

UNIVERSITE D'ALGER

13/75

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

2 es

DEPARTEMENT ECONOMIE



THESE DE FIN D'ETUDES

ETUDE
DES PARAMETRES STATISTIQUES
DE LA MARCHE ALEATOIRE

application à l'informatique

Proposée par : M. F.-D. ARMINGAUD

Étudiée par : M. MIZI Mohammed

Promotion 1975

UNIVERSITE . D' ALGER
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département : Economie

THESE DE FIN D' ETUDES

EXCLU DU PRÊT

Etude des paramètres statistiques de la marche aléatoire

Application à l'informatique

الدرسة لوطنية للعلوم الهندسية
— المكتبة —
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHÈQUE

Proposée par : M. F.D. ARMINGAUD

Etudiée par : M. MIZI Mohammed

Promotion 1975

Je dédie cette étude :

A mon père

A ma mère

A mes frères

Que tous les professeurs qui ont contribué
à ma formation trouvent ici l'expression de ma
gratitude .

Je remercie M. ARMINGAUD dont les conseils
m'ont été très précieux au cours de cette étude et
dont le soutien en a facilité l'accomplissement .
Mes remerciements vont également à M. BOUMAHRAH chef
du centre de calcul pour les cours d'informatique
qu'il m'a dispensés et la documentation mise à ma
disposition . Qu'ils trouvent ici l'expression de ma
profonde reconnaissance .

PREFACE

On a dit qu'entre 1960 et 1970 les systèmes informatiques avaient progressé en performances d'un facteur 100 et que la technologie ne représentait qu'un facteur 10 dans ce chiffre . C'est à dire à quel point les techniques de structuration des données ont permis des résultats spectaculaires .

Mais entre deux structures possibles , quelle sera à priori la plus efficace ? Et qu'entend-on par efficace ? Les réponses sont susceptibles d'une infinie variation , ce qui explique d'ailleurs les différences constatées entre systèmes . La sélection naturelle se charge ensuite d'éliminer les conceptions jugées les moins bonnes : prodigieux gaspillage de matière grise .

Le travail présenté par M. MIZI représente une tentative de construction plus rationnelle du logiciel .

Les résultats donnés en annexe montrent suffisamment qu'un petit calcul permet de notables gains d'efficacité par rapport à une solution empirique .

Les "microfrancs" dont il est question ne doivent pas faire sourire , pas plus que les microsecondes dont nous sommes coutumiers : Les opérations sur les piles se chiffrent en milliers par heure et les petits ruisseaux font comme chacun sait les grandes rivières .

Cette étude s'inscrit dans la lignée des grands travaux de RANDELL en Grande-Bretagne , GELENBE en France , ARDEN aux Etats-Unis . C'est cependant la première qui soit faite en termes économiques .

Souhaitons ^{travaux} que ce soit compris .

F.D ARMINGAUD

5 Juin 1974

SOMMAIRE

I. RAPPEL : QU'EST-CE QUE LA MARCHE ALÉATOIRE ?

A. Définitions

- A.1 Marche aléatoire
- A.2 Barrière absorbante
- A.3 Barrière réfléchissante

B. Différents types de marches aléatoires

- B.1 Marche aléatoire avec une barrière absorbante
- B.2 Marche aléatoire avec deux barrières absorbantes
- B.3 Marche aléatoire avec deux barrières réfléchissantes

C. Pile

- C.1 Définition
- C.2 Gestion d'une pile implantée en mémoire
- C.3 A quoi sert une pile ?
- C.4 Appel récursif d'une procédure

D. Modèle de comportement de la pile

- D.1 Pile semi-infinie
- D.2 Pile de taille finie
- D.3 Pile finie avec recours au disque

II ETUDE DU CAS THEORIQUE DE LA PILE SEMI-INFINIE

C. Etude probabiliste

- C.1 Probabilité d'être absorbé par la barrière existante

III ETUDE DE LA PILE FINIE

C. Etude probabiliste

- C.1 Probabilité d'être absorbé par la barrière inférieure
- C.2 Probabilité d'être absorbé par la barrière supérieure

D. Calcul de l'espérance de durée de vie du processus .

- D.1 Calcul de l'espérance de durée de résidence d'un segment de pile pour d indéfinie .

IV ETUDE DE LA PILE FINIE AVEC RECOURS AU DISQUE

- A. Calcul de la probabilité d'avoir un appel disque
- B. Calcul de l'espérance de résidence ^{de durée} d'un segment avant l'apparition d'un choc
- C. Détermination de la taille optimale
- D. Blocage de segments . Facteur critique
(Recherche du couple (i, N) en fonction de $\frac{b}{a}, \bar{l}, \bar{t}$

V APPLICATION AU T 1600 EN EXPLOITATION APL

VI PERSPECTIVES

- A. Seuils de décision
- B. Introduction de distribution par l et t

INTRODUCTION

En informatique les piles offrent des facilités d'exécution des programmes écrits en langage évolué (En particulier l'APL dont le principal intérêt réside dans la possibilité qu'il donne à l'utilisateur d'écrire des procédures récursives . L'utilisation des piles évite l'analyse préalable longue destinée à éliminer cette récursivité).

Le mécanisme de la pile est utilisé dans beaucoup d'applications (notamment la réalisation des systèmes d'exploitation et des compilateurs)

Généralement un programme travaille sur un assez grand nombre de variables auxquelles on doit allouer de la place en mémoire .

L'utilisation des piles entraîne un gain en encombrement mémoire dans le cas d'une allocation dynamique qui permet d'attribuer aux variables des mémoires aux instants où l'exécution du programme le nécessite .

Le but de notre étude consiste à étudier la pile assimilée à un système physique évoluant au cours du temps , d'un état à un autre , suivant qu'on empile ou on dépile une série de renseignements appelés "contexte" . Cette succession d'évènements obéit à une certaine loi chronologique de distribution $D(t)$ et représente ainsi une marche aléatoire dont les caractéristiques dépendent de celles de la pile .

Comme toute pile comporte une taille maximale (car aucun ordinateur ne possède une mémoire infinie) , il serait intéressant de calculer la taille optimale qui entraîne un cout minimum résultant de l'exécution du programme . Ce calcul nécessite une étude mathématique préalable concernant le comportement de la pile au cours du temps .

I- RAPPEL

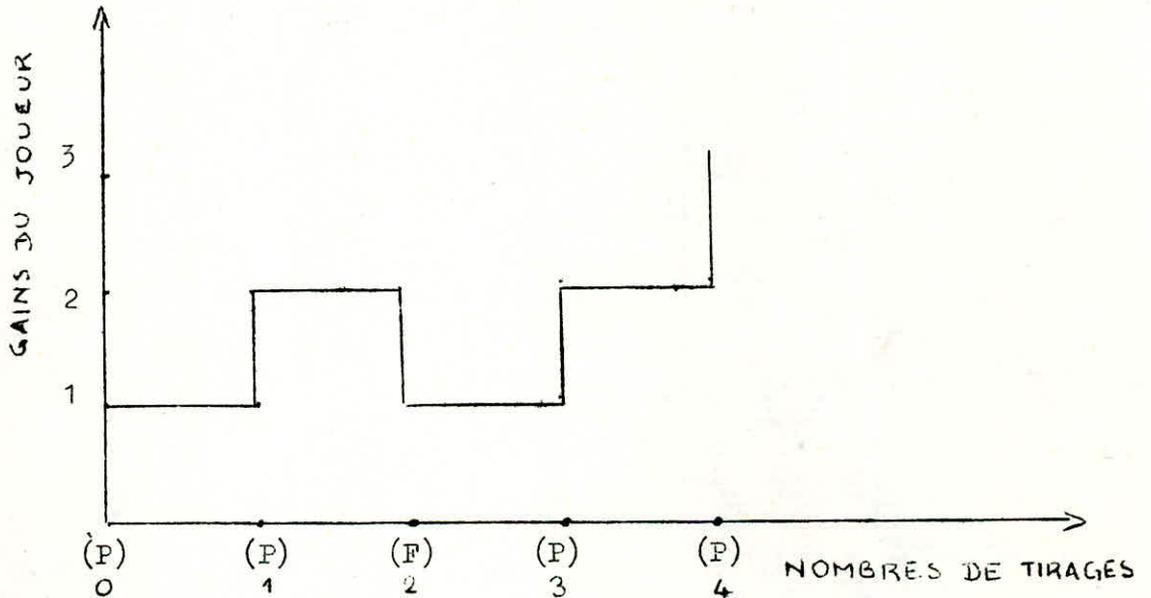
QU'EST-CE QUE LA MARCHE ALEATOIRE ?

A. DEFINITIONS

A.1 Marche aléatoire:

Soit une suite d'époques T_n ; la marche aléatoire se définit comme étant une succession de "sauts" d'un état à un autre, effectués par un système physique dans le temps, avec des probabilités de transition données.

Exemple: gains au jeu de pile ou face



A.2 Barrière absorbante:

C'est une frontière rendant compte du domaine de variabilité d'un système physique, et entraînant un arrêt absolu de celui-ci lorsqu'elle est atteinte.

A.3 Barrière réfléchissante:

C'est aussi une frontière limitant le domaine de variabilité d'un système physique, et lui donnant une possibilité de retour lorsqu'elle est atteinte.

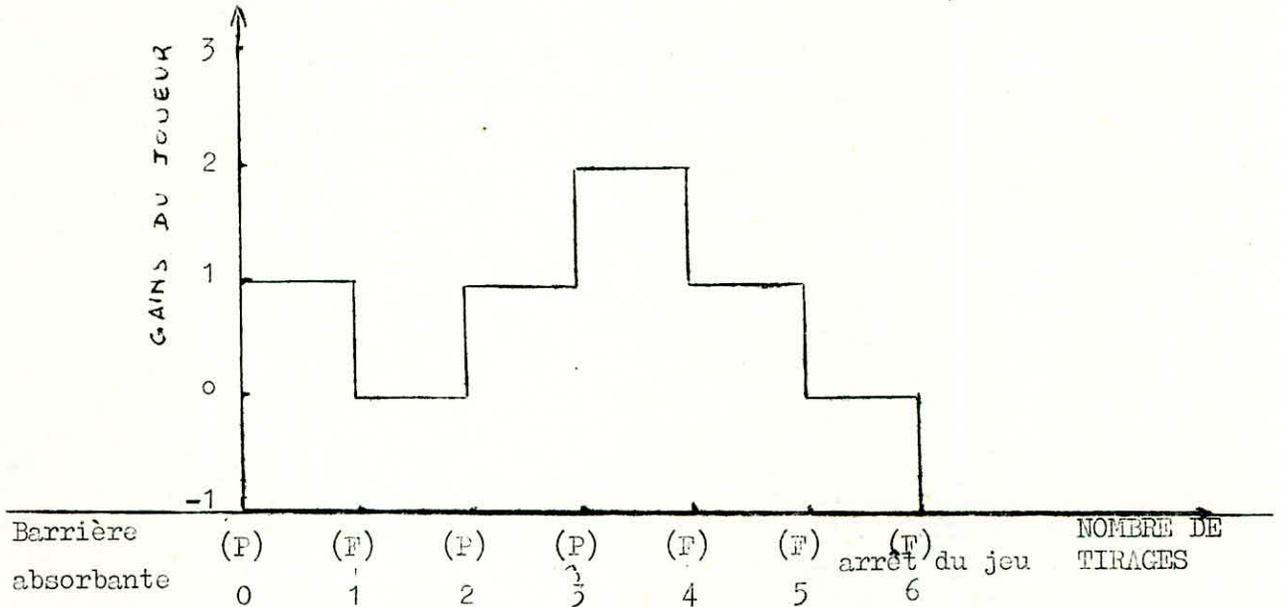
B. DIFFERENTS TYPES DE MARCHES ALEATOIRES

B.1 Marche aléatoire avec une barrière absorbante

Dans ce cas le système évolue dans un domaine ne présentant qu'une seule borne.

Exemple : gains d'un joueur prudent à pile ou face .

*Le joueur refuse ici de continuer à jouer si ses pertes dépassent 1 .



B.2 Marche aléatoire avec deux barrières absorbantes.

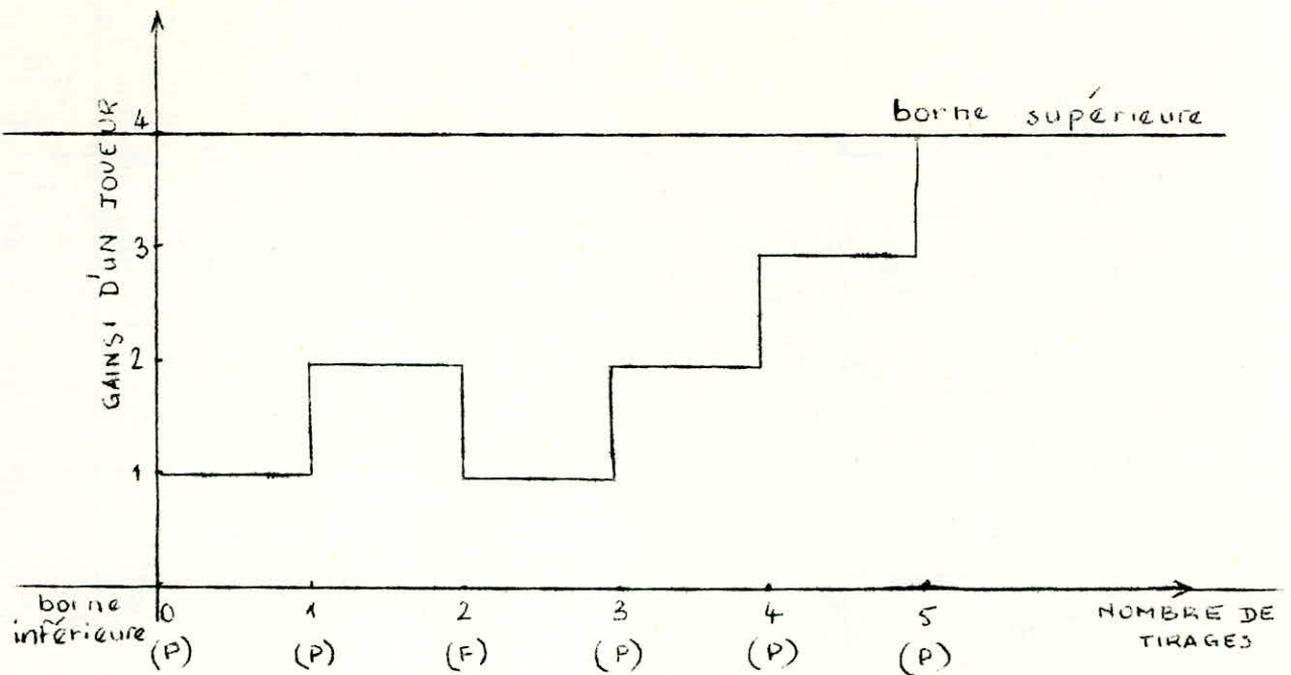
Les fluctuations du système s'opèrent ici dans une bande présentant une borne supérieure et une borne inférieure.

