

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

33/87

وزارة التعليم و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

lex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT **GENIE - MECANIQUE**

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

VIBROISOLATION OPTIMALE DES SYSTEMES DISCRETO - CONTINUS

Conçu par :

MAREK Ksiazek

Etudié par :

Abdelmadjid ATIF

Dirigé par :

Mr MAREK Ksiazek

PROMOTION

JUIN 1987

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**VIBROISOLATION OPTIMALE
DES
SYSTEMES DISCRETOCONTINUS**

Proposé par :

MR M. KSIAZEK

Etudié par :

A. ATIF

Dirigé par :

MR M. KSIAZEK

PROMOTION

Ministère de l'enseignement supérieur

وزارة التعليم العالي

Ecole nationale polytechnique

الدراسة الوطنية المتعددة التقنيات

Departement Génie mécanique



Promoteur : Marek Ksiazek

الموجه : مارك كسيانك

Elève ingénieur : Abdelmadjid ATIF

الطالب المهندس : عبد المجيد عاتف

المباشر

الموضوع: أفضل نظام عازل للاهتزازات للأجسام المتقطعة والمستمرة
تتعرض الدراسة للبحث عن أفضل نظام عازل للاهتزازات للمباني،
المحمل عليه حسب المعيار المختار للعزل ومن المقاومة الظاهرية
للمباني التي تكون عناصره معلومة أو مجهولة، متقطعة
أو مستمرة.

Résumé

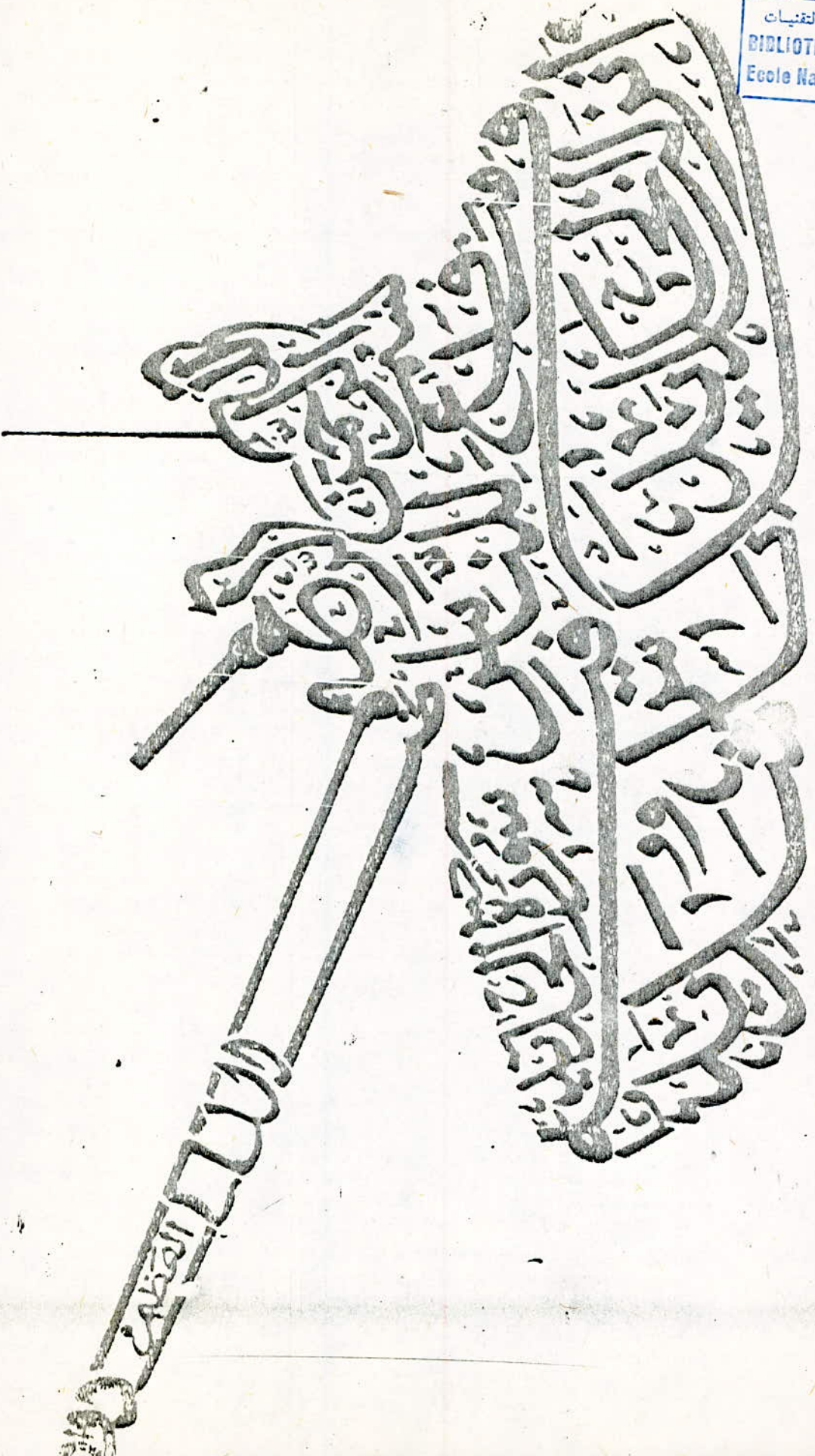
Sujet: vibroisolation optimale des systèmes
: discrète-continus.

L'étude se reporte sur la détermination d'un système optimal de vibroisolation d'une structure, obtenu d'après le critère requis pour l'isolation et de l'impédance de la structure, dont les éléments peuvent être connus ou inconnus, à paramètres discrets ou continus.

Abstract

Subject: optimal vibroisolation of the dynamical systems discret and continuous

In this study, the procedures of calculation of the optimal vibroisolation systems have been developed. Many possibilities were considered: vibroisolated systems were presented by the structure known (discret and continuous) and by the mechanical impedance.



DEDICACES

Je ne trouve pas de partenaires,
à qui je dédie ce modeste
travail, meilleurs que mes
parents qui ont tant sacrifiés
pour me voir atteindre ce
but.

Abdelmadjid

REMERCIEMENTS

Je tiens particulièrement à exprimer mes remerciements à Monsieur Marek Ksiazek pour le suivi de ce projet, et à tous les professeurs et administrateurs qui ont contribué à ma formation.

Je tiens aussi à remercier tous les amis qui m'ont assisté durant les études et qui ont rendu ces dernières très agréables dans les moments les plus difficiles.

SOMMAIRE

PAGE

INTRODUCTION 1

CHAP.1:GENERALITES

1/PROCESSUS STOCHASTIQUE

1.1: vibrations aléatoires 2

1.2: définition d'une fonction aléatoire 2

1.3: processus stochastique 2

1.4: caractéristiques 3

1.5: processus stationnaire 4

1.6: processus érgodique 5

1.7: fonction de densité spectrale 5

1.8: relation densité spectrale-fonction de
 corrélation 6

2/SYSTEME LINEAIRE

2.1: système 7

2.2: système stationnaire 7

2.3: système linéaire 7

2.4: système linéaire stationnaire 8

2.5: système discret 8

2.6: système continu 8

2.7: système stable 8

2.8: système réalisable 9

2.9: relation densité spectrale
 entrée - sortie 9

2.10: dispersion du signal de sortie 9

CHAP.2:SYSTEME DE VIBROISOLATION

1/PRESENTATION DU PROBLEME

1.1: introduction	10
1.2: hypothèses	10
2/CHOIX DU CRITERE	
2.1: critère du déplacement relatif	11
2.2: critère d'accélération	11
2.3: recherche d'un cas optimal	11
2.4: expression de la fonctionnelle	12
2.5: autres critères de vibroisolation	13
3/SYSTEME DE VIBROISOLATION	
3.1: expression de C	13
3.2: résolution générale du problème par la méthode de Wiener-Hopf	14
3.3: introduction de l'impédance	16
3.4: densité spectrale	17
3.5: critère choisi	17
3.6: expression de $\Phi(s)$	18
3.7: dispersion de sortie	19
3.8: tracé des courbes	20
CHAP3:ETUDE DES STRUCTURES	
1/ETUDE D'UN SYSTEME DISCRET	
1.1: définition	23
1.2: présentation du système	23
1.3: détermination de $Z(s)$	24
1.4: expression de $\Phi(s)$	24
1.5: conclusion	25
2/ETUDE MECANIQUE DU CORPS HUMAIN	
2.1: objet de l'étude	25
2.2: introduction	25
2.3: méthodes de mesures	26
2.4: mesures des propriétés physiques	26

2.5: caractéristiques et applications	
2.6: vibrations longitudinales	28
2.7: détermination de l'impédance	29
2.8: application à un opérateur assis	31
2.9: exploitation analytique	32
2.10: expression de $\Phi(s)$	34
2.11: conclusion	35
3/ETUDE D'UN SYSTEME CONTINU	
poutre cantilever en vibration transversale	
3.1: définition	35
3.2: caractérisation	35
3.3: méthode harmonique de mesure	36
3.4: vibration transversale	38
3.5: expression de l'impédance	41
3.6: frottements internes	42
3.7: exploitation analytique	46
3.8: expression de $\Phi(s)$	48
3.9: conclusion	49
CONCLUSIONS	50
ANNEXES	
Appareil de mesures d'impédance	
mécanique	51
programme	52
programme	54
BIBLIOGRAPHIE	56

INTRODUCTION

L'isolation des vibrations ou la vibroisolation constitue l'une des préoccupations majeures d'une vaste catégorie de domaines où ces dernières sont rencontrées.

Parmi ces vibrations, notons celles à caractères aléatoires dont leur étude exige beaucoup d'outils mathématiques.

Pour pouvoir pallier ces problèmes, on cherche des méthodes efficaces afin d'aboutir à atténuer l'effet de ces vibrations, dans le but d'économie, de sécurité et de confort.

Cette vibroisolation est assurée par des systèmes qui peuvent être actifs agissant par l'action de servomécanismes, ou passifs agissant par simple action de ressorts et d'amortisseurs.

Notre étude se portera donc sur la détermination de la fonction de transfert de ces systèmes de vibroisolation, en fonction du critère requis pour cette dernière et de l'impédance de la structure, auquel est fixée une masse objet du problème.

CHAPITRE 1

GENERALITES

1/ PROCESSUS STOCHASTIQUES

1.1: vibrations aléatoires

Il existe une catégorie importante de signaux impossibles à définir de manière précise.

Il sont caractérisés par une instabilité dans le temps et une absence de reproductibilité au cours d'enregistrements successifs (voir fig.1).

Les exemples sont nombreux: navire soumis à une mer agitée, véhicule roulant sur une route en mauvais état, turbulence aérodynamique au niveau d'un réacteur, bruit de fond, parasites,...

Les signaux de ce type ne peuvent se décrire de manière précise, mais doivent être traité à partir de bases statistiques.

1.2: définition d'une fonction aléatoire

On appelle fonction aléatoire une fonction pour laquelle à chaque valeur de la variable indépendante correspond une valeur aléatoire.

1.3: processus stochastiques

Le mot stochastique est utilisé par les mathématiciens et les physiciens pour désigner les processus ou les phénomènes qui contiennent un certain degré d'aléa.

mathématiquement, un processus stochastique est en principe un procédé de définition d'une fonction aléatoire $x^{(k)}(t)$, où k prend ses valeurs dans un espace des épreuves correspondant à un traitement d'une famille de signaux, chacun d'eux est produit par un processus identique. t représente les valeurs sur l'axe réel des temps, et dans lequel le hasard intervient à chaque instant t (Voir fig.1).

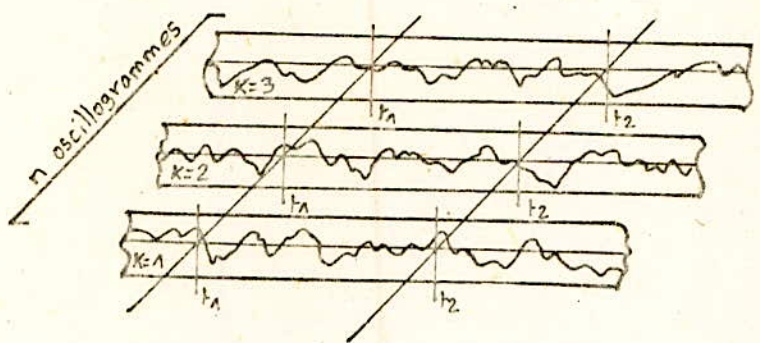


FIG.1

1.4: caractéristiques

Pour décrire les propriétés fondamentales d'un processus stochastiques, on utilise certaines fonctions non aléatoires caractérisant ce processus :

* L'espérance mathématique (ou la moyenne tout court) de la fonction aléatoire, qui caractérise le comportement moyen du processus. Elle est de deux types :

La moyenne statistique (ou moyenne d'ensemble)

$$x(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x, t_1) dx$$

$p(x, t)$ représente la densité de probabilité du premier ordre, c'est une fonction positive dont l'amplitude en chaque point est propor-

tionnelle à la concentration des réalisations qu'on peut y observer sur un nombre infini d'expériences.

La moyenne temporelle

$$\bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

* Moment centré d'ordre deux (dispersion ou variance) qui caractérise, en fonction du temps, la dispersion des valeurs de la fonction autour de sa valeur moyenne.

$$V(t) = \sigma^2(t) = \overline{[x(t) - \bar{x}(t)]^2} = \overline{x^2(t)} - [\overline{x(t)}]^2$$

ou

$$\sigma^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x,t) dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x,t) dx \right]^2$$

* La fonction de corrélation: c'est une fonction non aléatoire qui permet d'établir le degré de dépendance entre deux fonctions aléatoires.

$$\rho_{x,y} = \overline{x(t_1) \cdot y(t_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot p(x,y,t_1,t_2) dx dy$$

si x et y représente la même fonction $x(t)$, la fonction de corrélation permet de caractériser la fonction aléatoire en établissant le degré de dépendance de deux valeurs de cette même fonction, prises à des instants différents t_1 et t_2 . Dans un pareil cas, elle porte le nom particulier de fonction d'auto-corrélation.

$$\rho_{xx}(t_1,t_2) = \overline{x(t_1) \cdot x(t_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1,t_1,x_2,t_2) dx_1 dx_2$$

1.5: processus stationnaire

Un processus stationnaire est défini par que la fonction de densité de probabilité reste invariante quand on effectue une translation

de l'origine des temps, il est analogue au régime permanent des vibrations.

