

P0006/05B

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**Ecole Nationale Polytechnique**



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**Département Génie Industriel**

Mémoire de fin d'études  
en vue de l'obtention du diplôme  
d'Ingénieur d'État en Génie Industriel

**Intitulé**

**Approche statistique du  
problème du voyageur de  
commerce et résolution  
par un algorithme de fourmis**

**Proposé par :**

Pr. A. OUABDESSELAM

**Étudié par :**

Mohamed Salim  
GUÉNATRI

**Dirigé par :**

Pr. A. OUABDESSELAM  
Dr. T. LAMRAOUI

**Promotion 2005**

E. N. P. 10, Avenue Hassan BADI. El-Harrach. Alger

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Département Génie Industriel

Mémoire de fin d'études  
en vue de l'obtention du diplôme  
d'Ingénieur d'État en Génie Industriel

Intitulé

**Approche statistique du  
problème du voyageur de  
commerce et résolution  
par un algorithme de fourmis**

Proposé par :

Pr. A. OUABDESSELAM

Étudié par :

Mohamed Salim  
GUÉNATRI

Dirigé par :

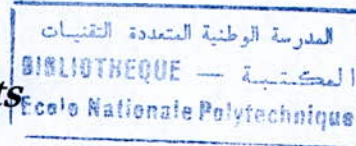
Pr. A. OUABDESSELAM  
Dr. T. LAMRAOUI

Promotion 2005

E. N. P. 10, Avenue Hassan BADI, El-Harrach, Alger



## Remerciements



*Je tiens à remercier mes encadreurs Pr. OUABDESSELAM pour ses conseils généraux mais pertinents, et M. LAMRAOUI pour avoir validé mon travail.*

*J'exprime ma profonde gratitude à tous les enseignants que je n'oublierai sans doute jamais. Je pense à M. OUABDESSELAM, Mme. BELMOKHTAR, Mme. BENCHERIF, Mme. KETTAB, M. AOUDLA, M. BOUKABOUS et à M. BENYOUCEF en Génie Industriel ; à Mme. CHIKHI, Mme. OUSSEDDIK et M. BOUDJEMAA en Sciences Fondamentales ; ainsi qu'à Mme. BOUDOUA.*

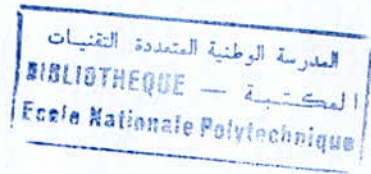
*Je remercie mes amis Amine KHELIL, Redouane LAHSEN, Sihem LEHTIHET, Yacine BENALOUANE, ainsi tous les autres qui m'ont aidé ou soutenu.*

*Je remercie Dr. Djamel TAHAR pour s'être proposé et pour avoir corrigé, d'un point de vue forme, une partie de ce présent document.*

*Je remercie Pr. William J. COOK (« Bill »), pour ses informations utiles concernant le logiciel CONCORDE.*

*Je remercie M. Stéphane GIRARD, de l'INRIA Grenoble, ainsi que Mme. Armelle GUILLOU, de l'Université Pierre et Marie CURRIE, pour leurs informations spécifiques et particulières concernant la théorie des valeurs extrêmes et le logiciel EXTREMES.*

## Dédicaces



*A la mémoire de notre regretté ami et camarade Chérif BENSALÉM*

*A ma regrettée grand-mère, Mina HALFAOUI, qui s'est sacrifiée pour  
une Algérie « Libre, Fièrè et Digne »*

*A mon regretté grand-père, Abd-El-Kader GUÉNATRI, qui m'a  
toujours encouragé et soutenu.*

*A tous les incompris de ce monde de plus en plus formaliste.*

*A la mémoire de toutes les victimes du terrorisme.*

*A toutes les victimes de l'injustice.*

*A tout ceux qui ont fait ou qui font du mal pour « Le Bien ».*

*A ceux qui croient en la Justice, sinon en la Vengeance, et non à la  
lâcheté et à la trahison du pardon.*

*A ceux qui savent se distinguer par leur Neutralité, leur  
Objectivité, leur Professionnalisme.*



## Résumé

L'objet de ce travail consiste à :

- Suivre une approche statistique pour la construction de modèles d'estimation de la longueur de la solution optimale du problème du voyageur de commerce ;
- Présenter, implémenter, développer et analyser une méta-heuristique d'intelligence artificielle multi-agents basée sur le comportement des fourmis, en l'occurrence un système de colonie de fourmis avec désensibilisation ;
- Montrer l'intérêt des heuristiques stochastiques, tels que les algorithmes de fourmis, pour l'estimation de la solution optimale par le paramètre de position de la loi de Weibull correspondant à la distribution des solutions locales ; ceci comme réponse aux limites de l'extension de l'étude statistique au cas asymétrique.

**Mots-clefs :** TSP, STSP, ATSP, estimation statistique, longueur optimale du TSP, analyse résiduelle, algorithmes de fourmis, désensibilisation des systèmes de fourmis, méta-heuristique.

## Abstract :

The object of this work consists in:

- Following a statistical approach to build assessment models of optimal solution length of the travelling salesman problem;
- Presenting, implementing, developing and analyzing a multi-agents meta-heuristic of artificial intelligence, based on the ant colony behavior;
- Showing that the stochastic heuristics, like ant algorithms, offer a good assessment of the optimal solution length by the position parameter of Weibull law corresponding to the distribution of their local solutions; this as an answer to the limits of the widening to the asymmetric case of the statistical study.

**Keywords:** TSP, STSP, ATSP, statistic assessment, TSP optimal length, residual analysis, ant algorithm, desensitization method, meta-heuristic.



## **Introduction**

Le Problème du Voyageur de Commerce fait partie des problèmes de recherche opérationnelle, et en particulier d'optimisation combinatoire, qui suscitent le plus d'intérêt aussi bien théorique que pratique. Le « Travelling Salesman Problem » est NP-difficile. Il impose ainsi un temps d'exécution qui croît très rapidement même lorsque la taille du problème n'augmente que d'une seule unité.

La difficulté des méthodes exactes a motivé l'apparition de l'approche heuristique, donnant des solutions approximatives en un temps raisonnable. Parmi l'ensemble des heuristiques, on distingue celles de recherche locale et celles de construction de tournée.

Ultérieurement, de nouvelles méthodes, appelée méta-heuristiques, ont vu le jour. Elles se basent sur une recherche globale et stochastique. Le développement des techniques de l'intelligence artificielle a également contribué à l'apparition de nouvelles méthodes inspirées de comportements naturels, parmi lesquelles figurent les algorithmes de fourmis. L'intérêt de ces méthodes est grandissant et leurs performances sont meilleures. Les heuristiques permettent d'appréhender des problèmes de tailles très importantes. Cependant, l'évaluation de leurs performances sur des problèmes de grandes tailles se heurte à une difficulté : comment connaître la longueur de la solution exacte pour pouvoir quantifier la précision de la solution trouvée par l'algorithme ?

Dans le but d'apporter des éléments de réponse à cette problématique, en proposant d'éventuelles alternatives aux bornes inférieures utilisées, nous nous proposons d'effectuer une étude statistique pour la caractérisation du Problème du Voyageur de Commerce. On tentera de modéliser un (voire plusieurs) estimateur(s) de la longueur de la solution optimale du Problème du Voyageur de Commerce.

Dans ce projet, on développera également un algorithme de fourmis avec désensibilisation. Son apport serait double : trouver une solution approximative satisfaisante d'une part, et servir de base pour l'estimation statistique de la longueur optimale du TSP, selon la méthode de [Golden, 1977].

Ainsi, en suivant le plan de travail décrit ci-après, nous espérons parvenir aux résultats escomptés.

Enfin, ce travail est dit « Projet de Fin d'Etude ». Il s'inscrit dans le cadre de la finalisation d'un cycle d'Ingénieur. Il se doit donc d'être à la hauteur par sa rigueur, son contenu et son apport. Notre but est également de répondre au mieux à toutes ces exigences, ce qui nous aidera fortement à atteindre notre objectif premier : l'étude en soi.

**J'espère que ce projet, ce travail, ce mémoire de fin de graduation, pour lequel je me suis dévoué corps et âme, matérialisera les prémices d'une bénédiction, une sortie des ténèbres.**



## TABLE DES MATIERES

<i>Dédicaces</i>	2
<i>Remerciements</i>	3
<b>Résumé</b>	4
<b>Introduction</b>	5
<b>Table des matières</b>	6
<b>Section A : Le problème du voyageur de commerce</b>	<b>9</b>
<b>Chapitre I : Le problème du voyageur de commerce</b>	<b>10</b>
<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>A.I.1 Généralités sur le problème du voyageur de commerce</b>	<b>11</b>
A.I.1.a. Enoncé du problème	11
A.I.1.b. Historique succinct	11
A.I.1.c. Point de vue Formel	12
A.I.1.d. Complexité	12
A.I.1.e. Intérêt	12
<b>A.I.2. Méthodes de résolution du problème</b>	<b>13</b>
A.I.2.a. Heuristiques constructives	14
A.I.2.a.1. Algorithme du plus proche voisin	14
A.I.2.a.2. Algorithme de Clark and Wright (1964)	14
A.I.2.b. Procédures d'insertion	14
A.I.2.b.1. Méthode de l'élastique	15
A.I.2.c. Recherche locale	15
A.I.2.c.1. Heuristique 2-Opt	16
A.I.2.c.2. Lin et Kernighan	16
A.I.2.d. Algorithme stochastique (méta-heuristique)	17
A.I.2.d.1. Recuit simulé	17
A.I.2.d.2. Algorithme génétique	19
A.I.2.d.3. Colonies de fourmis	19
A.I.2.d.4. Réseau de neurones artificiels	20
A.I.3. Analyse empirique	23
A.I.4. Analyse du plus grand écart par rapport à l'optimum	23
A.I.5. Analyse probabiliste	24
<b>Conclusion</b>	<b>24</b>
<b>Section B : Le problème du voyageur de commerce par les algorithmes de fourmis</b>	<b>25</b>
<b>Chapitre I : les différentes générations d'algorithmes de fourmis</b>	<b>26</b>
<b>Introduction</b>	<b>27</b>
B.I.1. Les Systèmes de fourmis ( <i>Ant System ou AS</i> )	27
B.I.2. Les systèmes de colonies de fourmis ( <i>Ant Colony System : ACS</i> )	28
B.I.3. Systèmes de colonie de fourmis avec désensibilisation ( <i>ACS-DM'</i> )	29

B.I.3.a. Utilisation de la désensibilisation sur un algorithme de fourmis	30
B.I.3.b. Implémentation de ( <i>ACS-DM</i> )	32
B.I.4. Autres travaux sur les algorithmes de fourmis	32
Conclusion	33
Chapitre II : Implémentation et analyse de la méthode ACS-DM	38
Introduction	39
B.II.1. Description sommaire du programme Matlab	40
B.II.2. Paramétrisation de <i>ACS-DM</i> (sans initialisation)	40
B.II.2.a. nombre de fourmis	42
B.II.2.b. Valeur D pour la désensibilisation	43
B.II.3. Problème du paramètre $\beta$ et de la longueur des arcs	46
B.II.4. <i>ACS-DM</i> avec initialisation	46
B.II.4.a. Choix de l'heuristique d'initialisation (cas ATSP, cas STSP)	50
B.II.4.b. Paramétrisation du nouveau coefficient d'amplification de la trace sur le tour initial	52
B.II.4.c. Etude des performances	52
B.II.4.c.1. Test sur des problèmes de la bibliothèque STSP	57
B.II.4.c.2. Test sur des problèmes de la bibliothèque ATSP	62
B.II.4.d. Implémentations d'une heuristique hybride ACS-DM / 2-opt	68
B.II.4.d. Etude de l'évolution de la solution en fonction des itérations	73
Conclusion	74
Section C : Approche statistique du problème du voyageur de commerce	75
Chapitre I : L'estimation statistique de la longueur optimale de la solution du voyageur de commerce	76
Introduction	77
C.I.1. Cas du Problème du Voyageur de Commerce Symétrique (STSP)	78
C.I.2. Cas du Problème du Voyageur de Commerce Asymétrique (ATSP)	79
C.I.3. Eléments de la Constante du Problème du Voyageur de Commerce	80
Conclusion	81
Chapitre II : Modélisation d'estimateurs de la longueur de la solution optimale du problème du voyageur de commerce symétrique	82
Introduction	83
C.II.1. Le modèle d'estimation initial	84
C.II.1.a. Réestimation des paramètres du modèle initial	85
C.II.1.b. Analyse résiduelle de validation	86
C.II.2. Construction d'autres modèles et étude comparative	93
C.II.1.a. Les différents modèles introduits et ajustement	96
C.II.1.b. Les Analyse résiduelle de validation	97



C.II.1.c. Test et analyse résiduelle des modèles en extrapolation	104
C.II.1.d. Comportement asymptotique	109
C.II.2. Etude du modèle hybride C-HKstat	111
C.II.3. Résultats particuliers	121
Conclusion	122
Chapitre III : Modèle d'estimation de la solution optimale d'ATSP générés par des instances probabilistes	123
Introduction	125
C.III.1. Caractérisation des paramètres des ATSP aléatoires et construction du modèle d'estimation	126
C.III.1.a. Analyse des paramètres caractérisant un ATSP aléatoire donné	126
C.III.1.b. Paramétrisation du modèle A	127
C.III.2. Analyse de validation du modèle construit	134
C.III.3. Vers une instance de génération d'ATSP pour l'estimation de sa la longueur optimale	137
Conclusion	140
<i>Bibliographie</i>	141
Glossaire	144
Annexes	145

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

## **SECTION A**

# **LE PROBLEME DU VOYAGEUR DE COMMERCE**



## **CHAPITRE I**

### **Le problème du voyageur de commerce**

## A.I.1 Généralités sur le problème du voyageur de commerce



### A.I.1.a. Enoncé du problème :

Un voyageur de commerce doit visiter  $n$  villes données, en passant par chaque ville exactement une fois. Il commence par une ville quelconque et termine en retournant à la ville de départ. Les distances entre les villes sont connues. Quel chemin faut-il choisir afin de minimiser la distance parcourue ? La notion de distance peut être remplacée par d'autres notions comme le temps écoulé ou l'argent dépensé : dans tous les cas, on parle de coût.

### A.I.1.b. Historique succinct<sup>1</sup>

#### 19<sup>ème</sup> siècle

Les premières approches mathématiques exposées pour le problème du voyageur de commerce ont été traitées au 19<sup>ème</sup> siècle, par les mathématiciens Sir William Rowan Hamilton et Thomas Penyngton Kirkman. Hamilton en a fait un jeu : Hamilton Icosian game. Les joueurs devaient réaliser une tournée passant par 20 points en utilisant uniquement les connections prédéfinies.

#### Années 1930 :

Le PVC est traité plus en profondeur par Karl Menger à Harvard. Il est ensuite développé à Princeton par les mathématiciens Hassler Whitney et Merrill Flood. Une attention particulière est portée sur les connections, ainsi que sur la croissance du PVC par Menger et Whitney.

#### 1954 :

Solution du PVC pour 49 villes par Dantzig, Fulkerson et Johnson par la méthode du cutting plane.

#### 1975 :

Solution pour 100 villes par Camerini, Fratta and Maffiolo

#### 1987 :

Solution pour 532, puis 2392 villes par Padberg et Rinaldi

#### 1998 :

Solution pour les 13 509 villes des Etats-Unis.

<sup>1</sup> Source Internet : <http://eleves.ec-lille.fr/~charoloi/backtojava/projects/X/salesman.html>



**2001 :**

Solution pour les 15 112 villes d'Allemagne par Applegate, Bixby, Chvatal et Cook, des universités de Rice et de Princeton

### A.I.1.c. Point de vue Formel

A partir d'une matrice  $C = (C_{ij})$  où  $C_{ij}$  représente le coût du déplacement entre la ville  $i$  et la ville  $j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ), il faut trouver une permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(N) \end{pmatrix}$$

Qui minimise la somme des coûts  $C_{\sigma(1)\sigma(2)} + C_{\sigma(2)\sigma(3)} + \dots + C_{\sigma(n-1)\sigma(n)} + C_{\sigma(n)\sigma(1)}$

Autrement dit il faut trouver un cycle hamiltonien de longueur minimale dans un graphe pondéré complet.

### A.I.1.d. Complexité

Ce problème est un représentant de la classe des problèmes NP- complets. L'existence d'un algorithme de complexité polynomiale reste inconnue. Un calcul rapide de la proximité montre qu'elle est en  $O(n!)$  où  $n$  est le nombre de villes. Plus précisément avec  $n$  villes il y a  $(n-1)!/2$  chemins possibles. Avec 36 villes on trouve 5166573983193072464833325668761600000000. Bien sûr, on peut optimiser cet algorithme en conservant dans une matrice les chemins déjà calculés. Cependant le problème demeure et la complexité est en  $O(2^n \cdot n^2)$ . Si on néglige le facteur constant, alors il faut encore environ trois jours de calculs, pour résoudre le problème avec 31 villes.

On peut aussi essayer de simplifier l'ensemble des solutions auxquelles on s'intéresse : J.L Bentley a suggéré de ne s'intéresser qu'aux tournées dites bitoniques. Ce sont les tournées qui progressent dans un premier temps de la gauche vers la droite strictement, puis reviennent dans l'autre sens. Cet algorithme est un exercice typique de programmation dynamique, similaire à celui du produit de matrices. La complexité de l'algorithme obtenu est en  $O(n^2)$  ; c'est donc tout à fait praticable, mais les meilleurs solutions sont rarement bitoniques.

### A.I.1.e. Intérêt

Le PVC fournit un exemple d'étude d'un problème NP- complet, dont les méthodes de résolution peuvent s'appliquer à d'autres problèmes de mathématiques discrètes. Néanmoins,



il a aussi des applications directes, notamment dans les transports et la logistique. Par exemple trouver le chemin le plus court pour les bus de ramassage scolaire, ou, dans l'industrie, pour trouver la plus courte distance que devra parcourir le bras mécanique d'une machine, pour percer les trous d'un circuit imprimé (les trous représentent les villes), ou encore pour concevoir un réseau de fibre optique.

### A.I.2. Méthodes de résolution du problème

Les algorithmes pour résoudre le PVC peuvent être répartis en deux classes :

- Les algorithmes exacts qui trouvent la solution optimale ;
- Les algorithmes d'approximation (heuristiques) qui fournissent une solution presque optimale.

#### Algorithmes exacts

**Little [little, 1963]** est parmi les premiers à avoir proposé une méthode rigoureuse de résolution du PVC.

D'autres méthodes ont été proposées, parmi celles-ci, on trouve les travaux de **Bertier (1965)**, **Roy (1966)** et **Held & Crap (1970)**.

Ces méthodes utilisent essentiellement des approches basées sur :

- La méthode des plans sécants (*cutting planes*) ;
- Relaxation Lagrangienne ;
- Méthode des sous gradients ;
- *Branch and Bound* ;
- Les techniques de programmation.

#### Algorithmes d'approximation

Les algorithmes d'approximation permettent de trouver une solution dont le coût est proche du coût de la solution optimale. Ils ont l'avantage de permettre, en un temps raisonnable, de trouver une solution. De ce fait, ils ne sont à utiliser que dans le cas où une solution approchée est acceptable.

On se donne  $V = \{\text{ensemble des } N \text{ villes sur lequel on travaille}\} = \{A_1, \dots, A_N\}$ . Soit  $C$  une permutation construite aléatoirement sur  $V$ , (ie  $C = (B_1, \dots, B_N)$  avec  $B_i$  appartenant à  $V$ ). On rappelle qu'une permutation représente bien sûr un cycle hamiltonien du graphe construit sur  $V$ .



## Heuristiques de base

### Définition :

Une heuristique est une méthode qui exploite les propriétés structurales d'une solution admissible, de façon à ce qu'elle devienne rapidement une « bonne » solution (en terme de coût). Elle correspond à un mécanisme d'exploration de l'espace de recherche. On distingue :

- Les procédures de construction des tournées (*tour construction procedures*) ;
- Les procédures d'affinage des tournées (*tour improvement procedures*) ;
- Les procédures mixtes (*composite procedures*).

Les heuristiques peuvent donner naissance à des solutions fortement sub-optimales, surtout quand la taille du problème est élevée. Le principal risque est de se trouver piégé dans un optimum local [Gedogne, 2000].

### A.I.2.a. Heuristiques constructives

#### A.I.2.a.1. Algorithme des plus proches voisins (Nearest Neighbour, une des méthodes Gloutonnes)

Le principe de cet algorithme est le suivant :

1. Démarrer la tournée à partir d'un nœud quelconque ;
2. Trouver le sommet le plus proche du dernier sommet de la tournée et l'ajouter à celle-ci ;
3. Répéter l'étape 2, jusqu'à l'épuisement des sommets, pour joindre le sommet initial au sommet final.

#### A.I.2.a.2. Algorithme de Clark and Wright (1964) :

Basé sur le principe de l'économie ; cette procédure est comme suit:

1. Retenir un sommet quelconque nommé 1 ;
2. Calculer les économies  $S_{ij} = C_{i1} + C_{1j} - C_{ij}$  pour  $i, j = 2, 3, \dots, N$  et les classer par ordre décroissant ;
3. Relier les sommets selon l'ordre établi.



### A.I.2.b. Procédures d'insertion

Ces procédures considèrent une tournée formée de «  $k$  » sommets à la  $k^{\text{ième}}$  itération, et déterminent le prochain sommet à insérer ( étape de sélection) puis l'endroit d'insertion (étape d'insertion).

#### A.I.2.b.1. Méthode de l'élastique

On a tout d'abord besoin d'un élastique, que l'on représentera par un ensemble constitué de  $2,5 * (\text{nombre de villes})$  points. L'élastique est tout d'abord positionné sous la forme d'un cercle centré au milieu des villes. Chaque point de l'élastique est ensuite attiré d'une part, par les villes qui sont proches de lui, et d'autre part, par les deux points voisins de l'élastique. L'attraction créée par ces deux points voisins de l'élastique permet de maintenir une certaine cohésion.

L'algorithme converge tout naturellement vers une tournée grâce aux forces qui attirent les points de l'élastique vers les villes. Cette force est exponentielle : lorsqu'un point de l'élastique est proche d'une ville, il est très attiré.

L'avantage de cette méthode est qu'elle se parallélise très facilement : il suffit de disposer d'autant de processeurs qu'il y a de points dans l'élastique; ainsi, chaque processeur communique avec ses 2 voisins pour obtenir ses coordonnées, et recalculer les siennes. De plus, même si les résultats de cette méthode sont inférieurs aux heuristiques classiques, elle converge rapidement.

#### A.I.2.c. Recherche locale

Ce sont des heuristiques non-constructrices, plus complexes, qui modifient la tournée initiale pour en trouver une plus petite. Ces modifications définissent un voisinage de la tournée courante.

Les méthodes de recherche locale partent d'une configuration initiale et appliquent successivement des transformations à la solution courante tant qu'un critère d'arrêt n'est pas vérifié. Leur mise en œuvre nécessite donc le choix :

- D'une (ou plusieurs) solution initiales ;
- D'une (ou plusieurs) transformations locales (on parle aussi de mouvement) ;

Autrement dit : étant donné une tournée  $T$ , l'ensemble des tournées que l'on peut obtenir en appliquant une heuristique  $H$  est le voisinage du tour  $T$ .

La qualité d'une heuristique peut-être mesurée par la taille du voisinage qu'elle définit.

#### Voisinage $\lambda$ -opt



$\lambda$ -opt est un échange de  $\lambda$  paires d'arêtes. On enlève  $\lambda$  arêtes de la tournée afin de les remplacer par  $\lambda$  autres pour obtenir une nouvelle tournée. Une tournée qui n'est pas améliorable par l'algorithme  $\lambda$ -opt est dite optimale. Pour un problème à  $N$  villes, une tournée optimale est  $N$ -optimale. Rozenkratz Stearns et Lewis ont prouvé en 1997, qu'une tournée  $\lambda$ -optimale pour une tournée à  $n$  villes, pouvait être  $(2-2n)$  fois plus longue que l'optimum. Donc  $\lambda$ -opt peut converger vers un point qui est loin de l'optimum.

### A.I.2.c.1. Heuristique 2-Opt [Lin, 1965] [Lin, 1973]

On prend deux villes, A et B, au hasard dans  $V$  et on inverse le sens de parcours entre les deux villes.

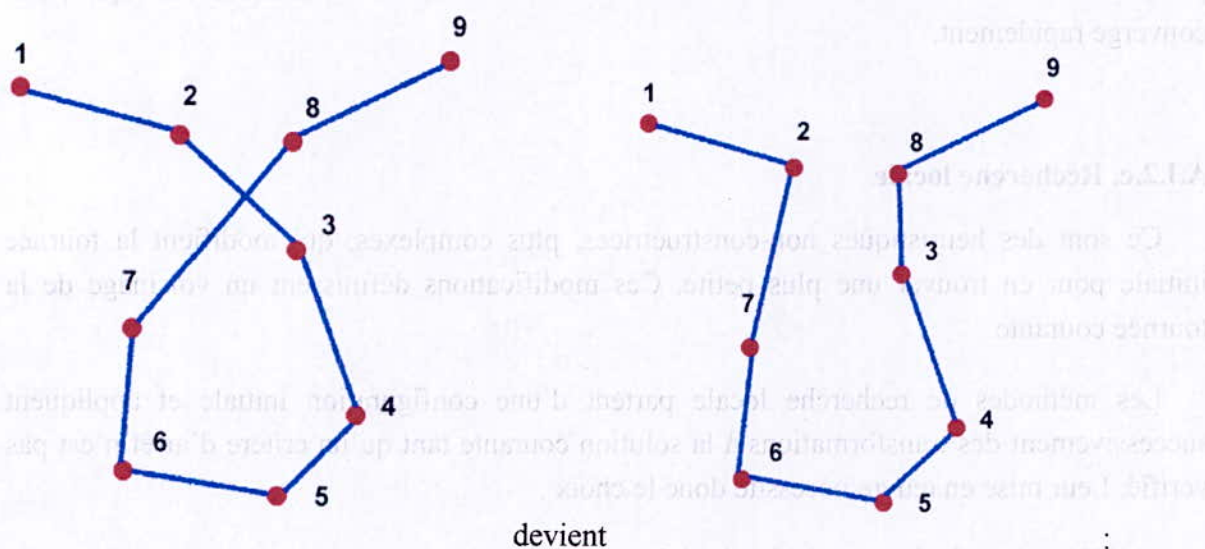
Par exemple : soit la permutation suivante représentant une tournée

ville de la tournée	1	2	3	4	5	6	7	8	9
			A				B		

L'heuristique 2-Opt agit comme suit :

ville de la tournée	1	2	7	6	5	4	3	8	9
			B				A		

Graphiquement, cela revient la majorité du temps à décroiser (bon cas)



### A.I.2.c.2. Lin et Kernighan [Lin, 1973]

Lin et Kernighan ont proposé d'adapter la taille de l'échange à chaque pas de l'algorithme. La généralisation de ce principe sert de base à un algorithme approximatif très efficace. C'est l'algorithme de Lin et Kernighan implémenté en 1971. Il semble suivre une complexité  $O(n^{2,2})$ .



L'idée générale de l'algorithme consiste à définir une chaîne d'arêtes à partir d'une séquence de sommets. On échange les arêtes paires et de cette chaîne par ses arêtes impaires, de manière à obtenir une tournée réalisable. On agrandit de proche en proche la chaîne alternée jusqu'à atteindre un cycle.

Un mouvement  $\lambda$ -opt peut se définir sous forme de cycles alternés. La recherche d'une amélioration locale est effectuée par la recherche arborescente dans l'arbre des chaînes alternées. Cela est fait par l'exploration de l'arbre des possibilités avec certaines restrictions et retours en arrière. Le choix des arêtes pour l'insertion est effectué à partir de l'ensemble des arêtes candidates. Keld Helsgaun a implémenté une amélioration de cet algorithme. Il a notamment proposé d'utiliser la mesure d' $\alpha$  sensibilité pour choisir les candidats.

#### A.I.2.d. Algorithme stochastique (méta-heuristique)

Cet algorithme est le plus simple. On engendre tout d'abord un circuit avec l'heuristique du point le plus proche.

On itère ensuite N fois le processus suivant : on choisit deux villes de manière aléatoire et on les permute. On teste ensuite la distance totale du cycle hamiltonien obtenu. Si elle est meilleure, on la garde; sinon, on oublie le chemin obtenu.

On peut évidemment améliorer cet algorithme en choisissant une autre heuristique que celle citée : par exemple, 2opt convient parfaitement.

*Algorithme générique :*

```
Engendrer une première tournée
Tant que l'on veut Faire :
    Choisir deux villes et appliquer une heuristique.
    Si la nouvelle longueur est inférieure à la
    précédente
        garder ce chemin
    Sinon
        continuer avec le chemin précédent
```

##### A.I.2.d.1. Recuit simulé [Mic 99]

Cette méthode a été développée par S.Kirkpatrick & al. en 1982.

Le recuit simulé est une technique issue de la sidérurgie : pour obtenir un acier solide, on le fait refroidir avec des paliers de refroidissement (= le recuit). La matière s'arrange beaucoup mieux (se cristallise) de cette manière.

#### *Présentation du problème*

En appliquant l'algorithme stochastique vu plus haut, *ie.* un algorithme simple, il se peut que l'on tombe dans ce que l'on appelle un minimal local : quoi que l'on fasse, l'algorithme considère que cette solution est la meilleure et qu'il est impossible de l'améliorer. Les



"changements d'états" ne sont pas assez importants, *ie*, la probabilité d'opérer une modification de descente est trop faible.

### **Résolution approchée**

L'algorithme est similaire à l'algorithme stochastique mais il permet de sortir de certains minima locaux. La méthode consiste à introduire une erreur volontaire pour sortir de ce minimum. Il suffit d'accepter, de temps en temps, un chemin de moins bonne qualité. Le terme "de temps en temps" est à définir : il signifie "avec une certaine probabilité".

### **Algorithme générique**

```

Engendrer une première tournée
Tant que l'on veut Faire
  Choisir deux villes et appliquer une heuristique.
  Si la nouvelle longueur est inférieure à la précédente
    garder ce chemin
  Sinon
    Si l'erreur commise n'est pas trop importante
      garder ce chemin avec une probabilité suivant la
fonction
    sinon
      continuer avec le chemin précédent
  
```

### **Fonction "seuil"**

On utilise une fonction de deux variables, T, la température, et e, l'erreur commise par la solution courante par rapport à la meilleure solution. Cette fonction donne la probabilité de changement d'état du système, *ie.*, accepter un chemin moins bon.

On fait varier la température au cours du processus de manière décroissante d'une valeur T0 à T1.

La loi simple que l'on a utilisée a pour expression :  $P(e,t) = \exp(-T*e)$  avec  $T = a + b*i$ , i étant l'itération courante.

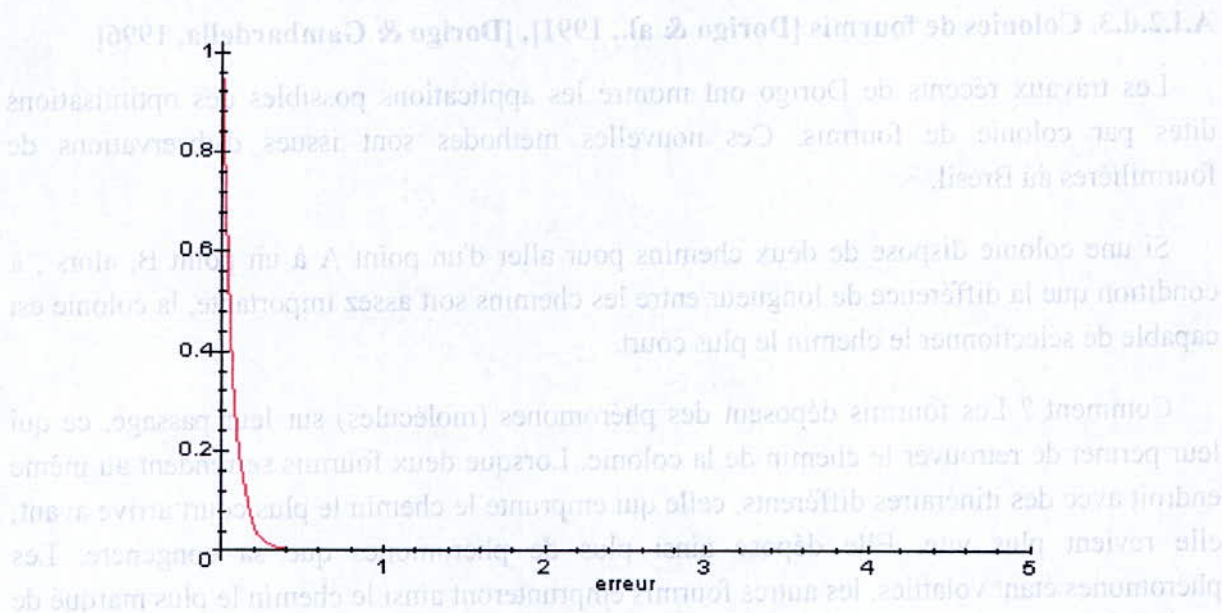


Figure [A.I.2.d.1-1] : Fonction seuil

L'évolution de cette loi en fonction de la température  $t$ , est de "tasser" la courbe vers l'axe (Oy) : la "fonction devient plus stricte". Cela permet ainsi de faire converger l'algorithme.

On peut aussi utiliser une autre fonction, du type de la fonction de Boltzmann dont l'expression en fonction de l'erreur  $e$  et de la température  $t$  est :  $\exp(-k*e/t)$ . Cette autre fonction évolue différemment en fonction de la température, à erreur fixée.

La fonction de seuil est très importante, de même que l'erreur qu'on s'accorde.

### A.I.2.d.2. Algorithme génétique

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes récents (années 70, par Holland) . Leur nom leur vient de l'analogie avec les méthodes de reproduction sexuée des cellules (méiose).

On ne considère pas ici une solution approchée, mais une population de solutions plus ou moins bonnes. On opère ensuite des mutations et des reproductions au sein de cette population pour faire apparaître des individus "meilleurs", *ie*, des tournées de longueur totale plus faible. La conservation à chaque itération d'individus de plus mauvaise qualité correspond à un potentiel (une énergie potentielle, un potentiel d'adaptation) qui permet de sortir de minima locaux par exemple, comme le recuit simulé le permet.



**A.I.2.d.3. Colonies de fourmis [Dorigo & al., 1991], [Dorigo & Gambardella, 1996]**

Les travaux récents de Dorigo ont montré les applications possibles des optimisations dites par colonie de fourmis. Ces nouvelles méthodes sont issues d'observations de fourmilières au Brésil.

Si une colonie dispose de deux chemins pour aller d'un point A à un point B, alors, à condition que la différence de longueur entre les chemins soit assez importante, la colonie est capable de sélectionner le chemin le plus court.

Comment ? Les fourmis déposent des phéromones (molécules) sur leur passage, ce qui leur permet de retrouver le chemin de la colonie. Lorsque deux fourmis se rendent au même endroit avec des itinéraires différents, celle qui emprunte le chemin le plus court arrive avant; elle revient plus vite. Elle dépose ainsi plus de phéromones que sa congénère. Les phéromones étant volatiles, les autres fourmis emprunteront ainsi le chemin le plus marqué de phéromones.

Les techniques d'optimisation par colonies de fourmis sont si flexibles qu'elles sont utilisées pour optimiser les réseaux de télécommunication aux Etats-Unis.

**L'algorithme**

L'algorithme peut être décrit de la manière suivante :

- On crée un ensemble de fourmis
- La quantité de phéromones déposée est stockée dans un tableau de taille  $n*n$ , chaque indice correspondant à une ville
- Pour chaque fourmi :
  - On place la fourmi sur une ville au hasard
  - Elle choisit une ville parmi celles qui n'ont pas encore été visitées
  - Elle s'y rend en suivant le chemin le plus marqué par les phéromones
  - Elle dépose des phéromones sur le chemin
- Il faut déposer une certaine quantité des phéromones sur l'ensemble des chemins

L'efficacité de cet algorithme dépend de la quantité de phéromones déposées par une fourmi et la vitesse à la quelle elle s'évapore. Ces deux paramètres sont réglés arbitrairement.

**A.I.2.d.4. Réseau de neurones artificiels [Ait Ali Slimane, 2000]**

Les approches heuristiques neuronales se divisent en deux classes principales :

Dans la première, le réseau répond à une formulation du TSP en programmation linéaire, en nombres entiers. Dans cette classe, nous retrouvons la première application des réseaux de neurones au TSP que nous devons à Hopfield et Tank (1985).



La seconde classe concerne les instances géométriques du TSP : les neurones sont ici considérés comme des points de l'espace cherchant à s'identifier aux villes. Les deux variantes basiques de cette classe sont : les réseaux élastiques de Durbin et Willshaw (1987) et les cartes auto organisatrices de Kohonen, développées par Agéniol et Al (1988)

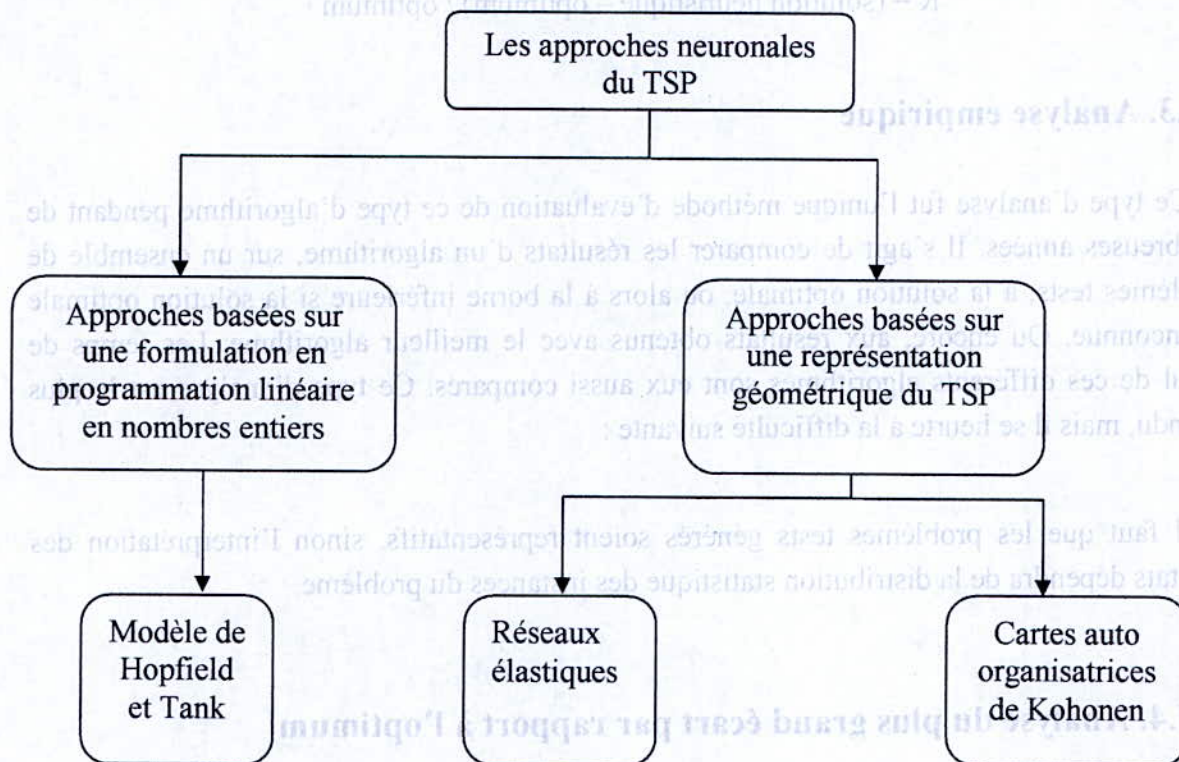


Figure [A.I.2-1] : Typologie des différentes approches neuronales pour le TSP



Lorsqu'une nouvelle heuristique est testée, il est nécessaire de connaître ses performances. Dans ce qui suit, nous parlerons de la déviation par rapport à l'optimum – ou à défaut sa borne inférieure, soit, l'erreur produite par l'heuristique.

$$R = (\text{solution heuristique} - \text{optimum}) / \text{optimum}$$

### A.I.3. Analyse empirique

Ce type d'analyse fut l'unique méthode d'évaluation de ce type d'algorithme pendant de nombreuses années. Il s'agit de comparer les résultats d'un algorithme, sur un ensemble de problèmes tests, à la solution optimale, ou alors à la borne inférieure si la solution optimale est inconnue. Ou encore, aux résultats obtenus avec le meilleur algorithme. Les temps de calcul de ces différents algorithmes sont eux aussi comparés. Ce type d'analyse est le plus répandu, mais il se heurte à la difficulté suivante :

Il faut que les problèmes tests générés soient représentatifs, sinon l'interprétation des résultats dépendra de la distribution statistique des instances du problème.

### A.II.4. Analyse du plus grand écart par rapport à l'optimum

Il s'agit de calculer la pire déviation, ou éloignement par rapport à l'optimum que l'algorithme peut produire. Ce type d'analyse procure une garantie de performance à l'heuristique considérée. En effet, quelque soit l'instance du TSP considérée, nous savons dans quel intervalle se trouvera la solution.

Sahni et Gonzalez (1976) ont montré, pour le TSP, que garantir une erreur maximale à un algorithme était aussi difficile que de déterminer la solution optimale.

Le problème avec ce type d'analyse, est que l'heuristique est jugée sur ses plus médiocres performances. L'étude empirique des heuristiques suggère qu'un tel comportement est extrêmement rare, c'est-à-dire que les résultats les plus médiocres sont obtenus par des instances particulières ('pathologiques') du TSP, et ne reflètent pas le comportement de l'algorithme.

### A.II.5. Analyse probabiliste

Il s'agit d'une approche théorique consistant à prouver que certaines méthodes procurent des solutions proches de l'optimum, lorsque le nombre de villes devient grand. Cela suppose, d'une part, que les instances du problème sont issues d'une certaine loi de probabilité, et d'autre part, que le coût de la solution optimale est estimé. Dans le cas du TSP euclidien, où les villes sont uniformément et indépendamment distribuées dans le carré  $[0, 1]$ , le coût de la solution optimale tend vers :

$$C_{opt} \times \sqrt{N}$$

$N$  étant le nombre de villes et  $C_{opt}$  une constante.

Les résultats de l'analyse probabiliste sont asymptotiques, et ne sont valables que pour un nombre de villes suffisamment grand. Alors que nous ignorons tout sur les propriétés de convergence de ces heuristiques « asymptotiquement efficaces », il serait bon de connaître le comportement de l'heuristique pour de vraies valeurs de  $n$  (nombre de villes).

L'analyse probabiliste doit être vue comme une explication du comportement observé de l'heuristique étudiée, plutôt que comme une garantie de performance.



## **SECTION B**

# **LE PROBLEME DU VOYAGEUR DE COMMERCE PAR LES ALGORITHMES DE FOURMIS**

# **CHAPITRE I**

**les différentes générations  
d'algorithmes de fourmis**



## Introduction

Les méta-heuristiques ACO (*Ant Colony Optimization*) forment une branche de la famille des systèmes multi-agents pour la résolution de problèmes combinatoires. Elles s'inspirent du comportement des colonies de fourmis lors de la recherche de nourriture.

Les premiers travaux concluants, concernant l'application<sup>1</sup> des systèmes de fourmis pour le problème du voyageur de commerce, ont été l'œuvre de Dorigo & al. ([Dorigo & al., 1991a] [Dorigo & al., 1991b]).

L'inspiration du comportement naturel des fourmis a induit que la plus part des algorithmes de fourmis se caractérisent par ([DMC96]:

- **Une piste de phéromones** : En se déplaçant le long d'un chemin, les fourmis déposent une substance odorante, connue sous le nom de phéromone. Celle-ci a pour effet de laisser une trace chimique à suivre.
- **Une politique stochastique<sup>2</sup> de choix de transition** : les fourmis ont tendance à choisir un chemin dont la trace de phéromones est forte. La prise de décision pour passer d'un sommet à un autre est alors stochastique et dépend, en outre, de la quantité de phéromones sur le chemin choisi.
- **Une évaporation graduelle de la piste de phéromones** : en parallèle au dépôt d'une trace de phéromones au passage des fourmis, la quantité de substance laissée s'évapore avec le temps. C'est cette propriété qui fait que la trace sur les chemins les plus long, ou les moins empruntés, soit moins importante, impliquant une accentuation de cette différence.

L'ensemble de ces caractéristiques décrites, permet de programmer des systèmes multi-agents, capables d'évoluer vers des solutions quasi-optimales pour des problèmes combinatoires à l'instar du TSP.

Il existe principalement trois variantes d'algorithmes de fourmis pour le TSP. Celles-ci ont successivement été développées (trois principales générations) dans l'ordre suivant :

- Les systèmes de fourmis (AS) ;
- Les systèmes de colonies de fourmis (ACS) ;
- Les systèmes de colonies de fourmis avec désensibilisations (ACS-DM).

<sup>1</sup> A vrai dire, c'est pour cette fin (résolution du PVC) qu'est née cette famille de méta-heuristiques

<sup>2</sup> En vérité cela n'est totalement vrai que pour les heuristiques de type AS (Ant System ou système de fourmis)



Chacune de ces générations est née d'une évolution par rapport à la précédente (hormis la première évidemment). Ces trois variantes possèdent donc des caractéristiques fondamentales communes ou analogues; elles diffèrent cependant sur des aspects non moins importants. Nous tâcherons d'explicitier les principes de fonctionnement de chacune de ces trois variantes, en indiquant ce qui les différencie. Nous justifierons ces différences, en expliquant l'intérêt d'introduire chaque changement.

Il faut préciser que des variantes secondaires existent pour chacune des trois générations, nous citons par exemple l'application du principe de l'élitisme.

### Notations utilisés :

- Une itération désigne l'intervalle au bout duquel chacune des  $m$  fourmis a effectuée un et un seul tour.
- $\tau_{ij}(t)$  représente la trace de phéromones sur l'arc  $ij$  à l'instant  $t$  ;
- $\Delta\tau_{ij}(t, t+N)$  représente la variation de la trace de phéromone entre deux itérations successives ;
- $L_k$  désigne la longueur de la tournée faite par la fourmi  $k$  à une itération donnée ;
- $\eta_{ij}$  représente la visibilité de l'arc  $ij$  ; c'est-à-dire l'inverse de la longueur de cet arc ;
- $P_{ij}(t)$  désigne la probabilité conditionnelle, à l'étape correspondant à  $t$ , d'aller directement au sommet  $j$  qui n'a pas encore été visité par la fourmi, sachant que cette dernière est au sommet  $i$ .
- $N$  représente le nombre de villes.



### B.I.1. Les Systèmes de fourmis (*Ant System ou AS*)

Cette génération initiale d'algorithmes de fourmis pour le TSP se caractérise par ce qui suit :

L'évaporation de la trace de phéromones ainsi que l'ajout d'une quantité de phéromones se fait à la fin de chaque tour. A chaque « itération », entre  $t$  et  $t+N$ , la trace de phéromones sur chaque arc est modifiée par la formule :

$$\tau_{ij}(t+N) = \rho \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}(t,t+N) \quad [\text{B.I.1-1}]$$

Le premier terme de l'addition représente l'évaporation de la trace de l'itération précédente.  $\rho$  est une constante d'évaporation dans  $[0, 1]$ .

Le second terme représente la trace laissée par toutes les fourmis qui sont passées par cet arc durant cette itération ; et son expression est :

$$\Delta\tau_{ij}(t,t+N) = \sum \Delta\tau_{kij}(t,t+N) \quad [\text{B.I.1-2}]$$

(Somme sur les  $m$  fourmis :  $k=1$  à  $m$  ;  $m$  étant le nombre de fourmis mises dans le graphe).

La trace laissée par la fourmi  $k$  sur l'arc  $i-j$  entre  $t$  et  $t+N$  est donnée par :

$$\Delta\tau_{kij}(t,t+N) = \begin{cases} Q/L_k & \text{si la fourmi } k \text{ est passée par l'arc } ij \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [\text{B.I.1-3}]$$

( $Q$  étant une constante,  $L_k$  la longueur du tour effectué par la fourmi  $k$ )

En effectuant un tour, chaque fourmi décide de la prochaine ville de destination sur la base d'un choix « aléatoire partiel » (*biased random choice*), autrement dit, un choix stochastique de la manière suivante :

$$P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{j: \text{ non encore visitées}} [\tau_{ij}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ij}]^\beta} & \text{si la ville } j \text{ est permise (non encore visitée)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [\text{B.I.1-4}]$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes servant à fixer l'importance relative entre la trace de phéromone et la visibilité.

Cette formulation a pour effet, qu'une fourmi choisisse, avec une plus grande probabilité, une ville dont la « piste » est plus proche et avec une plus forte trace de phéromones sur l'arc qui y mène. Dans [Dorigo & al., 1991a], on suggère le nombre de fourmis optimal  $m \approx N$ .



### B.I.2. Les systèmes de colonies de fourmis (*Ant Colony System : ACS*)

ACS est un développement de AS. Il est décrit dans [Dorigo & Gambardella, 1997a] et [Dorigo & Gambardella, 1997b]. Leurs résultats indiquent que cette méthode offre une amélioration considérable par rapport à AS et qu'elle donne de meilleurs résultats que plusieurs autres algorithmes pour le TSP.

La règle de choix de la ville suivante, utilisé pour AS, a été changée. Quelquefois, une fourmi choisit une ville en utilisant la même règle stochastique (voir AS). Le reste du temps, la fourmi choisit seulement la « meilleure » ville, en se fiant à la visibilité et à la trace de phéromones.

La tactique utilisée se base sur l'utilisation d'un nombre aléatoire (ou pseudo-aléatoire) noté  $q$ . A chaque transition, une fourmi choisit aléatoirement  $q$  tel que : [B.I.2-1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } q \leq q_0 \text{ (une constante) alors la fourmi choisira la « meilleure » ville ;} \\ \text{Sinon } (q > q_0), \text{ elle choisira une ville selon la formule stochastique (AS [B.I.1-4])} \end{array} \right.$$

[Dorigo & Gambardella, 1997a] parlent d'« exploitation » en se referant au choix de la meilleure ville ; ils parlent également d'« exploration partielle » en se référant au choix stochastique. Il faut cependant noter, à ce niveau de l'étude, que même pour le cas de l'exploration, les fourmis sont guidées par la visibilité et la trace de phéromones. Autrement dit, même quand  $q$  dicte à la fourmi d'explorer, celle-ci suit avec une plus grande probabilité le chemin dont la trace entre le deux villes est forte ou/et que la distance entre ces dernières est petite.