Exemple : Gains d'un joueur prudent et scrupuleux à pile ou face .

*Le joueur refuse de jouer si ses pertes dépassent 1 .

*Il refuse de jouer si ses gains dépassent 4 par égards pour son adversaire .

Schéma correspondant



B.3 Marche aléatoire avec deux barrières réfléchissantes

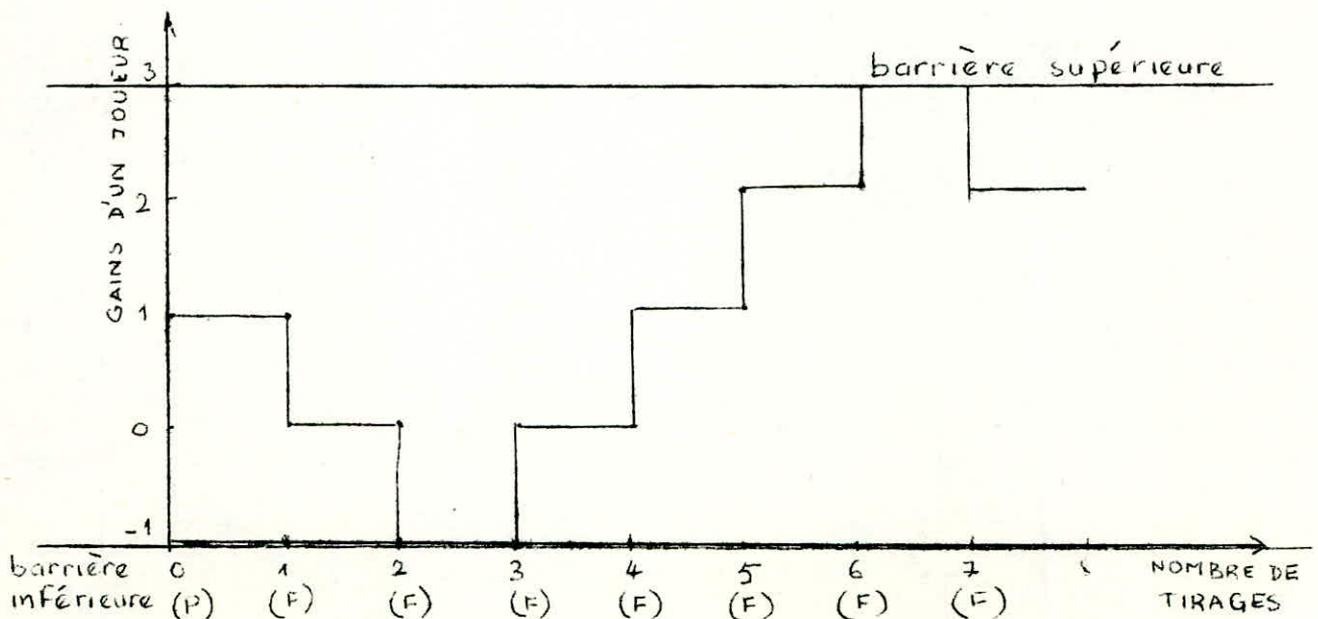
Lorsqu'on atteint une borne, le système ne peut évoluer que vers l'intérieur de la bande.

Exemple : Gains d'un joueur prudent, scrupuleux et schizophrène à pile ou face .

*Le joueur refuse de jouer si ses pertes dépassent 1 .

*Il refuse de jouer si ses gains dépassent 3.

*Quand il atteint l'un de ces deux états, il se prend pour son adversaire .



Sur la figure, le joueur change d'identité aux époques 2 et 7 .

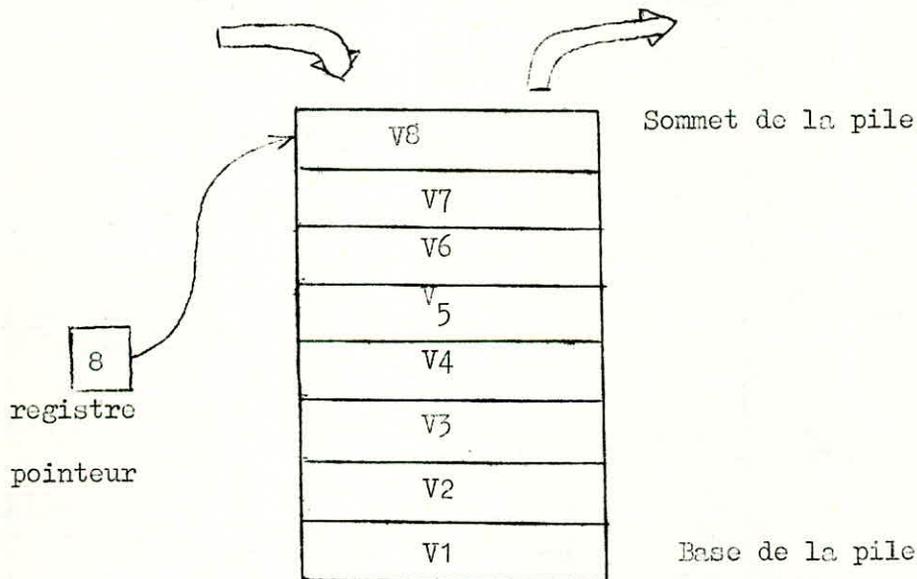
C. LA PILE

C.1 Définition

Une pile est un mécanisme permettant de ranger des informations de telle sorte que l'information disponible soit toujours la dernière à avoir été rangée. Elle correspond à la formule " dernier entré, premier sorti " de gestion des stocks (LIFO)

C.2 Gestion d'une pile implantée en mémoire.

Une pile peut être simulée dans une mémoire. Elle est alors définie par deux adresses, celle de sa base et celle de son sommet. L'adresse de base de la pile reste fixe, tandis que l'adresse du sommet est modifiée chaque fois qu'on introduit ou extrait une information.



On peut atteindre le sommet de pile grâce au registre pointeur, les autres informations restant " en sommeil " tant qu'elles ne sont pas pointées.

C.3 A quoi sert une pile ?

L'usage d'une pile permet de représenter sur une machine la "structure de blocs " chère aux informaticiens, tant à la compilation qu'à

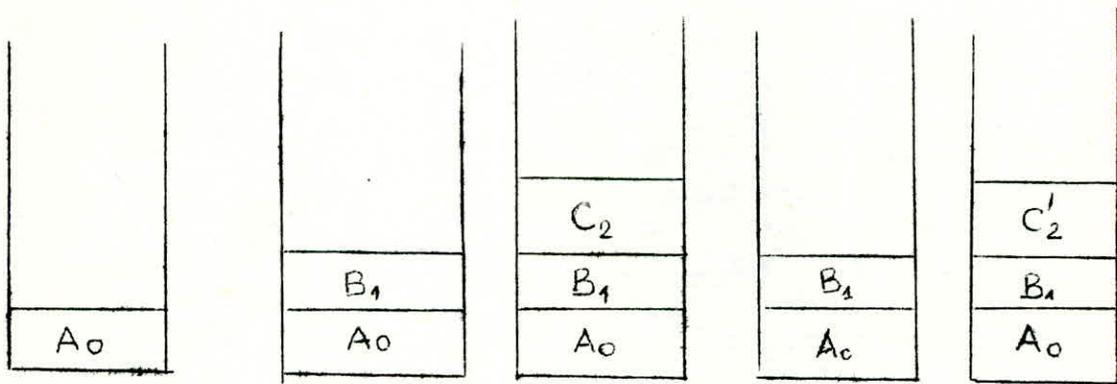
l'exécution. C'est ce dernier point que nous allons étudier.

Un programme peut se schématiser comme un ensemble de procédures. (Une procédure est un élément de programme analogue à un sous-programme). Lorsqu'une procédure A appelle une procédure B, il faut conserver quelque part les renseignements sur A qui permettront d'en reprendre l'exécution à la fin de B. Ces renseignements sont nommés "contexte".

Les procédures pouvant s'appeler l'une l'autre, la structure de pile s'impose pour retrouver les contextes dans le bon ordre : le dernier posé est le premier repris. Ceci se voit sur l'exemple suivant :

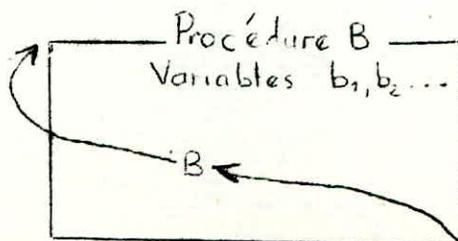
A	appelle	B		empiler	contexte	A
B	"	C		"	"	B
C	"	B		"	"	C
fin de		B		dépiler	"	C
C	"	D		empiler	contexte	C

nous aurons la schématisation suivante :



C.4 Appel récursif d'une procédure

Exemple :



Si nous exécutons la procédure B ; des mémoires ont été affectées aux variables locales $b_1, b_2 \dots$. Supposons que la procédure B s'appelle elle-même ; il faudra attribuer alors à nouveau des mémoires aux variables $b_1, b_2 \dots$; sachant que maintenant on ne doit avoir accès qu'aux variables nouvellement définies, non aux anciennes ; par contre au retour on devra retrouver les anciennes. Les valeurs des variables locales font donc partie du contexte à empiler.

D. MODELE DE COMPORTEMENT DE LA PILE

On peut assimiler la pile à un système physique évoluant d'un état à un autre suivant qu'on empile ou on déempile. L'appel d'une fonction correspond à l'empilement d'une série de renseignements appelés contexte. Le retour de la fonction correspond au dépilement de ce contexte.

Pour un état donné de la pile, le prochain évènement peut-être un empilement E ou un dépilement D. En l'absence de toute autre information, nous devons donc poser $\Pr (E) = \Pr (D) = 1/2$, sauf évidemment pour le fond de la pile, où $\Pr (E) = 1$

La taille d'un contexte est variable. Il faut donc raisonner sur la distribution des tailles, que nous allons remplacer dans un premier temps par la taille moyenne pour dégrossir le problème.

Le comportement du sommet de la pile est celui d'une marche aléatoire. Nous nous intéressons à sa localité, c'est à dire au comportement de sa distribution W de présence en fonction du temps qui dépend de l'emplacement du sommet de pile.

On peut associer à chaque type de pile la marche aléatoire correspondante.

D.1 Pile semi-infinie :

Est une pile dans laquelle on peut empiler indéfiniment avec une contrainte de débordement. (Car on ne peut dépiler plus qu'on en a empilé) . Le modèle de marche aléatoire correspondant est celui de la marche aléatoire avec une barrière absorbante.

D.2 Pile de taille finie :

Présente une taille fixe N, Le modèle équivalent est celui de la

marche aléatoire avec deux barrières absorbantes.

D.3 Pile de taille finie avec recours au disque

Possède une taille fixe N avec l'avantage de faire un appel "disque" à chaque fois qu'on atteint une des frontières de la pile. La marche aléatoire correspondante ^{peut-être} ~~est~~ celle présentant deux barrières réfléchissantes.

II_ ETUDE DU CAS THEORIQUE
DE LA PILE SEMI-INFINIE

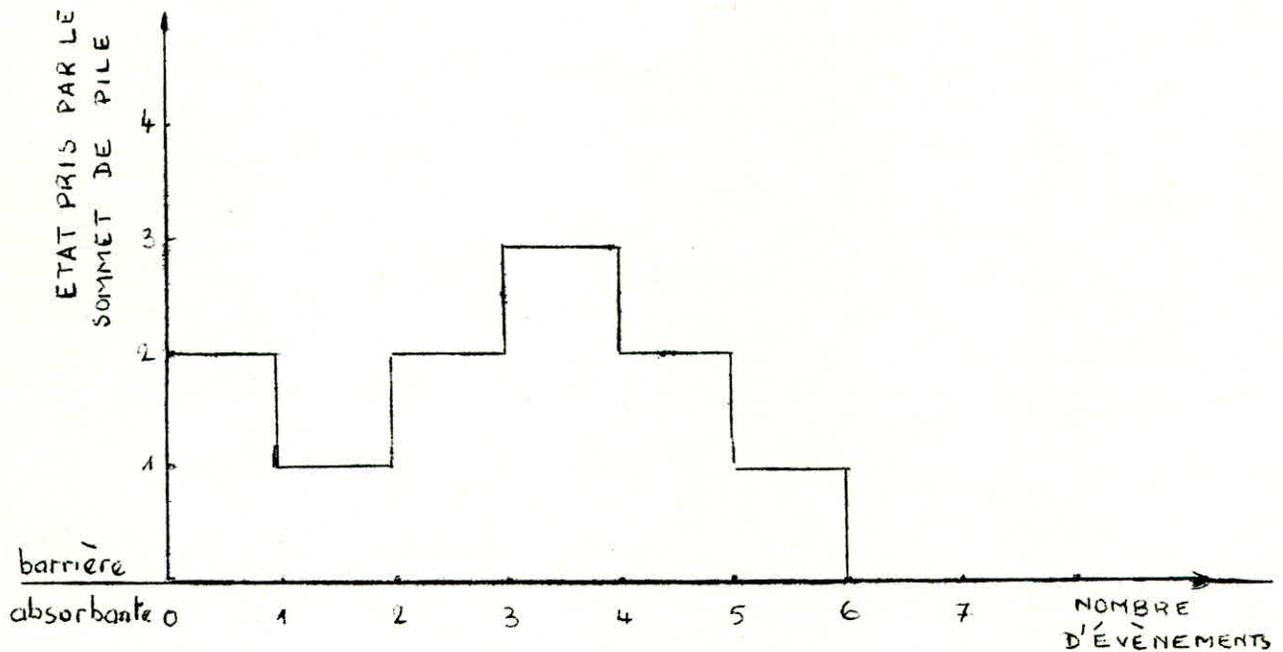
A. RAPPEL

La pile semi-infinie est une pile présentant une base, offrant la possibilité d'empiler indéfiniment avec une contrainte de débordement.

