

8/75

4 es  
recyclage

UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ECONOMIE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

**METHODE DES CENTRES**

Proposé par Mr.

**H. AIT-OUYAHIA**

Etudié par MM.

**A. HOCINE & M.Z. KHELIL**

Promotion 1975



UNIVERSITE D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ECONOMIE



PROJET DE FIN D'ETUDES

**METHODE DES CENTRES**

Proposé par Mr.

**H. AIT-OUYAHIA**

Etudié par MM.

**A. HOCINE & M.Z. KHELIL**

Promotion 1975

Je dédie ce travail,

A LA MEMOIRE DE MON GRAND-PERE HADJ ALI HOCINE,

A LA MEMOIRE DE MON COUSIN OMAR HOCINE,

A MON PERE,

A MA MERE,

A TOUTE MA FAMILLE.

---oOo---



-TABLE DES MATIERES-

INTRODUCTION . . . . .	1
NOTATIONS . . . . .	3
I- PARTIE- PARTIE THEORIQUE, . . . . .	4
1- Programmation non linéaire . . . . .	5
1.1- Programmation non linéaire . . . . .	5
1.1.1- Notation algébrique . . . . .	5
1.1.2- Régions convexes- Régions non convexes . . . . .	5
1.1.3- Recherche de l'optimalité . . . . .	5
1.1.4- Trouver l'optimum . . . . .	6
1.1.5- Fonctions objectifs convexes et concaves . . . . .	6
1.1.6- Maximisation . . . . .	7
1.1.7- Minimisation . . . . .	7
1.2- Les diverses méthodes de résolution des programmes non linéaires . . . . .	7
1.2.1- Méthode d'optimisation sans contrainte . . . . .	8
1.2.2- Méthodes des pénalités et des barrières . . . . .	8
1.2.3- Les autres méthodes. . . . .	9
2- Methode des centres . . . . .	10
2.1- Définitions . . . . .	10
2.1.1- F-distance régulière, $\xi$ - centre . . . . .	10
2.1.1.1- F- distance . . . . .	10
2.1.1.2- $\xi$ -centre . . . . .	10
2.1.1.3- deux exemples de F- distances régulières . . . . .	11
2.2- Algorithme fini de recherche d'un point réalisable . . . . .	13
2.2.1- Algorithme . . . . .	13
2.2.2- Proposition . . . . .	14
2.3- Méthode des centres- (Algorithme général) . . . . .	17
2.3.1- Problème posé- hypothèses . . . . .	17
2.3.2- Algorithme . . . . .	19
2.3.3- Proposition . . . . .	20
2.4- Méthode des centres par majorations . . . . .	23
2.4.1- Problème posé- hypothèses . . . . .	23
2.4.2- Algorithme. . . . .	24
2.4.3- Proposition . . . . .	25

II- PARTIE - APPLICATIONS DE LA METHODE DES CENTRES PAR MAJORATIONS . . . . .	8
1- Problème posé . . . . .	2 9
2- Applications du type (A) . . . . .	3 9
2.1- Méthode de Zoutendijk . . . . .	3 2
2.2- Méthode des centres linéarisée . . . . .	3 5
3- Applications du type (B) . . . . .	3 5
3.1- Méthode de Franck et Wolfe. . . . .	3 6
3.2- Méthode de Posen . . . . .	3 6
III- PARTIE - APPLICATION PRATIQUE: METHODE DES CENTRES LINEARISEE. . . . .	3 8
1- Introduction . . . . .	3 9
2- Rappels sur la méthode des centres. . . . .	4 0
2.1- Problème posé . . . . .	4 0
2.2- Fonction F-distance. . . . .	4 0
2.3- $\epsilon$ -centre d'un tronçon . . . . .	4 1
2.4- Méthode des centres . . . . .	4 1
3- Résolution du problème (P) . . . . .	4 3
3.1- Adaptation de la méthode des centres . . . . .	4 3
3.2- Linéarisation . . . . .	4 4
3.3- Algorithme partiel . . . . .	4 5
4- Aspects pratiques - paramétrisation. . . . .	4 6
4.1- Aspect fini des calculs . . . . .	4 6
4.2- Cas linéaire- Paramétrisation - Algorithme . . . . .	4 7
4.3- Cas non linéaire- Paramétrisation . . . . .	4 8
5- Exemples Numériques . . . . .	5 0
5.1- Cas linéaire . . . . .	5 0
5.1.1- Problème posé . . . . .	5 0
5.1.2- Application de la méthode des centres . . . . .	5 0
5.1.3- Résolution . . . . .	5 0
5.2- Cas non linéaire- Algorithme 1. . . . .	5 2
5.2.1- Problème posé . . . . .	5 2
5.2.2- Application de la méthode des centres . . . . .	5 2
5.2.3- Linéarisation . . . . .	5 2
5.2.4- Résolution de $Q''(A, Y)$ . . . . .	5 3
5.2.4.1- Phase 1 . . . . .	5 3
5.2.4.2- Phase 2 . . . . .	5 3

5.3- Cas non linéaire - Algorithme 2. . . . .	5 5
5.3.1- Problème posé . . . . .	5 5
5.3.2- Application de la méthode des centres . . . . .	5 5
5.3.3- Résolution de $Q''(x, y)$ . . . . .	5 5
5.3.3.1- Phase 2 . . . . .	5 5
5.3.3.2- Phase 3. . . . .	5 7
IV- PARTIE - PROGRAMMATION- . . . . .	5 9
CONCLUSION . . . . .	9 5
BIBLIOGRAPHIE. . . . .	9 6

-----000-----

Soit le problème électrique suivant:

On désire optimiser la répartition ( au sens d'un certain critère ex: coût de production ) des puissances dans un réseau maillé à courant alternatif sous variables bornées.

Faire une étude de répartition dans un réseau maillé consiste à déterminer complètement l'état de ce réseau dans des hypothèses données de production et de consommation.

L'état d'un tel réseau est généralement déterminé par les puissances actives et réactives qu'il reçoit ou qu'il fournit. Les relations en "puissances" sont non linéaires. On est donc en présence d'un programme mathématique non linéaire qui s'écrit:

Minimiser  $F(P, Q)$  : Fonction (quadratique) du coût de production.  
sous les contraintes de réseau:

$$P_i = G_{ii} V_i^2 + \sum_{j \neq i} V_i V_j [G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + H_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)]$$

$$Q_i = -H_{ii} V_i^2 + \sum_{j \neq i} V_i V_j [G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - H_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)]$$

et sous les contraintes de bornes:

$$\underline{P} \leq P \leq \bar{P}$$

$$\underline{Q} \leq Q \leq \bar{Q}$$

$$\underline{V} \leq V \leq \bar{V}$$

$$\underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}$$

où les variables sont:

$(P_i, Q_i)$  : puissances actives et réactives injectées au sommet  $i$ .

$(V_i, \theta_i)$  : module et déphasage de la tension au sommet  $i$ .

Si  $s$  est le nombre de sommets du réseau (non compris le point neutre), on obtient un système de  $2s$  équations.

S'agissant d'un réseau de faible taille (peu de sommets), les méthodes classiques peuvent être utilisées.

Par contre, les réseaux maillés de grande taille (ex: réseaux de distribution BT de centres urbains très denses, réseaux de transports...) conduisent à la mise au point et à l'utilisation des méthodes mathématiques très évoluées, et à l'usage de moyens de calculs puissants.

Le programme ci-dessus s'inscrit dans le cadre des programmes mathématiques non linéaires de la forme:

Fonction objectif: Max ( ou Min)  $F(X)$

contraintes :  $G_i(X) \leq c_i \quad i = 1, 2, \dots, M$

condition de non négativité :  $X \geq 0$  ( $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  )

L'objet de cette étude est de décrire une méthode, due à P. HUARD, permettant de résoudre de tels programmes sous des hypothèses assez larges.

Dans cette méthode on doit à chaque itération déterminer un "centre", en maximisant une fonction caractérisant l'éloignement à la frontière du domaine. La détermination d'un tel centre est faite approximativement, sous réserve que l'erreur ainsi commise tende vers zéro au cours du déroulement des itérations.

Nous nous limiterons à la description théorique de cette méthode, et à la présentation de certains calculs obtenus à la main.

- NOTATIONS -

---

$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^n$	espace euclidien à $n$ dimensions
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$	ensemble des parties de $\mathbb{R}^n$ .
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers positifs
Si $X \in \mathbb{R}^n$ :	$X_i$ $i$ -ème composante de $X$ .
Si $A \subset \mathbb{R}^n$ :	On désigne par $\text{Fr}(A)$ la frontière de $A$ et par $A^\circ$ l'intérieur de $A$ . $A^\circ$ est le plus grand ouvert contenu dans $A$ . $A = \text{ouvert} \iff A$ voisinage de chacun de ses points.
Si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction numérique continuellement différentiable, on désigne par $\nabla f(X)$ la valeur du gradient de $f$ calculé au point $X$	
Si $a, b \in \mathbb{R}^n$ :	leur produit scalaire est noté simplement $a \cdot b$ .

I- PARTIE -  
PARTIE THEORIQUE

## 1- LA PROGRAMMATION NON LINEAIRE.

### 1.1.- LA PROGRAMMATION NON LINEAIRE-

Dans ce chapitre, on mettra l'accent sur la difficulté de trouver et / ou de reconnaître la solution optimale globale lorsque la fonction objectif et / ou les contraintes "se présentent mal".

#### 1.1.1- NOTATION ALGEBRIQUE:

Dans un programme non linéaire, les expressions algébriques qui se trouvent ou dans la fonction objectif, ou dans les contraintes, ou dans les deux, comportent des termes non-linéaires.

En termes économiques, ceci peut se traduire par le fait, par exemple, qu'une entreprise, en doublant toutes ses ressources, constate qu'elle ne peut augmenter ses profits que de 47%.

Le programme se formule ainsi:

Fonction objectif:  $\text{Max ( ou Min ) } F ( X )$

contraintes. :  $G_i ( X ) \leq C_i \quad i = 1, 2, \dots, M.$

Conditions de non négativité  $X_j \geq 0 \quad ( X = \{ X_1, X_2, \dots, X_p \} )$

#### 1.1.2- REGIONS CONVEXES REGIONS NON CONVEXES.

Une région est dite convexe si le segment reliant deux de ses points se trouve entièrement à l'intérieur de la région. Une région est dite non convexe dans le cas contraire.

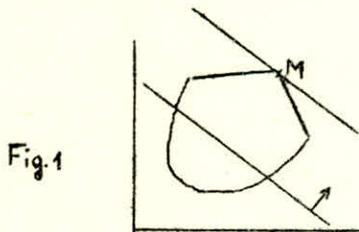


Fig.1

région convexe

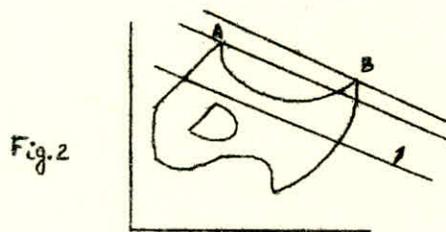


Fig.2

région non-convexe

La distinction entre convexité et non convexité de la région possible est très importante pour la programmation pour dire d'un point donné s'il est optimal ou non.

#### 1.1.3- RECHERCHE DE L'OPTIMALITE

Nous supposons pour le moment que la fonction objectif est linéaire. Dans la région convexe, si nous trouvons un point M tel que tout petit déplacement diminuera la valeur de la fonction objectif, alors nous pouvons être sûrs que ce point est un optimum global (Fig 1).

