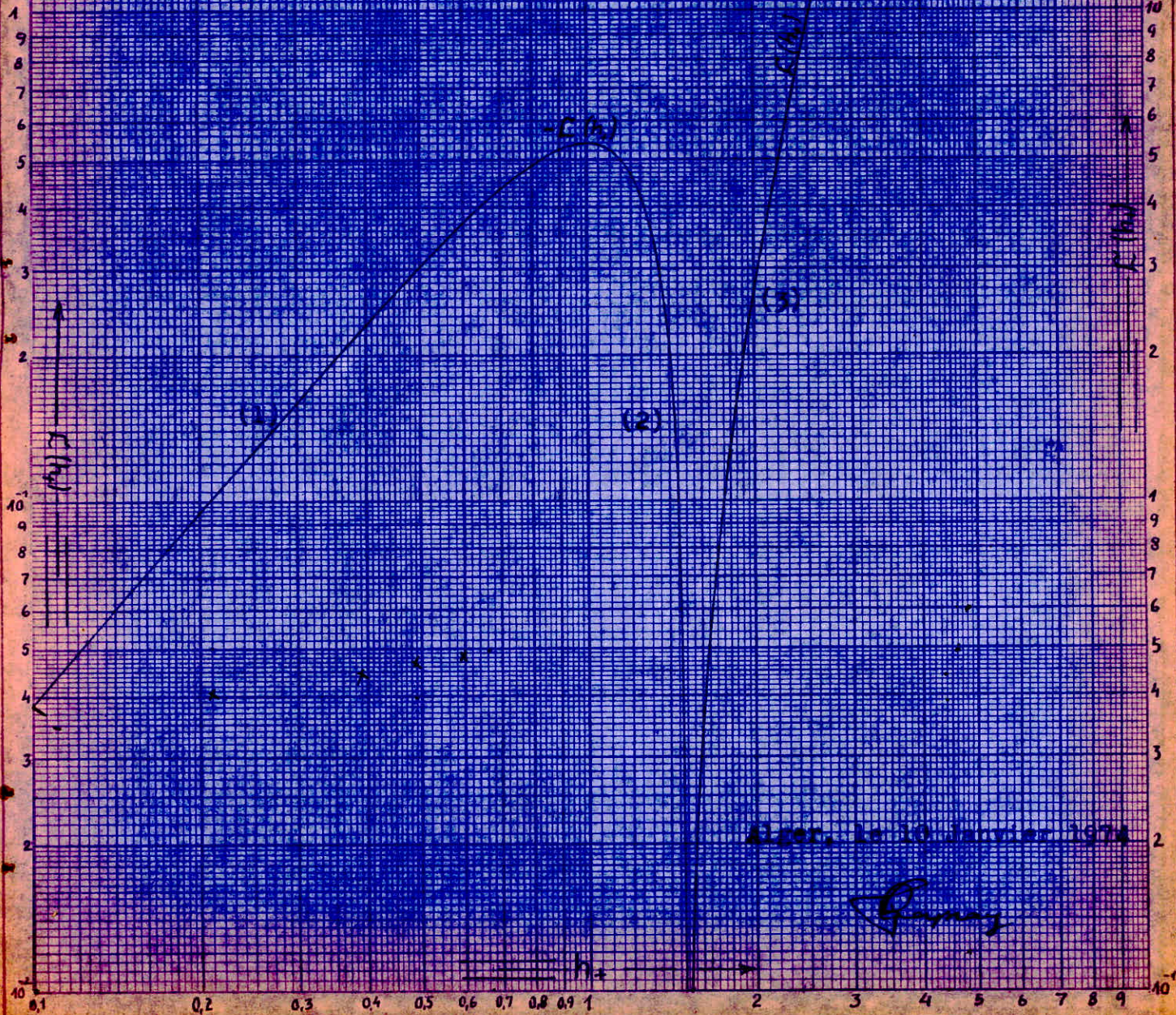


DIAGRAMME ADIMENSIONNEL DES REMOUS

sur fond horizontal

Fonction $C(h)$



Alger, le 10 Janvier 1974

G. G. G.

14 3013

INSTALLATION

JUSTIFICATION DE L'INSTALLATION

L'étude des écoulements permanents uniformes nécessite la confection d'un canal de très grande longueur où le régime devenant fluvial assure l'uniformité. Ceci aurait été coûteux et hors des possibilités de notre laboratoire où nous ne disposons que d'ouvrages courts (≈ 4 m). A cet effet nous fûmes amenés à étudier les écoulements graduellement non uniformes, en régime torrentiel. Ce régime est avantageux car la vitesse des particules fluides étant supérieure à la vitesse de propagation d'une onde occasionnée par un obstacle, la perturbation ne peut se manifester qu'à l'amont de ce dernier.

Mais il faut assurer la permanence du mouvement. Fort heureusement, l'alimentation se fait par le château d'eau du laboratoire, la charge étant constante, le débit reste invariable pour une même ouverture de la vanne.

Bien que la section du canal soit constante, l'existence d'une surface libre et d'un régime torrentiel rend la profondeur du liquide, l'aire de la section mouillée, le rayon moyen... légèrement variables, ce qui justifie un écoulement graduellement non uniforme.

D'autre part, les intégrales \mathcal{L} et \mathcal{E} où L, h, J_0 correspondent respectivement à la distance, la profondeur et la pente géométrique du canal, sont de la forme :

$$I = \int \frac{x^m - x^n}{ax^m - 1} dx$$

Chaque solution de cette intégrale est établie pour une valeur de a constante, ainsi pour une pente fixée, on connaît le genre de famille de courbes.

Il est donc nécessaire que le dispositif expérimental soit conçu de telle sorte que la pente du canal soit variable à volonté.

INSTALLATION:

L'installation qui nous a permis de faire cette étude comprend principalement:

- Un manomètre différentiel avec débit-mètre à segment.
- Une vanne à alimentation alternative.
- Deux bassins d'alimentation.
- Deux canaux respectivement rectangulaire et diédrique.

L'ALIMENTATION:

Ayant constaté que l'eau de ville avait un débit insuffisant et variable (ce qui nous fausserait tous nos calculs) nous fûmes ramenés à relier notre installation par une prise sur le château d'eau. Ainsi nous aurons toujours un débit constant à l'aval du débit-mètre (puisque la charge dans le château d'eau est constante).

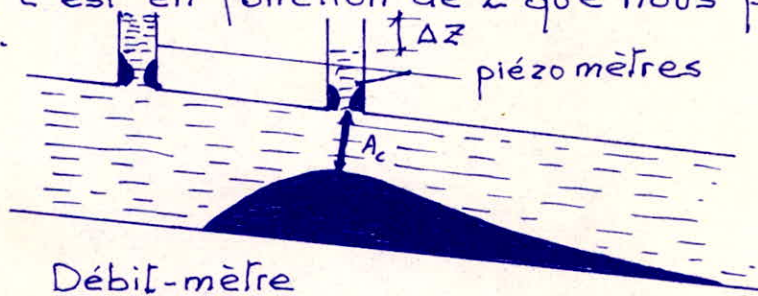
L'eau arrivant du château d'eau passe dans le débit-mètre à segment et selon la position de la vanne alternative alimente l'un des deux bassins.

MANOMETRE DIFFERENTIEL:

Il est constitué par des piézomètres à eau. On a utilisé des tubes en verre pour fabriquer ces piézomètres. Ces tubes sont rattachés, par des raccords flexibles (munis de dispositifs de purge) transparents en nylon, aux prises de pressions sur le débit-mètre. Ces prises de pressions sont constituées par un orifice beaucoup plus faible que celui du tube du manomètre. Ceci élimine les fluctuations dans le tube.

La lecture sur deux tubes déterminera la chute piézométrique. Z intervenant dans le convergent, en raison de la transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle de pression.

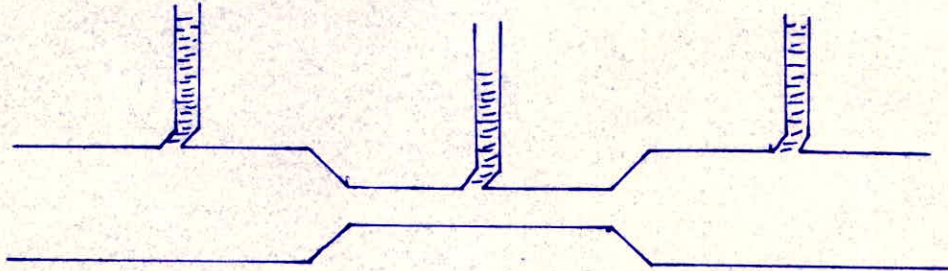
C'est en fonction de Z que nous pouvons contrôler le débit.



Rappel concernant les venturimètres :

- Phénomène de Venturi :

Soit une conduite de section A variable parcourue par un fluide et pouvant présenter une inclinaison quelconque par rapport à l'horizontale.



Si on assimile cette conduite à un filet de courant, la vitesse V est uniforme dans une section quelconque.

L'application du théorème de Bernoulli nous donne :

$$z + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2g} = C^{\text{te}}$$

avec $z = \frac{P^*}{\rho} = z + \frac{P}{\rho}$ et $V \cdot A = C^{\text{te}}$ (relation de continuité)

si $A \downarrow V \uparrow$ par suite $P^* \downarrow$ et inversement, A et P^* varient donc dans le même sens.

Si la conduite était horizontale, on remplacerait P^* par P .

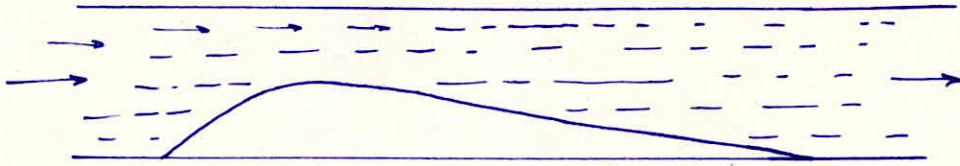
Des tubes piézométriques placés en diverses sections indiquent par conséquent des niveaux différents, niveaux d'autant plus bas que la section A est plus petite. Dans la partie la plus étroite de la conduite, il peut se produire ainsi des dépressions qui peuvent être importantes et qu'on utilise dans certains appareils (trompe à vide, ejecteur, ... etc...). On utilise également cette propriété pour réaliser des débits-mètres appelés tubes de Venturi.