B. MODELE DE MARCHE ALEATOIRE

La marche aléatoire associée est celle présentant une barrière absorbante.

Exemple:



* Comportement de la pile au cours du temps suivant qu'on empile ou on dépile .

* Sur l'exemple ci-dessus nous pouvons remarquer que le processus s'arrête d'évoluer à l'époque 6 vu qu'à cette dernière la barrière est atteinte

C. ETUDE PROBABILISTE

Pour cette étude il est nécessaire de définir notre variable d'entrée qui est :

d : distance initiale au fond de pile (qui s'interprète aussi comme étant le nombre de contextes présents dans la pile au départ).

On appelle contexte un ensemble de mots constituant un élément de la pile .

On se propose de calculer la probabilité d'être absorbé par la barrière existante . Pour cela énonçons les théorèmes suivants qui vont nous servir par la suite .

Théorème des probabilités totales :

Si A et B sont des événements compatibles alors:

$$\Pr(A + B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A.B) \quad (1)$$

Théorème des probabilités composées :

La probabilité de réalisation simultanée de deux événements A et B , est égale au produit de la probabilité de B par la probabilité de A , sachant que B s'est déjà produit . Les événements A et B sont donc compatibles

$$\Pr(A.B) = \Pr(B).\Pr(A/B) \quad (2)$$

C.1 Probabilité d'être absorbé par la barrière existante

Soit $Q(r)$ la probabilité d'être absorbé par la barrière alors qu'on a r contextes dans la pile .

r : représente une variable muette indiquant la position du sommet de pile

L'état 0 est le seul état absorbant .

En appliquant (1) et (2) , en considérant que les évènements "empiler" et "dépiler" sont incompatibles .

$$Q(r) = \frac{1}{2} \cdot (Q(r + 1) + Q(r - 1)) \quad (3)$$

r est positif .

Avec les conditions limites suivantes:

$$Q(0) = 1 \quad ; \quad Q(\text{infini}) = 0 \quad (3')$$

Utilisons la récurrence (3) pour calculer Q(r) en fonction de Q(1)

$$Q(1) = \frac{1}{2} \cdot (Q(2) + Q(0)) \quad \text{d'où}$$

$$Q(2) = 2 \cdot Q(1) - Q(0)$$

$$Q(2) = \frac{1}{2} \cdot (Q(3) + Q(1)) \quad \text{ce qui implique que}$$

$$Q(3) = 3 \cdot Q(1) - 2 \cdot Q(0)$$

$$Q(3) = \frac{1}{2} \cdot (Q(4) + Q(2))$$

$$Q(4) = 4 \cdot Q(1) - 3 \cdot Q(0)$$

A partir de ces résultats on peut tirer la récurrence suivante :

$$Q(r) = r \cdot Q(1) - (r - 1) \cdot Q(0) \quad (4)$$

Supposons que (4) est vraie pour r et prouvons qu' elle l'est pour r + 1 .

On a d'après (3)

$$Q(r + 1) = 2 \cdot Q(r) - Q(r - 1)$$

$$Q(r + 1) = 2 \cdot r \cdot Q(1) - 2 \cdot (r - 1) \cdot Q(0) - (r - 1) \cdot Q(1) + (r - 2) \cdot Q(0)$$

$$\text{D'où } Q(r + 1) = (r + 1) \cdot Q(1) - r \cdot Q(0)$$

La vérification pour r + 1 est obtenue, on en conclut que la relation de récurrence (4) est vraie .

$Q(1)$ est la probabilité d'être absorbé par la barrière alors qu'au départ la pile contenait un élément (c'est à dire donc pour $d = 1$)

Reprenons le même calcul que précédemment avec $d = 2$ ce qui nous amène à exprimer $Q(r)$ en fonction de $Q(2)$.

En appliquant toujours la relation (3) on aura :

$$Q(1) = \frac{1}{2} \cdot (Q(2) + Q(0))$$

$$2 \cdot Q(2) = Q(3) + Q(1)$$

$$Q(3) = \frac{3}{2} \cdot Q(2) - \frac{1}{2} Q(0)$$

On obtient de la même façon $Q(4)$:

$$Q(4) = \frac{4}{2} Q(2) - \frac{2}{2} Q(0)$$

d'où la récurrence suivante :

$$Q(r) = \frac{r}{2} Q(2) - \frac{(r-2)}{2} Q(0) \quad (5)$$

On vérifie cette relation en appliquant un raisonnement analogue au précédent .

Le calcul pour $d = 3$ nous donne en utilisant la relation (3)

$$2 \cdot Q(1) = Q(2) + Q(0)$$

$$2 \cdot Q(2) = Q(3) + Q(1)$$

$$Q(1) = \frac{1}{3} Q(3) + \frac{2}{3} Q(0)$$

$$Q(2) = \frac{2}{3} Q(3) + \frac{1}{3} Q(0)$$

$$Q(4) = \frac{4}{3} Q(3) - \frac{1}{3} Q(0)$$

Donc pour r on pourra écrire :

$$Q(r) = \frac{r}{3} Q(3) - \frac{(r-3)}{3} Q(0) \quad (6)$$

D'après (4) , (5) et (6) on en déduit la récurrence suivante :

$$Q(r) = \frac{r}{d} Q(d) - \frac{(r-d)}{d} Q(0) \quad (7)$$

Pour vérifier cette relation, on supposera qu'elle est vraie pour d et montrons qu'elle est pour $d + 1$.

D'après (7) on a :

$$Q(d) = \frac{d Q(r) + (r-d) Q(0)}{r}$$

(3) nous donne :

$$Q(d+1) = 2 Q(d) - Q(d-1)$$

$$Q(d+1) = \frac{2d Q(r) + 2(r-d) Q(0) - (d-1) Q(r) + (r-d+1) Q(0)}{r}$$

$$Q(d+1) = \frac{Q(r) (2d - d + 1) + Q(0) (2r - 2d - r + d - 1)}{r}$$

$$Q(d+1) = \frac{(d+1) Q(r) + (r-d-1) Q(0)}{r}$$

$$Q(r) = \frac{r}{d+1} Q(d+1) - \frac{(r-d-1)}{d+1} Q(0)$$

Ce qui nous montre que la relation (7) est vraie .

En utilisant (3') on aura en faisant tendre r vers l'infini :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} Q(d) = 1$$

Conclusion:

Tous les programmes se terminent .

III ETUDE DE LA PILE FINIE

A. RAPPEL

Comme il a été vu précédemment cette pile présente une taille fixe N avec deux contraintes de débordement .

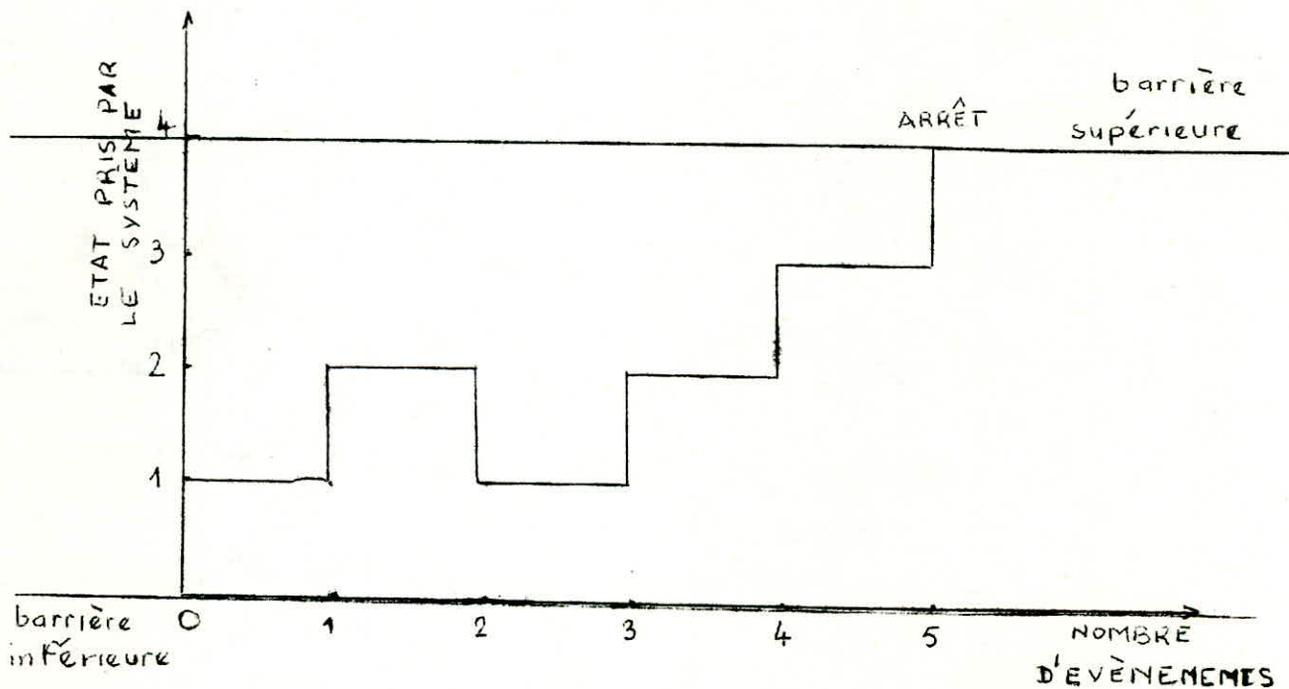
.On ne peut empiler plus qu'il en est possible .

.On ne peut aussi dépiler plus qu'on en a empilé .

B. SCHEMA DE LA MARCHE ALEATOIRE CORRESPONDANTE

La marche aléatoire associée est celle présentant deux barrières absorbantes .

Exemple :



. Comportement de la pile au cours du temps suivant qu'on empile ou on dépile .

.Le processus s'arrêtera d'évoluer lorsque l'une des barrières est atteinte . Sur notre exemple, ceci se produit à l'époque 5 .

C. ETUDE PROBABILISTE

Dans cette étude, on se propose de calculer la probabilité d'être absorbé par la barrière supérieure ainsi que celle d'être absorbé par la barrière inférieure .

Nos variables d'entrées seront :

N: taille de la pile

d: distance au fond de pile

C.1 Probabilité d'être absorbé par la barrière inférieure

Il faut noter que pour une pile de taille N on a N + 1 états (0 , N) possibles .

En appliquant les théorèmes (1) ,(2) on aura

$$Q(r) = \frac{1}{2} (Q(r + 1) + Q(r - 1)) \quad (3)$$

r étant compris entre 0 et N + 1

Les états 0 et N + 1 sont appelés états absorbants .On peut donc dresser les conditions aux limites suivantes :

$$Q(0) = 1 \quad ; \quad Q(N + 1) = 0 \quad (8)$$

On a vu dans le cas de la pile semi-infinie la relation (3) nous donner :

$$Q(r) = \frac{r}{d} Q(d) - \frac{(r - d)}{d} Q(0) \quad (7)$$

En introduisant les conditions (8) :

$$Q(N + 1) = \frac{(N + 1)}{d} Q(d) - \frac{(N + 1 - d)}{d} Q(0)$$

D'où
$$Q(d) = \frac{N + 1 - d}{N + 1} \quad (9)$$

$Q(d)$ est la probabilité d'être absorbé par la barrière inférieure alors qu'on avait au départ d éléments dans la pile .

C.2 Probabilité d'être absorbé par la barrière supérieure

Soit $P(r)$ la probabilité cherchée .

Notre relation (3) devient :

$$P(r) = \frac{1}{2} (P(r + 1) + P(r - 1)) \quad (10)$$

r : marque la position du sommet de la pile par rapport à sa base elle sera comprise entre 0 et $N + 1$

Nos conditions limites deviennent :

$$P(0) = 0 \quad ; \quad P(N + 1) = 1 \quad (11)$$

On remarque que la relation (10) a la même forme que (3) avec un raisonnement analogue on peut écrire :

$$P(r) = \frac{r}{d} P(d) - \frac{(r - d)}{d} P(0) \quad (12)$$

L'introduction de (11) permet d'avoir

$$P(N + 1) = \frac{(N + 1)}{d} P(d) - \frac{(N + 1 - d)}{d} P(0)$$

d'où
$$P(d) = \frac{d}{N + 1} \quad (13)$$

$P(d)$ est la probabilité d'être absorbé par la barrière supérieure alors qu'au départ on avait d éléments dans la pile .