Formellement, une fourmi  $k$  sur la ville  $r$  choisit d'aller à une ville  $s$ , telle que :

$$s = \begin{cases} \mathbf{u^*} \text{ tel que } [\tau(r, \mathbf{u^*}) \cdot [\eta(r, \mathbf{u^*})]^\beta] = \mathbf{Max}_{\mathbf{u : non encore visitées } J_k(r)} \{ \tau(r, \mathbf{u}) \cdot [\eta(r, \mathbf{u})]^\beta \} & \text{si } q \leq q_0 \\ \mathbf{S} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{[B.I.2-2]}$$

Où  $q$  est un nombre aléatoire dans  $[0, 1]$ ,  $q_0$  est une constante,  $\beta$  une constante,  $J_k(r)$  est l'ensemble des villes non encore visitées par la fourmi  $k$  qui est au niveau de la ville  $r$ , et  $S$  est la ville choisie de manière probabiliste par l'expression :

$$P_k(r, s) = \begin{cases} \frac{[\tau(r, s)] \cdot [\eta(r, s)]^\beta}{\sum_{\mathbf{u : } J_k(r)} [\tau(r, \mathbf{u})] \cdot [\eta(r, \mathbf{u})]^\beta} & \text{si la ville } s \text{ est permise (incluse dans } J_k(r)) \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{[B.I.2-3]}$$



IL est à noter l'absence du paramètre  $\alpha$  ; c'est-à-dire que l'on a ramené le couple  $(\alpha, \beta)$  au seul paramètre  $\beta$ .

$P_k(r,s)$  est la probabilité que la fourmi  $k$ , à la ville  $r$ , choisisse la ville  $s$ .

L'effet de ce changement est d'encourager les fourmis à exploiter plus. En effet, en utilisant AS, les fourmis construisaient des tournées qui différaient trop des meilleures tournées trouvées. [Dorigo & Gambardella, 1997b] ont d'ailleurs utilisé une valeur de  $q_0$  égale à 0,9. Cela signifie que, dans 90% des cas, les tours sont construits par exploitation, et que dans le reste des cas, les tours sont construits par exploration.

L'autre changement dans ACS se caractérise par la restriction du dépôt de phéromones à la fourmi qui est globalement meilleure. Cela veut dire que la trace est seulement ajoutée à la meilleure route trouvée depuis le début de l'épreuve. [Dorigo & Gambardella, 1997b] ont également expérimenté la variante où la trace est déposée par la fourmi du meilleur tour de la dernière itération ; cependant on a remarqué qu'il était légèrement meilleur d'appliquer cela avec le meilleur tour global. Cela donne la règle de mise à jour globale suivante :

$$\tau(r,s) \leftarrow \begin{cases} (1-\alpha) \cdot \tau(r,s) + \alpha/L_{gb} & \text{si l'arc } (r,s) \text{ fait partie de la meilleure tournée globale} \\ \tau(r,s) & \text{sinon} \end{cases} \quad [\text{B.I.2-4}]$$

$\alpha$  est une constante ;  $L_{gb}$  représente la longueur du meilleur tour globalement (Global Best).

L'effet de cette modification est de concentrer la recherche, effectuée par les fourmis, autour de la meilleure solution connue. Ceci va encore une fois augmenter ou favoriser l'exploitation.

Finalement, ACS possède également une règle de mise à jour locale. En effet, alors que la règle de mise à jour globale est appliquée à la fin de chaque itération – c'est-à-dire une fois que les fourmis ont terminé une tournée –, la règle de mise à jour locale est quant à elle appliquée à chaque fois qu'une fourmi passe d'une ville à une nouvelle autre. L'expression de la mise à jour locale se décline comme suit :

$$\tau(r,s) \leftarrow (1 - \rho) \cdot \tau(r,s) + \rho \cdot \tau_0 \quad [\text{B.I.2-5}]$$

$\rho$  est une constante dans  $[0, 1]$  ;  $\tau_0$  représente le niveau initial de phéromones et dont la valeur est :

$$\tau_0 = (N \cdot L_{mn})^{-1} \quad [\text{B.I.2-6}]$$

N est le nombre de ville, et  $L_{mn}$  est la longueur de la tournée obtenue par l'heuristique constructive du plus proche voisin. [Dorigo & Gambardella, 1997b] suggèrent 0,1 comme bonne valeur de  $\rho$ .

L'équation [B.I.2-5] favorise la réduction de la trace sur les arcs ayant été explorés. Effectivement, à chaque fois qu'un arc est exploré, la valeur de la trace sur celui-ci va diminuer en se rapprochant du niveau initial de phéromones. Ceci va simuler, autrement qu'en AS, la dissipation de la trace traduisant l'oubli des précédents bons chemins après un certain temps, en faveur d'un nouveau meilleur chemin. Dans ACS, la trace se dissipe seulement sur les arcs qui sont explorés. Cela signifie que les précédents bons chemins vont être oubliés seulement après qu'ils aient été explorés quelques fois de plus [Rook, 2000].

Un autre effet est d'éviter que les fourmis suivent constamment le meilleur chemin. Du moment qu'un chemin a déjà été exploré, ce serait une perte de temps pour les fourmis de le ré-explorer (ce qui n'est pas le cas dans AS). Il est à noter toutefois que le meilleur chemin (global) est marqué à nouveau en fin de tournée grâce à la règle de mise à jour globale, lui permettant de ne pas être oublié même s'il est plus fréquemment exploré car cela est potentiellement « fructueux ».



### B.I.3. Systèmes de colonie de fourmis avec désensibilisation (ACS-DM<sup>1</sup>)

#### B.I.3.a. Utilisation de la désensibilisation sur un algorithme de fourmis

[Rook, 2000] a présenté un nouvel algorithme tentant d'améliorer ACS en offrant une manière différente d'encourager les fourmis à explorer de nouveaux chemins. L'idée est de rendre les fourmis moins sensibles aux phéromones après une exposition continue à ces dernières.

Le contexte général étant que les recherches heuristiques se basent souvent sur l'idée intéressante de « fouiller » là où les recherches précédentes ont trouvé de bons résultats. Mais l'un des problèmes qui se posent réside dans le conflit entre « exploration » et « exploitation ». D'une part, l'algorithme a tendance à voir les chemins similaires aux bons chemins précédents ; c'est l'exploitation. D'autre part, il n'est pas utile de répéter une recherche déjà effectuée car ce serait une perte de temps. Le système doit donc être en mesure également de voir autour de différents chemins ; c'est l'exploration. Le but est alors de rendre le système capable de voir autour des bons chemins précédents sans toutefois tomber sur des chemins identiques.

Pour rappel, la règle de mise à jour locale d'ACS va faire en sorte, pour l'ensemble des fourmis, qu'il y ait plus d'exploitation au début d'une itération, et qu'il y ait plus d'exploration à sa fin. Cette asymétrie de traitement des villes est compensée par le fait que les fourmis démarrent de différentes villes.

Ce système semble effectif mais il est possible de l'améliorer. La diminution des phéromones a pour effet de réduire la mémoire concernant les bons chemins précédents. Ceci n'est pas un problème pour le « meilleur chemin global » car les phéromones, sur celui-ci, augmentent à chaque itération. Les précédents bons chemins tendent à être oubliés. En fait, ceci est actuellement désirable, comme si un précédent bon chemin a été exploré, sans donner de meilleur tour ; il devrait donc être oublié.

Toutefois, la diminution locale doit être assez rapide afin de « persuader » les fourmis sur ce tour d'aller voir ailleurs. L'évaporation globale de phéromones doit être plutôt lente, pour que les précédents tours intéressants ne soient pas oubliés de si tôt. D'ailleurs, si l'évaporation locale était trop lente, les fourmis n'auraient guère été incitées à explorer ; si elle était trop rapide, ces dernières auraient eu tendance à explorer les bons chemins précédents ne faisant pas partie du « meilleur global ».

La méthode alternative suggérée par [Rook, 2000] est de forcer les fourmis, qui tournent autour de l'espace de recherche, de changer leur sensibilité aux phéromones. Ainsi, pour une

<sup>1</sup> *Ant Colony System – Desensitisation Method* [Rook, 2000]



fourmi qui est en train d'exploiter, il est plus probable qu'elle explorera dans le futur. Inversement, si elle explore, il est plus probable qu'elle exploitera. Cette méthode se place alors comme une alternative à la mise à jour locale qui diminue la trace de phéromones dans ACS.

On remarque bien que cette méthode s'inspire une fois de plus de faits naturels. En effet, notre odorat a une sensibilité inversement proportionnelle à la durée d'exposition à une odeur. En outre, les changements brusques d'odeur(s) sont beaucoup plus perceptibles.

### B.I.3.b. Implémentation de (ACS-DM)

Il existe plusieurs manières de modéliser la désensibilisation dans ACS comme :

- Ajuster  $q_0$  (probabilité seuil d'exploration/exploitation) selon la durée et l'intensité d'exposition d'une fourmi aux phéromones ;
- Utiliser un (coefficient variable) multiplicateur de trace, appliqué à chaque fourmi.

Les deux façons proposées peuvent être complexes à réaliser, et induisent l'augmentation du nombre de paramètres de contrôle de l'algorithme.

Une approche beaucoup plus simple a été implémentée par [Rook, 2000]. En construisant une tournée, une fourmi compte, parmi les arcs traversés, le nombre de ceux possédant une trace de phéromone supérieure à la moyenne. Après avoir parcouru un nombre déterminé d'arcs ayant une marque supérieure à la moyenne, une fourmi devient totalement insensible à la trace et, par voie de conséquence, va se mettre à choisir les villes suivantes d'une manière stochastique basée uniquement sur la visibilité. De cette manière là, le seul paramètre additionnel, est celui qui indique le seuil maximum d'arcs, dont la trace est au dessus de la moyenne, avant qu'une fourmi ne devienne insensible aux phéromones.

Cette méthode induit une asymétrie dans la construction d'une tournée. Effectivement, concernant les arcs parcourus à la fin d'une tournée, il est plus probable qu'ils soient le fruit de l'exploration plutôt que de l'exploitation. Néanmoins, le fait que les fourmis démarrent de différentes villes dissipe cet effet par compensation, évitant ainsi une asymétrie dans le traitement global.

ACS-DM utilise la même équation [B.I.2-1] (ACS) pour décider de la prochaine ville (par chaque fourmi), à l'exception suivante : lorsque le seuil de désensibilisation est atteint, la partie stochastique de ce choix ne tiendra plus compte de la trace, en se limitant à la seule visibilité.

Dans ACS-DM il, n'y a pas de mise à jour locale, c'est alors que la règle [B.I.2-5] est ignorée. A la place, une évaporation de phéromones se doit d'être implémentée, de telle



manière que les arcs sur le « meilleur tour global » soient éventuellement oubliés. Pour arriver à cela, la trace sur chaque arc est diminuée légèrement vers  $\tau_0$  après chaque itération. Cela donne la règle de mise à jour globale [B.I.3-3] de la formulation de [Rook, 2000].

Nous revenons ainsi à la formulation d'ACS-DM de [Rook, 2000] :

A l'étape  $k$ , la probabilité qu'une fourmi, à la ville  $r$ , aille à / choisisse la ville  $s$  directement est donnée par  $p_k(r,s)$  telle que :

$$p_k(r,s) = \begin{cases} \frac{\varphi(r,s)}{\sum_{u \in J_k(r)} \varphi(r,u)} & \text{si } s \in J_k(r) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{[B.I.3-1]}$$

avec :

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} [\tau(x,y)] \cdot [\eta(x,y)]^\beta & \text{si le nombre d'arcs à forte trace} < (D \cdot m) \\ [\eta(x,y)]^\beta & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{[B.I.3-2]}$$

Une trace forte est une trace supérieure à la moyenne de tous les arcs du problème, à l'itération précédente.

A la fin de l'accomplissement d'une tournée par toutes les fourmis, c'est-à-dire à la fin d'une étape, la mise à jour globale se fait comme suit :

$$\tau(r,s) \leftarrow \begin{cases} (1 - \alpha) \cdot ((1 - \epsilon) \cdot \tau(r,s) + \epsilon \cdot \tau_0) + \alpha \cdot (L_{gb})^{-1} & \text{si l'arc } r-s \text{ fait partie du meilleur tour} \\ & \text{global (ie. depuis le début)} \\ (1 - \epsilon) \cdot \tau(r,s) + \epsilon \cdot \tau_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

[B.I.3-3]

Le meilleur tour global et, par abus de langage, sa longueur sont notés « global best » ( $L_{gb}$ ).  
Le meilleur tour de l'étape  $k$  et sa longueur sont notés par opposition « local best »

#### B.I.4. Autres travaux sur les algorithmes de fourmis

La recherche dans le domaine des algorithmes de fourmis touche aussi bien l'application de ces derniers à différents problèmes, qu'à la recherche de meilleurs algorithmes de fourmis.

Les améliorations apportées ignorent souvent le comportement naturel (ou « métaphorique ») de ces dernières. Par exemple, ACS semble beaucoup moins reproduire le comportement réel des fourmis comparativement à AS, alors qu'il est plus efficace.

[Di Caro & Dorigo, 1997] ont ajouté des éléments de recherche tabous, pour produire de meilleurs résultats.

[Bullnheimer et al. 1999] ont amélioré AS en classant les résultats de chaque itération, et en permettant à un certain nombre des meilleures fourmis d'y laisser une trace proportionnelle au classement.

Un autre domaine de recherche traite de la détermination expérimentale des meilleures valeurs des paramètres utilisés.

[Botee & Bonabeau, 1998] ont réglé les paramètres d'une version d'ACS en utilisant les algorithmes génétiques. Le processus ACS a été répété un nombre important de fois, en faisant évoluer, grâce à la programmation génétique, les paramètres jusqu'à ce qu'ils aient produit des résultats très proches de l'optimum.

Toutefois, même s'il existe des méthodes systématiques et effectives – à l'instar de celle de [Botee & Bonabeau, 1998] – pour trouver une bonne valeur des paramètres, on remarque que celles-ci ne vont guère vers l'explication de ces valeurs. Il y a assurément un manque notable d'un travail théorique sur les algorithmes de fourmis [Rook, 2000].



Des travaux ont également fait l'objet de l'implémentation parallèle des algorithmes de fourmis. En effet, du moment que les fourmis génèrent des solutions indépendantes les unes des autres au cours de chaque itération, et qu'elles tournent simultanément, l'implémentation parallèle est donc possible et facilitée. D'ailleurs, [Di Caro & Dorigo 1997] ont utilisé une implémentation parallèle qui a bien fonctionné. [Bullnheimer et al. 1998] s'y sont intéressés avec plus de détails et sont arrivés à décrire des tests sur le nombre d'implémentations parallèles.

Enfin, Les algorithmes de fourmis (*Ant Algorithms*) ont, en outre, été appliqués à différents autres problèmes moyennant un changement pour une adaptation spécifique au problème. On peut citer [Dorigo et al. 1996] suggérant AS pour l'ordonnancement en *Job Shop*, [Comellas & Ozón, 1998] utilisant un algorithme de fourmis pour les problèmes de coloration de graphe et [Bullnheimer et al. 1997] appliqués au *Vehicle Routing Problem* (VRP).

[Dorigo et al., 1996a] montrent que AS et ACS tournent mieux si les fourmis démarrent de différentes villes. [Rook, 2000] suggère que cela est dû au fait que ces deux algorithmes sont asymétriques dans leur traitement des villes au cours d'un tour individuel, et que démarrer à partir de villes distinctes prévient cette asymétrie.

### ***Conclusion du chapitre***

Nous venons de décrire les trois principales générations d'algorithmes de fourmis pour le problème du voyageur de commerce. Nous avons expliqué leurs principes d'évolution vers la solution recherchée, en ayant notamment argumenté les raisons et objectifs des changements introduits à chaque nouvelle génération par rapport à l'antérieure. Nous avons également indiqué l'étendue des applications cette catégorie d'algorithmes. Cela signifie que les évolutions ou améliorations introduites sur l'une des applications, induiraient des améliorations pour les autres, et cela du fait de la similitude ou de l'analogie existant entre ces problèmes. De ce fait le domaine de recherche sur les algorithmes de fourmis est tout à fait intéressant ; il offre en effet autant un champ d'investigation purement théorique peut exploité, qu'un domaine d'applications varié et en expansion.

Dans la suite de nos travaux, nous allons implémenter la dernière génération d'algorithmes de fourmis appliquée au problème du voyageur de commerce, à savoir un système de colonie de fourmis avec désensibilisation (ACS-DM).



## **CHAPITRE II**

**Implémentation et analyse  
de la méthode ACS-DM  
avec initialisation**

### B.II.1. Description sommaire du programme Matlab

Dans le projet que nous avons mené, nous avons été amené à programmer plusieurs fonctions Matlab – aussi bien pour la section B que pour la section C –. Nous pouvons citer non exhaustivement les fonctions : de calcul de  $m$  et de  $\sigma$ , de l'heuristique glouton, ACS-DM, etc.

Dans l'objectif d'avoir un programme dont la compilation serait rapide, nous avons choisi de programmer, entre autre, ACS-DM par des fonctions Matlab et non par un programme. Cette manière d'opérer facilite en outre la programmation de manière générale. En effet, ceci simplifie nettement l'écriture du programme et par voie de conséquence sa lisibilité. Il rend plus maîtrisable la détection et la correction d'erreurs lors de la compilation.

Ainsi, en imageant, nous pouvons assimiler notre programme à une série de « poupées russes ». Une fonction principale appelle plusieurs fonctions qui appellent à leur tour plusieurs autres fonctions imbriquées. L'appel se fait le plus souvent à l'intérieur de boucles.

Pour le cas de ACS-DM, nous pouvons décrire la structure du programme<sup>1</sup> comme suit.

- **Invariables (constantes) globales**<sup>2</sup> pour les différentes fonctions :  $C$  (matrice des distances),  $N$  (taille du problème),  $m$ <sup>3</sup> (nombre de fourmis),  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $D$ ,  $\epsilon$ ,  $q_0$  et « iniphéro » (paramètres de l'algorithme).
- **Variabes globales**<sup>4</sup> : liste taboue en cours, vecteur du chemin partiel construit, matrice des quantités de phéromones sur les arcs.
- **Les fonctions** :
  - Fonction principale ACS-DM :
    - ✓ Appel éventuel de la fonction *Nearest Neighbor* et de 2-opt ;
    - ✓ Appel de la fonction de construction des tournés des fourmis et incrémentation de l'itération ;
    - ✓ Enregistrement des meilleures solutions ;
    - ✓ Applications des mises à jour.

<sup>1</sup> Programme au sens large comprenant, en outre, les fonctions.

<sup>2</sup> C'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire de les mettre pour l'appel d'une fonction car elle sont partagées dans le répertoire de travail (*work directory*)

<sup>3</sup> On mettra, dans la majorité des cas, la valeur préconisée  $m = N$ .

<sup>4</sup> Elles sont similaires aux constantes globales avec la propriété de changer globalement de valeur si elle change de valeur localement dans un sous-programme ou une fonction appelée.



- Construction du tour de chacune des fourmis à une itération  $k$  ;
- Construction du tour d'une fourmi ;
- Détermination de la prochaine ville  $s$  de la fourmi en  $r$ , sachant la liste taboue ;
- Détermination de la prochaine ville pour le cas stochastique ;
- Détermination de la prochaine ville pour le cas déterministe ;

## B.II.2. Paramétrisation de ACS-DM (sans initialisation)

### B.II.2.a. nombre de fourmis

Le nombre de fourmis, en plus d'influencer le temps d'exécution, va influencer la solution moyenne trouvée par l'heuristique. Un nombre de fourmis trop important impliquerait non seulement une importante durée d'exécution, mais également selon [Dorigo & Gambardella, 1997b] une convergence anticipée vers un optimum local. On perd aussi une grande part du potentiel d'exploration, nécessaire pour sortir de l'optimum local. Un nombre moins important de fourmis peut certes diminuer le temps d'exécution de l'itération, mais imposera le plus souvent, un plus grand nombre d'itérations avant l'obtention d'une solution satisfaisante.

En ce qui concerne ACS, [Dorigo & Gambardella, 1997b] donnent comme nombre optimal de fourmis, le nombre trouvé par l'expression suivante :

$$m^* = [\log(\phi_1 - 1) - \log(\phi_2 - 1)] / (q_0 * \log(1-\rho)) \quad [\text{B.II.2.a-1}]$$

Avec :

$\phi_1 \tau_0$  est la trace de phéromones moyenne sur le LB (local best) juste avant la mise à jour globale.

$\phi_2 \tau_0$  est la trace de phéromones moyenne sur le LB (local best) juste après la mise à jour globale.

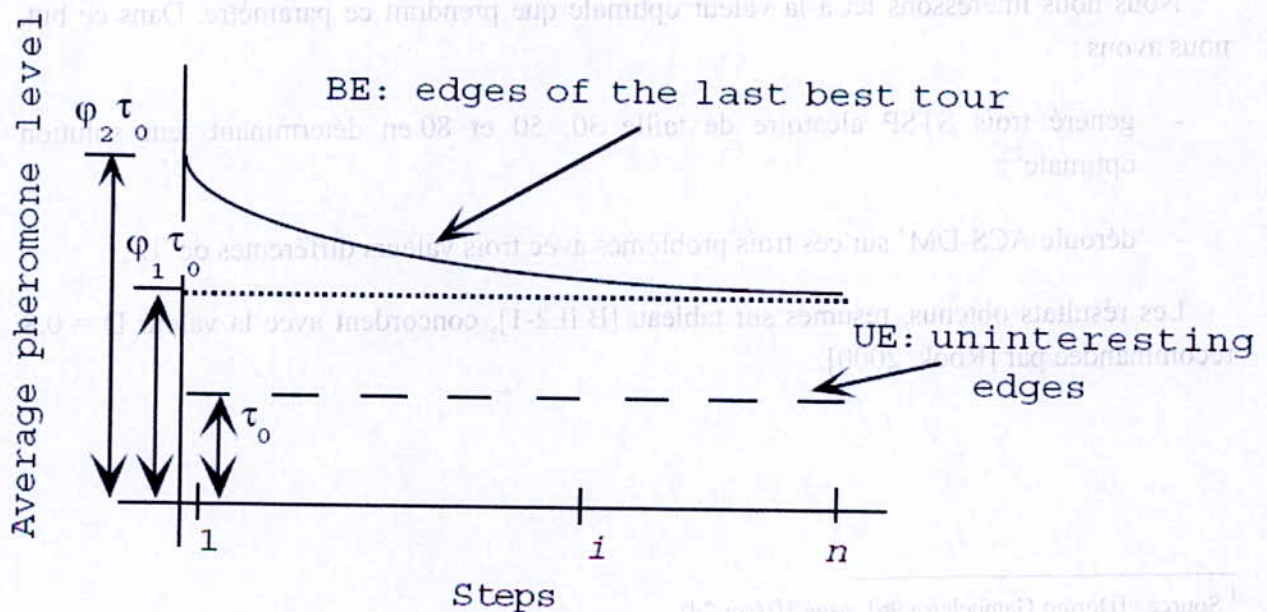




Figure [B.II.2-1]<sup>1</sup> : Evolution du niveau moyen de phéromone sur les arêtes du graphe en fonction des itérations (étapes).  
La répartition de ces fourmis sur les villes de départ est aléatoire.

Une alternative à valeur fixe, qui est nettement plus simple à calculer concernant le nombre de fourmis, est donnée par  $m = N$  en imposant à celles-ci de démarrer à partir de villes [Dorigo & Gambardella, 1997b].

Les arguments concernant le nombre de fourmis dans le système et leur initialisation (chaque fourmi démarre d'une ville distincte), étant toujours valable pour le cas de ACS-DM, [Rook, 2000] recommande de garder cela.

En outre, cette manière d'opérer se caractérise par un traitement compensé de l'asymétrie au bout d'un certain nombre d'itérations. De cette manière, on répond aussi bien aux particularités des STSP qu'à celles des ATSP. En effet, les chemins sont, à l'issue d'un nombre suffisant d'itérations, autant explorés dans un sens que dans l'autre [Dorigo & al., 91], [Dorigo & Gambardella, 1997b], [Rook 2000].

### B.II.2.b. Valeur D pour la désensibilisation

La désensibilisation est modélisée, comme nous l'avons expliqué plus haut, par l'ajout d'un seul paramètre D. Celui-ci représente la proportion d'arcs dont la trace de phéromone est supérieure à la moyenne, valeur à partir de laquelle la désensibilisation est activée lors de la tournée d'une fourmi.

Nous nous intéressons ici à la valeur optimale que prendrait ce paramètre. Dans ce but, nous avons :

- généré trois STSP aléatoire de taille 30, 50 et 80 en déterminant leur solution optimale<sup>2</sup> ;
- déroulé ACS-DM<sup>3</sup> sur ces trois problèmes avec trois valeurs différentes de<sup>4</sup> D ;

Les résultats obtenus, résumés sur tableau [B.II.2-1], concordent avec la valeur  $D = 0.8$  recommandée par [Rook, 2000].

<sup>1</sup> Source : [Dorigo Gambelerra 96] page 10 (sur 24)

<sup>2</sup> La génération et la résolution exacte en nombre entier s'est faire à l'aide du logiciel concorde (version 1.1)

<sup>3</sup> Pour 1000 itérations

<sup>4</sup> La valeur préconisée (D=0.8), une valeur au voisinage gauche 0.7 et une valeur au voisinage droit 0.9



**Tableau [B.II.2-1] : Précision moyenne obtenue pour différentes valeurs du paramètre de désensibilisation aux phéromones**

Valeur du paramètre D	Ecart <sup>1</sup> de l'optimum
0.7	7.1 %
0.8	4.8 %
0.9	6.4 %

Ainsi, même en exécutant le programme « seulement » sur 1000 itérations, contre 5000 itérations sur Sn50 pour la paramétrisation de [Rook, 2000], nous arrivons à la même conclusion.

Il est à noter que la paramétrisation optimale préconisée n'est que celle qui donne les meilleurs résultats en moyenne. Il s'agit donc de recommandations générales. En fait, pour chaque type de problème, il aurait une paramétrisation optimale particulière [Schabanel, 2003] mais il serait très fastidieux et complexe de faire de telles recommandations.

<sup>1</sup> Ecart moyen pour les 3 problèmes testés.



### B.II.3. Problème du paramètre $\beta$ et de la longueur des arcs

Nous avons programmé<sup>1</sup> ACS-DM dans sa version décrite dans [Rook, 2000]. Nous avons validé la conformité de notre implémentation en la comparant<sup>2</sup> aux résultats donnés par l'article correspondant.

Cependant, un point de l'implémentation décrite ci-avant ne nous a pas paru être en accord avec la finalité visée. Il s'agit des équations de mise à jour globale et des équations qui permettent le choix de la prochaine ville.

Par exemple, le « choix » pour une fourmi, qui est à la ville  $s$ , d'aller à une ville  $r$  se base, tant dans le cas stochastique que déterministe sur :  $[\tau(r,u)] \cdot [\eta(r,u)]^\beta$

$\eta$  étant la visibilité, c'est-à-dire l'inverse d'une distance, le paramètre  $\beta$  pondère (exponentiellement) l'importance de cette visibilité par rapport à la trace de phéromones.

La valeur préconisée de  $\beta = 2$  implique que la visibilité compte moins que la trace  $\tau$  car elle est comptée par son carré. Ceci part de l'idée que toute distance est supérieure à 1 et que donc, toute visibilité entre deux villes est inférieure à 1, impliquant une réduction de l'importance de la visibilité lorsqu'on calcule son carré.

Or, ce n'est pas toujours le cas. Pour des TSP aléatoires, par exemple, cette supériorité peut ne pas être vérifiée au moins pour certaines villes. Pour des problèmes dits « dégradés centrés » à l'instar de Berlin52, les distances entre les sommets du centre sont fréquemment inférieures à 1. Dans ces cas là, ACS-DM dans sa version décrite par [Rook, 2000], n'est pas aussi performante que ce qu'elle aurait dû être si cette condition était vérifiée.

Nous avons alors corrigé cela en introduisant dans notre programme un bloc supplémentaire pour garantir que toutes<sup>3</sup> les distances soient supérieures à 1. Il a fallu donc effectuer un branchement conditionnel <si la distance minimale entre deux villes distinctes est inférieure à 1> et multiplier la matrice des distances par un facteur – en l'occurrence l'inverse de la distance minimale – afin de garantir cette hypothèse. A la fin du programme, on divise les distances calculées par le facteur précédent pour avoir les sorties du problème original.

Pour prouver cette « faille », ou alors cette information non précisée dans l'article, nous avons créé un problème particulier composé de quatre groupements éloignés constitués chacun de villes très proches – distances inférieures à un – en plus d'autres sommets aléatoires. La figure [B.II.3-1] représente ce problème spécifique. Nous avons déroulé 300 itérations en utilisant la version originale telle qu'elle a été décrite et la version corrigée.

<sup>1</sup> Programmation d'une fonction (appelant d'autres fonctions également programmées) sous Matlab

<sup>2</sup> La comparaison s'est faite pour Oliver30 sur 25 000 itération. Les résultats concordaient.

<sup>3</sup> Pour des villes distinctes évidemment.



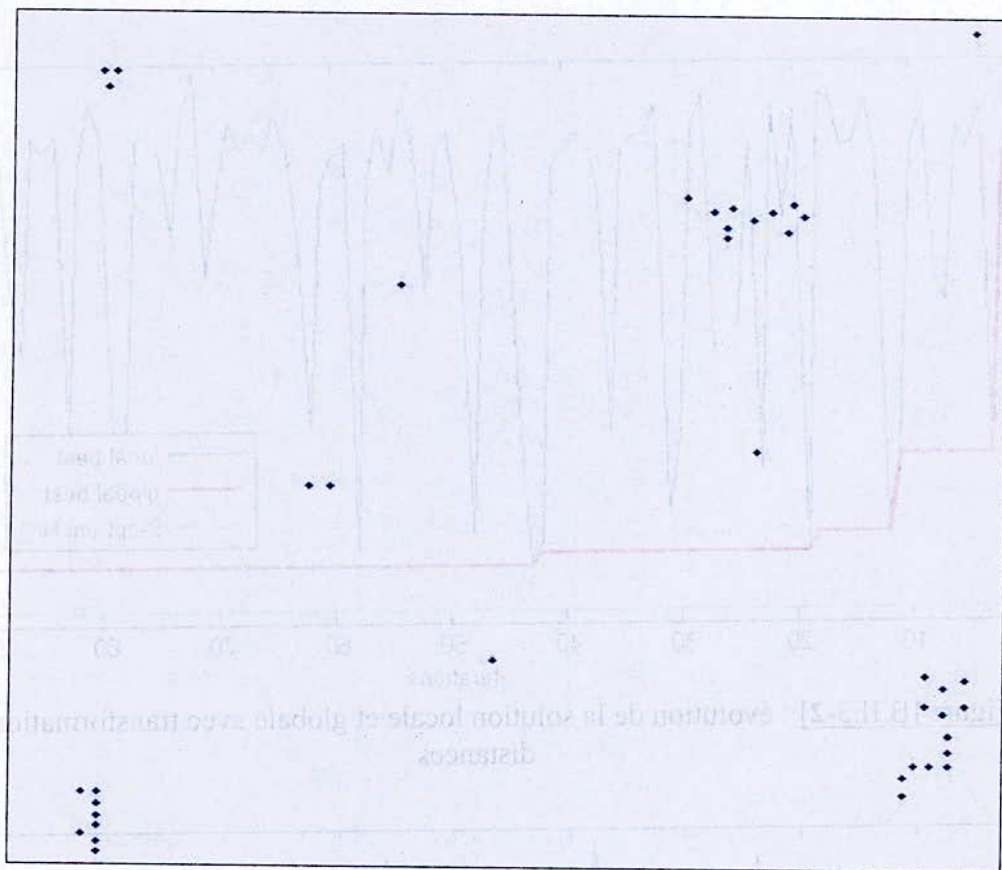


Figure [B.II.3-1]: Visualisation de la répartition des sommets du problème-test

Le graphe suivant montre les moins bons résultats de la version originale par rapport à la version corrigée, bien que le seul changement réside dans un facteur de proportion du graphe correspondant.

Alors que l'évolution du *global best* et du *local best* aurait dû être conforme aux graphes (figure [B.II.3-2]), c'est-à-dire correspondre au cas où toutes les distances sont multipliées pour être supérieures à 1, on remarque que l'évolution sur la version telle qu'initialement décrite est différente (figure [B.II.3-3]).



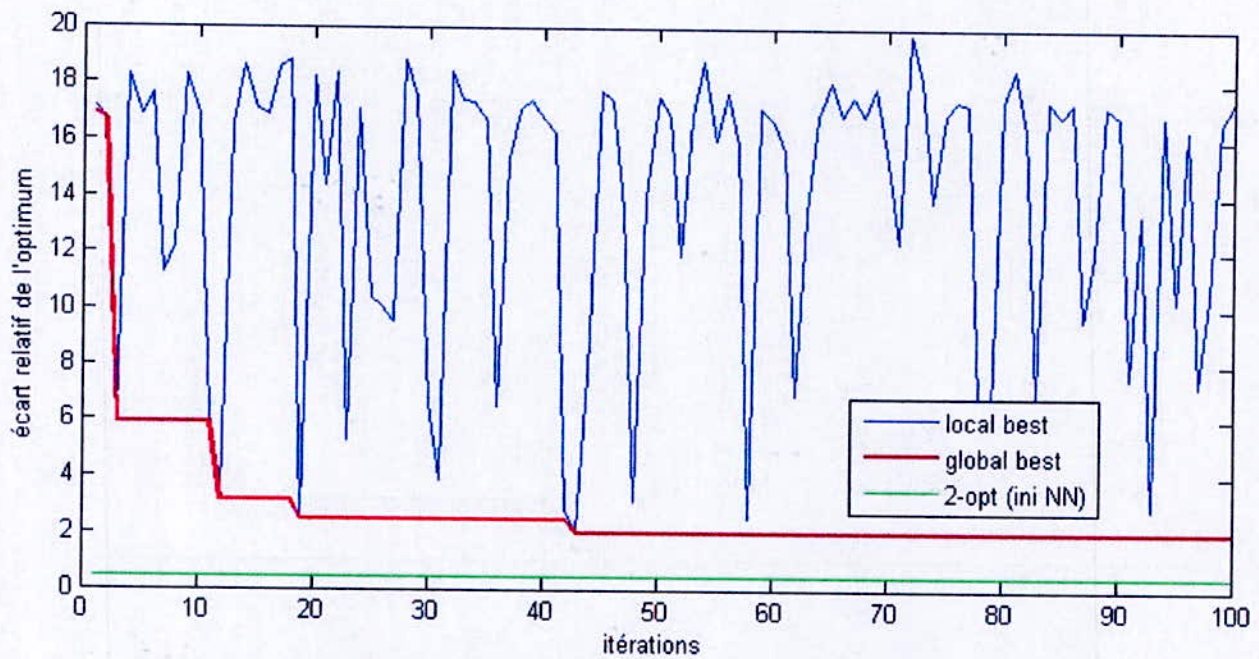


Figure [B.II.3-2] : évolution de la solution locale et globale avec transformation des distances

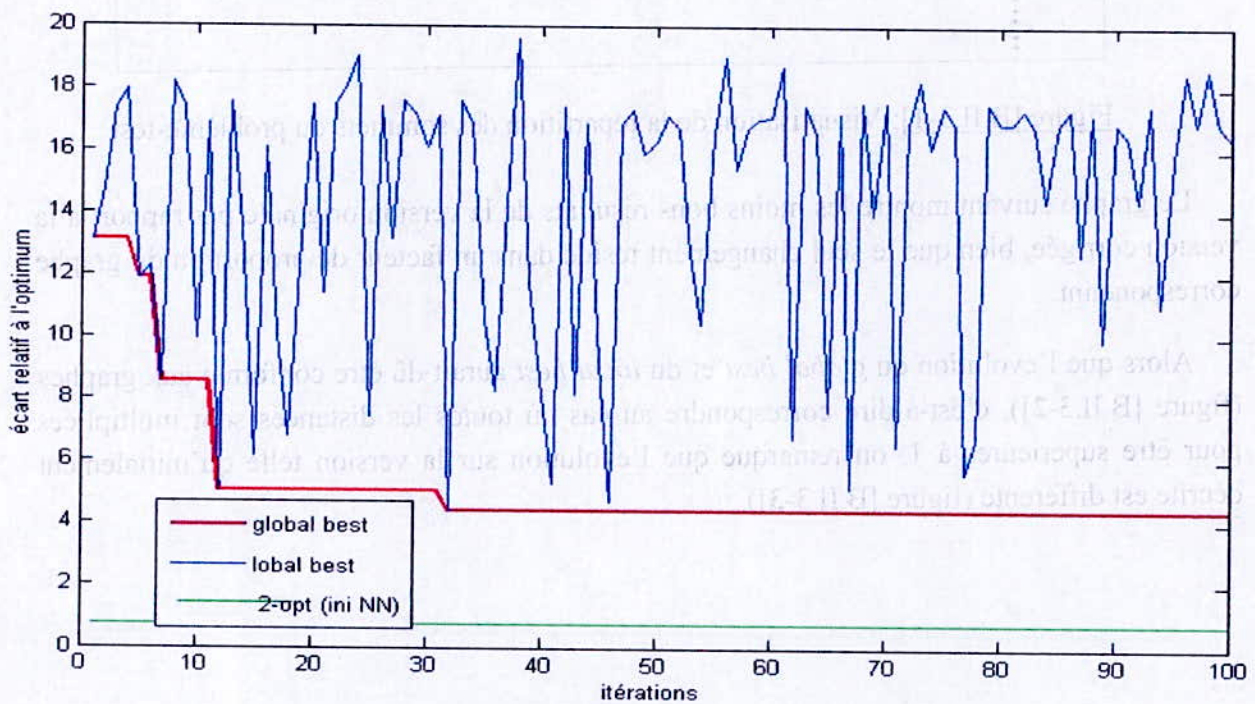


Figure [B.II.3-3] : évolution de la solution locale et globale sans transformation des distances

On remarque que la version originale appliquée à ce problème donne de moins bons résultats, aussi bien en termes de solution obtenue, qu'en termes de convergence. Cette différence n'a aucune autre explication que celle avancée précédemment.

**Conclusion :**

Nous avons détecté une incohérence dans l'expression de *ACS-DM* (de même que dans celle de AS et de ACS) et nous l'avons prouvé. Nous avons proposé une solution simple pour pallier ce problème et par conséquent, notre version programmée en tient compte. Cela dit, nous pensons qu'à ce niveau là, ce problème relèverait plus d'une hypothèse non précisée ou d'un aspect de l'implémentation qu'on a omis d'indiquer dans les différents articles – à l'instar de [Rook,2000] et de [Dorigo,97] – plutôt que d'une « faille ».



#### **B.II.4. ACS-DM avec initialisation**

A la suite de la vérification de l'adéquation de notre implémentation avec l'implémentation originale, et à l'issue de la correction d'un problème qu'on a probablement omis de préciser, il nous a semblé utile d'enrichir cette méthode en proposant une initialisation. Le but de celle-ci serait de d'accélérer la convergence vers une « bonne » solution ou/et de contribuer à trouver une meilleure solution.

Dans cette partie, nous allons étudier l'idée d'initialiser ACS-DM avec une méthode « classique ». A cette fin, nous allons :

- étudier le choix de l'heuristique d'initialisation ;
- étudier la paramétrisation de la trace de la solution initiale ;
- monter l'apport positif de cette initialisation ;
- étudier enfin, les performances de cette version enrichie.

**B.II.4.a. Choix de l'heuristique d'initialisation (cas ATSP, cas STSP)**

Nous imposerons à l'heuristique d'initialisation que nous allons choisir les propriétés suivantes :

- Qu'elle soit de complexité inférieure à celle de l'heuristique principale ACS-DM ;
- Qu'elle donne la meilleure solution entre toutes les heuristiques sélectionnées ;
- Qu'elle comprenne une succession d'heuristiques (typiquement constructive puis de recherche locale) tant que la première condition dictée reste vérifiée.

De plus, nous nous limiterons aux heuristiques dites « classiques ».

Compte tenu des conditions dictées ci-dessus, et compte tenu également des performances des heuristiques classiques disponibles dans la littérature, notre choix final allait se décider entre l'une des deux heuristiques suivantes :

- l'heuristique 2-opt initialisée avec l'algorithme du plus proche voisin<sup>1</sup>.
- L'hybride 2-opt/glouton où une recherche locale 2-opt est appliquée à chaque fois qu'on effectue la meilleure insertion du k<sup>ème</sup> sommet pour construire un tour initial.

La comparaison entre ces deux heuristiques combinant construction et recherche locale, est représentée par les résultats suivants :

**Tableau [B.II.4-1] : Comparaison des résultats obtenus par les deux heuristiques d'initialisation sélectionnées**

Heuristique d'initialisation (construction et recherche locale)	problèmes-tests			
	Symétriques		asymétriques	
	att48 N = 48 (33 522)	STSP aléatoire N = 60 (608)	ftv35 N = 35 (1 473)	ATSP aléatoire N=30
2-opt initialisée plus proche voisin	34 488 (2.9 %)	<b>614</b> (1.0 %)	1 723 (17.0 %)	<b>3 019</b>
hybride 2-opt / glouton	<b>34 081</b> (1.7 %)	674 (10.9 %)	<b>1 643</b> (9.6 %)	3 175

Les résultats affichés ci-dessus ne mettent pas clairement en évidence la supériorité d'une heuristique par rapport à l'autre. En effet, autant pour les problèmes symétriques

<sup>1</sup> En fait, il s'agit du « meilleur plus proche voisin », c'est-à-dire de la meilleure solution donnée par l'exécution du plus proche voisin initialisé sur chacune des N villes possibles. Sa complexité est N fois la complexité d'un plus proche voisin.



qu'asymétriques, les meilleures solutions peuvent être celles de la première comme celles de la seconde. Cependant, la complexité inférieure de « 2-opt initialisée par le meilleur plus proche voisin » par rapport à l'hybride « 2-opt / glouton » induit que nous élisons la première comme heuristique d'initialisation dans la suite de notre travail.

En fait, nous nous attendions *a priori* à ce que l'heuristique hybride 2-opt / glouton donne de meilleurs résultats. Nous pouvons interpréter les moins bons résultats obtenus par la seconde heuristique, par le fait que la méthode gloutonne évite les « croisement » d'arêtes ; or, c'est ce dernier qui permet à la recherche locale 2-opt d'améliorer le cycle construit ; d'ailleurs, certaines versions évoluées de r-opt comprennent un module de perturbation de la solution trouvée pour rechercher à nouveau d'éventuelles meilleures solutions.

Voici, représentées dans les figures [B.II.4-1] [B.II.4-2], les solutions obtenues par différentes heuristiques pour l'initialisation. Le problème considéré est un STSP euclidien aléatoire de 69 sommets.

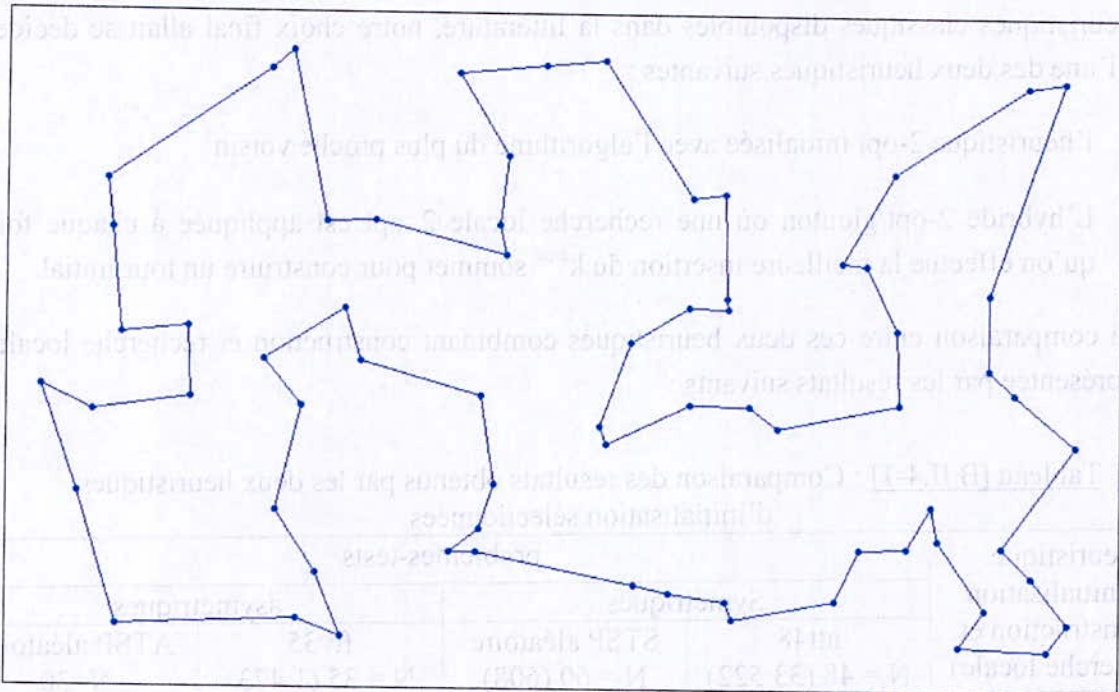


Figure [B.II.4-1] : représentation de la solution optimale exacte (par le logiciel Concorde)

## Conclusion

L'heuristique d'initialisation que nous utiliserons sera 2-opt initialisée avec le meilleur plus proche voisin, notée « 2-opt ini NN<sup>1</sup> ».

<sup>1</sup> NN : Nearest Neighbor (plus proche voisin)



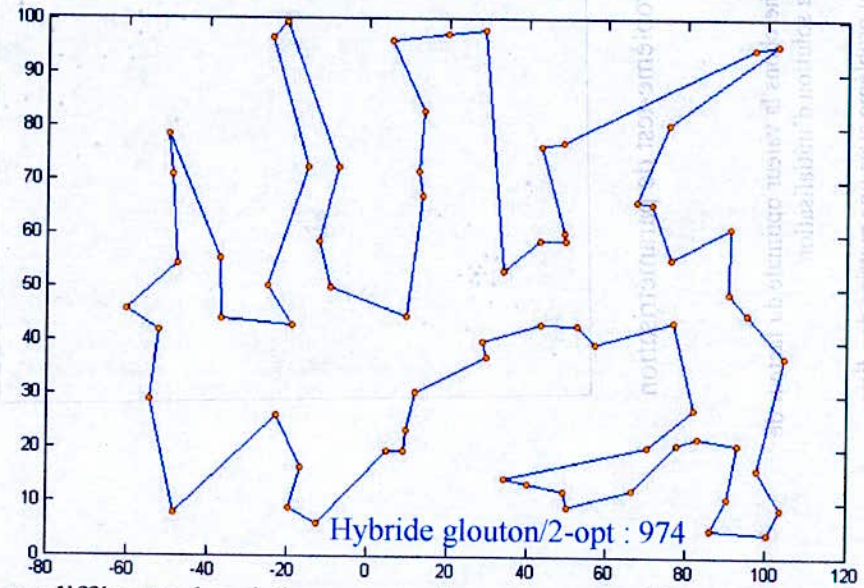
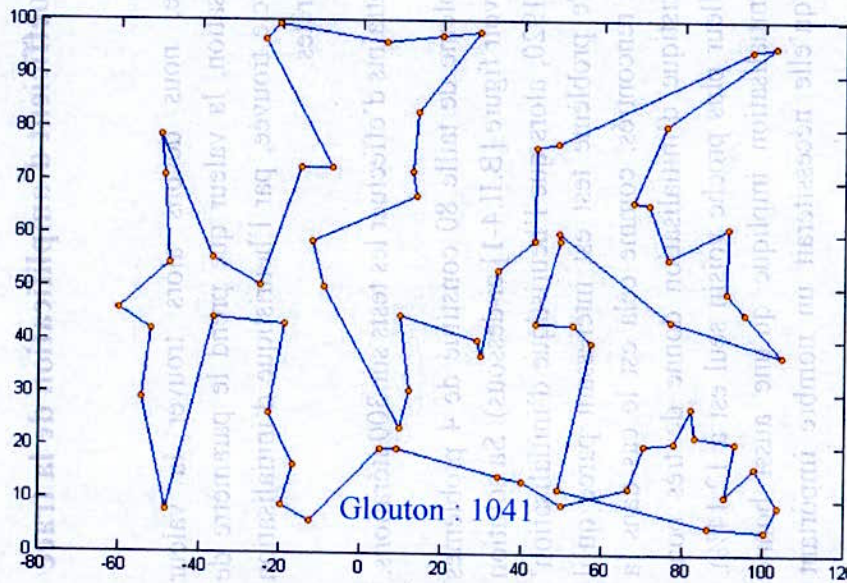
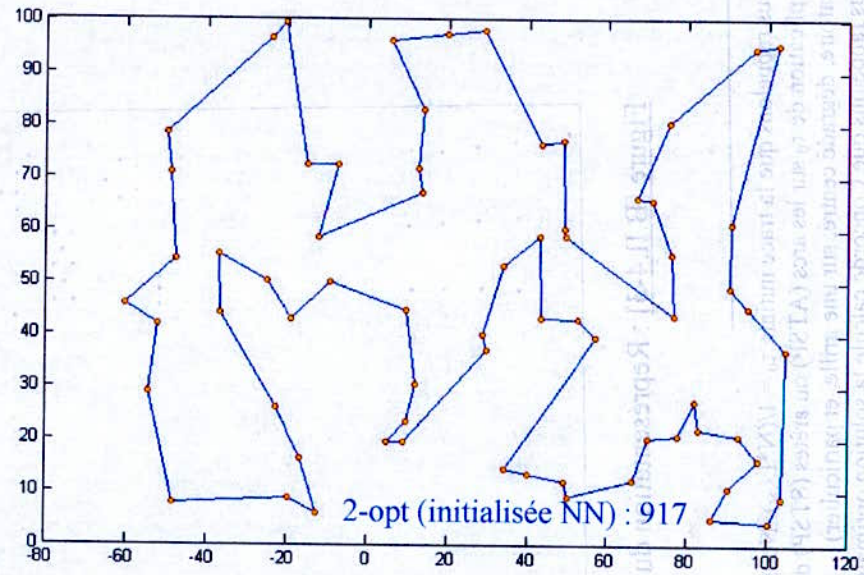
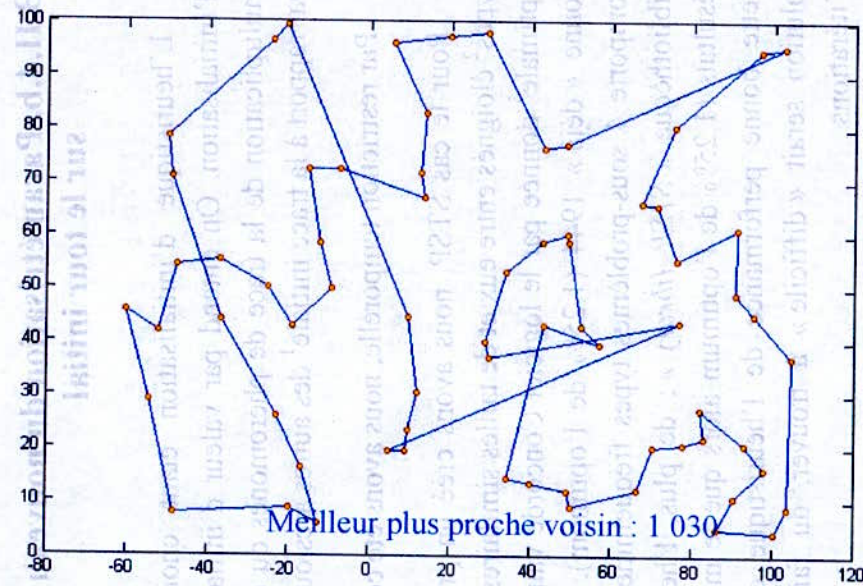


Figure [B.II.4-2] : représentation des solutions obtenues par différentes heuristiques « classiques » sur « rd69 »



### B.II.4.b. Paramétrisation du nouveau coefficient d'amplification de la trace sur le tour initial

L'heuristique d'initialisation étant choisie, nous devons alors trouver la valeur d'initialisation. On entend par valeur d'initialisation, la valeur que prend le paramètre de multiplication de la trace de phéromones du cycle trouvée, par l'heuristique d'initialisation par rapport à la trace initiale<sup>1</sup> des autres arcs ou arêtes.