Notre manomètre différentiel est relié à un débit-mètre à section rétrécie en forme de segment.

PRINCIPE DE CE DEBIT-METRE

Dans l'hydraulique des conduites en charge, on mesure souvent le débit en produisant une variation de vitesse au moyen d'un rétrécissement du tuyau. Si l'on mesure le terme $V^2/2g$ avant et dans le rétrécissement, on a la différence $(V_2^2 - V_1^2)/2g$ d'où nous déduisons le débit Q .

le rétrécissement de la veine liquide peut être provoqué par un diaphragme à bord tranchant, par une tuyère à bord arrondi ou par un tube de forme particulière inventé par M. G. LAPRAY.



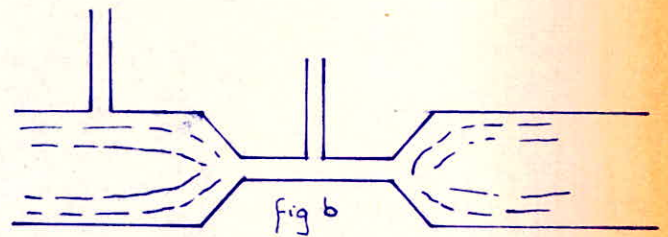
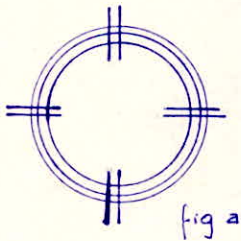
Ce tube n'a rien de commun avec un tube de Venturi, si ce n'est qu'il est basé sur un rétrécissement graduel de la section suivi d'un élargissement également graduel, et qu'il sert aussi à la mesure du débit.

le débit-mètre sera dans une position légèrement ^{incliné} pour éliminer la formation des poches d'air.

En principe, le débit-mètre à section rétrécie consiste à un fort rétrécissement du tube suivi d'un élargissement graduel jusqu'à la paroi du tube.

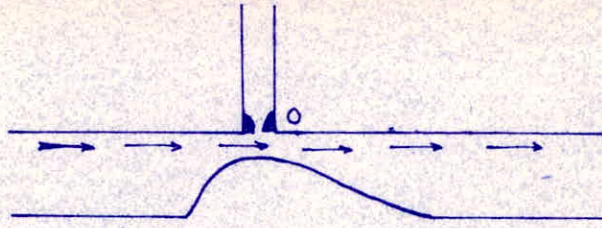
Inconvénients des venturimètres courants:

Afin d'éliminer les erreurs dues à l'inégalité des vitesses et des pressions (figure (a)) qui pourraient se produire dans la section rétrécie, on est obligé de prendre des prises de pression tout autour de cette section (fig. b).



Donc, la hauteur piézométrique qu'on aura sera la moyenne arithmétique des différentes prises de pression.

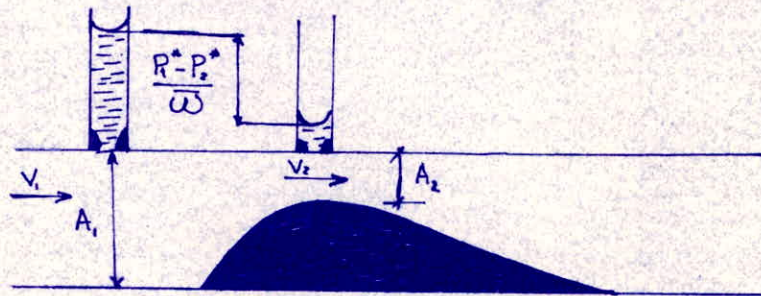
Mais dans le cas des débits-mètres à section rétrécie en forme de segment, les filets de courant passant à proximité de la prise de pression ne sont pas déviés de leur direction primitive et restent rectilignes: ce qui exclut la formation des tourbillons pouvant affecter la valeur de la pression indiquée par le manomètre branché en O sur le tube (fig. c.).



Ce qui nous amène à ne prendre qu'une seule prise de pression dans la section rétrécie dans la partie où les filets de courant sont rectilignes et non perturbés.

Calcul théorique du débit passant dans un débit-mètre à section rétrécie en forme de segment :

C'est une tuyauterie convergente divergente qu'on intercale dans une section A dont on veut déterminer le débit.



Entre l'amont et le col de section A_2 nous avons :

$$\frac{P_1^*}{\omega} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2^*}{\omega} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{avec } A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$\text{d'où } \frac{P_1^* - P_2^*}{\omega} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \left[1 - \frac{V_1^2}{V_2^2} \right] = \frac{V_2^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] = \Delta Z$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{P_1^* - P_2^*}{\omega}}$$

et le débit de la conduite est donné par :

$$Q = A_2 V_2 = \frac{A_2 \cdot \sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}} \cdot \sqrt{\frac{P_1^* - P_2^*}{\omega}} = C \sqrt{\Delta Z}$$

$$\text{avec } C = \frac{A_2 \cdot \sqrt{2g}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}}$$

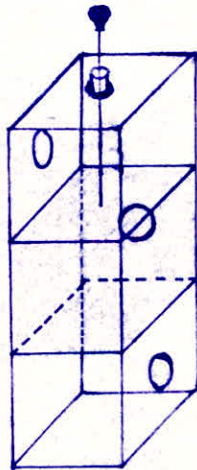
Etalonnage du débit-mètre :

Pour cela on a utilisé un bassin a section rectangulaire constante, le limnimètre électrique nous donne la différence de niveau au bout d'un certain temps. Le débit est déduit par le rapport du volume sur le temps chronométré.
Pour un débit donné correspond une dépression donnée dans le manomètre différentiel.

LA VANNE A ALIMENTATION ALTERNATIVE :

Elle est constituée d'un parallélépipède creux en plexiglas dont trois faces latérales comportent chacune un trou.

Dans ce parallélépipède coulisse suivant la verticale un cube, l'arête de ce dernier est égale au tiers de l'arête latérale intérieure du parallélépipède de telle sorte que si on fait monter ou descendre le cube au moyen d'une tige, celui-ci obstrue l'alimentation d'un des deux bassins. La position médiane ferme complètement le dispositif d'alimentation.



BASSINS D'ALIMENTATION et CANAUX :

Les bassins d'alimentation ont été complètement réalisés en plexiglas. Chaque bassin est compartimenté en deux, le jet arrivant de la vanne est dévié par la paroi verticale de séparation; l'eau rejoint le second compartiment par le fond à travers un tranquillisateur. Le bassin pivote autour d'un axe vertical.

Sur la face opposée à celle de l'alimentation s'encastré un canal, une vanne de fond coulisse le long de cette face et permet le réglage du débit sortant.

L'autre extrémité du canal repose sur un appui variable dans le sens vertical. Ainsi cet appui nous permet de changer la pente. (voir schéma).

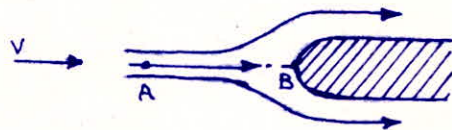
Notre étude étant basée sur la détermination de la rugosité à partir des courbes de remous, nous avons donc réalisé des plaques de contreplaqué maritime en y collant des grains de sable soigneusement triés par tamisage; le diamètre des grains nous fournit ainsi une mesure de la rugosité. (cf. "Recherches expérimentales de Nikuradse sur l'écoulement en conduites rugueuses").

Il faut noter que toutes les irrégularités de surface étant approximativement identiques en formes et en dimension: c'est ce qu'on appelle une rugosité homogène.

Appareil de mesures:

Toutes nos mesures ont été faites à l'aide d'un tube de Pitot.

Principe du tube de Pitot: considérant un filet liquide pris dans un courant de vitesse uniforme V venant buter contre un obstacle B.



Appliquons le théorème de Bernoulli entre un point A à l'amont où la vitesse est V et la pression p_A et le point d'arrêt B où la vitesse est nulle et la pression p_B , les points A et B étant supposés sur le même plan horizontal; on obtient:

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_B}{\rho}$$

d'où la différence: $\frac{p_B - p_A}{\rho} = \frac{V^2}{2g}$

La pression en A soit p_A est la pression statique.

La pression en B soit p_B est la pression totale.

La différence $p_B - p_A$ est appelée pression dynamique.

De cette différence on pourra déduire la vitesse V .

Description de l'appareil:

L'appareil est simplement constitué d'un tube en verre B coudé à l'une des extrémités qui est immergée au point où l'on cherche la vitesse et orienté vers l'amont.

La distance verticale entre le niveau dans le tube B et le niveau de la surface libre mesure la pression dynamique $\frac{v^2}{2g}$.