Remarque

$$Q(d) + P(d) = \frac{N + 1 - d}{N + 1} + \frac{d}{N + 1} = 1 \quad (14)$$

D. CALCUL DE L'ESPERANCE DE DUREE DE VIE DU PROCESSUS

Soit $t_N^n(d)$ la probabilité pour que le processus d'empilement et de dépilement dure n sachant qu'au départ on se trouvait à une distance d du fond de pile .

$$t_N^n(d) = \Pr(T_N(d) = n)$$

N : taille de la pile

n : $n^{\text{ème}}$ saut

d : distance de départ

$T_N(d)$: durée du processus

D'après (14) on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} t_N^n(d) = 1 \quad (15)$$

qui nous amène à conclure que le processus a une durée finie .

Posons $D(d) = E(T_N(d)) =$ l'espérance de durée de vie du processus pour une pile de taille N alors qu'au départ on avait d éléments .

En appliquant (1) et (2) on aura :

$$t_N^n(r) = \frac{1}{2} (t_N^{n-1}(r+1) + t_N^{n-1}(r-1)) \quad (16)$$

Comme elle a été définie au début r est toujours une variable muette donnant la position du sommet de la pile par rapport à sa base .

En multipliant les deux membres de (16) par n on obtient :

$$n t_N^n(r) = \frac{1}{2} (n t_N^{n-1}(r+1) + n t_N^{n-1}(r-1)) \quad (17)$$

En sommant sur n la relation nous donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n t_N^n(r) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} n t_N^{n-1}(r+1) + \sum_{n=0}^{\infty} n t_N^{n-1}(r-1) \right) \quad (18)$$

Ecrivons (18) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n t_N^n(r) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) t_N^{n-1}(r+1) + \sum_{n=0}^{\infty} t_N^{n-1}(r+1) + \sum_{n=0}^{\infty} t_N^{n-1}(r-1) \right) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) t_N^{n-1}(r+1) \end{aligned} \quad (19)$$

En tenant compte de (15), (19) s'écrit :

$$D(r) = \frac{1}{2} (D(r+1) + 1 + D(r-1) + 1)$$

C'est à dire

$$D(r) = \frac{1}{2} (D(r+1) + D(r-1)) + 1 \quad (20)$$

Il est clair que si l'on se trouve dans l'un des états absorbants l'espérance de durée de vie du processus est nulle, ce qui nous permet d'établir les conditions aux limites relatives :

$$D(0) = D(N+1) = 0 \quad (21)$$

Nous allons nous servir de (20) pour expliciter $D(r)$ en fonction de $D(1)$.

$$D(1) = \frac{1}{2} (D(2) + D(0)) + 1$$

d'où $D(2) = 2 D(1) - 2$ en remplaçant $D(0)$ par 0

$$D(2) = \frac{1}{2} (D(3) + D(1)) + 1$$

$$D(3) = 3 D(1) - 6$$

De la même manière on a :

$$D(4) = 4 D(1) - 12$$

On remarque que tous les termes s'obtiennent par une expression récurrente :

$$D(r) = r D(1) - r(r - 1) \quad (22)$$

Pour la validité de (22), démontrons qu'elle est applicable pour $r + 1$ en admettant qu'elle l'est pour r .

(20) nous donne :

$$2 D(r) = D(r + 1) + D(r - 1) + 2$$

$$D(r + 1) = 2 D(r) - D(r - 1) - 2$$

$$D(r + 1) = 2 \cdot r D(1) - 2 r(r - 1) - (r - 1) D(1) + (r - 1)(r - 2) - 2$$

$$D(r + 1) = D(1) (2 r - r + 1) - 2 r^2 + 2 r + r^2 - 3 r + 2 - 2$$

$$D(r + 1) = (r + 1) D(1) - (r + 1)r$$

Donc on conclut que (22) est vraie .

Reprenons le même calcul que précédemment pour exprimer $D(r)$ en fonction de $D(2)$ en utilisant la relation (20) .

$$D(1) = \frac{1}{2} D(2) + 1$$

$$2 D(2) = D(3) + D(1) + 2$$

$$D(3) = 2 D(2) - \frac{1}{2} D(2) - 2 - 1$$

$$D(3) = \frac{3}{2} D(2) - 3$$

De la même façon on a :

$$D(4) = \frac{4}{2} D(2) - 8$$

En étendant le calcul à r on en déduit la récurrence suivante :

$$D(r) = \frac{r}{2} D(2) - r(r - 2) \quad (23)$$

La validité de (23) est prouvée par le même raisonnement appliqué à (22).

Si on introduit $D(3)$ les formes obtenues seront :

$$D(1) = \frac{1}{2} D(2) + 1$$

$$D(2) = \frac{1}{2} (D(3) + D(1)) + 1$$

$$\frac{3}{4} D(2) = \frac{2}{4} D(3) + \frac{6}{4}$$

$$D(2) = \frac{2}{3} D(3) + 2$$

$$2 D(3) = D(4) + D(2) + 2$$

$$D(4) = 2 D(3) - \frac{2}{3} D(3) - 2 - 2$$

$$D(4) = \frac{4}{3} D(3) - 4$$

Et ainsi de suite pour r on aura :

$$D(r) = \frac{r}{3} D(3) - r(r - 3) \quad (24)$$

(24) est vérifiée comme (22) .

De (22), (23), (24) on tire la récurrence globale :

$$D(r) = \frac{r}{d} D(d) - r(r - d) \quad (25)$$

En prenant comme hypothèse que (25) est vraie pour d démontrons qu'elle l'est pour $d + 1$.

De (25) on tire :

$$D(d) = \frac{d}{r} D(r) + d(r - d)$$

on a aussi d'après (20) :

$$D(d) = \frac{1}{2} (D(d + 1) + D(d - 1)) + 1$$

d'où l'on a :

$$D(d + 1) = 2 D(d) - D(d - 1) - 2$$

$$D(d + 1) = \frac{2d}{r} D(r) + 2d(r - d) - \frac{(d - 1)}{r} D(r) - (d - 1)(r - d + 1) - 2$$

$$D(d + 1) = \frac{(2d - d + 1)}{r} D(r) + (2rd - 2d^2 - rd + r + d^2 - 2d + 1) - 2$$

$$D(d + 1) = \frac{(d + 1)}{r} D(r) + (rd - d^2 - 2d - 1 + r)$$

$$D(d + 1) = \frac{(d + 1)}{r} D(r) + (d + 1)(r - d - 1)$$

Et finalement :

$$D(r) = \frac{r}{d + 1} D(d + 1) - r(r - d - 1)$$

La relation (25) étant vérifiée pour $d + 1$ est donc vraie .

En utilisant (21) on aura :

$$D(N + 1) = \frac{N + 1}{d} D(d) - (N + 1)(N + 1 - d)$$

d'où

$$D(d) = d(N + 1 - d) \tag{26}$$

Comme dans la pile on empile ou dépile des contextes de taille TCTX et de durée DCTX notre espérance de durée de vie prendra la forme suivante :

$$e(d/N) = d(N + 1 - d) \cdot DCTX \quad (26)$$

$e(d/N)$ représente alors la durée de résidence avec au départ d contextes dans une pile pouvant contenir N .

En prenant $DCTX = 1ms$ et une pile dans laquelle on peut ranger 10 contextes on obtient le tableau A qui nous permet de tracer l'histogramme des espérances de durée en fonction de distance au fond de pile qui figure sur le graphique B .

(Dans le tableau A on fait varier N de 1 à 10 et d de 1 à N en supposant que $DCTX$ est égale à $1ms$.)

Remarque

Evaluons la différence :

$$DIFF = (e(d/N) - e(d/N - 1))$$

Nous aurons en appliquant (26) :

$$DIFF = d(N + 1 - d) \cdot DCTX - d(N - d) \cdot DCTX$$

$$d'où \quad DIFF = d \cdot DCTX \quad (27)$$

Pour des commodités de calcul on utilisera la relation (27) .

On remarque que les valeurs calculées sont symétriques et donnent à l'histogramme une forme parabolique .(Il est normal que si l'on se trouve à proximité des barrières l'espérance de durée

TABLEAU A

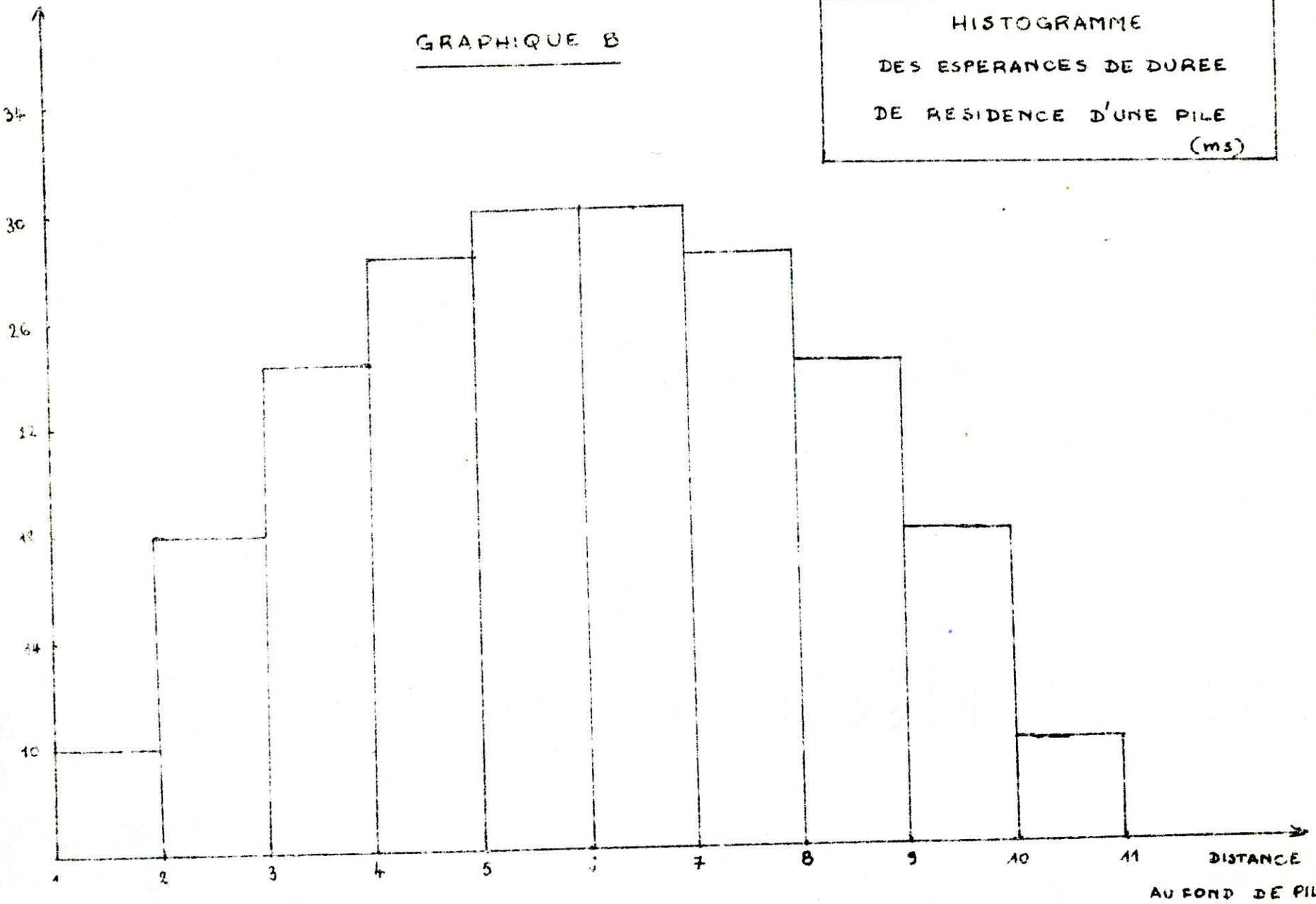
N \ d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	.								
2	2	2								
3	3	4	3							
4	4	6	6	4						
5	5	8	9	8	5					
6	6	10	12	12	10	6				
7	7	12	15	16	15	12	7			
8	8	14	18	20	20	18	14	8		
9	9	16	21	24	25	24	21	16	9	
10	10	18	24	28	30	30	28	24	18	10

Tableau représentatif de la relation (26) .

ESPERANCE DE DUREE DE VIE
ms

GRAPHIQUE B

HISTOGRAMME
DES ESPERANCES DE DUREE
DE RESIDENCE D'UNE PILE
(ms)



DISTANCE
AU FOND DE PILE

diminue et elle est maximale quand on occupe l'état se trouvant au milieu de la pile .(Il faut noter au passage qu'une pile ayant une taille paire présente deux états rendant maximale $e(d/N)$, alors qu'une pile de taille impaire n'en présente qu'un seul .)

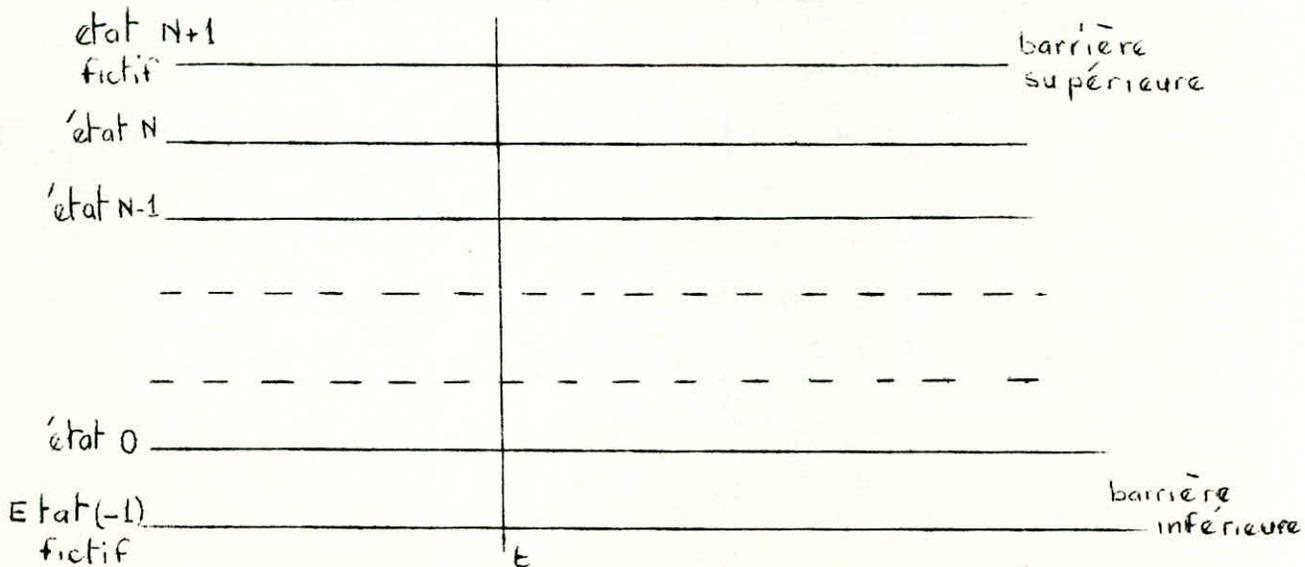
Sur notre graphique B les états 5 et 6 donnent des valeurs maximales et égales .