Cependant ce résultat n'est pas valable pour la région non -

.../...

convexe. Le point A est appelé optimum local; le point B est appelé optimum global (fig. 2).

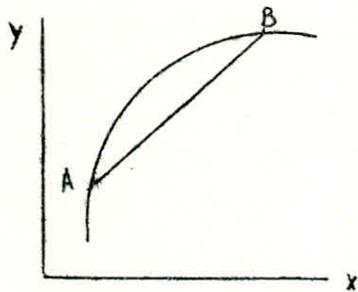
1.1.4- TROUVER L'OPTIMUM.

Un problème connexe engendré par la non-convexité est qu'il est plus difficile de concevoir, dans ces conditions, une procédure itérative pour trouver l'optimum global.

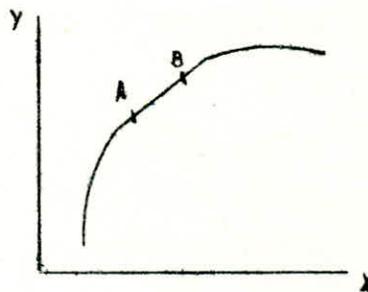
Dans le cas de la région convexe, tout déplacement qui augmente la fonction objectif, nous rapproche à coup sûr du point optimal, parce qu'il n'y a qu'un point optimal.

Mais dans la région non convexe, un déplacement qui accroît la fonction objectif, peut nous diriger vers un mauvais point et nous éloigner du véritable optimum. D'où dans un tel cas, une procédure itérative qui est conçue pour accroître la fonction objectif peut très bien ne pas réussir à nous conduire à l'optimum global.

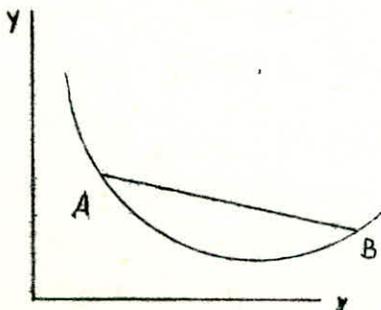
1.1.5- FONCTIONS OBJECTIFS CONVEXES ET CONCAVES.



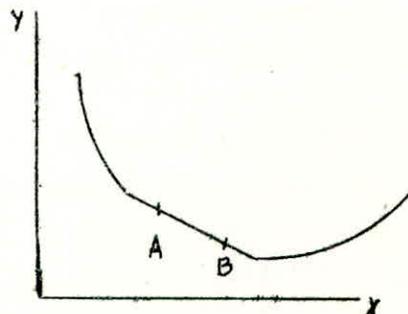
Fonction rigoureusement concave



Fonction non rigoureusement concave



Fonction rigoureusement convexe



Fonction non rigoureusement convexe

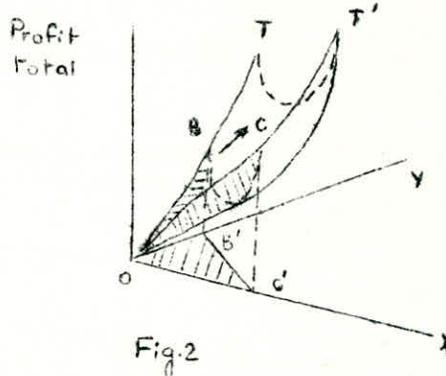
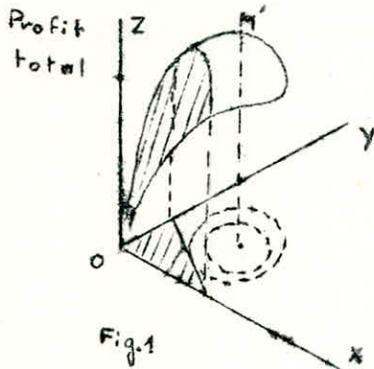
Remarque: Une fonction linéaire dont la représentation graphique est une ligne droite, un plan ou un hyperplan est à la fois convexe et concave.

Les fonctions objectifs qui ont une "mauvaise forme" peuvent conduire au même problème que les régions possibles non convexes; elles peuvent donner des optimums locaux qui ne sont pas des optimums globaux.

### 1.1.6- MAXIMISATION.

Nous avons une fonction objectif concave que nous voulons maximiser et un domaine possible convexe. Il est clair, d'après la fig.1 que toute ascendante mène au sommet. De plus, si nous sommes en un point

M à partir duquel le moindre déplacement nous fait descendre, nous savons que ce point est le véritable optimum.



En résumé dans un problème de maximisation, et si le domaine possible est convexe, alors une fonction objectif concave "se comporte bien". Par contre une fonction objectif convexe "ne se comporte pas bien"(Fig.2).

### 1.1.7- MINIMISATION:

Les résultats énoncés ci dessus s'appliquent ici.

Dans un problème de minimisation, une fonction convexe est souhaitable Par contre une fonction concave est gênante du point de vue des calculs.

## 1.2- LES DIVERSES METHODES DE RESOLUTION DES PROGRAMMES NON LINEAIRES

Si l'on tient compte des programme qu'elles sont susceptibles de résoudre les principales méthodes de résolution des programmes non linéaires peuvent être classées en trois catégories.

-Les méthodes d'optimisation sans contraintes. Le domaine admissible est étendu à tout l'espace "E".

.../...

- Les méthodes d'optimisation avec contraintes ramenant la programme à un programme non linéaire sans contraintes. Il s'agit principalement des méthodes dites des pénalités et des barrières.

- Les autres méthodes d'optimisation.

### 1.2.1- METHODE D'OPTIMISATION SANS CONTRAINTES:

Un programme sans contraintes s'écrit:

$$\text{Maximiser } f(X), \quad X \in E^n$$

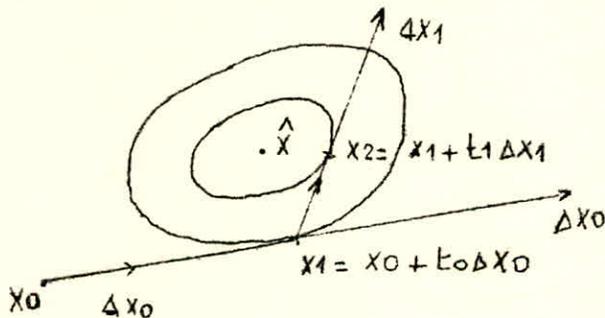
Le domaine admissible est étendu à tout l'espace  $E^n$ .

#### PRINCIPE DES METHODES:

Partant d'un point quelconque de l'espace,  $X_0$ , nous choisissons une direction  $(\Delta X_0)$  dans laquelle  $f(X)$  tend à croître.

$X$  se déplace sur la demi droite  $(\Delta X_0)$  ;  $X = X_0 + t \Delta X_0$

Le point  $X_1$  de la direction  $\Delta X_0$  maximise la fonction objectif. Du point  $X_1$ , on détermine une nouvelle direction  $\Delta X_1$  et ainsi de suite.



Choix de la direction  $\Delta X$  et du pas .

Les méthodes diffèrent dans le mode de calcul de la direction.

### 1.2.2.- METHODES DES PENALITES ET DES BARRIERES.

Ces méthodes ramènent la résolution d'un programme non linéaire avec contraintes à la résolution d'un programme non linéaire sans contraintes. Cela est particulièrement intéressant lorsque les contraintes ne sont pas linéaires.

#### PRINCIPE :

Soit un programme non linéaire:

$$\text{Maximiser } f(X)$$

avec  $g_i(X) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, M.$

Soit  $D$  le domaine défini par ces contraintes . On ramène à la forme  
.../...

Maximiser  $C(X, \lambda)$

avec  $C(X, \lambda) = f(X) + P(X, \lambda)$ .

où  $\lambda$  est un paramètre que l'on fait varier de 1 à 0,  $P(X, \lambda)$  est construite de la manière suivante:

1/  $P(X, \lambda) = 0$  si  $X \in D$

2/  $P(X, \lambda) \rightarrow -\infty$  si  $X \notin D$  quand

### 1.2.3- LES AUTRES METHODES:

L'objet de notre étude se situe dans le cadre de cette troisième catégorie.

2- METHODE DES CENTRES

21- DEFINITIONS:

2.1.1- F- Distance régulière, Centre, E- Centre:

Soient  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  un ensemble dont les éléments sont des parties de  $\mathbb{R}^n$ , et  $d: \mathbb{R}^n \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique.

2.1.1.1- F-Distance

$d$  est appelée F- distance sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{E}$  si elle vérifie:

(i)  $d(X, E) = 0, \forall E \in \mathcal{E}, \forall X \in \text{Fr}(E)$

(ii)  $d(X, E) > 0, \forall E \in \mathcal{E}, \forall X \in \overset{\circ}{E}$

(iii)  $\forall E \in \mathcal{E}, \forall E' \in \mathcal{E}: E \subset E', \forall X \in E, \text{il existe un scalaire } \rho(X) > 0 \text{ tel que}$   

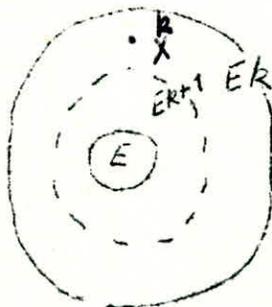
$$d(X, E) \leq \rho(X) \cdot d(X, E')$$

Une F- distance  $d$  est dite régulière si elle vérifie de plus:

(iv)  $\forall$  les suites  $\{E_k \in \mathcal{E} / k \in \mathbb{N}\}$  et  $\{x_k \in \mathbb{R}^n / k \in \mathbb{N}\}$  telles que

$$\left| \begin{array}{l} E_k \supset E_{k+1} \supset E \in \mathcal{E}, E \neq \emptyset \\ x_k \in E_k, x_k \notin \overset{\circ}{E}_{k+1} \end{array} \right.$$

On a  $d(x_k, E_k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$



2.1.1.2 - E- Centre

Etant donnés une F- distance  $d$ , définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{E}$ , un ensemble  $E \in \mathcal{E}$ , et un nombre  $\varepsilon$  tel que  $0 < \varepsilon < \sup \{ d(X, E) / X \in E \}$ , on appelle  $\varepsilon$ - centre de  $E$  (relativement à  $d$ ) tout point  $C \in E$  tel que:

$$d(C, E) \geq \sup \{ d(X, E) / X \in E \} - \varepsilon$$

Si  $E = \emptyset$ , un tel point est appelé centre de  $E$ .

Remarque: Un ensemble  $E$  ne peut avoir d' $E$ -centre que si  $E = \emptyset$ , car un centre est toujours un point intérieur.