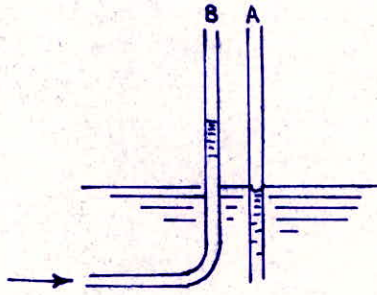


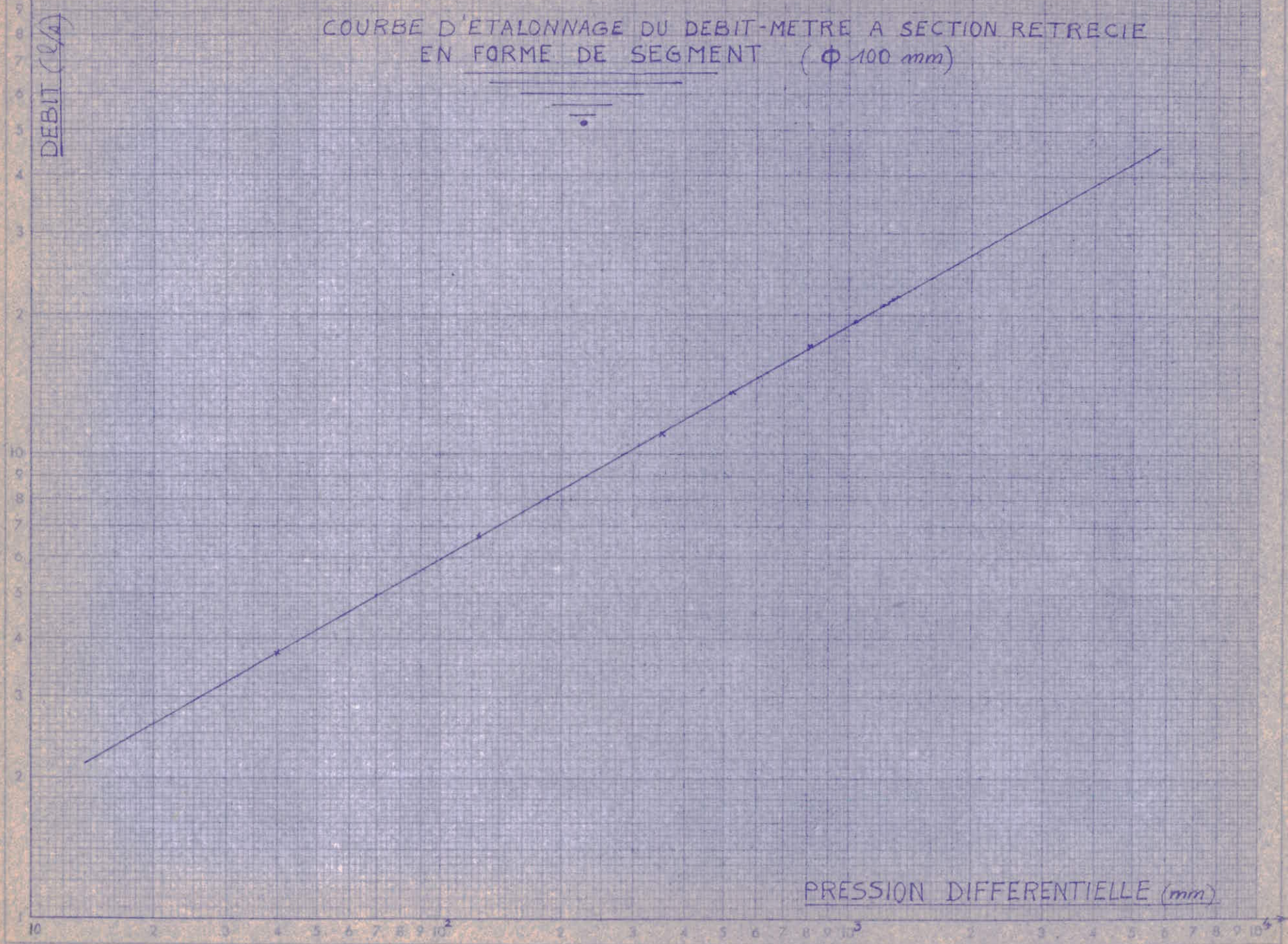
schéma de l'appareil de Pitot

TABLEAU D'ETALONAGE DU DEBIT-METRE
 A SECTION RETRECIE EN FORME DE SEGMENT
 ($\phi 100$ mm)

Lectures manométriques		Pression différentielle ΔZ_{12} (mm)	Débit en (l/s)
Z_1 (mm)	Z_2 (mm)		
1900	606	1294	22,95
1896	610	1286	21,40
1876	625	1251	21,30
1870	622	1248	21,15
1740	705	1035	19,22
1630	815	815	17,13
1490	964	526	13,52
1407	1052	355	11,08
1300	1175	125	6,70
1275	1235	40	3,70
1207	1194	13	1,39

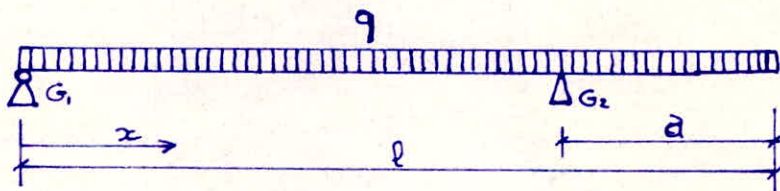
COURBE D'ETALONNAGE DU DEBIT-METRE A SECTION RETRECIE
EN FORME DE SEGMENT ($\phi 100 \text{ mm}$)

DEBIT (l/s)



CALCUL DE LA STABILITE DU CANAL ET DE LA FLECHE

Il s'agit de savoir à quelle distance il faut mettre l'appui pour assurer la stabilité du canal chargé uniformément par un écoulement permanent. Le canal se ramène à une poutre sur appuis simples en porte-à-faux de longueur l et de charge q/ml .



Il faut donc déterminer la position de l'appui G_2 pour que la contrainte normale maximale d'utilisation du matériau soit la plus faible.

Supposons la position de l'appui G_2 connue et caractérisée par a ; les éléments de réduction des forces de gauche sont les suivants :

$$M_{G_1}^e: R_2(l-a) - \frac{q l^2}{2} = 0$$

$$\Sigma \text{ Forces} = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 - ql = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} R_2 = \frac{q l^2}{2} \cdot \frac{1}{l-a} \\ \text{et } R_1 = ql \left[1 - \frac{l}{2(l-a)} \right] \end{array}$$

$$0 \leq x \leq l-a \quad M(x) = -\frac{q x^2}{2} + R_1 x$$

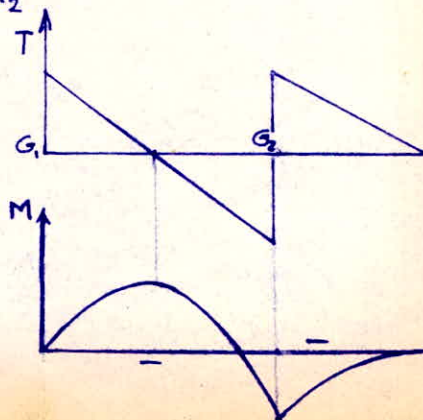
$$T = R_1 - qx$$

$$l-a \leq x \leq l \quad M(x)_{\text{gauche}} = -M(x)_{\text{droite}} = -\frac{q x^2}{2} + R_1 x + R_2 [x - (l-a)]$$

$$T = -qx + R_1 + R_2$$

diagramme des tranchants :
efforts.

diagramme des moments :



les moments maximaux sont obtenus sur appui (G_2):

$$M_{\max}^r = +q \frac{a^2}{2}$$

et en travée (G_1, G_2):

$$M_{\max}^r = -q \frac{l^4}{8} \frac{1}{(l-a)^2} - \frac{q l^2 a}{2(l-a)}$$

la solution est obtenue par l'égalité de la valeur absolue des deux moments extrêmes, soit:

$$-q \frac{l^4}{8} \frac{1}{(l-a)^2} - \frac{q l^2 a}{2(l-a)} = q \frac{a^2}{2}$$

d'où la relation suivante:

$$a^4 - 2a^3 l + a l^3 - \frac{l^4}{4} = 0$$

Les racines de cette équation sont:

$$a_1 = -0,707 l$$

$$a_2 = 0,293 l$$

$$a_3 = 0,707 l$$

$$a_4 = 1,707 l$$

seule a_2 a un sens et satisfait au problème.

Donc l'appui G_2 doit être situé à $0,293 l$ de l'extrémité en porte-à-faux du canal.

Détermination du module d'Young du plexiglas:

Lors des essais, on suppose que le canal est rectiligne alors qu'en réalité ce dernier se déforme sous le poids de l'eau.

Il est donc nécessaire d'évaluer la flèche. La connaissance de celle-ci nécessite la détermination du module d'Young.

On a fait l'essai à la traction sur plusieurs éprouvettes, on n'en représentera que deux échantillons:

éprouvettes	l (cm)	Δl (cm)	ϵ	A (cm ²)	σ (daN/cm ²)	E (daN/cm ²)
1	16	0,25	0,0156	0,875	354	22700
2	15,9	0,325	0,0204	0,88	426	20800
Valeur moyenne de E						21750

En réalité cette valeur de E a été établie avec plusieurs épreuves, elle représente la moyenne arithmétique. Les valeurs extrêmes de E sont (17500 et 27000) daN/cm². Cet écart vient du fait que E dépend de plusieurs facteurs, notamment de la température.

Equation de la ligne élastique:

$$y = \frac{q}{24EI} (l^3x - lx^3 + x^4) - \frac{qa^2 \cdot lx}{12EI} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

Nous calculons la flèche dans la section où le moment est maximum.

on a : $a = 0,293l$

tout calcul fait, on trouve :

$$f = \frac{0,258 ql^4}{24 EI}$$

canal diédrique: $l = 3,75 \text{ m}$
 $E = 22 \cdot 10^7 \text{ kg/m}^2$
 $I = 1300 \text{ cm}^4$

en substituant ces valeurs dans la formule précédente on trouve :

$$f = 7 \cdot 10^{-4} q$$

avec $q = q_1 + q_2$

$q_1 =$ charge par ml du poids propre $= 3,75 \text{ kg/ml}$

$q_2 =$ surcharge due à l'eau, dépend de la profondeur

$q_2 = 10^3 h^2$

d'où $f = 26 \cdot 10^{-4} + 0,7 h^2$

Pour $h = 0,15 \text{ m}$ (cas le plus défavorable) on a : $f = 1,58 \text{ cm}$

canal rectangulaire: $l = 3,80 \text{ m}$
 $E = 22 \cdot 10^7 \text{ kg/m}^2$
 $I = 1056 \text{ cm}^4$

tout calcul fait on a :