D.1 Calcul de l'espérance de durée de résidence d'un segment de pile pour d indéfinie

Soit un segment de taille N constituant une partie de la pile. Il en résulte $N + 1$ états .

La traduction de notre état de connaissance sur le processus nous conduit à affirmer que tous les états doivent être équiprobables en l'absence de toute information (par exemple sur le comportement antérieur) .

Le segment sera représenté de la manière suivante :



On a à chaque instant t une probabilité $p(d) = \frac{1}{N + 1}$ de se trouver dans un état quelconque du segment .

Ce qui nous permet d'avoir :

$$E(n/N) = \sum_{d=0}^{d=N} e(d/N) \cdot p(d) \quad (28)$$

n : l'époque

N : taille du segment

$E(n/N)$: est une espérance de durée à la différence de celle établie précédemment, c'est qu'on refuse l'information sur d .

Formule approximative

$$\text{En approximant } e(d/N) = \sum_{d=0}^{d=N} d(N+1-d) \cdot \text{DCTX} \quad \text{par l'intégrale}$$

$$\text{DCTX} \int_0^N d(N+1-d) = \frac{N^2(N+3)}{6} \cdot \text{DCTX}$$

$$\text{d'où } \text{EAPP}(n/N) = \frac{N^2(N+3)}{6(N+1)} \cdot \text{DCTX} \quad (29)$$

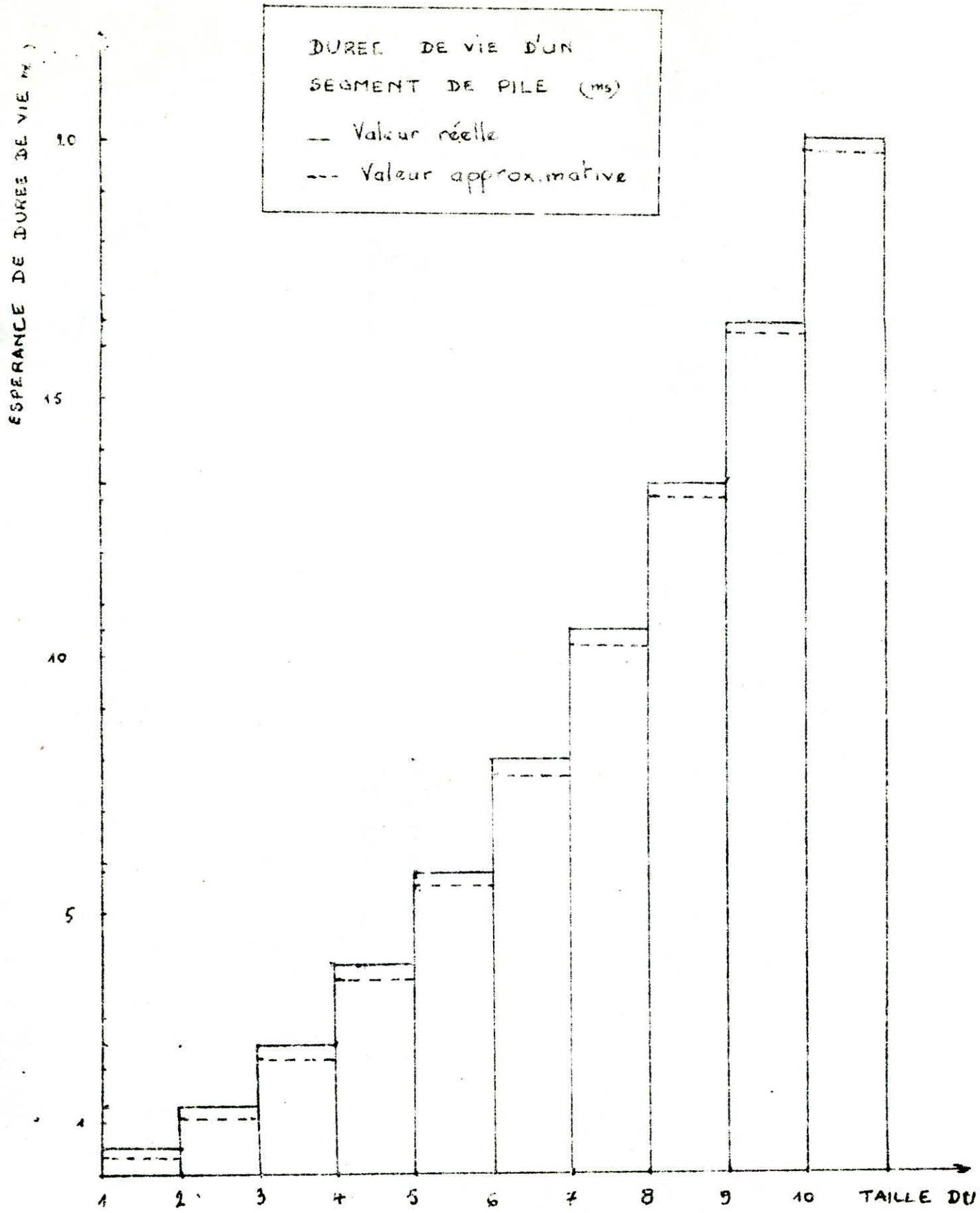
Les formules (28) , (29) nous ont amenés à dresser le tableau C sur lequel figure la taille du segment , la valeur réelle $E(n/N)$, la valeur approximative $\text{EAPP}(n/N)$, la valeur absolue de la différence et l'erreur commise . Pour des raisons simplificatrices on prendra pour le calcul $\text{DCTX} = 1\text{ms}$.

On remarque sur le tableau C que ^{le pourcentage} l'erreur est inversement proportionnelle à la taille du segment . La différence entre les deux valeurs augmente avec N .

L'espérance de durée augmente très vite avec N et DCTX (tableaux I, J, K) ce qui entraîne un coût important, aux utilisateurs, de la place mémoire occupée . Il serait donc intéressant de trouver une taille optimale ; c'est ce qui concerne l'étude économique que nous verrons plus loin .

TABLEAU C

N	$E(n/N)$ (ms)	$EAPP(n/N)$ (ms)	$ E(n/N) - EAPP(n/N) $ (ms)	$\frac{ E(n/N) - EAPP(n/N) }{E(n/N)} \times 10^{-2}$
1	0.5	0.33	0.17	0.33
2	1.33	1.11	0.22	0.16
3	2.5	2.25	0.25	0.10
4	4	3.73	0.27	0.07
5	5.83	5.55	0.28	0.048
6	8	7.71	0.29	0.035
7	10.5	10.21	0.29	0.027
8	13.33	13.04	0.29	0.022
9	16.5	16.2	0.3	0.018
10	20	19.69	0.30	0.015



GRAPHIQUE CORRESPONDANT AU TABLEAU C. ^{SEGMENT}

TABLEAU I

DCTX = 0.062 s

N	E(n/N) (s)	EAPP(n/N) (s)	E(n/N) - EAPP(n/N) en valeur absolue (s)	POURCENTAGE D'ERREUR $\times 10^{-2}$
1	0.0312	0.0208	0.0104	0.3333
2	0.0833	0.0694	0.0138	0.1666
3	0.1562	0.1406	0.0156	0.1000
4	0.2499	0.2333	0.0166	0.0666
5	0.3645	0.3472	0.0173	0.0476
6	0.4999	0.4821	0.0178	0.0357
7	0.6562	0.6380	0.0182	0.0277
8	0.8333	0.8148	0.0185	0.0222
9	1.0312	1.0125	0.0187	0.0151
10	1.2499	1.2310	0.0189	0.0151

TABLEAU J

DCTX = 0.125 s

N	E(n/N) (s)	EAPP(n/N) (s)	E(n/N) - EAPP(n/N) en valeur absolue (s)	Pourcentage d'erreur $\times 10^{-2}$
1	0.0625	0.0416	0.0208	0.3333
2	0.16666	0.1388	0.0277	0.1666
3	0.3125	0.2812	0.0312	0.1000
4	0.4999	0.4666	0.0333	0.0666
5	0.7291	0.6944	0.0347	0.0476
6	0.9999	0.9642	0.0357	0.0357
7	1.3125	1.2760	0.0364	0.0277
8	1.6666	1.6296	0.0370	0.0222
9	2.0624	2.0250	0.0374	0.0181
10	2.4999	2.4621	0.0378	0.0151

TABLEAU K

DCTX = 0.250 s

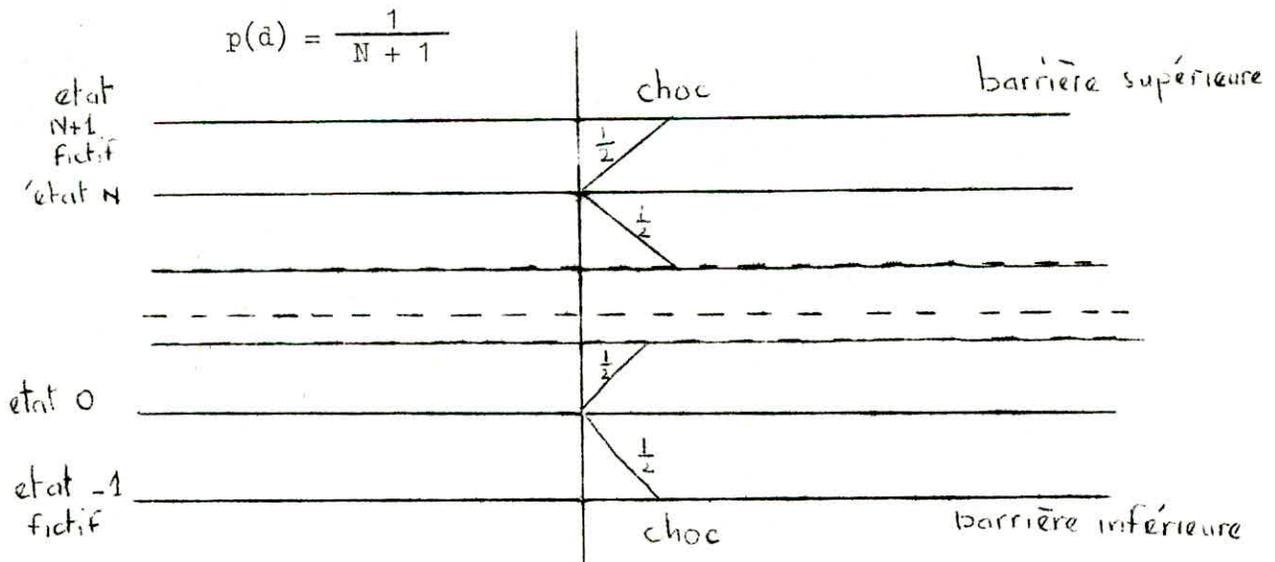
N	E(n/N) (s)	EAPP(n/N) (s)	$E(n/N) - EAPP(n/N)$ en valeur absolue	Pourcentage d'erreur $\times 10^{-2}$
1	0.1250	0.0833	0.0416	0.3333
2	0.3333	0.2777	0.0555	0.1666
3	0.6250	0.5625	0.0625	0.1000
4	0.9999	0.9333	0.0666	0.0666
5	1.4583	1.3885	0.0694	0.0476
6	1.9999	1.9285	0.0714	0.0357
7	2.6250	2.5520	0.0729	0.0277
8	3.3333	3.2592	0.0740	0.0222
9	4.1249	4.0500	0.0749	0.0181
10	4.9999	4.9242	0.0757	0.151

IV ETUDE DE LA PILE FINIE
AVEC RECOURS AU DISQUE .

Ici on ^{est} limité par la place que met à notre disposition la pile, mais en contre partie il est possible d'appeler le disque à chaque fois que cela s'avère nécessaire (par exemple lorsqu'il ne reste plus d'état libre pouvant accepter un contexte on a alors recours au disque pour stocker le contenu de la pile et ainsi la dégager).

A. CALCUL DE LA PROBABILITE D'AVOIR UN APPEL DISQUE

On a vu précédemment que notre état de connaissance sur le processus nous amène à considérer que tous les états sont équiprobables en l'absence d'autre information .Il en résulte donc qu'à une époque t la probabilité de se trouver dans un état quelconque a pour expression :



D'après le schéma on transite d'un état à un autre avec une probabilité 0.5 . On a deux possibilités d'avoir un choc :

.En touchant la barrière inférieure .

En touchant la barrière supérieure

Cette possibilité ne se présente pas entre les états intermédiaires.

D'où la probabilité d'avoir un choc, donc un appel disque s'exprime de la manière suivante :

$$\text{Pr}(\text{choc}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N+1} \right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{N+1} \right) + \dots + 0 \cdot \left(\frac{1}{N+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N+1} \right) \quad (30)$$

$$\text{Pr}(\text{choc}) = \frac{1}{N+1} = \text{PAPP} = p \quad (31)$$

Remarque

Pour une pile semi-infinie on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} p(d) = 0$$

Ce qui traduit le fait qu'on n'aura pas recours au disque car on disposera de suffisamment de place pour exécuter un programme .