2.1.1.3- Deux exemples de  $F$ -distances régulières

PROPOSITION:

Soient  $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in L = \{1, 2, \dots, m\}$  des fonctions numériques continues

$$E(b) = \{x \mid g_i(x) \geq b_i, i \in L\}, \text{ avec } b \in \mathbb{R}^m$$

$$\mathcal{E} = \{E(b) \mid b \in K \subset \mathbb{R}^m\}$$

où  $K$  est tel que à un ensemble  $E(b)$  ne corresponde qu'une seule valeur de  $b$

On suppose de plus:

$$(M) \quad \bigcap_{i \in L} \{x \mid g_i(x) \geq b_i\} = \{x \mid g_i(x) = b_i\}, \forall i \in L, \forall b \in K$$

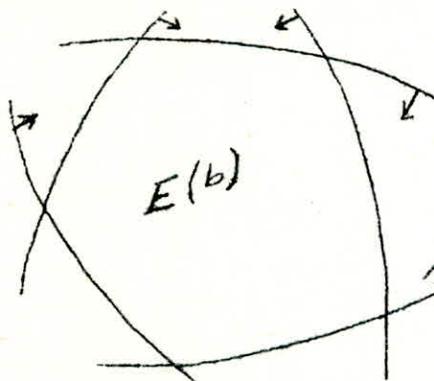
Dans ces conditions, chacune des deux fonctions suivantes

$$(1) \quad d(x, E(b)) = \min_{i \in L} \{g_i(x) - b_i\}$$

$$(2) \quad d(x, E(b)) = \prod_{i \in L} (g_i(x) - b_i)$$

est une  $F$ -distance régulière, définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{E}$

Schématisons d'abord ces notations avant de faire la démonstration



$$\bigcap_{i \in L} \{x \mid g_i(x) \geq b_i\} = \{x \mid g_i(x) = b_i\} \\ \forall i \in L, \forall b \in K$$

$$E(b) = \bigcap_{i \in L} \{g_i(x) \geq b_i\} \quad \forall i \in L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$\mathcal{E}$ : ensemble dont les éléments sont les ensembles  $E(b)$

Démonstration:

Cette démonstration est valable aussi bien pour la définition (1) que pour la définition

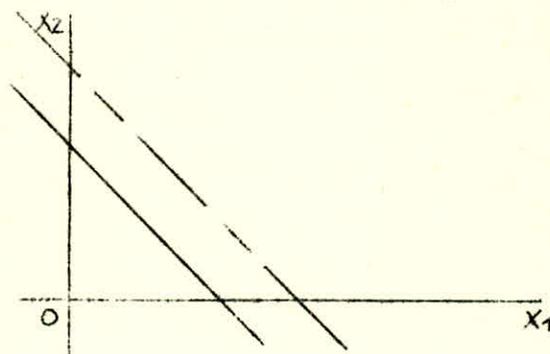
Montrons d'abord que:

$$b \succcurlyeq b' \Leftrightarrow E(b) \subset E(b')$$

$$- b \succcurlyeq b' \Rightarrow E(b) ?$$

Cette implication est évidente. En effet, prenons dans  $\mathbb{R}^2$  deux systèmes de contraintes:

$$E(b) \begin{cases} x_1 \geq b_1 = 0 \\ x_2 \geq b_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 \geq b_3 = -2 \end{cases} \quad E(b') \begin{cases} x_1 \geq b'_1 = 0 \\ x_2 \geq b'_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 \geq b'_3 = -3 \end{cases}$$



L'ensemble  $E(b)$  est bien inclus dans l'ensemble  $E(b')$

$$- E(b) \subset E(b') \Rightarrow b \succcurlyeq b' ?$$

$$E(b) = \{x \mid g_i(x) \geq b_i, i \in L\}$$

$$E(b) \subset E(b')$$

$$\Rightarrow b \succcurlyeq b', \forall b \in K, \forall b' \in K$$

Hypothèse (M)

, or ailleurs,

(i) Puisque les  $g_i$  sont continues:

$$x \in \text{Fr}(E(b)) \Rightarrow \exists i \in L : g_i(x) - b_i = 0 \Rightarrow d(x, E(b)) = 0$$

$$(ii) \text{ D'après (M), } x \in \overset{\circ}{E}(b) \Rightarrow g_i(x) - b_i > 0, \forall i \in L \Rightarrow d(x, E(b)) > 0$$

$$(iii) E(b) \subset E(b') \Leftrightarrow b \succcurlyeq b' \Rightarrow g_i(x) - b_i \leq g_i(x) - b'_i \quad \forall i \in L, \forall x \in \overset{\circ}{E}(b) \\ \dots \Rightarrow d(x, E(b)) \leq d(x, E(b')), \forall x : g_i(x) - b_i > 0, \forall i \in L$$

(iv) Soient une suite infinie  $\{b^k \in K \mid k \in \mathbb{N}\}$ , celle des  $E_k = E(b^k)$  correspondants, et une suite infinie  $\{x^k \in \mathbb{R}^n \mid k \in \mathbb{N}\}$ , telles que,  $\forall k \in \mathbb{N}$

$b^k \leq b^{k+1} \leq b^*$ ,  $b^* \in K$ , constante, c'est à dire  $E^k \supset E^{k+1} \supset E^* \in \mathcal{E}$ ,  $E^* \neq \emptyset$   
 $x^k \in E^k$ ,  $x^k \notin E^{k+1}$   
 par suite,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists i_k \in L : g_{i_k}(x^k) - b_{i_k}^k \leq g_{i_k}(x^k) - b_{i_k}^{k+1} < 0 \leq g_{i_k}(x^k) - b_{i_k}^k$$

Quand  $k \rightarrow +\infty \Rightarrow b_{i_k}^k \rightarrow b_{i_k}^*$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (g_{i_k}(x^k) - b_{i_k}^k) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} (g_{i_k}(x^k) - b_{i_k}^{k+1}) < 0 \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} (g_{i_k}(x^k) - b_{i_k}^k)$$

Cette relation est vraie quelle que soit l'itération k, d'où l'on a:

$$\lim (g_{i_k}(x^k) - b_{i_k}^k) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty, \forall k \in S_i \subset \mathbb{N}$$

$$\dots \Rightarrow d(x^k, E(b^k)) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}$$

2.2- ALGORITHME FINI DE RECHERCHE D'UN POINT REALISABLE:

2.2.1- ALGORITHME:

Soient  $B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{E}$  une famille d'ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , d'une F- distance régulière sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{E}$ , et  $E^* \in \mathcal{E}$ . On se propose de trouver un point  $x \in E^* \cap B$ , en générant deux suites:

$$\{x^k \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ et } \{E_k \in \mathcal{E} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

définies par l'algorithme suivant:

Algorithme:

Choisir une suite décroissante de nombres  $\epsilon_k > 0$ , " pas trop grands", tendant vers zéro quand  $k \rightarrow +\infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Itération k

On dispose de  $E_k \in \mathcal{E}$  et  $x^k$  tels que:

$$E_k \supset E^*, \overset{\circ}{E}_k \cap B \neq \emptyset$$

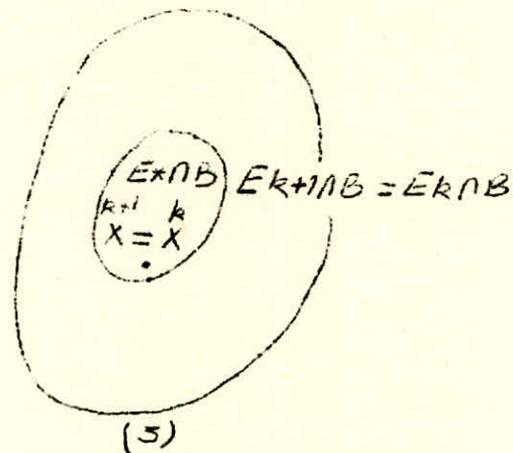
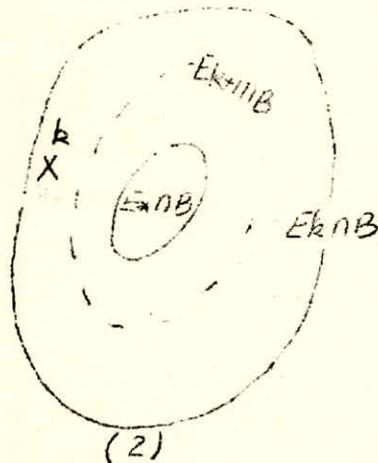
(1)  $x^k \in \overset{\circ}{E}_k \cap B \quad d(x^k, E_k) \geq \sup \{ d(x, E_k) \mid x \in E_k \cap B \} - \epsilon_k$

(2) si  $x^k \notin E^* \cap B$  on choisit  $E_{k+1} \in \mathcal{E}$  tel que :

$$\left| \begin{array}{l} E_k \supset E_{k+1} \supset E^* \\ x^k \in \overset{\circ}{E}_{k+1} \cap B \quad \text{offre en (1) avec } k = k+1 \end{array} \right.$$

(3) si  $x^k \in E^* \cap B$ , on prend

$$\left| \begin{array}{l} E_{k+1} = E_k \\ k+1 = k \\ x = x^k \end{array} \right. \quad \text{FIN}$$



Cet algorithme nous donne à chaque itération une solution réalisable intérieure, appelé

$E_k$  - centre, en maximisant une fonction  $F$  - distance régulière. Cette fonction caractérise l'éloignement à la frontière du domaine.

Démontrons que nous obtenons  $x \in E^* \cap B$  au bout d'un nombre fini d'itérations.

### 2.2.2- PROPOSITION:

Dans les conditions ci-dessus, et si  $E^* \cap B \neq \emptyset$ , alors il existe  $k^* \in \mathbb{N}$ , fini tel que  $k \geq k^* \Rightarrow x \in E^* \cap B$ .

Remarque:

Les  $E_k$  ne doivent pas être choisis trop grands pour assurer que l'on a

bien  $\exists x \in E_x \cap B$ . Ils doivent satisfaire à chaque iteration à la condition suivante:

$$0 \leq \varepsilon_k < \sup \{ d(x, E_k) / x \in E_k \cap B \}$$

Démonstration

Supposons le contraire, c'est à dire que:

$$\exists x \notin E_x \cap B \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et montrons que c'est impossible.

Puisque  $d$  est une  $F$ - distance régulière

$$d(x^k, E_k) \longrightarrow 0 \text{ quand } k \longrightarrow +\infty$$

Soit  $\tilde{x} \in E_x \cap B$ . On a,  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$0 < d(\tilde{x}, E_x) \text{ car } \tilde{x} \in E_x \text{ (d'après (i))}$$

$$0 < d(\tilde{x}, E_x) \leq p_0 d(\tilde{x}, E_k), \text{ avec } p_0 > 0, \text{ car } E_x \subset E_k \text{ (d'après (ii))}$$

$$0 < d(\tilde{x}, E_x) \leq p_0 d(\tilde{x}, E_k) \leq p_0 [d(\tilde{x}, E_k) + \varepsilon_k]$$

car  $x^k$  maximise  $d$  à  $E_k$  près sur  $E_k \cap B$

En définitive, nous avons:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < d(\tilde{x}, E_x) \leq p_0 [d(\tilde{x}, E_k) + \varepsilon_k] \\ d(\tilde{x}, E_k) \longrightarrow 0, \quad \varepsilon_k \longrightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ impossible}$$

D'où nous parvenons bien à la solution au bout d'un nombre fini d'itérations

Remarque:

Si on remplace l'hypothèse  $E_x \cap B \neq \emptyset$  par l'hypothèse plus faible  $E_x \cap B \neq \emptyset$ , la proposition devient fausse.

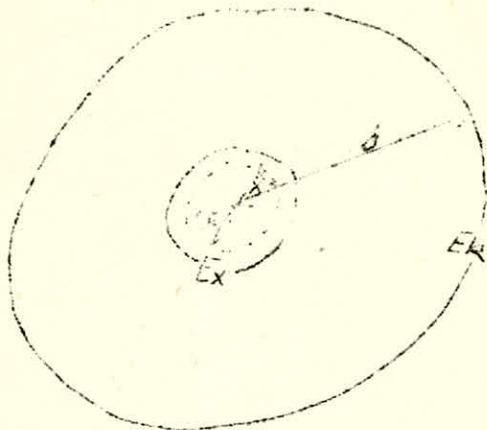
Remarque:

Montrons, pour illustrer cette proposition, que nous pouvons atteindre la solution sans que  $\varepsilon_k$  ne soit pratiquement nul.