Par restriction temporelle, nous avons été contraints d'effectuer les tests sur 300 itérations.

Pour le cas STSP, nous avons créé un problème de taille 80 constitué de 4 problèmes types<sup>2</sup> éloignés entre eux et de tailles similaires (voir figure [B.II.4-1] ci-dessous). Sa solution optimale<sup>3</sup> donnée par le logiciel Concorde vaut 1920, alors que l'heuristique d'initialisation<sup>4</sup> donne « déjà » 1944 (1.25% de l'optimum). Ce problème test est intéressant parce qu'il comporte 4 sous-problèmes types fréquemment rencontrés, comme cela est le cas dans la bibliothèque « *STSP library* » ; de plus, l'heuristique d'initialisation donne de très bons résultats (1.25% de l'optimum alors que le meilleur plus proche voisin seul est à 12.14%). Cette bonne performance de l'heuristique d'initialisation implique qu'une aussi bonne solution serait « difficile » à trouver, du fait qu'elle nécessiterait un nombre important d'itérations.

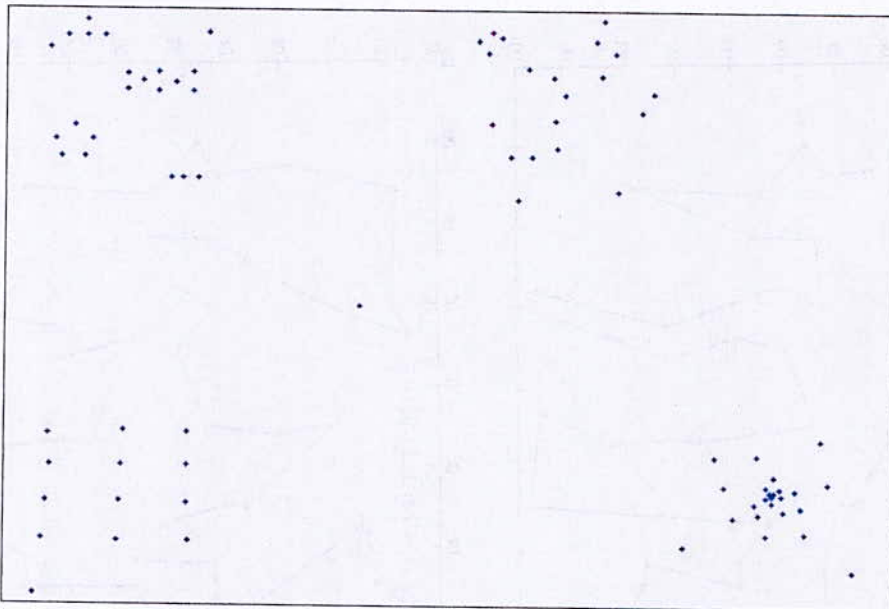


Figure [B.II.4-3] : Représentation du problème-test de paramétrisation

<sup>1</sup> Nous rappelons que la trace initiale  $\tau_0 = 1/(N \cdot L_{NN})$ . Nous cherchons la valeur optimale du facteur de multiplication de  $\tau_0$  sur les arcs (ATSP) ou arêtes (STSP) de la solution d'initialisation.

<sup>2</sup> (aléatoire, dégradé centré, sur une grille, et particulier)

<sup>3</sup> Nous rappelons que Concorde calcule la solution optimale du problème avec une matrice des distances en nombres entiers

<sup>4</sup> Pour rappel : 2-opt initialisée avec le meilleur plus proche voisin.



On note  $\tau_{ini}$  le paramètre de multiplication de la trace de phéromones sur la solution de l'heuristique d'initialisation.

Nous avons testé notre algorithme avec des valeurs de  $\tau_{ini}$  variant de 0.1 à 10. Le tableau [B.II.4-2] synthétise les résultats obtenus.

Tableau [B.II.4-2] : Résultats moyens obtenus par ACS-DM initialisé selon la valeur du paramètre de la solution initiale 2-opt pour le problème-test

Facteur de multiplication	Solution obtenue après 300 itérations	Ecart relatif de l'optimum	Itérations de la solution obtenue
(sans enregistrement)	2037	6.1 %	264
1.0	2037	6.1 %	238
1.3	2037	6.1 %	179
5.0	2098	9.3 %	154

On remarque qu'avec une initialisation et une amplification de la trace initiale pour des valeurs proches de 1, la solution obtenue est la même qu'en ACS-DM sans initialisation. On note également que le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir cette solution décroît lorsque le facteur de multiplication croît au voisinage de 1. Cela peut s'expliquer par le fait qu'une « bonne » solution initiale qui est enregistrée, va avoir une trace actualisée par la mise à jour globale tant qu'elle restera la meilleure. Ceci va favoriser la convergence vers une aussi bonne solution, mais qui serait probablement à son voisinage local. De plus, l'amplification raisonnable (1.3 en l'occurrence) de cette solution initiale va accélérer cette convergence. Par ailleurs, une amplification excessive de la trace sur la solution initiale va certes accélérer la convergence vers une solution relativement satisfaisante, mais au risque de limiter l'exploration d'autres solutions à cause d'une trace trop forte sur un optimum local.

Nous attirons l'attention sur le fait qu'un  $\tau_{ini}$  égal à 1, n'est pas équivalent à une absence d'initialisation. En effet, même si la trace initiale est la même pour tous les arcs lorsque  $\tau_{ini}$  vaut 1, la solution donnée par l'heuristique d'initialisation est enregistrée comme meilleure solution et elle le restera tant que sa supériorité est valide. Cela implique qu'on y appliquera la mise à jour globale. Or, dans le cas d'absence d'initialisation, la meilleure solution à laquelle on appliquera la mise à jour globale est celle calculée à l'itération une ou plus.

Les essais précédents nous permettent de déduire que la valeur optimale du paramètre est de 1.3 pour le cas du STSP

Pour le cas du ATSP, les résultats médiocres de 2-opt, par rapport aux premières itérations de ACS, nous amènent à choisir un paramètre d'initialisation égal à 1. Cela signifie que la trace de la solution initiale ne sera pas amplifiée (elle reste la même car multipliée par 1), mais elle fera l'objet de la mise à jour globale si toutefois elle reste la meilleure.



### B.II.4.c. Etude des performances

La paramétrisation étant effectuée, nous passons au test de la précision de cette version sur les problèmes tests des bibliothèques ATSP et STSP. Nous comparerons en outre les résultats obtenus à d'autres heuristiques.

Les résultats mis en évidence lors des tests de paramétrisation, montrent que notre version initialisée de ACS-DM par rapport à celle proposée par [Rook, 2000] (sans initialisation) est plus précise, pour un même nombre d'itérations ; elle est aussi plus rapide pour une même précision. De plus, [Rook, 2000] conclût que ACS-DM (sans initialisation) « serait meilleure que ACS, autant pour de petits que pour de grand problèmes ». Dans cette conclusion, ACS désigne l'heuristique Système de Colonie de Fourmis (sans désensibilisation) proposé par [Dorigo & Gambardella, 1997b].

Par ailleurs, [Dorigo & Gambardella, 1997b] conclût à son tour que ACS (implémenté avec une recherche locale à la fin de chaque itération<sup>1</sup>) donne de meilleurs résultats que les algorithmes inspirés de la nature, comme le recuit simulé et les algorithmes génétiques et cela autant pour le cas STSP que pour le cas ATSP.

Ainsi, nous nous limiterons dans cette partie à tester notre version sur quelques-uns des problèmes tests des bibliothèques STSP et ATSP. Nous exécuterons alors notre algorithme sur un nombre relativement réduit d'itérations ; les résultats obtenus ne devront être comparés qu'aux résultats des articles relatifs à ACS et ACS-DM, qui ont été obtenu pour un nombre d'itérations pouvant aller de 1000 à 25000. Pour notre part, nos capacités computationnelles limitées et la restriction temporelle qui nous est imposée ne nous permettent pas d'effectuer de tels tests. Le nombre d'itérations que nous effectuerons ne dépassera jamais 1000 pour les problèmes les plus petits.

#### B.II.4.c.1. Test sur des problèmes de la bibliothèque STSP

Nous avons testé plusieurs problèmes symétriques sur un nombre d'itérations relativement restreint. Il s'agit de att48, berlin52, ch130, eil51, pr76, ulysse16, ulysse22. Les résultats comparés sont donnés par le tableau [B.II.4-3] qui suit.

Nous rappelons que 2-opt est particulièrement efficace pour les problèmes symétriques euclidiens (d'où l'idée antérieure d'initialisation)

<sup>1</sup> Cette implémentation double approximativement le temps d'exécution cas le temps d'exécution d'une itération est de même ordre de complexité qu'un 3-opt qui est la recherche locale utilisée dans son article.



Tableau [B.II.4-3]: Résultats obtenus sur des problèmes-tests symétriques

Problème-test	Solution optimale	Initialisation 2-opt	ACS-DM avec initialisation		
			Solution	N <sup>br</sup> Itérations	itération obt.
Ulysse22 <sup>1</sup>	7 529	7 570 (0.24 %)	7 567 (0.50 %)	10 000	5 609
Alg31 <sup>2</sup>	?	6 885	6 020	1 000	807
Att48 <sup>3</sup>	33 522	34 884 (4.06 %)	36 088 (7.65 %)	300	168
Eil51 <sup>4</sup>	426	458 (7.51 %)	468 (9.96 %)	100	37
Berlin52	7 542	7 979 (5.79 %)	7 953 (5.45 %)	100	58
Rnd66 <sup>5</sup>	6 654	7 198 (8.18 %)	7 101 (6.72 %)	100	7
Pr76 <sup>6</sup>	108 159	109 352 (1.10 %)	123 142 (13.85 %)	100	50
Lin105	14 379	14 995 (4.28 %)	15 926 (10.76 %)	100	58

Nous verrons dans ce qui suit, qu'il arrive que la solution ACS-DM soit non planaire, et même dans le cas où elle est meilleure que 2-opt. Cela signifie que l'application de 2-opt à la fin de l'implémentation améliore la solution.

Le fait d'appliquer 2-opt à chaque fin d'itération [Bahmani, 2003], améliore certes la solution, cependant une remarque est à faire. L'amélioration de la précision pour cette implémentation est justifiée par la propriété d'amélioration de la solution, lorsqu'on applique des perturbations à la solution 2-opt, pour relancer 2-opt. Toutefois, l'implémentation de 2-opt avec perturbations est nettement moins complexe qu'un algorithme de fourmi alterné avec 2-opt.

Il est à préciser que l'écart relatif par rapport à l'optimum, n'est un bon indicateur de précision que lorsqu'il s'agit du même problème, voire, de problèmes ayant des caractéristiques similaires dont la dispersion. Nous donnerons ultérieurement d'autres indicateurs possibles pour qualifier la solution obtenue.

<sup>1</sup> 7.5 % pour la meilleure des 3 variantes de compétition harmonique par réseaux neuronaux [Aït Ali Slimane, 2000]

<sup>2</sup> Alg31 est le STSP non euclidien représentant les distances routières entre les 31 chefs-lieux des 31 premières Wilaya. Cet exemple illustre les moins bons résultats de 2-opt, comparativement à ACS-DM en l'occurrence, pour le cas STSP non euclidien.

<sup>3</sup> 4.29 % pour 1 000 itération de AS [Bahmani, 2003] ; diverge pour [Aït Ali Slimane, 2000]

<sup>4</sup> 19.5 % pour la meilleure variante [Aït Ali Slimane, 2000]

<sup>5</sup> Rnd66 est un STSP euclidien aléatoire généré par Concorde.

<sup>6</sup> 8.01 % de l'optimum pour 1 000 itération sur AS élitiste [Bahmani, 2003]



La série de graphiques ci-dessous, illustre les évolutions observées de la solution en fonction des itérations, pour quelques-uns des problèmes testés et spécialement ceux dont la résolution montre des particularités.

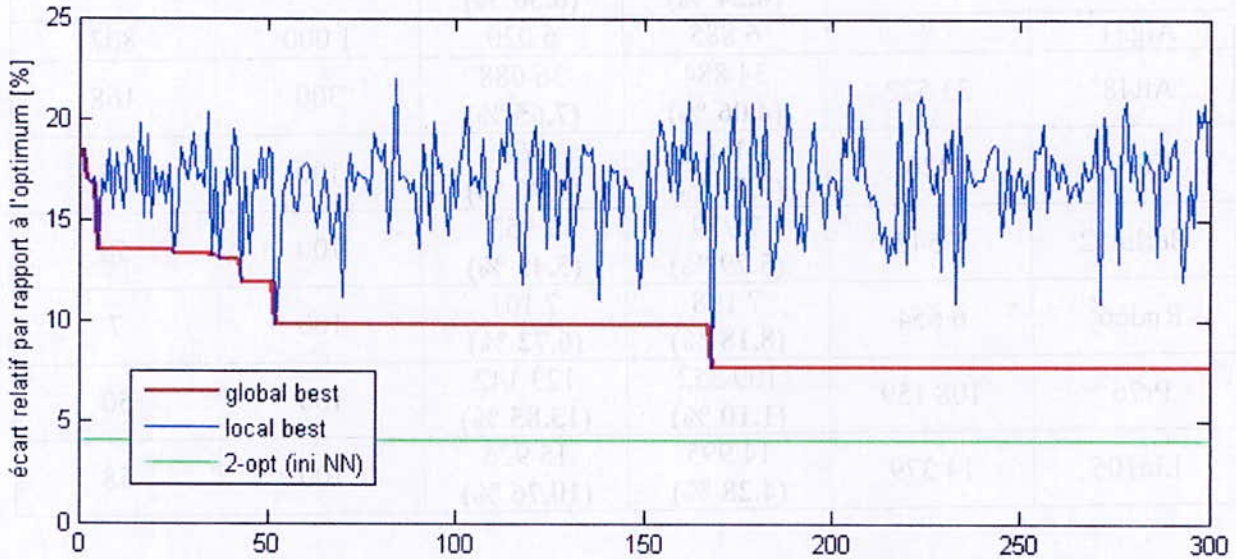


Figure [B.II.4-4]: Évolution, en écart relatif à l'optimum, de la solution donnée par ACS-DM initialisée 2-opt à l'issue de 300 itérations pour le STSP « att48 »

L'évolution de la solution locale et globale du problème « att48 » est représentée graphiquement sur la figure [B.II.4-4]. On peut interpréter les résultats obtenus par le fait que le nombre d'itérations limité à 300 n'ait pas suffi pour dépasser la performance de l'heuristique d'initialisation (2-opt NN). Ainsi la solution obtenue pour 300 itérations, est à 7.65 % de l'optimum alors que 2-opt est à 4.06 % – solution donnée par notre programme car elle est toujours enregistrée pour la mise à jour globale de la trace –. L'évolution progressive mais décélérée du meilleur global n'a visiblement rien de particulier à noter. Ainsi, l'actualisation globale de la trace à l'issue de 300 itérations n'a pas encore influencé suffisamment le comportement des fourmis, pour que certaines arrivent à tourner autour de la solution 2-opt ou une solution meilleure à son voisinage local. Nous sommes retombés sur ce cas assez souvent lors de nos tests, et la raison reste la même. D'ailleurs pour certains problèmes où nous avons pu exécuter un nombre d'itérations plus important<sup>1</sup>, l'effet escompté de « reversement de situation » a eu lieu au bout d'un nombre suffisant d'itérations. Cela dit, le résultat donné par le meilleur tour de fourmis à 7.65 % de l'optimum est « déjà » supérieur que celui d'autres heuristiques.

Un autre exemple traité est le STSP noté « rnd66 » constitué de 66 sommets aléatoirement réparti sur un carré de coté 1000 dont la solution optimale vaut 6 654. Sur cet exemple là, nous retombons sur le cas de figure inverse à celui de « att48 ». L'évolution de la solution est représentée dans la figure [B.II.4-5] qui suit. Le nombre d'itérations pour cet exemple a suffi

<sup>1</sup> A l'instar du STSP euclidien aléatoire que nous avons nommé « rnd66 »



pour dépasser 2-opt et ceux dès la 7<sup>ème</sup> itération. Cependant cette solution relativement bonne (à 6.72 % de l'optimum) qui est rapidement trouvée provoque un blocage local au niveau de cette dernière. En effet, il n'y a plus d'amélioration dès l'obtention de celle-ci.

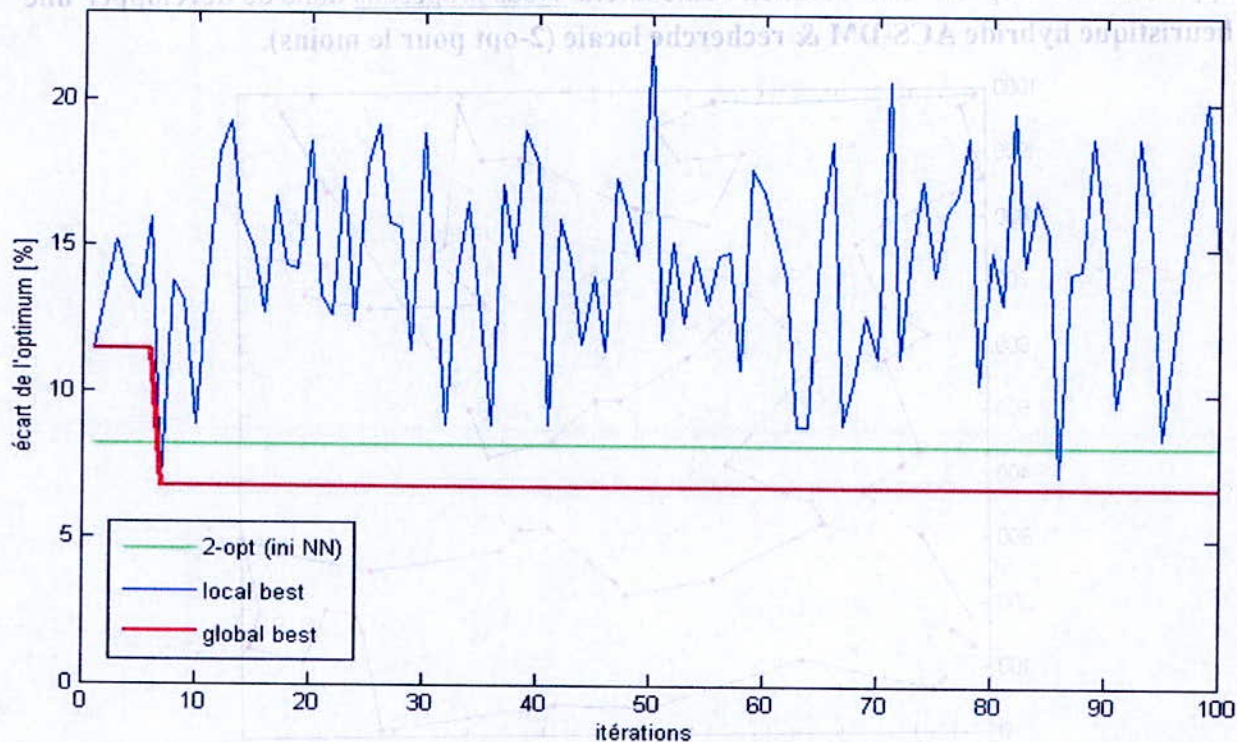


Figure [B.II.4-5]: Évolution, en écart relatif à l'optimum, de la solution donnée par ACS-DM initialisée 2-opt à l'issue de 100 itérations pour le STSP « rnd66 »

La solution obtenue par 2-opt est représentée par la figure [B.II.4-6]. Celle-ci est à 8.18 % de l'optimum ; elle est en outre planaire donc en accord avec le principe de 2-opt.

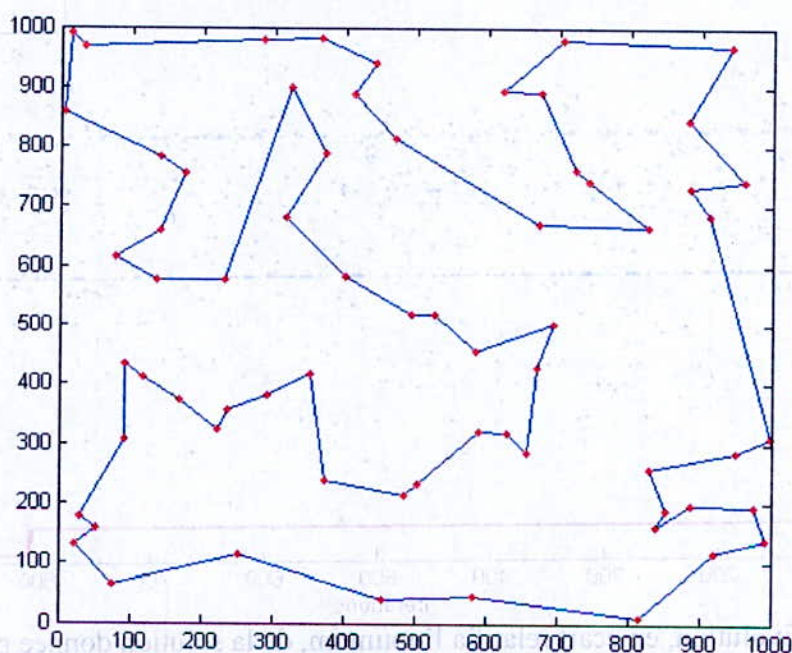


Figure [B.II.4-6]: Solution donnée par 2-opt pour le problème « rnd66 »



La figure [B.II.4-7] représente quant à elle la solution obtenue dès la 7<sup>ème</sup> itération de ACS-DM. On remarque que celle-ci est meilleure que 2-opt mais elle n'est toutefois pas planaire. Ceci montre le potentiel d'évolution d'une telle solution. C'est ainsi qu'une application de 2-opt sur cette solution l'améliorera. Nous proposons donc de développer une heuristique hybride ACS-DM & recherche locale (2-opt pour le moins).

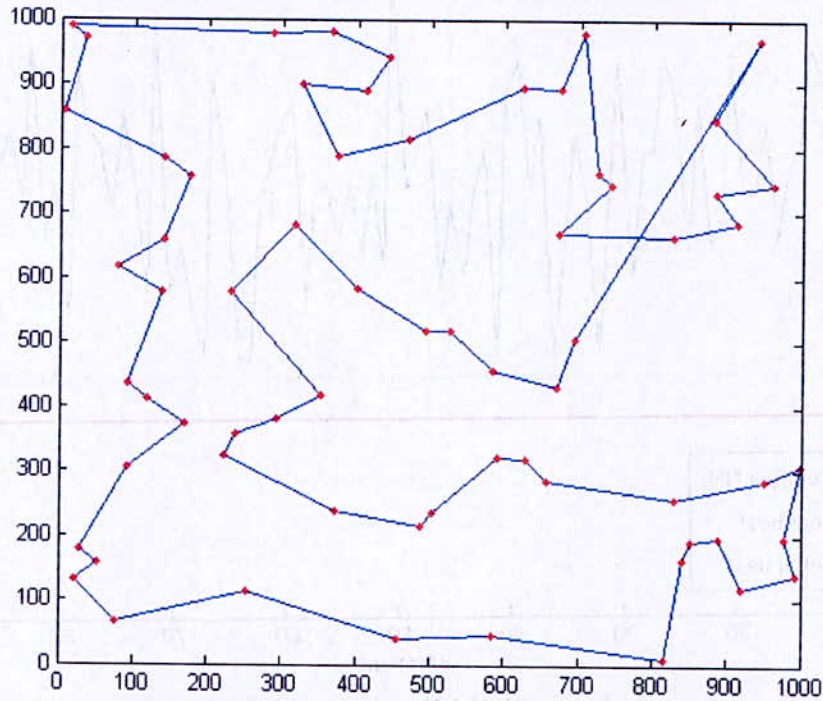


Figure [B.II.4-7] : solution donnée par ACS-DM pour « rnd66 »

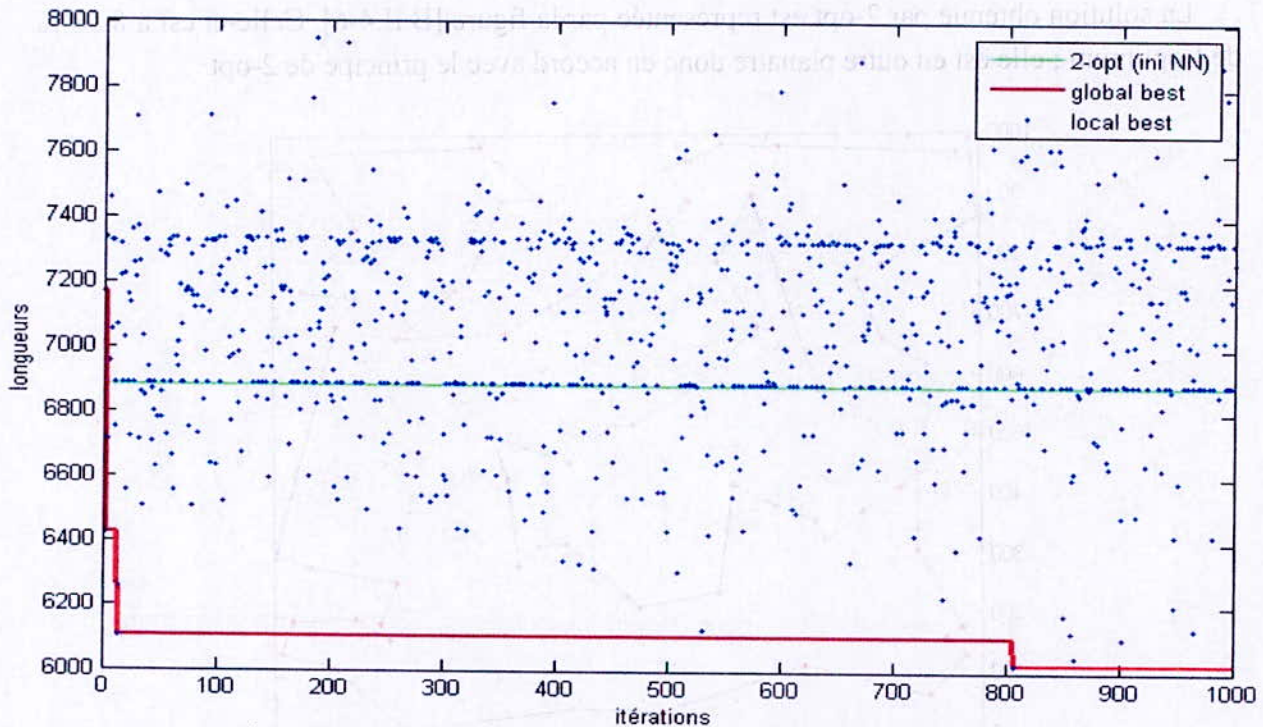


Figure [B.II.4-8] : Évolution, en écart relatif à l'optimum, de la solution donnée par ACS-DM initialisée 2-opt à l'issue de 100 itérations pour le STSP non euclidien « Algérie31 »



Pour le problème Algérie31, nous remarquons un blocage stochastique au niveau de l'optimum local donné par 2-opt, limitant ainsi l'évolution globale en fonction des itérations, même si la solution a largement dépassé celle donnée par 2-opt. Comme perspectives, nous proposons donc de développer **ACS-DM avec une régulation de la trace par paquets d'itérations** (par exemple, par une régulation logarithmique des écarts par rapport à la moyenne).

#### B.II.4.c.2. Test sur des problèmes de la bibliothèque ATSP

Nous avons testé en ATSP plusieurs problèmes, sur un nombre relativement restreint d'itérations. Il s'agit de ft53, ft70, ftv35, ftv74, kro124p, ry48p. Les résultats comparés sont donnés par le tableau [B.II.4-4] :

Tableau [B.II.4-4]: Résultats obtenus sur des problèmes-tests asymétriques

Problème-test	Solution optimale	Initialisation 2-opt	ACS-DM avec initialisation		
			Solution	N <sup>br</sup> Itérations	itération obt.
Ftv35 (N = 36)	1 473	1 723 (16.97 %)	1 556 (5.63 %)	1 000	90
Ftv47	1 776	2 243 (26.30 %)	2 037 (14.70 %)	300	264
Ry48p	14 422	15 589 (8.09 %)	15 441 (7.07 %)	200	174
Ft53	6 905	8 808 (27.56 %)	8 259 (19.61 %)	200	27
Ft70	38 673	43 008 (11.21 %)	41 685 (7.79 %)	500	252
Kro124p	36 230	44 666 (23.28 %)	42 694 (17.84 %)	100	15

Nous remarquons que les résultats sont globalement moins bons par rapport au cas symétrique. Toutefois, à la différence du cas précédent, ACS-DM dépasse toujours 2-opt. Nous rappelons que le nombre d'itérations effectué n'est pas assez important, comparativement aux résultats affichés dans les articles correspondants. On remarque d'ailleurs que, pour ftv47 (300 itérations) et pour ft70 (500 itérations), la solution est relativement meilleure en comparaison avec les autres exécutions sur un nombre d'itérations inférieur. On peut visualiser à cet effet l'évolution de la solution en fonction du nombre d'itérations (graphes suivants).

Nous nous sommes brièvement intéressés à d'éventuels autres critères alternatifs ou complémentaires pour le jugement d'une solution approchée. Le premier ne tient compte que la moyenne des distributions des cycles hamiltoniens, alors que le second tient compte de la dispersion.



Le premier rapport est celui de l'écart entre la moyenne et la solution trouvée par rapport à l'écart entre la moyenne et la solution exacte. Il permet de ne plus se rapporter à longueur seule de la solution exacte mais de la considérer comme étant un écart par rapport à la moyenne. On s'intéresse soit à ce rapport (plus on s'approche de 1 meilleure est la solution) ou bien alors à sa soustraction de 1 (plus on s'approche de 0 meilleure est la solution).

Le second rapport est relatif à une différence entre la probabilité qu'un cycle hamiltonien soit de longueur inférieure à la solution de l'heuristique, et la probabilité qu'il soit de longueur inférieure à la solution exacte.

On note  $\mu^{\wedge}$  la solutions obtenue par l'heuristique,  $\mu$  la solution exacte et  $L$  la longueur d'un cycle hamiltonien quelconque.

Nous avons repris les problèmes ftv35, ry48p et kro124p. Pour chacun d'entre eux, nous avons calculé<sup>1</sup>  $m$  et  $\sigma$ , ainsi que d'autres indicateurs décrits comme suit :

- l'écart relatif par rapport à la solution exacte, noté  $ER_{opt}$  ;
- un indicateur d'écart par rapport à la moyenne noté  $RM$ :  $1 - ((m - \mu^{\wedge}) / (m - \mu))$  ;
- un indicateur de qualité d'exploration de l'espace discret des solutions possibles, dépendant de  $m$  et  $\sigma$ , noté  $RP$ :  $\log_{10}(\Pr[L < \mu^{\wedge}] / \Pr[L < \mu])$ .

Les résultats sont repris dans le tableau suivant :

Tableau [B.II.2-5] : Valeurs des indicateurs proposés pour des solutions de problèmes-tests.

	m	$\sigma$	Indicateurs de la qualité de la solution		
			$ER_{opt}$	RM	RP
Ftv35	4 867.5	287.8	5.63 %	2.45 %	1.47
Ry48p	54 661	3 437	7.08 %	2.60 %	1.71
Kro124p	19 009.8	8 312.1	17.84 %	4.36 %	6.18

Pour les trois exemples considérés, le classement selon  $ER_{opt}$  reste respecté en se fiant aux autres indicateurs introduits. Cependant, l'intérêt de ces indicateurs est autre. Il s'agit de faire ressortir, dans certains cas, la supériorité qualitative d'une solution par rapport à une autre d'un problème différent. Alors que le critère  $ER_{opt}$  indique l'inverse. Autrement dit, il est possible pour deux différents problèmes (1 et 2) que la solution heuristique donne  $ER_{opt1} < ER_{opt2}$  mais que la dispersion du second modèle soit plus « étalée », de sorte que la valeur de son indicateur  $RP$  soit meilleure (valeur inférieure) que celle du premier.

Nous remarquons que, contrairement au cas symétrique, 2-opt<sup>1</sup> donne des résultats nettement moins performants.

<sup>1</sup>  $m$  est la moyenne de la longueur des cycles hamiltoniens ;  $\sigma$  est son écart-type.



Quant à l'évolution de la solution en fonction du nombre d'itérations, la série de graphiques ci-dessous, illustre les améliorations observées pour quelques-uns des problèmes testés.

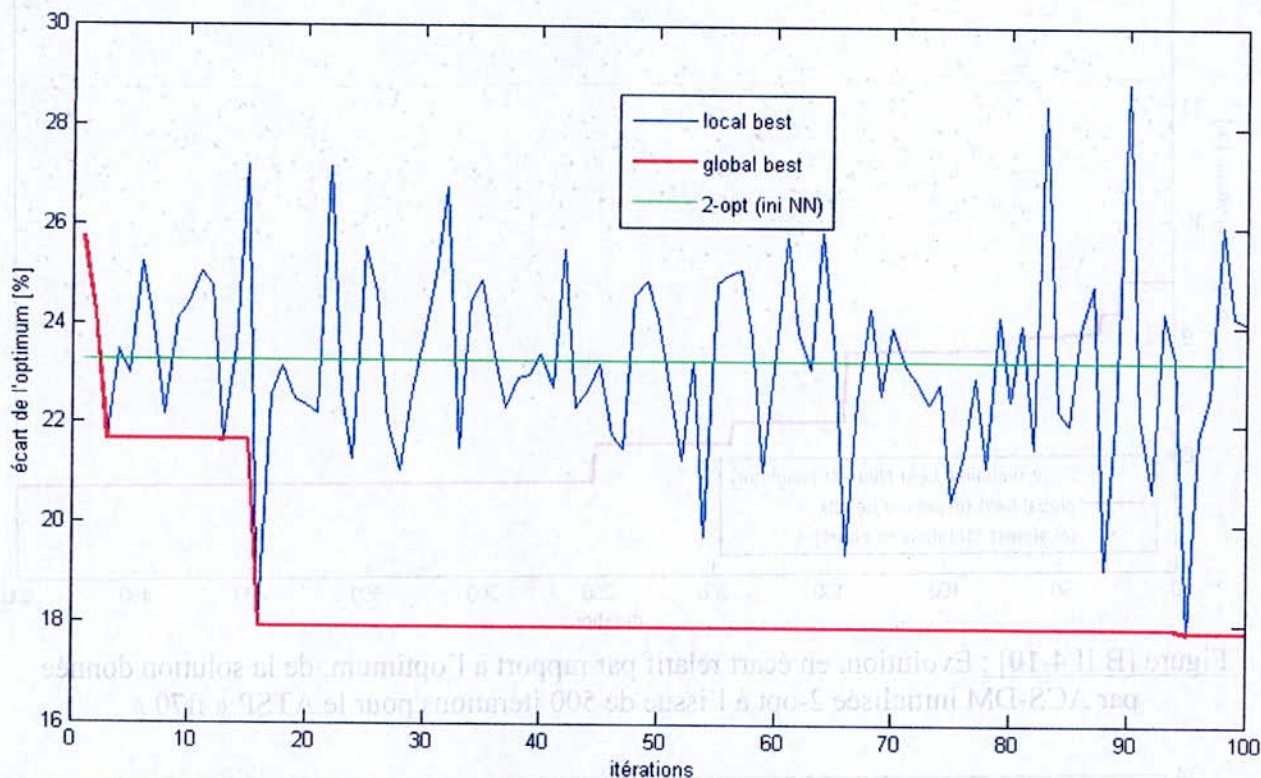


Figure [B.II.4-9] : Évolution, en écart relatif par rapport à l'optimum, de la solution donnée par ACS-DM initialisée 2-opt à l'issue de 100 itérations pour le ATSP « kro124p »

Nous remarquons sur la figure [B.II.4-9] que la solution obtenue a dépassé celle de 2-opt dès la troisième itération. La solution de 2-opt est cependant relativement mauvaise, à 23.28 % de l'optimum. A l'issue de 100 itérations (« seulement ») – en fait à partir de la 15<sup>ème</sup> itération – nous obtenons une solution à 17.84 % de la solution exacte.

Il en est de même pour les problèmes ft70 et ftv47, dont l'évolution est respectivement représentée par la figure [B.II.4-10] et [B.II.4-11]. Même s'il y a une disparité dans l'écart relatif des solutions atteintes, ceci reste cependant expliqué par la différence du nombre d'itérations.

<sup>1</sup> Malgré le fait que nous ayons programmé 2-opt en veillant à faire la recherche locale à chaque fois dans les deux sens.



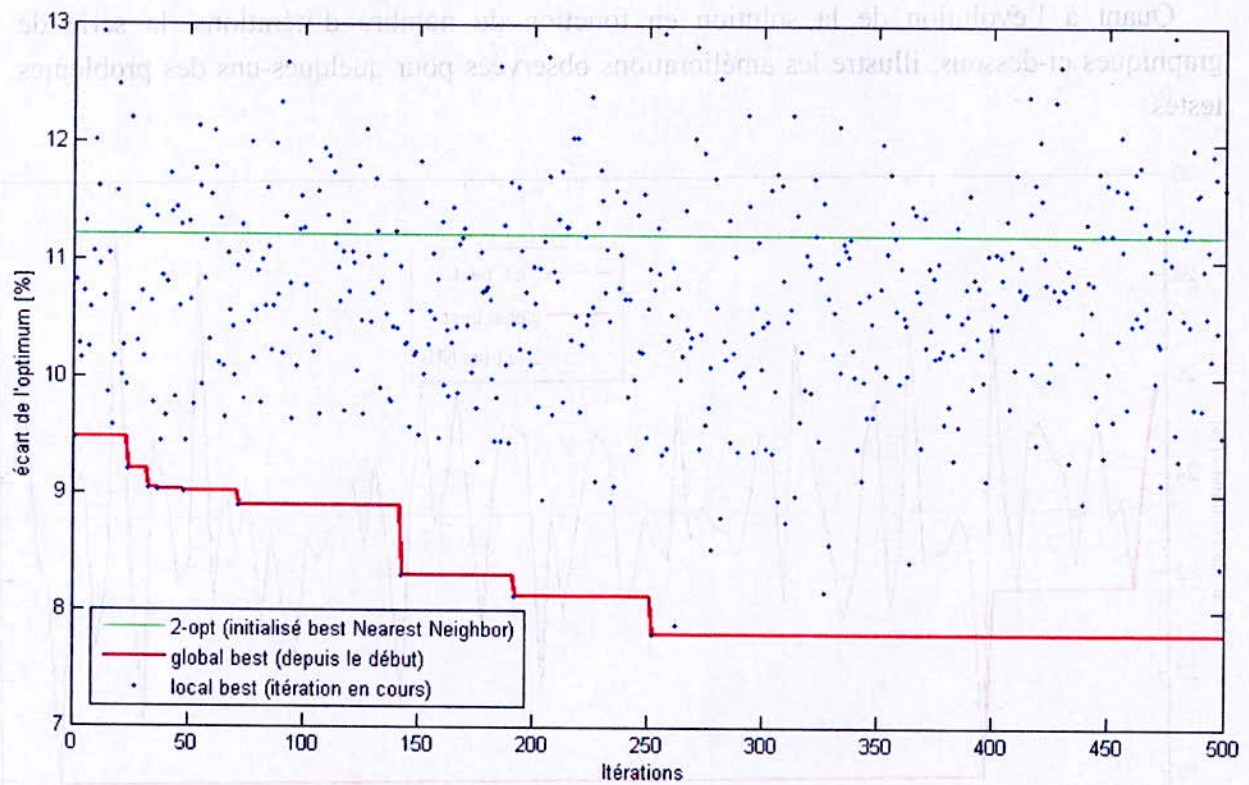


Figure [B.II.4-10] : Évolution, en écart relatif par rapport à l'optimum, de la solution donnée par ACS-DM initialisée 2-opt à l'issue de 500 itérations pour le ATSP « ft70 »

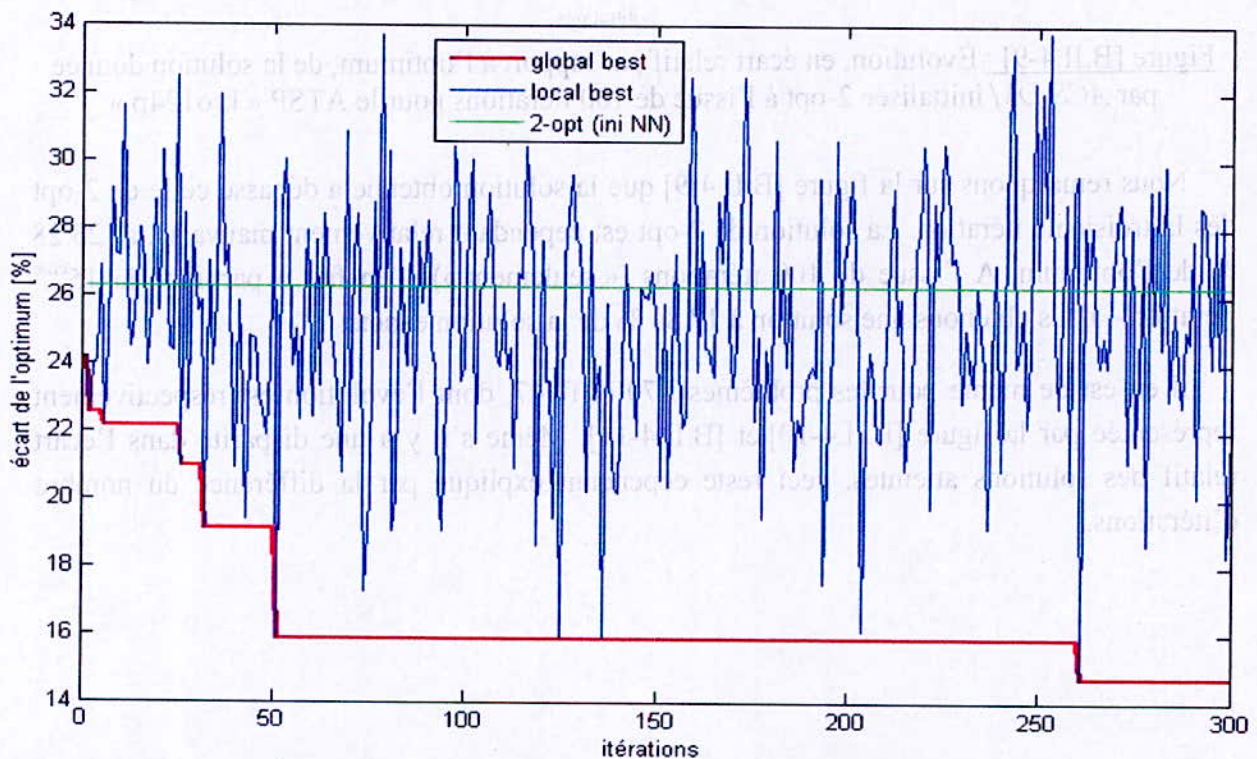


Figure [B.II.4-11] : Évolution, en écart relatif par rapport à l'optimum, de la solution donnée par ACS-DM initialisée 2-opt à l'issue de 300 itérations pour le ATSP « ftv47 »



Pour un autre exemple de taille relativement petite, en l'occurrence *ftv35* – ce qui nous a permis donc d'effectuer un nombre suffisant d'itérations –, nous obtenons de bons résultats : à 5.64 % de l'optimum (contre 16.97 % pour 2-opt).

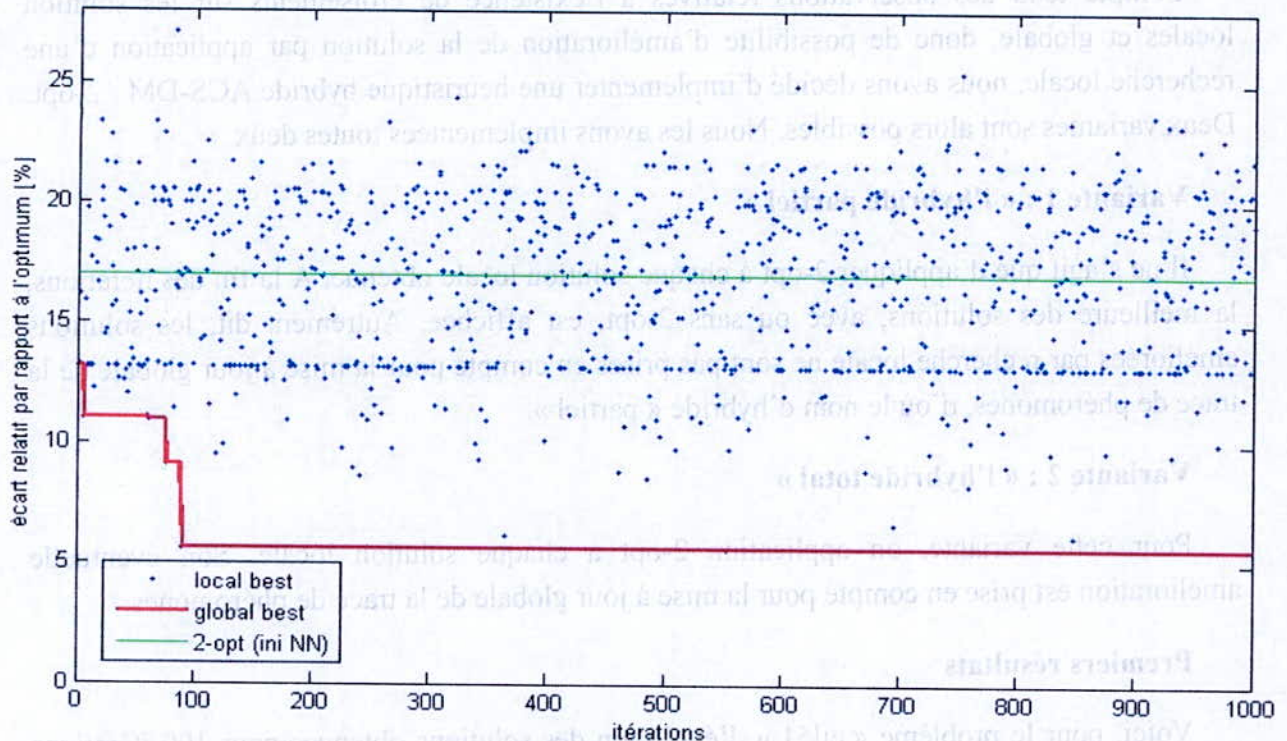


Figure [B.II.2-12] : Évolution, en écart relatif par rapport à l'optimum, de la solution donnée par ACS-DM initialisée 2-opt à l'issue de 1000 itérations pour le ATSP « *ftv35* »

Nous observons dans cet exemple, un blocage de l'évolution de la solution (global best) expliquée statistiquement par une perturbation dans la distribution du meilleur local. Ce dernier est anormalement réparti et une valeur est redondante. Ceci va limiter la dispersion du meilleur local, ce qui aura pour conséquence la limitation de la dispersion de l'optimum global (minimum après  $K$  observations du minimum local), rendant l'occurrence d'une plus petite solution beaucoup moins probable, et nécessitant donc nettement plus d'itérations. Nous pouvons expliquer cette distribution atypique du meilleur local, par le fait que le système de colonie de fourmis soit stochastiquement bloqué, et à un important niveau de probabilité, dans un optimum local. En effet, la solution de longueur 1667 est clairement redondante. Cela est très probablement dû au fait que la trace sur ce tour ait augmenté en dépassant sensiblement le reste des pistes de phéromones, même en tenant compte de la combinaison visibilité/trace qui guide le choix de la prochaine ville.



#### B.II.4.d. Développement d'un algorithme de fourmis hybride ACS-DM et recherche locale 2-opt

Compte tenu des observations relatives à l'existence de croisements sur les solutions locales et globale, donc de possibilité d'amélioration de la solution par application d'une recherche locale, nous avons décidé d'implémenter une heuristique hybride ACS-DM / 2-opt. Deux variantes sont alors possibles. Nous les avons implémentées toutes deux.

##### Variante 1 : « l'hybride partiel »

Il ne s'agit que d'appliquer 2-opt à chaque solution locale obtenue. A la fin des itérations, la meilleure des solutions, avec ou sans 2-opt, est affichée. Autrement dit, les solutions améliorées par recherche locale ne sont pas prises en compte pour la mise à jour globale de la trace de phéromones, d'où le nom d'hybride « partiel ».

##### Variante 2 : « l'hybride total »

Pour cette variante, on applique 2-opt à chaque solution locale. Son éventuelle amélioration est prise en compte pour la mise à jour globale de la trace de phéromones.

##### Premiers résultats

Voici, pour le problème « eil51 », l'évolution des solutions obtenues pour 100 itérations par chacune des 2 variantes (« avec » et « sans » prise en compte pour la mise à jour), comparé à ACS-DM seule.

Les résultats donnés par les deux versions hybrides sont clairement meilleurs que ceux de ACS-DM seul. De plus, la solution de l'hybride total est meilleure que celle de l'hybride partiel. Cependant, nous ne pouvons nous prononcer clairement sur la supériorité de l'une des deux heuristiques hybrides par rapport à l'autre. Voir figure [B.II.4-13].