Le cas $N=0$ pour lequel $p=1$ est un cas impossible .

Evaluons p pour différentes valeurs de N , ce qui nous conduit à dresser le tableau F dont résulte le graphique G

La probabilité d'avoir un appel disque est inversement proportionnelle à la taille du segment c'est ce qui explique le fait que sur le graphique G , l'histogramme représenté est tel que si l'on joint les sommets des abscisses correspondantes on obtient une hyperbole .

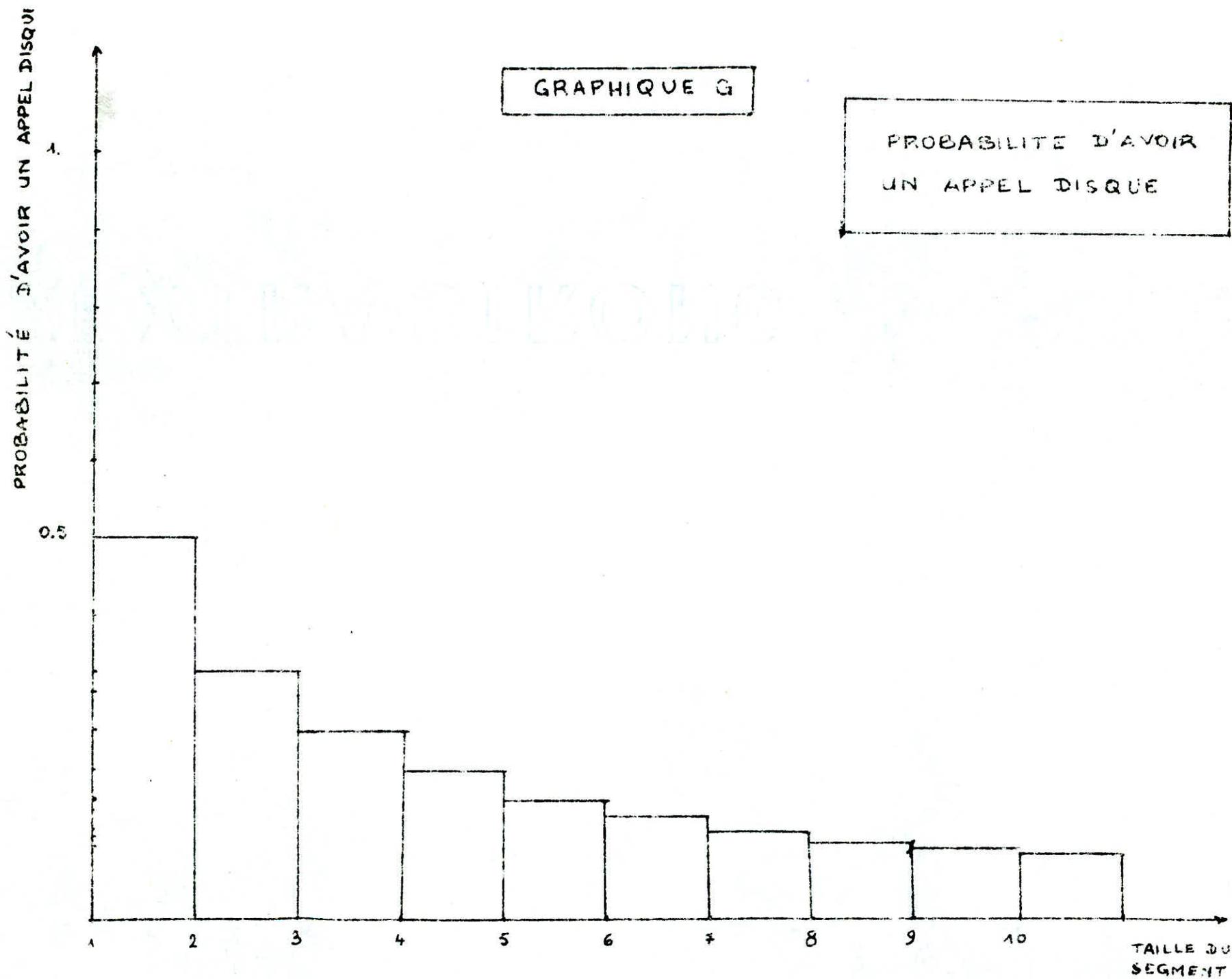
Le graphique G nous montre que plus la taille de la pile est grande moins on aura recours au disque .

TABLEAU F

N	PAPP
1	0.5
2	0.33
3	0.25
4	0.20
5	0.166
6	0.14
7	0.125
8	0.11
9	0,1
10	0.09

GRAPHIQUE G

PROBABILITE D'AVOIR
UN APPEL DISQUE



B. CALCUL DE L'ESPERANCE DE DUREE DE RESIDENCE D'UN SEGMENT AVANT L'APPARITION D'UN CHOC .

A chaque instant , un choc peut se produire avec une probabilité p et peut ne pas l'être avec une probabilité $(1 - p)$.

Soit $ESPO(t)$ l'espérance de temps .

Dans un premier temps on va faire appel à un raisonnement intuitif , par lequel on dresse le tableau suivant :

Epoque à laquelle le choc peut se produire	Durée	Probabilité de réalisation
0	0	p
1	1	$(1-p)p$
2	2	$(1-p)^2 p$
...
n	n	$(1-p)^n p$

$$\text{Donc } ESPO(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n p (1-p)^n \quad (32)$$

Nous pouvons aussi écrire :

$$ESPO(t) = p(1-p) \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}$$

Considérons la série géométrique $S = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n$ qui est convergente car $|1-p| < 1$; sa somme a pour expression :

$$SOM = \frac{1}{1 - (1-p)} = \frac{1}{p}$$

$$\text{d'où } \frac{dS}{dp} = \frac{d \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n}{dp} = - \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} = - \frac{1}{p^2} \quad (33)$$

L'equation (33) implique $ESPO(t)$, on a alors :

$$ESPO(t) = p(1-p) \cdot \frac{1}{p} 2 = \frac{1-p}{p} \quad (34)$$

Comme $p = \frac{1}{N+1}$, en le remplaçant dans (34) on en déduit :

$$ESPO(t) = N \quad (35)$$

Vu que l'on travaille sur des contextes ,la relation (35) devient :

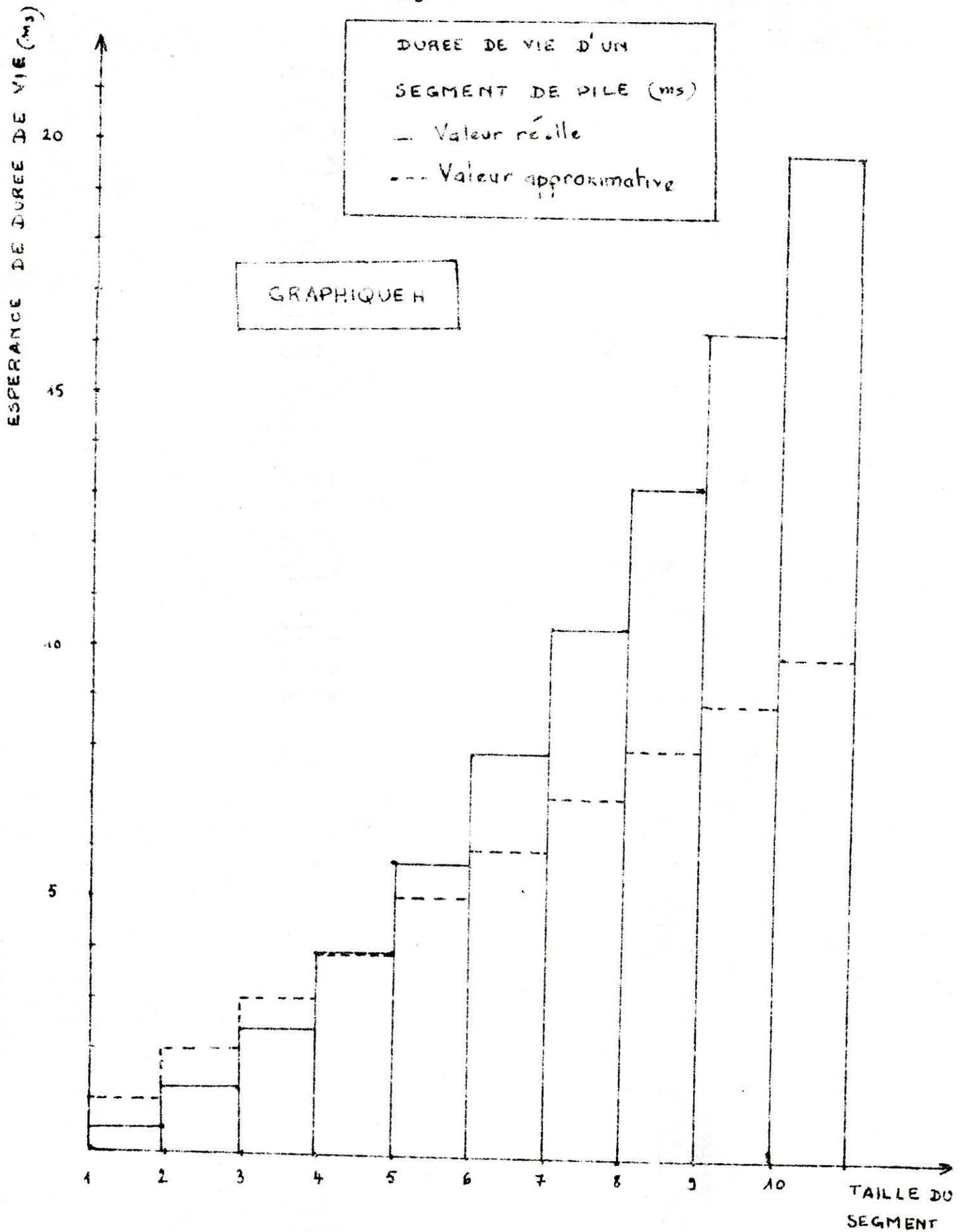
$$ESPO(t) = N \cdot DCTX \quad (36)$$

DCTX étant la durée d'un contexte .

$ESPO(t)$ représente l'espérance de durée du processus en ignorant l'information sur d (distance de départ au fond du segment de pile). Comparée à (28) et (29) elle constitue une formule approximative .Ceci peut se voir sur le graphique H . Comparée à la relation (28) l'approximation est acceptable pour des tailles de segments inférieures à 6 .

$$DCTX = 4ms$$

taille du segment	ESPO(t) (ms)
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10



C. DETERMINATION DE LA TAILLE OPTIMALE D'UNE PILE

On désire réaliser une pile . On dispose pour cela :

.D'une mémoire centrale dont le coût est de a francs le mot par seconde .

.D'une mémoire secondaire qui est gratuite ,mais chaque transfert coûte b francs .

La taille critique de rentabilité de la pile est fonction de sa durée , c'est à dire du nombre d'appels de fonctions conduisant à son débordement ou à son épuisement .

Il en résulte pour une pile de taille N le coût suivant :

$$\text{COUT} = N \cdot \text{TCTX} \cdot a \cdot E(n/N) + b$$

TCTX étant la la taille d'un contexte .

Il est intéressant ^{de calculer} le coût ramené à un élément de pile de façon à constituer une base commune pour tous les coûts et les rendre ainsi comparables .

$$\text{COUT UNITAIRE} = \frac{a}{N} \cdot E(n/N) + \frac{b}{N \cdot \text{TCTX}} \quad (37)$$

Maintenant le problème qui se pose est celui d'une minimisation .

Il suffit de minimiser l'expression (37) et la valeur de N réalisant ceci constitue la taille optimale .

(Voir tableau F sur lequel on peut lire les tailles optimales, avec les coûts respectifs , obtenues en faisant varier DCTX et TCTX .

TABLEAU F

VALEURS OPTIMALES DES COUTS (nanoF)

T.C.TX D.C.TX (ms)	8	16	32
15.6	855.66	542.63	344.71
62.5	1379.85	877.41	561.24
125	1754.83	1122.49	719.44
250	2244.99	1438.89	920.91

TAILLES OPTIMALES (PILE)

T.C.TX D.C.TX (ms)	8	16	32
15.6	24	19	15
62.5	15	12	10
125	12	10	7
250	10	7	6

D. BLOCAGE DE SEGMENTS , FACTEUR CRITIQUE

Pile segmentée

Elle est constituée de blocs appelés segments et présente beaucoup d'avantages .

La pile présentée sous cette forme nous donne la possibilité de ramener ou vider un segment sans nuire à tout le reste .

Quand on fait un appel disque , on a une latence T qui correspond à un temps T d'inaction de la mémoire qui est facturé . Cette latence est d'autant plus importante que la taille du segment est grande . Il est donc avantageux de segmenter la pile donc de diviser sa taille de façon à minimiser les coûts résultants des appels disque et de la location mémoire .

Facteur critique :

Soient les piles A et B présentant respectivement (i) et $(i - 1)$ segments de même taille N .

La taille de la pile A sera donc $i.N$

La " " " B " " $(i - 1) . N$

a étant le cout du mot mémoire par seconde

b " " de l'appel disque .

T_{CTX} = taille d'un contexte .

D_{CTX} = durée d'un contexte .