En effet, supposons qu'à l'itération  $k$ , nous ayons:

$$0 < \epsilon_k \leq \sup \{d(x, E^*) / x \in E^* \cap B\}, \quad E^* \cap B \neq \emptyset$$

$$\sup \{d(x, E_k) / x \in E_k \cap B\} = \gamma$$



Nous remarquons que le nombre d'itérations à faire dépend du choix de la suite  $E_k$ . Nous verrons dans la 3<sup>ème</sup> partie comment- choisir cette suite  $E_k$ .

2.3- METHODE DES CENTRES - (ALGORITHME GENERAL)

2.3.1- Problème posé- hypothèses

Maximiser  $f(x)$  sous les conditions  
 $x \in A \cap B$

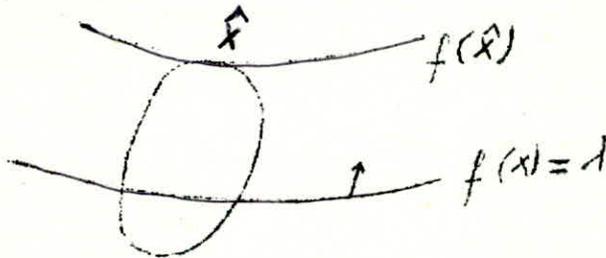
(P)

où :  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A \cap B$  fermé

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fonction continue supposée atteindre son maximum sur  $A \cap B$  en un point  $\hat{x}$ , et telle que:

(M) 
$$F \in \{x / f(x) \geq \lambda\} = \{x / f(x) = \lambda\} \quad \forall \lambda < f(\hat{x})$$

Illustrons cette hypothèse:



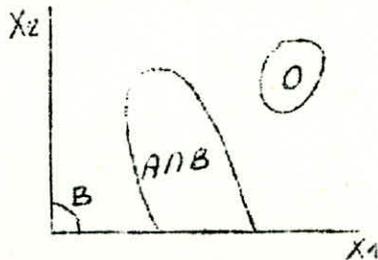
Nous ferons de plus l'hypothèse suivante sur A et B.

(H)  $\overset{\circ}{A} \cap B \cap O = \emptyset \implies A \cap B \cap O = \emptyset, \forall O \subset \mathbb{R}^n$  ouvert

Cette hypothèse (H) est en particulier vérifiée pour

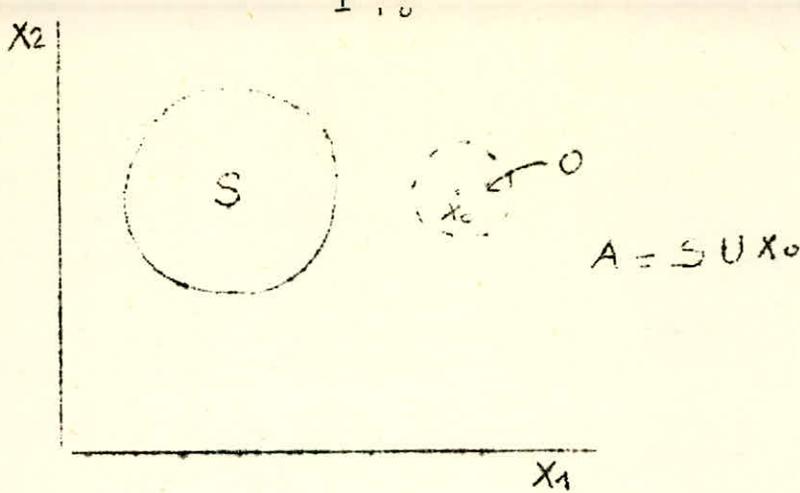
$\overset{\circ}{A} \cap B \neq \emptyset$  et  $A \cap B$  convexe

En effet, prenons pour illustrer ce cas particulier  $B = \mathbb{R}^2$



$A \cap B$ : est appelé trace de A sur B.

Voyons un exemple ne vérifiant pas l'hypothèse (H)



Nous voyons bien que:  $A \cap B \cap O = \emptyset \nRightarrow A \cup B \cap O = \emptyset$

On considère une famille d'ensembles  $A_j \subset \mathbb{R}^n$ ,  $j \in J$  tels que:

$$A_j \supset A, \forall j \in J$$

$$A \in \mathcal{A}$$

On pose:

$$F(\lambda) = \{x / f(x) \geq \lambda\}, \lambda \in \mathbb{R}$$

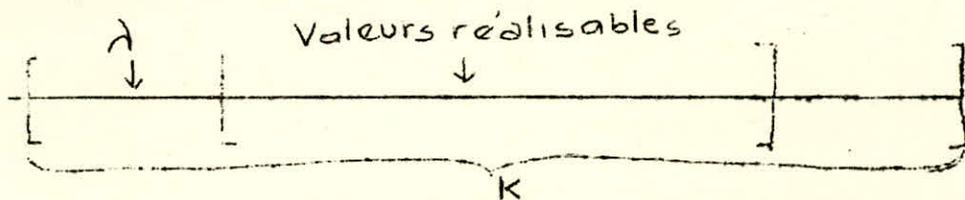
et on définit la famille:

$$\mathcal{E} = \{E(\lambda, j) / \lambda \in K, j \in J\}$$

en prenant:

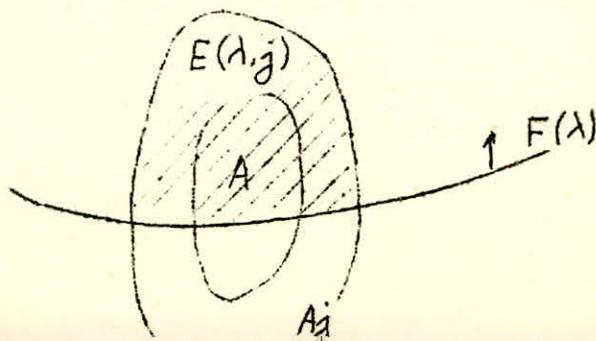
$$E(\lambda, j) = A_j \cap F(\lambda), K \subset \mathbb{R} : \overline{f(A \cap B)} \subset K$$

$K$  renferme l'ensemble des valeurs réalisables:



on choisit une  $F$ -distance régulière  $d$ , définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{E}$ , ainsi qu'une suite infinie décroissante de nombres réels  $\epsilon_k \geq 0$ , pas trop grands, tendant vers zéro quand  $k \rightarrow +\infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

$\mathcal{E}$  est un ensemble dont les éléments sont des parties de  $\mathbb{R}^n$ ,