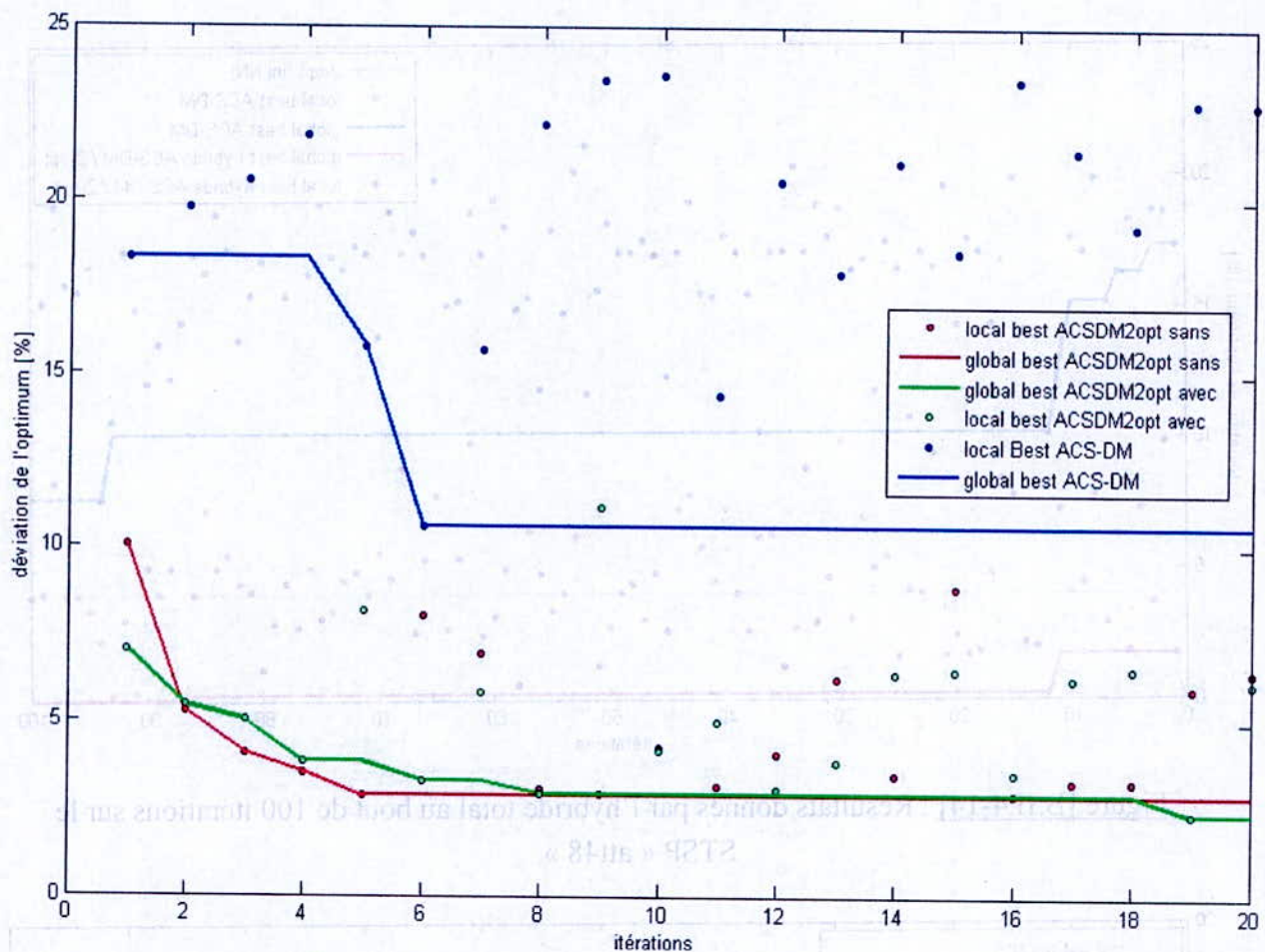


Figure [B.II.4-13] : Résultats donnés par ACS-DM, l'hybride partiel et l'hybride total au bout de 20 itérations sur le STSP « eil51 ».

Voici également, pour d'autres problèmes-tests, l'évolution de la solution donnée par l'hybride total (solutions avant recherche locale et après recherche locale). Voir figures [B.II.4-14] et [B.II.4-15]. Pour ces deux exemples (att48 et berlin52), la solution optimale est atteinte dès un nombre d'itérations inférieur à 100.

Ainsi, l'application d'une recherche locale – 2-opt en l'occurrence – permet d'améliorer significativement la solution et d'accélérer sensiblement la convergence. Ces premiers résultats nous semblent excellent car la solution optimale est souvent trouvée dès un nombre restreint d'itérations.



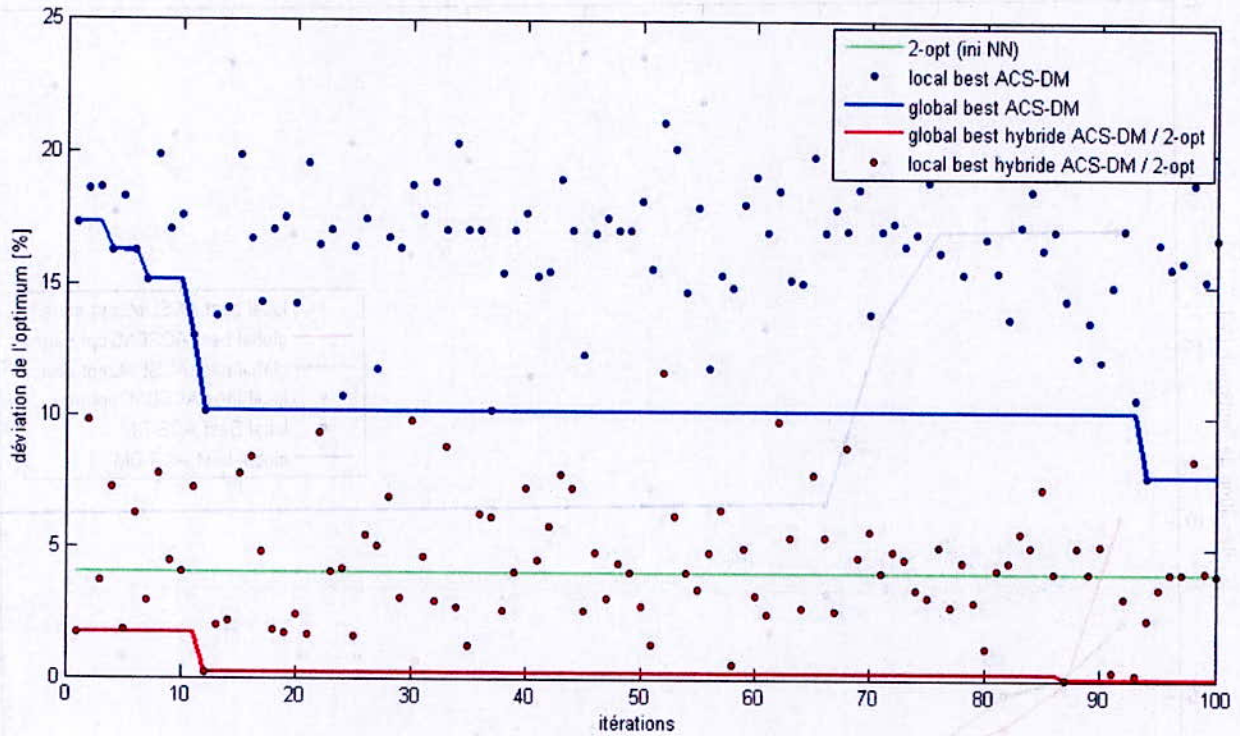


Figure [B.II.4-14] : Résultats donnés par l'hybride total au bout de 100 itérations sur le STSP « att48 ».

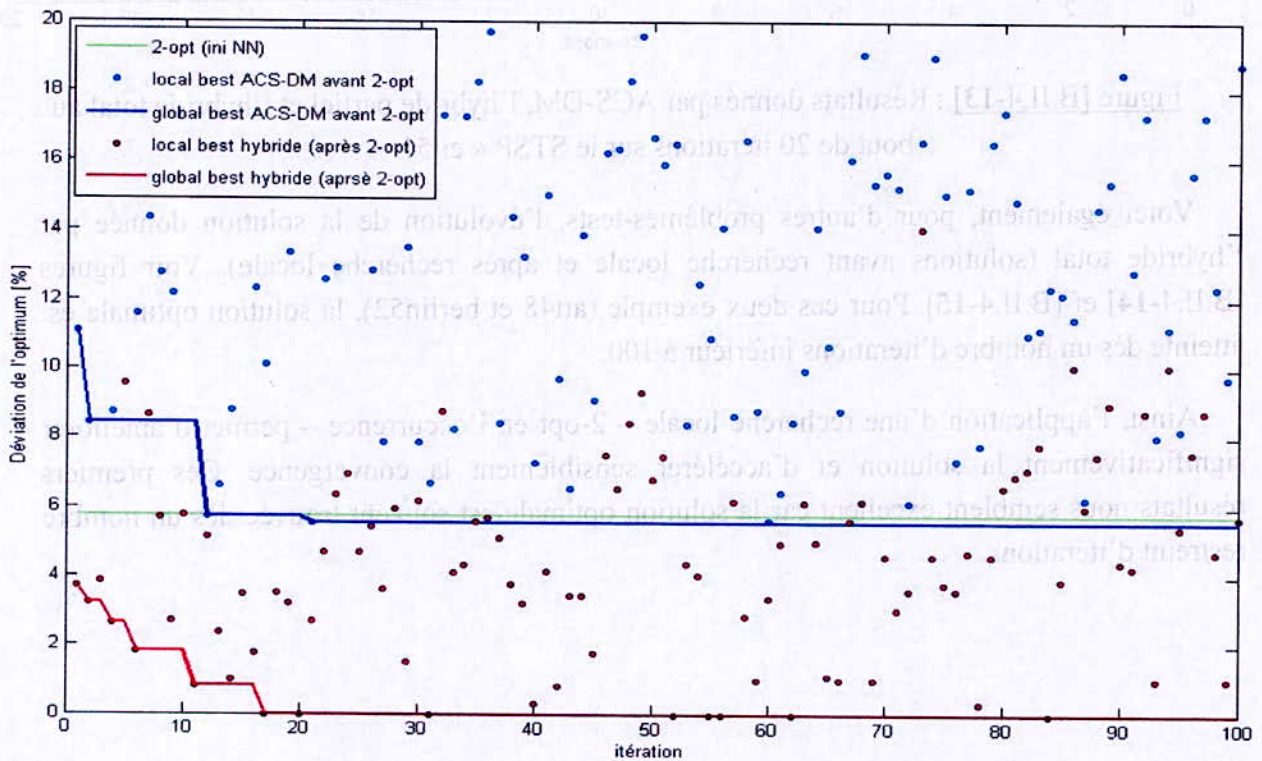
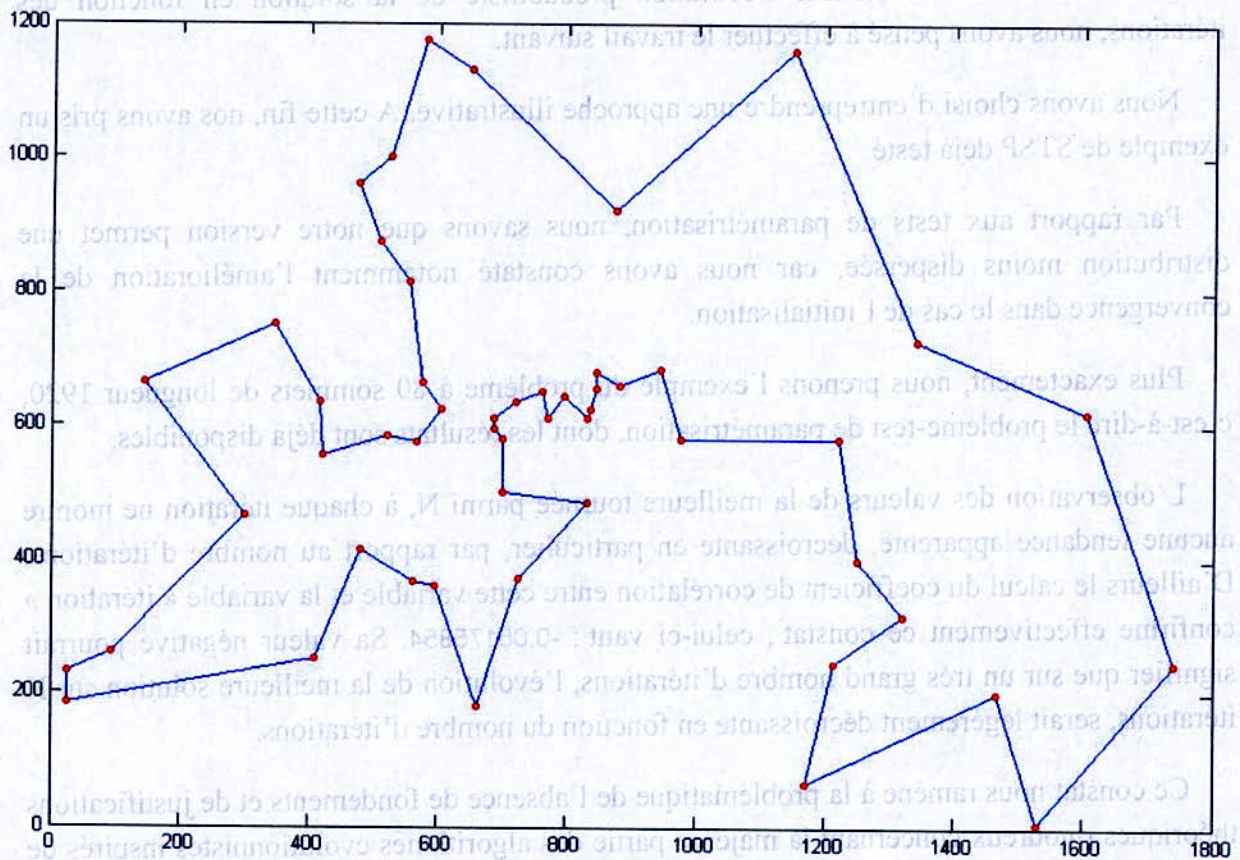


Figure [B.II.4-15] : Résultats donnés par l'hybride total au bout de 100 itérations sur le STSP « berlin52 ».

La figure [B.II.4-16] ci-dessous illustre la solution optimale de Berlin52 obtenue dès l'itération 17 de l'hybride total.



**Figure [B.II.4-16] : Solution exacte trouvée par l'hybride total à l'itération 17 sur le STSP « berlin52 ».**



### B.II.4.e. Etude de l'évolution de la solution en fonction des itérations

Dans le but de caractériser l'évolution probabiliste de la solution en fonction des itérations, nous avons pensé à effectuer le travail suivant.

Nous avons choisi d'entreprendre une approche illustrative. A cette fin, nous avons pris un exemple de STSP déjà testé.

Par rapport aux tests de paramétrisation, nous savons que notre version permet une distribution moins dispersée, car nous avons constaté notamment l'amélioration de la convergence dans le cas de l'initialisation.

Plus exactement, nous prenons l'exemple du problème à 80 sommets de longueur 1920, c'est-à-dire le problème-test de paramétrisation, dont les résultats sont déjà disponibles.

L'observation des valeurs de la meilleure tournée parmi  $N$ , à chaque itération ne montre aucune tendance apparente, décroissante en particulier, par rapport au nombre d'itérations. D'ailleurs le calcul du coefficient de corrélation entre cette variable et la variable « itération » confirme effectivement ce constat ; celui-ci vaut : -0,05175854. Sa valeur négative pourrait signifier que sur un très grand nombre d'itérations, l'évolution de la meilleure solution sur  $K$  itérations, serait légèrement décroissante en fonction du nombre d'itérations.

Ce constat nous ramène à la problématique de l'absence de fondements et de justifications théoriques rigoureux concernant la majeure partie des algorithmes évolutionnistes inspirés de la nature. Ces derniers peuvent s'apparenter à des recherches stochastiques qui montrent a posteriori une stationnarité significative proche des recherches aléatoires améliorées [Rook, 2000].

Un tel coefficient de corrélation justifie donc l'ajustement que nous allons effectuer. En effet, les 500 itérations effectuées antérieurement nous permettent d'ajuster la distribution de l'écart relatif par rapport à l'optimum pour la meilleure solution de chaque itération, appelée optimum local. Le meilleur ajustement à une loi de probabilité pour la distribution ajustée de l'écart relatif de l'optimum à une itération donnée suit une :

$$\text{Normale}[m=11.9, s = 1.51]^1 \quad [\text{II.4-1}]$$

La figure [B.II.4-17] ci-dessous rend compte de cette distribution ainsi que de sa qualité.

<sup>1</sup> Ajustement effectué à l'aide de l'application *Input Analyser* du logiciel *SIMAN Arena3.0*. Il a pour EQM 0.002612. La statistique du test du Khi2 vaut 22 correspondant à un  $p = 0.0394$ . La statistique du test de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.0395



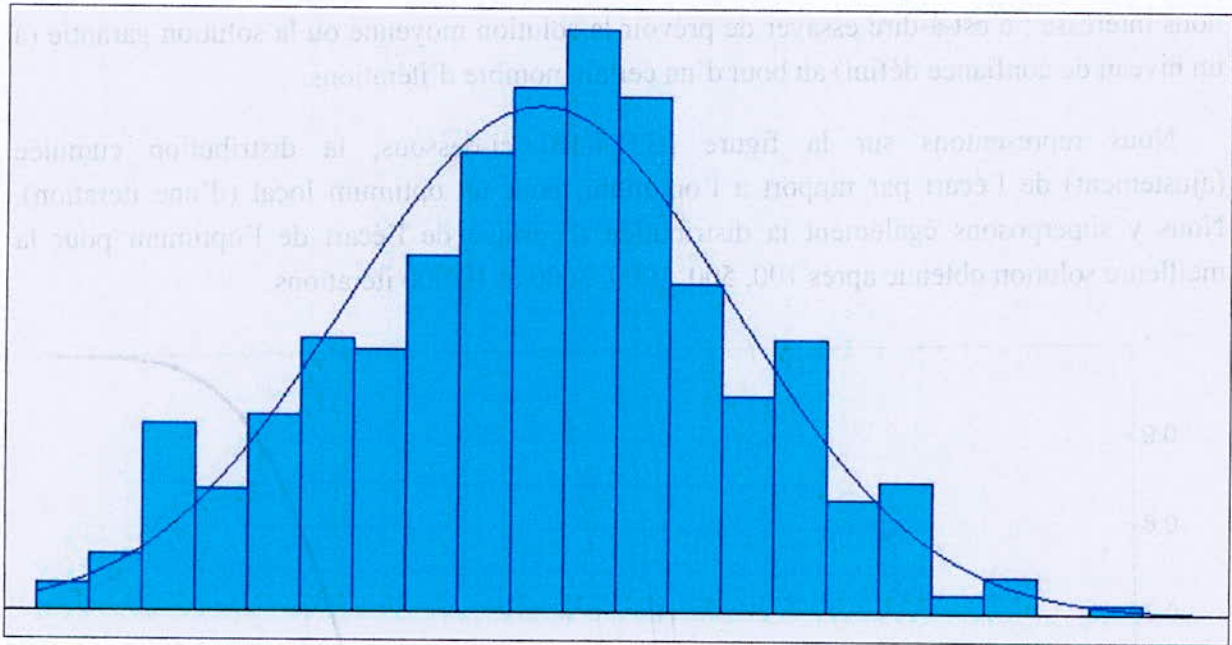


Figure [B.II.4-17] : Ajustement de la distribution de l'écart relatif par rapport à l'optimum (500 observations)

Tout l'intérêt de connaître la distribution de cette variable – pour rappel : le meilleur des tours des  $N$  fournis sur une itération – est de pouvoir estimer, à une erreur d'ajustement près, la valeur de la meilleure solution globale à une itération  $k$  par intervalle de confiance ou en moyenne. Cela permet également de connaître la probabilité d'avoir tel écart de l'optimum, c'est-à-dire telle solution, à l'issue de tant d'itérations.

La formule générale qui nous permet d'obtenir ces résultats est décrite ci-dessus.

Si la variable aléatoire  $X$  suit une distribution de cumulative  $F$ , alors la variable aléatoire correspondant à la plus petite des  $k$  observations de  $X$  suit une distribution de cumulative :

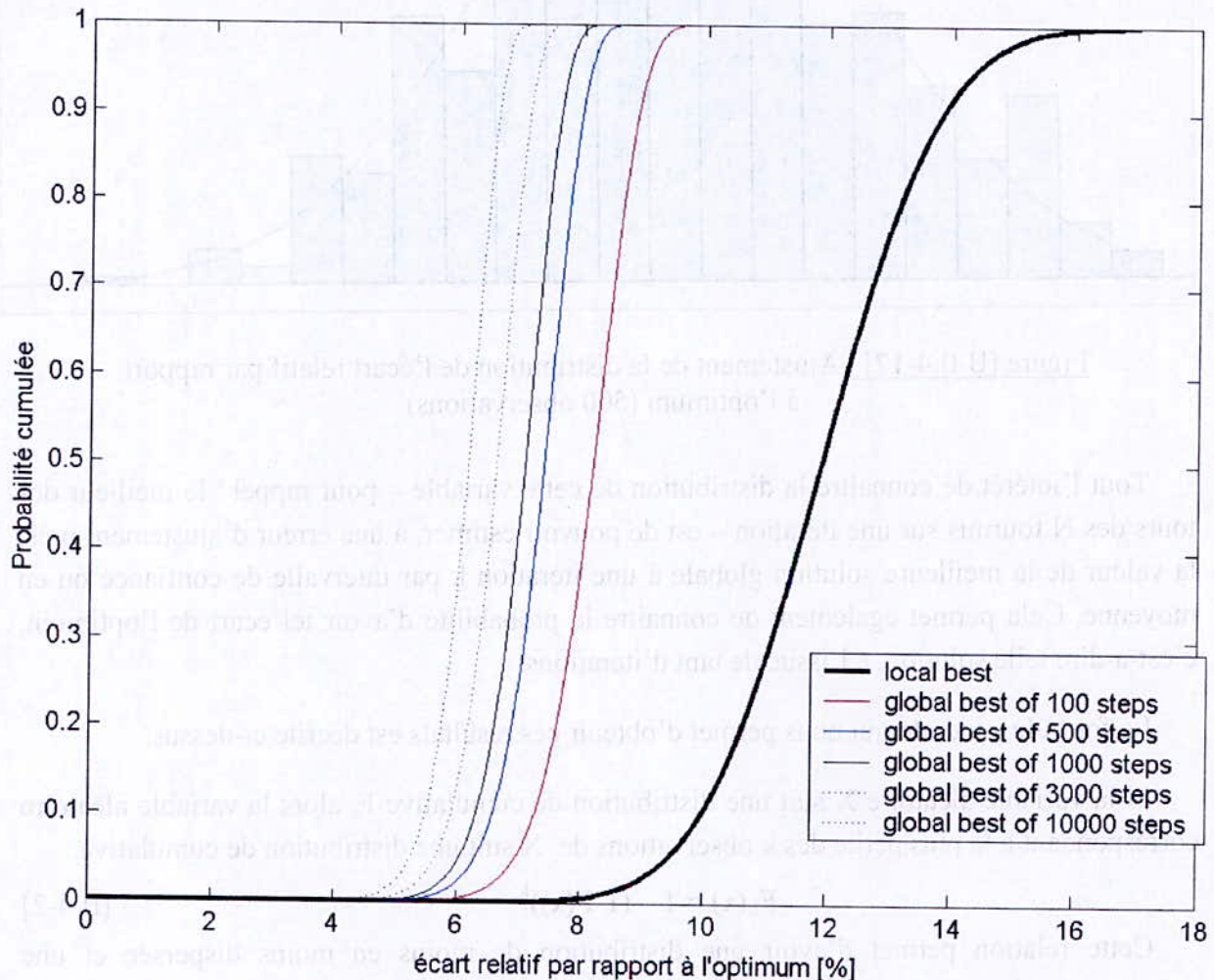
$$F_k(x) = 1 - (1-F(x))^k \quad [\text{II.4-2}]$$

Cette relation permet d'avoir une distribution de moins en moins dispersée et une moyenne de plus en plus petite, plus  $k$  est grand. Ce qui reviendrait à dire que l'estimation de l'optimum global à l'itération  $k$  devient de plus en plus précise, plus le nombre d'itérations est important. En outre, il y aurait – logiquement d'ailleurs – plus de chance d'avoir une meilleure solution après un nombre supérieur d'itérations. Or, en parallèle, plus  $k$  est grand, plus l'erreur d'ajustement grandit, compte tenu des propriétés de convergence de l'algorithme. Nous ne pouvons donc rien conclure à ce niveau. Il faudrait une analyse plus poussée pour déterminer la proportion entre l'erreur d'ajustement et la réduction de la dispersion du minimum global en fonction de  $k$ . Cela dit, cet ajustement reflète, pour un plus grand nombre d'itérations, une distribution telle qu'elle donnerait des valeurs qui bornent supérieurement la meilleure solution trouvée à l'issue d'un grand nombre d'itérations. Ceci est justement ce qui



nous intéresse ; c'est-à-dire essayer de prévoir la solution moyenne ou la solution garantie (à un niveau de confiance défini) au bout d'un certain nombre d'itérations.

Nous représentons sur la figure [B.II.4-18] ci-dessous, la distribution cumulée (ajustement) de l'écart par rapport à l'optimum, pour un optimum local (d'une itération). Nous y superposons également la distribution théorique de l'écart de l'optimum pour la meilleure solution obtenue après 100, 500, 1000, 3000 et 10 000 itérations.



**Figure [B.II.4-18]:** distribution approchée de l'écart relatif par rapport à l'optimum pour la solution locale à une itération donnée ; distribution résultante de la solution globale à l'itération 100, 500, 1 000, 3 000 et 10 000.

La figure suivante ([B.II.2-19]) donne la moyenne de chacune de ces distributions théoriques. Nous remarquons par exemple que pour 100 itérations, l'estimation moyenne du meilleur global (8.2%) coïncide approximativement avec la réalité (8.0 %). Par contre, pour 500 itérations, l'estimation moyenne du meilleur global est de 7.4 %, alors qu'en réalité la solution n'a pas changé. Elle reste égale à 8.2%, ce qui reste quand même compris dans l'intervalle de confiance décrit par la distribution correspondante. Cela induit, en partant du

principe des probabilités conditionnelles, qu'une amélioration va probablement « arriver » aux prochaines itérations au-delà de 500. Cette figure, représente, en outre, l'évolution théorique de cette moyenne en fonction du nombre d'itération.

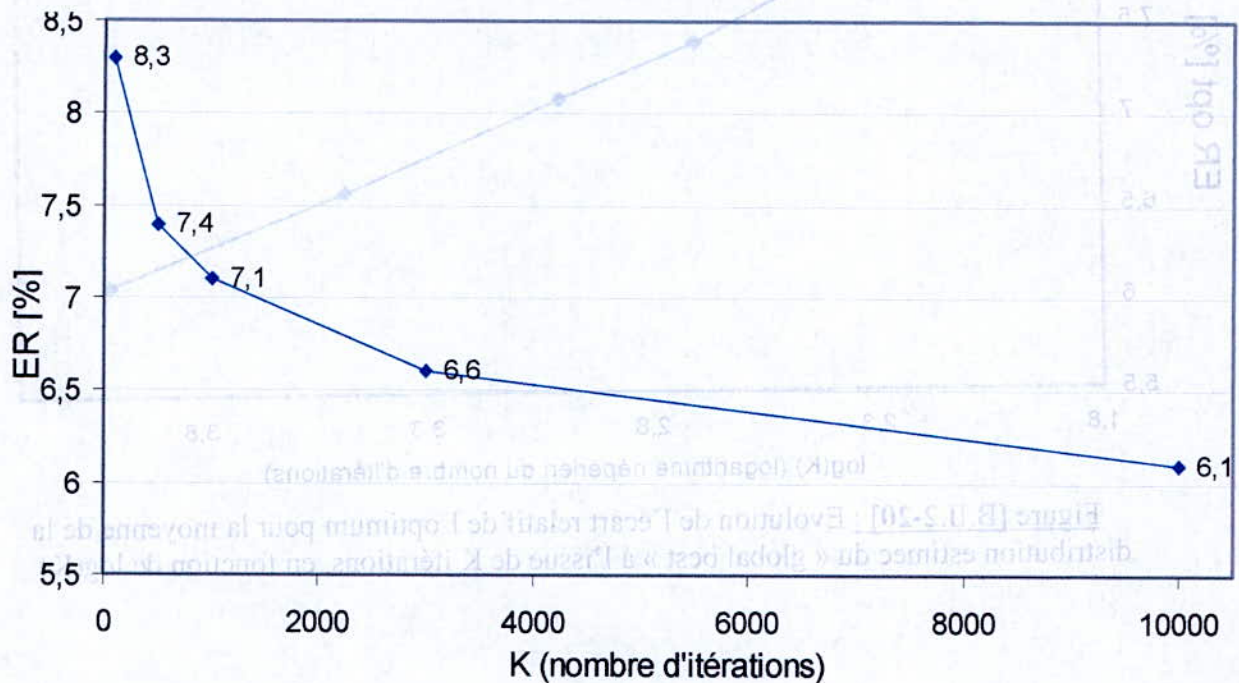
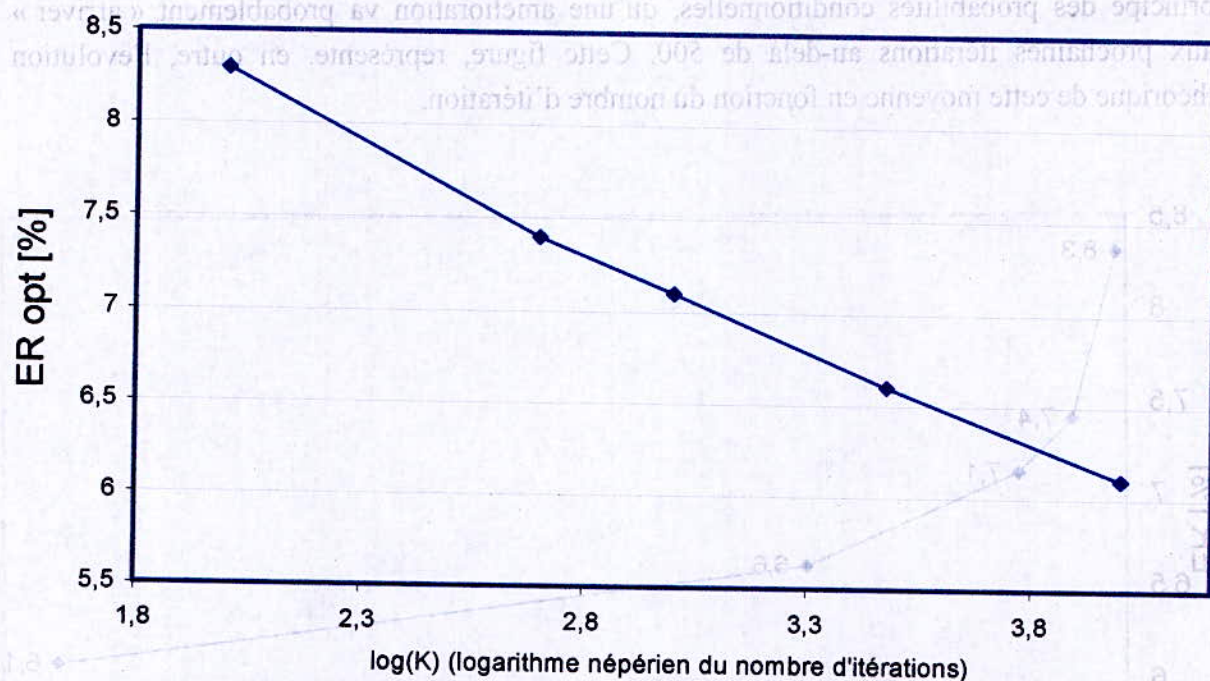


Figure [B.II.2-19] : évolution de l'écart relatif par rapport à l'optimum pour la moyenne de la distribution estimée du « global best » à l'issue de K itérations

Ainsi, cette analyse graphique « post ajustement » fait ressortir que la solution donnée par ACS-DM évolue de façon logarithmique (dans un intervalle fini). D'ailleurs, la représentation de l'écart relatif par rapport à l'optimum en fonction du logarithme du nombre d'itérations donne l'allure linéaire suivante (figure [B.II.2-20]). Donc, pour l'exemple pris, cette courbe est du type :  $A * \log(k) + B$ .





**Figure [B.II.2-20] :** Evolution de l'écart relatif de l'optimum pour la moyenne de la distribution estimée du « global best » à l'issue de K itérations, en fonction de log(K).



### ***Conclusions et perspectives***

Nous avons programmé la méta-heuristique ACS-DM développée par [Rook, 2000] sous Matlab en s'assurant de sa conformité. Nous sommes également parvenu à outre passer certains problèmes particuliers non précisés dans l'article décrivant cette méthode qui nous a permis d'élaborer notre programme.

Nous avons également introduit une initialisation par construction puis recherche locale 2-opt qui nous a permis d'accélérer la convergence, au risque certes de perdre parfois en « exploration ». En outre, les résultats obtenus sur un nombre réduit d'itérations semblent être relativement satisfaisants mais pas assez suffisants pour être plus performants qu'un algorithme hybride fourmis / recherche locale  $\lambda$ -opt. Cependant pour les rares essais où nous avons exécuté ACS-DM avec initialisation sur un nombre d'étapes aussi important que celui utilisé dans les articles concernés, les résultats obtenus ont été aussi bons que ceux de l'hybride AS-2opt.

Par ailleurs, la structure et le principe d'évolution d'ACS ainsi que d'ACS-DM sont tout à fait favorable pour une parallélisation aisée (en terme de programmation). En effet, les mises à jours s'effectuent à la fin de chaque étape ; la construction d'une tournée par une fourmi s'effectue indépendamment des autres au cours d'une même itération. Ceci permet de distribuer l'implémentation. Effectivement, à une itération donnée, chaque tour à construire par chacune des  $m$  fourmis peut être implémenté sur un ordinateur différent. Ceci permet d'effectuer un nombre beaucoup plus important d'itérations en un temps réduit et avec un grand nombre de ressources qui peuvent être de simples micro-ordinateurs personnels.

Pour ce qui est de la paramétrisation, nous émettons des réserves quant à la généralisation des valeurs optimales préconisées. Nous pensons qu'il y aurait une disparité conséquente entre les différents types de TSP. De plus, l'introduction de l'initialisation peut induire un changement des valeurs optimales des paramètres de l'algorithme, chose que nous n'avons eu à déterminer. Cette paramétrisation s'effectuerait aisément par discrétisation des valeurs possibles et par appels successifs et simultanés de l'algorithme sur différents calculateurs parallèles avec différentes valeurs. Une évolution selon le principe de la programmation génétique parviendrait alors à converger vers une paramétrisation optimale.

Nous avons également pu caractériser statistiquement l'évolution de la solution locale et par conséquent la solution globale. Ceci nous permet d'apprécier d'une part, un ordre de grandeur du nombre d'itérations nécessaire pour arriver à une solution désirée, d'autre part, de connaître le potentiel d'évolution de la solution obtenue si l'on dépasse le nombre d'itérations essayé (probabilité bayésienne).

Il ressort également de cette étude que la solution locale obtenue à chaque itération, amplement borné par une  $ER_{opt}$  de 30 % pour tous les exemples traités, a une distribution qui



est d'une part, assez proche de l'optimum et d'autre part, assez dispersée – plus qu'en AS-2opt en tout cas –. Cela est favorable à l'estimation, par le paramètre de position de la loi de Weibull, de la longueur de la solution optimale en particulier pour des ATSP, dont l'utilité est grande – se référer à la conclusion de la section C –.

Ainsi, notre contribution au développement des algorithmes de fourmis nous a permis d'apprécier leur efficacité et leurs larges possibilités de développement. Ceux-ci se distinguent particulièrement pour des problèmes asymétriques, et symétriques non euclidiens, où les méthodes géométriques sont moins efficaces. Les systèmes de colonies de fourmis et en particulier ACS-DM se placent comme une alternative satisfaisante et leurs caractéristiques statistiques leur permettent d'être aisément utilisés pour l'estimation statistique.

Nous restons convaincus de l'efficacité prouvée ainsi que des larges possibilités de développement qui restent à explorer dans les colonies de fourmis et a fortiori les méthodes d'intelligence artificielle.

## **SECTION C**

# **APPROCHE STATISTIQUE DU PROBLÈME DU VOYAGEUR DE COMMERCE**



## **CHAPITRE I**

**L'estimation statistique de la  
longueur optimale de la solution du  
problème du voyageur de commerce**

## ***Introduction***

L'estimation de la solution optimale du problème de voyageur de commerce, ou d'une borne inférieure, a suscité et suscite toujours un grand intérêt parmi la communauté des chercheurs en recherche opérationnelle. Cet engouement s'explique essentiellement par l'importance de trouver des estimations précises en particulier pour des problèmes de taille importante. Dans cette perspective et au-delà des problèmes-tests particuliers disponibles dans différentes bibliothèques « *TSP library* », l'évaluation de la précision des heuristiques pourrait s'étendre à des problèmes aléatoires ou autres spécifiques dépassant la restriction de l'ensemble des solutions exactes prouvées. Cela permet d'élargir le champ d'évaluation des heuristiques à une infinité de problèmes de grande taille.

A ce jour, plusieurs modèles et méthodes ont été proposés ; des évolutions ont également amélioré la précision de certains estimateurs. Implicitement, d'autres estimateurs et bornes ont en outre été délaissés au profit de meilleurs, c'est-à-dire des plus précis ou de ceux qui représentent une intéressante alternative précision / complexité.

Dans ce chapitre nous décrivons les principales méthodes d'estimation de la longueur de la solution optimale du problème du voyageur de commerce. Pragmatiquement, on se restreint aux méthodes les plus utilisées, d'où le terme « principales ».

### **C.I.1. Cas du Problème du Voyageur de Commerce Symétrique (STSP)**

Dans le cas restreint aux problèmes de type symétriques, les bornes inférieures sont très précises – beaucoup plus précises qu'en asymétrique –. On distingue sans nul doute la plus efficace et plus précise d'entre elles : la borne inférieure HK (*Held-Karp lower bound*).

Il s'agit de formuler le STSP en PLNE ; de transformer toutes les variables qui sont en  $\{0,1\}$ , en variable dans  $[0,1]$  ; puis de résoudre ce problème relaxé en simple PL [Held & Karp, 1970], [Held & Karp, 1971].

Cette méthode est connue pour être très efficace sur les STSP. En pratique, sur des problèmes symétriques mais pas forcément euclidiens (égalité triangulaire pas nécessairement vérifiée), la borne inférieure HK est à 1 % voir 2 % de l'optimum [Johnson & McGeoch 1997]. Sur des problèmes générés aléatoirement, la borne HK est en moyenne à 0.8% de l'optimum alors que sur des problèmes particuliers (TSPLIB) l'erreur ne dépasse jamais les 2 % [Johnson, McGeoch & Rothberg, 1996]. Pour des problèmes euclidiens – égalité triangulaire et symétrie des distances vérifiées – générés de manière aléatoire uniforme sur un carré, on remarque qu'asymptotiquement la borne HK est à moins de 0.65 % de l'optimum [Johnson & McGeoch, 2002].



Concernant le calcul de la borne HK, il est à noter qu'au lieu d'appliquer la relaxation lagrangienne, une autre méthode plus efficiente (et plus précise) est utilisée (par logiciel CONCORDE). Celle-ci se base sur des routines qui recherchent les contraintes violées [Applegate, Bixby, Chvatal & Cook, 1998].

Pour des problèmes euclidiens et aléatoirement générés sur un carré, [Johnson, McGeoch & Rothberg, 1996] proposent – après ajustement de la série figurant sur le tableau [C.I.1-1] – l'estimateur, noté  $C_{HK}$ , de  $\frac{HK}{\sqrt{N}}$  qui suit :

$$C_{HK,p}(N) \sim .70805 + \frac{.52229}{N^{.5}} + \frac{1.31572}{N} - \frac{3.07474}{N^{1.5}} \quad [C.I.1-1]$$

L'équation ci-dessus comprend, en outre, un terme correspondant à la constante du PVC (ie. la TSC) asymptotique que nous développerons au prochain chapitre.

Il faut savoir que le logiciel libre Concorde [Applegate, Bixby, Chvatal & Cook, 1998] peut donner le tour optimal (et sa longueur) pour n'importe quel problème symétrique (pas nécessairement euclidien) dont la taille est inférieure à 3 162 sommets. Il est une référence dans la majorité des études expérimentales relatives au STSP et même pour celles relatives au ATSP. Bien évidemment, l'intérêt des heuristiques perdure toujours ; il s'agit de trouver des solutions satisfaisantes mais dans des temps plus réduits<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Par exemple, pour un programme de décision instantanée d'une soudeuse à points sur une plaque métallique, le temps de prise de décision (exécution du programme) doit être inférieur à l'économie de temps d'exécution de la machine dont dépendra la productivité et par conséquent la compétitivité



Tableau [C.I.1-1] : Série d'ajustement de l'estimation statistique de la borne HK<sup>1</sup>

Random Euclidean Instances (Planar)						
No. of Cities	No. of Samples	Mean	Std. Dev.	95% Conf. Interval		
				Lower	Upper	Length
(Approx.HK Bound) $\sqrt{N}$						
100	102058	.77027	.02240	.77013	.77040	.00027
316	51203	.74088	.01172	.74077	.74098	.00021
1,000	23752	.72578	.00631	.72570	.72586	.00016
3,162	15936	.71769	.00349	.71764	.71775	.00011
10,000	4000	.71334	.00195	.71328	.71340	.00012
31,622	1362	.71101	.00109	.71095	.71106	.00011
100,000	236	.70970	.00060	.70962	.70977	.00015
316,228	39	.70892	.00035	.70881	.70903	.00022
(HK Bound – Approx.HK Bound) $\sqrt{N}$						
100	2098	.00010	.00031	.00009	.00011	.00002
316	600	.00015	.00022	.00013	.00017	.00004
1,000	100	.00005	.00002	.00004	.00005	.00001
3,162	54	.00004	.00002	.00003	.00004	.00001
10,000	14	.00004	.00001	.00003	.00004	.00001

## C.I.2. Cas du Problème du Voyageur de Commerce Asymétrique (ATSP)

Lorsque le problème n'est pas symétrique (y compris le cas purement asymétrique), on utilise le plus fréquemment deux bornes inférieures. La première que nous allons décrire est la borne « AP », la seconde est la borne HK moyennant une transformation.

La borne AP – *Assignment Problem* – consiste à résoudre le problème d'affectation correspondant au graphe du ATSP à résoudre. Il s'agit de construire le biparti complet  $K_{NN}$  à  $2N$  sommets formé par les sommets de  $G$  (graphe du TSP à  $N$  sommets) de part et d'autre et dont les distances sont celles de la matrice des distances où avec la distance entre un sommet et son équivalent dans l'autre partie est infinie. Le calcul de la distance correspondante à la solution du problème d'affectation donne la borne inférieure AP.

La borne AP « est connue pour être de haute qualité pour les problèmes purement asymétrique [Balas & Toth, 1985] » [Glover, Gutin, Yeo & Zverovich, 1999]. Alors que pour des problèmes symétriques, cette borne n'est pas utilisée car HK est au moins 15 % au dessus [Cirassella, Johnson, McGeoch & Zhang, 2000]. De plus, au-delà de moyenne, il n'existe pas de précision minimum garantie expérimentalement par la borne AP ; d'ailleurs, dans [Gutin,

<sup>1</sup> Source [Johnson, McGeoch & Rothberg, 1996] (extrait direct)



Johnson, McGeoch, Yeo, Zhang & Zvernivitch, 2002], ces derniers informent que « sur les instances aléatoires essayées, 5 sont estimée par AP bien au-delà des 10 % ».

L'autre borne utilisée pour les problèmes asymétriques est celle dont la procédure consiste à effectuer la transformation NP-difficile du ATSP en STSP (en remplaçant chaque sommet du graphe correspondant au ATSP par trois autres) puis à calculer la borne inférieure HK sur ce dernier [Cirassella, Johnson, McGeoch & Zhang, 2000]. La précision donnée est dans ce cas celle donnée par HK dans le cas symétrique. Seulement, la difficulté de la transformation précédente et sa complexité font que cette alternative soit parfois mise de coté.

Enfin, il est intéressant de noter que, selon [Gutin, Johnson, McGeoch, Yeo, Zhang & Zvernivitch, 2002], l'écart entre LP est la borne HK dite généralisée (c'est-à-dire celle décrite ci-dessus) a une corrélation intéressante avec le comportement algorithmique, c'est-à-dire la précision, des heuristiques testée sur des ATSP.

### C.I.3. Eléments de la Constante du Problème du Voyageur de Commerce « *Travelling Salesman Constant* » (TSC)

Dans cette partie nous allons exposer les principaux résultats relatifs à la « Constante du Problème du Voyageur de Commerce » (notée TSC). En faite, celle-ci peut servir de borne inférieure – graduellement plus précise avec l'accroissement de la taille du problème – à la solution d'un TSP.

Historiquement, Breadwood, Halton et Hammersley ont publié une étude expérimentale en 1959 qui faisait ressortir le fait suivant [ Breadwood, Halton & Hammersley, 1959] :

Pour des problèmes euclidiens générés aléatoirement sur le carré unité, le ratio attendu de la longueur de la solution optimale sur la racine de la taille du problème, tend vers une constante limite lorsque la taille du problème tend vers l'infini.

Ils estimèrent cette constante à : 0.75. [Johnson, McGeoch & Rothberg, 1996] l'estiment ensuite à 0.7124, alors que [Percus & Martin, 1996] l'estiment à 0.7120.

Les mathématiciens puristes qualifient ces derrières « d'estimations non rigoureuses » [Weisstein, 1999 (mathworld)]. A ce sujet, l'un des plus intéressant résultat prouvé est celui de [Norman & Moscato, 1995] : la longueur de la plus courte courbe passant par n points (*self-avoiding space-filling curve*) au niveau du même point tend vers la valeur suivante lorsque m tend vers l'infini.

$$\lambda \equiv \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{L_m}{\sqrt{n_m}} = \frac{4(1 + 2\sqrt{2})\sqrt{51}}{153} = 0.7147827 \dots \quad [\text{C.I.3-1}]$$

De plus, lorsque le nombre de points devient infini, les distances moyennes entre ceux-ci tendent vers zéro. De ce fait, la longueur de la somme des arcs tend vers la longueur de cette courbe (principe de l'analyse numérique). Ceci se rapproche des résultats de la TSC.

Il faut également savoir que le sujet du TSC ne se borne pas au carré. En fait la formulation générale et différents résultats mathématiques traitent de ce problème de manière étendue à une distribution sur un  $d$ -cube. Dans notre cas  $d = 2$ .



## **CHAPITRE II**

**Modélisation d'estimateurs de la  
longueur de la solution optimale du  
problème du voyageur de commerce  
symétrique**

## Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la modélisation et l'étude de différents estimateurs de la solution optimale du Problème du Voyageur de Commerce Symétrique. A cette fin, nous analyserons la précisions de différents modèles existants et introduits.

L'analyse de précision revêtera l'aspect d'une analyse résiduelle. On s'intéressera à cela particulièrement pour quantifier l'efficacité de chaque modèle. Nous tâcherons également de comparer les résultats obtenus à ceux d'autres estimateurs pour en avancer la qualité relative.

Tout d'abord, nous allons décrire l'approche méthodologique suivie dans notre étude expérimentale. Nous introduirons par la suite le premier modèle d'estimation pour aboutir à d'autres.

De manière générale, nous avons :

- généré des graphes aléatoirement sur un carré de coté 100 (STSP planaires) pour des tailles  $N$  variant selon la série générée<sup>1</sup> ;
- déterminé la solution optimale (ainsi que sa longueur)<sup>2</sup> ;
- calculé la moyenne et l'écart type de chacun des graphes<sup>3</sup> ;
- estimé la longueur optimale donnée par le modèle initial (puis par d'autres modèles construits) ;
- calculé les résidus nécessaires à l'analyse et à l'évaluation qualitative du modèle.

Aussi, nous intéresserons-nous à la recherche du meilleur modèle et à la caractérisation de ses résidus.

<sup>1</sup> La génération aléatoire a été faite à l'aide du générateur aléatoire du logiciel libre Concorde (version 1.1)

<sup>2</sup> La résolution exacte (en utilisant des longueurs entières arrondies) a été déterminée par le *Solver* du logiciel libre Concorde (version 1.1)

<sup>3</sup> Le calcul de  $m$  et  $\sigma$  à partir des coordonnées générées a été calculé grâce à la programmation de fonction sous Matlab (versions 6.5 et 7)



### C.II.1. Le modèle d'estimation initial

Il s'agit du modèle proposé par [Aoufi, Lamraoui, Ouabdesselam & Souayeb, 1996]. Cet estimateur part de l'idée que dans la population mère de toutes les longueurs de cycles hamiltoniens d'un graphe, le minimum  $\mu$  s'écarte de la moyenne des longueurs de cycles par un facteur fois l'écart type :

$$\mu \approx m - W \sigma \quad [\text{C.II.1-1}]$$

[Aoufi, Lamraoui, Ouabdesselam & Souayeb, 1996] montrent en outre que  $W$  varie en fonction de  $N$  ; il l'estime par :

$$W \approx p + q \sqrt{N} \quad [\text{C.II.1-2}]$$

Ils estiment<sup>1</sup> en moyenne  $p$  à -5.595 et  $q$  à 2.887.

Ainsi le modèle proposé se décline comme suit :

$$\mu \approx m - (p + q \sqrt{N}) \sigma \quad [\text{C.II.1-3}]$$

#### C.II.1.a. Réestimation des paramètres du modèle initial

Nous avons voulu réestimer les paramètres de ce modèle sur des observations plus importantes et sur une plage de variation supérieure. A cet effet, nous avons :

- Généré aléatoirement une série, dite d'ajustement, où la taille des problèmes  $N$  variait de 50 à 250 sommets tel que pour chaque  $N$  nous générons 5 graphes différents ;
- Estimé les paramètres  $p$  et  $q$  donnant le meilleurs ajustement<sup>2</sup> à  $\mu$  sur la série précédente ;

Le tableau [C.II.1.a-1] résume les résultats obtenus.

Nous obtenons :  $p = -3.4658$  et  $q = 2.4071$  (soit un écart important par rapport à l'étude initiale et qui de plus n'est pas inclus dans l'intervalle proposé de 95%).

<sup>1</sup> Estimation basée sur des ajustements de séries de taille  $N$  variant de 10 à 100 par pas de 5

<sup>2</sup> Ajustement effectué à l'aide de Mathematica (version 5) et plus précisément par la fonction d'ajustement multivariable non linéaire FindFit.