Les coûts respectifs résultants par unité de temps sont :

$$\text{COUT}(A) = a.i.N.TCTX + \frac{b}{e(d/i.N)}$$

$$\text{COUT}(B) = a.(i - 1).N.TCTX + \frac{b}{e(d/(i-1).N)}$$

l'équation $\text{COUT}(A) = \text{COUT}(B)$ détermine le facteur critique ,c'est à dire la valeur du rapport $\frac{b}{a}$ pour laquelle on est indifférent pour les deux valeurs indiquant le nombre maximal de segments résidents dans la pile .

$$a.i.N.TCTX + \frac{b}{e(d/i.N)} = a.(i - 1).N.TCTX + \frac{b}{e(d/(i-1).N)}$$

$$a.N.TCTX (i - i + 1) = b \left(\frac{1}{e(d/(i-1).N)} - \frac{1}{e(d/i.N)} \right)$$

$$a.N.TCTX = b \left(\frac{- e(d/(i-1).N) + e(d/i.N)}{e(d/i.N) \cdot e(d/(i-1).N)} \right)$$

d'où l'on tire le facteur critique :

$$\frac{b}{a} = N.TCTX \left(\frac{e(d/(i-1).N).e(d/i.N)}{e(d/i.N) - e(d/(i-1).N)} \right)$$

Les expressions de $e(d/i.N)$ et $e(d/(i-1).N)$ sont les suivantes :

On considère que la distance d est comptée à partir du moment où on entre dans le dernier segment de la pile .

d : distance au fond de pile qui n'est pas la même dans les deux cas.

Pour la pile A on aura :

$$d = (i - 1).N + 1$$

Pour la pile B d a pour expression :

$$d = (i - 2).N + 1$$

d'où en appliquant (26) on obtient :

$$e(d/i.N) = ((i - 1).N + 1).(i.N + 1 - (i - 1).N - 1).DCTX$$

$$e(d/i.N) = ((i - 1).N + 1).(N).DCTX \quad (26')$$

$e(d/(i-1).N)$ se déduit de (26') en remplaçant i par $i-1$ dans cette relation :

$$e(d/(i-1).N) = ((i - 2).N + 1).(N).DCTX$$

En remplaçant $e(d/i.N)$ et $e(d/(i-1).N)$ par leur expression

équivalente dans $\frac{b}{a}$:

$$\frac{b}{a} = N.TCTX (((i - 2).N + 1).((i - 1).N + 1).DCTX \quad (50)$$

APPLICATION

Les calculs ont été faits sur ordinateur pour les valeurs suivantes :

$\frac{b}{a} =$	10 000	20000	40 000	80 000	160 000	nano F
\bar{l}	1	2	4	8	16	32
\bar{t}	0.008	0.016	0.032	0.128	0.256	secondes
\bar{l}	correspond à TCTX					
\bar{t}	" à DCTX					

N : taille du segment variant de 1 à 200

i : nombre de segments variant de 1 à 8

La procédure utilisée consiste à calculer dans un premier temps la valeur de l'expression :

$$N \cdot \bar{I}(((i - 2) \cdot N + 1) \cdot ((i - 1) \cdot N + 1)) \cdot \bar{t}$$

Cette valeur doit être comparée à celle de $\frac{b}{a}$ donnée dans le tableau . Si ces deux valeurs sont égales , alors on est en présence d'un facteur critique . Cette égalité est réalisée pour le couple optimal de valeurs(N , i) en fonction de $\frac{b}{a}$, \bar{I} , \bar{t} .

Voir tableaux K1 et K1' sur lequel on peut lire les valeurs des facteurs critiques à quelques erreurs près . Le calcul du coût correspondant nécessite la connaissance des différentes valeurs de a respectives à chaque facteur réel . Le manque de ces données nous a poussé à prendre a constant et égal à 174 nano F .

TABLEAU K1

TCTX	DCTX (ms)	Facteur réel $\frac{b}{a}$	Facteur critique	différence en valeur absolue	Pourcentage d'erreur $\times 10^4$	Taille optimal du segment	Nombre optimal de segments	Coût/s Nano-francs
1	8	10 000	10000.08	0.08	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	59333.88
1	16	20 000	20000.16	0.16	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	59333.88
2	8	20 000	20000.16	0.16	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	118667.76
1	32	40 000	40000.32	0.32	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	59333.88
2	16	40000	40000.32	0.32	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	118667.76
4	8	40000	40000.32	0.32	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	237335.53
1	64	80 000	80000.64	0.64	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	59333.88
2	32	80 000	80000.64	0.64	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	118667.76
4	16	80000	80000.64	0.64	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	237335.53
8	8	80000	80000.64	0.64	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	474671.06

97

TABLEAU K1'

TCTX	DCTX (ms)	Facteur réel $\frac{p}{a}$	Facteur critique	Différence en valeur absolue	Pourcentage d'erreur $\times 10^2$	Taille optimale du segment	Nombre optimal de segments	Coût nano-francs
1	128	160 000	160001.28	1.28	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	59333.88
2	64	160 000	16 0001.28	1.28	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	118 667.76
4	32	160 000	16 0001.28	1.28	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	237 335.53
8	16	160 000	16 0001.28	1.28	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	474 671.06
16	8	160 000	16 0001.28	1.28	$8 \cdot 10^{-6}$	85	3	949 342.12

47

V APPLICATION .

T 1600 EN EXPLOITATION APL .

a. Présentation.

Le T1600 est un ordinateur à vocation temps réel possédant une mémoire vive (extensible de 4 à 64K mots) et un système d'interruption varié indispensable pour des applications temps réel . Ses dispositifs d'entrées-sorties sont très puissants .Il possède aussi des périphériques facilitant le dialogue avec l'utilisateur . La mémoire utilise des tores de ferrite de lithium , l'unité de traitement est microprogrammée avec une mémoire permanente .

Pour la suite des calculs K est pris égal à 1024 .

DISQUE :

256 K	coûtent	60KFrancs
512 K	"	75 K Francs

Pour une variation de l'espace disque de 256 K correspond différence de prix de 15 K Francs

MEMOIRE CENTRALE

Capacité de 4 K coûtant 20 K Francs .

d'où l'on peut tirer le coût du mot mémoire :

$$\text{coût du mot mémoire} = \frac{20 \text{ K F}}{4 \text{ K}} = 5 \text{ F}$$

COUT DU SYSTEME :

Le cout du système s'exprime de la manière suivante :

$$\text{CPU} + \text{MEMOIRE} + \text{DISQUE} = 300 \text{ K F}$$

DUREE DU SYSTEME

- La durée est de 4ans .
- l'année correspond à 256 jours
- Il travaille 8 heures par jour
- La durée totale d'utilisation est de :

$$\text{DUREE} = 4 \cdot 256 \cdot 8 = 8 \text{ K heures}$$

A partir de ces données on peut tirer les valeurs suivantes :

Prix de la configuration par unité de temps

$$\text{Prix.config} = \frac{\text{cout total du système}}{\text{durée du système}}$$

$$\text{Prix.config} = \frac{300 \text{ K F}}{8 \text{ K heures}} = 37,5 \text{ F/heure}$$

$$\text{Prix.config.seconde} = \frac{37,5}{3600} = 10,4 \text{mF}$$

Prix du mot mémoire par unité de temps :

$$\text{Prix.mémoire.heure} = \frac{5 \text{ F}}{8 \text{ K}} = 625 \text{ micro F}$$

$$\text{Prix.mémoire.seconde} = \frac{625 \text{ micro F}}{3600} = 174 \text{ nano F}$$

Prix de la mémoire secondaire (disque)

On a vu que pour une variation de 256 K on a une différence de prix de 15KF .

d'où l'on peut tirer le coût du mot en mémoire secondaire :

$$\text{Coût.mot.disque} = \frac{15 \text{ K F}}{256 \text{ K}} = 59 \text{ m F}$$

Coût du mot disque par unité de temps

$$\text{Coût.mot.disque.heure} = \frac{59 \text{ m F}}{8 \text{ K}} = 7,37 \text{ micro F}$$

$$\text{Coût.mot.disque.seconde} = \frac{7,37 \text{ micro F}}{3600} = 2,04 \text{ nano F}$$

Un appel disque correspond à 10,6 ms d'inaction :

$$10,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10,6 = 110,24 \text{ microF}$$

Coût de l'appel disque :

Coût de l'appel disque = coût de la configuration en 10,6 ms

pour des commodités de calcul ce coût a été pris égal à 110 micro F .

PILE OPTIMALE POUR LE T 1600

Soit une pile comportant i segments résidents de mêmes tailles N .

b = coût de l'appel disque

a = coût du mot mémoire /seconde .

DCTX = durée d'un contexte

TCTX = taille d'un contexte .

TMOTS = nombre global de mots contenus dans la pile .

$$TMOTS = i.N.TCTX$$

La distance est prise en compte lorsqu'on entre dans le dernier segment .

$$DIST = ((i - 1).N + 1)$$

En appliquant (26) on aura l'espérance de durée du processus pour une distance DIST du fond de pile .

$$DUREE = DIST.(i.N + 1 - DIST).DCTX$$

$$DUREE = ((i - 1).N + 1).(i.N + 1 - (i - 1).N - 1)$$

$$DUREE = ((i - 1).N + 1).(N)$$

Il en résulte un coût dont l'expression est :

$$COUT = \text{coût par unité de temps}$$

$$COUT = a.TMOTS + \frac{b}{DUREE}$$

On obtient un coût pour chaque couple (i , N) en fonction de a , b TCTX et DCTX .Ce coût doit être minimum .

Pour chaque valeur de TCTX et DCTX donnée on a un minimum de coût correspondant au couple (i , N) . Il serait donc intéressant de rechercher tous ces couples .

Les calculs ont été faits sur ordinateur avec les valeurs suivantes :

DCTX en secondes

0,0156 0,0312 0,0625 0,125 0,25 0,5 1 2

TCTX

1 2 4 8 16 32

N variant :

2 4 8 16 32 64 128

i : allant de 1 à 3

a = 174 nano F , b = 110 000 nano F

Les tableaux représentatifs sont R , S , T sur lesquelles figurent respectivement les coûts optimaux , la taille optimale de la pile et enfin le nombre de segments pouvant y être .

Sur ces tableaux la lecture se fait de la manière suivante :

Exemple :

Sur le tableau R on lit pour DCTX = 0,0156 et TCTX = 1 le coût 17802,6 , à cette valeur correspond la taille 64 et le nombre de segments 2 qu'on lit respectivement sur les tableaux S et T .

Les coûts représentés sont des coûts par unité de temps. On remarque qu'ils augmentent avec la taille du contexte .

TABLEAU R
VALEURS OPTIMALES DES COÛTS EN NANO-FRANCS

TCTX DCTX Δ	1	2	4	8	16	32
0.0156	17802.6	28938.6	46741.3	70426.3	114970.3	185396.7
0.0312	14469.3	23370.6	35213.1	57485.1	92698.3	137976.9
0.0625	11685.3	17606.5	28742.5	46349.1	68988.4	113532.4
0.125	8803.2	14371.2	23174.5	34494.2	56766.2	88544.0
0.25	7185.6	11587.2	17247.1	28383.1	44272.0	66544.0
0.5	5793.6	8623.5	14191.5	22136.0	33272.0	55408.0
1	4311.7	7095.7	11068.0	16636.0	27704.0	40605.3
2	3547.8	5534.0	8310.0	13852.0	20302.6	31438.6

TABLEAU 5
TAILLES OPTIMALES.

TCTX \ DCTX Δ	1	2	4	8	16	32
0.0156	64	64	48	32	32	24
0.0312	64	48	32	32	24	16
0.0625	48	32	32	24	16	16
0.125	32	32	24	16	16	8
0.25	32	24	16	16	8	8
0.5	24	16	16	8	8	6
1	16	16	8	8	6	4
2	16	8	8	6	4	4

TABLEAU T

NOMBRE OPTIMAL DE SEGMENTS

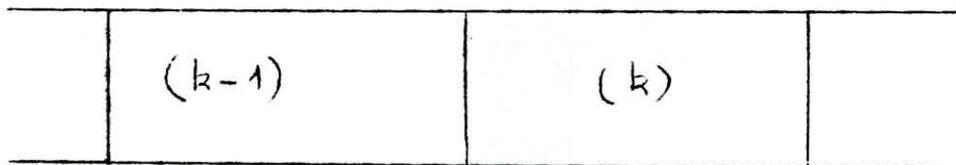
TCTX DCTX Δ	1	2	4	8	16	32
0.0156	2	2	3	2	2	3
0.0312	2	3	2	2	3	2
0.0625	3	2	2	3	2	2
0.125	2	2	3	2	2	2
0.25	2	3	2	2	2	2
0.5	3	2	2	2	2	3
1	2	2	2	2	3	2
2	2	2	2	3	2	2

VI PERSPECTIVES .

A. SEUILS DE DECISION

Dans ce cas on utilisera la pile segmentée vu qu'elle présente un coût optimum intéressant comparé à celui entraîné par la pile finie où on prend en considération toute la taille . (la pile finie implantée en mémoire coûte chère , sa fiabilité est $\frac{1}{N+1}$ si sa taille est N) .

Soit la pile segmentée suivante :



Dans ce qui suit les coûts concernent le segment k et y sont imputés à celui-ci .(k-1) est supposé présent en mémoire .

Si on est à une distance d du fond du segment $(k-1)$: deux éventualités se présentent à nous et notre problème consiste à décider de la solution la plus avantageuse qui occasionne un coût minimum .

Les deux possibilités sont les suivantes :

- a. Anticiper le virement du segment $(k-1)$ sur disque.
- b .Ne pas virer le segment $(k-1)$.

Nous allons étudier séparément ces deux solutions en insistant sur les coûts qu'elles entraînent .

a. Anticiper le virement du segment (k - 1) sur disque

a.1 Dans le cas où l'on sort par le bord supérieur du segment

Cet évènement est réalisé avec une probabilité $P(d)$.

$$P(d) = \frac{d}{N + 1}$$

si N est la taille du segment

Soit $t_s(d)$ l'espérance de durée de vie du segment lorsqu'on sort par le bord supérieur

d : distance du fond du segment

Comme l'appel disque entraîne une latence T qui représente un temps pendant lequel la mémoire est immobilisée . Alors si on anticipe l'appel disque $t_s(d)$ avant l'atteinte du bord supérieur on aura économisé ce temps et ainsi on n'attendra plus que pendant un temps $(T - t_s(d))$ au lieu de T .