Remarque

L'hypothèse (M) entraîne  $\forall \lambda < f(\hat{x})$

$$\tilde{F}(\lambda) = \{x \mid f(x) > \lambda\}$$

2.3.2- ALGORITHME

Prendre au départ  $\lambda_0 < f(\hat{x})$ ,  $\lambda_0 \in K$

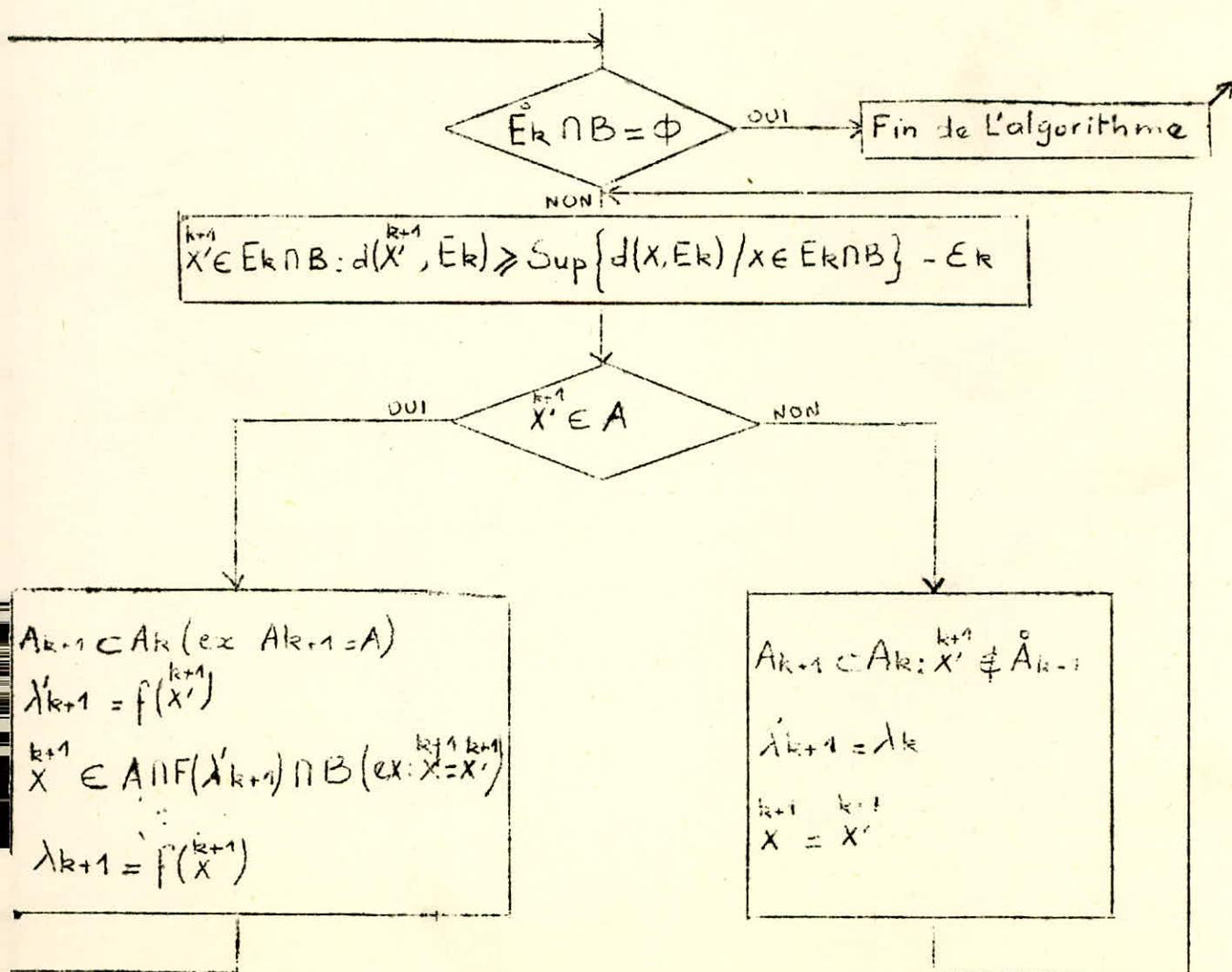
ITERATION k

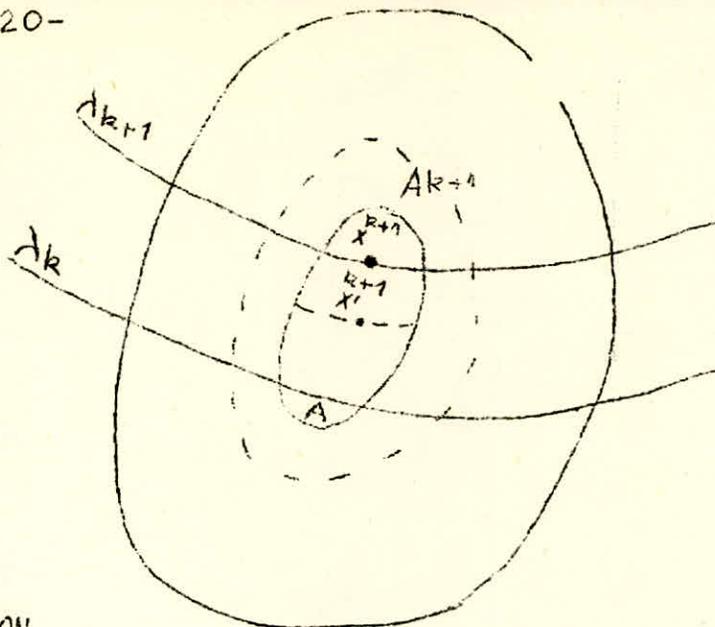
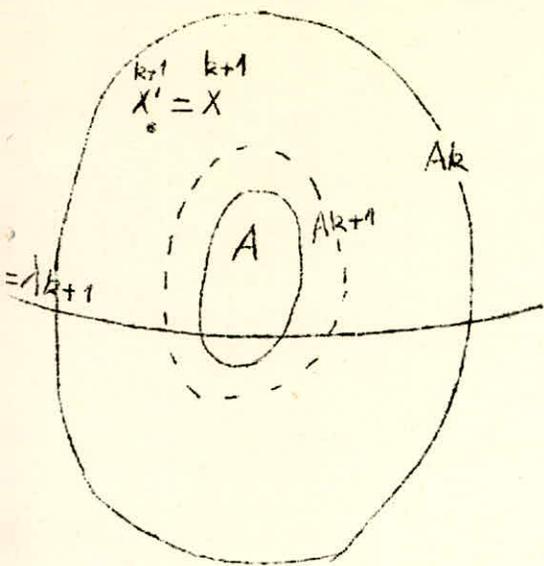
On dispose de

$A_k \in \mathcal{A}$  tel que  $A_k \supset A$

$\hat{x}$  et  $\lambda_k$  tels que  $\lambda_k \leq f(\hat{x})$ ,  $\lambda_k \leq f(x)$

Poser:  $E_k = A_k \cap F(\lambda_k)$





2.3.3 - PROPOSITION

Si à une étape de l'algorithme, on a  $\overset{\circ}{E}_k \cap B = \emptyset$ , alors  $x^k$  est solution optimale du problème (P).

Si cette éventualité ne se produit jamais, la suite infinie  $\{x^k / k \in \mathbb{N}\}$  fournie par l'algorithme est telle que:

$$\lim f(x^k) = f(x^*), \quad k \rightarrow +\infty, \quad k \in \mathbb{N}$$

De plus, dans ce second cas, il existe une sous-suite infinie de points  $x^k, k \in \mathbb{N}$  dont les points d'accumulation sont des solutions optimales du problème (P).

DEMONSTRATION

Si, à une étape  $k$  de l'algorithme, on a:

$$\overset{\circ}{E}_k \cap B = \emptyset$$

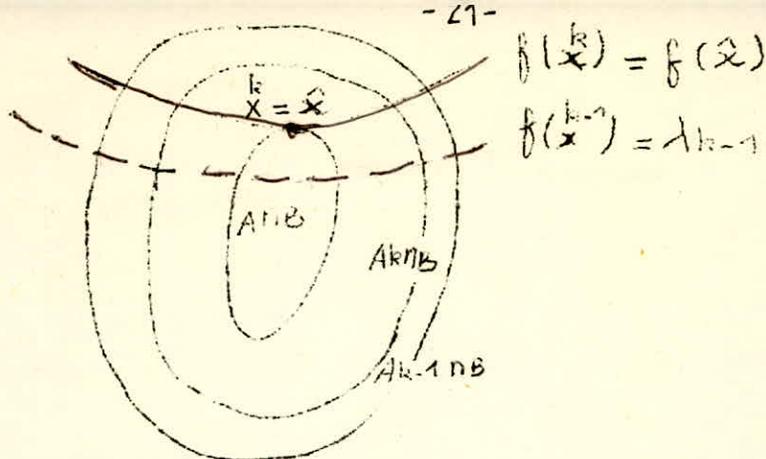
on peut écrire:

$$\overset{\circ}{A}_k \cap \overset{\circ}{F}(\lambda_k) \cap B = \emptyset \Rightarrow \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{F}(\lambda_k) \cap B \text{ car } A^k \supset A$$

$$\dots \Rightarrow A \cap \overset{\circ}{F}(\lambda_k) \cap B = \emptyset \text{ d'après l'hypothèse (H)}$$

$$\dots \Rightarrow \exists x \in A \cap B : f(x) > f(x^k).$$

On ne peut plus trouver un  $x$  tel que  $f(x) > f(x^k)$ : ce qui établit l'optimalité de  $x^k$ .



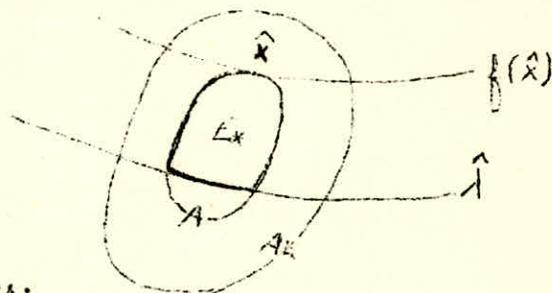
Sinon, c'est à dire si  $E_k \cap B \neq \emptyset$ , l'algorithme fournit une suite infinie de couples  $\{(x^k, \lambda_k) / k \in \mathbb{N}\}$  telle que

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_k \leq f(x^k) \\ \lambda_k \leq f(\hat{x}) \\ \lambda_k < \lambda_{k+1} \end{array} \right\} \forall k \in \mathbb{N}$$

Par suite  $\lambda_k \rightarrow \lambda^* = f(\hat{x})$  quand  $k \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}$

si  $\lambda^* = f(\hat{x})$ ; alors  $\lim_k f(x^k) = f(\hat{x})$ , car  $\lambda_k \leq f(x^k), \forall k \in \mathbb{N}$

si  $\lambda^* < f(\hat{x})$ , on pose  $E_x = F(\lambda^*)$  et  $E_x = A \cap F_x$ .



On a dans ce cas:

$$\overset{\circ}{E}_x \cap B = \emptyset$$

Sinon, puisque l'on a  $\forall k$ :

$$E_k \supset E_{k+1} \supset E_x, \hat{x} \in E_k \cap B, \hat{x} \notin \overset{\circ}{E}_{k+1} \cap B, E_x \in \mathcal{E}$$

et d'après la proposition 2.2.2., on obtiendrait une solution  $x^k \in \overset{\circ}{E}_x \cap B$  au bout d'un nombre fini d'itérations, et l'on aurait d'après l'hypothèse (M):

$$f(x^k) > \lambda^*$$

ce qui est impossible. Par suite

$$\overset{\circ}{E}_x \cap B = \emptyset \Rightarrow \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{F}_x \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap F_x \cap B = \emptyset \text{ d'après l'hypothèse (H)}$$

...  $\Rightarrow \lambda^* \geq f(x)$  impossible d'après l'hypothèse  $\lambda^* < f(\hat{x})$

Soit  $S \subseteq \mathbb{N}$  l'ensemble des indices  $k$  des solutions réalisables  $x^k \in A$  fournies par l'algorithme. Puisque l'on suppose ici n'avoir jamais  $f(x^k) = f(\hat{x})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . et que l'on a établi  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^k) = f(\hat{x})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , on obtient les résultats suivants, en envisageant les deux cas possible  $S$  fini et  $S$  infini.

1./  $S$  fini- La dernière solution réalisable obtenue  $x^k$ ,  $k \in S$  est une solution optimale, car après cette étape  $f(x^k)$  ne peut plus augmenter.

2./  $S$  infini- tout point d'accumulation de  $S$  est une solution optimale.

2.4- METHODE DES CENTRES PAR MAJORATIONS

2.4.1- PROBLEME POSE - HYPOTHESES

La méthode très générale que nous décrivons ici entre dans le cadre de la méthode des centres décrite au chapitre 2.3.- Le problème traité est le même, soit:

Maximiser $f(x)$ sous les conditions $x \in A \cap B$	(P)
--	-----

La méthode utilisée se particularise essentiellement, en dehors du choix plus restrictif de la F - distance, par le calcul des - centres, calcul utilisant des fonctions majorantes de la F- distance. Comme on le verra, cette variante de de la méthode des centres demeure encore très générale.

Soient:

-  $A \subset \mathbb{R}^n$  fermé,  $B \subset \mathbb{R}^n$  convexe compact, vérifiant:

(H1)  $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$  ;  $\overset{\circ}{A} \cap B \cap O = \emptyset \implies A \cap B \cap O = \emptyset \forall O \subset \mathbb{R}^n$  ouvert.

-  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, atteignant son maximum sur  $A \cap B$  en  $\hat{x}$  et vérifiant:

(H2)  $F_\lambda \{x / f(x) \geq \lambda\} = \{x / f(x) = \lambda\}$  ,  $\forall \lambda < f(\hat{x})$

-  $E(\lambda) = A \cap \{x / f(x) \geq \lambda\}$  ;  $\mathcal{E} = \{E(\lambda) / \lambda < f(\hat{x})\}$

-  $d: \mathbb{R}^n \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  une F- distance sur  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{E}$ , continue, régulière, vérifiant :

(H3)  $d(x, E) < 0$  ,  $\forall x \notin E, \forall E \in \mathcal{E}$

On écrira dans ce qui suit, pour simplifier,  $d(x, \lambda)$  au lieu de  $d(x, E(\lambda))$  c'est à dire que l'on considèrera une fonction  $d: \mathbb{R}^n \times K \rightarrow \mathbb{R}$ , avec

$K = \left[ \inf \left\{ f(x) / x \in A \cap B \right\}, f(\hat{x}) \right[$  , au lieu de la fonction  $d: \mathbb{R}^n \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ce choix, plus restrictif de la F-distance, nous amène à ne plus considérer des ensembles  $E_k = A_k \cap \{X / f(X) \geq \lambda_k\}$  qui diminuent par inclusion et tendent vers une limite  $E_k^*$  telle que  $E_k^* \cap B = \emptyset$  comme au chapitre 2.3-, mais des ensembles

$E_k = A \cap \{X / f(X) \geq \lambda_k\}$ . C'est à dire que l'ensemble A demeure constant au cours des itérations tandis que  $\lambda_k$  varie.

Nous définissons la fonction majorante de la F-distance de la façon suivante:

-  $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, vérifiant:

$$(H4) \quad \left. \begin{array}{l} (i) \quad d'(X, Y, \lambda) \geq d(X, \lambda) \\ (ii) \quad d'(X, X, f(X)) = 0 \end{array} \right\} \forall X \in A \cap B, \forall Y \in B, \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$(H5) \quad \forall a \in B, \forall b \in B \text{ fixés, on a}$$

$$d(X, f(a)) \leq 0, \forall X \in [a, b] \Rightarrow d'(X, a, f(a)) \leq 0, \forall X \in [a, b]$$

Remarque:

La continuité de  $d'$  ne sera nécessaire qu'en un certain point  $(X^*, Y^*, \lambda^*)$  défini par l'algorithme.

2.4.2- ALGORITHME:

Choisir une constante  $\alpha \geq 1$ .

ITERATION k:

On dispose de  $X^k \in A \cap B, \lambda_k = f(X^k), E_k = E(\lambda_k)$ .