Tableau [C.II.1.a-1] : Résidus relatifs obtenus sur la série d'ajustement

N	moyenne m	moyenne $\sigma$	moyenne $\mu$	ERM	ERaM
50	2 585,09	145,89	578,40	4,97%	6,41%
60	3 132,36	163,82	622,40	3,74%	4,22%
70	3 586,11	173,12	665,60	5,18%	7,75%
80	4 254,96	196,34	705,80	0,45%	8,37%
90	4 660,78	201,86	762,80	-1,74%	5,94%
100	5 182,18	210,87	777,00	7,79%	7,79%
110	5 677,73	221,90	815,20	3,75%	4,23%
120	6 238,07	234,36	856,20	1,65%	4,74%
130	6 754,54	246,28	863,00	-1,70%	5,32%
140	7 276,02	252,88	910,80	4,38%	6,42%
150	7 822,50	266,43	918,20	-2,94%	6,28%
160	8 372,42	277,48	942,20	-6,17%	7,26%
170	8 796,80	278,10	988,20	4,53%	5,65%
180	9 293,74	284,75	1 027,20	5,70%	8,80%
190	9 706,00	292,00	1 028,80	0,20%	8,35%
200	10 256,58	300,98	1 042,20	1,16%	3,84%
210	11 054,44	316,30	1 098,40	1,74%	6,68%
220	11 654,24	327,40	1 122,00	-1,96%	3,12%
230	11 856,85	323,96	1 137,80	1,39%	3,50%
240	12 686,66	341,52	1 156,20	-1,81%	4,99%
250	12 773,99	335,11	1 184,00	-0,23%	1,78%
				<b>ERM série</b>	<b>ERaM série</b>
				<b>moyenne</b>	<b>5,78%</b>
				<b>écart-type</b>	<b>1,91%</b>

La figure [C.II.1.a-1] ci-dessous représente la juxtaposition des valeurs prise par  $\mu$  pour différents problèmes et l'estimation de  $\mu$  obtenue par l'ajustement correspondant. On y remarque que fréquemment, lorsque  $\mu$  s'écarte de sa tendance, son estimateur réagit en s'écartant de la tendance dans le même sens ; cependant cette réaction est excessive.

La figure [C.II.1.a-2] représente les valeurs prises par l'erreur relative moyenne ERM (sur 5 observations) ainsi que l'erreur relative en valeur absolue moyenne correspondante.

Il est à noter que les paramètres  $p$  et  $q$  estimés initialement par [Aoufi, Lamraoui, Ouabdesselam & Souayeb, 1996] donnent de moins bons résultats sur la plage 50 à 100 que notre estimation ; et à partir d'une taille supérieure à 120 leur estimation diverge de plus en plus. Cela n'est que le reflet de la qualité de l'ajustement effectué qui n'est pas assez précise sur une série restreinte de 10 à 100 sommets ainsi que de la qualité extrapolative induite par cet ajustement.



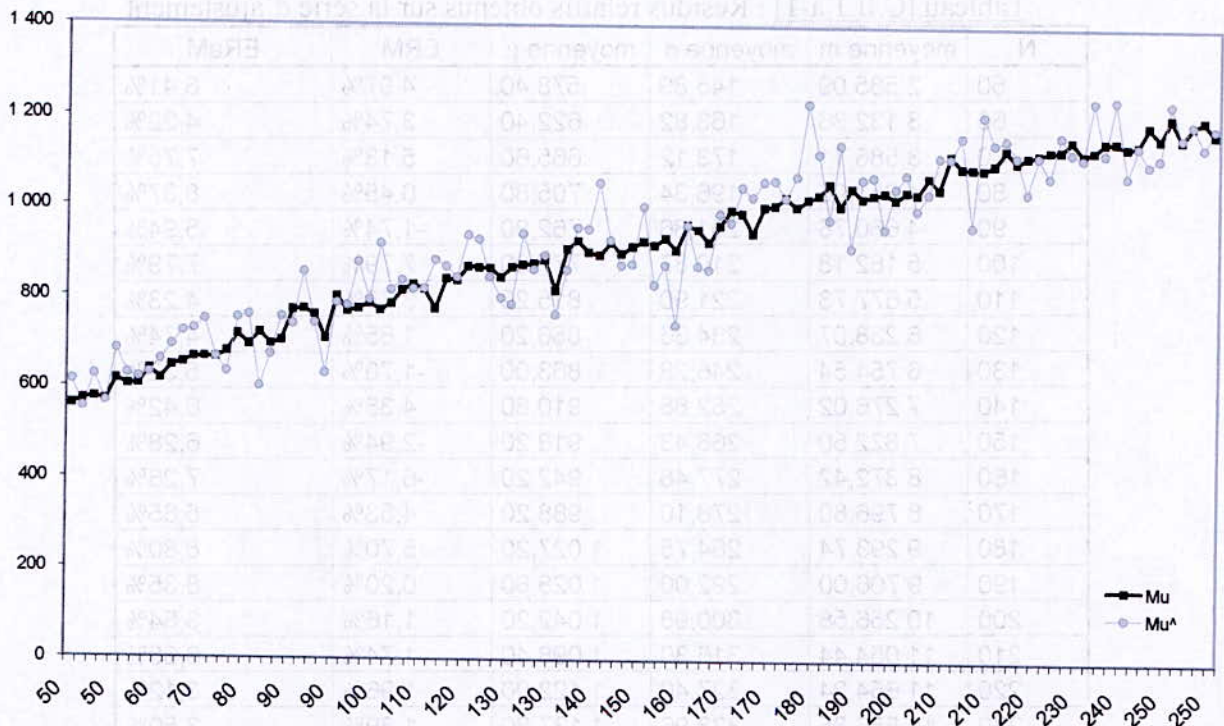


Figure [C.II.1.a-1] : Estimations de  $\mu$  par rapport à  $\mu$  en ajustement

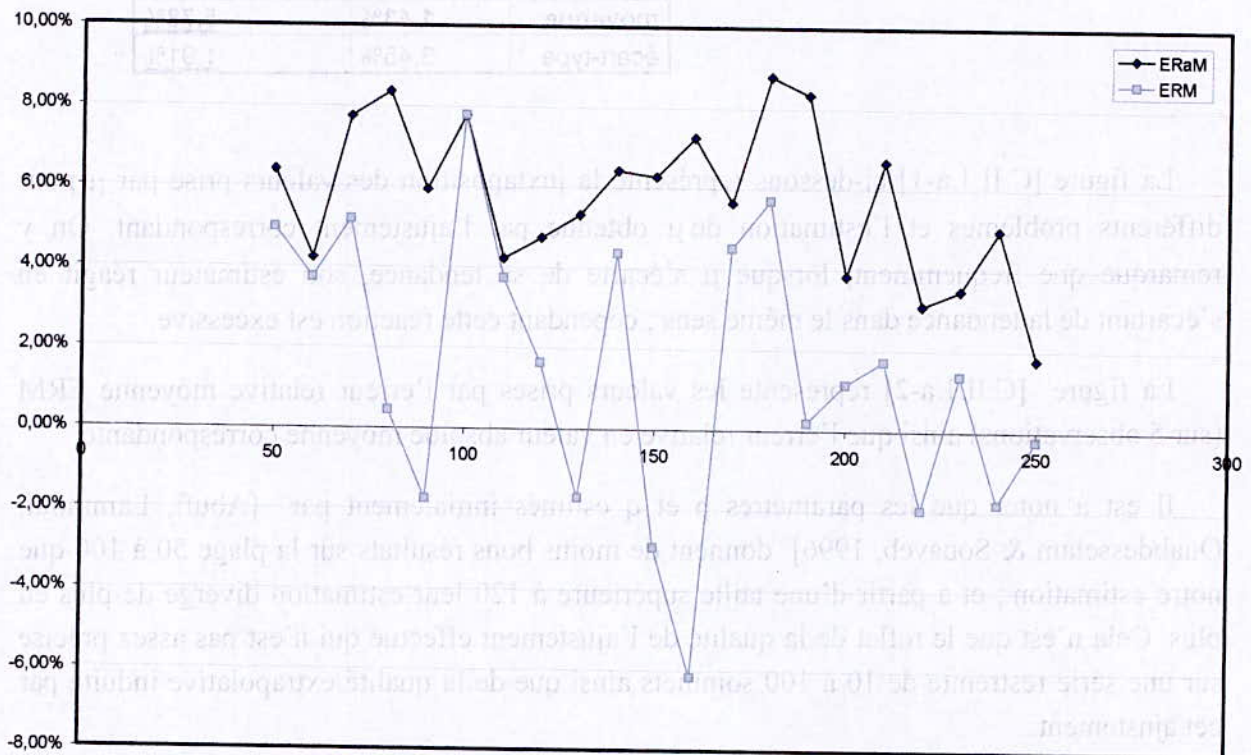


Figure [C.II.1.a-2] : Erreur relative moyenne ERM(5) et erreur relative en valeur absolue moyenne ERaM(5) obtenues pour la série d'ajustement.

### C.II.1.b. Analyse résiduelle de validation

A présent, les paramètres étant réestimés, il nous faut analyser le comportement du modèle sur une ou d'autres séries indépendantes de celle qui est à l'origine de l'ajustement mais toujours dans la même plage de 50 à 250 et par pas de 10. De plus pour quantifier les résidus en fonction de la taille du problème, nous avons préféré générer, pour chaque taille, 20 graphes aléatoires distincts.

Nous pouvons synthétiser les résultats dans le tableau [C.II.1.b-1] qui suit.

Graphiquement (figure [C.II.1.b-1]), nous remarquons que la distribution des moyennes (sur 20 observations) des ERaM ainsi que celle des écarts-types des ERaM paraissent être légèrement corrélés à la taille du problème (légère évolution tendancielle en fonction de N). Nous pouvons confirmer ce constat a priori, en calculant le coefficient de corrélation<sup>1</sup> entre chacune de ces deux variables et N. Ce calcul donne :

- Une corrélation de 64.86 % entre les moyennes (de 20 observations) des ERaM et N ;
- Une corrélation de 59.68 % entre les écart-types (de 20 observations) des ERaM et N.

Cela dit, bien que le nombre d'observations pour chaque N soit assez important (20), les résultats obtenus ne permettent pas de modéliser avec précision une estimation de l'erreur moyenne en fonction de N car cette dernière (N) ne l'explique pas significativement.

Par ailleurs, on peut noter que souvent lorsque l'ERaM pour un N donné est supérieur à la moyenne, alors l'écart-type de ce dernier est lui aussi supérieur à la moyenne. En effet, le coefficient de corrélation entre ces deux variables est de 77.17 %

<sup>1</sup> Les calculs de coefficient de corrélation sont effectués à l'aide de Statistica



Tableau [C.II.1.b-1] : Résidus relatifs moyens obtenus sur la série de validation

N	mean20 m	mean20 s	mean20 mu	mean20 err	mean20 ERM	stdev20 ERM	mean20 ERaM	stdev20 ERaM
50	2602,5746	148,504119	576,9	12,7226709	2,25%	5,49%	4,55%	3,70%
60	3147,13435	164,982616	623,25	19,5486282	3,21%	5,67%	5,41%	3,49%
70	3642,013	177,673749	665	14,6041874	2,28%	5,73%	4,35%	4,29%
80	4179,9212	191,464712	703,7	17,6394084	2,55%	7,33%	6,24%	4,42%
90	4694,85421	202,672996	748	21,1196456	2,82%	7,11%	6,38%	4,02%
100	5207,79148	214,059434	773,1	23,9904154	3,10%	8,01%	7,21%	4,43%
110	5715,16866	224,525019	815,5	9,53663782	1,16%	5,26%	3,86%	3,66%
120	6228,72511	233,687104	850,95	25,7631471	3,03%	6,23%	5,47%	4,12%
130	6738,9545	245,148698	866,45	-5,95648336	-0,75%	11,07%	7,64%	7,86%
140	7281,06376	254,23815	911,4	9,84950169	0,98%	10,37%	7,73%	6,75%
150	7729,19542	260,239848	931,1	28,0029247	3,07%	8,84%	7,69%	5,09%
160	8094,04741	264,530972	940,5	16,0649725	1,71%	10,86%	8,73%	6,39%
170	8834,96126	280,47379	989,95	14,5438904	1,41%	8,80%	6,35%	6,10%
180	9208,88229	284,343607	1001,6	10,0550262	0,82%	12,55%	8,92%	8,63%
190	9780,61793	294,379018	1032,15	1,4257755	0,10%	10,47%	7,38%	7,23%
200	10401,6514	305,287808	1066,5	0,82959239	0,01%	9,81%	7,79%	5,69%
210	10928,2862	312,923643	1083,9	13,5353389	1,22%	9,10%	7,24%	5,40%
220	11459,4294	321,221623	1113,25	-9,04085683	-0,89%	9,49%	6,79%	6,51%
230	11999,6279	328,372222	1137,65	12,7548707	1,10%	10,04%	8,04%	5,84%
240	12456,9256	333,74789	1157,7	10,3524425	0,87%	10,54%	8,11%	6,54%
250	12998,1036	340,893492	1191,25	14,1523015	1,09%	8,79%	7,03%	5,15%
				<b>moyenne</b>	<b>1,48%</b>	<b>8,65%</b>	<b>6,81%</b>	<b>5,49%</b>
				<b>écart-type</b>	<b>1,24%</b>	<b>2,11%</b>	<b>1,41%</b>	<b>1,45%</b>



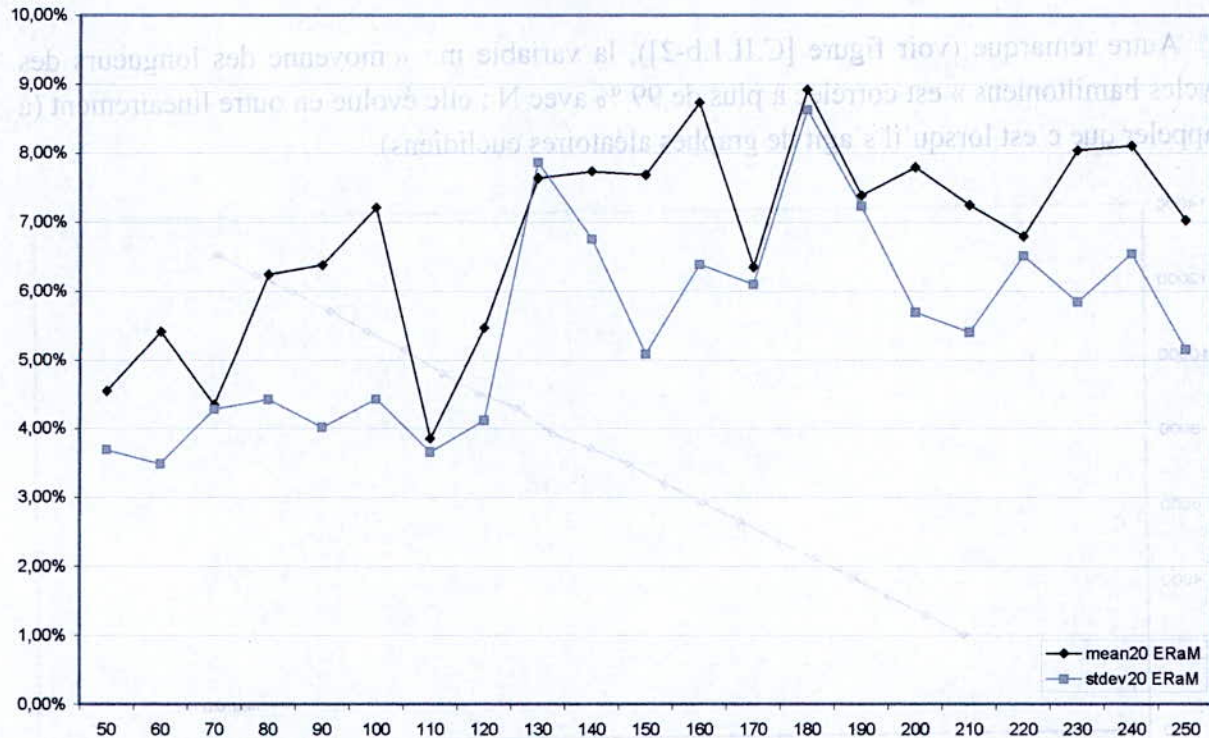


Figure [C.II.1.b-1] : Evolutions des moyennes et dispersions des résidus calculées en valeur absolue

L'ajustement à une loi de probabilité des 21 mesures précédentes de l'ERaM donne la distribution suivante :

$$\text{Normale } [m = 6.81, \text{sigma} = 1.37]^1$$

Soit que la moyenne (pour 20 observations à N constant) de la valeur absolue de l'erreur relative est normalement distribuée, selon la moyenne et l'écart-type ci-dessus. On remarque que cette distribution est assez « ramassée » ; en effet, l'écart-type qui vaut 1.37 ne représente que 20 % de la moyenne (qui elle vaut 6.81).

Par ailleurs, l'ajustement à une loi de probabilité de l'ensemble des (20\*21) mesures de la valeur absolue de l'erreur relative donne la distribution suivante :

$$\text{Weibull } [a = 7.26, b = 1.21, c = 0]^2$$

(a,b,c étant respectivement les paramètres d'échelle, de forme et de position)

Enfin, nous avons également analysé la qualité d'extrapolation de cet estimateur (voir C.II.3.d)

<sup>1</sup> La statistique du test du Khi-2 vaut 2.65 ; la statistique du test de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.140

<sup>2</sup> La statistique du test du Khi-2 vaut 17.8 ; la statistique du test de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.038



Autre remarque (voir figure [C.II.1.b-2]), la variable  $m$  : « moyenne des longueurs des cycles hamiltoniens » est corrélée à plus de 99 % avec  $N$  ; elle évolue en outre linéairement (à rappeler que c'est lorsqu'il s'agit de graphes aléatoires euclidiens).

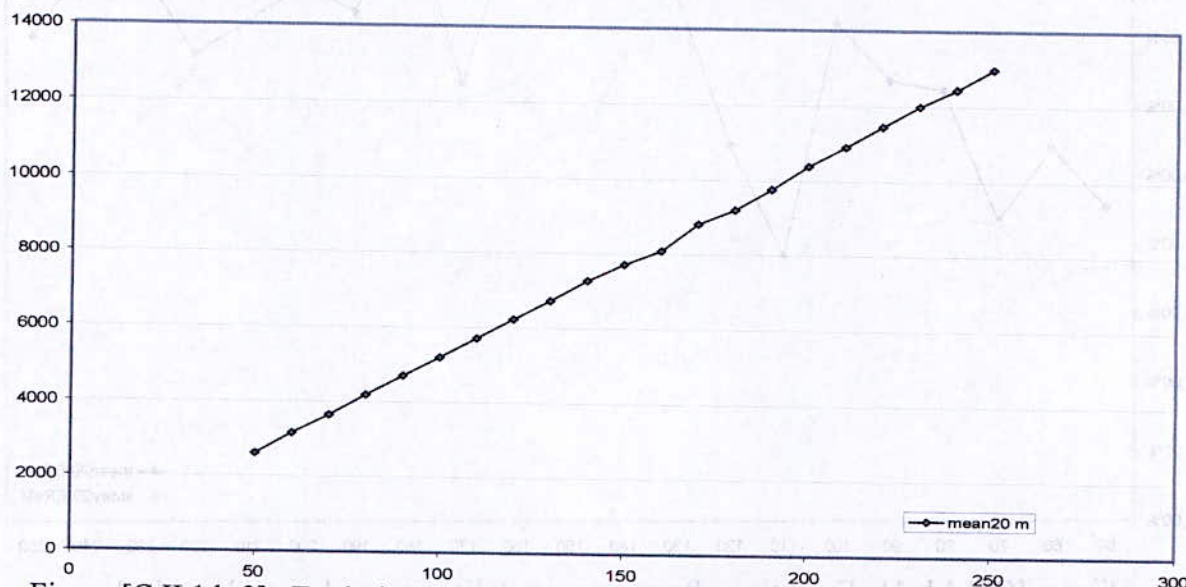


Figure [C.II.1.b-2] : Evolutions de la moyenne des longueurs des cycles hamiltoniens pour des STSP euclidiens aléatoires sur un carré de côté 100 (série de validation).

De même, l'évolution de la longueur optimale est à première vue linéaire voire légèrement convexe (voir figure [C.II.1.b-3]). Cependant, les propriétés asymptotiques de la TSC exposées précédemment confirment une évolution convexe qui converge en lois vers  $0.71 \sqrt{N}$

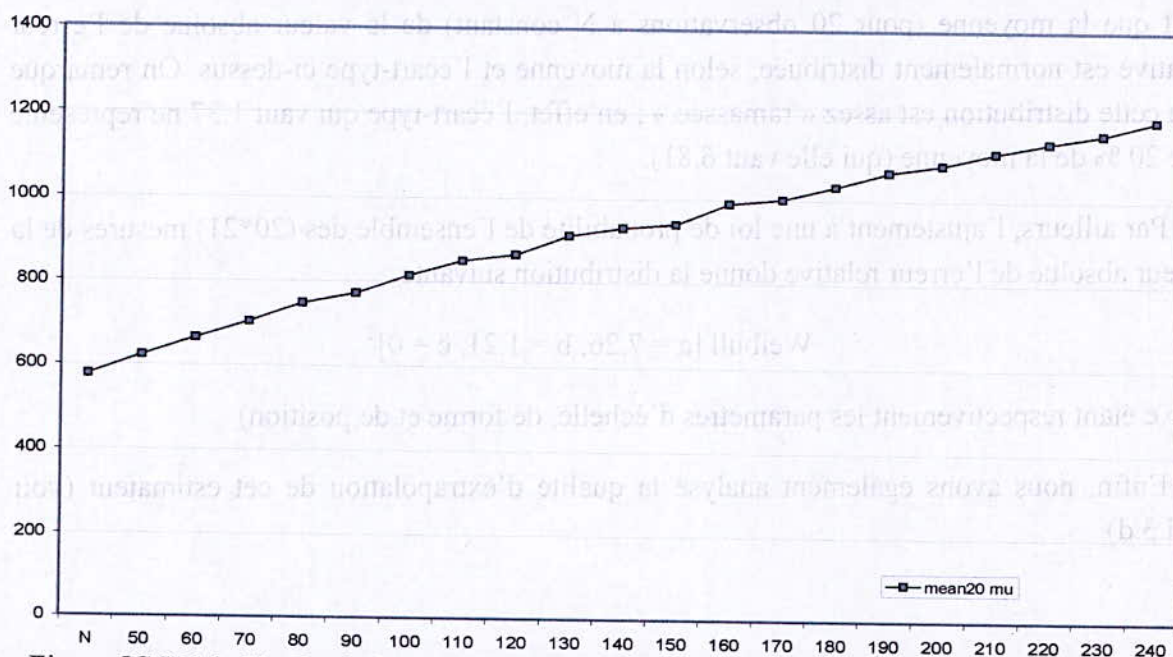


Figure [C.II.1.b-3] : Evolutions de l'écart-type des longueurs des cycles hamiltoniens pour des STSP euclidiens aléatoires sur un carré de côté 100 (série de validation).

En tentant d'analyser la variation des mesures précédentes par rapport à N, nous avons été « surpris » par l'allure « étonnamment » régulière de  $\sigma/m$  par rapport à N. Celle-ci est semblable à une courbe du type  $a/\sqrt{X}$ . La figure [C.II.1.b-3] montre d'ailleurs cette allure et la compare au pré-ajustement  $(0.41/\sqrt{N})$ .

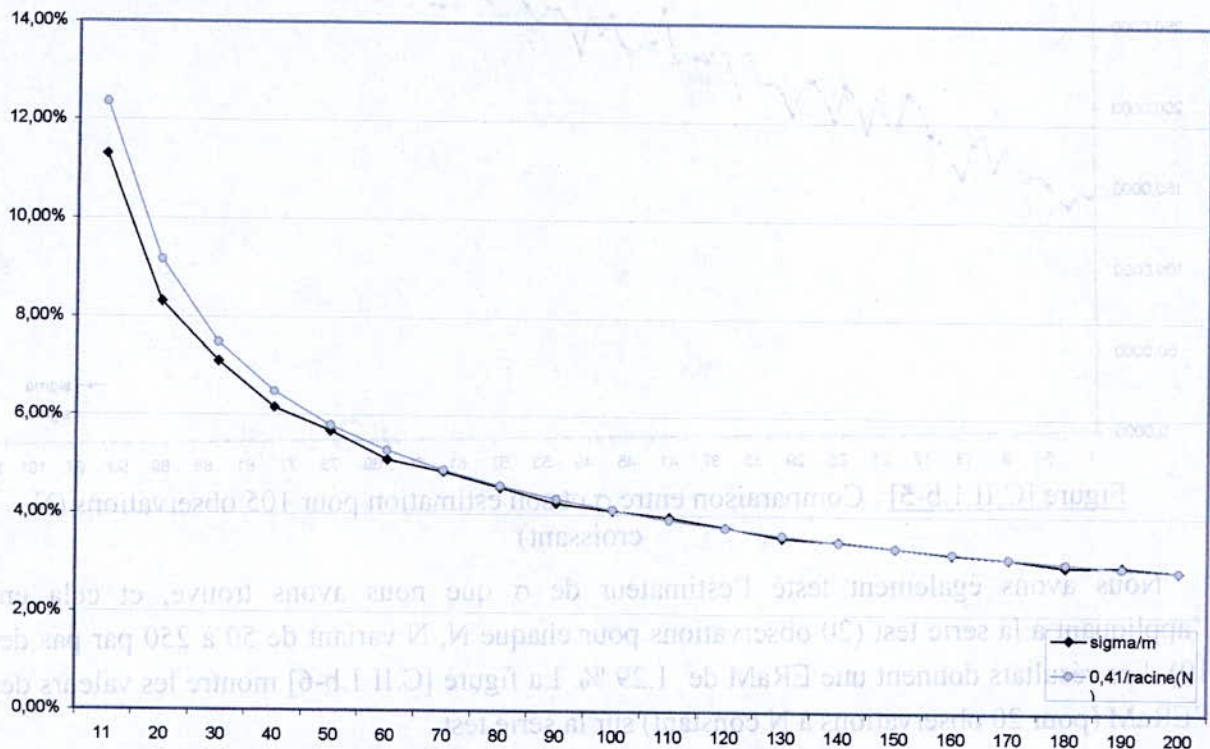


Figure [C.II.1.b-4] : Courbe d'évolution de l'écart-type des longueurs des cycles hamiltoniens sur leur moyenne ( $\sigma/m$ ) et courbe  $0.41/\sqrt{N}$  pour des STSP euclidiens aléatoires sur un carré de côté 100 (série de validation).

En remarque également (figure [C.II.1.b-4]) que l'ajustement  $a/\sqrt{N}$  est légèrement décalé vers la droite. Ceci nous laisse « présager » que l'ajustement de sigma soit du type :

$$\text{Sigma} = a * m/\sqrt{N} + b \quad (b \text{ négatif car décalage à droite}).$$

En effet, l'ajustement de sigma (sur les 5\*21 observations de la série d'ajustement) par cette expression donne :

$$\text{Sigma} = 0.4236 * m / \text{racine}(N) - 6.2187 \quad [\text{C.II.1.b-1}]$$

L'ERaM est de 1.02 % alors que l'erreur relative en valeur absolue n'atteint jamais 5% (pour les 105 observations de l'ajustement).

Pour montrer graphiquement la « finesse » de cette estimation et la qualité d'ajustement, voici la superposition de sigma et de son estimation représentées par la figure [C.II.1.b-5].



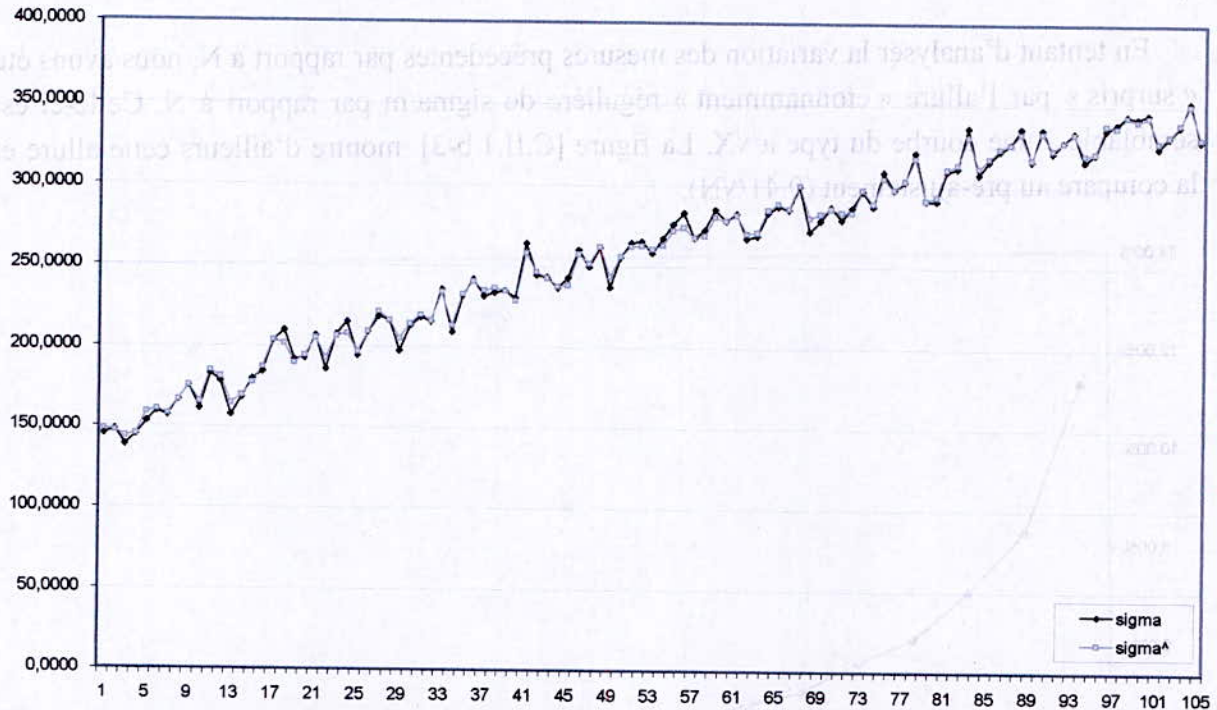


Figure [C.II.1.b-5] : Comparaison entre  $\sigma$  et son estimation pour 105 observations (N croissant)

Nous avons également testé l'estimateur de  $\sigma$  que nous avons trouvé, et cela en l'appliquant à la série test (20 observations pour chaque N, N variant de 50 à 250 par pas de 10). Les résultats donnent une ERaM de 1.29 %. La figure [C.II.1.b-6] montre les valeurs de l'ERaM (pour 20 observations à N constant) sur la série test.

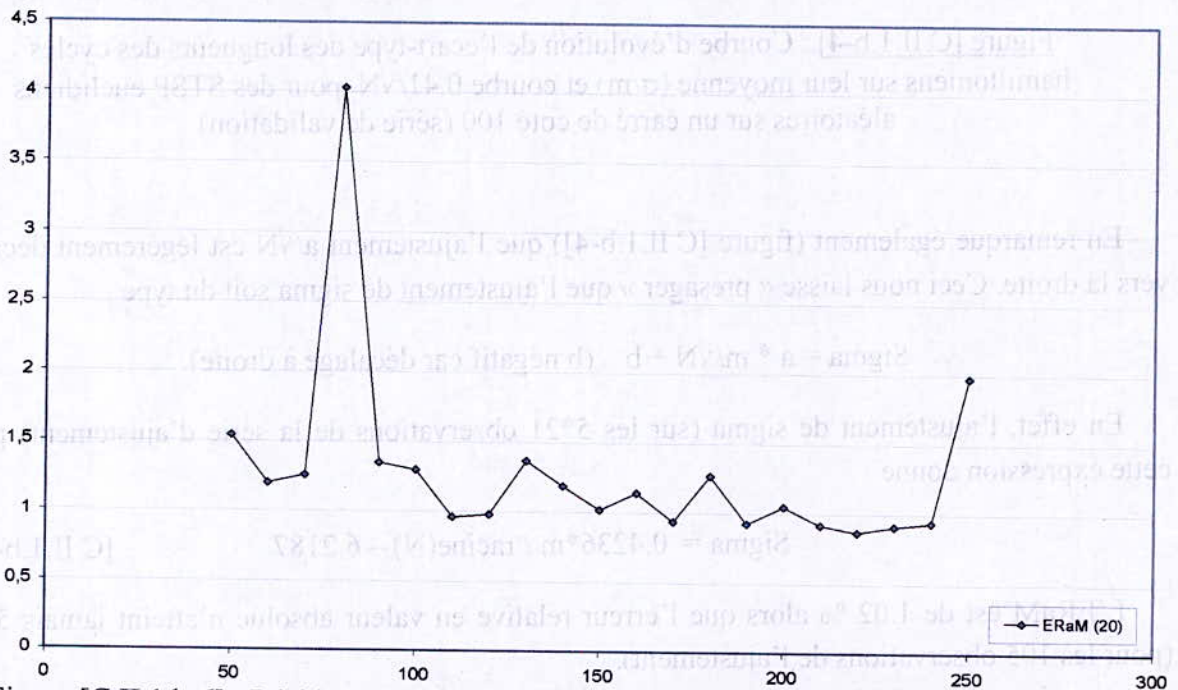


Figure [C.II.1.b-6] : Résidus relatifs en valeur absolue moyens (20 observations) pour des tailles allant de 50 à 250.



Nous remarquons alors que, pour ce type de problèmes (STSP euclidiens aléatoires), le modèle initial étudié (en fonction de  $N$ ,  $m$  et  $\sigma$ ) peut se ramener un modèle uniquement en fonction de  $N$ . Dans ce cas, il est inutile de chercher son expression car nous connaissons dorénavant et déjà un modèle fonction de  $N$  uniquement et qui est caractérisé par sa grande précision ; il s'agit de l'estimation statistique de la borne HK de [Johnson, McGeoch & Rothberg, 1996] (tests : voir série test en C.II.2.a).

### **Conclusion**

Nous avons réestimé les paramètres du modèle initial proposé par [Aoufi, Lamraoui, Ouabdesselam & Souayeb, 1996] que nous avons complété par une analyse résiduelle. Les résultats auxquels nous sommes parvenus se résument aux points suivants :

- la moyenne de l'erreur relative en valeur absolue obtenue en estimant la longueur de la solution optimale des différents STSP euclidiens aléatoires sur une plage de  $N$  dans [50, 250] par ce modèle est de 6.8%
- l'erreur relative en valeur absolue qu'on obtient suit une loi de Weibull de paramètres [ $a = 7.26$  (échelle),  $b = 1.21$  (forme),  $c = 0$  (position)]
- Pour ce type de problèmes (STSP euclidiens aléatoires), la qualité de cet estimateur n'est pas satisfaisante du moment que l'estimateur statistique de la borne HK donne de bien meilleurs résultats et que son calcul est instantané, contrairement au premier.

L'analyse résiduelle de l'estimateur de l'écart-type des longueurs des cycles hamiltoniens (pour la catégorie des STSP euclidiens aléatoires) montre une bonne précision (ERaM 1.3 % sur une plage de  $N$  dans [50, 250]). De plus, ce dernier est d'un grand intérêt. En effet, le calcul exacte de  $s$  est « gourmand » en temps d'exécution ; il est dominé par  $O(N^4)$ . Or, les variables explicatives de cet estimateur  $s$  sont uniquement  $m$  et  $N$  ; leur calcul est très rapide<sup>1</sup>. En outre, nous analyserons ultérieurement la qualité du modèle initial lorsque  $s$  est remplacé par son estimateur.

<sup>1</sup>  $N$  est la taille du problème (calcul instantané). Le calcul de  $\sigma$  est dominé par  $N^2$  additions



## C.II.2. Construction d'autres modèles et étude comparative

### Introduction

Nous allons, dans cette partie, construire d'autres estimateurs de  $\mu$ . Nous allons, d'une part, tester la précision de ceux-ci, et d'autre part, les comparer entre eux. L'analyse résiduelle comparative va donc nous permettre de quantifier la précision en moyenne et en dispersion des divers modèles introduits (y compris le modèle initial), de classer éventuellement les estimateurs selon les types de problèmes ou de décider du plus efficace.

### C.II.2.a. Les différents modèles introduits et ajustement

En plus du modèle précédemment étudié, nous avons voulu tester d'autres estimateurs basés sur différentes propriétés ou idées particulières.

Tout d'abord, par souci de clarté, nous conviendrons de la notation suivante :

- Le modèle A désignera le modèle précédemment analysé<sup>1</sup> (modèle initial)

Le modèle B désignera le modèle équivalent au A mais où  $\sigma$  est remplacée par son estimateur (proposé ci-avant)<sup>2</sup>

- Le modèle C désignera le modèle B mais dont l'expression est développée et où les nouveaux paramètres issus de cette simplification sont estimés par ajustement<sup>3</sup>
- Le modèle HKstat désignera le modèle d'estimation statistique de la borne HK pour des STSP euclidiens aléatoires de [Johnson, McGeoch & Rothberg, 1996].

Le modèle B est donc celui que nous venons d'étudier en C.II.1.

Le modèle B est le résultat de la combinaison du modèle initial et du modèle d'estimation de sigma proposé précédemment. Ainsi en remplaçant sigma de l'équation [C.II.1-3] (modèle initial) par son estimateur (équation [C.II.1.b-1]) nous obtenons :

$$\mu \approx m - (p + q\sqrt{N}) \cdot (a \cdot m / \sqrt{N} + b) \quad [\text{C.II.1.a-1}]$$

A ce niveau, nous gardons les paramètres p et q comme ceux de l'ajustement du modèle A ; de même, les paramètres a et b restent ceux de l'ajustement de l'estimateur de sigma<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>  $\mu^{\wedge} = m - (p + q\sqrt{N}) \cdot \sigma$

<sup>2</sup>  $\mu^{\wedge} = m - (p + q\sqrt{N}) \cdot (a \cdot m / \sqrt{N} + b)$

<sup>3</sup>  $\mu^{\wedge} = a \cdot m + b \cdot m / \sqrt{N} + c \cdot \sqrt{N} + d$







Tableau [C.II.1.a-1] : Résidus relatifs des ajustement relatifs aux modèles A, B et C

Statistiques sur les problèmes générés				Modèle A		Modèle B		Modèle C	
N	moyenne m	moyenne $\sigma$	moyenne $\mu$	ERM	ERaM	ERM	ERaM	ERM	ERaM
50	2 585,09	145,89	578,40	4,97%	6,41%	-1,38%	2,03%	0,74%	2,84%
60	3 132,36	163,82	622,40	3,74%	4,22%	0,71%	2,45%	0,82%	2,66%
70	3 586,11	173,12	665,60	5,18%	7,75%	-0,44%	3,60%	0,36%	0,93%
80	4 254,96	196,34	705,80	0,45%	8,37%	3,06%	3,86%	0,31%	1,46%
90	4 660,78	201,86	762,80	-1,74%	5,94%	-1,43%	5,01%	-2,38%	4,44%
100	5 182,18	210,87	777,00	7,79%	7,79%	1,31%	1,76%	0,15%	0,87%
110	5 677,73	221,90	815,20	3,75%	4,23%	0,45%	2,22%	-0,44%	2,20%
120	6 238,07	234,36	856,20	1,65%	4,74%	-0,01%	1,68%	-1,50%	1,85%
130	6 754,54	246,28	863,00	-1,70%	5,32%	2,75%	3,54%	1,32%	1,93%
140	7 276,02	252,88	910,80	4,38%	6,42%	0,53%	1,86%	-0,81%	1,21%
150	7 822,50	266,43	918,20	-2,94%	6,28%	3,02%	3,02%	1,52%	1,52%
160	8 372,42	277,48	942,20	-6,17%	7,26%	3,57%	3,84%	1,95%	2,22%
170	8 796,80	278,10	988,20	4,53%	5,65%	0,34%	1,29%	-0,15%	1,81%
180	9 293,74	284,75	1 027,20	5,70%	8,80%	-1,27%	3,16%	-1,42%	1,88%
190	9 706,00	292,00	1 028,80	0,20%	8,35%	-0,07%	1,93%	0,83%	1,24%
200	10 256,58	300,98	1 042,20	1,16%	3,84%	1,12%	3,16%	1,97%	2,33%
210	11 054,44	316,30	1 098,40	1,74%	6,68%	0,00%	1,74%	-0,85%	0,90%
220	11 654,24	327,40	1 122,00	-1,96%	3,12%	0,29%	1,75%	-0,75%	1,02%
230	11 856,85	323,96	1 137,80	1,39%	3,50%	-1,51%	2,21%	-0,27%	0,91%
240	12 686,66	341,52	1 156,20	-1,81%	4,99%	0,65%	1,40%	0,34%	1,25%
250	12 773,99	335,11	1 184,00	-0,23%	1,78%	-2,83%	2,83%	-0,36%	1,37%
				<b>ERM série</b>	<b>ERaM série</b>	<b>ERM série</b>	<b>ERaM série</b>	<b>ERM série</b>	<b>ERaM série</b>
				<b>1,43%</b>	<b>5,78%</b>	<b>0,42%</b>	<b>2,59%</b>	<b>0,07%</b>	<b>1,76%</b>
				<b>écart-type</b>	<b>1,91%</b>	<b>1,67%</b>	<b>0,99%</b>	<b>1,14%</b>	<b>0,85%</b>



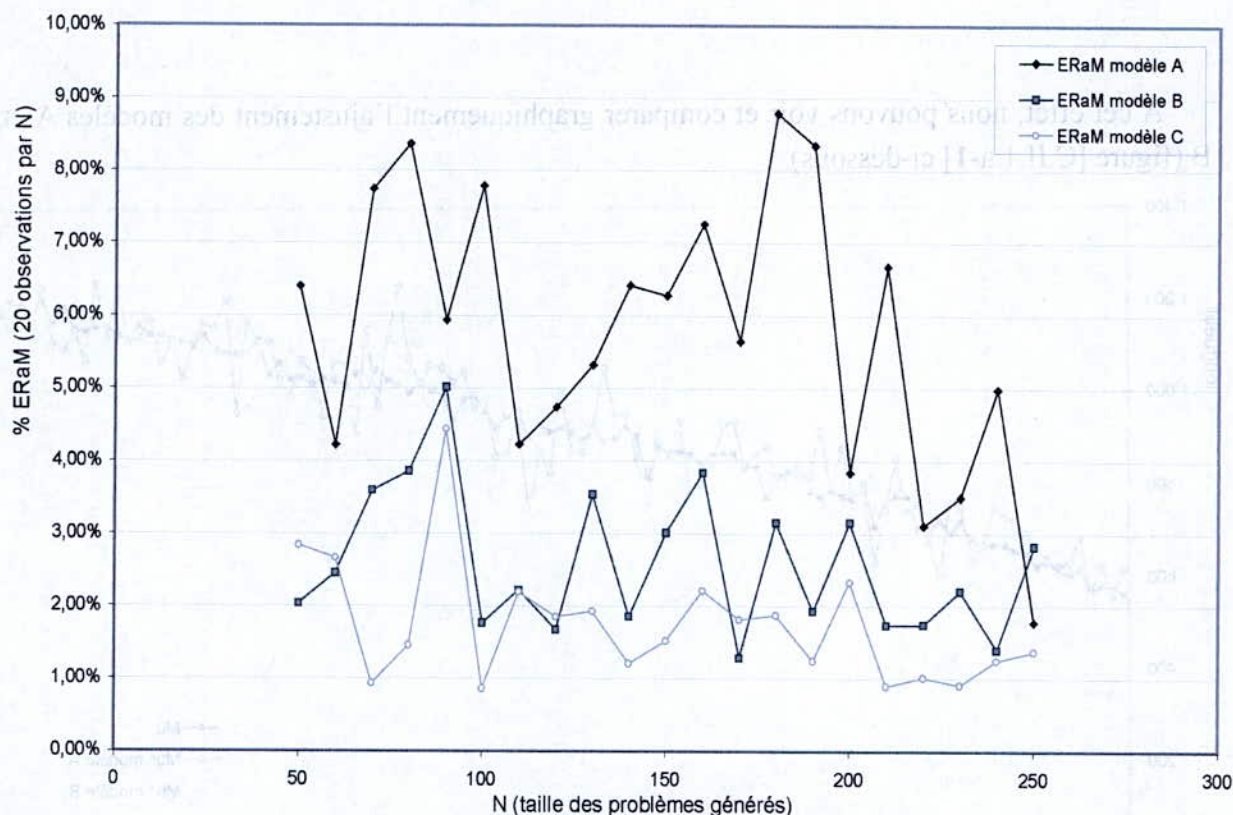


Figure [C.II.1.a-1] : Représentation des moyennes des erreurs relatives en valeur absolue correspondant aux ajustements des modèles A, B et C.

La représentation graphique des variables résiduelles calculées (figure [C.II.1.a-1] ci-dessus) fait ressortir clairement que la qualité d'ajustement du modèle C est supérieure à celle du modèle B qui elle supérieure à celle du modèle A. De plus, la représentation tendancielle de ces variables résiduelles montre une allure horizontale voire légèrement décroissante signifiant que cet ajustement est relativement stable en fonction de N voire d'une précision proportionnelle à N. En effet, le calcul du coefficient de corrélation entre N est ERaM pour les modèles B et C donne respectivement -0.32 et -0.45.

Ce classement des trois modèles reste le même par rapport à la dispersion résiduelle de l'ajustement quantifiée par les écart-type de l'ERaM figurant sur le tableau [C.II.1.a-1] ci-dessous.

Le plus intéressant à noter est que le remplacement de sigma (modèle A) par son estimateur (modèle B), en plus de rendre l'estimation nettement plus rapide à calculer, donne un meilleur ajustement. Nous verrons ultérieurement que cela se confirme également sur la série-test. Numériquement, ce changement fait passer l'ERaM (modèle A) de 5.78 % à (modèle B) 2.59 % soit une diminution de 55.2 % de l'erreur relative (en valeur absolue) moyenne, soit une qualité d'ajustement 2 fois supérieure.



A cet effet, nous pouvons voir et comparer graphiquement l'ajustement des modèles A et B (figure [C.II.1.a-1] ci-dessous).

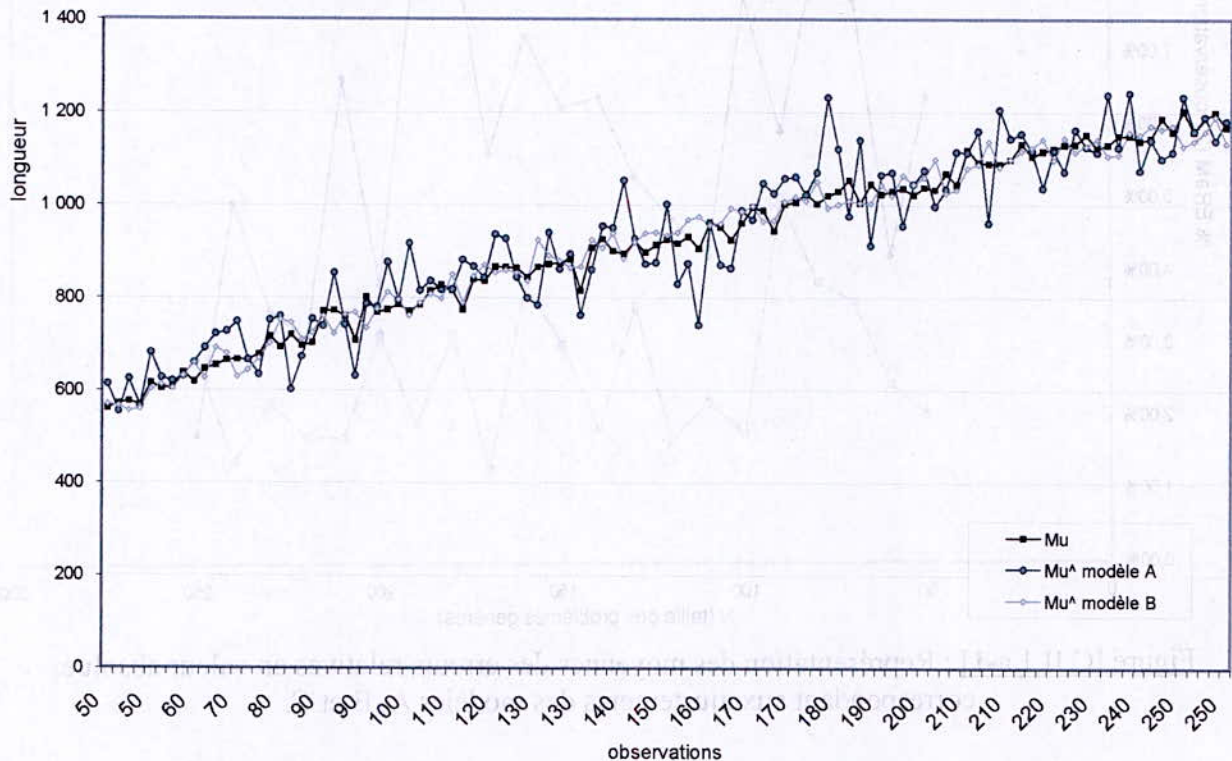


Figure [C.II.1.a-1] : Comparaison des modèles A et B à la série d'ajustement.

### C.II.1.b. Les Analyse résiduelle de validation (sur la même plage de variation)

Nous allons quantifier la qualité de représentation de chacun des modèles présentés, cela en analysant en particulier les résidus (relatifs) de ces estimateurs sur une série de problèmes générés aléatoirement. Cette série d'ajustement est caractérisée par :

- des tailles de problèmes variant de 50 à 250 par pas de 10 (ie. la même plage de taille que celle de l'ajustement) ;
- la génération, pour chacune des tailles, de 20 problèmes (STSP euclidiens aléatoires).

Nous pouvons synthétiser les résultats dans le tableau [C.II.1.b-1] qui suit.



Tableau [C.II.1.b-1] : Résidus relatifs moyens des modèles A, B, C et HKstat sur la série de validation.