Il en résulte le coût suivant :

Soit C le coût de toute la configuration par unité de temps :

T : latence disque

b : étant le coût de l'appel disque

On aura un gain dont l'expression est :

$$\text{GAIN} = b - C.(T - t_s(d))$$

On remarque que pour maximiser ce gain on doit minimiser l'expression $C.(T - t_s(d))$ et on aura donc :

$$\max \text{GAIN} = b - \min (C.(T - t_s(d)) , 0)$$

Ce gain aura lieu avec une probabilité $P(d)$.

$$\max \text{GAIN} = P(d) \cdot (b - \min (C \cdot (T - t_s(d)), 0)) \quad (C1)$$

a.2 Dans le cas où l'on sort par le bord inférieur

Ce cas se présentera avec une probabilité égale à

$$1 - P(d) = \frac{N + 1 - d}{N + 1} \quad \text{et entraîne un coût égal à :}$$

$$\text{COUT} = b \cdot (1 - P(d))$$

$$\text{COUT} = b \cdot \frac{N + 1 - d}{N + 1} \quad (C2)$$

D'après cette relation le coût décroît suivant que d augmente .

(Voir graphique L; $N = 10$; d variant de 1 à 10 ; b égal à 110 microF)

Le tableau correspondant est L .

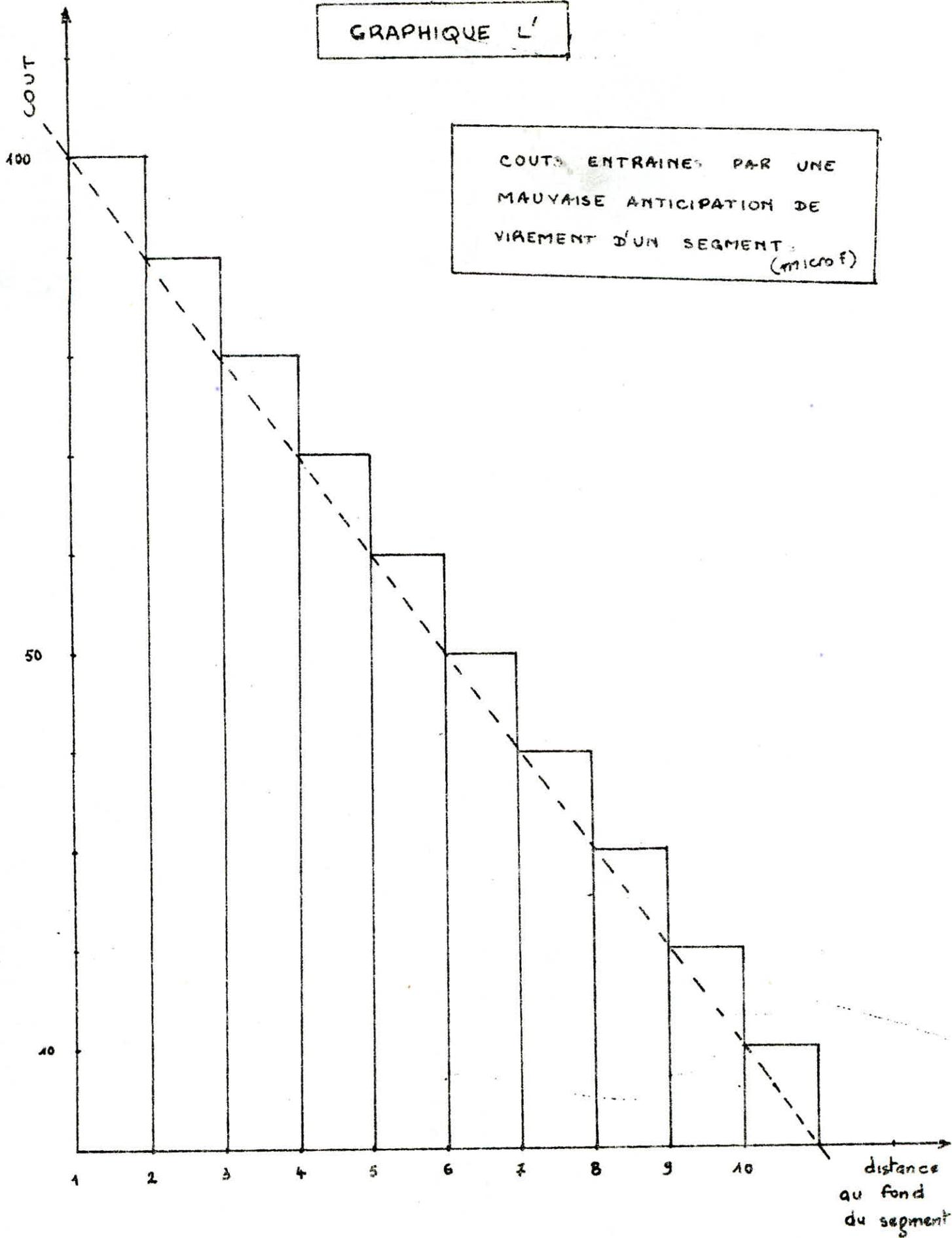
En résumé l'intersection des courbes C1 et C2 nous donne la distance à laquelle il faut commencer le virement du segment $(k - 1)$ pour une taille de segment donnée N . L'essai de plusieurs valeurs de N nous amènera à connaître les valeurs optimales .

TABLEAU L

d	COUT (micro francs)
1	100
2	90
3	80
4	70
5	60
6	50
7	40
8	30
9	20
10	10

$$\text{COUT} = b \cdot \frac{N+1-d}{N+1}$$

GRAPHIQUE L'



b. Décision de ne pas virer le segment (k - 1) sur disque

b.1 Dans le cas où on sort par le bord supérieur du segment

Le coût entraîné par cette situation se formule ainsi :

$$\text{COUT1} = P(d) \cdot b$$

$P(d)$ et b étant respectivement la probabilité de sortie par le bord supérieur et le coût de l'appel disque .

COUT1 croit dans le même sens que d et b . (Voir graphique Z représentatif des données suivantes : $b = 110$ micro F ; $N = 10$ et d variant de 1 à 10) (Tableau Z')

b.2 Dans le cas où on sort par le bord inférieur du segment

La probabilité d'atteindre le bord inférieur du segment est $(1 - P(d))$.

Le coût relatif est :

$$\text{COUT2} = (1 - P(d)) \cdot 0 = 0$$

En résumé notre problème de décision peut se schématiser de la manière suivante :

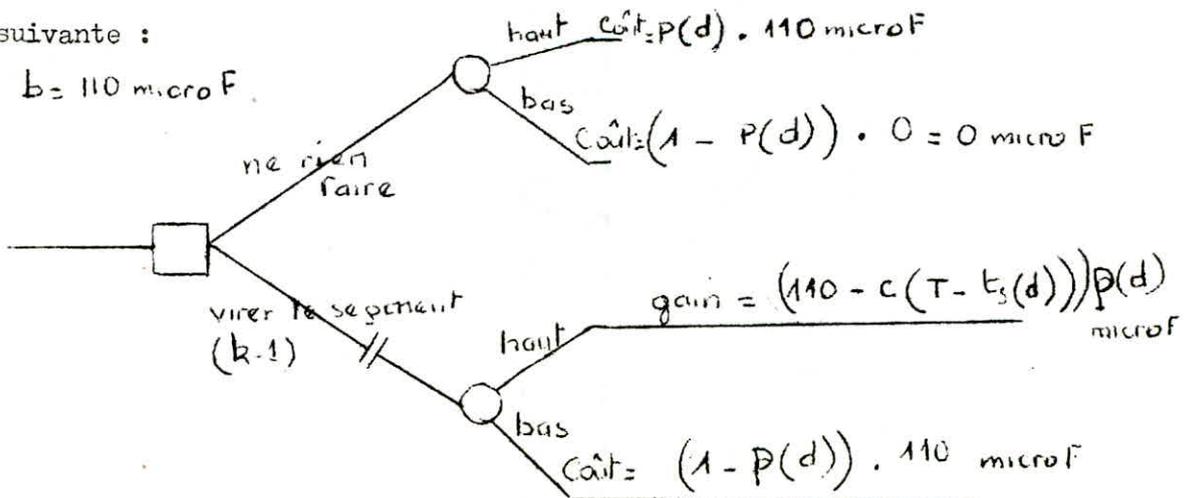
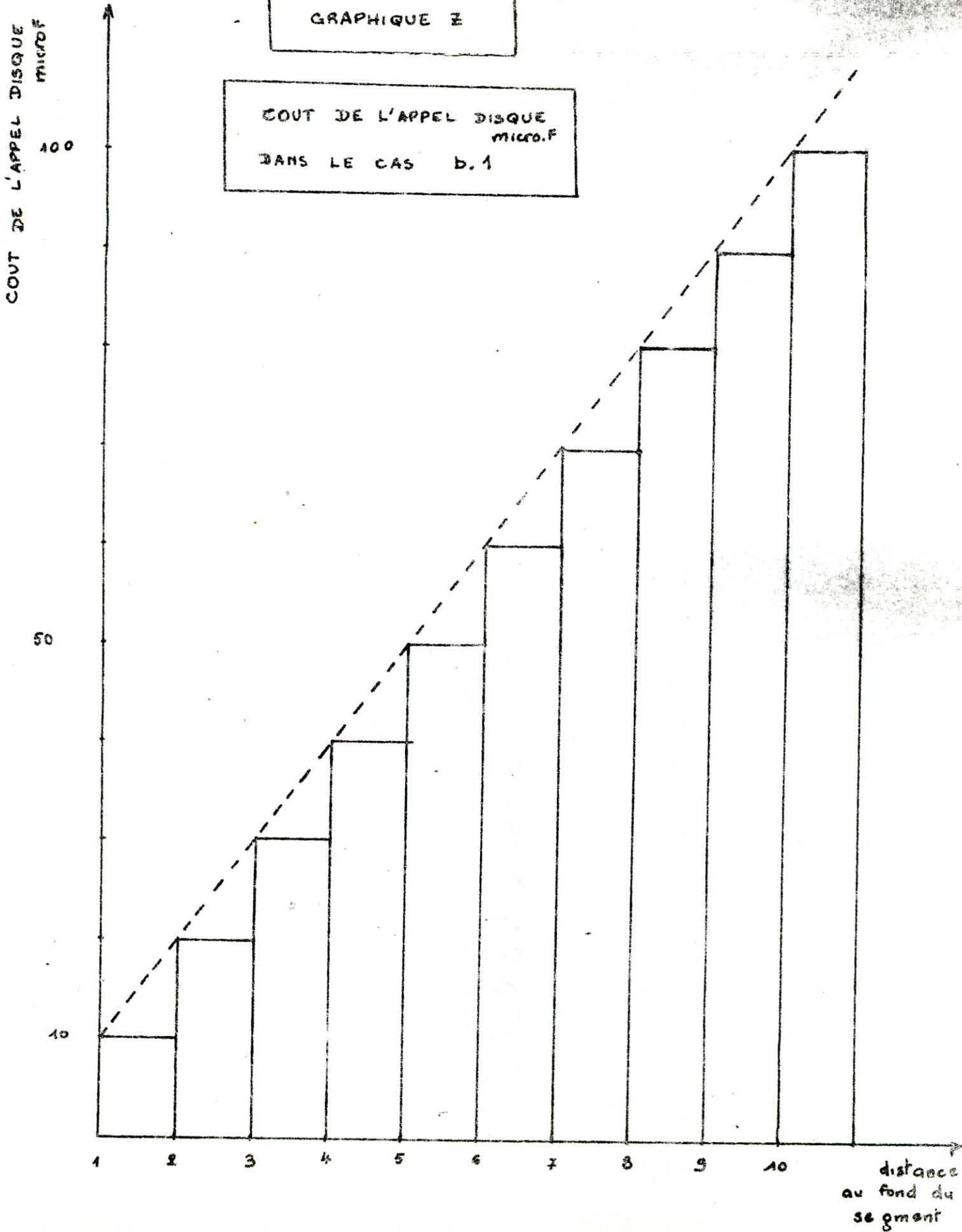


TABLEAU Z'

d	COUT 1 micro.F.
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50
6	60
7	70
8	80
9	90
10	100

GRAPHIQUE 2

COUT DE L'APPEL DISQUE
micro.F
DANS LE CAS b.1



Remarque

La solution qui consiste à virer le segment $(k - 1)$ coûte plus chère mais en compensation elle nous fait gagner du temps car la latence disque est faible .

Cette étude nécessite la connaissance de l'espérance de durée de résidence du segment alors qu'on sort par le bord supérieur de celui-ci .

En règle générale on a intérêt à anticiper les moments disque .

CONCLUSION

L'étude présentée a été structurée en deux parties : d'une part on s'est intéressé à la construction du modèle mathématique dans lequel se trouve l'image du comportement de la pile au cours du temps , d'autre part l'application des relations déduites dont l'objet est l'étude économique . Dans ce dernier point on s'est intéressé au calcul de la taille optimale d'une pile ~~et~~ de ses différentes formes de présentation en mémoire, vu que cette dernière présente un coût élevé.

On a beaucoup insisté sur la pile segmentée , elle présente un coût optimum très intéressant du point de vue économique car elle entraîne un gain en encombrement mémoire.

Les résultats enregistrés sur IBM 1130 illustrent le fait que le coût résultant de l'implantation d'une pile en mémoire dépend de la taille et de la durée de l'élément de la pile .

Le facteur critique introduit représente un rapport critique de coût , il augmente avec le coût du système informatique . La taille résultante de ce facteur critique dépend du domaine de d'appréciation de celui-ci ainsi que la taille et la durée de chaque élément de la pile déduite .

La limitation de notre théorie ne nous permet pas d'apporter des solutions aux problèmes posés en fin de l'étude que nous souhaitons être poursuivie .