$$f = 9 \cdot 10^{-4} q$$

avec $q = q_1 + q_2$

$$q_1 = 7,41 \text{ kg/ml}$$

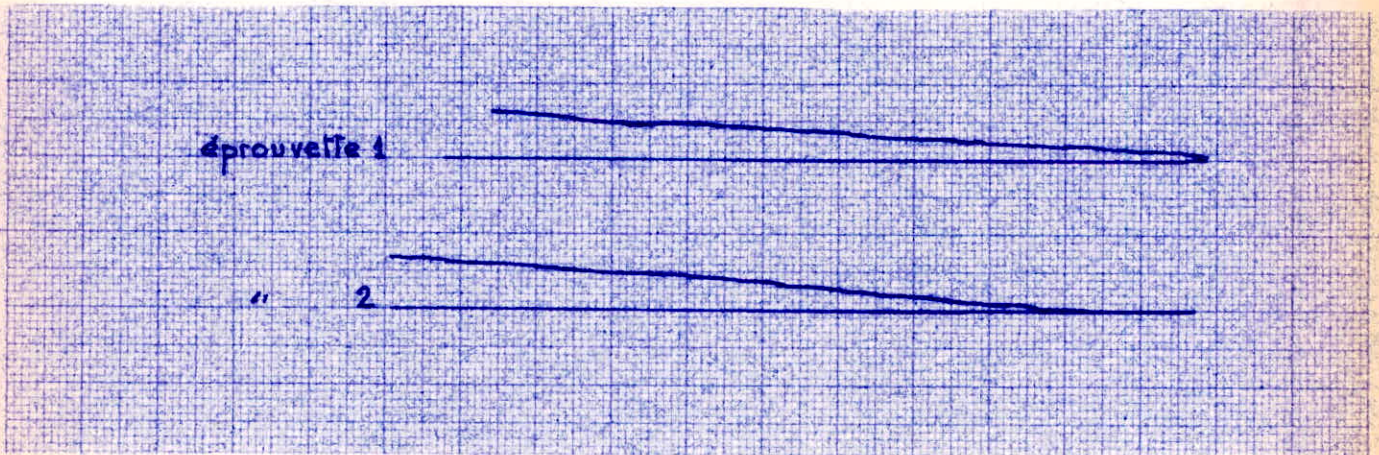
$$q_2 = 250 \text{ h}$$

d'où $f = 67 \cdot 10^{-4} + 0,225 \text{ h}$

Pour $h = 15 \text{ cm}$ (h maximum) on a : $f = 3,37 \text{ cm}$

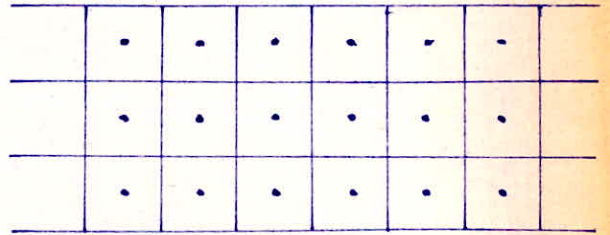
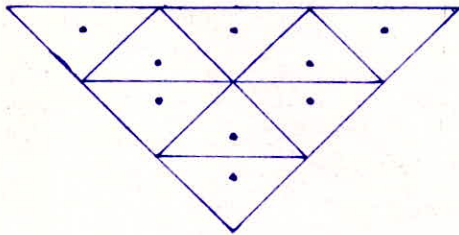
Ces valeurs de la flèche ne sont atteintes que dans le cas du ressaut. Or les essais ne nécessitent, qu'une hauteur d'eau de 10 cm pour le canal diédrique et 4 cm pour le canal rectangulaire.

Ci-joint deux caractéristiques du plexiglas lors de l'essai à la traction.



EXPLORATION
DES CHAMPS DES VITESSES

Détermination de la profondeur d'un courant torrentiel bidimensionnel ou passant par un canal diédrique par exploration du champ des vitesses.



Dans les deux cas le phénomène reste dynamiquement semblable à lui-même quelle que soit la position de la surface libre, d'où le rapport entre la charge moyenne et la charge maximale reste inchangé

On détermine pour quelques cas ce rapport:

$$m = \frac{H}{H_{\max}}$$

on constate que sa valeur reste constante et on précise la position du filet de courant correspondant à H_{\max} .

Ainsi il n'est plus nécessaire de procéder chaque fois à l'exploration du champ des vitesses, il suffit de mesurer H_{\max} et on en déduit H par:

$$H = m H_{\max}$$

$$\text{avec } H_+ = \frac{H}{K}$$

on lit dans l'abaque de la fig. 18 la valeur du paramètre dimensionnel h_+ de la profondeur et on a:

$$h = h_+ K$$

$$A = A_+ K^2$$

la vitesse débitaire: $V = \frac{Q}{A}$

et le facteur de correction de l'énergie cinétique:

$$\alpha = \frac{2g(H-h)}{V^2}$$

Détermination de m et de α :

$$m = \frac{H}{H_{\max}}, \quad \alpha = \frac{3g(H-h)}{v^2}$$

- Cas de l'écoulement bidimensionnel:
on trouve:

$$m = 0,93 \quad \text{et} \quad \alpha = 1,04$$

$$\text{avec } Q = 22 \text{ l/s} \quad \text{et} \quad v = 2,64 \text{ m/s}$$

- Cas de l'écoulement en canal diédrique
on trouve:

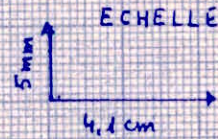
$$m = 0,945 \quad \text{et} \quad \alpha = 1,06$$

$$\text{avec } Q = 18,5 \text{ l/s} \quad \text{et} \quad v = 2,73 \text{ m/s}$$

REPARTITION DES CHARGES ET DES

VITESSES DANS UNE SECTION
QUELCONQUE (ÉCOULEMENT BIDIMENSIONNEL)

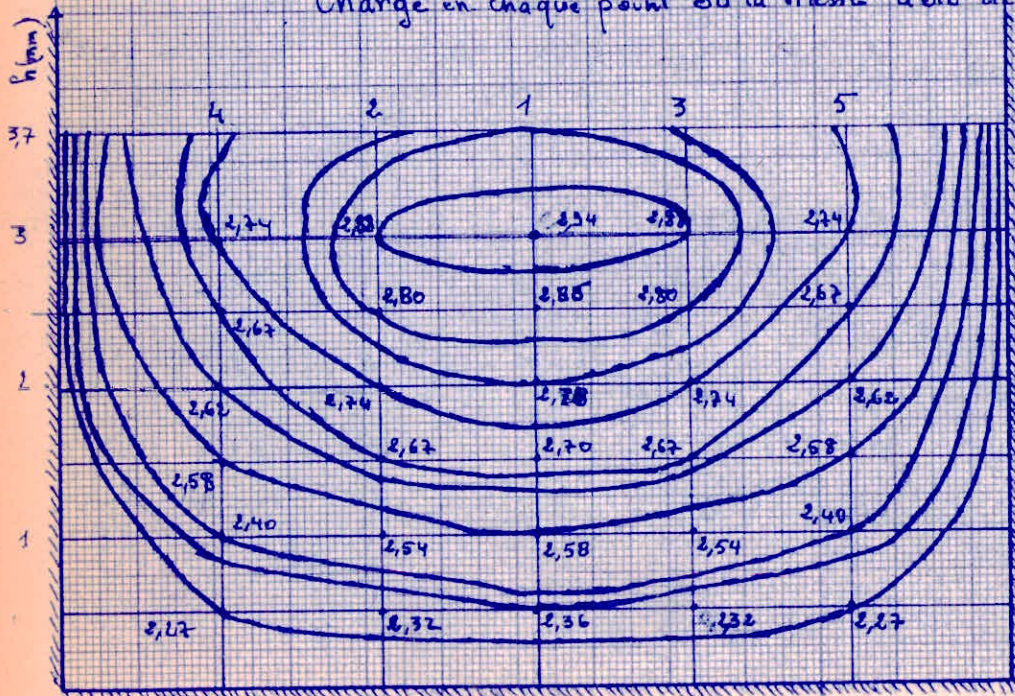
$Q = 22 \ell/s$



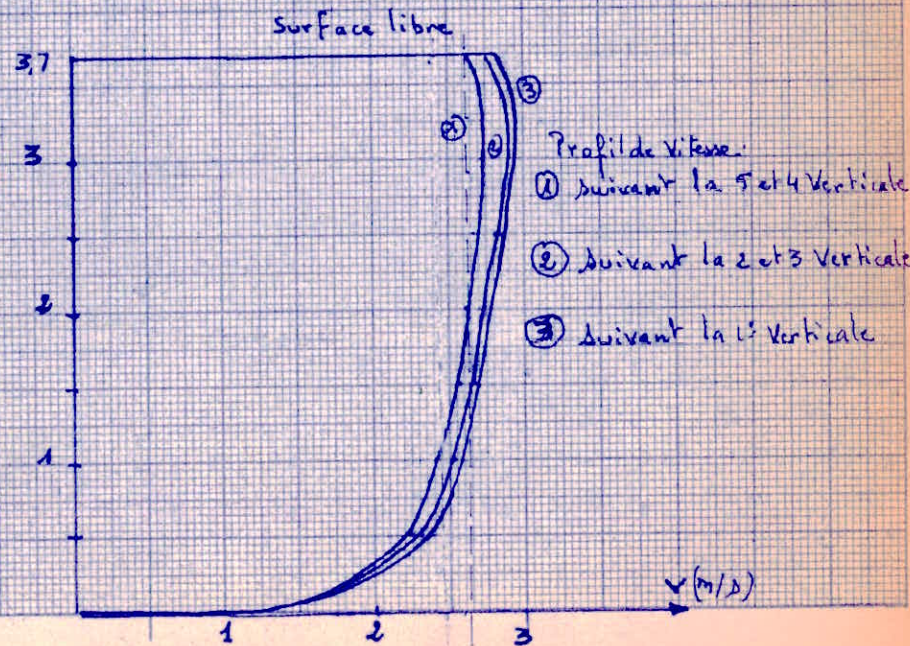
Vitesse débitaire : 2,64 m/s

0,383	0,427	0,440	0,427	0,383
0,363	0,403	0,418	0,403	0,363
0,348	0,383	0,393	0,383	0,348
0,338	0,363	0,373	0,363	0,338
0,323	0,328	0,338	0,328	0,323
0,263	0,275	0,285	0,275	0,263

Charge en chaque point où la vitesse a été déterminée (H est exprimé en m)



Courbe d'isovitesse (vitesse en m/s)