N				Modèle A		Modèle B		Modèle C		Modèle HK statistique	
	mean20 m	mean20 s	mean20 mu	mean20 ERaM	stdev20 ERaM	mean20 ERaM	stdev20 ERaM	mean20 ERaM	stdev20 ERaM	mean20 ERaM	stdev20 ERaM
50	2602,5746	148,5041	576,9000	4,55%	3,70%	3,24%	2,42%	2,99%	1,79%	2,73%	2,66%
60	3147,1344	164,9826	623,2500	5,41%	3,49%	3,61%	3,03%	2,70%	2,16%	3,11%	1,92%
70	3642,0130	177,6737	665,0000	4,35%	4,29%	3,57%	2,47%	2,63%	2,46%	2,99%	2,22%
80	4179,9212	191,4647	703,7000	6,24%	4,42%	3,36%	2,39%	2,64%	2,43%	3,09%	1,88%
90	4694,8542	202,6730	748,0000	6,38%	4,02%	2,98%	2,44%	2,40%	1,26%	2,95%	1,10%
100	5207,7915	214,0594	773,1000	7,21%	4,43%	3,69%	2,53%	2,41%	2,24%	2,52%	1,94%
110	5715,1687	224,5250	815,5000	3,86%	3,66%	3,70%	2,39%	2,50%	2,24%	2,78%	2,15%
120	6228,7251	233,6871	850,9500	5,47%	4,12%	3,35%	2,04%	2,12%	2,04%	2,35%	2,12%
130	6738,9545	245,1487	866,4500	7,64%	7,86%	3,12%	2,01%	2,14%	1,66%	2,02%	1,63%
140	7281,0638	254,2381	911,4000	7,73%	6,75%	2,49%	2,37%	2,77%	1,94%	2,93%	1,98%
150	7729,1954	260,2398	931,1000	7,69%	5,09%	2,33%	1,31%	1,57%	1,12%	1,68%	1,06%
160	8094,0474	264,5310	940,5000	8,73%	6,39%	2,67%	1,70%	2,76%	1,82%	2,66%	1,78%
170	8834,9613	280,4738	989,9500	6,35%	6,10%	2,01%	1,24%	1,38%	1,04%	1,47%	1,06%
180	9208,8823	284,3436	1001,6000	8,92%	8,63%	3,18%	2,13%	2,61%	2,30%	2,55%	2,30%
190	9780,6179	294,3790	1032,1500	7,38%	7,23%	1,91%	1,35%	1,57%	1,28%	1,54%	1,24%
200	10401,6514	305,2878	1066,5000	7,79%	5,69%	2,11%	1,68%	1,73%	1,31%	1,77%	1,30%
210	10928,2862	312,9236	1083,9000	7,24%	5,40%	2,19%	1,76%	1,58%	1,03%	1,51%	1,00%
220	11459,4294	321,2216	1113,2500	6,79%	6,51%	2,24%	1,39%	1,79%	1,21%	1,78%	1,20%
230	11999,6279	328,3722	1137,6500	8,04%	5,84%	1,65%	1,31%	1,28%	0,89%	1,30%	0,91%
240	12456,9256	333,7479	1157,7000	8,11%	6,54%	1,92%	1,65%	1,17%	0,83%	1,16%	0,84%
250	12998,1036	340,8935	1191,2500	7,03%	5,15%	2,65%	1,56%	1,98%	0,96%	2,06%	0,94%
	moyenne			<b>6,81%</b>	<b>5,49%</b>	<b>2,76%</b>	<b>1,96%</b>	<b>2,13%</b>	<b>1,62%</b>	<b>2,24%</b>	<b>1,58%</b>
	écart-type			<b>1,41%</b>	<b>1,45%</b>	<b>0,67%</b>	<b>0,51%</b>	<b>0,56%</b>	<b>0,56%</b>	<b>0,65%</b>	<b>0,55%</b>

correl avec N
<b>99,98%</b>

corrélation à N	corrélation à N	corrélation à N	corrélation à N	corrélation à N	corrélation à N	corrélation à N	corrélation à N
<b>64,86%</b>	<b>59,68%</b>	<b>-80,42%</b>	<b>-81,45%</b>	<b>-75,61%</b>	<b>-74,54%</b>	<b>-80,81%</b>	<b>-73,55%</b>

corrél : mean20 et stdev20 ERaM	corrél : mean20 et stdev20 ERaM	corrél : mean20 et stdev20 ERaM	corrél : mean20 et stdev20 ERaM
<b>77,17%</b>	<b>85,50%</b>	<b>82,73%</b>	<b>76,15%</b>



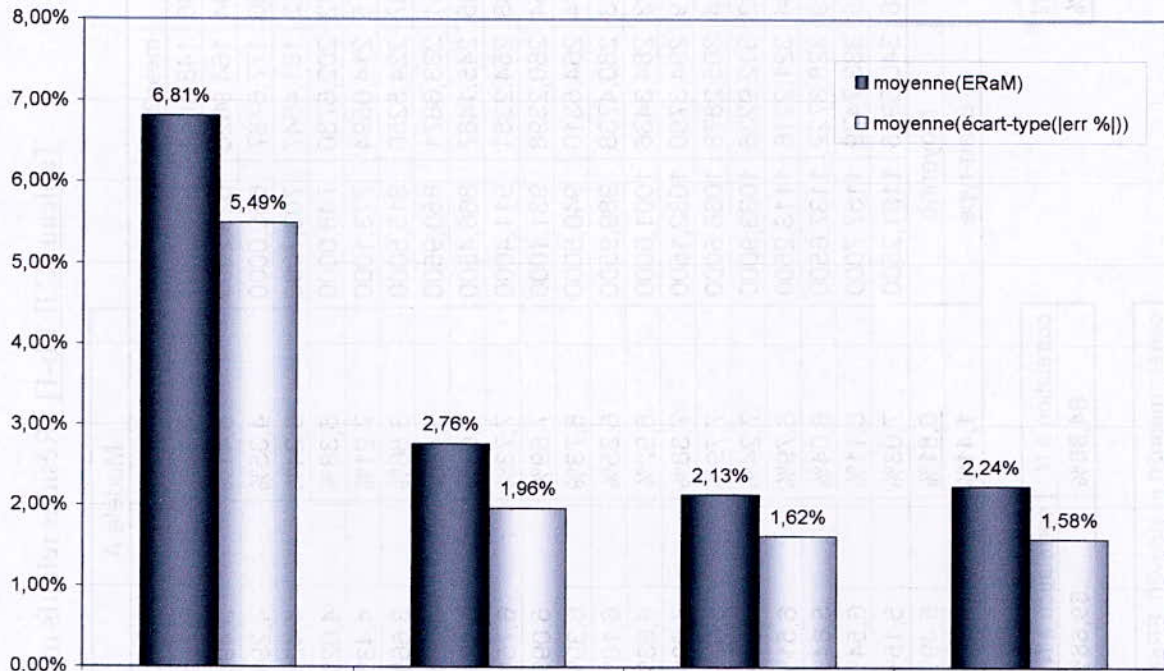


Figure [C.II.1.b-1] : Résumé (en moyenne) des résultats donnés par les modèle A, B, C et HKstat (de gauche à droite) sur la série de validation.

La validation confirme le classement suivant des modèles, dans un ordre décroissant du bi-critère « précision moyenne de l'estimation – dispersion résiduelle » : le modèle C, le modèle B, le modèle A. La précision est quantifiée par la moyenne des ERaM, alors que la dispersion résiduelle est quantifiée par la moyenne des écarts-types des erreurs relatives en valeur absolue pour les 20 observations de chaque N. Voir figure [C.II.1.b-1].

Graphiquement (figure [C.II.1.b-2] ci-dessous) et pour les modèles B et C, nous remarquons que la distribution des moyennes (sur 20 observations) des ERaM ainsi que celle des écarts-types des ERaM semblent être corrélées (inversement) à la taille du problème, du fait de la légère décroissance tendancielle apparente en fonction de N. Nous pouvons confirmer ce constat *a priori*, en calculant le coefficient de corrélation entre chacune de ces deux variables et N (de l'ordre des -80 %),(voir bas du tableau [C.II.1.b-1]).

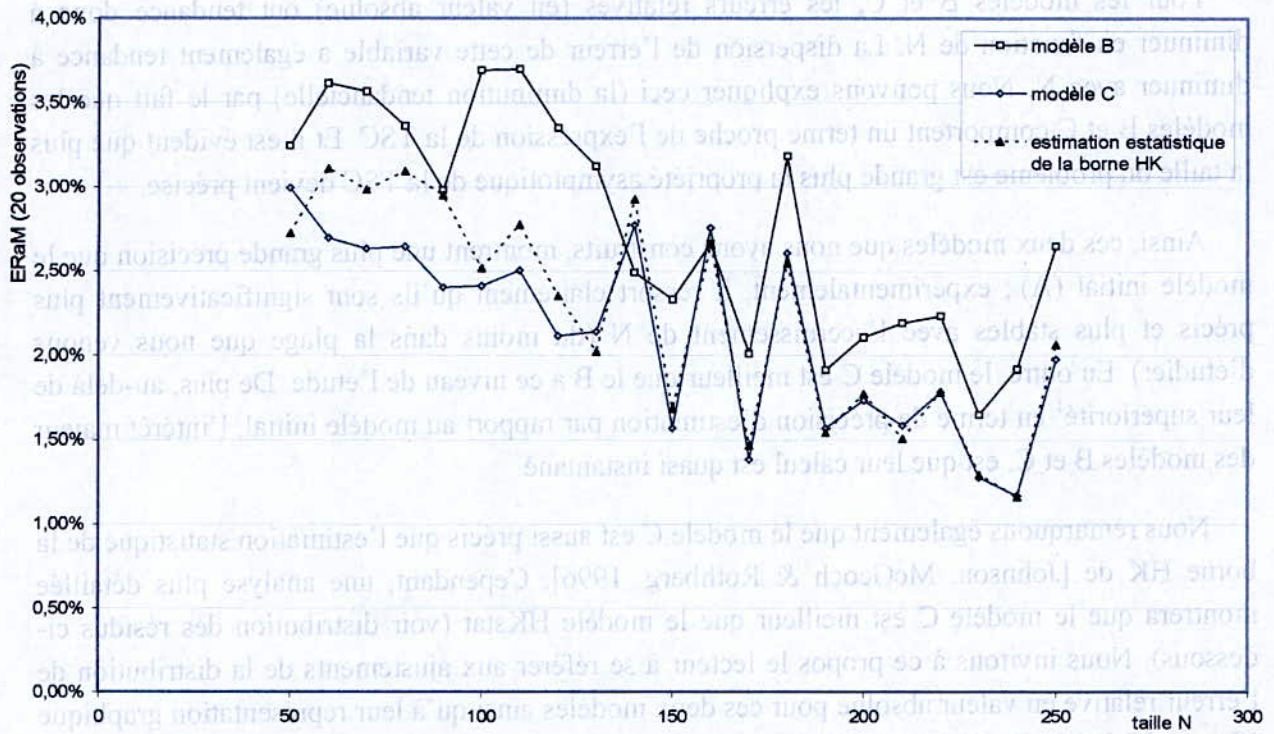


Figure [C.II.1.b-2] : Moyenne, calculée pour 20 observations à N constant, de la valeur absolue de l'erreur relative moyenne pour les différentes tailles de la série de validation.

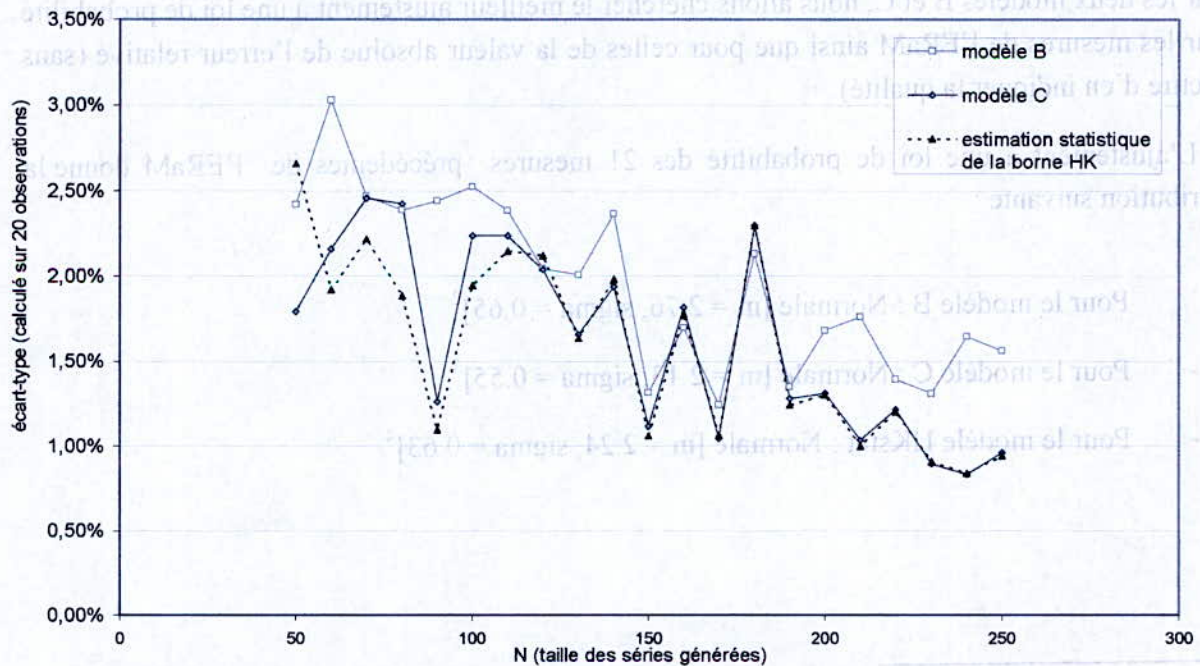


Figure [C.II.1.b-3] : Écart-type, calculé sur 20 observations à N constant, de l'erreur relative en valeur absolue pour les différentes tailles de la série de validation.



Pour les modèles B et C, les erreurs relatives (en valeur absolue) ont tendance donc à diminuer en fonction de N. La dispersion de l'erreur de cette variable a également tendance à diminuer avec N. Nous pouvons expliquer ceci (la diminution tendancielle) par le fait que les modèles B et C comportent un terme proche de l'expression de la TSC. Et il est évident que plus la taille du problème est grande plus la propriété asymptotique de la TSC devient précise.

Ainsi, ces deux modèles que nous avons construits, montrent une plus grande précision que le modèle initial (A) ; expérimentalement, il ressort clairement qu'ils sont significativement plus précis et plus stables avec l'accroissement de N (du moins dans la plage que nous venons d'étudier). En outre, le modèle C est meilleur que le B à ce niveau de l'étude. De plus, au-delà de leur supériorité<sup>1</sup> en terme de précision d'estimation par rapport au modèle initial, l'intérêt majeur des modèles B et C, est que leur calcul est quasi instantané.

Nous remarquons également que le modèle C est aussi précis que l'estimation statistique de la borne HK de [Johnson, McGeoch & Rothberg, 1996]. Cependant, une analyse plus détaillée montrera que le modèle C est meilleur que le modèle HKstat (voir distribution des résidus ci-dessous). Nous invitons à ce propos le lecteur à se référer aux ajustements de la distribution de l'erreur relative en valeur absolue pour ces deux modèles ainsi qu'à leur représentation graphique (figures [C.II.1.b-4] et [C.II.1.b-5] ).

Malgré le constat d'une décroissance de l'ERaM par rapport à N – qui reste toutefois faible – pour les deux modèles B et C, nous allons chercher le meilleur ajustement à une loi de probabilité pour les mesures de l'ERaM ainsi que pour celles de la valeur absolue de l'erreur relative (sans omettre d'en indiquer la qualité).

L'ajustement à une loi de probabilité des 21 mesures précédentes de l'ERaM donne la distribution suivante :

- Pour le modèle B : Normale [ $m = 2.76$ ,  $\sigma = 0.65$ ]<sup>2</sup>
- Pour le modèle C : Normale [ $m = 2.13$ ,  $\sigma = 0.55$ ]<sup>3</sup>
- Pour le modèle HKstat : Normale [ $m = 2.24$ ,  $\sigma = 0.63$ ]<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Nous rappelons que cette supériorité est restreinte pour le moment aux problèmes de type STSP euclidien aléatoires

<sup>2</sup> La statistique du test du Khi-2 vaut 3.19 ; la statistique du test de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.149

<sup>3</sup> La statistique du test du Khi-2 vaut 4.07 ; la statistique du test de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.163

<sup>4</sup> La statistique du test du Khi-2 vaut 2.89 ; la statistique du test de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.148



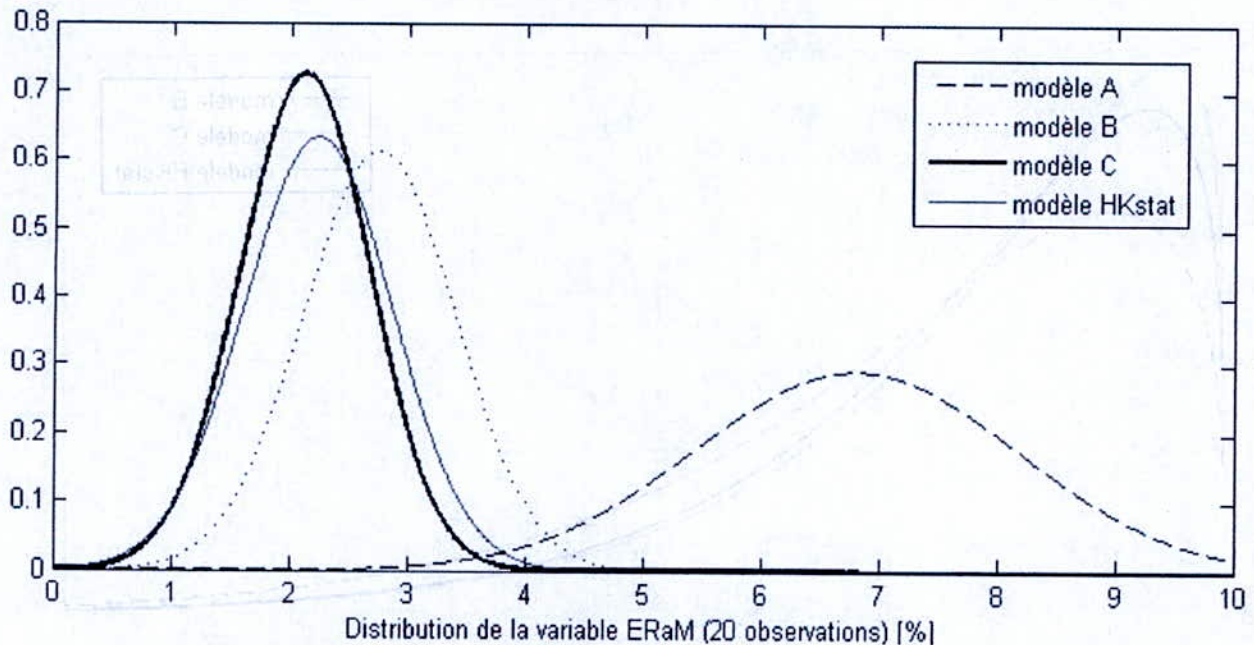


Figure [C.II.1.b-4] : Distribution ajustée de la moyenne de l'erreur relative en valeur absolue correspondant aux modèles A, B, C et HKstat

Par ailleurs, l'ajustement à une loi de probabilité de l'ensemble des 20\*21 mesures de la valeur absolue de l'erreur relative donne la distribution suivante :

- Pour le modèle B : Weibull  $[a = 0.242, b = 1.30, c = 0]^1$
- Pour le modèle C : Weibull  $[a = 0.384, b = 1.18, c = 0]^2$
- Pour le modèle HKstat : Weibull  $[a = 0.340, b = 1.24, c = 0]^3$

(a,b,c étant respectivement les paramètres d'échelle, de forme et de position)

Il est à noter que la qualité d'ajustement pour la distribution de la variable erreur relative en valeur absolue est nettement plus fine que celle de la variable ERaM (voir les paramètres en bas de page). De plus, cette première variable (l'erreur relative en valeur absolue) est plus significative pour juger la précision des modèles.

<sup>1</sup> La statistique du test du Khi-2 vaut 11.00 ; la statistique du test de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.0326

<sup>2</sup> La statistique du test du Khi-2 vaut 4.49 ; la statistique du test de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.0312

<sup>3</sup> La statistique du test du Khi-2 vaut 12.6 ; la statistique du test de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.0245



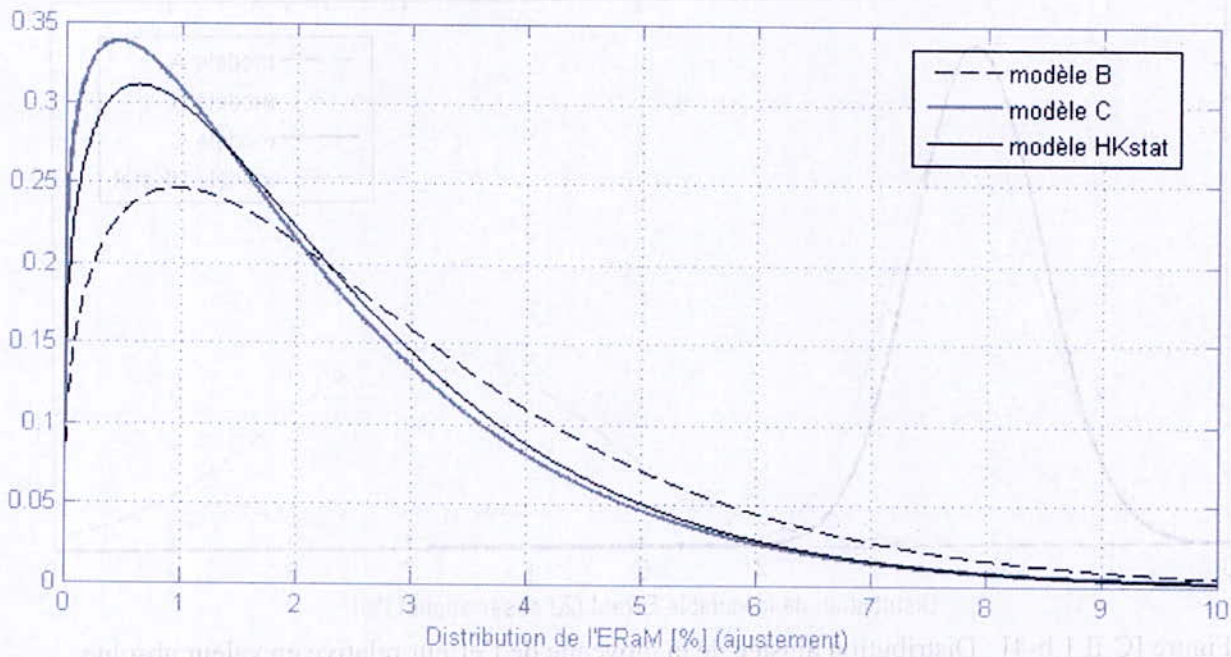


Figure [C.II.1.b-5] : Distribution (par ajustement) de l'erreur relative en valeur absolue (ERVA) correspondant à chacun des modèles B, C et HKstat.

Les ajustements ci-dessus (et leur représentation graphique sur les figures [C.II.1.b-4] et [C.II.1.b-5] ci-dessus), confirment bien la supériorité (certes minime) du modèle C – que nous avons construit – par rapport au modèle HKstat de [Johnson, McGeoch & Rothberg, 1996]. En effet, en ce qui concerne la distribution normale, la moyenne et l'écart-type de l'ajustement relatif au modèle C sont meilleurs (valeur inférieure) que ceux du modèle HKstat. Plus encore, en ce qui concerne la distribution des erreurs relatives en valeur absolue – dont nous avons notamment précisé la haute qualité de l'ajustement –, les paramètres d'échelle et de forme relatifs au modèle C sont également meilleurs (valeur inférieure) que ceux du modèle HKstat (le paramètre de position étant le même ; il vaut 0).

### Conclusion

A partir des constats et conclusions de C.II.1, nous avons développé deux variantes de modèles d'estimation statistiques de la longueur de la solution optimale du STSP euclidien aléatoire. L'intérêt premier de ces dernières réside dans la disparition du paramètre sigma (écart-type des longueurs de l'ensemble des tours hamiltoniens possibles). Ainsi, le temps de calcul des différents paramètres de ces deux modèles (dominé par le calcul de  $m$ ) devient négligeable le rendant en compétition avec l'estimateur statistique de la borne HK de [Johnson, McGeoch & Rothberg, 1996]. Par ailleurs, et contre toute attente, nous avons obtenu de meilleurs résultats par



rapport au modèle A. Mieux encore, l'analyse résiduelle et comparative sur la plage  $N : [50,250]$  a montré que le modèle C est de meilleure qualité (précision en moyenne et en dispersion) que le modèle HKstat (estimation statistique de la borne HK).

L'analyse résiduelle sur des problèmes tests étant effectuée, il nous faudrait à présent tester la qualité extrapolative de nos modèles. Le point suivant de cette étude s'intéressera donc à cela.

### C.II.1.c. Test et analyse résiduelle des modèles en extrapolation

Dans le but de tester si nos modèles sont aussi valides (à un seuil choisi) en extrapolation que dans l'intervalle de tailles de l'analyse précédente, et afin de quantifier leur comportement au-delà de la taille maximale de calage ( $N = 250$ ), nous allons effectuer une analyse résiduelle des différents modèles étudiés. Nous pourrions, en outre, comparer ceux-ci entre eux.

Pour cela, nous avons généré une série de problèmes-tests d'extrapolation. Celle-ci se caractérise par :

- des tailles  $N$  variant de 300 à 1000 telles que le pas entre deux tailles double à chaque fois ;
- une génération aléatoire de 5 problèmes pour chaque<sup>1</sup>  $N$ .

Les résultats obtenus figurent sur le tableau suivant [C.II.1.c-1].

Il faut noter que cette série qui va nous permettre d'analyser les résidus en extrapolation des 3 modèles introduits, va servir également de test non plus en extrapolation mais de validation du modèle HKstat. En effet, alors que nos 3 modèles ont été construits par un ajustement sur une plage de variation de  $N$  comprise entre 50 et 250, le modèle HKstat à quant à lui, été construit par [Johnson, McGeoch & Rothberg, 1996] par un ajustement sur une plage nettement plus étendue (jusqu'à  $N = 10\ 000$ ).

N	Modèle A		Modèle B		Modèle C		HKstat	
	Moy	Var	Moy	Var	Moy	Var	Moy	Var
300	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
450	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
675	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1012	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1518	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2277	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3415	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5122	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7683	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
11524	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17286	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
26169	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
39253	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
58880	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
88320	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
132480	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
198720	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
298080	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
447120	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
670720	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1006080	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

<sup>1</sup> A l'exception de  $N=1000$ , où pour des contraintes temporelles, nous avons généré 3 problèmes.



Tableau [C.II.1.c-1] : Résidus relatifs correspondant aux modèles A,B,C et HKstat, pour la série d'extrapolation

N	m	sigma	Mu	modèle A			modèle B			modèle C			modèle HKstat			
				err %	err %	ERaM	err %	err %	ERaM	err %	err %	ERaM	err %	err %	ERaM N	
300	15487,85	367,80	1295	10,30%	10,30%	8,76%	-3,76%	3,76%	3,41%	-0,26%	0,26%	0,87%	-0,76%	0,76%	1,11%	
	15675,13	370,70	1292	16,47%	16,47%		-2,59%	2,59%		0,04%	0,04%		-0,53%	0,53%		
	15554,75	369,03	1308	10,71%	10,71%		-4,38%	4,38%		-1,23%	1,23%		-1,74%	1,74%		
	15395,87	368,02	1317	0,82%	0,82%		-5,82%	5,82%		-1,96%	1,96%		-2,42%	2,42%		
	16168,29	391,22	1284	-5,49%	5,49%		0,52%	0,52%		0,86%	0,86%		0,09%	0,09%		
400	20501,86	424,92	1473	3,07%	3,07%	6,15%	-6,30%	6,30%	5,70%	0,04%	0,04%	1,14%	0,08%	0,08%	1,16%	
	20910,94	436,19	1498	-4,94%	4,94%		-6,40%	6,40%		-1,50%	1,50%		-1,59%	1,59%		
	20490,74	422,03	1481	10,47%	10,47%		-6,85%	6,85%		-0,50%	0,50%		-0,46%	0,46%		
	20923,36	438,79	1444	-8,60%	8,60%		-2,85%	2,85%		2,19%	2,19%		2,09%	2,09%		
	20997,41	437,69	1498	-3,65%	3,65%		-6,09%	6,09%		-1,47%	1,47%		-1,59%	1,59%		
600	31371,04	537,03	1776	-11,68%	11,68%	7,58%	-9,39%	9,39%	11,45%	0,62%	0,62%	1,05%	0,87%	0,87%	1,12%	
	31141,72	528,54	1840	-1,63%	1,63%		-13,04%	13,04%		-2,93%	2,93%		-2,64%	2,64%		
	31196,83	525,90	1815	10,83%	10,83%		-11,72%	11,72%		-1,58%	1,58%		-1,30%	1,30%		
	30997,89	523,65	1787	8,45%	8,45%		-10,79%	10,79%		-0,09%	0,09%		0,25%	0,25%		
	30209,81	510,55	1782	5,31%	5,31%		-12,32%	12,32%		0,00%	0,00%		0,53%	0,53%		
1000	51782,62	680,34	2281	3,19%	3,19%	4,31%	-19,38%	19,38%	18,38%	0,43%	0,43%	1,28%	0,62%	0,62%	1,42%	
	51666,40	678,87	2247	4,35%	4,35%		-18,30%	18,30%		1,93%	1,93%		2,14%	2,14%		
	52795,58	697,24	2261	-5,39%	5,39%		-17,46%	17,46%		1,49%	1,49%		1,51%	1,51%		
				moyenne	2,37%	<b>6,97%</b>		-8,72%	<b>8,77%</b>		-0,22%	<b>1,06%</b>		-0,27%	<b>1,18%</b>	
				écart-type	7,92%	<b>4,16%</b>		5,73%	<b>5,64%</b>		1,38%	<b>0,87%</b>		1,44%	<b>0,82%</b>	



Il ressort de ces calculs et de leur représentation graphique, les remarques suivantes :

- En moyenne, la précision du modèle A reste approximativement du même niveau avec une ERaM de 6.97 % (contre 6.81 % sur la série du test de validation) ; alors que sa dispersion s'accroît sensiblement avec un écart-type de la variable « valeur absolue de l'erreur relative » qui vaut 4,16 % (contre 1.37 % sur la série du test de validation). En outre, le modèle A a tendance à surestimer la longueur de la solution optimale car l'ERM vaut 2.37 %.
- Le modèle B, malgré une moindre dispersion des résidus de l'estimation de sigma (dont l'ERaM est de 0.86%) se dégrade sensiblement. En effet, sa précision moyenne passe à une ERaM de 8,77 % et sa dispersion s'élargit à un écart-type des erreurs relatives en valeur absolue de 5.64 % (contre, respectivement, 2.76 % et 130 % sur la série de validation). De plus, ce modèle a une nette tendance à sous-estimer la solution optimale. Effectivement, son ERM vaut -8.72 % ; de plus, sur les 18 observations effectuées, 17 sont sous-estimées par le modèle B. Enfin, ce modèle montre « déjà » une nette tendance à la divergence caractérisée par l'accroissement des résidus relatifs (voir figure [C.II.1.c-1]). Cela est sûrement dû au cumul de l'approximation des 2 paramètres de l'ajustement du modèle A et des 2 paramètres de l'ajustement du modèle d'estimation de sigma.
- Le modèle C confirme une bonne dispersion résiduelle, améliore sa précision ainsi que sa dispersion. Implicitement, il garde sa supériorité qualitative. En effet, l'ERaM et la dispersion de l'erreur relative en valeur absolue, sur cette série de test d'extrapolation, sont réduits, passant respectivement à 1.06 % et 0.87 % contre 2.13 % et 1.18 % sur la série de validation. Sur les quatre modèles analysés, le modèle C donne la meilleure moyenne et quasiment la meilleure dispersion des résidus relatifs.
- Le modèle HKstat confirme sa caractéristique principale qui est l'amélioration de sa précision avec l'augmentation de N. Il passe d'ailleurs sur cette série d'une ERaM et un écart-type résiduel respectivement de 1.18 et 0.82 %, contre 2.24 % et 1.24 % sur la série de validation.

La figure [C.II.1.c-1] ci-dessous montre l'évolution de l'ERaM calculée sur 5 observations<sup>1</sup> en fonction de N (série de test d'extrapolation). On y observe clairement la nette croissance de l'ERaM du modèle B en fonction de N, confirmant sa divergence asymptotique avant les autres modèles. Les modèles C et HKstat montrent quant à eux une dispersion inférieure de l'ERaM par rapport à N.

<sup>1</sup> Sauf pour N = 1000 où, pour cause de limitation temporelle, seul 3 observations ont été effectuées.



Etant donnée la dispersion résiduelle réduite et régulière par rapport à N des modèles C et HKstat sur cette série, nous pouvons ajuster la distribution de la variable « l'erreur relative en valeur absolue » à une loi de probabilité pour les 18 observations dont nous disposons.

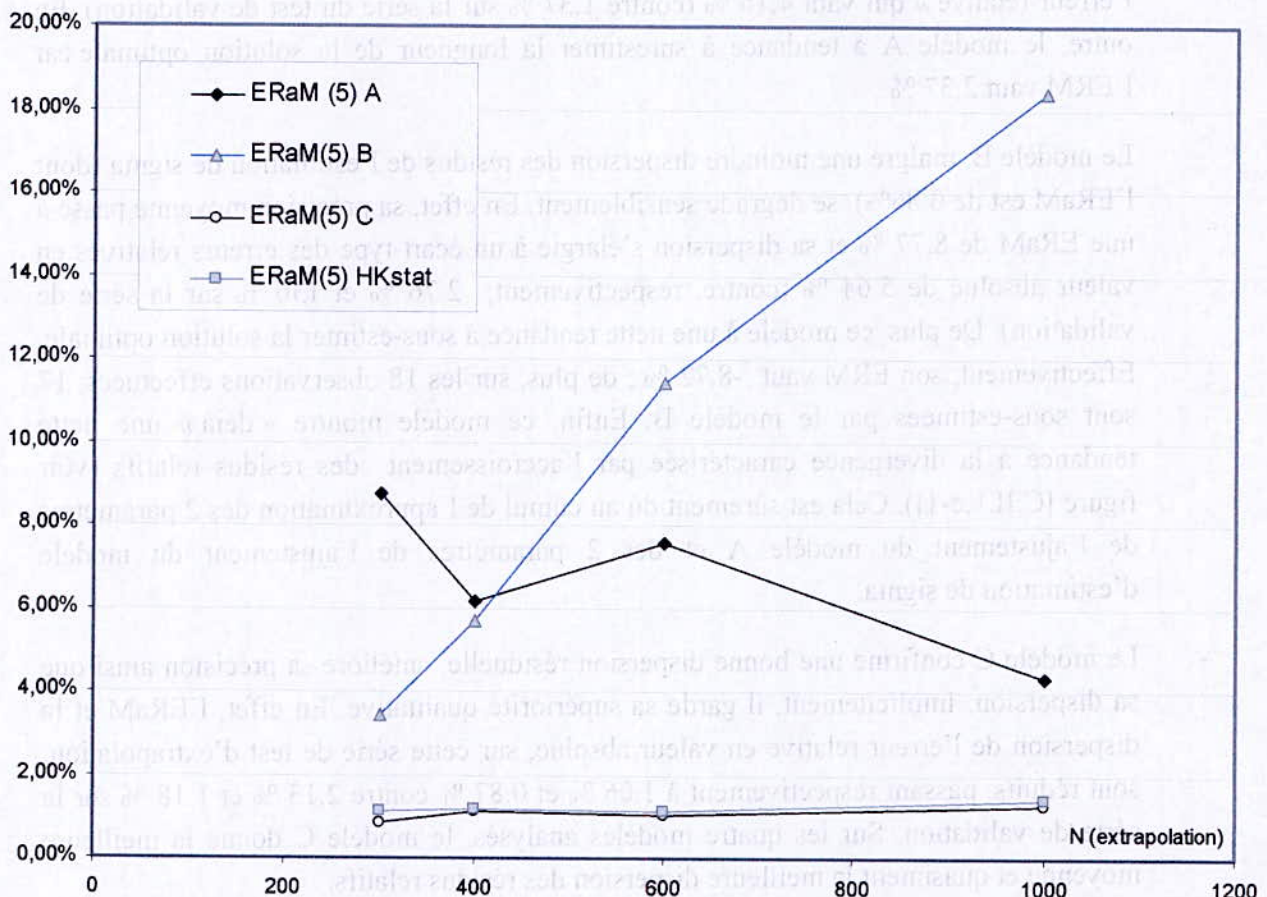


Figure [C.II.1.c-1] : ERaM pour différentes tailles correspondants aux modèles A, B, C et HKstat sur la série d'extrapolation

Nous obtenons donc les ajustements suivants :

- Pour le modèle C : Weibull<sup>1</sup> [a = 0.974, b = 0.91, c = 0].
- Pour le modèle HKstat : Weibull<sup>2</sup> [a = 0.713, b = 1.37, c = 0].

<sup>1</sup> La statistique du test de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.195

<sup>2</sup> La statistique du test de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.159



La figure [C.II.1.c-2] ci-dessous illustre graphiquement ces distributions (fonction de densité de probabilité).

On note  $|ER|$  l'erreur relative en valeur absolue.

$PrMc = Pr [ |ER| < Xc ]$  représente la probabilité que  $|ER|$  soit inférieure à  $Xc$  pour le modèle C.

$PrMhk = Pr [ |ER| < Xhk ]$  représente la probabilité que  $|ER|$  soit inférieure à  $Xhk$  pour le modèle HKstat.

La figure [C.II.1.c-2] des distributions cumulées montre, pour une même  $PrM = PrMc = PrMhk$ , que :

- Si  $PrM \leq 0.835$ , alors  $Xc < Xhk$
- A  $PrM = 0.835$ ,  $Xc = Xhk = 1.97 [ \% ]$
- Si  $PrM > 0.835$ , alors  $Xc > Xhk$ .

Mais comme l'intervalle de confiance d'une variable aléatoire est souvent estimé à un niveau de confiance supérieur à 83.5 %, alors la limite supérieure de cet intervalle pour modèle HKstat est meilleure (inférieure) à celle du modèle C. Ainsi, l'ajustement aux distributions précédentes implique pragmatiquement que le modèle HKstat est meilleur que le modèle C.

Cependant, la qualité médiocre de ces ajustements (voir test de Kolmogorov-Smirnov) ne nous permet pas de tirer rigoureusement de telles conclusions.



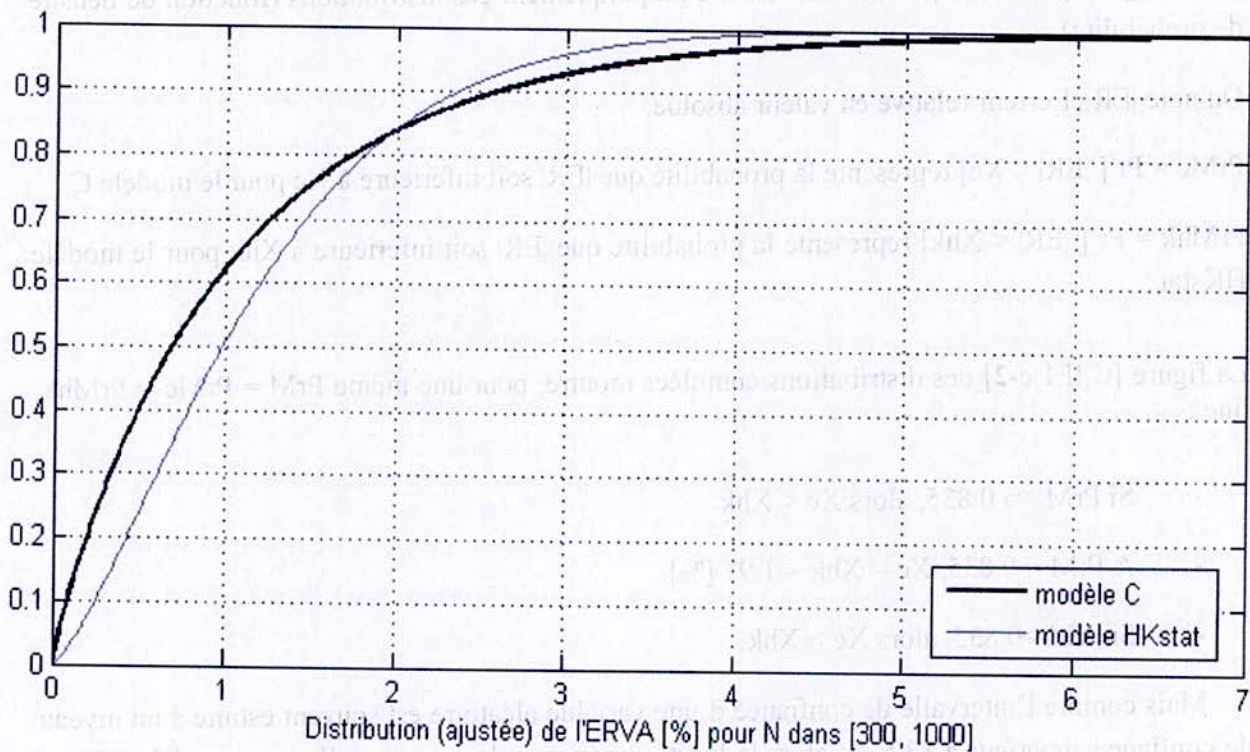


Figure [C.II.1.c-2] : Distribution de l'ERVA pour les modèles C et HKstat

Conclusion :

L'étude extrapolative nous a permis de montrer que, par rapport à la série de validation :

- le modèle A a tendance à surestimer la solution optimale ; il préserve certes sa précision moyenne, mais sa dispersion s'accroît excessivement.
- le modèle B a tendance à sous-estimer la solution optimale ; il diverge (prématurément par rapport aux autres modèles) ;
- les modèles C et HK sont plus précis sur cette plage de N.

Enfin, en ce qui concerne la précision des modèles C et HKstat, les résultats obtenus – certes calculés sur un nombre d'observations pas assez suffisant pour nous permettre de trancher rigoureusement – nous permettent pour le moins d'affirmer que ces deux modèles sont approximativement équivalents pour N variant de 300 à 1000.



**C.II.1.d. Comportement asymptotique**

A présent, nous allons essayer de caractériser le comportement asymptotique de chacun des modèles introduits.

Tout d'abord, nous savons que le modèle HKstat converge asymptotiquement car le passage à la limite de son expression divisée par la racine de N, lorsque N tend vers l'infini, donne la TSC. De plus, cette convergence traduit une amélioration de la précision plus N devient grand, et c'est là tout l'intérêt de ce modèle.

Soit, le graphe généré par une distribution aléatoire de N points sur le carré D\*D. On montre que la moyenne des distances entre ces points est sensiblement inférieure à D/4. C'est-à-dire que

$$1/(N*(N-1))\sum\sum C_{ij} \text{ (i différent j)} > D/4$$

Ce qui implique que  $m = 1/(N-1) \sum\sum C_{ij} > N*D/4$ .

Donc  $m/\text{racine}(N) > \text{racine}(N)*D/4$ .

Pour montrer qu'un modèle ne diverge pas asymptotiquement, nous devons montrer que la limite :

$\mu^{\wedge} / \sqrt{N}$  tend vers une constante (en l'occurrence la TSC si le modèle converge convenablement) lorsque  $N \rightarrow$  l'infini.

Or, pour le modèle C :

$$\begin{aligned} \mu^{\wedge} / \sqrt{N} &= |a| m/\sqrt{N} + |b|m/N + |c| + |d|/\sqrt{N} \\ &> |a| \sqrt{N*D/4} + |b|m/N + |c| + |d|/\sqrt{N} \text{ qui diverge} \end{aligned}$$

Donc le modèle C diverge

Le modèle B étant de même nature (même paramètre de forme), il diverge donc lui aussi.

Si le modèle d'estimation de sigma par m et N est convergent ou stable asymptotiquement, alors le modèle A serait lui aussi divergent. Cependant, comme cette première condition n'est pas vérifiée, alors nous ne pouvons rien conclure à ce niveau quant à la convergence du modèle A.

Conclusion :

Asymptotiquement, le modèle C étant divergent asymptotiquement et le modèle HKstat étant convergent et asymptotiquement de plus en plus précis, il est évident qu'il faudrait donc recourir au modèle HKstat pour des problèmes de taille importante. Par précaution, il faudrait le faire pour  $N > 1000$  car la précision que nous connaissons du modèle C est limitée dans notre étude à  $N = 1000$ .



### C.II.2. Etude du modèle hybride C-HKstat

L'analyse des modèles construits et leur comparaison avec le modèle HKstat a fait ressortir que le meilleur modèle introduit est le modèle C ; que ce dernier est, sur la plage  $N : 50-250$ , « légèrement » meilleur que HKstat mais qu'il diverge asymptotiquement. A l'inverse, le modèle HKstat se comporte d'une manière satisfaisante pour des  $N$  « petits » (variant de 50 à 1000) mais montre une précision importante qui augmente avec  $N$ . On peut supposer également que les deux modèles n'estiment pas toujours la solution optimale avec le même type<sup>1</sup> de biais.

En partant de cette conclusion, nous voulons tester l'idée d'un modèle hybride combinant le modèle C et le modèle HKstat. On se doit donc, d'après le comportement observé, de combiner les deux modèles de manière à ce que la pondération du modèle C décroît linéairement au profit du modèle HKstat en fonction de  $N$ . Le coefficient de pondération vaut 0.5 pour  $N = 50$  et devient nul pour le modèle C à partir de  $N = 1200$  (et au-delà). Nous décidons également de multiplier ce coefficient par un paramètre  $k$  dont nous déterminerons la valeur optimale sur la série test.

L'expression du modèle hybride s'écrit alors de la manière suivante :

$$\mu^{\text{[modèle C-HKstat]}} = C * \mu^{\text{[modèle C]}} + (1 - C) * \mu^{\text{[modèle HKstat]}}$$

avec :  $C = k * (-0.000435 * N + 0.522)$

$N$  dans  $[50, 1200]$

$k$  paramètre multiplicatif compris dans  $[0.4, 2.0]$

A partir de  $N = 1200$ , nous revenons au modèle HKstat seul.

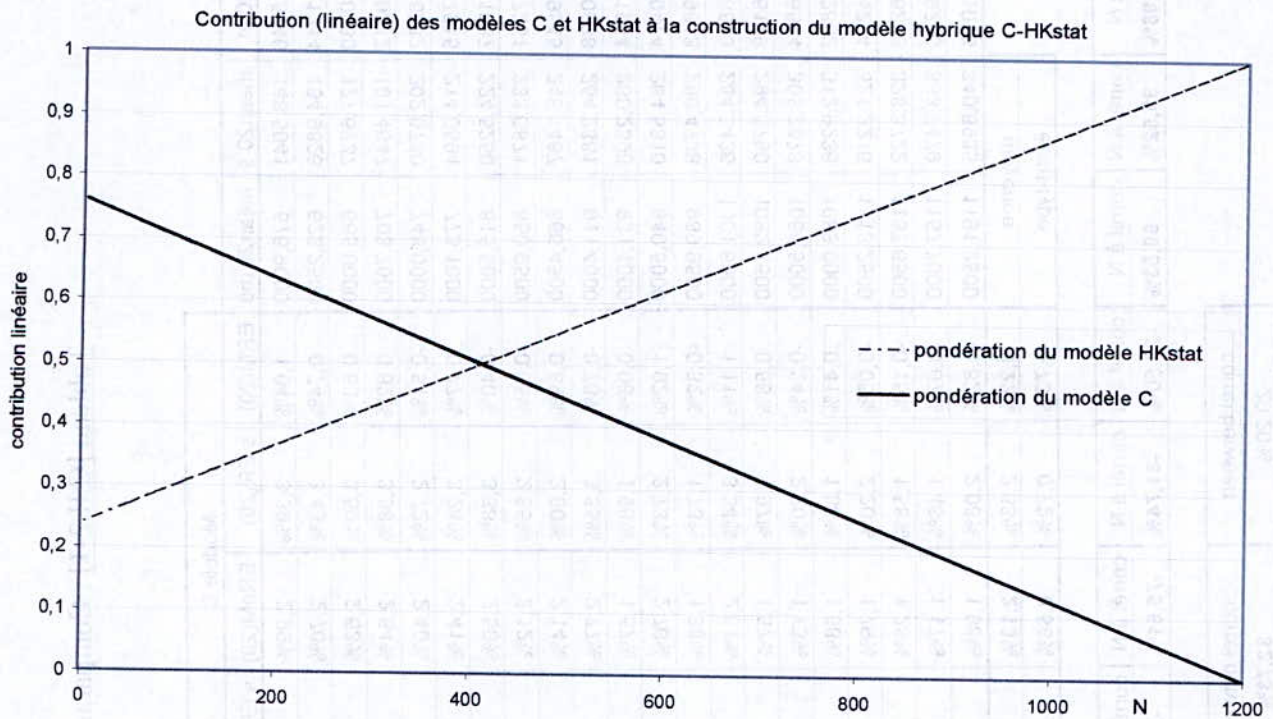
La détermination de la meilleure valeur de  $k$  donne :  $k = 1.46$

Cette valeur implique que la pondération optimale des modèles C et HKstat représentée dans la figure [C.II.2-1]

Nous aurions également voulu tester un modèle hybride C-HKstat mais dont la contribution ne serait pas linéaire (infléchiée). Ce point représente donc une perspective éventuelle.

<sup>1</sup> on veut dire par « type de biais » un biais positif ou un biais négatif





**Figure [C.II.2-1] :** évolution des coefficients de pondération des modèles C et HKstat dans le modèle hybride

Le tableau [C.II.2-1] résume les résultats obtenus à l'issue de la validation du modèle C-HKstat et de sa comparaison avec les deux modèles qui le constituent à savoir le modèle C et le modèle HKstat.

Cette construction du modèle hybride induit de meilleurs résultats sur l'intervalle des tailles [50, 250].

En effet, le tableau ci-dessus montre que le modèle C-HK donne une ERaM (sur 21\*20 observations) égale à celle du meilleur modèle sur cette plage – à savoir le modèle C –. La dispersion de cette ERaM sur les 20 tailles testées est inférieure pour le modèle hybride à celle donnée par les deux autres modèles. Par ailleurs, l'ERM, sur les 20\*21 observations effectuées, garde une dispersion approximativement similaire aux modèles précédents mais sa valeur moyenne est meilleure : elle vaut 0.00. Ceci qui nous laisse présager que cet estimateur est sans biais.