Pour cela on peut écrire :

$$\mu(t) = E[x(t_1)] = E[x(t_2)] = \text{constante}$$

$$\sigma^2(t) = E[x(t_1)^2] = E[x(t_2)^2] = \text{constante}$$

la fonction d'auto-corrélation ne dépend que de l'intervalle $\tau = t_2 - t_1$.

1.6: processus érgodique

Un processus est dit érgodique si on a l'égalité entre les moyennes temporelles, et les moyennes statistiques.

L'érgodicité est une propriété extrêmement importante car elle permet d'obtenir autant d'informations sur les caractéristiques d'un processus stochastique à partir d'un seul enregistrement de longue durée, au lieu d'exiger la connaissance d'un très grand nombre d'échantillons.

L'hypothèse de l'érgodicité permet de calculer la fonction d'auto-corrélation par la moyenne temporelle :

$$p_{xx}(\tau) = \overline{x(t) \cdot x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) \cdot x(t+\tau) dt$$

1.7: fonction de densité spectrale

La puissance d'un signal aléatoire est par définition :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt \quad (1)$$

de même, on a par définition de la transformée de Fourier :

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{ou} \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Par définition aussi, l'énergie d'un signal dans l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$, est donnée par:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt, \text{ donc:}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot X(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Le terme $|X(j\omega)|^2$ porte le nom de densité spectrale d'énergie.

D'après (1), on peut écrire:

$$P = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{2T} d\omega$$

Le terme $S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{2T}$ s'appelle densité spectrale de puissance.

La puissance P est donnée par:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega$$

1.8: relation densité spectrale - fonction de corrélation

La fonction de corrélation s'écrit:

$$r(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) \cdot x(t+\tau) dt, \text{ donc:}$$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} r(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

on remarque alors que la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction de corrélation.

2/SYSTEME LINEAIRE

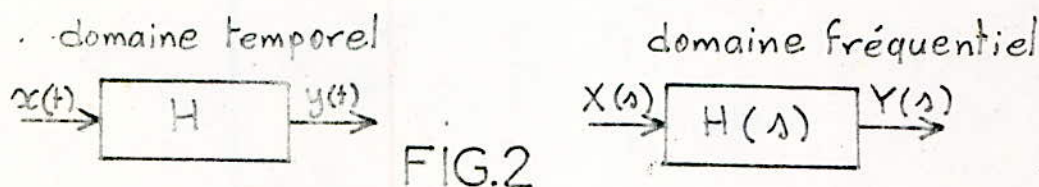
2.1: système

De façon générale, un système sert à transformer un signal $x(t)$ appliqué à son entrée, en un signal $y(t)$ qui apparaît à sa sortie (Voir fig.2).

Il est caractérisé par un opérateur H qui transforme l'espace des entrées $x(t)$ en l'espace des sorties $y(t)$:

$$H(x(t)) = y(t)$$

L'opérateur H porte le nom de fonction de transfert, qui, dans la représentation dans le domaine fréquentiel, s'exprime par le rapport: $H(\lambda) = \frac{Y(\lambda)}{X(\lambda)}$, où $X(\lambda)$ et $Y(\lambda)$ représentent respectivement les transformées de Fourier des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.



2.2: système stationnaire

Un système est dit stationnaire si pour lequel l'opérateur associé H est invariant avec le temps.

$$H(x(t+\tau)) = y(t+\tau)$$

2.3: système linéaire

Le système est dit linéaire si, pour deux signaux d'entrée $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et pour deux scalaires α et β , le système fasse correspondre les signaux de sortie $y_1(t)$ et $y_2(t)$ tel que:

$$H(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = H(\alpha x_1(t)) + H(\beta x_2(t)) = \alpha H(x_1(t)) + \beta H(x_2(t)) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

2.4: système linéaire stationnaire

Les systèmes linéaires stationnaires jouent un rôle important dans les problèmes de transmission de signaux. La raison en est que ces systèmes peuvent être étudiés à l'aide d'instruments mathématiques simples, et qu'ils constituent une approximation d'une vaste catégorie de systèmes utilisés dans l'application.

2.5: système discret

Un système discret est constitué d'éléments permettant d'écrire les équations de son mouvement sous forme d'équations différentielles du second ordre à coefficients constants, sa position, à un instant donné, dépend d'un nombre fini de paramètres.

Le nombre de variables indépendantes ainsi que le nombre d'équations nécessaire pour connaître les mouvements est égale au nombre de degrés de liberté qu'a ce système.

2.6: système continu

Un système continu est un système dont le nombre de degrés de liberté est infini (exp: poutres, plaques,...)

Le mouvement d'un point du système n'est plus fonction seulement du temps, mais encore de l'espace.

Notons qu'un système continu peut être assimilé à un système discret dans un intervalle restreint de fréquences.

2.7: système stable

Un système est dit stable si à tout signal d'entrée borné produit à sa sortie un signal borné.

2.8: système réalisable

Un système est dit réalisable si l'apparition d'un signal à sa sortie ne peut précéder l'application d'un signal à son entrée.

Un système qui est à la fois stable est réalisable est dit physiquement réalisable.

2.9: relation densité spectrale entrée - sortie

Soit le système de fonction de transfert $H(j\omega)$ reliant l'entrée $x(t)$ avec la sortie $y(t)$, et soit $S_x(\omega)$ la densité spectrale de puissance du signal d'entrée.

On trouve sans démonstration que la densité spectrale de puissance du signal de sortie s'exprime par:

$$S_y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_x(\omega)$$

$$\text{avec } |H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H(-j\omega)$$

2.10: dispersion du signal de sortie

On désire exprimer la dispersion du signal de sortie $y(t)$, pour cela on suppose que la valeur moyenne est nulle.

Soient $X(j\omega)$ et $Y(j\omega)$ les transformées de Fourier respectives de $x(t)$ et de $y(t)$, on a la relation:

$$Y(j\omega) = H_{y/x}(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

La dispersion du signal de sortie a pour expression:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{y/x}(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega, \quad S_x(\omega) \text{ représente la densité spectrale du signal d'entrée.}$$

Dans les cas particuliers: (on pose $s = j\omega$)

Dispersion de l'écart ($y(t) - x(t)$):

$$\sigma_{y-x}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} |H_{y-x}(s)|^2 S_{\ddot{x}}(s) ds$$

Dispersion de l'accélération $\ddot{y}(t)$: $\sigma_{\ddot{y}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} |H_{\ddot{y}/\ddot{x}}(s)|^2 S_{\ddot{x}}(s) ds$

CHAPITRE 2

SYSTÈME DE VIBROISOLATION

1/PRESENTATION DU PROBLEME

1.1: introduction

Le problème réside à vibroisoler une structure d'impédance Z , auquel est fixée une masse m objet du problème de vibroisolation.

La réalisation de cette dernière se fait par la construction analytique d'un système de vibroisolation soumis à une excitation stochastique x_0 .

(Voir fig. 3)

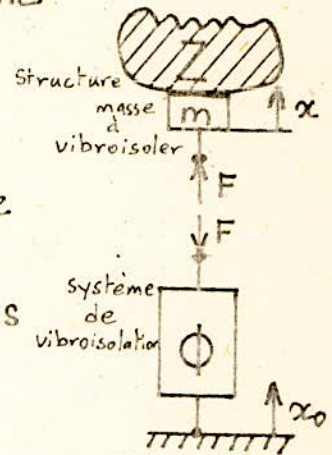


FIG.3

1.2: hypothèses

Afin de faciliter la résolution du problème ; il serait utile d'avancer certaines hypothèses :

concernant le système de vibroisolation :

système linéaire à structure inconnu caractérisé par sa fonction de transfert $\Phi(s)$ (fonction rationnelle en s) donnée par : $\Phi(s) = F(s) / \ddot{x}_0(s)$

L'hypothèse que $\Phi(s)$ est une fraction rationnelle en s permet la résolution future de la détermination de la structure du système de vibroisolation (par décomposition en éléments simples et par analogie

électromécanique.).

concernant l'excitation d'entrée $x_0(t)$:

vibrations verticales à processus stochastique stationnaire et ergodique, sa densité spectrale est une fraction rationnelle en ω^2 .

concernant la structure à vibroisoler:

la structure dont les éléments peuvent être connus ou inconnus, à paramètres discrets ou continus, caractérisé par son impédance Z définie par: $Z(s) = F(s)/\dot{x}(s)$

2/CHOIX DU CRITERE

2.1: critère du déplacement relatif

Afin de limiter les déplacements relatifs $(x(t) - x_0(t))$, ce qui assure une bonne adhérence et une rigidité accrue, il faudrait minimiser la moyenne quadratique du déplacement relatif $[x(t) - x_0(t)]^2$

2.2: critère d'accélération

Afin d'assurer une souplesse au système, et par suite confort et sécurité, le critère d'accélération minimale a pour objet de minimiser la valeur moyenne quadratique de cette dernière $[\ddot{x}(t)]^2$..

2.3: recherche d'un cas optimal

Assurer un déplacement relatif minimal correspond à une liaison parfaitement rigide, donc des accélérations infinies, et assurer une accélération minimale correspond à une liaison parfaitement molle, donc un déplacement relatif important, on est donc en face de deux exigences contradictoires. En pratique, il faudrait réaliser un compromis entre ces deux exigences et qui correspond à

un cas optimal satisfaisant chacun des critères sans influencer l'autre.

2.4: expression de la fonctionnelle

Si on suppose que les valeurs moyennes du déplacement relatif et de l'accélération sont nulles, on obtient alors:

$$[\overline{x(t) - x_0(t)}]^2 = \sigma_{x-x_0}^2 : \text{dispersion de l'écart}$$

$$[\overline{\ddot{x}(t)}]^2 = \sigma_{\ddot{x}}^2 : \text{dispersion de l'accélération}$$

Le problème cité précédemment se traduit en la minimisation de la fonctionnelle C suivante, selon que l'un des critères soit plus exigé que l'autre, on y distingue: le critère du déplacement relatif:

$$\text{la fonctionnelle est donnée par: } C = \sigma_{x-x_0}^2 + \lambda \sigma_{\ddot{x}}^2$$

λ représente le multiplicateur de Lagrange, c'est un paramètre à déterminer selon les valeurs maximales requises pour la dispersion d'accélération compatibles avec une tenue acceptable de vibroisolation, $\lambda \in [0, +\infty]$

Ce critère a une grande importance en pratique du fait qu'il est requis pour un vaste domaine d'applications (suspension des véhicules, confort, ...).

le critère de l'accélération minimale

$$\text{la fonctionnelle est donnée par: } C = \sigma_{\ddot{x}}^2 + \lambda' \sigma_{x-x_0}^2$$

λ' représente le même paramètre que le précédent, mais peut être différent selon les valeurs maximales requises pour les dispersions.

Ce critère plus adapté au confort et à la souplesse, est chaque fois requis à la vibroisolation des systèmes où il y a une présence humaine (moyens de transport, postes de travail, ...)

2.5: autres critères de vibroisolation

Notons seulement que dans des cas particuliers, il existe d'autres critères de vibroisolation retenus pour certaines structures et qui consistent à minimiser les grandeurs suivantes: La vitesse, l'énergie transmise (cinétique ou autres),

3/SYSTEME DE VIBROISOLATION

3.1: expression de C

Dans le cas du critère du déplacement relatif:

On a vu que la fonctionnelle C s'exprime par:

$$C = \sigma_{x-x_0}^2 + \lambda \sigma_{\ddot{x}}^2$$

et de même: ($\lambda = j\omega$)

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} |H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(\lambda)|^2 S_{\ddot{x}_0}(\lambda) d\lambda$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} |H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(\lambda)|^2 S_{\ddot{x}_0}(\lambda) d\lambda$$

Les fonctions de transfert H étant égales à: (Voir Fig.3)

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(\lambda) = \frac{X(\lambda) - X_0(\lambda)}{\ddot{X}_0(\lambda)} = \frac{\frac{X(\lambda)}{F(\lambda)} - \frac{X_0(\lambda)}{F(\lambda)}}{\lambda^2 \cdot \frac{X_0(\lambda)}{F(\lambda)}}$$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(\lambda) = \frac{\ddot{X}(\lambda)}{\ddot{X}_0(\lambda)} = \lambda^2 \cdot \frac{X(\lambda)}{F(\lambda)} \cdot \frac{F(\lambda)}{\ddot{X}_0(\lambda)}$$

on pose les notations suivantes:

$$\Phi(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{X_0(\lambda)}, \quad L(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{X(\lambda)}, \quad G(\lambda) = \frac{\lambda^2}{L(\lambda)}$$

d'où on obtient:

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda) \cdot G(\lambda) - 1}{\lambda^2}, \quad H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(\lambda) = G(\lambda) \cdot \Phi(\lambda)$$

en tenant compte du fait que: $|H(\lambda)|^2 = H(\lambda) \cdot H(-\lambda)$
la fonctionnelle C s'exprimera par:

$$C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left[\frac{\Phi(s) \cdot G(s) - 1}{s^2} \right] \left[\frac{\Phi(-s) \cdot G(-s) - 1}{s^2} \right] + \lambda^4 [G(s) \cdot \Phi(s)] \cdot [G(-s) \cdot \Phi(-s)] \cdot S_{\ddot{x}_0}(s) ds$$

Par hypothèse, $S_{\ddot{x}_0}(s)$ est une fonction rationnelle en ω^2 , on peut donc écrire:

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = s^4 \cdot S_0 \cdot \Psi(s) \cdot \Psi(-s), \text{ avec } S_0 = \text{constante}$$

Finalement, l'expression de la fonctionnelle devient:

$$C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left[\Phi(s) \cdot G(s) - 1 \right] \left[\Phi(-s) \cdot G(-s) - 1 \right] + \lambda s^4 [G(s) \cdot \Phi(s)] [G(-s) \cdot \Phi(-s)] S_0 \Psi(s) \cdot \Psi(-s) ds$$

Dans le cas du critère de l'accélération minimale:

on trouve sans démonstration que la fonctionnelle

C s'écrit par:

$$C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \lambda \left[\Phi(s) \cdot G(s) - 1 \right] \left[\Phi(-s) \cdot G(-s) - 1 \right] + s^4 [G(s) \cdot \Phi(s)] [G(-s) \cdot \Phi(-s)] S_0 \Psi(s) \cdot \Psi(-s) ds$$

3.2: résolution générale du problème par la méthode de wiener-hopf

Soit $\Phi_0(s) = \Phi(s) + \epsilon \cdot \gamma(s)$, où:

$\gamma(s)$: fonction de balance arbitraire

ϵ : paramètre constant

$\Phi_0(s)$ représente la fonction de transfert optimale pour laquelle la fonctionnelle C est minimale.