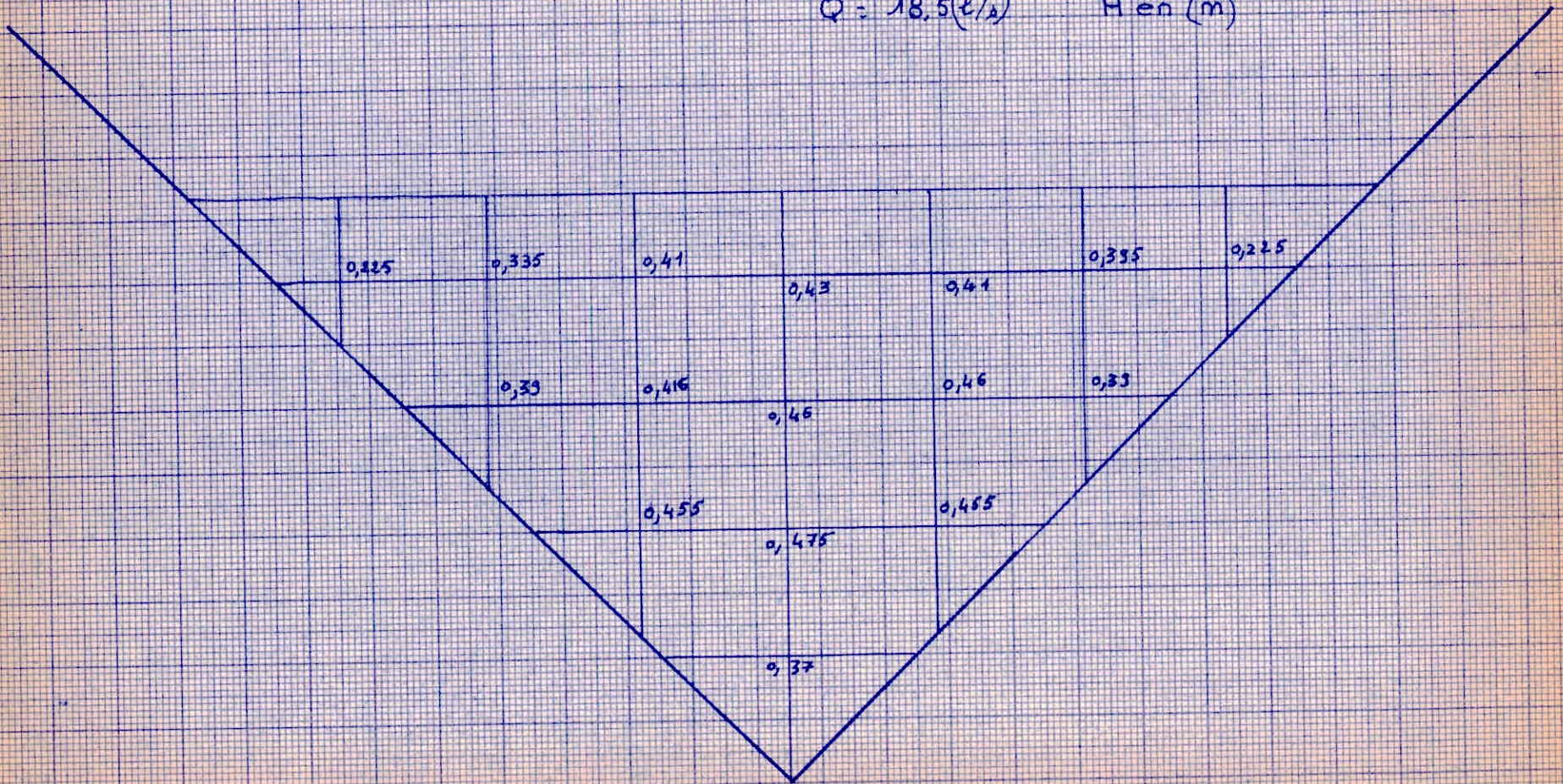


- Profil de vitesse:
- ① suivant la 1 et 4 verticale
 - ② suivant la 2 et 3 verticale
 - ③ suivant la 5 verticale

ÉCOULEMENT EN CANAL DIEDRIQUE

REPARTITION DES CHARGES DANS UNE SECTION QUELCONQUE

$$Q = 18.5 (\text{m}^3/\text{s}) \quad H \text{ en (m)}$$



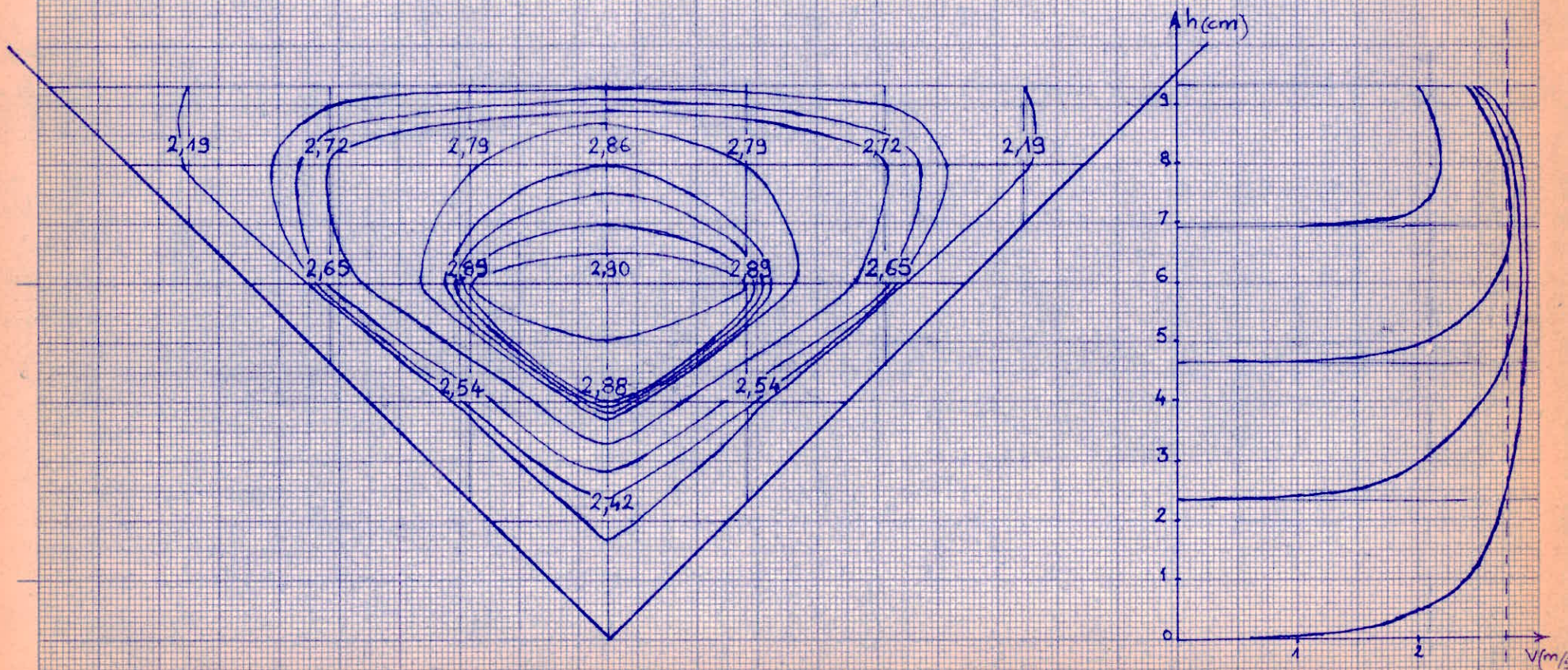
ÉCOULEMENT EN CANAL DIÉDRIQUE (parois lisses)

REPARTITION DES VITESSES DANS UNE SECTION QUELCONQUE

$Q = 18,5 \text{ (l/s)}$

vitesse en (m)

VITESSE DÉBITAIRE
(2,74 m/s)

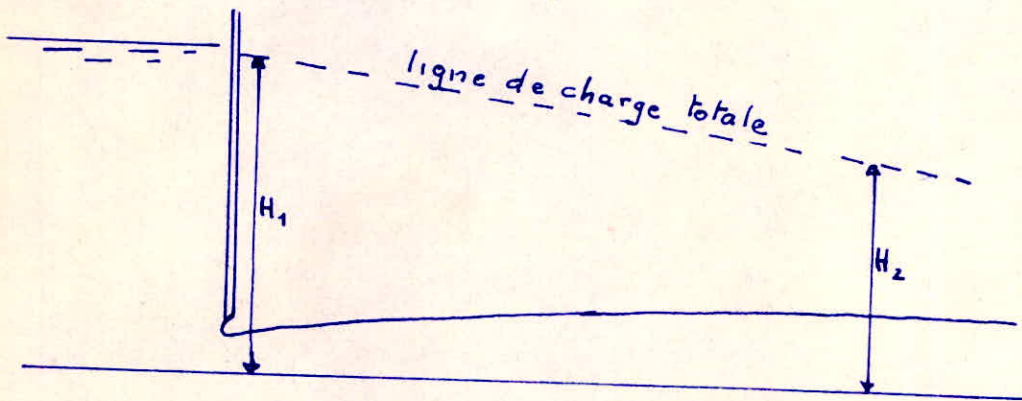


DETERMINATION DE LA RUGOSITE
A PARTIR DES COURBES DU REMOUS.

DETERMINATION DE LA RUGOSITE (ϵ) PAR LA MESURE DES COORDONNÉES DU REMOUS

Cas de l'écoulement bidimensionnel:

En vue de simplifier le problème, on fait les essais et mesures dans un canal à fond horizontal large, dans lequel on provoque un écoulement torrentiel, en faisant passer un débit unitaire q , contrôlé à l'amont (débit-mètre à segment), sous une vanne de fond (voir fig. ci-dessous).