(1) Choisir  $Z^k \in B$  tel que:

$$\alpha d'(Z^k, X^k, \lambda_k) \geq d'(X^k, X^k, \lambda_k), \forall X \in A \cap B$$

(par exemple en maximisant  $d'(X, X^k, \lambda_k)$  sur  $A \cap B$  ou sur B tout entier)

(2) Déterminer  $X^{k+1} \in [X^k, Z^k]$  tel que:

$$d(X^{k+1}, \lambda_k) \geq d(X^k, \lambda_k), \forall X \in [X^k, Z^k]$$

(3) Choisir  $X^{k+1}$  dans  $E^{k+1} \cap B$ , en posant

$$E^{k+1} = E(\lambda^{k+1}) \text{ et } \lambda^{k+1} = f(X^{k+1})$$

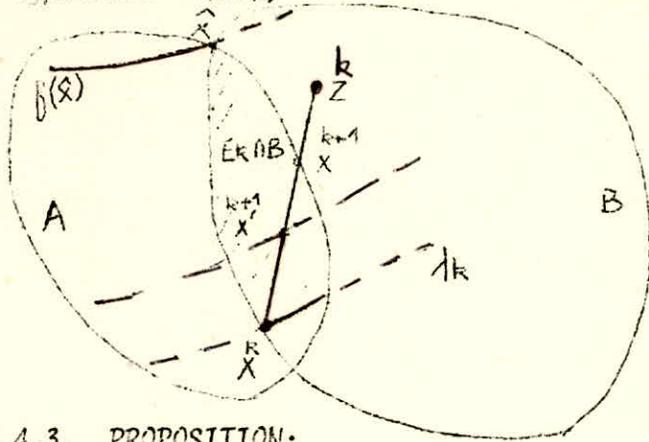
(par exemple en maximisant  $f(X)$  sur  $[X^k, Z^k] \cap E^{k+1}$ )

Et ainsi de suite.

Remarque 1:  $B$  convexe  $\Rightarrow [x, z] \subset B$

Remarque 2  $E_{k+1} \cap B \neq \emptyset$ , car  $d(x^{k+1}, \lambda_k) \geq d(x^k, \lambda_k) = 0$  et par suite,

d'après l'hypothèse (H3),  $x^{k+1} \in E_k \cap B \subset A \cap B$ , donc  $f(x^{k+1}) \leq f(\bar{x})$



2.4.3. PROPOSITION:

L'algorithme décrit en 2.4.2 fournit une suite de solutions réalisable

$x^k$  et  $x^{k+1}$ . On a:

$$d(x^{k+1}, \lambda_k) \geq \sup \{ d(x, \lambda_k) / x \in E_k \cap B \} - \epsilon_k$$

avec  $\epsilon_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Par suite, cet algorithme rentre dans le cadre

de la méthode des centres, décrite en 2.2., et les résultats de la proposition

2.3.3 s'appliquant ici.

Démonstration:

Il s'agit de démontrer, dans le cas où l'algorithme est infini, que l'approximation  $\epsilon_k$ , définie par:

$$\epsilon_k = \sup \{ d(x, \lambda_k) / x \in E_k \cap B \} - d(x^{k+1}, \lambda_k)$$

tend vers zéro quand  $k \rightarrow +\infty$ . La démonstration se décompose en trois étapes.

Tout d'abord, on établit que  $d(x^{k+1}, \lambda_k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$

Puis qu'il existe une sous-suite pour laquelle  $d(z, x, \lambda_k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$

Enfin, que  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$

1./ Montrons que  $d(x^k, \lambda_k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$

$$x^k \in E_k \Rightarrow f(x^k) \leq f(x^{k+1})$$

$$x^k \in E_{k+1} \Rightarrow f(x^k) \leq f(x^{k+1}) \Rightarrow \lambda_k \leq f(x^k) \leq f(x^{k+1}) \leq f(x^{k+1}) = \lambda_{k+1} \leq f(x) \dots$$

$$x^k \in A \cap B \Rightarrow f(x^k) \leq f(x)$$

$f(x^{k+1}) \rightarrow \lambda^* \leq f(x)$	(1)
$f(x^k) \rightarrow \lambda^*$	(1')
$\lambda_k \rightarrow \lambda^*$	(2)
$f(x^{k+1}) - \lambda_k \rightarrow 0$	(3)
$f(x^k) - \lambda_k \rightarrow 0$	(3')

quand  $k \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N}$

Par ailleurs,  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$E_k \supset E'_{k+1} \supset E_{k+1} \supset E(\lambda^*)$$

$$x^k \in Fr(E_{k+1})$$

$d$  est une  $F$  distance régulière

$$\Rightarrow d(x^k, \lambda_k) \rightarrow 0, \text{ quand } k \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N} \quad (4)$$

On a un résultat analogue avec  $x^k$

$$E_k \supset E'_{k+1} \supset E_{k+1} \supset E(\lambda^*)$$

$$x^k \in Fr(E'_{k+1})$$

$d$  est une  $F$  distance régulière

$$\Rightarrow d(x^k, \lambda_k) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{N} \quad (4')$$

2-/ Montrons qu'il existe une sous-suite  $S \subset \mathbb{N}$  pour laquelle

$$d'(z, x, \lambda_k) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty, k \in S:$$

Le couple  $(x, z)$  appartient à  $A \cap B \times B$  qui est compact. Donc il existe

$S \subset \mathbb{N}$  telle que:

$$\left. \begin{array}{l} x^k \rightarrow x^* \in A \cap B \\ z^k \rightarrow z^* \in B \end{array} \right\} \text{ quand } k \rightarrow +\infty, k \in S \subset \mathbb{N} \quad (5)$$

$$(6)$$

Par ailleurs,  $\forall \theta \in [0, 1]$  fixe,  $\forall k \in \mathbb{N}$  par définition de  $X^{k+1}$ .

$$d(X + \theta(Z - X), \lambda_k) \leq d(X', \lambda_k)$$

ce qui donne à la limite,  $k \rightarrow +\infty$ ,  $k \in S$ , avec  $\theta$  fixé,  $d$  étant continue,

et d'après (4):  $d(\hat{X} + \theta(\hat{Z} - \hat{X}), \lambda^*) \leq 0, \forall \theta \in [0, 1]$  (7)

La relation (7) entraîne avec l'hypothèse (H5):

$$d(\hat{X} + \theta(\hat{Z} - \hat{X}), \hat{X}, \lambda^*) \leq 0, \forall \theta \in [0, 1]$$
 (8)

En particulier, pour  $\theta = 1$ , et puisque  $d'$  continue:

$\lim d'(Z, X, \lambda_k) \leq 0$  quand  $k \rightarrow +\infty, k \in S;$

(9).

3/ Montrons que  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty, k \in S$

Soit  $C^k$  un point de  $E_k$  maximisant  $d(X, \lambda_k)$  sur  $E_k \cap B$ . Un tel point existe, car  $d$  est continue,  $B$  est compact,  $E_k \cap B \neq \emptyset$ , et de  $(X, \lambda_k) < 0, \forall X \in E_k$  d'après l'hypothèse (H3)

On a:  $\varepsilon_k = d(C^k, \lambda_k) - d(X^{k+1}, \lambda_k) \geq 0$

On sait d'après la relation (1'), que  $d(X', \lambda_k) \rightarrow 0$ , quand  $k \rightarrow +\infty$

$k \in \mathbb{N}$ .

Par ailleurs, puisque  $C^k \in A \cap B$ :

$$0 \leq d(C^k, \lambda_k) \leq d'(C^k, X^k, \lambda_k)$$
 d'après l'hypothèse (H4),

$$d'(C^k, X^k, \lambda_k) \leq \alpha \cdot d'(Z^k, X^k, \lambda_k)$$
 par définition de  $Z^k$

En passant à la limite,  $k \rightarrow +\infty, k \in S$ , puisque  $\alpha \gg 1$  et d'après (9)

$$\lim d(C, \lambda_k) = 0$$

$\lim \varepsilon_k = 0$  quand  $k \rightarrow +\infty, k \in S$  (10).

Ce qui achève la démonstration.

Remarque: La démonstration demeure valable si  $d'$  n'est pas continue partout

mais seulement au point  $(\hat{Z}, \hat{X}, \lambda^*)$ . Cet affaiblissement sera utilisé plus loin dans les applications.

II- PARTIE  
APPLICATIONS DE LA METHODE-DES CENTRES  
PAR MAJORATIONS

1- PROBLEME POSE:

On considère le programme mathématique suivant:

Maximiser  $f(X)$  sous les conditions

$$g_i(X) \geq 0, \quad i \in L = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{où : } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i \in L$$

$f$  et  $g_i$  sont des fonctions concaves, continuellement différentiables et bornées supérieurement sur  $\{X / g_i(X) \geq 0, i \in L\}$ . On suppose que  $f$  atteint son maximum sur cet ensemble en un point  $\hat{X}$ .

voilà le problème qu'il s'agit de résoudre par la méthode des centres par majoration. Nous distinguerons deux types d'applications, selon les rôles joués par les ensembles  $A$  et  $B$  de la méthode des centres.

2- APPLICATIONS DU TYPE (A)

On pose:

$A = \{X / g_i(X) \geq 0, i \in L\}$ ;  $A$  est fermé,  $\hat{A} \neq \emptyset \Rightarrow A$  convexe, fermé.

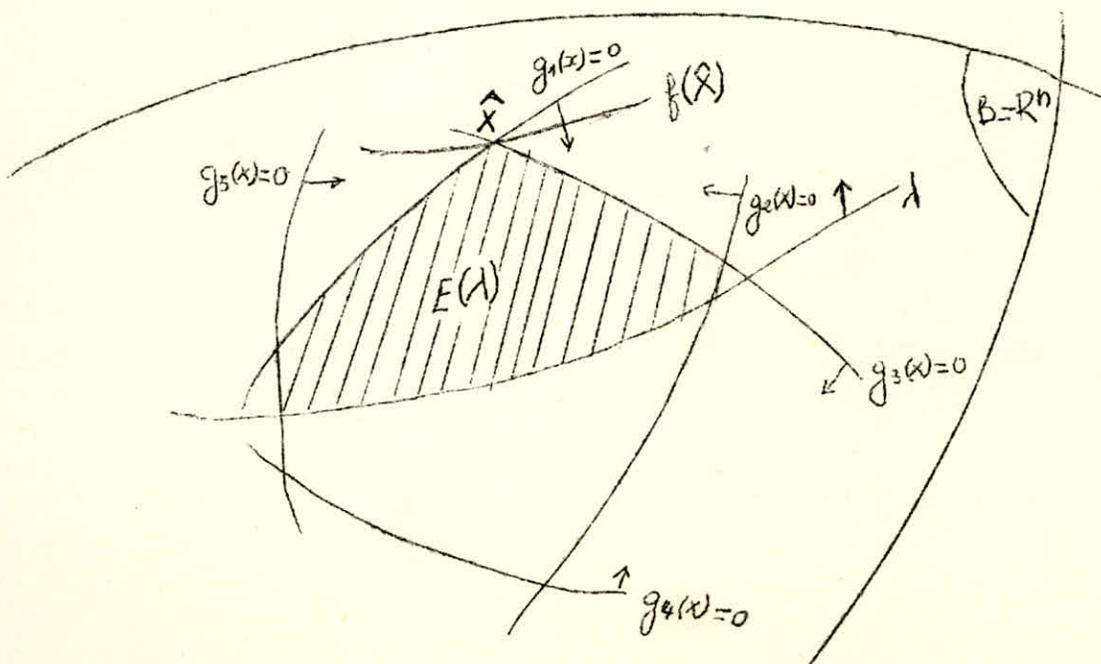
$B \subset \mathbb{R}^n$  convexe, compact, assez grand pour contenir la solution optimale  $\hat{X}$

$$d(X, \lambda) = \min \{ f(X) - \lambda, g_i(X) / i \in L \}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$E(\lambda) = \{ X / f(X) - \lambda \geq 0, g_i(X) \geq 0, i \in L \}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{E} = \{ E(\lambda) / \lambda \in K \subset \mathbb{R} \}$$

$$K = [\inf \{ f(X) / X \in A \}, f(\hat{X})]$$



$K = \left[ \bigcup \{ f(x) / x \in A \}, f(\hat{x}) \right] \Rightarrow$  qu'à un ensemble  $E(\lambda)$  ne correspond qu'une seule valeur de  $\lambda \in K$ .