Soit C^* la valeur de cette dernière, et soit

$\Delta C = C^* - C$, l'écart entre C^* et C.

ΔC s'exprimera donc par: (déplacement relatif)

$$\Delta C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left\{ \left[\Phi(s)G(s) + \epsilon\gamma(s)G(s) - 1 \right] \left[\Phi(-s) \cdot G(-s) + \epsilon\gamma(-s)G(-s) - 1 \right] - \left[\Phi(s)G(s) - 1 \right] \left[\Phi(-s) \cdot G(-s) - 1 \right] + \lambda s^4 \left\{ \left[G(s)\Phi(s) + G(s)\epsilon\gamma(s) \right] \left[G(-s)\Phi(-s) \cdot \epsilon\gamma(-s) \right] - \left[G(s)\Phi(s) \right] \left[G(-s)\Phi(-s) \right] \right\} \right\} S_0 \Psi(s) \cdot \Psi(-s) ds$$

$$\Delta C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left\{ \left[\epsilon\gamma(s)G(s)\Phi(-s)G(-s) - \epsilon\gamma(s)G(s) + \epsilon^2\gamma(s)\gamma(-s)G(s)G(-s) - \epsilon\gamma(-s)G(-s) + \epsilon\gamma(-s)G(-s)\Phi(s) \cdot G(s) + \lambda s^4 \cdot \right. \right.$$

$$[G(s)\Phi(s)G(-s)\varepsilon\delta(-s) + G(s)\varepsilon\delta(s)G(-s)\Phi(-s) + \varepsilon^2 G(s)G(-s)\delta(s)\delta(-s)] \delta_0 \Psi(s)\Psi(-s) ds$$

identifier $\Phi(s)$ à $\Phi_0(s)$ revient à avoir l'écart ΔC minimum pour $\varepsilon=0$, qui se traduit par: $\left. \frac{d(\Delta C)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$

donc:

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \{ [\Phi(s)G(s)G(-s)\delta(-s) + \Phi(-s)G(-s)G(s)\delta(s) - G(-s)\delta(-s) - \delta(s)G(s)] + \lambda s^4 [\Phi(s)G(s)G(-s)\delta(-s) + \Phi(-s)G(-s)G(s)\delta(s)] \} \Psi(s)\Psi(-s) ds = 0$$

soit, aussi:

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \{ [G(s)G(-s) + \lambda s^4 G(s)G(-s)] \Phi(s) - G(-s) \} \delta(-s) + \{ [G(s)G(-s) + \lambda s^4 G(s)G(-s)] \Phi(-s) - G(s) \} \delta(s) \} \Psi(s)\Psi(-s) ds = 0$$

posons: $D(s) \cdot D(-s) = (1 + \lambda s^4) G(s) \cdot G(-s)$, on aura donc:

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \{ [D(s)D(-s)\Psi(s)\Psi(-s)\Phi(s) - G(-s)\Psi(s)\Psi(-s)] \delta(-s) + [D(s)D(-s)\Psi(s)\Psi(-s)\Phi(-s) - G(s)\Psi(s)\Psi(-s)] \delta(s) \} ds = 0$$

Aussi:

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \left[D(s)\Psi(s)\Phi(s) - \frac{G(-s)\Psi(s)}{D(-s)} \right] D(-s)\Psi(-s)\delta(-s) ds \Bigg|_{I_1} + \int_{-j\infty}^{j\infty} \left[D(-s)\Psi(-s)\Phi(-s) - \frac{G(s)\Psi(-s)}{D(s)} \right] D(s)\Psi(s)\delta(s) ds \Bigg|_{I_2} = 0$$

$[D(s)\Psi(s)\Phi(s)]$ a des pôles à gauche de l'axe imaginaire; par conséquent on ne prend de $\left[\frac{G(-s)\Psi(s)}{D(-s)} \right]$ que la partie ayant des pôles à gauche de l'axe imaginaire pour pouvoir effectuer la différence dans l'intégrale I_1 , en respectant les conditions de stabilité et de réalisation.

On symbolise cette partie par: $\left[\frac{G(-s)\Psi(s)}{D(-s)} \right]_+$

Le problème contraire se pose pour l'intégrale I_2 .

En effectuant un changement de variable de s en $-s$, on obtient pour I_2

$$I_2 = \int_{-j\infty}^{j\infty} \left[D(s)\Psi(s)\Phi(s) - \left[\frac{G(-s)\Psi(s)}{D(-s)} \right]_+ \right] D(-s)\Psi(-s)\delta(-s) ds$$

on remarque que I_2 est identique à I_1 , donc le

problème consiste en la résolution de l'équation intégrale: $2 \int_{-j\infty}^{j\infty} [D(s)\Psi(s)\Phi(s) - \frac{G(-s)\Psi(s)}{D(-s)}] D(-s)\Psi(s)\delta(-s) ds = 0$
d'où:

$$\Phi(s) = \frac{1}{D(s)\Psi(s)} \left[\frac{G(-s)\Psi(s)}{D(-s)} \right]$$

et si on pose: $R(s).R(-s) = 1 + \lambda s^4$

on a: $D(s).D(-s) = R(s).R(-s)G(s)G(-s)$, donc: $D(s) = R(s)G(s)$

Finalement, on obtient la fonction de transfert optimale du système de vibroisolation, son expression est: $\Phi(s) = \frac{1}{R(s).G(s)\Psi(s)} \left[\frac{\Psi(s)}{R(-s)} \right]$

On peut voir que pour le critère d'accélération minimale, on obtiendrait la même expression, sauf que la fonction $R(s)$ est définie par: $R(s).R(-s) = \lambda' + s^4$

3.3: introduction de l'impédance

Dans le cas particulier de notre problème de vibroisolation, certaines fonctions éléments de $\Phi(s)$ se trouvent connues d'avance, en raison de la disposition du système à vibroisoler.

La figure 4 permet d'illustrer cette structure en faisant l'analogie électromécanique du système (analogie force-courant).

On obtient les relations suivantes:

$$F(s) = (Z(s) + m s) \dot{X}(s) \\ = (Z(s) + m s) s \cdot X(s)$$

d'où:

$$L(s) = \frac{F(s)}{X(s)} = s(Z(s) + m s)$$

et $G(s) = \frac{s^2}{L(s)} = \frac{s}{Z(s) + m s}$

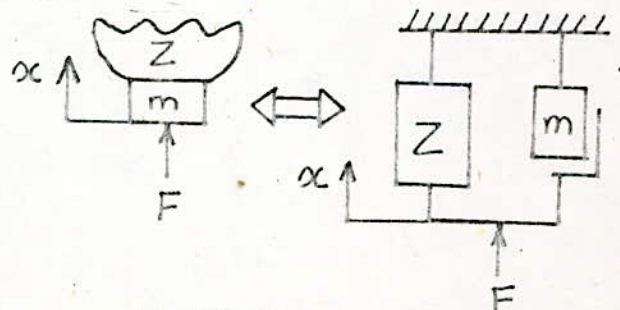


FIG.4

3.4: densité spectrale

Dans l'absence d'une forme particulière de la densité spectrale du signal d'entrée $x_0(t)$, on va tester notre système de vibroisolation par un bruit blanc (un bruit blanc est un signal qui présente une amplitude constante).

Il a l'avantage d'avoir une densité spectrale égale à une constante et permet ainsi de tirer les caractéristiques du système.

On a donc: $S_{\ddot{x}_0} = N^2 = \text{constante}$, et:

$$S_{\ddot{x}_0}(\lambda) = N^2 = \lambda^4 S_0 \Psi(\lambda) \Psi(-\lambda) = \lambda^4 \cdot S_0 \cdot \frac{1}{(\lambda)^2} \cdot \frac{1}{(-\lambda)^2}$$

d'où on peut tirer: $S_0 = N^2$ et $\Psi(\lambda) = 1/\lambda^2$

3.5: critère choisi

Pour le critère du déplacement relatif minimal:

on sait que: $R(\lambda) \cdot R(-\lambda) = 1 + \lambda \lambda^4$ (1)

essayons d'identifier $R(\lambda)$ à un polynôme du second degré en λ : $R(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$

d'après (1): $(a\lambda^2 + b\lambda + c)(a\lambda^2 - b\lambda + c) = 1 + \lambda \lambda^4$

$$\Rightarrow a^2 \lambda^4 + ab\lambda^3 + ac\lambda^2 - ab\lambda^3 - b^2 \lambda^2 - bc\lambda + ac\lambda^2 + bc\lambda + c^2 = 1 + \lambda \lambda^4$$

$$a^2 \lambda^4 + (2ac - b^2) \lambda^2 + c^2 = 1 + \lambda \lambda^4$$

par identification entre les deux membres de l'égalité, on obtient: $a = \sqrt{\lambda}$, $b = \sqrt[4]{4\lambda}$, $c = 1$

donc $R(\lambda)$ a pour expression: $R(\lambda) = \sqrt{\lambda} \lambda^2 + \sqrt[4]{4\lambda} \lambda + 1$

Pour le critère d'accélération minimale:

on sait que: $R(\lambda) \cdot R(-\lambda) = \lambda' + \lambda^4$ (1)

de même, essayons d'identifier $R(\lambda)$ à un polynôme de second degré en λ : $R(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$

on obtient alors: $a^2 \lambda^4 + (2ac - b^2) \lambda^2 + c^2 = \lambda' + \lambda^4$

par identification entre les deux membres de l'égalité, on obtient: $a = 1$, $b = \sqrt[4]{4\lambda'}$, $c = \sqrt{\lambda'}$

L'expression de $R(s)$ est donc: $R(s) = s^2 + \sqrt{4\lambda} s + \sqrt{\lambda}$
 On remarque alors que l'expression de $R(s)$ varie d'un critère à l'autre, et de là la fonction de transfert optimale du système de vibroisolation n'est pas identique pour tous les critères requis, ses paramètres dépendent de ces derniers.

Et pour cette raison qu'il faudrait à priori retenir un critère et qui soit le plus approprié au type de vibroisolation qu'on voudrait réaliser. Par la suite, on va retenir seulement le critère du déplacement relatif minimal vu le vaste domaine d'applications qu'il rencontre.

3.6: expression de $\Phi(s)$

Dans le cadre de la résolution du problème de vibroisolation, il ne reste maintenant qu'à obtenir l'expression de $\Phi(s)$ d'après les paramètres qu'on a déterminé précédemment.

$$\Phi(s) = \frac{1}{R(s) \cdot G(s) \cdot \Psi(s)} \left[\frac{\Psi(s)}{R(-s)} \right] +$$

Essayons d'extraire la partie qui a des pôles à gauche de l'axe imaginaire dans l'expression $\frac{\Psi(s)}{R(-s)}$
 $\Psi(s) = 1/s^2$, $R(s) = \sqrt{\lambda} s^2 + \sqrt{4\lambda} s + 1$, $G(s) = s/(z(s) + ms)$
 donc:

$$\frac{\Psi(s)}{R(-s)} = \frac{1}{s^2 (\sqrt{\lambda} s^2 - \sqrt{4\lambda} s + 1)} = \frac{as+b}{s^2} + \frac{cs+d}{\sqrt{\lambda} s^2 - \sqrt{4\lambda} s + 1}$$

Le premier terme de cette somme a des pôles à gauche de l'axe imaginaire, tandis que le second en a à droite de l'axe imaginaire, et de ce fait on ne garde dans l'expression de $\Phi(s)$ que le premier terme.

On va déterminer les coefficients a et b :

en développant la somme, on obtient :

$$(as+b)(\sqrt{\lambda}s^2 - \sqrt[4]{4\lambda}s + 1) + s^2(Cs+d) = 1$$

$$\Rightarrow a\sqrt{\lambda}s^3 + b\sqrt{\lambda}s^2 - a\sqrt[4]{4\lambda}s^2 - b\sqrt[4]{4\lambda}s + as + b + cs^3 + ds^2 = 1$$

$$\Rightarrow (a\sqrt{\lambda} + c)s^3 + (b\sqrt{\lambda} - a\sqrt[4]{4\lambda} + d)s^2 + (a - b\sqrt[4]{4\lambda})s + b = 1$$

Par identification entre les deux membres de l'égalité, on obtient : $a = \sqrt{2} \lambda^{1/4}$, $b = 1$

donc $\left[\frac{\varphi(s)}{R(s)} \right] = \frac{\sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1}{s^2}$

Finalement, la fonction de transfert optimale du système de vibroisolation peut s'écrire sous la forme suivante : $\Phi(s) = \frac{1}{R(s)G(s)\varphi(s)} \left[\frac{\varphi(s)}{R(s)} \right] +$

$$= \frac{1}{(\lambda^{1/2}s^2 + \sqrt{2}\lambda^{1/4}s + 1)} \cdot \frac{s}{Z(s) + ms} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}\lambda^{1/4}s + 1}{s^2} \right)$$

$$\Phi(s) = \frac{(Z(s) + ms)(\sqrt{2}\lambda^{1/4}s + 1)}{s(\lambda^{1/2}s^2 + \sqrt{2}\lambda^{1/4}s + 1)}$$

La simple connaissance de l'impédance $Z(s)$ de la structure nous permettra de déterminer analytiquement la fonction de transfert optimale du système de vibroisolation.

Des problèmes pratiques de cette résolution seront abordés dans le prochain chapitre.