Tableau [C.II.2-1] : Comparaison des résidus du modèle hybride avec les modèles C et HKstat

N				Modèle C				Modèle HK statistique				modèle hybride (k = 1,46)			
	mean20 m	mean20 s	mean20 mu	ERM(20)	s ER(20)	ERaM(20)	s ERa(20)	ERM(20)	s ER(20)	ERaM(20)	s ERa(20)	ERM(20)	s ER(20)	ERaM(20)	s ERa(20)
50	2602,5746	148,5041	576,9000	1,04%	3,39%	2,99%	1,79%	-1,89%	3,34%	2,73%	2,66%	0,25%	3,38%	2,73%	1,91%
60	3147,1344	164,9826	623,2500	0,74%	3,43%	2,70%	2,16%	-1,61%	3,34%	3,11%	1,92%	0,09%	3,40%	2,69%	1,99%
70	3642,0130	177,6737	665,0000	0,63%	3,59%	2,63%	2,46%	-1,24%	3,56%	2,99%	2,22%	0,10%	3,58%	2,67%	2,32%
80	4179,9212	191,4647	703,7000	0,62%	3,58%	2,64%	2,43%	-0,92%	3,57%	3,09%	1,88%	0,18%	3,58%	2,76%	2,20%
90	4694,8542	202,6730	748,0000	-0,51%	2,72%	2,40%	1,26%	-1,75%	2,67%	2,95%	1,10%	-0,87%	2,71%	2,54%	1,14%
100	5207,7915	214,0594	773,1000	0,77%	3,24%	2,41%	2,24%	-0,26%	3,22%	2,52%	1,94%	0,46%	3,23%	2,41%	2,14%
110	5715,1687	224,5250	815,5000	-0,40%	3,38%	2,50%	2,24%	-1,23%	3,34%	2,78%	2,15%	-0,66%	3,37%	2,56%	2,21%
120	6228,7251	233,6871	850,9500	-0,85%	2,85%	2,12%	2,04%	-1,53%	2,81%	2,35%	2,12%	-1,06%	2,83%	2,14%	2,10%
130	6738,9545	245,1487	866,4500	0,89%	2,60%	2,14%	1,66%	0,33%	2,62%	2,02%	1,63%	0,71%	2,60%	2,08%	1,65%
140	7281,0638	254,2381	911,4000	-0,78%	3,35%	2,77%	1,94%	-1,26%	3,36%	2,93%	1,98%	-0,94%	3,35%	2,82%	1,94%
150	7729,1954	260,2398	931,1000	0,06%	1,96%	1,57%	1,12%	-0,28%	2,00%	1,68%	1,06%	-0,05%	1,97%	1,61%	1,08%
160	8094,0474	264,5310	940,5000	1,92%	2,73%	2,76%	1,82%	1,75%	2,71%	2,66%	1,78%	1,86%	2,72%	2,72%	1,80%
170	8834,9613	280,4738	989,9500	-0,32%	1,73%	1,38%	1,04%	-0,60%	1,74%	1,47%	1,06%	-0,42%	1,73%	1,39%	1,07%
180	9208,8823	284,3436	1001,6000	1,11%	3,34%	2,61%	2,30%	0,97%	3,34%	2,55%	2,30%	1,06%	3,34%	2,58%	2,30%
190	9780,6179	294,3790	1032,1500	0,58%	1,97%	1,57%	1,28%	0,42%	1,96%	1,54%	1,24%	0,52%	1,96%	1,56%	1,26%
200	10401,6514	305,2878	1066,5000	-0,24%	2,20%	1,73%	1,31%	-0,44%	2,19%	1,77%	1,30%	-0,31%	2,19%	1,75%	1,30%
210	10928,2862	312,9236	1083,9000	0,41%	1,88%	1,58%	1,03%	0,22%	1,83%	1,51%	1,00%	0,34%	1,86%	1,55%	1,02%
220	11459,4294	321,2216	1113,2500	-0,06%	2,20%	1,79%	1,21%	-0,26%	2,17%	1,78%	1,20%	-0,14%	2,19%	1,78%	1,21%
230	11999,6279	328,3722	1137,6500	-0,15%	1,58%	1,28%	0,89%	-0,35%	1,57%	1,30%	0,91%	-0,23%	1,57%	1,28%	0,89%
240	12456,9256	333,7479	1157,7000	0,07%	1,46%	1,17%	0,83%	-0,10%	1,45%	1,16%	0,84%	0,00%	1,45%	1,16%	0,83%
250	12998,1036	340,8935	1191,2500	-0,82%	2,08%	1,98%	0,96%	-1,00%	2,08%	2,06%	0,94%	-0,89%	2,08%	2,01%	0,95%
	moyenne			<b>0,22%</b>	2,63%	<b>2,13%</b>	1,62%	<b>-0,53%</b>	2,61%	<b>2,24%</b>	1,58%	<b>0,00%</b>	2,62%	<b>2,13%</b>	1,59%
	écart-type			<b>0,73%</b>	0,72%	<b>0,56%</b>	0,56%	<b>0,94%</b>	0,71%	<b>0,65%</b>	0,55%	<b>0,71%</b>	0,72%	<b>0,56%</b>	0,53%

corrél à N	corrél à N	corrél à N	corrél à N	corrél à N	corrél à N	corrél à N	corrél à N	corrél à N	corrél à N	corrél à N	corrél à N	corrél à N	corrél à N	corrél à N
<b>99,98%</b>	<b>99,52%</b>	<b>99,53%</b>	-27,50%	<b>-81,74%</b>	<b>-75,61%</b>	<b>-74,54%</b>	52,08%	<b>-81,19%</b>	<b>-80,81%</b>	<b>-73,55%</b>	-2,15%	<b>-81,63%</b>	<b>-75,33%</b>	<b>-72,46%</b>

correl between	correl between	correl between	correl between	correl between
29,20%	<b>82,73%</b>	-34,00%	<b>76,15%</b>	9,50%
				<b>82,97%</b>



Il est à noter que l'écart-type des 21 ERM(20) ainsi que celui des 21 ERaM observées donne une appréciation de la fluctuation de l'erreur (par rapport à sa moyenne) entre différentes tailles N. Il ne faut pas les confondre avec l'écart-type de l'erreur relative et l'écart-type de l'erreur relative en valeur absolue qui eux donne une indication sur la dispersion des résidus relatifs de manière générale entre plusieurs observations et sur différentes tailles.

Le tableau [C.II.2-2] montre que le l'ERM du modèle hybride n'est quasiment pas corrélée à N (- 2,15 %) ; ce qui justifie encore plus l'ajustement relatif l'ER que nous effectuerons ultérieurement. Par contre, la dispersion de l'ER, pour une taille donnée, a tendance à décroître en fonction de N. La corrélation correspondante valant -81,63% le confirme cette constatation. Cela atteste une réduction de la dispersion des résidus qui caractérisent ce modèle.

En ce qui concerne les résidus relatifs calculés en valeur absolue, le tableau ci-dessus fait ressortir une décroissance notable de l'ERaM (calculées sur 20 observations pour chaque taille) en fonction de N, ainsi que celle de la dispersion de l'erreur relative en valeur absolue pour N donnée. Les coefficients de corrélation, correspondant respectivement à ces derniers, qui valent - 75.33 % et -72.46 % confirmant cela. Cette tendance légèrement décroissante de l'ERaM en fonction de N nous permet toutefois d'ajuster sans grande erreur, la distribution de l'erreur relative en valeur absolue à une loi de probabilité sur l'intervalle étudié.

De manière générale, les résidus des modèles comparés sont caractérisés par leurs paramètres de distribution, calculé sur 420 observations, et qui sont résumés dans le tableau suivant :

Tableau [C.II.2-2] : Résidus relatifs pour 420 observations

		<b>moyenne</b>	<b>écart-type</b>	minimum	maximum	EQM de l'ajustement
<b>modèle C</b>	erreur relative %	<b>0,224</b>	<b>2,75</b>	-7,3	9,86	0,00188
	erreur relative %	<b>2,13</b>	<b>1,76</b>	0,00	9,86	0,00651
<b>modèle Hkstat</b>	erreur relative %	<b>-0,526</b>	<b>2,79</b>	-8,52	8,63	0,00168
	erreur relative %	<b>2,24</b>	<b>1,75</b>	0,01	8,63	0,00205
<b>modèle C-HKstat</b>	erreur relative %	<b>0,000</b>	<b>2,74</b>	-7,43	9,30	0,00132
	erreur relative %	<b>2,13</b>	<b>1,72</b>	0,01	9,30	0,00125

Ce tableau nous permet de représenter et de comparer graphiquement les moyennes et les écarts-types des résidus relatifs (voir la figure [C.II.2-2] pour l'erreur relative et la figure [C.II.2-3] pour l'erreur relative en valeur absolue).



Le premier de ces deux graphiques montre que le modèle hybride est significativement sans biais ; en outre, la distribution de l'erreur relative est meilleure (meilleure moyenne et dispersion inférieure) que celle de chacun des deux modèles qui la composent.

En valeur absolue, la distribution des résidus du modèle C-HKstat donne, en moyenne, les mêmes erreurs que le meilleur des deux modèles qui la compose, à savoir le modèle C. D'un point de vue dispersion de cette erreur relative en valeur absolue, ce modèle hybride donne un écart-type légèrement inférieur aux modèles C et HKstat.

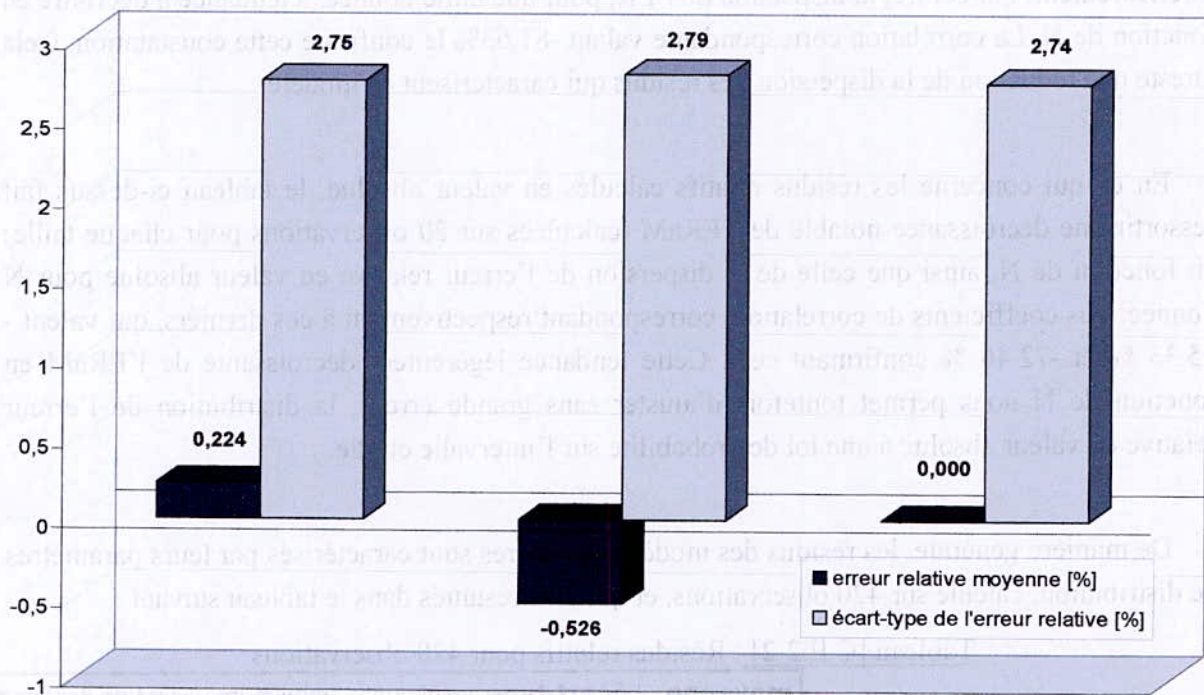


Figure [C.II.2-2] : Résidus relatifs pour les trois modèles C, HKstat et C-HKstat (de gauche à droite)



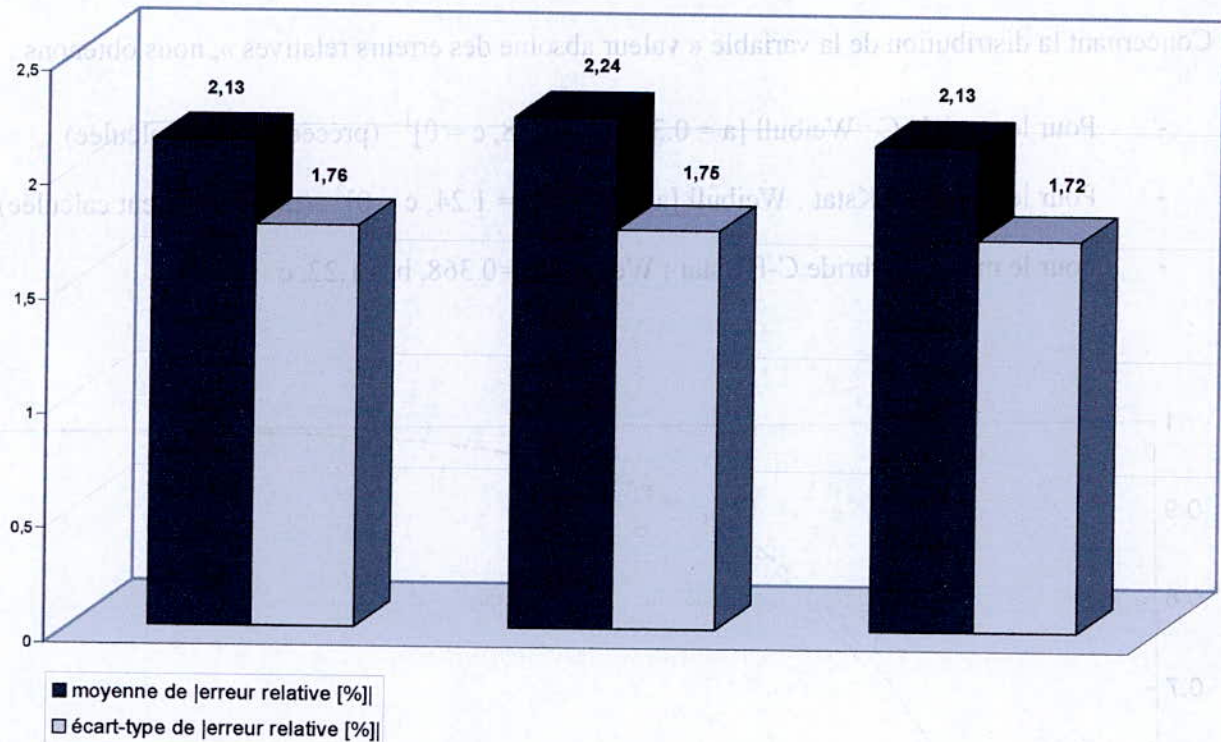


Figure [C.II.2-3] : Résidus relatifs en valeur absolue pour les trois modèles C, HKstat et C-HKstat (de gauche à droite)

A ce niveau de l'analyse, le modèle hybride C-HKstat est meilleur que les deux modèles qui le composent. Nous confirmerons cette supériorité qualitative du modèle hybride à la suite de l'analyse des distributions statistiques de résidus relatifs.

L'ajustement des distributions des erreurs relatives et des erreurs relatives en valeur absolue, correspondant à chacun des trois modèles précédent, aboutit aux lois suivantes :

Concernant la distribution des erreurs relatives, nous obtenons :

- Pour le modèle C :  $-8.00 + \text{Gamma} [8.29, 0.992]$ <sup>1</sup>
- Pour le modèle HKstat : Normale  $[0.26, 2.79]$ <sup>2</sup>
- Pour le modèle hybride HKstat :  $- 8.00 + \text{Gamma} [7.66, 1.04]$ <sup>3</sup>

<sup>1</sup> La statistique du Khi-2 vaut 11.5 ; celle de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.00336

<sup>2</sup> La statistique du Khi-2 vaut 11.6 ; celle de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.00372

<sup>3</sup> La statistique du Khi-2 vaut 8.67 ; celle de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.00436



Concernant la distribution de la variable « valeur absolue des erreurs relatives », nous obtenons :

- Pour le modèle C : Weibull  $[a = 0.384, b = 1.18, c = 0]^1$  (précédemment calculée)
- Pour le modèle HKstat : Weibull  $[a = 0.311, b = 1.24, c = 0]^2$  (précédemment calculée)
- Pour le modèle hybride C-HKstat : Weibull  $[a = 0.368, b = 1.22, c = 0]^3$

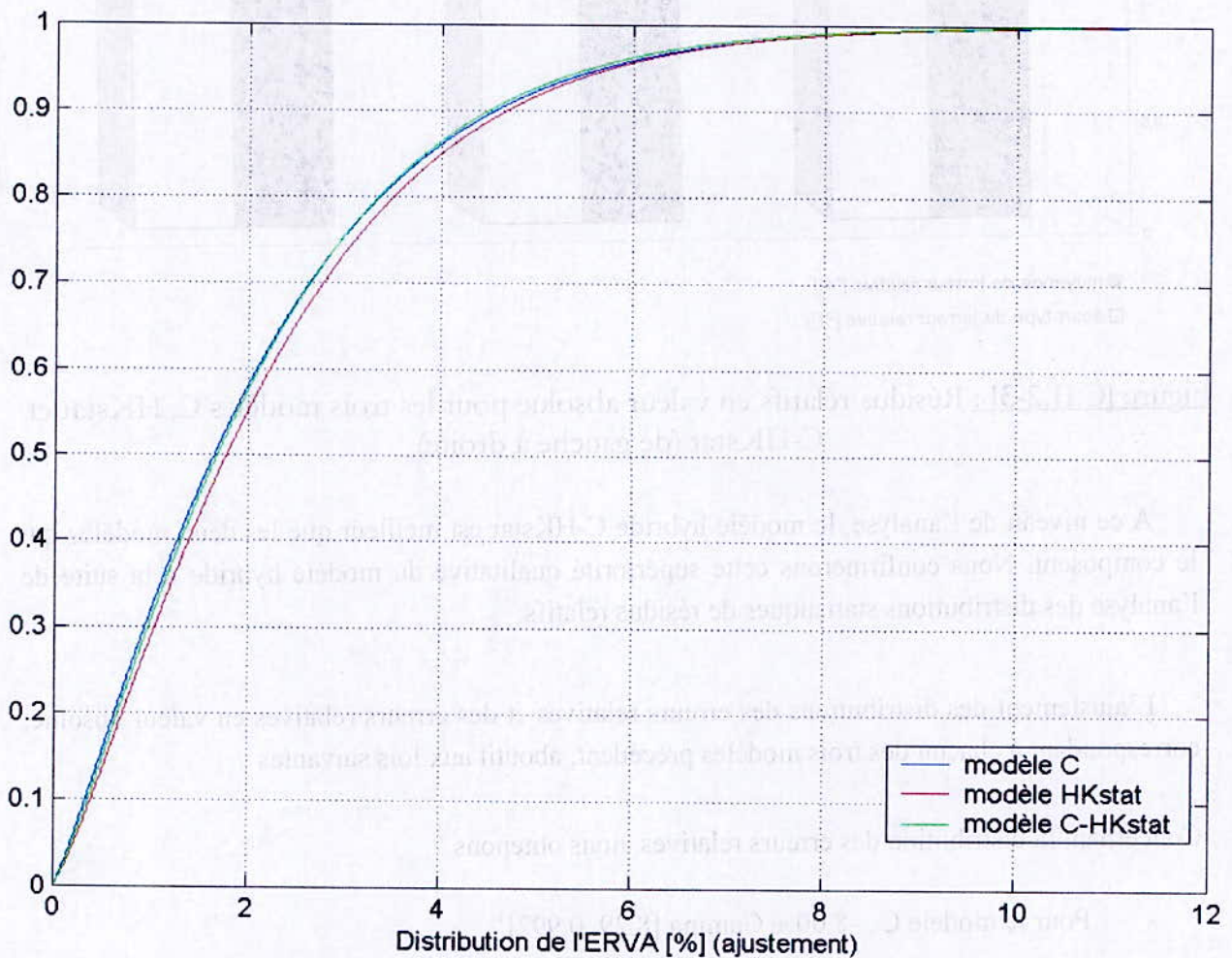


Figure [C.II.2-4] : Distribution cumulée de l'ERVA pour les modèles C, HKstat et C-HKstat.

<sup>1</sup> La statistique du Khi-2 vaut 4.49 ; celle de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.00312

<sup>2</sup> La statistique du Khi-2 vaut 12.6 ; celle de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.00246

<sup>3</sup> La statistique du Khi-2 vaut 8.15 ; celle de Kolmogorov-Smirnov vaut 0.00370



Soit LS la limite supérieure de l'intervalle de confiance pour l'ERVA construit à un niveau de confiance  $P_c$ . La représentation des cumulatives des distributions des ERVA engendrées par chacun des trois précédents modèles fait ressortir l'observation suivante :

- Pour un niveau de confiance  $P_c$  inférieur à 0.75, la limite supérieure donnée par le modèle C est la meilleure (inférieure aux autres).
- Pour un niveau de confiance  $P_c$  supérieur à 0.75, la LS donnée par le modèle hybride devient la meilleure (inférieure aux autres).

A titre indicatif, au niveau de confiance de 0.75 la LS donnée par les modèles C et C-HKstat vaut 2.95 ; autrement dit, en utilisant ces deux modèles (sur la plage analysée), on est sûr à 75% d'avoir une estimation de la longueur de la solution optimale dont l'ERVA est inférieure à 2.95% (de la longueur trouvée).

La figure [C.II.2-5] ci-dessous, qui est un zoom sur les cumulatives de ERVA au niveau de ce point de rencontre, illustre bien ces observations.

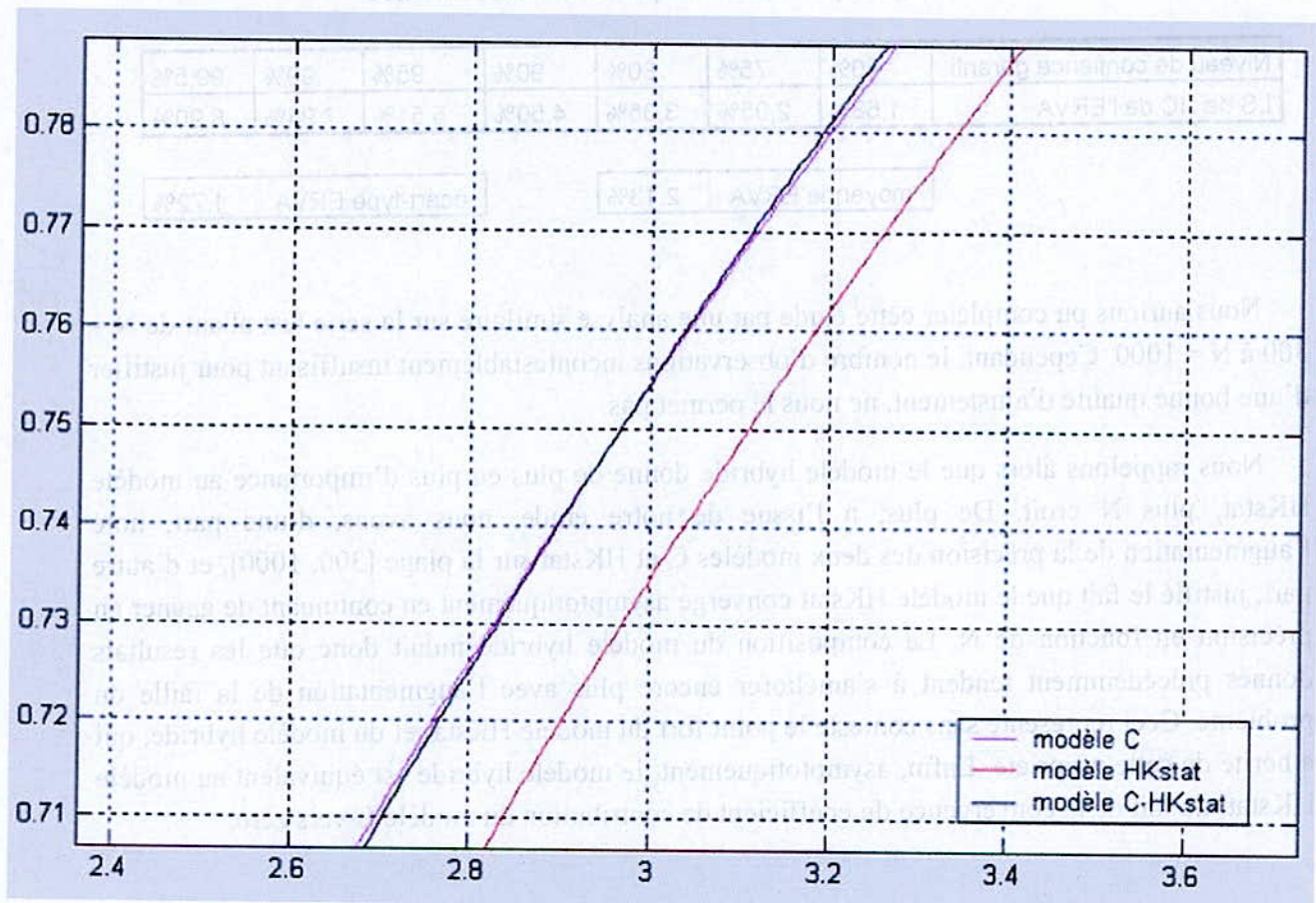


Figure [C.II.2-5] : Zoom sur les cumulatives de ERVA au niveau de ce point de rencontre.



Or, comme le plus souvent le niveau de confiance pris dépasse 0.75, nous pouvons alors affirmer que le modèle C-HKstat donne les meilleures limites inférieures pour des niveaux de confiance pragmatiques.

Ainsi, l'étude de la distribution des résidus a également conduit à la conclusion que le modèle hybride est effectivement meilleur – même si sa supériorité est minime –.

Nous pouvons donc résumer le comportement du modèle hybride C-HKstat d'un point de vue ERVA par la figure [C.II.2-6] ci-dessous.

Nous pouvons à présent donner un intervalle de confiance de l'erreur relative en valeur absolue, et ceci pour un niveau de confiance choisi. A titre illustratif, nous donnons dans le tableau [C.II.2-3] ci-dessous, des limites supérieures de l'ERVA correspondant à différents niveaux de confiance.

Tableau[C.II.2-3] : Limites supérieures de l'intervalle de confiance de l'erreur relative en valeur absolue correspondant à chaque niveau de confiance

Niveau de confiance garanti	50%	75%	80%	90%	95%	99%	99,5%
LS de l'IC de l'ERVA	1,68%	2,95%	3,35%	4,50%	5,51%	7,94%	8,90%

moyenne ERVA	2,13%
--------------	-------

écart-type ERVA	1,72%
-----------------	-------

Nous aurions pu compléter cette étude par une analyse similaire sur la série test allant de  $N = 300$  à  $N = 1000$ . Cependant, le nombre d'observations incontestablement insuffisant pour justifier d'une bonne qualité d'ajustement, ne nous le permet pas.

Nous rappelons alors que le modèle hybride donne de plus en plus d'importance au modèle HKstat, plus  $N$  croît. De plus, à l'issue de notre étude, nous avons, d'une part, noté l'augmentation de la précision des deux modèles C et HKstat sur la plage [300, 1000], et d'autre part, justifié le fait que le modèle HKstat converge asymptotiquement en continuant de gagner en précision en fonction de  $N$ . La composition du modèle hybride induit donc que les résultats donnés précédemment tendent à s'améliorer encore plus avec l'augmentation de la taille du problème. Ceci représente sans conteste le point fort du modèle HKstat et du modèle hybride, qui a hérité de cette propriété. Enfin, asymptotiquement, le modèle hybride est équivalent au modèle HKstat, du fait de la convergence du coefficient de contribution du modèle C vers zéro.



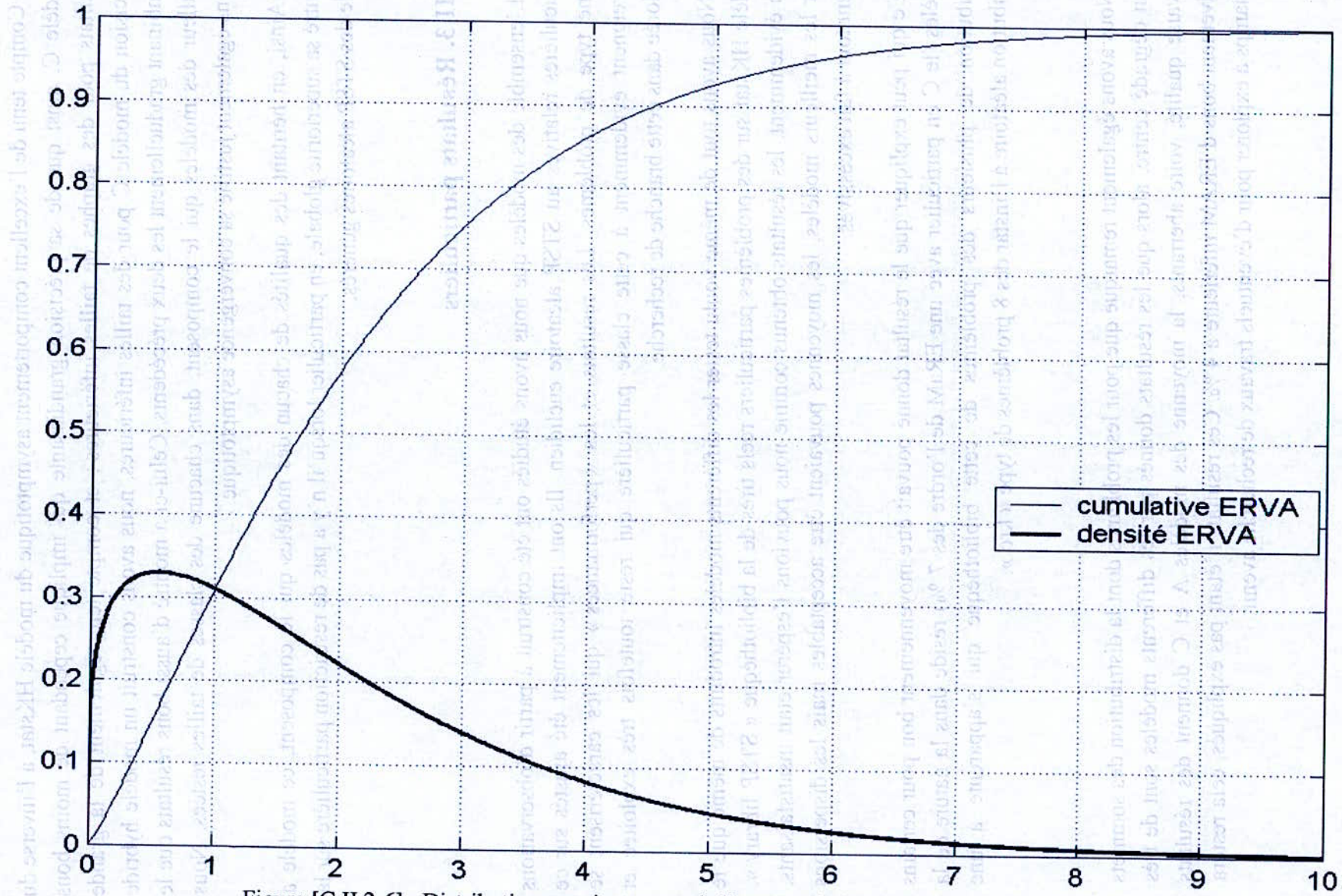


Figure [C.II.2-6] : Distribution par ajustement de l'erreur relative en valeur absolue (ERVA) sur la plage de tailles 50 : 250 pour le modèle hybride



### **Conclusion**

Compte tenu de l'excellent comportement asymptotique du modèle HKstat, à l'inverse du modèle C, ainsi que de sa précision grandissante qui implique cependant de moins bons résultats pour des graphes de tailles inférieures ; et compte tenu également de la grande précision du modèle C pour des tailles inférieures, nous avons construit un modèle hybride combinant graduellement les deux précédents. Celui-ci a montré d'aussi bons résultats que le meilleur des modèles qui le composent, dans chacune des classes de tailles testées. Nous avons également justifié sa convergence asymptotique.

Ainsi, en héritant des qualités de chacun des modèles qui le composent, ce modèle a montré sa supériorité globale, en particulier lorsqu'il n'y a pas de restriction particulière sur la taille des STSP aléatoires générés.

### **C.II.3. Résultats particuliers**

L'ensemble des modèles que nous avons étudiés ont été construits à partir d'observations particulières relatives au STSP aléatoire euclidien. Ils ont implicitement été ajustés sur ce même type de problèmes. Les résultats et les « performances » qui les caractérisent se restreignent évidemment à cette classe particulière qui reste toutefois très exploitée et explorée dans cette branche de recherche.

Nous avons tout de même voulu tester les différents modèles introduits de même que le modèle HKstat sur des problèmes particuliers réels tirés de la bibliothèque « STSP library ». Bien évidemment, les résultats obtenus comme nous pouvions l'espérer étaient insatisfaisants. Pour les meilleurs modèles, les moyennes pouvaient être acceptables mais les dispersions étaient tout à fait excessives.

Ce qui peut expliquer que le résultat donné pouvait être moyennement bon pour certains modèles (le C en particulier avec une ERaM de l'ordre des 7 %) réside dans la nature de la distribution de plusieurs des problèmes de cette bibliothèque qui s'apparente à une distribution aléatoire à l'instar des 8 problèmes de type « kro ».

Nous avons également remarqué que pour les problèmes dont la distribution des sommets est en dégradé centré, alors que les résultats donnés par les différents modèles sont de très mauvaise qualité, voire aberrants, la moyenne des modèles A et C donnent des résultats relativement bons d'ERaM inférieure à 4 %. Ces résultats n'étant pas expliqués, cela restera un champ à explorer pour d'éventuels travaux de recherche avenir.



## ***Conclusions du chapitre II***

L'étude statistique que nous avons effectuée a graduellement suivi le cheminement suivant.

Nous avons tout d'abord réajusté et testé le modèle initial A. Par la suite, nous avons construit un autre modèle, moins « lourd » car sans sigma, dont les deux variantes sont les modèles B et C. Nous avons testé et comparé ces dernières à l'estimateur statistique de la borne HK. Les résultats obtenus ont été au-delà de nos attentes. En effet, le modèle C a montré une plus grande précision par rapport au modèle HKstat pour des tailles allant de 5 à 250. Plus que cela, même sur un intervalle d'extrapolation trois fois plus étendu que celui des données de calage, le modèle C a donné d'aussi bons résultats que le modèle HKstat alors que ce dernier a été ajusté sur un intervalle nettement supérieur. Enfin, combinant les propriétés extrapolatives et asymptotiques de l'un au bon comportement pour de relatives petites tailles de l'autre, nous avons réussi à « composer » un modèle hybride qui surclasse<sup>1</sup> tous les modèles analysés antérieurement. Aussi, avons-nous pu quantifier l'intervalle de confiance de l'erreur relative calculée en valeur absolue, à un risque donné.

Ainsi, les performances auxquelles nous parvenons en utilisant ces modèles impliquent que ces estimations statistiques représentent une alternative solide à la borne inférieure de Held & Karp (programmation mathématique), et ce particulièrement pour des problèmes de tailles importantes<sup>2</sup>. En outre, le modèle hybride assure de bons résultats, autant pour des tailles importantes que pour des tailles moins grandes. Cela palie la principale « faiblesse » du modèle HKstat.

## ***Perspectives***

L'étude statistique que nous avons menée, de même que les résultats auxquels nous sommes parvenus, illustrent l'intérêt de l'approche statistique du problème du voyageur de commerce. Il est également utile de rappeler que l'objectif principal des modèles statistiques construits, reste la mise à la disposition d'estimateurs dont la précision est satisfaisante et dont la mise en œuvre est simple et rapide. La finalité de ceci est de comparer les performances données par diverses heuristiques. Ainsi, en plus des problèmes-tests des bibliothèques ATSP et STSP qui restent dénombrables, cette approche offre la possibilité d'étendre le champ d'évaluation de la précision heuristique.

---

<sup>1</sup> En effet, il n'y a nul besoin d'analyse multicritère pour affirmer cela du moment que le modèle C-HKstat est meilleur aussi bien par rapport à la précision en moyenne et en dispersion, que par rapport à la limite supérieure de l'erreur pour un niveau de confiance choisi.

<sup>2</sup> Nous préférons ne pas préciser quantitativement car cela dépend fortement du temps ainsi que des performances et capacités computationnelles disponibles



La restriction relative des modèles étudiés nous amène à proposer d'effectuer ce même type d'étude pour des problèmes aléatoires appartenant à d'autres classes. Il serait alors intéressant, à notre sens, d'étudier le comportement statistique de la longueur de la solution du problème du voyageur de commerce pour d'autres catégories de problèmes. Nous recommandons en particulier aux intéressés de s'orienter vers les STSP euclidiens générés aléatoirement sur un disque (« toroïdal ») (le rayon et l'angle sont aléatoirement générés), aux STSP euclidiens générés sur un rectangle, aux ATSP aléatoires (matrice des distance aléatoire). D'autres catégories de problèmes à étudier, et pourrait enrichir les instances à tester serait les STSP et les ATSP dont les distances sont générées selon une loi de probabilité connue (en particulier parmi celles dont la distribution de la somme suit une loi connue).



## **CHAPITRE III**

**Modèle d'estimation de la solution optimale  
d'ATSP générés par des instances  
probabilistes**



## Introduction

Nous venons d'étudier statistiquement le problème du voyageur de commerce symétrique euclidien aléatoire. A présent, nous voulons explorer analogiquement, les instances aléatoires pour le cas asymétrique. Nous allons donc nous intéresser dans ce chapitre au comportement des paramètres statistiques des ATSP générés aléatoirement. En particulier, en s'intéressera aux valeurs que prendrait la longueur de la solution optimale en fonction de l'évolution de ces paramètres.

Durant cette partie de notre travail, nous avons commencé par programmer une fonction<sup>1</sup> Matlab, de paramètres notés ( $k$ , vectNs,  $r$ ), pour :

- générer  $k$  différents ATSP aléatoires pour chacun des  $N$  éléments de « vectNs » ;
- calculer la moyenne  $m$  et l'écart-type  $\sigma$  correspondant à la distribution des longueurs des cycles hamiltoniens possibles, et ceux pour chacun des problèmes générés ;
- calculer  $r$  solutions par « 2-opt initialisé aléatoirement » pour chacun des problèmes générés ;
- calculer le paramètre de position de la loi de Weibull<sup>2</sup> [golden, 1976] correspondant à la distribution des  $r$  solutions 2-opt.

Ainsi, en exécutant<sup>3</sup> cette fonction avec  $k = 15$ ,  $r = 10$  et vectNs = [50 : 10 : 250] nous avons pu avoir à notre disposition 15 ATSP aléatoires pour des tailles variant de 50 à 250 par pas de 10.

Pour chacune des 21 tailles, 5 ATSP serviront pour effectuer l'ajustement alors que les 10 autres serviront à la validation.

## Remarque

Par abus de langage, et afin de faciliter la lecture de ce document, nous allons confondre, dans ce chapitre, l'estimation de la solution optimale donnée par le paramètre de position de la distribution ajustée de Weibull, avec la solution exacte de l'ATSP.

<sup>1</sup> La fonction appelle plusieurs autres fonctions que nous avons également programmées

<sup>2</sup> Cette méthode, inspirée de la théorie des valeurs extrêmes est une alternative accessible pour l'estimation de la solution optimale d'un ATSP quelconque

<sup>3</sup> Le temps d'exécution, sur un pentium 4 2.66 GHz Fujitsu-Siemens, a été de l'ordre de 4 jours.



### C.III.1. Caractérisation des paramètres des ATSP aléatoires et construction du modèle d'estimation

Nous avons calculé sur 5 observations pour chaque N :

- La moyenne de m ;
- La moyenne de sigma ;
- La moyenne de la longueur optimale mu.

#### C.III.1.a. Analyse des paramètres caractérisant un ATSP aléatoire donné

Nous allons analyser à présent l'évolution de ces paramètres et représenter graphiquement les variables les mieux corrélées ainsi que toute autre représentation à même de fournir des informations qui serviront dans nos interprétations.

Théoriquement, on montre que la moyenne des longueurs des cycles hamiltoniens vaut dans le cas auquel nous nous intéressons, N fois la moyenne de la distribution des arcs. Comme la moyenne de la distribution des arcs est de<sup>1</sup> 500, alors m vaut 500\*N. Cependant, une génération aléatoire selon une loi de probabilité n'assure pas, que la série générée, admette comme meilleur ajustement, exactement celle avec laquelle elle a été générée, elle s'y rapproche toutefois de plus en plus en fonction de N.

Nous pouvons apprécier graphiquement cette affirmation par rapport à notre série d'ajustement. La figure [C.III.1.a-1] illustre l'évolution de la moyenne calculée m et de la moyenne théorique correspondante. Alors que la figure qui la suit représente l'évolution, en fonction de N, de l'ERM autour de cette moyenne, ainsi que l'écart-type moyen de cette erreur, calculée sur chacune des 5 observations pour chaque N.

<sup>1</sup> Distribution uniforme entre 0 et 1000 :  $(b-a)/2 = (1000-0)/2 = 500$



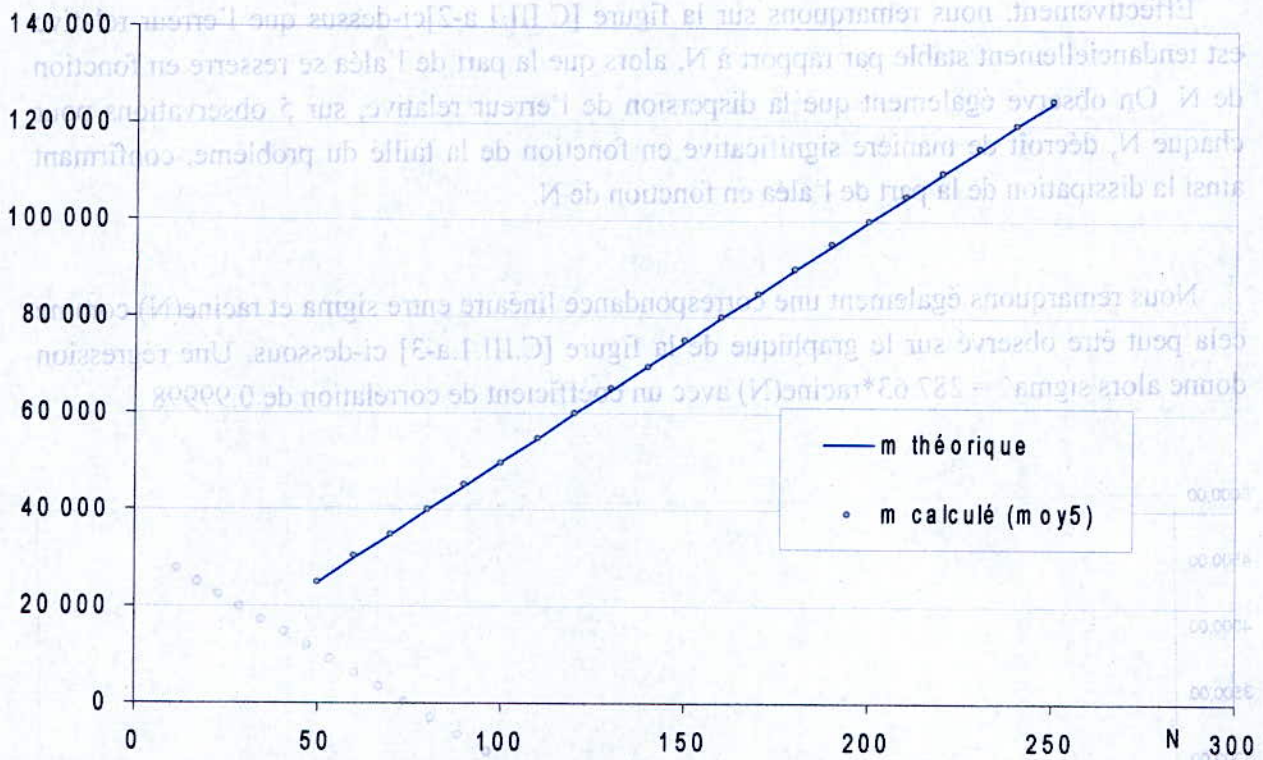


Figure [C.III.1.a-1] : Evolution, en moyenne(5) de la moyenne des longueurs des cycles hamiltoniens en fonction de la taille du problème  $N$

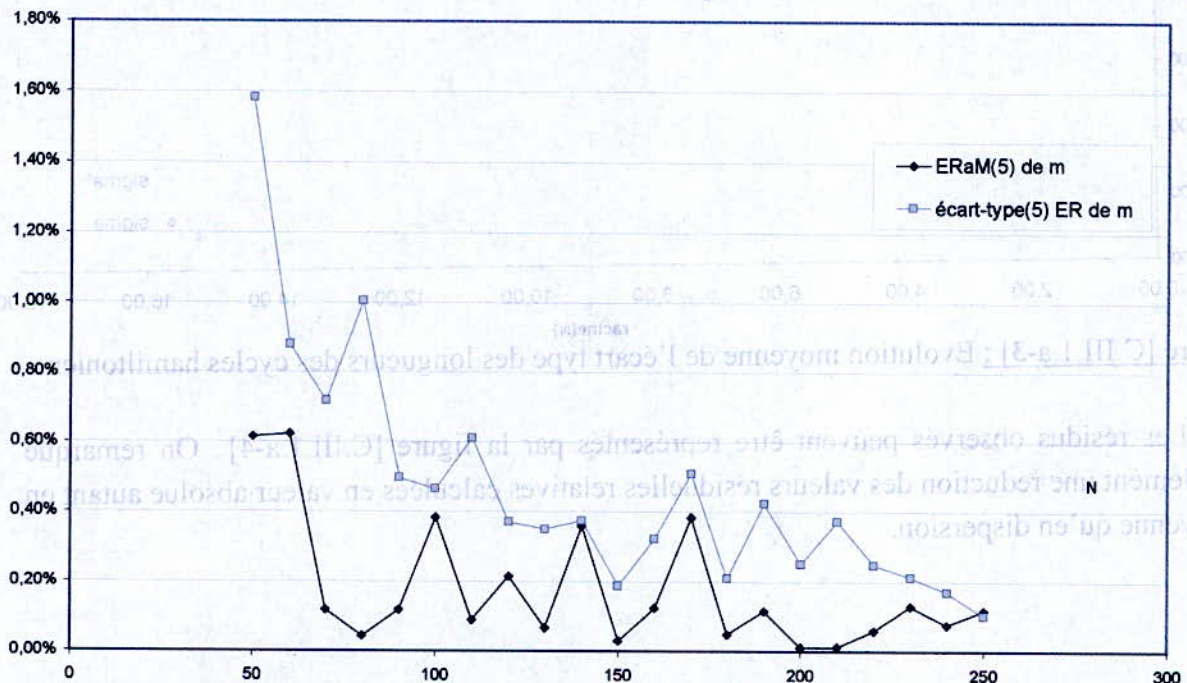


Figure [C.III.1.a-2] : Résidus relatifs en valeurs absolue (moyenne et écart-type sur 5 observations de même taille)



Effectivement, nous remarquons sur la figure [C.III.1.a-2] ci-dessus que l'erreur relative est tendanciellement stable par rapport à  $N$ , alors que la part de l'aléa se resserre en fonction de  $N$ . On observe également que la dispersion de l'erreur relative, sur 5 observations pour chaque  $N$ , décroît de manière significative en fonction de la taille du problème, confirmant ainsi la dissipation de la part de l'aléa en fonction de  $N$ .

Nous remarquons également une correspondance linéaire entre  $\sigma$  et  $\sqrt{N}$  comme cela peut être observé sur le graphique de la figure [C.III.1.a-3] ci-dessous. Une régression donne alors  $\sigma^2 = 287.63 * \sqrt{N}$  avec un coefficient de corrélation de 0.99998

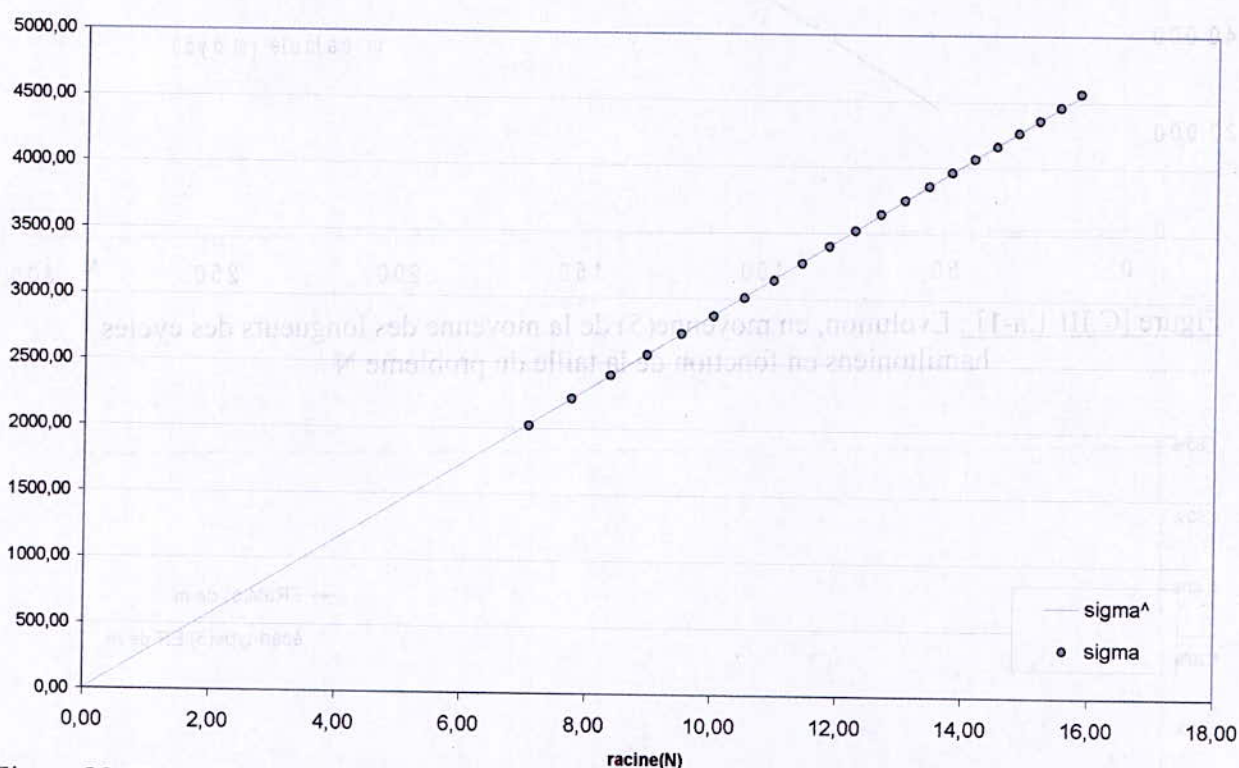
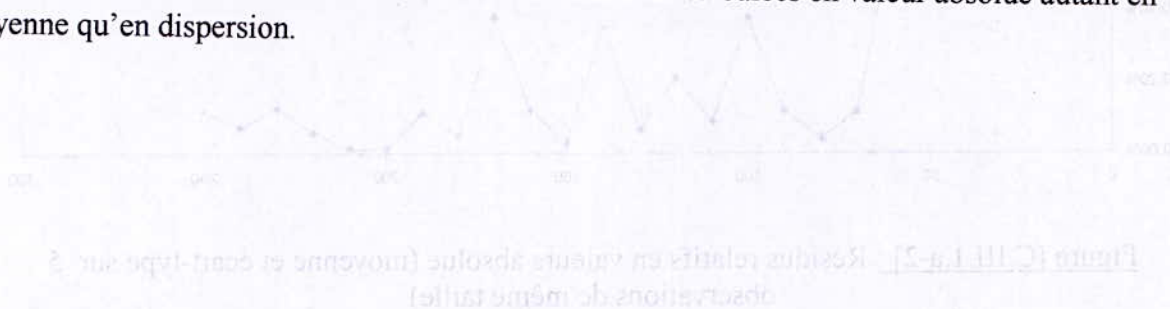


Figure [C.III.1.a-3] : Evolution moyenne de l'écart type des longueurs des cycles hamiltoniens

Les résidus observés peuvent être représentés par la figure [C.III.1.a-4]. On remarque également une réduction des valeurs résiduelles relatives calculées en valeur absolue autant en moyenne qu'en dispersion.