$f$  : concave  
 $\text{Fr} \{ x / g_i(x) \geq 0 \} = \{ x / g_i(x) = 0 \}; i \in L \quad (M')$

$\text{Fr} \{ x / f(x) \geq \lambda \} = \{ x / f(x) = \lambda \} \quad \forall \lambda \in K \quad (M'')$

D'où les hypothèses de la proposition 2.1.1.3 sont satisfaites.

La fonction  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et concave. Montrons que c'est une F-distance régulière définie pour  $E$ .

(i)  $d(x, \lambda) > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \hat{E}(\lambda); ?$

$$d(x, \lambda) = \min \{ f(x) - \lambda, g_i(x) / i \in L \} \Rightarrow d(x, \lambda) = f(x) - \lambda \text{ ou } d(x, \lambda) = g_i(x) \quad i \in L$$

D'après (M'),  $x \in \hat{E}(\lambda) \Rightarrow g_i(x) > 0 \Rightarrow d(x, \lambda) > 0$   
 D'après (M''),  $x \in \hat{E}(\lambda) \Rightarrow f(x) - \lambda > 0 \Rightarrow d(x, \lambda) > 0 \Rightarrow$  (i) vérifiée

(ii)  $d(x, \lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \text{Fr} \{ E(\lambda) \}; ?$

$x \in \text{Fr} \{ E(\lambda) \} \Rightarrow g_i(x) = 0, i \in L$  d'après (M')  
 $x \in \text{Fr} \{ E(\lambda) \} \Rightarrow f(x) - \lambda = 0$  d'après (M'')  $\Rightarrow d(x, \lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \text{Fr} \{ E(\lambda) \}$

(iii)  $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$  on a :  $x \in E(\lambda)$  et  $\lambda > \lambda' \Rightarrow d(x, \lambda) \leq d(x, \lambda'); ?$

$$E(\lambda) \subset E(\lambda') \Leftrightarrow \lambda > \lambda' \Rightarrow f(x) - \lambda < f(x) - \lambda' \Rightarrow d(x, \lambda) < d(x, \lambda')$$

$\dots \Rightarrow d(x, \lambda) \leq d(x, \lambda'), \forall x \in E(\lambda)$

(iv)  $\forall$  la suite  $\{ \lambda_k \in \mathbb{R} / k \in \mathbb{N} \}$ , monotone non décroissante,  
 $\forall$  la suite  $\{ \hat{x}^k \in \mathbb{R}^n / k \in \mathbb{N} \}$ , telle que :  $\hat{x}^k \in \text{Fr} \{ E(\lambda_k) \} \quad \forall k$  on a :

$$\Rightarrow \begin{aligned} & " f(\hat{x}^{k+1}) - f(\hat{x}^k) \longrightarrow 0 \text{ quand } k \longrightarrow +\infty " \\ & " d(\hat{x}^{k+1}, \lambda_k) \longrightarrow 0 \text{ quand } k \longrightarrow +\infty " \quad ? \end{aligned}$$

$$\lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \lambda^* \Leftrightarrow E(\lambda_k) \supset E(\lambda_{k+1}) \supset E(\lambda^*) \quad (1)$$

$$\lambda_k \leq f(\hat{x}^k) \leq f(\hat{x}^{k+1}) \leq \lambda^* \leq f(\hat{x})$$

$$f(\hat{x}^k) \longrightarrow \lambda^* \leq f(\hat{x}) \text{ quand } k \longrightarrow +\infty \quad (2)$$

$$f(\hat{x}^{k+1}) \longrightarrow \lambda^* \leq f(\hat{x}) \text{ quand } k \longrightarrow +\infty \quad (3)$$

$$\lambda_k \longrightarrow \lambda^* \leq f(\hat{x}) \text{ quand } k \longrightarrow +\infty \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ et } (3) &\Rightarrow f(x^{k+1}) - f(x^k) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty \\ (3) \text{ et } (4) &\Rightarrow f(x^{k+1}) - \lambda k \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty \\ \dots &\Rightarrow d(x^k, \lambda k) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Nous supposons ici que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Alors, puisque A et B sont convexes, ils vérifient l'hypothèse (H) de la méthode des centres, définie en I.2.3. c'est à dire

$$\overset{\circ}{A} \cap B \cap O = \emptyset \Rightarrow A \cap B \cap O = \emptyset \quad \forall O \subset \mathbb{R}^n \text{ ouvert,}$$

et dans ces conditions les hypothèses (H1) à (H3) de la méthode des centres par majorations, définies en I.2.4.1. sont satisfaites.

Soient :  $g_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in L$  des fonctions numériques définies par:

$$g_i(x, y) = g_i(y) + \nabla g_i(y) \cdot (x - y), \quad i \in L$$

$f': \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction numérique définie par:

$$f'(x, y) = f(y) + \nabla f(y) \cdot (x - y)$$

$g_i$  et  $f'$  sont des fonctions affines de  $x$ .

Prenons :  $d'(x, y, \lambda) = \min \{ f'(x, y) - \lambda, g_i(x, y) \mid i \in J_\epsilon(y) \}$

avec  $\epsilon > 0$  étant donné:

$$J_\epsilon(y) = \{ i \in L \mid g_i(y) < \epsilon \}$$

Dans ces conditions, les hypothèses (H4) et (H5) de la méthode des centres par majorations, définies en I.2.4.1, sont satisfaites. En effet.

$$f \text{ concave} \Rightarrow f'(x, y) \geq f(x), \quad \forall x, \forall y$$

$$g_i \text{ concaves} \Rightarrow g_i'(x, y) \geq g_i(x), \quad \forall x, \forall y$$

$$\begin{aligned} d(x, y, \lambda) &= \min \{ f'(x, y) - \lambda, g_i'(x, y) \mid i \in J_\epsilon(y) \} \\ &\geq \min \{ f'(x, y) - \lambda, g_i'(x, y) \mid i \in L \} \quad \text{car } J_\epsilon(y) \subset L \\ &\geq \min \{ f(x) - \lambda, g_i(x) \mid i \in L \} \\ &= d(x, \lambda) \end{aligned}$$

...  $d'(x, y, \lambda) \geq d(x, \lambda)$  ce qui vérifie (H4) i.

Par ailleurs:

$$\begin{aligned} d'(X, X, f(X)) &= \min \{ f'(x, X) - f(X), g'_i(x, X) / i \in J_\varepsilon(X) \} \\ &= \min \{ 0, g'_i(x) / i \in J_\varepsilon(X) \} \text{ car } f'(x, X) = f(X) \text{ et } g'_i(x, X) = g'_i(x) \\ &= 0, \forall \lambda \in A \end{aligned}$$

...  $d'(X, X, f(X)) = 0$  ce qui vérifie (H4) ii.

Pour l'hypothèse (H5), considérons:

$$a \in B, b \in B \text{ tels que: } d'(X, f(a)) \leq 0, \forall X \in [a, b] \quad (1)$$

La condition (1)  $\Rightarrow \nabla f(a) \cdot (b-a) \leq 0$  et/ou  $\exists i \in J_\varepsilon(a) : \nabla g_i(a) \cdot (b-a) \leq 0$   
 et que par conséquent,  $d'(X, a, f(a))$  est décroissante en  $a$  sur  $[a, b]$ .

Comme  $d'(a, a, f(a)) = d(a, f(a)) = 0$ , on a bien

$$d'(X, a, f(a)) \leq 0, \forall X \in [a, b]$$

Il reste à vérifier si  $d'(X, Y, \lambda)$  est bien une fonction continue. Si  $J_\varepsilon(Y)$  demeure constant,  $d'$  est continue car  $\nabla f(Y)$  et  $\nabla g_i(Y)$  sont continues par hypothèses. Il n'en est plus de même si  $J(Y)$  prend des valeurs différentes. Mais, d'après la remarque, faite à la fin de la démonstration de la proposition 2.4.3. (convergence de l'algorithme général) seule la continuité de  $d'$  au point  $(\overset{y}{Z}, \overset{x}{X}, \overset{\lambda}{\lambda})$  est nécessaire, et il est clair que l'on aura, pour tout  $Y$  suffisamment proche de  $X$ , du fait de la continuité des fonctions  $g_i$ :

$$J_\varepsilon(Y) = \text{Cte} = J_\varepsilon(X).$$

Il est essentiel de prendre  $\varepsilon > 0$  et non  $\varepsilon = 0$ .

### 2.1- METHODE DES DIRECTIONS REALISABLES DE ZOUTENDIJK:

Si l'on prend pour  $B$  un pavé grand par rapport aux  $k$  dimensions de  $\mathbb{A}^n \{X / f(X) \geq f^*$  supposé compact, et  $\varepsilon$  assez petit, la détermination de  $Z$  peut se faire en résolvant le programme linéaire suivant, où

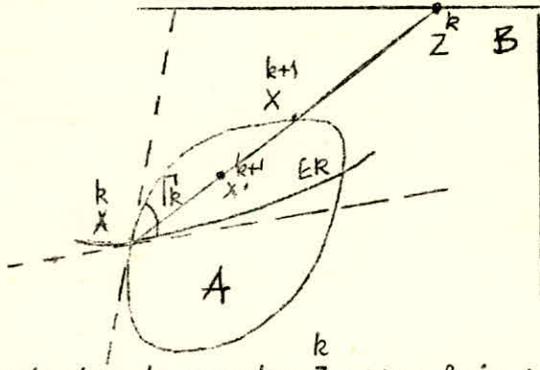
$\lambda_k = f(X)$  est fixé, et dont les variables sont  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} &\text{Maximiser } \mu \text{ sous les conditions} \\ &g'_i(X, X) \geq \mu, i \in J_\varepsilon(X) \\ &f'(X, X) - \lambda_k \geq \mu \\ &X \in B \end{aligned}$$

On a vu que  $J_{\varepsilon}^k(X)$  est choisi tel que:  $J_{\varepsilon}^k(X) = \{i \in L / g_i^k(X) < \varepsilon\}$  avec  $\varepsilon > 0$   
 Deux cas sont à envisager:

1/  $J_{\varepsilon}^k(X) = \{i \in L / g_i^k(X) = 0\}$

Dans ce cas; le pavé B étant pris assez grand, il n'est pas nécessaire d'optimiser complètement ce programme linéaire, dont le domaine est l'intersection de B et d'un cône polyédrique  $\Gamma_k^k$  de sommet  $X^k$