3.7: dispersions de sortie

Dispersion du déplacement relatif :

elle est donnée par :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} |H_{\frac{x-x_0}{x_0}}(s)|^2 S_{\ddot{x}_0} ds$$

$$\text{avec } H_{\frac{x-x_0}{x_0}}(s) = \frac{\Phi(s)G(s) - 1}{s^2} = \frac{(Z(s) + ms)(\sqrt{2}\lambda^{1/4}s + 1) - s^2}{s(\lambda^{1/2}s^2 + \sqrt{2}\lambda^{1/4}s + 1)(Z(s) + ms)}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}\lambda^{1/4}s + 1) - (\lambda^{1/2}s^2 + \sqrt{2}\lambda^{1/4}s + 1)}{s^2(\lambda^{1/2}s^2 + \sqrt{2}\lambda^{1/4}s + 1)} = \frac{-\lambda^{1/2}s^2}{s^2(\lambda^{1/2}s^2 + \sqrt{2}\lambda^{1/4}s + 1)}$$

$$\text{d'où : } H_{\frac{x-x_0}{x_0}} = \frac{-1}{s^2 + \sqrt{2}\lambda^{1/4}s + \lambda^{1/2}}$$

l'expression de $\sigma_{x-x_0}^2$ devient:

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} H_{\frac{x-x_0}{x_0}}(s) \cdot H_{\frac{x-x_0}{x_0}}(-s) S_{\ddot{x}_0} ds$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{x-x_0}^2}{S_0} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{-1}{s^2 + \sqrt{2} \lambda^{1/4} s + \lambda^{-1/2}} \cdot \frac{-1}{s^2 - \sqrt{2} \lambda^{1/4} s + \lambda^{-1/2}} ds$$

la table d'intégrale (fournie par l'ouvrage: analytical design of linear feedback controls, voir bibliographie) permet de déduire: $\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{S_0} = \frac{\lambda^{3/4}}{2\sqrt{2}}$

Dispersion de l'accélération:

elle est donnée par: $\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} |H_{\ddot{x}}(s)|^2 S_{\ddot{x}_0} ds$

on a:

$$H_{\ddot{x}}(s) = G(s) \cdot \Phi(s) = \frac{s}{(Z(s) + ms) \cdot (\sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1}{\lambda^{1/2} s^2 + \sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1}$$

donc:

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} H_{\ddot{x}}(s) \cdot H_{\ddot{x}}(-s) S_{\ddot{x}_0} ds$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{S_0} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1}{\lambda^{1/2} s^2 + \sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1} \cdot \frac{-\sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1}{\lambda^{1/2} s^2 - \sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1} ds$$

la table d'intégrale permet d'obtenir: $\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2}{S_0} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \lambda^{-1/4}$

de même, la fonctionnelle C aura

pour expression: $\frac{C}{S_0} = \frac{\lambda^{3/4}}{2\sqrt{2}} + \lambda \frac{3}{2\sqrt{2}} \lambda^{-1/4} = \sqrt{2} \lambda^{3/4}$

3.8: tracé des courbes

En disposant des expressions des dispersions et de la fonctionnelle, on pourra donc représenter les courbes de variation de ces grandeurs en fonction du paramètre λ .

Notons qu'on préfère effectuer le changement de variable suivant: $\lambda = \lambda_0 \frac{p}{1-p}$, avec $\lambda_0 = 1 [s^4]$
 Une variation de λ entre 0 et l'infini correspond à une variation de p entre 0 et un, ce qui facilitera la représentation des courbes.

Le programme pour l'élaboration est présenté en annexe. La figure 5 illustre ces courbes et sont présentées sur le même graphe. Interprétation : pour des petites valeurs de ρ (donc de λ), la dispersion de l'accélération prend des valeurs infiniment grandes, et la dispersion du déplacement relatif prend des valeurs proches de 0, de même la fonctionnelle C , donc rigidité accrue du système. L'effet contraire est ressenti pour les valeurs de ρ proches de 1 où on rencontre une grande souplesse. On peut déduire qualitativement que le meilleur intervalle qui convient à la vibroisolation et plus proche de la pratique correspond aux valeurs de ρ entre 0,3 et 0,6 (λ entre 0,5 et 1,5).

Ces courbes permettent de déterminer la valeur de ρ (donc de λ) à partir des exigences limites requises pour la dispersion de l'un ou de l'autre paramètre ou les deux en même temps.

Exemple: D'après les normes hygiéniques pour la vibroisolation du corps d'un homme. opérateur assis: $\sigma_{\ddot{x}_0}^2 = (0,65)^2 = 0,4225 [m^2/s^4]$

et pour une excitation en bruit blanc: $S_{\ddot{x}_0} = S_0 = N^2 = 0,4027 [m^2/s^4]$

D'après le graphe, on a pour $\frac{\sigma_{\ddot{x}_0}^2}{S_0} = 1,049$, la valeur de ρ correspondante est $\rho = 0,55$, donc $\lambda = 1,2$ (valeur limite minimale)

Bien sûr, il y a une autre exigence pour la dispersion du déplacement relatif maximale, par exemple:

$\sigma_{x_0}^2 = 0,40 [m^2/s^4]$, qui pour $\frac{\sigma_{x_0}^2}{S_0} = 0,99$, on a $\rho = 0,62$ et $\lambda = 1,63$ (valeur limite maximale).

Finalement, on prendra λ dans l'intervalle $[1,2 \div 1,63]$

La valeur de λ est déterminée suivant les exigences demandées, la détermination numérique de l'impédance de la structure permet finalement d'obtenir la fonction de transfert optimale du système de vibroisolation.

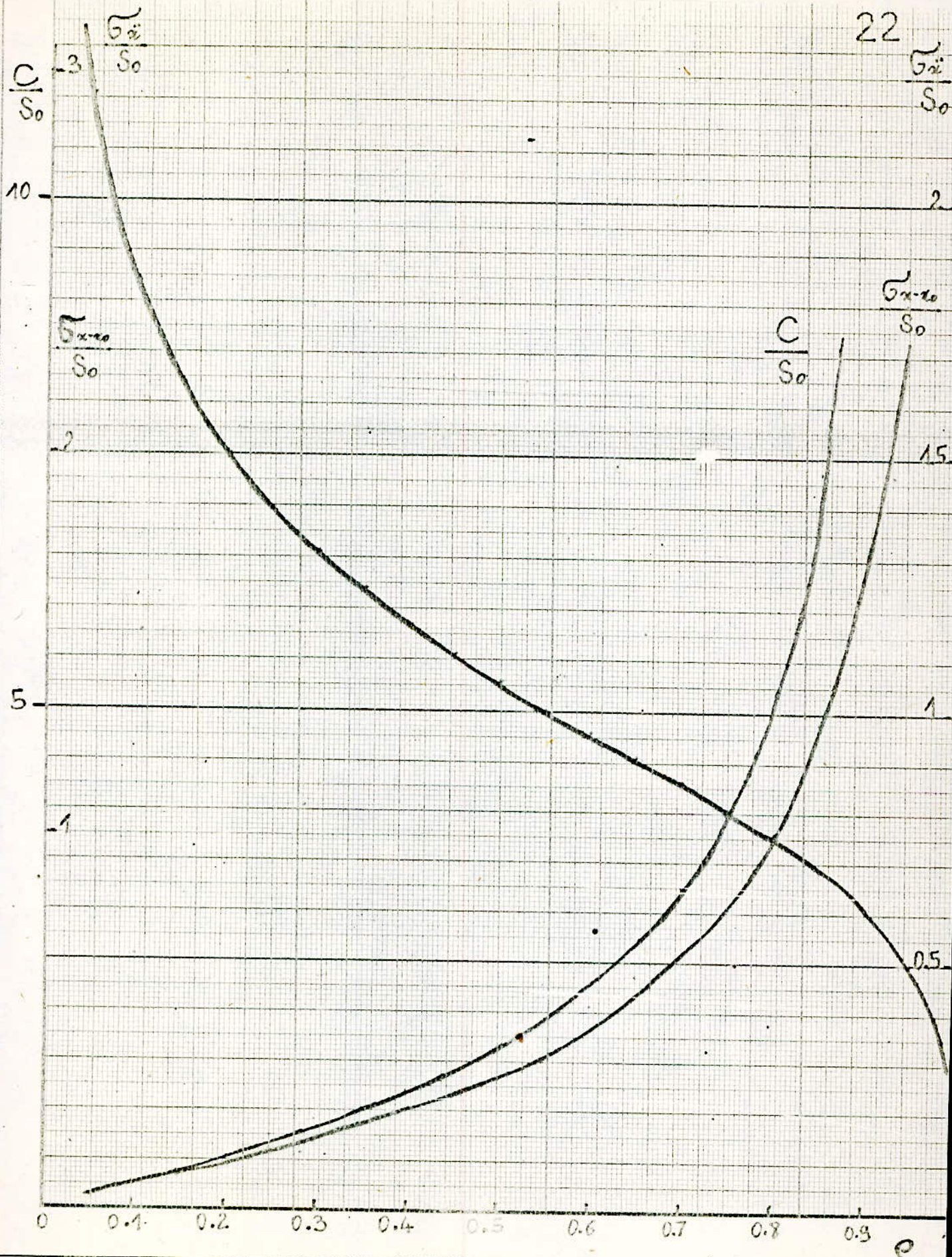


FIG 5.

CHAPITRE 3

ETUDE DES STRUCTURES

1/ ETUDE D'UN SYSTEME DISCRET

1.1: définition

Un système discret est constitué d'éléments permettant d'écrire les équations de son mouvement à l'aide d'un nombre fini de paramètres.

Le nombre de variables indépendantes étant égal au nombre de degrés de liberté qu'a ce système.

1.2: présentation du système

La figure 6 illustre le schéma du système à vibroisoler. Par analogie électromécanique, on peut représenter le système comme il est indiqué dans la même figure, et où $Z(s)$ représente l'impédance de la structure auquel est fixée la masse m objet de la vibroisolation.

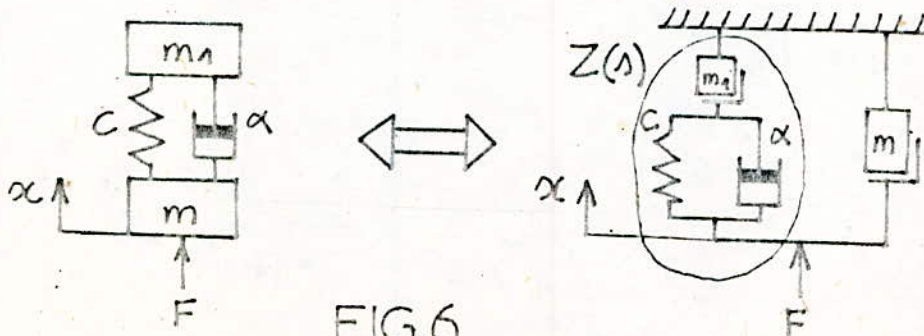


FIG.6

1.3: détermination de $Z(s)$

Un aperçu rapide permet de rappeler l'impédance des éléments constituant les circuits mécaniques :

impédance d'une masse : $Z_m = m s$

impédance d'un ressort élastique : $Z_c = C/s$

impédance d'un amortisseur classique : $Z_\alpha = \alpha$

La loi de composition des impédances ou association d'éléments en série parallèle, permet de déterminer l'impédance de la structure par :

$$\frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{m_1 s} + \frac{1}{C/s + \alpha} \Rightarrow \frac{1}{Z(s)} = \frac{m_1 s + C/s + \alpha}{m_1 s (C/s + \alpha)} \Rightarrow Z(s) = \frac{m_1 s (\alpha s + C)}{m_1 s^2 + \alpha s + C}$$

1.4: expression de $\Phi(s)$

On a déjà déterminé l'expression de la fonction de transfert optimale par : $\Phi(s) = \frac{(Z(s) + m s)(\sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1)}{\lambda (\lambda^{1/2} s^2 + \sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1)}$

on obtient :

$$\Phi(s) = \frac{\left(\frac{m_1 s (\alpha s + C)}{m_1 s^2 + \alpha s + C} + m s \right) (\sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1)}{\lambda (\lambda^{1/2} s^2 + \sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1)} = \frac{\lambda (\lambda^{1/2} s^2 + \sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1)}{[m_1 (\alpha s + C) + m (m_1 s^2 + \alpha s + C)] (\sqrt{2} \lambda^{1/4} s + 1)}$$

$$\Phi(s) = \frac{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

avec :

$$a_0 = C(m_1 + m)$$

$$a_1 = (m_1 + m)(\alpha + \sqrt{2} \lambda^{1/4} C)$$

$$a_2 = m m_1 + \sqrt{2} (m_1 + m) \lambda^{1/4}$$

$$a_3 = \sqrt{2} m m_1 \lambda^{1/4}$$

$$b_0 = C$$

$$b_1 = \alpha + C \sqrt{2} \lambda^{1/4}$$

$$b_2 = m_1 + \lambda^{1/4} (C + \sqrt{2} \alpha \lambda^{1/4})$$

$$b_3 = \lambda^{1/4} (\sqrt{2} m_1 + \alpha \lambda^{1/4})$$

$$b_4 = m_1 \lambda^{1/2}$$

Les paramètres m, m_1, α et C sont des données pratiques du problème, λ étant déterminé séparément.

1.5: conclusion

On remarque qu'au cours de cette brève étude du système discret, la facilité qu'on a rencontré pour le calcul de l'impédance et de là la détermination de $\Phi(s)$, du fait de la connaissance des éléments finis composant la structure, ainsi que la possibilité d'associer ces éléments par simples lois de composition, caractéristiques des systèmes discrets.

2/ETUDE MECANIQUE DU CORPS HUMAIN

2.1: objet de l'étude

Cette partie traite les problèmes concernant la détermination de la structure et des propriétés du corps humain, aussi bien du point de vue mécanique (impédance) que biologique, et aussi des effets des vibrations et la tolérance requise pour la protection d'une exposition à de telles conditions.

2.2: introduction

L'homme, comme système mécanique, est d'une complexité extrême et ses propriétés mécaniques sont très variables.

Les informations sont faibles en ce qui concerne la grandeur des forces capables de provoquer des dommages mécaniques au corps humain, et dans ce sens et pour éviter l'exposition à de tels dangers, il est nécessaire d'utiliser des

animaux expérimentaux pour cette étude. Cependant, il faut être attentif en ce qui concerne le degré de leurs applications aux humains, qui non seulement diffèrent de la taille, mais aussi bien de la structure anatomique et physiologique.

2.3: méthodes de mesures

La plupart des essais sur l'effet des vibrations sur le corps humain sont effectués en laboratoire, à l'intérieur d'un environnement simulé et contrôlé. Les méthodes de mesures et instrumentation doivent être adaptées à chaque propriété particulière du système biologique soumis aux tests et afin d'éviter toutes interférences avec le système d'excitation.

Ces propriétés, qui peuvent être physiques, physiologiques ou psychologiques, doivent être traitées séparément, ou pour le moins approximativement. Cette complexité des propriétés qui peuvent varier non seulement d'un individu à l'autre, mais aussi au cours du temps, les expériences et les motivations doivent être traitées nécessairement par des méthodes statistiques de façon adéquate, suite à un grand nombre d'observations et de contrôles soignés.