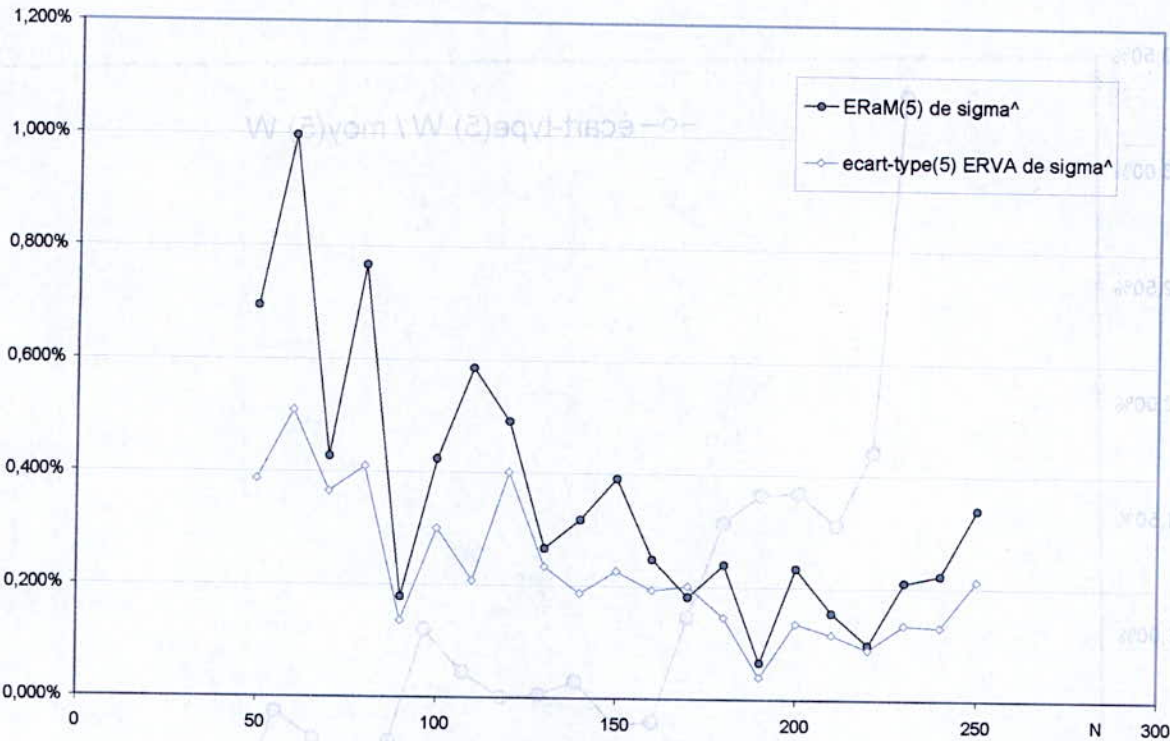


Figure [C.III.1.a-4] : Résidus relatifs correspondant à l'estimation de sigma

Toutes ces observations vont vers la conclusion que les modèles qui pourront être construits dont les variables explicatives seraient  $N$ ,  $m$  et  $\sigma$  par exemple, ont la possibilité d'être réduit à des modèles à variable explicative unique,  $N$  en l'occurrence.

Autre caractéristique que nous observons est la relative constance du paramètre  $W$  du modèle A lorsque  $N$  est constant, ainsi que l'évolution linéaire de ce  $W$  en fonction de  $N$ . Ceci nous amène à une première idée qui est de tester, après ajustement le modèle A, sur ce type de problèmes.

### C.III.1.b. Paramétrisation du modèle A

Les observations précédentes ainsi que les remarques correspondantes justifient notre volonté de tester le modèle A pour estimer la solution optimale du ATSP aléatoire. En effet, d'une part, pour  $N$  fixe, le paramètre  $W$  calculé avec la solution optimale montre une certaine constance ; d'autre part, l'évolution de  $W$  en fonction de  $N$  semble suivre sensiblement une évolution linéaire par rapport à  $\sqrt{N}$ .

L'observation de la relative constance de  $W$  pour une taille de problèmes fixe est représentée dans la figure [C.III.1.b-1] qui suit. Celle-ci illustre, pour différentes tailles, le rapport de l'écart-type de 5  $W$  calculés pour 5 problèmes de même taille, à la moyenne correspondante.



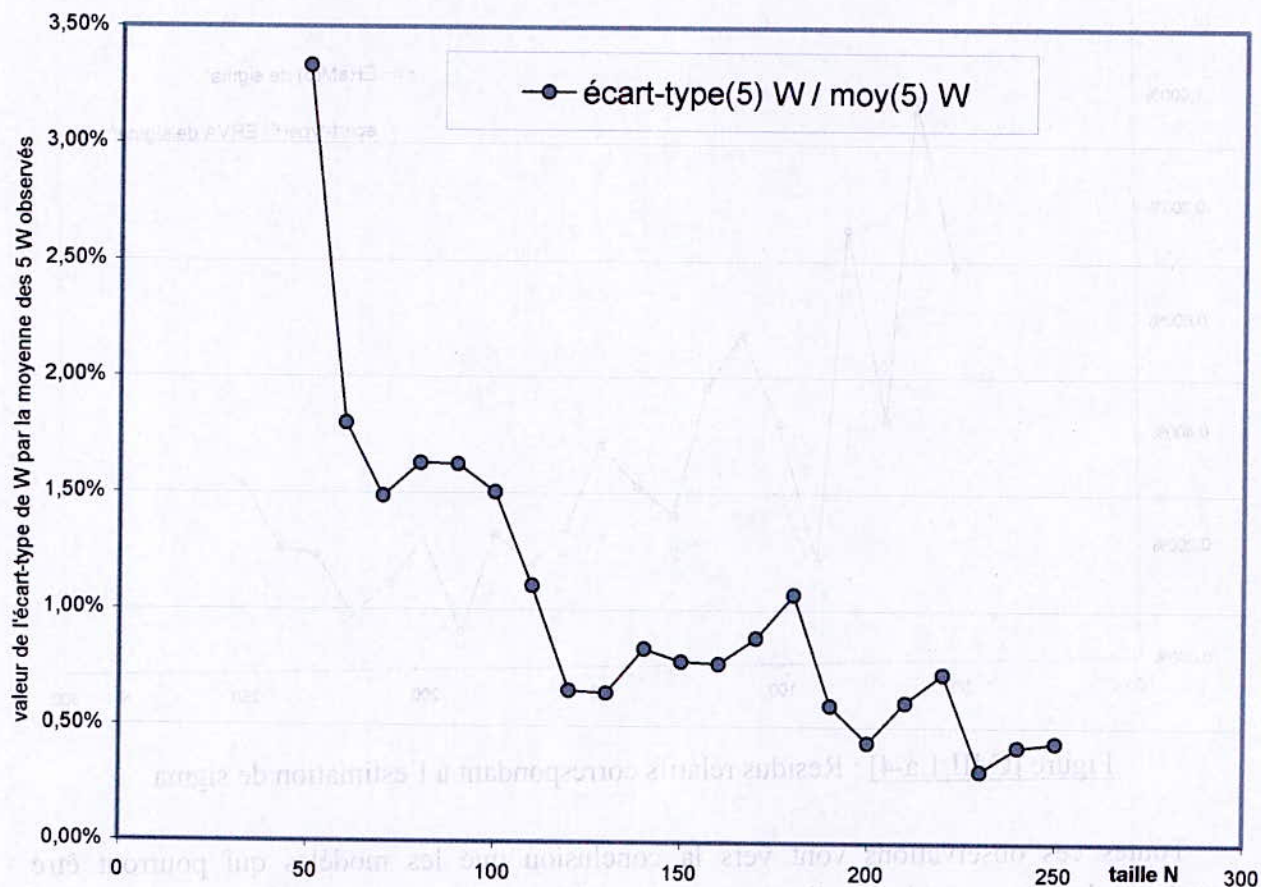


Figure [C.III.1.b-1] : Evolution en fonction de N de l'écart-type de W divisé par sa moyenne, pour 5 observations par tailles

On remarque bien la réduction de ce rapport en fonction de l'évolution de N. Cela signifie que le modèle A gagne en précision lorsque la taille du problème est grande.

En outre W suit une courbe du type  $p+q*\text{racine}(N)$ . La représentation graphique de l'évolution de la variable « moyenne de 5 observations de W pour un même N » par rapport à  $\text{racine}(N)$ , sur la figure [C.III.1.b-2] le confirme du fait de la linéarité de cette progression.



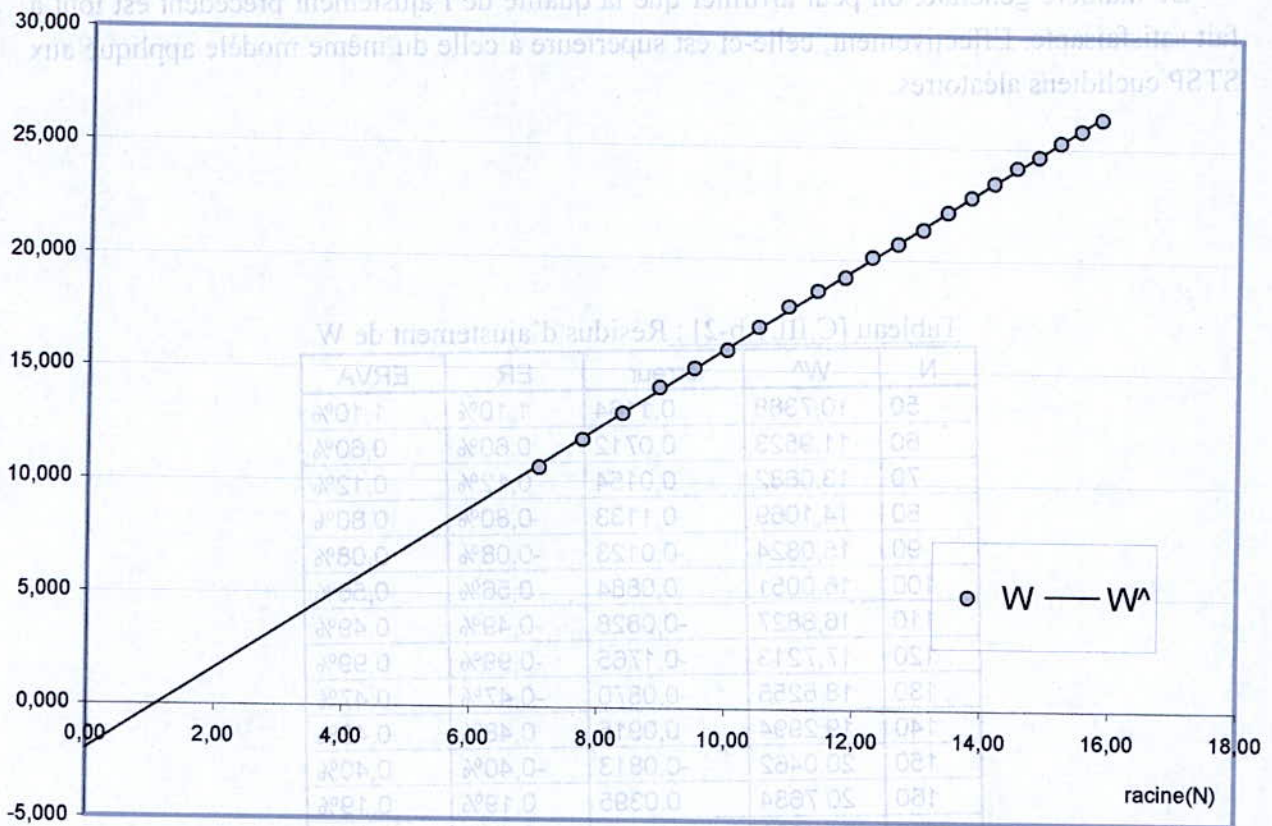


Figure [C.III.1.b-2] : Comparaison entre W et son estimation pour chaque N

Nous avons déterminé donc un estimateur de W de la forme :

$$W = p + q * \text{racine}(N)$$

par une régression simple dont la variable explicative est racine(N). Les paramètres p et q sont estimés par les moindres carrés à :

$$p = -1.97536 ; q = 1.79806.$$

Le tableau [C.III.1.b-2] qui suit résume les valeurs résiduelles relatives correspondant à l'ajustement effectué.

Nous pouvons relever que l'erreur relative est significativement indépendante de la taille du problème en raison de la valeur de son coefficient de corrélation avec N qui vaut  $-0.08$ . De plus, il est à noter que l'ERM pour cette série d'ajustement est quasiment nulle.

L'ERVA est quant à elle moyennement corrélée à N avec un coefficient de corrélation valant  $-0.58$ . En effet, on peut relever sur le graphique de la figure [C.III.1.b-3] ci-dessus une faible décroissance tendancielle de l'ERVA en fonction de N.



De manière générale, on peut affirmer que la qualité de l'ajustement précédent est tout à fait satisfaisante. Effectivement, celle-ci est supérieure à celle du même modèle appliqué aux STSP euclidiens aléatoires.

Tableau [C.III.1.b-2] : Résidus d'ajustement de W

N	W <sup>^</sup>	erreur	ER	ERVA
50	10,7388	0,1164	1,10%	1,10%
60	11,9523	0,0712	0,60%	0,60%
70	13,0682	0,0154	0,12%	0,12%
80	14,1069	-0,1133	-0,80%	0,80%
90	15,0824	-0,0123	-0,08%	0,08%
100	16,0051	0,0884	0,56%	0,56%
110	16,8827	-0,0828	-0,49%	0,49%
120	17,7213	-0,1765	-0,99%	0,99%
130	18,5255	-0,0870	-0,47%	0,47%
140	19,2994	0,0915	0,48%	0,48%
150	20,0462	-0,0813	-0,40%	0,40%
160	20,7684	0,0395	0,19%	0,19%
170	21,4683	0,0991	0,46%	0,46%
180	22,1480	-0,0027	-0,01%	0,01%
190	22,8090	-0,0163	-0,07%	0,07%
200	23,4529	-0,0201	-0,09%	0,09%
210	24,0808	-0,0904	-0,37%	0,37%
220	24,6940	0,0253	0,10%	0,10%
230	25,2934	-0,0028	-0,01%	0,01%
240	25,8799	0,0421	0,16%	0,16%
250	26,4543	0,0967	0,37%	0,37%

	ERM	ERaM
	0,02%	0,38%
corrélation avec N	-0,07715	-0,57971



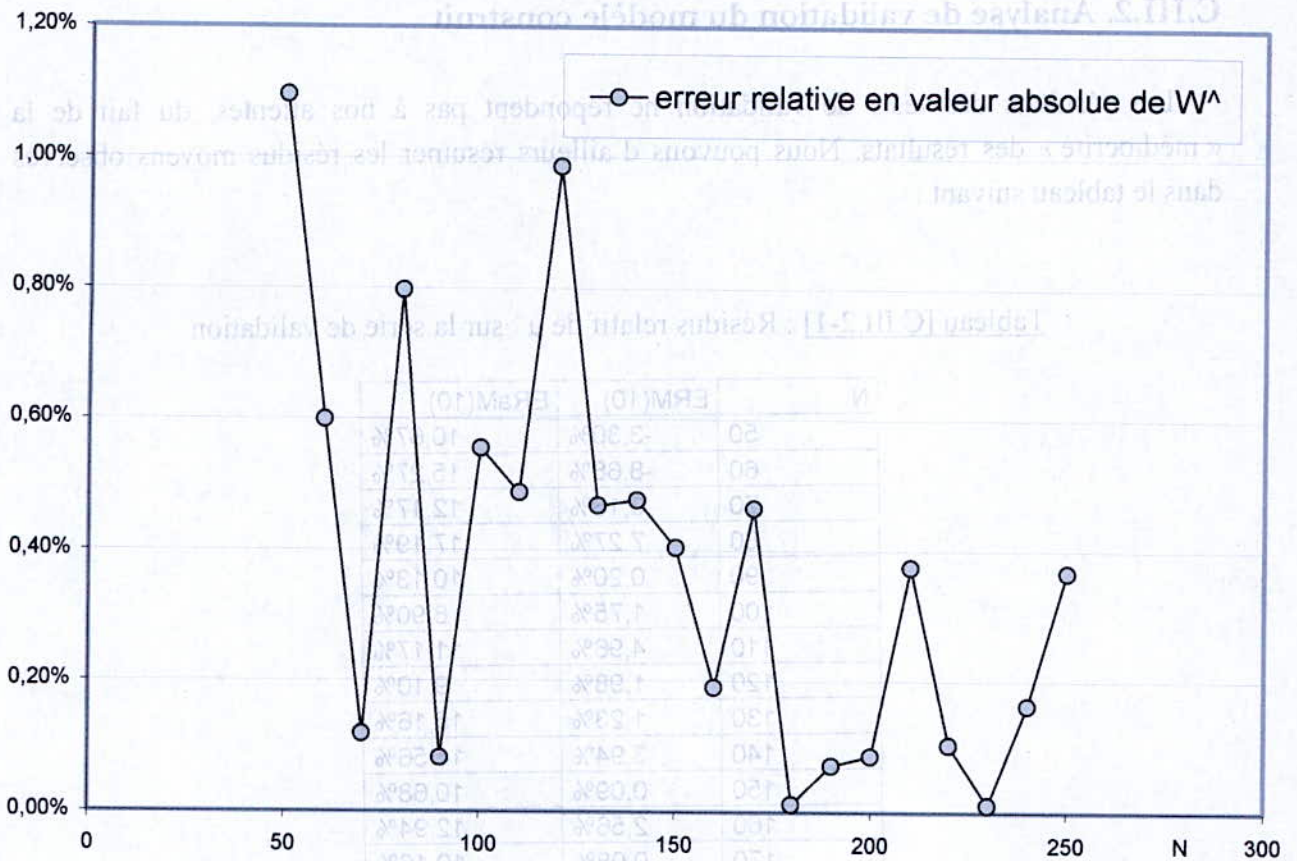


Figure [C.III.1.b-3] : ERVA pour l'estimation de W sur la série d'ajustement.

### Conclusion :

Nous venons de construire un modèle d'estimation de la longueur de la solution optimale du ATSP aléatoire. Il s'agit du modèle initial (A), étudié au chapitre II de cette même partie. Son expression est la suivante :

$$\begin{aligned} \mu^{\wedge} &= m - (p + q \cdot \text{racine}(N)) \cdot \sigma \\ p &= -1.97536 ; q = 1.79806 \end{aligned}$$

La haute qualité d'ajustement de ce modèle peut présager de bons résultats en validation en raison de la relative constance des indicateurs résiduels de  $m$  et  $\sigma$  comme nous l'avons noté précédemment.

Nous devrions donc nous assurer de la précision du modèle en le testant sur une série de validation, ce qui se fera dans la suite de notre travail.



**C.III.2. Analyse de validation du modèle construit**

Les résultats des tests de validation ne répondent pas à nos attentes, du fait de la « médiocrité » des résultats. Nous pouvons d'ailleurs résumer les résidus moyens observés dans le tableau suivant :

**Tableau [C.III.2-1] : Résidus relatif de  $\mu^{\wedge}$  sur la série de validation**

N	ERM(10)	ERaM(10)
50	-3,30%	10,67%
60	-8,68%	15,27%
70	3,16%	12,17%
80	7,27%	17,19%
90	0,20%	10,13%
100	1,75%	8,90%
110	4,96%	11,17%
120	1,98%	9,10%
130	1,23%	15,16%
140	3,94%	15,56%
150	0,09%	10,68%
160	2,56%	12,94%
170	0,08%	10,16%
180	-1,21%	9,82%
190	-0,42%	14,30%
200	1,33%	11,66%
210	-4,85%	10,19%
220	-1,78%	6,85%
230	-1,39%	9,31%
240	-5,70%	9,13%
250	-12,81%	15,60%
moyenne	-0,55%	11,71%

**Conclusion**

A l'issue de notre analyse de validation, nous avons estimé que le modèle A appliqué aux ATSP aléatoires ne donne pas de résultats satisfaisants, ou du moins, les résultats escomptés. En effet, nous remarquons une grande disparité entre la qualité de l'ajustement, et les résidus de la série de validation. Nous en déduisons que soit le modèle A n'est pas approprié à cette classe de problèmes, ou alors, que l'assimilation de la solution optimale au paramètre d'ajustement de la loi de Weibull a été la source d'erreurs excessives en aval. Les futurs travaux de recherche dans cet axe devraient tenir compte de cette remarque, en essayant éventuellement de refaire cette étude avec des solutions exactes si toutefois les capacités machine le permettent.



**Perspective**

A notre sens, nous pensons que la modélisation précédente a échoué ; nous estimons que les résultats obtenus sont insatisfaisants. Les raisons qui nous paraissent être les plus probables relèvent de la faiblesse de 2-opt pour des problèmes asymétriques et par conséquent de l'estimation médiocre obtenue par le paramètre de position de la loi de Weibull. D'ailleurs les performances de 2-opt sur des ATSP aléatoires donnent des résultats supérieurs à plus de 15 % à ceux obtenus par l'algorithme de fourmis, que nous avons implémenté (section B). Or, le paramètre de position de la loi de Weibull, relatif à la distribution des résultats de 2-opt, n'est quasiment jamais inférieur à plus de 5% de la meilleure solution donnée par 2-opt. Ceci explique donc les mauvais résultats obtenus.

Ainsi, il nous paraît intéressant de refaire l'étude sur des ATSP aléatoires en estimant le paramètre de position de la loi de Weibull à l'aide des résultats données par l'heuristique hybride ACS-DM / 2-opt. Il serait pour cela aisé de construire une variable (vecteur de taille  $n$ ) dans le programme ACS-DM / 2-opt où chaque élément représente la meilleure solution locale parmi  $k$  lorsque nous exécutons  $K=n*k$  itérations. On obtiendra donc un vecteur pour calculer le paramètre de position de la loi de Weibull de meilleure qualité que celui obtenu par 2-opt. Nous rappelons que les performances de ACS-DM / 2-opt donne des résultats très proches de l'optimum voire exactes.

**C.III.3. Vers une instance de génération d'ATSP pour l'estimation de sa la longueur optimale**

Il serait intéressant de trouver un type d'instance de génération aléatoire de TSP où les problèmes générés varieraient suffisamment entre eux, et où la solution optimale serait statistiquement comprise dans un intervalle de confiance réduit. Nous pensons alors particulièrement aux conditions suivantes :

- il faudrait que la loi de distribution des longueurs d'arcs générées soient telles que la distribution des longueurs de cycle hamiltoniens suive elle aussi une loi de probabilité connue.
- Il faudrait que la distribution des longueurs d'arcs ait une dispersion suffisante afin de garantir une dispersion minimale des longueurs de cycles hamiltoniens correspondantes.

Ainsi, à titre illustratif, nous pensons au cas d'une distribution normale.

Soit  $X$  la variable aléatoire avec laquelle sont générées les  $N*(N-1)$  distances  $C(i,j)$  entre les différentes villes d'un ATSP de taille  $N$ .

Si on génère  $C(i,j)$  suivant une loi **Normale** $[m_c, \sigma_c]$  alors, nous disposons de  $N*(N-1)$  observations  $X$ . Cela implique que plus  $N$  est grand, plus  $N*(N-1)$  l'est encore plus, et plus le



meilleur ajustement de la distribution des  $C(i,j)$  donne des paramètres qui se rapprochent plus de ceux de la loi de génération utilisée.

Par la suite, un cycle hamiltonien étant constitué par la somme de  $N$  arcs distincts, sa distribution selon la loi  $L(m,\sigma)$  que nous ne connaissons pas se rapprocherait dans cet exemple à une Normale [ $m=N*m_c$ ,  $\sigma=\sigma_c*\text{racine}(N)$ ]. En fait, cela est une approximation car les cycles hamiltoniens possibles sont constitués de  $N$  arcs parmi les  $N*(N-1)$  de la matrice des distances, il y a donc une dépendance entre les observations, qui implique qu'en réalité, la distribution des longueurs des cycles hamiltoniens soit distribuée différemment.

Nous savons également que si  $Y$  suit une loi dont la cumulative est  $F$ , alors le minimum de  $k$  observations de  $Y$  suit une distribution de cumulatives  $F_k$  telle que :

$$F_k(Y) = 1 - (1 - F(Y))^k \quad [\text{C.III.3-1}]$$

Ainsi, si  $G$  est la loi des distributions du cycle minimum de l'ensemble des  $(N-1)!$  Cycle hamiltoniens possibles, alors la longueur de la solution optimale suit  $G^*$ , telle que sa cumulative s'écrirait :

$$F^*(Y) = 1 - (1 - F(Y))^{(N-1)!}$$

Cette distribution est en fait extrêmement moins dispersée que la distribution des cycles hamiltoniens, ce qui implique que l'intervalle de confiance de la solution optimale soit significativement réduit même pour un niveau de confiance très haut.

Théoriquement, il est clair que ce qui vient d'être décrit est juste. La seule ambiguïté lorsque l'on passe à la pratique est la distribution de la longueur des cycles hamiltoniens. Celle-ci nous est inconnue, même si l'on peut calculer sa moyenne et sa dispersion.

Nous voulons tester les résultats obtenus si l'on considère que la distribution des cycles hamiltoniens est normale, lorsque les arcs correspondants sont de distribution normale.

Nous avons créé un ATSP de taille 50 dont les arcs sont générés selon la distribution Normale [ $m_c = 1\,000$  ;  $\sigma_c = 200$ ]. Expérimentalement, nous avons obtenu des longueurs d'arcs distribuées selon la Normale [ $m_c = 1\,003.27$  ;  $\sigma_c = 200.31$ ] ce qui est très proche de ce que nous désirions. Ainsi, l'approximation à une somme de  $N$  variables aléatoires « Nid » donnerait une distribution des longueurs des cycle hamiltoniens selon la Normale [ $m = 50\,163.38$  ;  $\sigma = 1\,416.37$ ]. Toutefois, le calcul exact de la moyenne et de l'écart-type des longueurs des cycles hamiltoniens à partir de la matrice  $C$  donne :

$$m = 50\,163.38 \text{ (identique à la précédente)}$$

$$\sigma = 1\,405.02 \text{ (légèrement inférieur au précédent)}$$



Une borne inférieure « large » de la solution de ce problème est donnée par la somme des minima non nuls de chaque colonne. Une borne supérieure est donnée par la solution à 1 000 itérations de ACS-DM. Sa précision est reflétée par les performances obtenus par cette méthode. Nous savons alors que, pour ce problème,  $m$  est comprise dans [27 911 ; 30 991].

La distribution cumulée de la normale correspondant aux moyennes et écart-types calculés ci-dessus, ainsi que la distribution du minimum de  $49!$  observations induite par la première sont représentés (en vert) sur la figure qui suit :

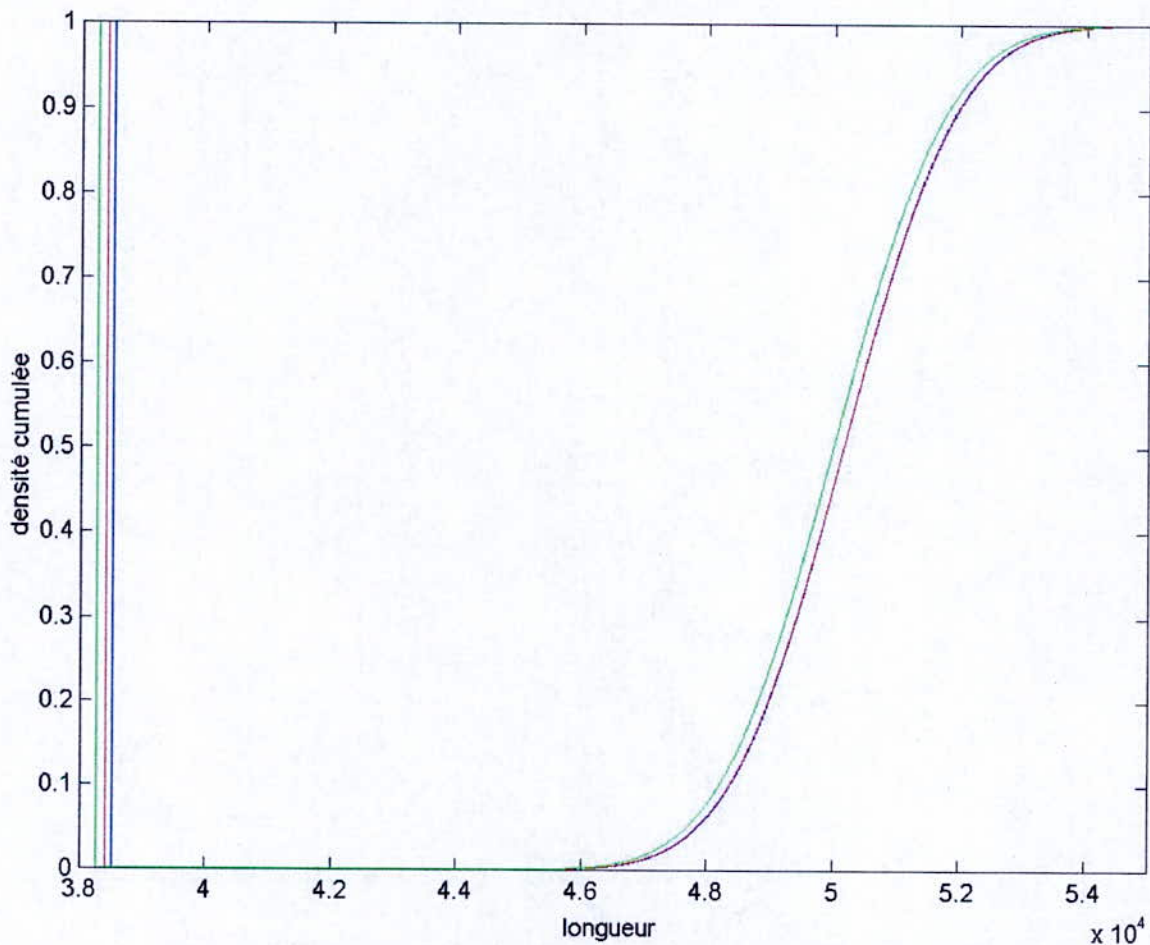


Figure [C.III.3-3] : Distribution hypothétique de la longueur des cycles hamiltoniens et de la solution optimale

Dans ce cas, la longueur de la solution optimale est estimée à plus de 38 000, ce qui est totalement faux en se référant à l'intervalle où elle se trouve réellement.

Nous déduisons de cet essai que l'approximation de la distribution de la longueur des cycles hamiltoniens n'a pas permis d'obtenir les résultats escomptés. Il aurait fallu que cette distribution soit plus « aplatie » pour coïncider avec l'optimum.



Ceci nous amène à dire que la longueur des circuits hamiltoniens, qui est de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma$ , a une distribution plus aplatie que la Normale  $[m, \sigma]$ .

Il faudrait donc essayer de caractériser cette distribution afin de creuser cette idée qui nous semble être prometteuse car rigoureusement justifiée par la théorie.

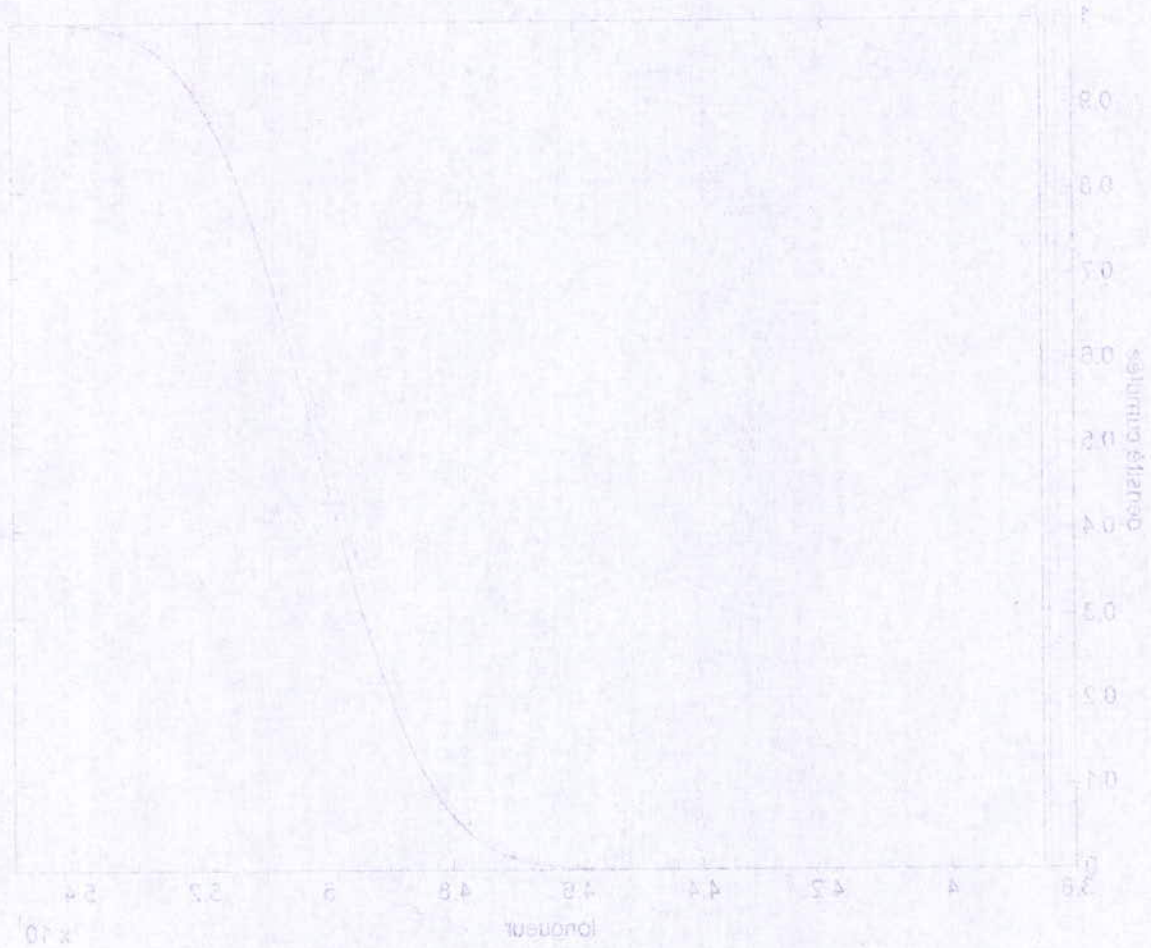


Figure [C.III.3-2] - Distribution hypothétique de la longueur des cycles hamiltoniens et de la solution optimale

Dans ce cas, la longueur de la solution optimale est estimée à plus de 38 000, ce qui est totalement faux car on se réfère à l'instance où elle se trouve réellement.

Nous réalisons de cet essai que l'approximation de la distribution de la longueur des cycles hamiltoniens n'a pas permis d'obtenir les résultats escomptés. Il nous faut donc que cette distribution soit plus « aplatie » pour coïncider avec l'optimum.



## **Conclusion**

*A travers l'étude que nous avons menée, nous sommes parvenus à un certain nombre de résultats que nous avons explicités. Nous pouvons sommairement les synthétiser dans ce qui suit.*

*L'approche statistique nous a permis de modéliser différents estimateurs de la longueur optimale du TSP. Les modèles que nous avons introduits, ont été graduellement meilleurs et de plus en plus précis. Nous sommes ainsi parvenus à construire un modèle hybride capable d'être précis pour différentes tailles.*

*Nous avons également ouvert un autre champ d'investigation, qui promet de donner des résultats intéressants et qui tiennent théoriquement. Il s'agit de trouver la distribution statistique des cycles hamiltoniens lorsque la distribution des arcs est connue. Cela peut être le cas pour des instances-tests. La conséquence serait une solution optimale estimée avec précision et rigueur théorique.*

*L'étude statistique appliquée au cas asymétrique s'est heurtée à la non disponibilité de résultats exactes de référence et de la mauvaise approximation de ceux donnés par le paramètre de position de la loi de Weibull calculé pour une série de solutions par 2-opt. Nous avons alors développé un algorithme de fourmis comme alternative pour la détermination ou l'estimation précise de la solution exacte qui reste indispensable à notre niveau pour la poursuite d'une telle étude.*

*L'étude, à part entière, que nous avons effectuée concernant les algorithmes de fourmis nous a permis de faire ressortir des résultats intéressants. Nous avons pu accélérer globalement la convergence par initialisation. Nous avons également caractérisé, sur un exemple, l'évolution de la solution ainsi que sa distribution. Nous avons montré les excellents résultats donnés par l'hybride ACS-DM / 2-opt. Nous avons également montré l'utilité de ce type d'algorithmes pour compléter l'étude statistique et l'étendre convenablement au cas asymétrique.*

*Aussi, ce présent mémoire nous a-t-il permis d'étendre et d'approfondir nos connaissances théoriques, pratiques et méthodologiques en nous permettant de nous approfondir dans une recherche, d'analyser, de contourner des difficultés, de développer ... afin de répondre au problème posé.*



## ***Bibliographie***

**[Ait Ali Slimane, 2000] :**

M. Ait Ali Slimane,

« le PVC par les réseaux neuronaux : approche de résolution »,

Projet de fin d'études, encadré par Dr. N. Aboun, ENP, Génie Industriel, 2000

**[Aoufi, Lamraoui, Ouabdesselam & Souayeb, 1996]<sup>1</sup> :**

Aoufi, Lamraoui, Ouabdesselam, Souayeb

« Approche statistique du problème du voyageur de commerce »

Mémoire de Fin d'Etudes d'Ingénieur, Génie Industriel, Ecole Nationale Polytechnique –

Alger (préparé par A. AOUIFI et A. SOUAYEB, encadré par Pr. A. OUABDESSELAM et M.

T LAMRAOUI. Publication : IMAC 2000 - Lausanne).

**[Applegate, Bixby, Chvatal & Cook, 1998] :**

D. Applegate, R. Bixby, V. Chvatal, and W. Cook.

« On the solution of traveling salesman problems ».

Mathematica J. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, ICM III, pages 645-656, 1998.

Le code Concorde est disponible sur le site web :

<http://www.keck.caam.rice.edu/concorde.html>

**[Bahmani, 2002] :**

M. Bahmani,

« approche de résolution du problème du voyageur de commerce par les algorithmes basés sur les colonies de fourmis ».

Projet de fin d'études, encadré par M T Lamraoui, ENP, Génie Industriel, 2002.

**[Balas & Toth, 1985] :**

E. Balas, P. Toth,

« Branch and bound methods »,

E.L. Lawler et al. (Eds.), The Traveling Salesman Problem, Wiley, New York, 1985, pages 361-401.

**[Breadwood, Halton & Hammersley, 1959] :**

Beardwood, J., Halton J. H., and Hammersley, J.M. (1959),

« The shortest path through many points »,

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 55 : pages 299-327.

**[Cirassella, Johnson, McGeoch & Zhang, 2000] :**

J. Cirassella, D. S. Johnson, L. A. McGeoch & W. Zhang

« The ATSP algorithms, instance generators and tests »,

ALENEX 2001 Proceedings, Springer Lecture Notes in Computer Science 2153, pages 32-59

**[Gedogne, 2000] :**

Sébastien Gedogne,

« Optimisation par une colonie d'agents coopérants »,

Faculté des sciences appliquées, université de Liège , 2000.

---

<sup>1</sup> Publication IMAC Lausanne, 2000 : « Statistical assessment of optimal length of the TSP »



**[Glover, Gutin, Yeo & Zverovich, 1999] :**

F. Glover, G. Gutin, A. Yeo, and A. Zverovich.

« Construction heuristics for the asymmetric TSP ». (received and accepted in 1999)  
European Journal of Operations Research n° 129 (2001) pages 555-568

**[Gutin, Johnson, McGeoch, Yeo, Zhang & Zverovich, 2002] :**

G. Gutin, D. S. Johnson, L. A. McGeoch, Yeo, W ; Zhang & A. Zverovich,

A paper : « Experimental analysis of heuristics for the ATSP » from

« The Traveling Salesman Problem and its Variations », Gutin and Punnen (eds), Kluwer Academic Publishers, 2002, pages 445-487

**[Held & Karp, 1970] :**

M. Held, R.M. Karp,

« The traveling-salesman problem and minimum spanning trees »,  
Operations Research 18, (1970) 1138-1162.

**[Held & Karp, 1971] :**

M. Held, R.M. Karp,

« The traveling-salesman problem and minimum spanning trees »,  
Part II, Mathematical Programming 1, (1971) pages 6-25.

**[Johnson & McGeoch, 1997] :**

D.S. Johnson, L.A. McGeoch,

« The traveling salesman problem : A case study in local optimization »,  
E.H.L.Aarts, J.K. Lenstra (Eds.), Local Search in Combinatorial  
Optimization, Wiley, New York, 1997, pages 215-310.

**[Johnson & McGeoch, 2002] :**

D.S. Johnson, L.A. McGeoch,

« The Traveling Salesman Problem and its Variations »,  
(Experimental analysis of STSP, pages 369-487)

Gutin and Punnen (eds), Kluwer Academic Publishers, 2002

**[Johnson, McGeoch & Rothberg, 1996] :**

D. S. Johnson, L. A. McGeoch, and E. E. Rothberg.

« Asymptotic experimental analysis for the Held-Karp traveling salesman bound ».

In Proc. 7th Ann. ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms, pages 341-350. Society for  
Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.

**[Little, 1963] :**

J.D. Little,

« An algorithm for the TSP », ORSA 11, 972-989, 1963.

**[Norman & Moscato, 1995] :**

Norman, M. G. and Moscato, P.

« The Euclidean Traveling Salesman Problem and a Space-Filling Curve »,  
Chaos Solitons Fractals 6, 389-397, 1995.



**[Percus & Martin, 1996] :**

Percus, A. G. and Martin, O. C.

« Finite Size and Dimensional Dependence in the Euclidean Traveling Salesman Problem », Phys. Rev. Lett. 76, 1188-1191, 1996.

**[Weisstein, 1999] :**

E. W. Weisstein.

« Traveling Salesman Constants », From MathWorld, A. Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/TravelingSalesmanConstants.html>



## Glossaire

**PVC** : Problème du voyageur du commerce

**TSP** : *Travelling salesman problem* (Problème du voyageur du commerce)

**ATSP** : *Asymmetric travelling salesman problem* (PVC asymétrique)

**STSP** : *Symmetric travelling salesman problem* (PVC symétrique)

**ERaM** : Erreur relative, en valeur absolue, moyenne

**ER** : Erreur relative

**ERM** : Erreur relatives moyenne

**ERVA** : Erreur relative en valeur absolue

**ERopt** : Ecart relatif par rapport à l'optimum

**HK** : *Held & karp lower bound*

**HKstat** : Estimation statistique de HK

**ACS** : Système de colonies de fourmis (*Ant Colony System*)

**ACS-DM** : Système de colonies de fourmis avec désensibilisation (*DM : Desensitization Method*)

**AS** : Système de fourmis (*Ant system*)



## Annexe I

### Calcul de $m$ et $\sigma$ (Moyenne et écart-type des longueurs des cycles hamiltoniens)

#### 1. Moyenne de la distribution des circuits hamiltoniens (Moments d'ordre 1).

Soit  $x_i$  le coût du  $i^{\text{ème}}$  circuit, la moyenne des différents circuits s'écrit :

$$m = \frac{1}{(N-1)!} \sum_{i=1}^{(N-1)!} X_i \quad [I-1]$$

En tenant compte des remarques précédentes, on a :

$$m = \frac{1}{(N-1)!} (N-2)! \sum_{i \neq j} c_{ij}$$

d'où :

$$m = \frac{1}{(N-1)} \sum_{i \neq j} c_{ij} \quad [I-2]$$

Ainsi la moyenne des coûts des  $(N-1)!$  circuits est égale au produit par  $\frac{1}{(N-1)}$  de la somme des termes de la matrice considérée.

#### 2. Variance de la distribution des circuits hamiltoniens (moment d'ordre 2)

On a :

$$\sigma^2 = \frac{1}{(N-1)!} \sum_{i=1}^{(N-1)!} (x_i - m)^2 \quad [I-3]$$

Soit  $A$  la somme des produits 2 à 2 des termes non nuls qui n'appartiennent ni à la même ligne ni à la même colonne, où :



$$A = \sum_{i \neq j} c_{ij} \left( \sum_{k \neq l} c_{kl} - \sum_{i \neq h} c_{ih} - \sum_{r \neq j} c_{rj} \right) \quad [I-4]$$

Et soit B la somme des produits 2 à 2 des termes symétriques par rapport à la diagonale principale où :

$$B = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N c_{ij} \times c_{ji} \quad [I-5]$$

Lorsqu'on calcule  $\sum_{i=1}^{(N-1)!} x_i^2$ , chaque  $c_{ij}$  est compté  $(N-2)!$  fois, et chaque produit 2  $c_{ih}c_{hk}$  est compté  $(N-3)!$  fois, de même pour chaque produit 2  $c_{ij}c_{ji}$

Par suite :

$$\sum_{i=1}^{(N-1)!} x_i^2 = (N-2)! \sum_{i \neq j} c_{ij}^2 + 2 \times (N-3)! (A - B) \quad [I-6]$$

Donc :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{(N-1)!} c_{ij}^2 + \frac{2}{(N-1)(N-2)} (A - B) - m^2 \quad [I-7]$$



## Annexe II

### Historique de l'approche statistique du TSP

Une fois que l'un des méthodes heuristiques est mise en œuvre, un autre problème non moins important apparaît, il s'agit de l'analyse de cette heuristique et de la solution qu'elle donne.

Plusieurs procédés sont alors proposés. Parmi ceux-ci, l'analyse empirique des heuristiques, qui renferme entre autres, l'estimation statistique de la solution optimale par l'intervalle de confiance.

Parmi ces différentes procédures, on trouve celles qui suivent.

Procédure donnée par Clough :

Il a appliqué la théorie des valeurs extrêmes au problème d'estimation de l'intervalle de confiance de l'optimum global, d'une fonction à plusieurs variables en utilisant la méthode de Monte-Carlo. L'intervalle est donné par la formule :

$$\text{Pr ob} \left[ \left( \frac{n+c}{n-1} \right) \mu - \left( \frac{1+c}{n-1} \right) \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n X_i \leq s \leq \mu \right] \approx 1 - \left( \frac{n-1}{n-c} \right)^{n-1} \quad [\text{II-1}]$$

Où :

n : Taille de l'échantillon ;

c : Réel quelconque ;

s : Solution optimale ;

x : Solutions données par l'heuristique *2-opt* ;

$\mu = \text{Min} \{x_i / 1 \leq i \leq n\}$ .

Mann et al. donnent une procédure où ils utilisent l'approximation par la loi beta. L'intervalle de confiance ainsi construit dépend de l'approximation.

Procédure donnée par Robinson et Whitlock :

Elle consiste en la construction d'un intervalle de confiance par une troncature de la valeur inférieure d'une distribution uniforme.

Soit  $X_i$  la  $i^{\text{ème}}$  plus petite valeur, on pose  $\mu = X_1$ , l'intervalle de confiance est obtenu à un niveau de  $100(1-\alpha)\%$

$$\text{Pr ob} \left[ \mu - \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) (x_2 - \mu) \leq s \leq \mu \right] \approx (1-\alpha) \quad [\text{II-2}]$$



Où :

$\alpha$  : Risque de se tromper ;

$x_2$  : Deuxième plus petite valeur.

L'estimation statistique de la longueur optimale des circuits a ensuite été traitée par de nombreux auteurs tels que : Golden (1977), Ladrinois (1982) et autre.

Tous ces différents chercheurs ont fait appel au théorème de Fisher-Tippet-Fréchet, qui est présenté ci-dessous.

### **Théorème de Fisher-Tippet-Fréchet :**

« La distribution de la plus petite (ou de la plus grande) valeur de  $n$  variables aléatoires indépendantes admettant la même loi de probabilité, tend vers la loi de Weibull, lorsque  $n$  tend vers l'infini ».

## Résumé

L'objet de ce travail consiste à :

- Suivre une approche statistique pour la construction de modèles d'estimation de la longueur de la solution optimale du problème du voyageur de commerce ;
- Présenter, implémenter, développer et analyser une méta-heuristique d'intelligence artificielle multi-agents basée sur le comportement des fourmis, en l'occurrence un système de colonie de fourmis avec désensibilisation ;
- Montrer l'intérêt des heuristiques stochastiques, tels que les algorithmes de fourmis, pour l'estimation de la solution optimale par le paramètre de position de la loi de Weibull correspondant à la distribution des solutions locales ; ceci comme réponse aux limites de l'extension de l'étude statistique au cas asymétrique.

**Mots-clefs :** TSP, STSP, ATSP, estimation statistique, longueur optimale du TSP, analyse résiduelle, algorithmes de fourmis, désensibilisation des systèmes de fourmis, méta-heuristique.

## Abstract :

The object of this work consists in:

- Following a statistical approach to build assessment models of optimal solution length of the travelling salesman problem;
- Presenting, implementing, developing and analyzing a multi-agents meta-heuristic of artificial intelligence, based on the ant colony behavior;
- Showing that the stochastic heuristics, like ant algorithms, offer a good assessment of the optimal solution length by the position parameter of Weibull law corresponding to the distribution of their local solutions; this as an answer to the limits of the widening to the asymmetric case of the statistical study.

**Keywords:** TSP, STSP, ATSP, statistic assessment, TSP optimal length, residual analysis, ant algorithm, desensitization method, meta-heuristic.

## ملخص:

يهدف هذا إلى :

- إتباع منهجية إحصائية لبناء نموذج لتقييم طول الطريق الأمثل لمشكل التاجر المسافر.
- تقديم ، إدماج و تحليل خوارزميات تقريبية للذكاء الاصطناعي المتعدد العناصر على تصرفات النمل و بالخصوص على مجتمعات النمل مع نزع الإحساس.
- تبيان مزايا الخوارزميات التقريبية الاحتمالية مثل خوارزميات النمل ، لتقييم الجمل الأمثل مع استعمال وسيط الوضعية لقانون ويبل الموافق.

**الكلمات المفتاحية:** TSP، STSP، ATSP، التقييم الإحصائي، الطول الأمثل، تحليل البواقي ، خوارزميات النمل، طريقة نزع الإحساس المؤقت ، الخوارزميات التقريبية الاحتمالية.