Avec q on tire en application de (26) la valeur de K de la longueur fluidodynamique, correspondant au régime critique. Dans les sections 1. et 2., judicieusement choisies, on mesure à l'aide d'un tube de Pitot les valeurs H_1 et H_2 de la charge totale et en divisant par K , on obtient les paramètres dimensionnels.

$$H_{1+} = \frac{H_1}{K}$$

et

$$H_{2+} = \frac{H_2}{K}$$

Ensuite, on lit sur la courbe h_{t+} de la figure 18. les valeurs y correspondant h_{1+} et h_{2+} des paramètres dimensionnels de la profondeur. Puis on lit sur la courbe H_3 de la figure 19 les valeurs y correspondant, L_{1+} et L_{2+} de la fonction adimensionnelle de la distance. Avec ces dernières et en application de (23).

$$L_1^2 = \nu K (L_2 - L_1)$$

d'où

$$\nu = \frac{L_1^2}{K(L_2 - L_1)}$$

Avec la valeur \mathcal{N} du nombre adimensionnel on tire en application de () :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mathcal{N}g}{K^{0,3}}}$$

avec α et la valeur moyenne du diamètre hydraulique :

$$D_h = 4K \frac{h_{1+} + h_{2+}}{2}$$

on lit dans l'abaque de la figure 7. la valeur γ correspondante de la rugosité ϵ .

Une vérification ultérieure du nombre de Reynolds et de la rugosité relative est nécessaire pour justifier le caractère turbulent rugueux de l'écoulement, condition sine qua non de l'applicabilité du procédé.

Donnons un exemple de calcul correspondant à la 1^{ère} ligne du tableau des valeurs pour l'écoulement bidimensionnel à fond rugueux.

Le débit unitaire est $q = 46 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$

L'écoulement passe en régime torrentiel sur un plan horizontal.

Dans la section 1, après la sortie de la vanne, la charge totale est $H_1 = 0,918 \text{ m}$, dans une autre section 2. située à $3,10 \text{ m}$ à l'aval de la première, la charge totale est $H_2 = 0,15 \text{ m}$.

Il faut déterminer la rugosité du fond, pour cela on calcule :

- la profondeur critique :

$$K = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{46 \cdot 10^{-3}}{9,8}} = 0,060 \text{ m}$$

$$H_{1+} = \frac{H_1}{K} = \frac{0,918}{0,06} = 15,30 \Rightarrow h_{1+} = 0,180 \Rightarrow L_{1+} = 0,083$$

$$H_{2+} = \frac{H_2}{K} = \frac{0,15}{0,060} = 2,50 \Rightarrow h_{2+} = 0,500 \Rightarrow L_{2+} = 0,300$$

$$\mathcal{N} = \frac{L_1^2}{K(L_{2+} - L_{1+})} = \frac{(3,10)^2}{0,060 \times 0,217} = 238$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mathcal{N}g}{K^{0,3}}} = \sqrt{238 \times 9,8 \times 2,33} = 74$$

La valeur moyenne du diamètre hydraulique :

$$D_h = 4K \frac{h_{1+} + h_{2+}}{2} = 4 \frac{0,180 + 0,500}{2} 0,060 = 0,080 \text{ m}$$

En fonction de D_h et de α on repère dans l'abaque de la figure 7. la valeur de la rugosité :

$$\epsilon = 1,4 \text{ mm}$$

Le nombre de Reynolds :

$$R = \frac{4Q}{\nu} = \frac{4 \cdot 46 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} = 1,84 \cdot 10^5$$

la rugosité relative :

$$\epsilon/D_h = \frac{1,4}{80} = 0,0175$$

déterminent dans le diagramme de Moody un régime d'écoulement turbulent rugueux ce qui signifie que la méthode ci-dessus employée est bonne.

Cas de l'écoulement en canal diédrique :

Là également, le problème est simplifié en faisant les essais dans un canal diédrique à fond horizontal, dans lequel on provoque un écoulement torrentiel en faisant passer un débit Q , contrôlé à l'amont, sous une vanne de fond.

Avec Q on tire en application de (27) la valeur de K . Dans les sections 1. et 2. on mesure les valeurs de H_1 et H_2 et en divisant par K on obtient :

$$H_{1+} = \frac{H_1}{K} \quad \text{et} \quad H_{2+} = \frac{H_2}{K}$$

Ensuite on lit, sur la courbe h_{t+} de l'abaque paramétrique du resaut en canal diédrique, les valeurs y correspondant h_{1+} et h_{2+} . Puis on lit sur la courbe H_3 (fig.) les valeurs de ξ_{1+} et ξ_{2+} (ou à défaut de courbe on calcule ξ_{1+} et ξ_{2+}). Avec ces dernières et en application de () :

$$\frac{L}{\lambda} = \sqrt{K} (\xi_2 - \xi_1)$$

d'où

$$NRC = \frac{L_1^2}{K(\xi_2 - \xi_1)}$$

Avec la valeur du nombre adimensionnel, on tire en application de

$$\alpha = \sqrt{\frac{NRC \cdot 18,94}{K^{0,3}}}$$

la valeur moyenne du diamètre hydraulique est:

$$D_h = 4R_h = \frac{A}{P} = \frac{4h^2}{\frac{4h}{\sqrt{2}}} = h\sqrt{2} \Rightarrow R_h = \frac{h\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{d'où } D_h = 4K \times \frac{1}{2} \left(\frac{h_1\sqrt{2}}{4} + \frac{h_2\sqrt{2}}{4} \right) =$$

$$D_h = K \frac{\sqrt{2}}{2} (h_{1+} + h_{2+})$$

L'abaque de la figure (7) nous donne la valeur de α cherché.

La même vérification que dans le cas des écoulements bidimensionnels s'impose.

On donne l'exemple de calcul correspondant à la 1^{ère} ligne du tableau des Valeurs pour le canal diédrique à parois rugueuses.

mesures:

$$Q = 10,7 \text{ l/s}$$

$$H_1 = 0,780 \text{ m}$$

$$H_2 = 0,097 \text{ m}$$

$$L = 2,67 \text{ m}$$

Pour déterminer la rugosité, on calcule:
- la profondeur critique:

$$K = \sqrt[5]{\frac{2Q^2}{I^2 g}} = \sqrt[5]{\frac{(10,7)^2 \cdot 10^{-6} \cdot 2}{9,8 \cdot 1}} = 0,12 \text{ m}$$

$$H_{1+} = \frac{H_1}{K} = \frac{0,780}{0,12} = 6,5 \Rightarrow h_{1+} = 0,45 \Rightarrow \xi_{1+} = 0,261$$

$$H_{2+} = \frac{H_2}{K} = \frac{0,097}{0,12} = 0,81 \Rightarrow h_{2+} = 0,238 \Rightarrow \xi_{2+} = 0,411$$

$$NRC = \frac{L_1^2}{K(\xi_{2+} - \xi_{1+})} = \frac{2,67}{0,12(0,150)} = 152,82$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\gamma \cdot 18,94}{K^{0,3}}} = \sqrt{\frac{152,82 \cdot 18,94}{0,53}} = 73,9$$

$$D_h = K \frac{\sqrt{2}}{2} (h_1 + h_2) = 0,12 \cdot 0,707 (0,450 + 0,238) = 0,082 \text{ m}$$

L'abaque de la figure 7 nous donne la valeur de ϵ .

$$\epsilon = 1,4 \text{ mm}$$

le nombre de Reynolds:

$$R = \frac{Q}{A} \frac{D_h}{\nu} = \frac{10,7 \cdot 10^{-3}}{10^4 (4,12)^2 \cdot 10^{-6}} \cdot 82 \cdot 10^{-4} = 2,68 \cdot 10^5$$

avec $A = h^2$ et $h = (h_1 + h_2)/2$

la rugosité relative:

$$\epsilon/D_h = \frac{1,4}{82} = 0,0171$$

on voit sur le diagramme de Moody qu'on est en régime turbulent rugueux, ce qui justifie la méthode.

Cette méthode est très efficace dans la mesure où le problème peut être posé différemment. On a un débit Q connu qui s'écoule dans un canal diédrique, la pente J_0 , la rugosité ϵ et la profondeur dans une section 1. connues également, on peut aisément déterminer la profondeur h_2 dans une section 2. située à une distance L à l'aval de la section 1.

DETERMINATION DE LA RUGOSITE (ϵ) A PARTIR DES COURBES DE REMOUS
 TABLEAU DES VALEURS (pour l'écoulement bidimensionnel à fond lisse)

$L = 3,70m$

h_3 (cm)	ΔZ (mm)	$10^3 Q$ (m^3/s)	K (m)	H_1 (m)	H_{1+}	h_{1+}	L_{1+}	H_2 (m)	H_{2+}	h_{2+}	L_{2+}	\sqrt{V}	α	D_H (cm)	ϵ (mm)	IR	Observation
1	230	36	0,051	0,970	19,06	0,162	0,072	0,335	6,58	0,28	0,146	982,3	153,4	4,5	0	$1,44 \cdot 10^5$	régime turbulent lisse
1,3	"	"	"	0,800	15,71	0,187	0,088	0,290	5,69	0,30	0,160	1009,0	155	4,9	0	"	
1,4	"	"	"	0,670	13,61	0,190	0,088	0,265	5,20	0,32	0,173	855	143	5,2	0	"	
1,5	"	"	"	0,615	12,08	0,204	0,095	0,250	4,91	0,33	0,180	855	143	5,4	0	"	
1,6	500	52,8	0,065	0,915	14,10	0,190	0,089	0,410	6,30	0,28	0,150	932	142	6,2	0	$2,08 \cdot 10^5$	
1,7	"	"	"	0,840	12,90	0,195	0,092	0,380	5,85	0,30	0,160	840	137	6,4	0	"	
1,8	"	"	"	0,710	10,90	0,213	0,103	0,330	5,08	0,32	0,175	792	133	7,0	0	"	
1,9	"	"	"	0,665	10,20	0,222	0,108	0,320	4,92	0,33	0,180	792	133	7,2	0	"	
2	640	60	0,071	0,953	13,35	0,195	0,092	0,460	6,44	0,28	0,150	902	140	6,8	0	$2,40 \cdot 10^5$	
2,3	"	"	"	0,775	10,85	0,215	0,105	0,390	5,46	0,31	0,167	840	135	7,5	0	"	
2,5	"	"	"	0,712	9,97	0,224	0,110	0,375	5,25	0,32	0,173	841	135	7,7	0	"	
3	"	"	"	0,530	7,42	0,340	0,187	0,285	3,99	0,37	0,210	841	135	10,0	0	"	
3	1350	88	0,091	0,860	9,45	0,230	0,114	0,480	5,27	0,32	0,175	840	135	9,9	0	$3,52 \cdot 10^5$	
3,2	"	"	"	0,790	8,68	0,240	0,120	0,440	4,84	0,34	0,190	840	135	10,5	0	"	
3,5	"	"	"	0,625	6,87	0,270	0,150	0,390	4,29	0,36	0,200	825	130	11,2	0	"	
4	"	"	"	0,542	5,96	0,295	0,155	0,330	3,63	0,39	0,220	916	136	12,3	0	"	