2.4: mesures des propriétés physiques

Pour déterminer les effets des vibrations sur le corps humain, la force mécanique dont l'homme est soumis doit être clairement spécifiée ainsi que l'amplitude des vibrations relative à la zone de contact avec le corps.

Il est préférable d'utiliser, pour la mesure de la réponse du corps, des méthodes de mesures

sans contact. Les rayons X s'adaptent avec succès pour la mesure des déplacements des organes internes. D'autres méthodes sont aussi utilisées: observations optiques, cinématographiques et stroboscopiques.

2.5: caractéristiques et applications

La liste suivante permet d'illustrer quelques caractéristiques mécaniques dynamiques dans l'étude du corps humain et indique les domaines où ces dernières trouvent des applications. Les caractéristiques et les applications qui nous intéressent sont soulignées.

Caractéristiques mécaniques	Domaines d'applications
résonance du crâne et viscosité du tissu cérébral	blessures de la tête
impédance du crâne et de la mastoïde	ouïes
Transmission des ultras sons à travers le crâne et le cerveau	Calibration et protection de l'ouïe
Transmission du son à travers le crâne et le cerveau	Diagnostique des tumeurs cérébrales
Propriétés mécaniques de la partie externe, centrale et interne de l'oreille	ouïes
Résonance de la bouche, du nez et de la cavité pharyngite	correction des défaillances de l'ouïe
Résonance de la mâchoire inférieure	Théorie de la génération de paroles, correction des défaillances de la parole.
Réponse du système. Bouche	ouïe
Thorax	respiration

propagation des impulsions de la pression cardiaque	physiologie du système circulatoire
Son du cœur	diagnostic et physiologie du cœur
Suspension du cœur	Ballistographie, blessures provenant des vibrations et chocs
Réponse du système thorax et masse abdominale	Protection contre les vibrations et les blessures par chocs.
<u>Impédance du sujet debout, assis ou étendu sur une plate-forme de vibration</u>	<u>isolation et protection contre les vibrations et les accélérations de courte durée</u>
impédance de la surface du corps	Ballistocardiographie

2.6: vibrations longitudinales

L'une des études les plus intéressantes du point de vue vibroisolation, concerne les vibrations longitudinales, car elles correspondent dans la majorité des cas à des excitations verticales que subissent les opérateurs humains: conducteurs, passagers, manoeuvres, ..., et dans des dispositions différentes: assis, debout ou étendu.

Le module de l'impédance mécanique d'un homme debout ou assis soumis à des vibrations verticales sur une plate-forme et obtenu expérimentalement, est montré dans la fig.7, en fonction de la fréquence. Selon la disposition du corps ainsi que l'effet de la présence d'une enveloppe semi rigide autour de l'abdomen, est aussi présenté. On y trouve de même l'impédance d'une masse pure m .

Notons que pour des vibrations de faibles amplitudes, le corps humain peut être considéré comme un système mécanique passif et linéaire.

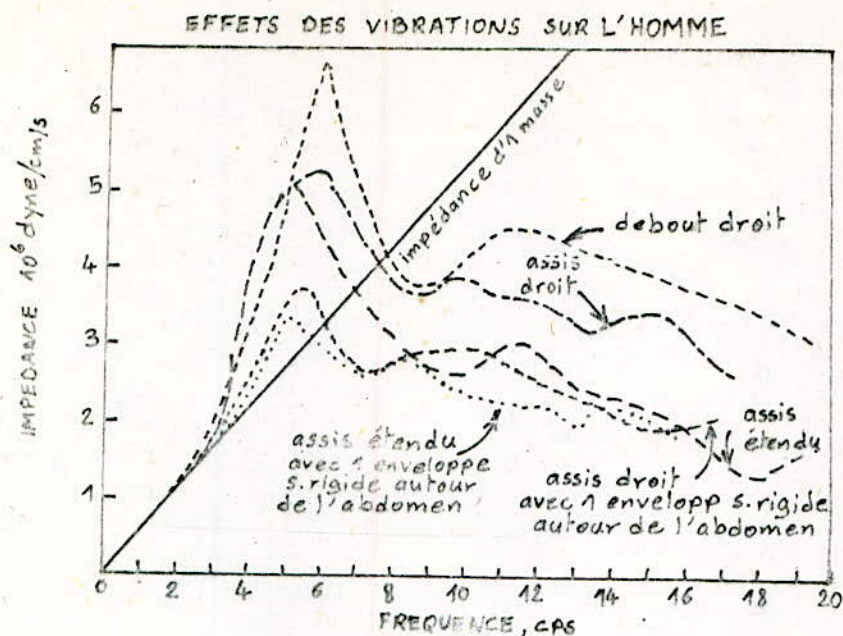


FIG.7

jusqu'à environ 2 cps (cycles par seconde), le corps humain se comporte comme une masse pure. Pour l'homme en position assis, la première resonance est entre 4 et 6 cps, et pour la position debout, les pics de resonance se presentent environ à 5 et 12 cps.

2.7: détermination de l'impédance

Dans cette partie, on va essayer de modéliser mathématiquement l'impédance obtenue expérimentalement afin qu'elle puisse être exploitée ultérieurement de façon convenable.

Cette modélisation consiste en l'approximation de la courbe de l'impédance par une courbe d'une fraction rationnelle.

L'approximation par une fraction rationnelle permet d'obtenir une grande précision dans l'assimilation de la courbe, et étant donné

que la fonction de transfert du système de vibration ne peut s'exprimer que par une fraction rationnelle pour d'éventuelles réalisations et utilisations. Comme on ne dispose que du module de l'impédance, la fonction d'approximation sera rationnelle en w .

Détermination des degrés des polynômes:

la courbe de l'impédance à deux pics rappelle celle d'un système à deux resonances, c'est à dire à deux degrés de liberté.

Pour un pareil cas, l'impédance se présente comme une fraction rationnelle avec le polynôme du numérateur en quatrième degré et celui du dénominateur en troisième degré.

pour des raisons qu'on va donner ensuite, le module de l'impédance aura la forme suivante:

$$|Z| = \frac{a_1 w^4 + a_2 w^2 + a_3}{b_1 w^3 + b_2 w}$$

Le problème consiste donc en la détermination des coefficients de cette fraction rationnelle.

Le problème peut se formuler d'une autre façon:

$$a_1 w^4 + a_2 w^2 + a_3 - |Z| b_1 w^3 - |Z| b_2 w = 0$$

donc pour chaque valeurs de w et de $|Z|$ obtenues pour un point de la courbe, on obtient une équation linéaire où les inconnues sont les coefficients de la fraction rationnelle.

Devant l'impossibilité de prendre tous les points de la courbe vu le nombre limité d'inconnues, les points à considérer doivent être choisis d'une façon judicieuse (sommets, points d'inflexion, ...).

Avec ces données, on arrive à établir un système d'équations linéaires où le vecteur a pour composantes les coefficients de la fraction rationnelle.

La résolution de ce système d'équations linéaires

se fera en utilisant une méthode numérique. Du fait du faible nombre d'équations et du besoin de la rapidité du calcul, on utilisera une méthode directe dite de Gauss-Jordan, et qui consiste à transformer la matrice en une matrice unité.

2.8: application à un opérateur assis
L'un des cas les plus fréquemment rencontré concerne l'application à un opérateur assis, auquel correspond les conducteurs de véhicules ou de machines.

La courbe du module d'impédance correspondante est présentée dans la figure 7 sous la nomination "assis droit".

Les coordonnées des points judicieux choisis pour servir de référence, sont relevées sur la courbe directement et sont présentées dans le tableau de la figure 8.

$ Z $ 10 ⁶ dyne/cm/s	0,9	6,7	3,8	3,9	3,6
ω cps	1,7	6,1	8,8	9,9	12,2

FIG.8

Pour des raisons de convergence des résultats, l'un des coefficients peut être préalablement fixé, comme par exemple on prendra: $a_3 = 1$.

L'équation devient: $a_1 \omega^4 + a_2 \omega^2 - |Z| b_1 \omega^3 - |Z| b_2 \omega = -1$

Le programme élaboré pour la résolution du système d'équations linéaires obtenu, est présenté en annexe à la fin de ce rapport.

L'exécution nous a donné les résultats suivants

$$a_1 = -0,815147 \cdot 10^{-2}$$

$$a_2 = 0,670934 \cdot 10^{-1}$$

$$a_3 = 1,000000$$

$$b_1 = -0,269338 \cdot 10^{-7}$$

$$b_2 = 0,813841 \cdot 10^{-6}$$

2.9: exploitation analytique

Nous avons vu auparavant que l'impédance mécanique du corps humain en position assis droit s'exprime comme une fraction rationnelle en s , et étant donné qu'on avait seulement approximer le module de cette impédance, on va essayer maintenant de déterminer l'impédance sous sa forme analytique en développant la relation suivante : $|Z(s)|^2 = Z(s) \cdot Z(-s)$

$$Z(s) = \frac{A_1 s^4 + A_2 s^3 + A_3 s^2 + A_4 s + A_5}{B_1 s^3 + B_2 s^2 + B_3 s + B_4}$$

c'est pour pouvoir identifier le produit $(Z(s) \cdot Z(-s))$ à $|Z(s)|^2$, qu'on a pris la forme particulière pour cette dernière.

Developpons chacun de ces membres :

$$Z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} ; N(s) = A_1 s^4 + A_2 s^3 + A_3 s^2 + A_4 s + A_5$$

$$D(s) = B_1 s^3 + B_2 s^2 + B_3 s + B_4$$

$$Z(-s) = \frac{N(-s)}{D(-s)} ; N(-s) = A_1 s^4 - A_2 s^3 + A_3 s^2 - A_4 s + A_5$$

$$D(-s) = -B_1 s^3 + B_2 s^2 - B_3 s + B_4$$

$$Z(s) \cdot Z(-s) = \frac{N(s) \cdot N(-s)}{D(s) \cdot D(-s)} , \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} N(s) \cdot N(-s) &= (A_1 s^4 + A_2 s^3 + A_3 s^2 + A_4 s + A_5)(A_1 s^4 - A_2 s^3 + A_3 s^2 - A_4 s + A_5) \\ &= A_1^2 s^8 + A_1 A_2 s^7 + A_1 A_3 s^6 + A_1 A_4 s^5 + A_1 A_5 s^4 - \\ &\quad A_1 A_2 s^7 - A_2^2 s^6 - A_2 A_3 s^5 - A_2 A_4 s^4 - A_2 A_5 s^3 + A_1 A_3 s^6 \\ &\quad + A_2 A_3 s^5 + A_3^2 s^4 + A_3 A_4 s^3 + A_3 A_5 s^2 - A_1 A_4 s^5 - A_2 A_4 s^4 \\ &\quad - A_3 A_4 s^3 - A_4^2 s^2 - A_4 A_5 s + A_1 A_5 s^4 + A_2 A_5 s^3 + A_3 A_5 s^2 \\ &\quad + A_4 A_5 s + A_5^2 \end{aligned}$$

après organisation suivant l'ordre décroissant des degrés et on posant $s = j\omega$, on obtient :

$$N(s) \cdot N(-s) = A_1^2 \omega^8 + (A_2^2 - 2A_1A_3) \omega^6 + (A_3^2 - 2A_1A_5 - 2A_2A_4) \omega^4 + (A_4^2 - 2A_3A_5) \omega^2 + A_5^2$$

de même :

$$\begin{aligned} D(s) \cdot D(-s) &= (B_1 s^3 + B_2 s^2 + B_3 s + B_4)(-B_1 s^3 + B_2 s^2 - B_3 s + B_4) \\ &= -B_1^2 s^6 - B_1 B_2 s^5 - B_1 B_3 s^4 - B_1 B_4 s^3 + B_1 B_2 s^5 + B_2^2 s^4 \\ &\quad + B_2 B_3 s^3 + B_2 B_4 s^2 - B_1 B_3 s^4 - B_2 B_3 s^3 - B_3^2 s^2 - B_3 B_4 s \\ &\quad + B_1 B_4 s^3 + B_2 B_4 s^2 + B_3 B_4 s + B_4^2 \end{aligned}$$

Après organisation suivant l'ordre décroissant des degrés et on posant $s = j\omega$, on obtient :

$$D(s) \cdot D(-s) = B_1^2 \omega^6 + (B_2^2 - 2B_1B_3) \omega^4 + (B_3^2 - 2B_2B_4) \omega^2 + B_4^2$$

On sait que $|Z(s)|$ s'écrit : $|Z(s)| = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_1 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_3}{b_1 \omega^3 + b_2 \omega}$

donc : $|Z(s)|^2 = \frac{N^2(\omega)}{D^2(\omega)}$, avec :

$$\begin{aligned} N^2(\omega) &= N(\omega) \cdot N(\omega) = (a_1 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_3)(a_1 \omega^4 + a_2 \omega^2 + a_3) \\ &= a_1^2 \omega^8 + a_1 a_2 \omega^6 + a_1 a_3 \omega^4 + a_1 a_2 \omega^6 + a_2^2 \omega^4 + a_2 a_3 \omega^2 + \\ &\quad a_1 a_3 \omega^4 + a_2 a_3 \omega^2 + a_3^2 \\ &= a_1^2 \omega^8 + 2a_1 a_2 \omega^6 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) \omega^4 + 2a_2 a_3 \omega^2 + a_3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^2(\omega) &= D(\omega) \cdot D(\omega) = (b_1 \omega^3 + b_2 \omega)(b_1 \omega^3 + b_2 \omega) \\ &= b_1^2 \omega^6 + 2b_1 b_2 \omega^4 + b_2^2 \omega^2 \end{aligned}$$

L'identification suivante : $|Z(s)|^2 = Z(s) \cdot Z(-s)$

conduit à l'autre : $N^2(\omega) = N(s) \cdot N(-s)$ et $D^2(\omega) = D(s) \cdot D(-s)$

et de là, on obtient les systèmes suivants :

$$\begin{cases} A_1^2 = a_1^2 \\ A_2^2 - 2A_1A_3 = 2a_1a_2 \\ A_3^2 + 2A_1A_5 - 2A_2A_4 = a_2^2 + 2a_1a_3 \\ A_4^2 - 2A_3A_5 = 2a_2a_3 \\ A_5^2 = a_3^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_1^2 = b_1^2 \\ B_2^2 - 2B_1B_3 = 2b_1b_2 \\ B_3^2 - 2B_2B_4 = b_2^2 \\ B_4^2 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations non linéaires permet d'obtenir les coefficients de la fraction rationnelle d'impédance.