DETERMINATION DE LA RUGOSITE (ϵ) A PARTIR DES COURBES DE REMOUS
 TABLEAU DES VALEURS (pour l'écoulement bidimensionnel à fond rugueux)

$L = 3,10m$																	
h_s (cm)	ΔZ (mm)	$10^3 q$ (m^2/s)	K (m)	H_1 (m)	H_{1+}	h_{1+}	L_{1+}	H_2 (m)	H_{2+}	h_{2+}	L_{2+}	N	α	D_H (cm)	ϵ (mm)	R	Obse
1	378	46	0,060	0,918	15,30	0,180	0,083	0,150	2,50	0,500	0,300	238	74	8,0	1,4	$1,84 \cdot 10^5$	Régime turbulent rugueux
1,4	"	"	"	0,688	11,47	0,210	0,102	0,150	2,50	0,500	0,300	260	76	8,6	"		
1,5	"	"	"	0,598	9,97	0,222	0,110	0,150	2,50	0,500	0,300	260	76	8,6	"		
1,6	"	"	"	0,515	8,58	0,244	0,123	0,145	2,42	0,510	0,310	260,8	76	9,0	"		
1,8	700	62,8	0,074	0,818	11,08	0,212	0,103	0,278	3,77	0,385	0,220	253	74	8,8	"	$2,51 \cdot 10^5$	
1,9	"	"	"	0,805	10,91	0,213	0,104	0,263	3,57	0,400	0,230	254	74	9,0	"		
2,1	"	"	"	0,748	10,14	0,222	0,110	0,253	3,43	0,406	0,231	252	75	9,2	"		
2,15	"	"	"	0,708	9,60	0,228	0,112	0,243	3,30	0,417	0,242	255	75	9,6	"		
2,3	1009	76,1	0,084	0,825	9,86	0,225	0,111	0,333	3,98	0,371	0,210	264	75	10,0	"	$3,04 \cdot 10^5$	
2,5	"	"	"	0,745	8,90	0,238	0,117	0,313	3,74	0,384	0,220	260	76	10,4	"		
2,7	"	"	"	0,710	8,49	0,245	0,123	0,312	3,73	0,384	0,220	266	75	10,6	"		
3	"	"	"	0,610	7,29	0,261	0,135	0,306	3,66	0,392	0,222	268	75	11,0	"		
3	1250	84,8	0,090	0,723	8,03	0,251	0,126	0,346	3,84	0,379	0,217	270	75	11,4	"	$3,39 \cdot 10^5$	
3,4	"	"	"	0,630	7,00	0,270	0,140	0,328	3,64	0,392	0,222	271	75,5	12,0	"		
3,8	"	"	"	0,531	5,90	0,295	0,155	0,313	3,48	0,404	0,231	272	75	12,6	"		
4	"	"	"	0,473	5,26	0,314	0,170	0,193	3,26	0,420	0,244	273	76	13,2	"		

DETERMINATION DE LA RUGOSITE (ϵ) A PARTIR DES COURBES DE REMOUS
 TABLEAU DES VALEURS (pour le canal diédrique à parois lisses)

L = 2,67 m																	
h_s (cm)	ΔZ (mm)	Q (l/s)	K (m)	H_1 (m)	H_{1+}	h_{1+}	ϵ_{1+}	H_2 (m)	H_{2+}	h_{2+}	ϵ_{2+}	$\sqrt{\tau}$	α	D_H (cm)	ϵ (mm)	IR	Observations
7	333,5	10,7	0,120	0,795	6,625	0,450	0,265	0,570	4,750	0,490	0,295	741,67	162,8	8	0	$2,68 \cdot 10^5$	↑ régime Turbulent Risse ↓
7,2	"	"	"	0,695	5,625	0,468	0,277	0,500	4,168	0,507	0,310	674,24	155	8,3	0		
7,35	"	"	"	0,650	5,417	0,470	0,280	0,495	4,525	0,508	0,310	741,67	162,8	8,3	0		
7,6	"	"	"	0,605	5,042	0,480	0,288	0,480	4,000	0,510	0,312	927,08	182	8,4	0		
7,8	500	13,2	0,129	0,860	6,667	0,444	0,260	0,675	5,233	0,477	0,285	827,92	170,2	8,4	0	$3,18 \cdot 10^5$	
7,9	"	"	"	0,800	6,202	0,450	0,265	0,620	4,806	0,490	0,295	689,93	155,4	8,6	0		
8,1	"	"	"	0,730	5,659	0,465	0,275	0,580	4,496	0,496	0,298	899,91	177,5	8,8	0		
8,4	"	"	"	0,660	5,116	0,480	0,288	0,520	4,031	0,510	0,312	862,42	174	9,0	0		
8,4	693	16,9	0,143	0,835	5,860	0,460	0,272	0,695	4,877	0,487	0,292	936,85	178	9,5	0	$3,5 \cdot 10^5$	
8,7	"	"	"	0,765	5,368	0,470	0,280	0,625	4,386	0,507	0,310	624,57	145,3	9,8	0		
8,9	"	"	"	0,720	5,053	0,482	0,288	0,600	4,210	0,510	0,312	780,71	162,8	10,0	0		
9	"	"	"	0,690	4,842	0,490	0,295	0,575	4,035	0,510	0,312	1102,18	193,5	10,0	0		
9,3	960	18,5	0,147	0,835	5,680	0,465	0,275	0,690	4,694	0,490	0,295	908,15	175	10,1	0		
9,5	"	"	"	0,757	5,150	0,480	0,288	0,645	4,388	0,507	0,310	825,59	166,8	10,3	0		
9,75	"	"	"	0,690	4,694	0,491	0,295	0,605	4,116	0,507	0,310	1210,87	202	10,4	0		
10	"	"	"	0,635	4,320	0,500	0,304	0,575	3,911	0,515	0,315	1651,18	236	10,6	0	$3,52 \cdot 10^5$	

DETERMINATION DE LA RUGOSITE (ϵ) A PARTIR DES COURBES DE REMOUS
 TABLEAU DES VALEURS (pour le canal diédrique à parois rugueuses)

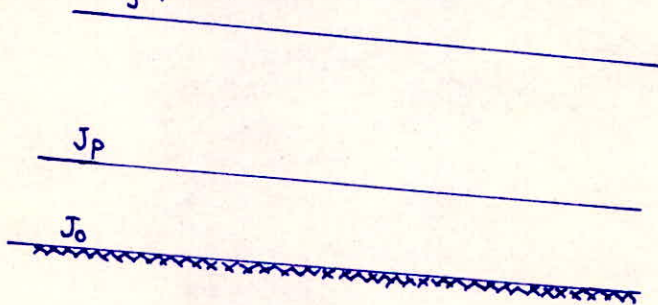
$L = 2,67 \text{ m}$

h_s (cm)	ΔZ (mm)	Q (ℓ/s)	K (m)	H_1 (m)	H_{1+}	h_{1+}	E_{1+}	H_2 (m)	H_{2+}	h_{2+}	E_{2+}	\sqrt{TC}	α	D_H (cm)	ϵ (mm)	IR	Observations
7	333,5	10,7	0,120	0,780	6,500	0,450	0,261	0,097	0,81	0,238	0,411	152,82	73,90	8,2	1,4	$2,68 \cdot 10^5$	
7,2	"	"	"	0,660	5,500	0,470	0,280	0,078	0,65	0,250	0,429	156,06	74,20	8,4	"		
7,35	"	"	"	0,640	5,333	0,475	0,283	0,072	0,60	0,254	0,432	156,06	74,20	8,4	"		
7,6	"	"	"	0,595	4,958	0,483	0,290	0,067	0,56	0,260	0,439	156,06	74,20	8,4	"		
7,8	500	13,2	0,129	0,850	7,083	0,440	0,258	0,134	1,04	0,222	0,392	157,39	74,30	8,5	"	$3,18 \cdot 10^5$	
7,9	"	"	"	0,790	6,583	0,447	0,260	0,129	1,00	0,225	0,394	157,61	74,35	8,7	"		
8,1	"	"	"	0,720	6,000	0,458	0,270	0,111	0,86	0,232	0,404	157,82	74,40	8,9	"		
8,4	"	"	"	0,650	5,416	0,473	0,281	0,098	0,76	0,240	0,414	158,03	74,45	9,2	"		
8,4	693	16,9	0,143	0,820	6,833	0,442	0,259	0,171	1,20	0,214	0,376	163,39	74,47	9,6	"	$3,5 \cdot 10^5$	
8,7	"	"	"	0,750	6,250	0,450	0,261	0,167	1,18	0,215	0,377	163,52	74,50	10,0	"		
8,9	"	"	"	0,710	5,916	0,460	0,263	0,157	1,10	0,218	0,379	163,52	74,50	10,2	"		
9,0	"	"	"	0,680	5,666	0,465	0,275	0,148	1,04	0,222	0,391	163,52	74,50	10,1	"		
9,3	960	18,5	0,147	0,820	6,833	0,442	0,259	0,191	1,30	0,210	0,372	164,91	74,55	10,2	"		
9,5	"	"	"	0,746	6,216	0,450	0,260	0,191	1,30	0,210	0,372	165,58	74,70	10,5	"		
9,75	"	"	"	0,680	5,666	0,465	0,275	0,155	1,05	0,220	0,387	166,24	74,85	10,7	"		
10	"	"	"	0,625	5,208	0,478	0,288	0,141	0,96	0,228	0,399	166,91	75,00	10,8	"	$3,52 \cdot 10^5$	

régime turbulent rugueux

DETERMINATION DE LA RUGOSITE (ϵ) DANS LE CAS DE L'ÉCOULEMENT UNIFORME

Dans le cas de l'écoulement uniforme, la ligne du gradient de la perte de charge (J) est parallèle, et à la ligne du gradient piézométrique (J_p) et à la pente (J_0)



La perte de charge est compensée par la pente du canal

En appliquant la formule de Darcy Weissbach on a:

$$J = J_0 = J_p = \frac{f}{D_h} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

CAS DE L'ÉCOULEMENT BIDIMENSIONNEL (fond lisse)

on a $R_h = h$, $D_h = 4h$, $v = \frac{q}{h}$, $q = \frac{Q}{b} = \frac{Q}{0,25}$

On fait un essai et on mesure $Q = 21 \text{ l/s}$ et $H = 52,5 \text{ cm}$ (charge constante le long du canal).

On en déduit:

$$q = 4Q = 84 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

l'abaque du ressaut nous donne:

$$K = 0,09 \text{ m}$$

$$H_+ = \frac{H}{K} = \frac{0,525}{0,09} = 5,85 \Rightarrow h_+ = 0,3$$

la profondeur d'eau dans le canal est:

$$h = h_+ K = 0,3 \cdot 0,09 = 2,7 \text{ cm}$$

la pente (mesurée) correspondant à l'écoulement uniforme est 8,76%.

$$\text{d'où } J_0 = 8,76 \cdot 10^{-2} = J$$

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g}$$

$$\text{d'où } f = \frac{8 J g h^3}{q^2}$$

$$f = \frac{8,76 \cdot 10^{-2} \cdot 8 \cdot 9,8 (0,027)^3}{(84 \cdot 10^{-3})^2} = 0,019$$

le nombre de Reynolds

$$R = \frac{4q}{J} = \frac{4 \cdot 84 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} = 3,36 \cdot 10^5$$

Le diagramme de Moody nous donne:

$$\frac{\epsilon}{D_h} = 0,0006$$

$$\text{d'où } \epsilon = 0,0006 \times 4 \times 0,027 = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$\epsilon \approx 0,06 \text{ mm}$$

On en conclut que la rugosité est pratiquement nulle, ce qui confirme que les valeurs de ϵ trouvées à partir des courbes de remous sont bonnes.

Calcul du coefficient γ de la formule de Bazin:

La formule de Chézy nous donne:

$$V = C \sqrt{R_h J}$$

$$\text{avec : } C = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_h}}} \quad (\text{Bazin})$$

$$\text{or } q = Vh = \frac{87 h \sqrt{R_h J}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_h}}} \quad \text{et } R_h = h$$

$$\text{d'où } \gamma = \frac{87 h^2 J^{\frac{1}{2}}}{q} - h^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{application: } \gamma = \frac{87 (0,027)^2 (0,0019)^{\frac{1}{2}}}{84 \cdot 10^{-3}} - (0,027)^{\frac{1}{2}} = 0,060$$

Calcul du coefficient m de la formule de Kutter :

$$c = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \quad \text{et} \quad v = c \sqrt{R_h J}$$

$$\text{or } q = v h = \frac{100 h \sqrt{R_h J}}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \quad \text{et} \quad R_h = h$$

$$\text{d'où} \quad m = \frac{100 h^2 J^{\frac{1}{2}}}{q} - h^{\frac{1}{2}} = 0,091$$

Calcul du coefficient k de la formule de Strickler :

$$c = k R_h^{1/6}$$

$$\text{d'où} \quad k = \frac{q}{J^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{5}{3}}} = \frac{84 \cdot 10^{-3}}{0,165 \cdot (0,027)^{\frac{5}{3}}} = 209$$

CAS DE L'ÉCOULEMENT EN CANAL DIÉDRIQUE (parois lisses).

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{d'où} \quad f = \frac{2 J g D_h}{v^2}$$

$$\text{or } v = \frac{Q}{A}, \quad A = h^2 \quad \text{et} \quad D_h = h\sqrt{2}$$

ce qui devient :

$$f = \frac{2\sqrt{2} g h^5 J}{Q^2}$$

On fait un essai et on mesure $Q = 13,2 \text{ l/s}$ et $H = 0,86 \text{ m}$
on en déduit grâce à l'abaque paramétrique du ressaut en canal diédrique.

$$K = 0,129$$

$$H_+ = \frac{H}{K} = \frac{0,86}{0,129} = 6,67 \Rightarrow h_+ = 0,444$$

la hauteur d'eau dans le canal est :

$$h = h_r \cdot K = 0,444 \cdot 0,129 = 0,0572 \text{ m}$$

$$h = 5,72 \text{ cm}$$

la pente mesurée est 14%

$$\text{d'où } f = \frac{13,6 \cdot 14 \cdot 10^{-2} (5,72)^5 \cdot 10^{-10} \cdot 1,414}{(13,2)^2 \cdot 10^{-6}} = 0,014$$

le nombre de Reynolds

$$Rr = \frac{V D_h}{\nu} = \frac{Q}{h^2} \frac{h \sqrt{2}}{10^{-6}} = \frac{13,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,414}{5,72 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6}} = 3,26 \cdot 10^5$$

la rugosité relative :

$$\frac{\epsilon}{D_h} = 0 \Rightarrow \epsilon = 0$$

Calcul du coefficient γ de la formule de Bazin:

$$V = C \sqrt{R_h J} \quad (\text{Chezy})$$

$$\text{or } Q = V h^2 = \frac{87 h^2}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R_h}}} \sqrt{R_h J}$$

$$\text{avec } R_h = \frac{D_h}{4} = \frac{h \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{d'où } \gamma = \frac{87 h^3 J^{1/2} \sqrt{2}}{4 Q} - \sqrt{\frac{h \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{application: } \gamma = \frac{87 \sqrt{2} (5,72)^3 \cdot 10^{-6} \sqrt{0,14}}{4 \cdot 13,2 \cdot 10^{-3}} - \frac{10^{-1}}{2} \sqrt{(5,72) \sqrt{2}} = 0,022$$

Calcul du coefficient m de la formule de Kutter:

d'une manière analogue à la précédente, on obtient

$$m = \frac{100 h^3 J^{1/2} \sqrt{2}}{4 Q} = 0,046$$

Calcul du coefficient K de la formule de Strikler:

$$C = K R_h^{1/6}$$

$$\text{d'où } K = \frac{2Q}{h^{8/3} j^{1/2}} = 145$$

Nous remarquons que les valeurs de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 sont différentes voire même négatives alors que pour une même rugosité elles doivent être constantes.

Il en est de même pour les valeurs données par Kutter ce qui nous laisse penser que ces formules sont absurdes.

Par contre les valeurs de Strickler se rapprochent dans une certaine mesure de la réalité, ceci est dû au fait que cette dernière tient compte (seulement) de la valeur de ϵ et à sa forme monôme.

ÉCOULEMENT UNIFORME

TABLEAU COMPARATIF DES VALEURS

ÉCOULEMENT BIDIMENSIONNEL

	ΔZ (mm)	$10^3 q$ (m^3/s)	K (m)	J_0 (%)	H (m)	H_+	h_+	h (cm)	f	IR	D_h (cm)	$\frac{E}{D_h}$	E (mm)	γ	m	K
lisse	1200	84	0,090	8,76	0,525	5,85	0,300	2,70	0,019	$3,36 \cdot 10^5$	10,80	0,0006	0	0,060	0,091	209
	230	36	0,051	13,60	0,615	12,08	0,204	1,04	0,018	$1,44 \cdot 10^5$	4,16	0,0000	0	-0,011	0,000	210
	500	54	0,066	13,80	0,760	11,50	0,210	1,40	0,015	$2,16 \cdot 10^5$	5,60	0,0000	0	-0,003	0,016	180
	230	36	0,051	24,70	0,970	19,06	0,162	0,80	0,017	$1,44 \cdot 10^5$	3,20	0,0000	0	-0,024	0,003	226
rugueux	1200	84	0,090	16	0,478	5,25	0,315	2,87	0,040	$3,46 \cdot 10^5$	11,48	0,012	1,4	0,184	0,236	83,77

ÉCOULEMENT ENCANAL DIÉDRIQUE

	ΔZ (mm)	Q (l/s)	K (m)	J_0 (%)	H (m)	H_+	h_+	h (cm)	f	IR	D_h (cm)	E/D_h	E (mm)	γ	m	K
lisse	500	13,2	0,129	14	0,86	6,67	0,444	5,72	0,014	$3,26 \cdot 10^5$	8,09	0,0...	0,0...	0,022	0,046	145
	333,5	10,7	0,120	17	0,795	6,625	0,450	5,40	0,015	$2,8 \cdot 10^5$	7,64	0,0...	0,0...	-0,007	0,012	390
	693	16,9	0,143	10	0,835	5,860	0,460	6,60	0,016	$3,62 \cdot 10^5$	9,33	"	"	0,013	0,037	186
	960	18,5	0,147	11	0,835	5,680	0,465	6,84	0,013	$3,82 \cdot 10^5$	9,67	"	"	0,020	0,047	179
rugueux	960	18,5	0,147	14,5	0,820	6,833	0,442	6,50	0,042	$3,82 \cdot 10^5$	9,68	0,014	1,4	2,62	3,03	139,56

CONCLUSION

Les méthodes ordinairement utilisées pour le problème de l'établissement de la courbe du remous en canal prismatique sont soit des méthodes générales fondées sur des approximations successives exigeant des calculs longs et des retouches continuelles mais fournissant une bonne précision, soit des méthodes simplifiées, rapides et sans approximations successives mais dans lesquelles ce bénéfice est obtenu au détriment de la précision, car on y néglige l'effet de la variation de l'énergie cinétique.

La méthode fondée sur la théorie de la longueur fluidodynamique donne une très bonne précision du fait qu'elle utilise des formules précises car on n'y a rien négligé systématiquement et sans approximations successives ni tâtonnement.

Il est plus intéressant d'étendre les courbes du remous au canal diédrique qui nous permet d'avoir avec plus de précision la valeur de la rugosité du fait qu'on tient compte de l'effet de la paroi, ce qui n'est pas le cas de l'écoulement bidimensionnel.

Bibliographie

- Cours d'Hydraulique générale de M.G. Laproy.
- Hydraulique générale et appliquée de M. Carlier.
- Tracé et calcul des courbes de remous dans les canaux et rivières de M. Silber.
- Hydraulique technique. de M. C. Jaeger.

PH001/74

SCHEMA DE L'ENSEMBLE