On trouve après résolution directe du système :

$$A_1 = +0,815147 \cdot 10^{-2}$$

$$A_2 = 1,23698 \cdot 10^{-1}$$

$$A_3 = +0,4 \cdot 10^{-2}$$

$$A_4 = 3,7683 \cdot 10^{-1}$$

$$A_5 = 1,000000$$

$$B_1 = 0,269938 \cdot 10^{-7}$$

$$B_2 = 0$$

$$B_3 = 0,81341 \cdot 10^{-6}$$

$$B_4 = 0$$

2.10: expression de $\Phi(\lambda)$

On a déterminé précédemment que:

$$Z(\lambda) = \frac{A_1 \lambda^4 + A_2 \lambda^3 + A_3 \lambda^2 + A_4 \lambda + A_5}{\lambda (B_1 \lambda^2 + B_3)}$$

donc $\Phi(\lambda)$ a pour expression: $\Phi(\lambda) = \frac{(Z(\lambda) + m\lambda)(\sqrt{2} \lambda^{1/4} \lambda + 1)}{\lambda (\lambda^{1/2} \lambda^2 + \sqrt{2} \lambda^{1/4} \lambda + 1)}$

$$= \frac{[A_1 \lambda^4 + A_2 \lambda^3 + A_3 \lambda^2 + A_4 \lambda + A_5 + m\lambda^2 (B_1 \lambda^2 + B_3)] (\sqrt{2} \lambda^{1/4} \lambda + 1)}{\lambda^2 (B_1 \lambda^2 + B_3) (\lambda^{1/2} \lambda^2 + \sqrt{2} \lambda^{1/4} \lambda + 1)}$$

$$= \frac{a_5 \lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0}{b_6 \lambda^6 + b_5 \lambda^5 + b_4 \lambda^4 + b_3 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0}, \text{ avec:}$$

$$a_0 = A_5$$

$$a_1 = \sqrt{2} \lambda^{1/4} A_5 + A_4$$

$$a_2 = m B_3 + \sqrt{2} \lambda^{1/4} A_4 + A_3$$

$$a_3 = \sqrt{2} \lambda^{1/4} (A_3 + m B_3) + A_2$$

$$a_4 = \sqrt{2} \lambda^{1/4} A_2 + A_1 + m B_1$$

$$a_5 = \sqrt{2} \lambda^{1/4} (A_1 + m B_1)$$

$$b_0 = 0$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = B_3$$

$$b_3 = \sqrt{2} \lambda^{1/4} B_3$$

$$b_4 = B_3 \lambda^{1/2} + B_1$$

$$b_5 = \sqrt{2} \lambda^{1/4} B_1$$

$$b_6 = B_1 \lambda^{1/2}$$

m peut représenter la masse du support, de la plate-forme des tests ou plus simplement une partie du corps humain

2.11: conclusion

Nous avons vu qu'il est possible de déterminer la fonction de transfert optimale d'un système de vibroisolation par le simple fait de connaître l'impédance de la structure, obtenue à partir de données expérimentales.

C'est une méthode très utile en ce qui concerne les structures à paramètres inconnus ou variables, et inaccessibles par une méthode théorique.

3/ ETUDE D'UN SYSTEME CONTINU POUTRE CANTILEVER EN VIBRATIONS TRANSVERSALES

3.1: définition

Un système continu est un système dont le nombre de degrés de liberté est infini. Le mouvement d'un point du système n'est plus fonction seulement du temps, mais encore de l'espace. La possession d'une infinité de degrés de liberté implique la présence d'une infinité de fréquences propres.

3.2: caractérisation

Il existe deux méthodes essentielles permettant de caractériser une structure, tout au moins dans la mesure où celle-ci peut être considérée comme linéaire:

La première méthode consiste à la caractériser par ses modes propres de vibration, c'est la représentation modale.

La seconde représentation se fait par la matrice des impédances de la structure.

La représentation modale est la plus largement utilisée, surtout pour les structures faiblement amorties. En effet, la réponse de chaque mode propre devient négligeable lorsque l'excitation se fait loin de sa fréquence propre.

Le comportement d'une structure à une fréquence donnée dépend donc exclusivement des modes propres voisins de cette fréquence. Cette caractérisation permet de représenter la structure continue réelle par une structure ayant un nombre fini de degrés de liberté.

Les différents modes propres peuvent être caractérisés par les fréquences ou pulsations propres, les amortissements et les formes propres.

La représentation par les impédances est généralement moins utilisée, car, ces dernières dépendant de la fréquence, sont beaucoup moins faciles à stocker et à manipuler. Toutefois, on parvint à contourner cette difficulté en considérant ces impédances comme des fractions rationnelles, que l'on décompose en éléments simples.

On fait alors apparaître une représentation très proche de la représentation modale, puisqu'à chaque mode correspond un élément caractérisé par un pôle complexe dépendant de la fréquence propre et de l'amortissement, et par son numérateur, lié à la déformée modale.

3.3: méthode harmonique de mesure

Représentation modale:

Les caractéristiques peuvent être déterminées

Par des essais de vibrations. Les méthodes d'essai sont orientées surtout vers la détermination des caractéristiques modales du système (fréquences propres, formes propres).

Représentation par les impédances:

La mesure de l'impédance qui fait correspondre à un point de mesure donné est particulièrement facile, puisqu'il suffit d'appliquer une force sinusoïdale connue au point d'excitation, de mesurer la réponse au point de mesure et de faire le rapport réponse / excitation.

En affectant ces mesures pour des valeurs discrètes et suffisamment rapprochées de la fréquence, on obtient une définition expérimentale de l'impédance.

Cette méthode permet ensuite de déterminer les coefficients de la fraction rationnelle et d'en effectuer la décomposition en éléments simples. A la suite de ces opérations, les impédances sont définies sous formes analytiques.

Bien qu'il existe des méthodes théoriques, et qu'actuellement le développement des ordinateurs permet l'emploi des méthodes de calculs des structures par éléments finis, la détermination expérimentale n'a pas perdu son intérêt bien au contraire. D'une part, elle joue un rôle essentiel dans les procédures interactives de calcul où elle permet non seulement de les vérifier, mais également de modifier certains paramètres d'entrée, d'autre part, elle permet d'obtenir l'effet des frottements internes que l'on peut difficilement obtenir autrement.

3.4: vibrations transversales

Une vibration est dite transversale lorsque les déplacements se font perpendiculairement au sens de propagation des ondes.

Un schéma simplifié de l'installation est indiqué dans la figure 9.

Soit y le déplacement transversal et x l'abscisse d'un point de la poutre.

On voudrait établir l'expression de y
 Pour cela, on va exciter le système par une fonction harmonique : $F = F_0 \cos \omega t$

La méthode classique de résolution consiste à écrire l'équation d'équilibre d'un élément de la poutre pris arbitrairement (voir fig. 10)

D'après les hypothèses suivantes:

- le matériau est homogène, isentropique et obéit à la loi de Hook
- la section transversale est uniforme
- les déformations sont faibles
- les dimensions transversales sont petites devant la longueur de façon à négliger l'effet de l'effort tranchant.

L'équation d'équilibre s'écrit :

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T = F_i, \quad F_i : \text{force d'inertie}$$

$$F_i = dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

ρ : masse volumique

A : aire de la section transversale

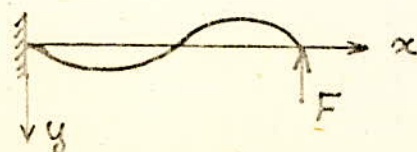


FIG.9

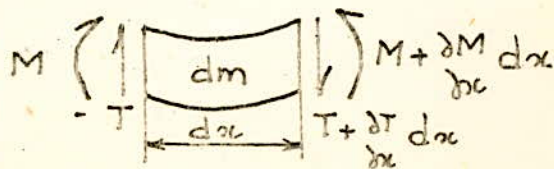


FIG.10

$M = -EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; E : module d'Young
 J : moment d'inertie de la section

$$T = \frac{\partial M}{\partial x} = -EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} ; \frac{\partial T}{\partial x} dx = -EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

donc:

$$T - EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx - T = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx, \text{ on pose: } a^2 = \frac{\rho A}{EJ}$$

on obtient alors : $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ (1)

(1) represente l'équation fondamentale des vibrations latérales des poutres.

Pour la résolution de l'équation différentielle aux dérivées partielles, on utilisera la méthode de Fourier, et qui consiste à décomposer y en produit de deux fonctions indépendantes:

$$y(x, t) = X(x) \cdot \zeta(t)$$

Donc l'équation (1) devient:

$$\zeta(t) \cdot X^{(4)}(x) + a^2 X(x) \cdot \zeta(t) = 0 \Rightarrow \frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -a^2 \frac{\zeta(t)}{\zeta(t)}$$

le premier membre de cette égalité ne dépend que de x , tandis que le second membre ne dépend que de t , cela revient à dire à ce que les deux membres sont égaux à une constante.

Soit cette constante égale à $(-\omega^2)$, et en posant $q^4 = a^2 \omega^2$, on obtient le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} X^{(4)}(x) - q^4 X(x) = 0 & (1) \\ \ddot{\zeta}(t) + \omega^2 \zeta(t) = 0 \end{cases}$$

$$\zeta(t) + \omega^2 \zeta(t) = 0$$

essayons de trouver des solutions exponentielles pour $X(x)$: $X(x) = e^{rx}$

d'après (1): $r^4 - q^4 = 0$, on a quatres solutions:

$$r = q, -q, jq, -jq, \text{ et aussi:}$$

$$X(x) = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} + C_3 e^{jqx} + C_4 e^{-jqx}$$

en connaissant que:

$$e^{jqx} = \cos qx + j \sin qx$$

$$e^{-jqx} = \cos qx - j \sin qx$$

$$e^{qx} = \operatorname{ch} qx + \operatorname{sh} qx$$

$$e^{-qx} = \operatorname{ch} qx - \operatorname{sh} qx$$

$$\text{d'où : } X(x) = A_1 \operatorname{sh} qx + A_2 \operatorname{ch} qx + A_3 \sin qx + A_4 \cos qx$$

Les constantes A_1 à A_4 sont déterminées d'après les conditions aux limites du système.

Ces conditions dépendent des liaisons et de la force appliquée.

Pour une poutre cantilever (encastree) et la force appliquée à l'extrémité libre, les conditions aux limites s'énoncent comme suit:

$$\text{pour } x=0 : X(0)=0 \text{ et } X'(0)=0$$

$$\text{pour } x=L : X''(L)=0 \text{ et } T(L)=-F$$

on obtient donc :

$$X(0)=0 \Rightarrow A_2 + A_4 = 0$$

$$X'(0)=0 \Rightarrow A_1 + A_3 = 0$$

$$X''(L)=0 \Rightarrow A_1 \operatorname{sh} qL + A_2 \operatorname{ch} qL - A_3 \sin qL - A_4 \cos qL = 0$$

$$T(L)=-F \Rightarrow -EJ X^{(3)}(L) \cdot \zeta(t) = -F_0 \cos \omega t$$

le terme $[EJ X^{(3)}(L)]$ a la dimension d'une force, d'où on peut déduire : $\zeta(t) = \cos \omega t$, et aussi:

$$X^{(3)}(L) = \frac{F_0}{EJ} \Rightarrow A_1 \operatorname{ch} qL + A_2 \operatorname{sh} qL - A_3 \cos qL + A_4 \sin qL = \frac{F_0}{EJq^3}$$

On obtient alors un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les constantes.

Le problème peut se formuler matriciellement:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \operatorname{sh} qL & \operatorname{ch} qL & -\sin qL & -\cos qL \\ \operatorname{ch} qL & \operatorname{sh} qL & -\cos qL & \sin qL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F_0}{EJq^3} \end{bmatrix}$$

En raison de la faible dimension de la matrice, on utilisera comme résolution du système la méthode de Cramer.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \operatorname{sh}qL & \operatorname{ch}qL & -\operatorname{sin}qL \\ \operatorname{ch}qL & \operatorname{sh}qL & -\operatorname{cos}qL \end{vmatrix} + \operatorname{cos}qL \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{ch}qL & \operatorname{sh}qL & -\operatorname{cos}qL \end{vmatrix} + \operatorname{sin}qL \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}qL & \operatorname{ch}qL & -\operatorname{sin}qL \end{vmatrix}$$

$$= [(-\operatorname{cos}qL \operatorname{ch}qL + \operatorname{sh}qL \operatorname{sin}qL) + (\operatorname{sh}^2qL - \operatorname{ch}^2qL)] + \operatorname{cos}qL [-\operatorname{cos}qL - \operatorname{ch}qL] + \operatorname{sin}qL [-\operatorname{sin}qL - \operatorname{sh}qL] = -2(1 + \operatorname{cos}qL \operatorname{ch}qL)$$

$$\Delta_1 = -\frac{F_0}{EJq^3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \operatorname{ch}qL & -\operatorname{sin}qL & -\operatorname{cos}qL \end{vmatrix} = -\frac{F_0}{EJq^3} [\operatorname{cos}qL + \operatorname{ch}qL]$$

$$\Delta_2 = \frac{F_0}{EJq^3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \operatorname{sh}qL & -\operatorname{sin}qL & -\operatorname{cos}qL \end{vmatrix} = \frac{F_0}{EJq^3} [\operatorname{sin}qL + \operatorname{sh}qL]$$

$$\Delta_3 = -\frac{F_0}{EJq^3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \operatorname{sh}qL & \operatorname{ch}qL & -\operatorname{cos}qL \end{vmatrix} = \frac{F_0}{EJq^3} [\operatorname{cos}qL + \operatorname{ch}qL]$$

$$\Delta_4 = \frac{F_0}{EJq^3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}qL & \operatorname{ch}qL & -\operatorname{sin}qL \end{vmatrix} = -\frac{F_0}{EJq^3} [\operatorname{sin}qL + \operatorname{sh}qL]$$

Finalement:

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{F_0}{2EJq^3} \cdot \frac{\operatorname{cos}qL + \operatorname{ch}qL}{1 + \operatorname{cos}qL \operatorname{ch}qL}, \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{F_0}{2EJq^3} \cdot \frac{\operatorname{cos}qL + \operatorname{sh}qL}{1 + \operatorname{cos}qL \operatorname{ch}qL}$$

$$A_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{F_0}{2EJq^3} \cdot \frac{\operatorname{cos}qL + \operatorname{ch}qL}{1 + \operatorname{cos}qL \operatorname{ch}qL}, \quad A_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{F_0}{2EJq^3} \cdot \frac{\operatorname{sin}qL + \operatorname{sh}qL}{1 + \operatorname{cos}qL \operatorname{ch}qL}$$

L'expression de $X(x)$ est donc

$$X(x) = \frac{F_0}{2EJq^3} \frac{(\operatorname{cos}qL + \operatorname{ch}qL)(\operatorname{sh}qx - \operatorname{sin}qx) + (\operatorname{sin}qL + \operatorname{sh}qL)(\operatorname{cos}qx - \operatorname{ch}qx)}{1 + \operatorname{cos}qL \operatorname{ch}qL}$$

et de même : $y(x,t) = X(x) \cdot \zeta(t)$, avec $\zeta(t) = \cos \omega t$

Dans le cas particulier où $x=L$, on a:

$$X(L) = \frac{F_0}{EJq^3} \cdot \frac{\operatorname{cos}qL \operatorname{sh}qL - \operatorname{sin}qL \operatorname{ch}qL}{1 + \operatorname{cos}qL \operatorname{ch}qL}$$

3.5: expression de l'impédance

L'impédance $Z_{xx'}$ en un point de la poutre est définie par le rapport de la force excitatrice

appliquée en un point d'abscisse x' , sur la réponse qui est la vitesse en un point d'abscisse x .

$$Z_{xx'}(s) = \frac{F_{x'}(s)}{Y(x, s)} = \frac{F_{x'}(s)}{X(x, s) \cdot T(s)}$$

Y et T représentent les transformées de Fourier respectivement de y et de τ .

$$\text{Alors : } Z_{xx'}(s) = \frac{F_{x'}(s)}{X(x) \cdot T(s)} = \frac{F_{x'}(s)}{T(s)} \cdot \frac{1}{X(x)}$$

dans le cas particulier où : $x = x' = L$ ($s = j\omega$)

$$Z_{LL}(s) = Z(j\omega) = \frac{1}{X(x)} = \frac{E J q^3}{\omega} \cdot \frac{1 + \cos qL \operatorname{ch} qL}{\cos qL \operatorname{sh} qL - \sin qL \operatorname{ch} qL} e^{-j\pi/2}$$

Le module de cette impédance a l'évolution illustrée dans la figure 15, aux fréquences propres, on obtient des branches infinies pour y .

L'équation des fréquences propres est :

$$\cos qL \operatorname{ch} qL + 1 = 0 \quad (1)$$

A chaque fréquence propre correspond un mode propre de vibration, le tableau de la figure 11 illustre ces modes propres de vibration selon le type de poutre considéré, les positions des noeuds de vibration sont aussi représentés.

Exemple : pour une poutre cantilever avec les données suivantes :

$$L = 1 \text{ m}, A = 7,85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2, \rho = 7810 \text{ kg/m}^3, E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa},$$

$$J = 4,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$$

la résolution de l'équation (1) conduit aux fréquences propres suivantes :

$$\omega = 1442, 3038, 25308, 49594, 81983 \text{ [rad/s]}$$

3.6: frottements internes

La structure cristalline des métaux n'est idéale et à cause de la présence de dislocations dans les joints de grains, un effet de frottements

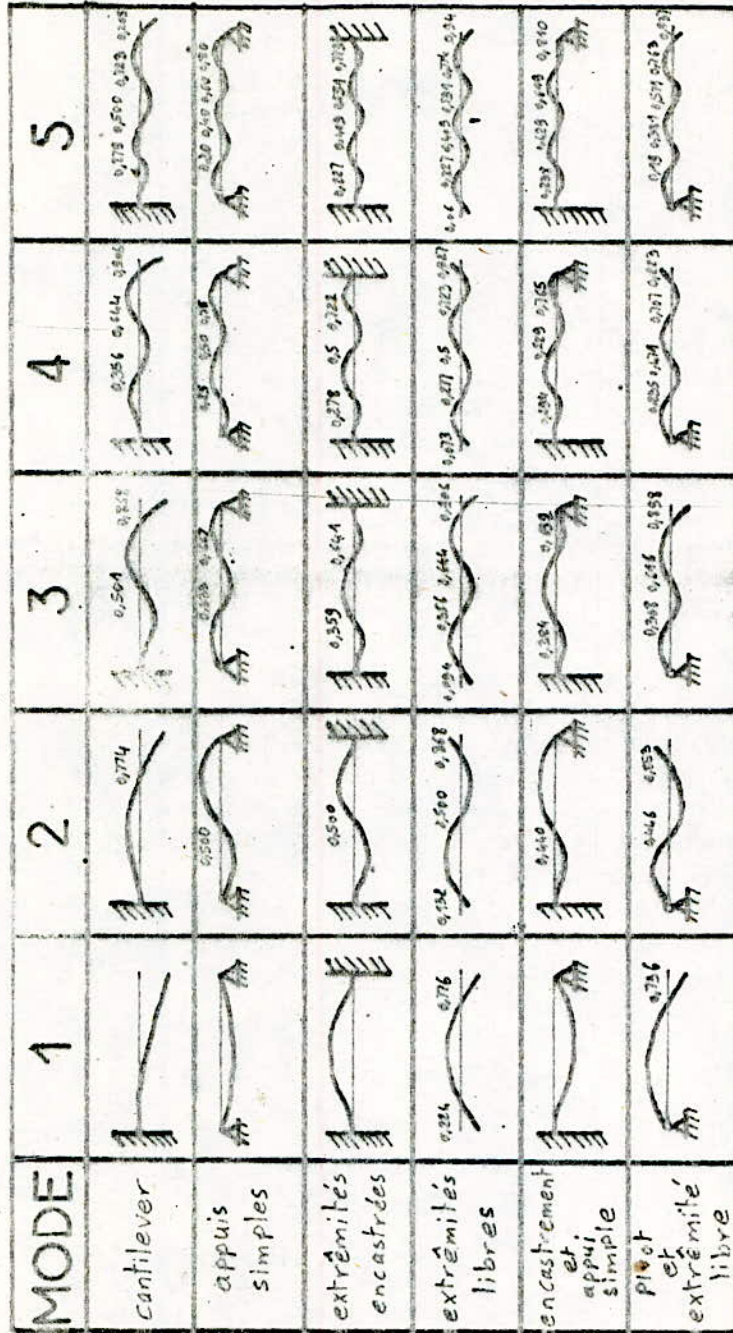


FIG.11

intérieurs se fait ressentir durant le mouvement, on obtient ainsi une dissipation de l'énergie de vibrations donc amortissement de ces dernières. L'énergie dissipée par cycle de vibration, dans la plupart des métaux, est très petite devant l'énergie de vibration, et de là le frottement interne des métaux n'a pas d'importance pratique, et ne peut être exploité pour amortir avec efficacité les systèmes mécaniques. Le facteur le plus intéressant qui caractérise l'amortissement des vibrations du système est le coefficient de qualité défini par :

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{énergie stockée dans le système}}{\text{énergie dissipée par cycle de vibration}}$$

de même il existe d'autres facteurs de la même propriété comme le facteur de dissipation η , fraction d'amortissement critique ξ ou le décrément logarithmique Δ .

Les structures métalliques et alliages présentent habituellement un faible amortissement (Q important) sauf pour des matériaux spécialement développés pour amortissement élevé comme certains alliages de cuivre manganèse, d'acier aluminium ou de magnésium.

La connaissance de Q est très importante dans la pratique. Pour le mesurer, deux types de méthodes sont possibles :

en choisissant le matériau sous la forme soit d'un fil supportant un disque, soit d'une éprouvette de flexion.

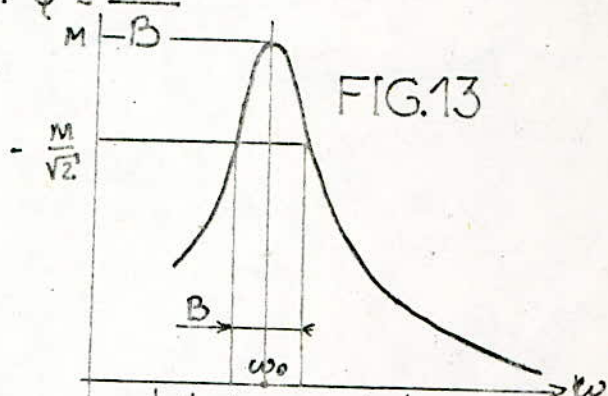
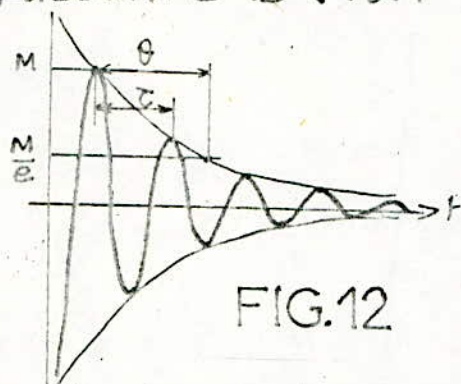
* Le système est écarté faiblement de sa position d'équilibre et l'on mesure le décrément logarithmique de ses oscillations (Voir fig. 12)

$$\Delta = 1/\theta \quad \text{et} \quad Q = \pi \cdot \theta/\tau$$

θ est la constante du temps d'amortissement des oscillations libres.

τ représente la période des oscillations libres.

* Le système est excité avec une fréquence variable permettant de mesurer sa bande passante B (Voir fig.13). $Q = \frac{\omega_0}{B}$



Le facteur de qualité d'un matériau dépend essentiellement de la contrainte que subit ce dernier, cette variation est représentée dans la figure 14. ($\eta = 1/Q$).

On remarque que pour un acier, cette variation est faible, c'est pourquoi on peut admettre avec une bonne approximation que Q est constant et est égal à 1000, tout au moins dans les limites pratiques d'utilisation.

On remarquera aussi, sur le même graphe, l'évolution des fibres plastiques spécialement élaborées pour l'amortissement.

L'introduction des frottements internes va complètement changer l'allure des courbes à la résonance. Dans de pareils cas, on obtient plus de branches infinies, mais les courbes vont admettre des maximums correspondant aux pics de résonance, et c'est le cas des systèmes réels. (Voir fig.15).

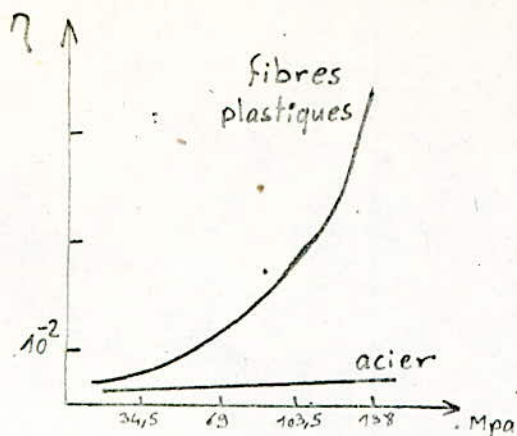


FIG.14

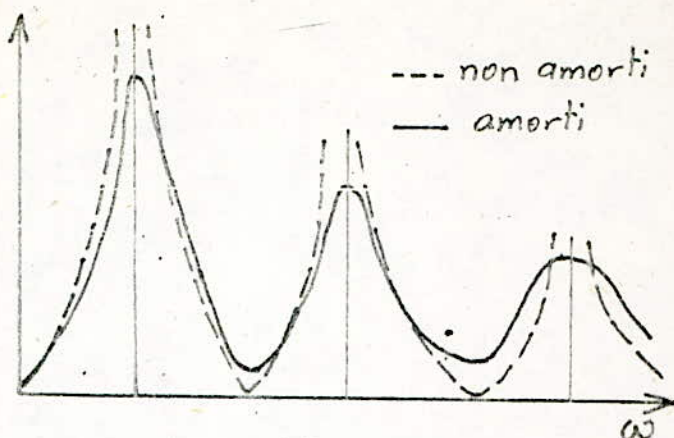


FIG.15

3.7: exploitation analytique

On voudrait maintenant obtenir une expression analytique de l'impédance du système réel, donc on va déterminer la valeur de cette impédance au point de résonance.

Etant donné que pour un système continu, on a plusieurs points de résonance, on va les traiter séparément de manière à identifier chaque mode propre à un mouvement oscillatoire à un seul degré de liberté et ayant le même facteur de qualité.

On ne prendra en considération que les deux premiers modes propres, en raison de leur importance et qui généralement couvrent un large domaine des fréquences usuelles.

Premier mode de vibration :

essayons d'identifier le mouvement de l'extrémité libre de la poutre à un mouvement d'un système classique à un degré de liberté dont il faut déterminer les valeurs de C et de M (Voir fig.16)

C est déterminé par une étude statique du

δ représente la flèche de la poutre.

$$\delta = \frac{F}{C} = \frac{1}{3} \cdot \frac{FL^3}{EI} \Rightarrow C = 3 \frac{EI}{L^3}$$

et de même : $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{M}} \Rightarrow M = C/\omega_0^2$

L'impédance à la résonance est donnée par la relation suivante : $Z_R = \frac{M\omega_0}{Q} = \frac{C}{\omega_0 Q}$

Pour les données citées précédemment :

et pour $\omega_0 = 1442$ (1^{er} mode) et $Q = 1000$

on obtient : $Z_R = 2,138 \cdot 10^{-4}$ N/m/s

Deuxième mode de vibration :

de même, le deuxième mode de vibration voit apparaître un noeud dont la position est repérée (voir fig.14), on va assimiler ce noeud à un appui simple. (Voir fig.17)

comme précédemment, C est déterminé par une étude statique

δ représente le déplacement de l'extrémité libre, il est donné par : $\delta = \frac{F}{C} = \frac{(2L-1)^3 - L^2(4L-1)}{12EI} \cdot F$

$$\Rightarrow C = \frac{12EI}{(2L-1)^3 - L^2(4L-1)}$$

L'impédance à la résonance est donc : $Z_R = \frac{C}{\omega_0 Q}$

avec les données citées précédemment

et pour $\omega_0 = 9038$ (2^{er} mode), la position du noeud est donnée par : $\frac{1}{L} = 0,774$, on obtient :

$$Z_R = 8,31 \cdot 10^{-4} \text{ N/m/s}$$

L'étude des autres modes de vibration sera de plus en plus compliquée et l'impédance va en augmentant. La figure 18 montre la nouvelle allure de la courbe admittance (inverse de l'impédance) pour mieux illustrer l'effet des frottements internes sur l'expression de l'impédance.

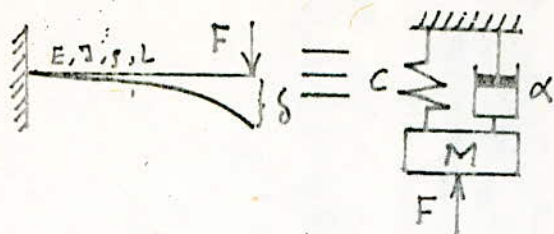


FIG.16

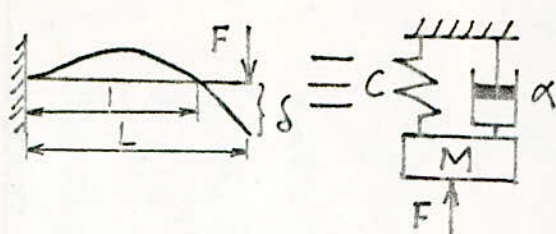


FIG.17

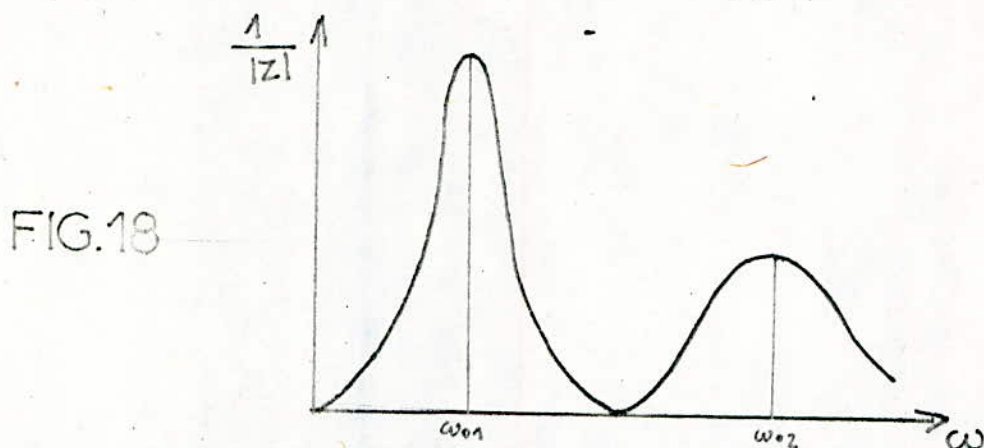


FIG.18

3.8: expression de $\Phi(s)$

Ayant obtenu l'allure de l'impédance pour deux modes propres, on voudrait obtenir une expression de cette impédance sous la forme d'une fraction rationnelle, la méthode étant identique à celle qu'on a utilisé durant l'étude du corps humain, vu l'allure identique de l'impédance (même nombre de résonance).

Après résolution, l'impédance de la structure continue peut être approximé par une fraction rationnelle de la forme:

$$Z(s) = \frac{A_1 s^4 + A_2 s^3 + A_3 s^2 + A_4 s + A_5}{B_1 s^3 + B_2 s}$$

Les coefficients de cette fraction rationnelle sont déterminés, et de là la fonction de transfert optimale du système de vibroisolation se trouve déduite de sa forme générale

et où $Z(s)$ représente la fraction rationnelle citée ci dessus.

3.9: conclusion

Après cette étude d'un exemple de système continu, on peut dire qu'il existe toujours un moyen pour assimiler ce système à un système discret dans un domaine restreint de fréquences, étant donné qu'on ne dispose pour la résolution des problèmes de vibration que des expressions analytiques sous forme de fractions rationnelles, et qui sont les caractéristiques des systèmes discrets.

CONCLUSIONS

Cette étude nous a permis de trouver l'expression analytique de la fonction de transfert optimale du système de vibroisolation, obtenue à partir de la méthode de Wiener-Hopf.

Comme applications à ces méthodes de résolution des problèmes d'isolation des vibrations, on a choisi des exemples de structures ayant chacune une appartenance à des domaines bien distincts. Les systèmes discrets présentent une grande souplesse de manipulation mathématique en raison de la connaissance des éléments constitutants et de la possibilité de les associer par simples lois de composition. Les systèmes continus sont plus difficile à aborder, mais une étude préliminaire permet d'assimiler ces derniers à des systèmes discrets dans un domaine restreint de fréquences.

Les systèmes, dont la structure est inconnue et inaccessible, ne sont abordés qu'à partir de données expérimentales. L'étude faite nous a permis d'aboutir aux résultats voulus par simple approximation de l'impédance à celle des systèmes connus.

Il ne nous reste maintenant que la réalisation effective de ce système de vibroisolation, étude qui s'avère plus onéreuse et plus sérieuse.

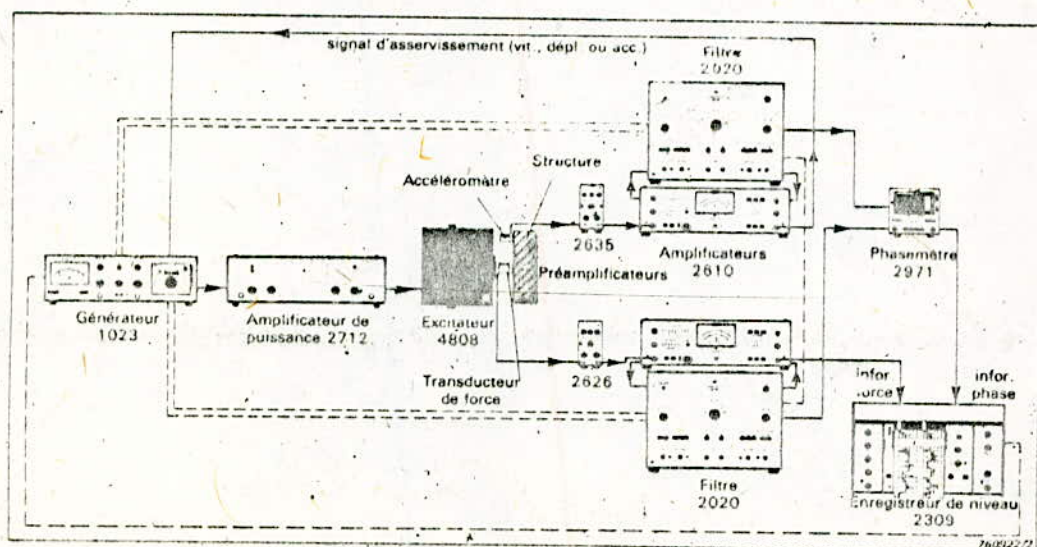
ANNEXES'

APPAREIL DE MESURES D'IMPEDANCE MECANIQUE

Les mesures d'impédance mécanique, correspondant aux courbes représentant la vitesse de vibration avec une force et leurs phases respectives, sont couramment utilisées pour la détermination des fréquences naturelles, de la forme des modes, des propriétés des matériaux et de la prévision de leur comportement dans des systèmes combinés à partir des mesures sur les composantes individuelles.

D'autres quantités peuvent être maintenues constantes, tandis que d'autres peuvent être mesurées pour la détermination de la flexibilité, de la rigidité, de la compliance et de la masse dynamique, par exemple.

Le schéma de la figure 19 représente un montage typique pour de telles mesures.



```

10 REM *****
20 REM *****
30 REM *****
40 REM *****
50 REM *****
60 OPEN "SDM.DAT" FOR OUTPUT AS #1
70 DIM A(20),B(20),C(10),R(20),L(20)
80 FOR I=1 TO 20
90 R(I)=(I-1)/20
100 L(I)=R(I)/(1-R(I))
110 GOSUB 220
120 NEXT I
130 I=1
140 R(I)=.01
150 L(I)=R(I)/(1-R(I))
160 GOSUB 230
170 I=21
180 R(I)=.99
190 L(I)=R(I)/(1-R(I))
200 GOSUB 230
205 GOTO 180
210 REM *****
220 A(I)=3*L(I)^(1/4)/(1+2*I)
230 C(I)=L(I)^(1/4)/(1+2*I)
240 G(I)=2*(1/3)*L(I)^(3/4)
250 RETURN
260 PRINT #1,"*****"
270 PRINT #1,"*****"
280 PRINT #1,"*****"
290 PRINT #1,"*****"
300 PRINT #1,"*****"
310 PRINT #1,"*****"
320 PRINT #1,"*****"
330 PRINT #1,"*****"
340 PRINT #1,"*****"
350 PRINT #1,"*****"
360 PRINT #1,"*****"
370 PRINT #1,"*****"
380 PRINT #1,"*****"
390 PRINT #1,"*****"
400 PRINT #1,"*****"
410 PRINT #1,"*****"
420 PRINT #1,"*****"
430 PRINT #1,"*****"
440 PRINT #1,"*****"
450 PRINT #1,"*****"
460 PRINT #1,"*****"
470 PRINT #1,"*****"
480 PRINT #1,"*****"
490 PRINT #1,"*****"
500 PRINT #1,"*****"
510 PRINT #1,"*****"
520 PRINT #1,"*****"
530 PRINT #1,"*****"
540 PRINT #1,"*****"
550 PRINT #1,"*****"
560 PRINT #1,"*****"
570 PRINT #1,"*****"
580 PRINT #1,"*****"
590 PRINT #1,"*****"
600 PRINT #1,"*****"
610 PRINT #1,"*****"
620 PRINT #1,"*****"
630 PRINT #1,"*****"
640 PRINT #1,"*****"
650 PRINT #1,"*****"
660 PRINT #1,"*****"
670 PRINT #1,"*****"
680 PRINT #1,"*****"
690 PRINT #1,"*****"
700 PRINT #1,"*****"
710 PRINT #1,"*****"
720 PRINT #1,"*****"
730 PRINT #1,"*****"
740 PRINT #1,"*****"
750 PRINT #1,"*****"
760 PRINT #1,"*****"
770 PRINT #1,"*****"
780 PRINT #1,"*****"
790 PRINT #1,"*****"
800 PRINT #1,"*****"
810 PRINT #1,"*****"
820 PRINT #1,"*****"
830 PRINT #1,"*****"
840 PRINT #1,"*****"
850 PRINT #1,"*****"
860 PRINT #1,"*****"
870 PRINT #1,"*****"
880 PRINT #1,"*****"
890 PRINT #1,"*****"
900 PRINT #1,"*****"
910 PRINT #1,"*****"
920 PRINT #1,"*****"
930 PRINT #1,"*****"
940 PRINT #1,"*****"
950 PRINT #1,"*****"
960 PRINT #1,"*****"
970 PRINT #1,"*****"
980 PRINT #1,"*****"
990 PRINT #1,"*****"
1000 PRINT #1,"*****"

```


***** VALEURS DES DISPERSIONS *****				
RHO	LAMBDA	ACCEL.	DEPL. REL.	FONCT.
.01	.010101	3.34569	.112649E-01	.450597E-01
.03	.526316E-01	2.21444	.388499E-01	.1554
.1	.111111	1.83712	.680414E-01	.272166
.15	.176471	1.63647	.096263	.385052
.2	.25	1.5	.125	.5
.25	.733333	1.79591	.155101	.620403
.3	.428571	1.3109	.187272	.749087
.35	.538462	1.23319	.222239	.888957
.4	.666667	1.17381	.260847	1.04339
.45	.818182	1.11523	.304153	1.21661
.5	1	1.06066	.353553	1.41421
.55	1.22222	1.00876	.410977	1.64391
.6	1.5	.958415	.479207	1.91683
.65	1.85714	.908584	.562457	2.24983
.7	2.33333	.858187	.667479	2.66992
.75	3	.805927	.805928	3.22371
.8	4	.75	1	4
.85	5.66667	.687455	1.29853	5.19411
.9	9	.612373	1.83712	7.34847
.95	19	.508022	3.21751	12.37
.99	99.0001	.34254	11.0964	44.3856


```

270 FOR I=1 TO G
280 IF I<K THEN GO TO 330
290 C=A(I,K)
300 FOR J=K TO E+1
310 A(I,J)=A(I,J)-C*A(K,J)
320 NEXT J
330 NEXT I
340 NEXT K
345 REM ***** AFFICHAGE DES RESULTATS *****
350 J=G+1
360 PRINT"*****LES VALEURS DES COEFFICIENTS DU NUMERATEUR SONT: *****"
370 PRINT"*****          PAR ORDRE DECREISSANT DES DEGRES *****"
375 PRINT"-----"
380 FOR I=1 TO E-1
390 PRINT A(I,J)
400 PRINT"-----"
405 NEXT I
406 PRINT"1,000000"
408 PRINT"-----"
410 PRINT"*****LES VALEURS DES COEFFICIENTS DU DENOMINATEUR SONT: *****"
420 PRINT"*****          PAR ORDRE DECREISSANT DES DEGRES *****"
425 PRINT"-----"
430 FOR K=0 TO G
440 PRINT Z(K,J)
450 PRINT"-----"
455 NEXT K
460 REM ***** VECTEUR DES DONNEES *****
465 REM *****
125 DATA 1,776,791,6,1,1,756,1,1,3,886,9,9,3,956,12,2,3,886,
470 REM *****
480 END

```

BIBLIOGRAPHIE

- A.H. Church
 "mechanical vibrations"
 Jhon Wiley & sons, inc 1961
- R. Gabillard
 "vibrations et phénomènes de propagation"
 Dunod université 1972
- C.M. Harris, C.H.E. Crede
 "shock and vibration"
- G.C. Newton, J.L.A Gould, J.F Kaiser
 "analytical design of linear feedback controls"
 Jhon Wiley & sons, inc 1957
- "Technique de l'ingenieur": A280, R3140
- M. Ksiazek, c. AhriKencheikh
 "vibroisolation optimum des excitations stochastiques"
 ENP juin 1983
- M. Ksiazek, M. Trai
 "comparaison d'efficacités de certains systèmes
 de vibroisolation" ENP juin 1985
- M. Ksiazek, N. Zerrouatti
 "analyse des systèmes mécaniques par analogie
 électromécanique et impédance" ENP juin 1983
- Catalogue résumé: BRÜEL & KJÆR 1980