On peut se contenter de prendre Z assez loin sur la demi-droite d'origine  $X^k$ , représentant la direction de plus forte pente en  $X^k$  pour  $d^k(X, X, \lambda^k)$ , et intérieur à  $\Gamma_k^k$ . Les faces de ce cône sont les plans d'appuis aux-contraintes actives en  $X^k$  et à la contrainte supplémentaire  $f(X) \geq f(X^k)$ . On a alors:

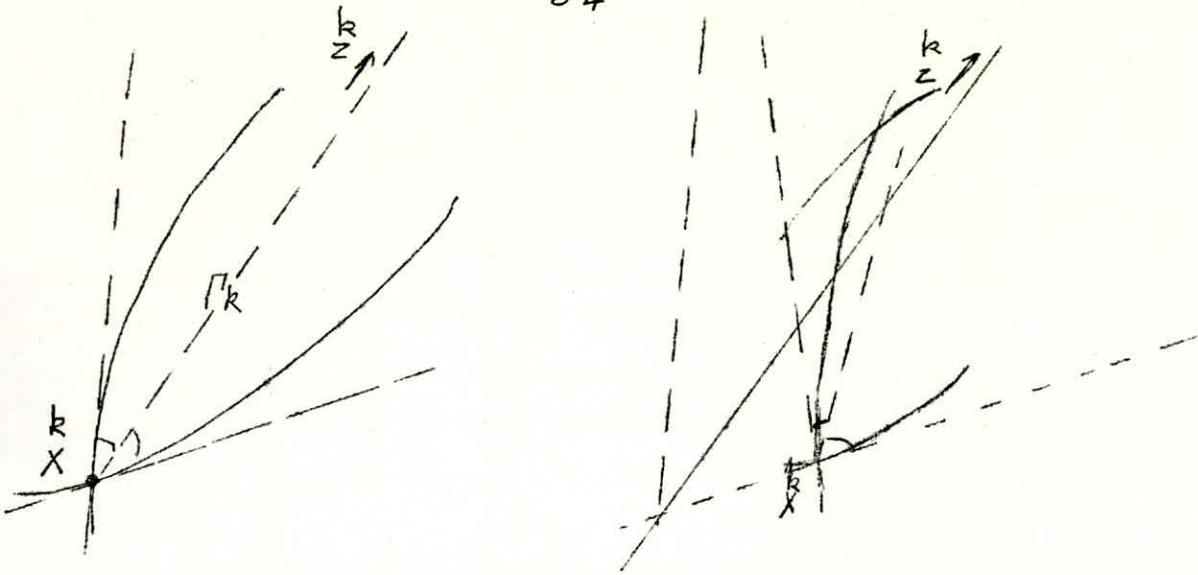
$$d^k(Z, X, \lambda^k) \geq d^k(C, X, \lambda^k)$$

car:  $|Z^k - X^k| \geq |C^k - X^k|$

et la pente de  $(Z^k - X^k)$  est la plus forte. Donc, sur le plan pratique, il n'est pas nécessaire de prendre en compte le pavé B, la méthode simpliciale fournissant alors la direction d'infinitude  $(Z^k - X^k)$ .

2/  $J_{\varepsilon}^k(X) \neq \{i \in L / g_i^k(X) = 0\}$

Dans ce second cas, le domaine du programme linéaire n'est plus un cône, et quelques étapes préliminaires (changement de bases) de la méthode simpliciale se feront avant d'obtenir la direction d'infinitude correspondant à  $Z^k$



Zoutendijk procède ici de façon légèrement différente: les contraintes linéarisées d'indices  $i$  telles que

$$i \in J_E(x^k), g_i(x^k) \neq 0$$

Sont ramenées en  $\bar{x}^k$ , parallèlement à elles-mêmes. Le polyèdre de ce nouveau programme linéaire (sans tenir compte de B) est donc dans ces conditions toujours un cône. Mais, ce cône peut éventuellement se réduire au point  $\bar{x}^k$ , ce qui oblige alors à diminuer  $E$  pour diminuer l'ensemble  $J_E(x^k)$ , et obtenir un vrai cône (de dimensions supérieures). Ce procédé ne présente pas d'intérêt, du moins théoriquement, sur le procédé général décrit précédemment: la résolution du programme linéaire est analogue dans ces deux procédés, et le précédent a l'avantage de n'avoir pas

à diminuer  $E$ .

Une fois  $\bar{z}^k$  déterminé, on peut pratiquement sauter l'étape de la recherche de  $x^{k+1}$ , maximisant de  $(X, \lambda^k)$  sur  $[\bar{x}^k, \bar{z}^k]$ , et rechercher directement  $x^{k+1}$ , sur  $A \cap [\bar{x}^k, \bar{z}^k]$ , en résolvant

$$x^{k+1}: f(x^{k+1}) = \max \{ f(x) / x \in A \cap [\bar{x}^k, \bar{z}^k] \}$$

c'est ce que propose Zoutendijk: ce calcul est simple, puisqu'il s'agit d'une maximisation à une dimension. Mais on peut également, comme il est indiqué dans l'algorithme général, choisir  $x^{k+1}$  de façon arbitraire dans  $E \setminus \{k+1\}$ , avec  $\lambda^{k+1} = f'(x^{k+1})$ .

Le point  $x^{k+1}$  est alors déterminé par une maximisation à une dimension, portant sur  $d$  au lieu de  $f$ :

$$x^{k+1}: d(x^{k+1}, \lambda^k) = \max \{ d(x, \lambda^k) / x \in [\bar{x}^k, \bar{z}^k] \}$$

### 2-2 METHODE DES CENTRES LINEARISEE

Si l'on choisit  $\varepsilon$  très grand, c'est à dire si l'on pose

$$J_\varepsilon(x) = L, \forall x$$

On obtient la méthode des centres linéarisée, qui <sup>est</sup> l'objet de l'application pratique (voir III partie). Le compact  $B$  peut être pratiquement supprimé, ou bien sa définition peut prendre en compte par exemple toutes les contraintes  $g_i(x) \geq 0$  qui sont affines.

Ce qui importe pour les calculs, c'est que la condition  $x \in B$  soit représentée par des contraintes linéaires.

La méthode de Zoutendijk choisit sa direction de déplacement en tenant compte des renseignements locaux, alors que cette méthode, comme on le verra à la III partie, est plus globale, au prix de résolutions de programmes linéaires plus importants.

### 3- APPLICATIONS DU TYPE (B)

On pose:

$$A = \mathbb{R}^n$$

$$B = \{ x / g_i(x) \geq 0, i \in L \}$$

On suppose ici que  $B$  est compact et d'intérieur non vide. Il est convexe puisque les  $g_i$  sont concaves.

$$d(x, \lambda) = f(x) - \lambda$$

$$E(\lambda) = \{ x / f(x) \geq \lambda \}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, concave.

$$E = \{ E(\lambda) / \lambda \in K \}$$

$$K = [ \inf \{ f(x) / x \in \mathbb{R}^n \}, \sup \{ f(x) / x \in \mathbb{R}^n \} ] \dots / \dots$$

Dans ces conditions, on vérifie que  $d$  est une  $F$ - distance régulière définie sur  $E$ . Les hypothèses (H1) à (H3) de la méthode des centres par majorations définies en I.2.4.1, sont satisfaites.

La fonction  $f'(X, Y)$  est définie de la même que précédemment en II. 1 c'est à dire :

$$f' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(X, Y) = f(Y) + \nabla f(Y) \cdot \nabla(X - Y)$$

On prend :

$$d'(X, Y, \lambda) = f'(X, Y) - \lambda$$

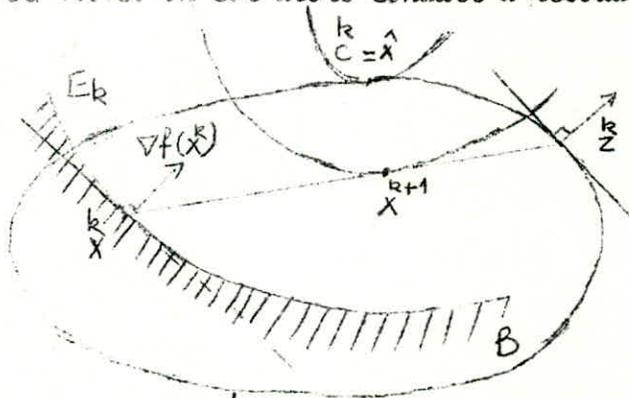
On vérifie alors que les hypothèses (H4) i, (H4)ii et (H5) de la méthode des centres par majorations sont satisfaites.

### 3.1 METHODE DE FRANCK ET WOLFE.

La méthode de Franck et Wolfe avait été établie pour le cas où  $B$  est un polyèdre linéaire et  $f$  une fonction quadratique. On obtient ici un algorithme qui généralise cette méthode.

A chaque étape, on a à maximiser une fonction affine  $d'$  sur  $B$ . Les points  $x^{k+1}$  et  $x^k$  sont toujours confondus si on ne sait choisir  $x^{k+1}$  que sur  $\left[ \begin{matrix} x^k \\ z^k \end{matrix} \right]$ .

Sur le plan pratique des calculs, cette méthode n'offre de possibilités que si  $B$  est un polyèdre linéaire. On est alors conduit à résoudre des programmes linéaires.



Remarquons que le point  $c^k$  maximisant  $d(x, \lambda^k)$  sur  $B$ , est ici une constante, solution optimale du problème posé.

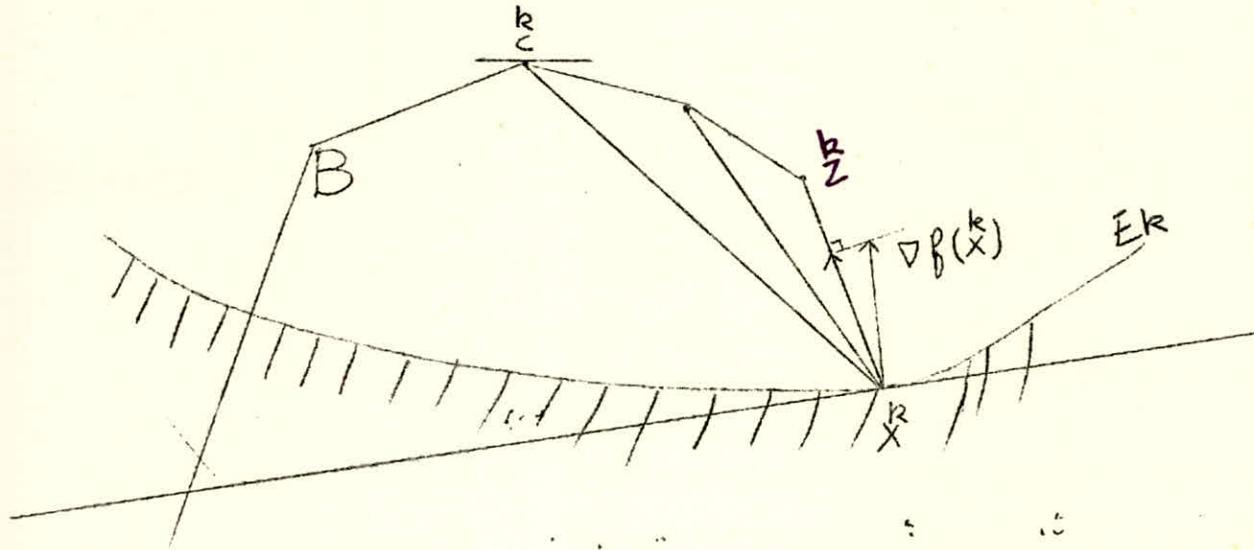
Si  $B = \mathbb{R}^n$ , le problème posé devient celui de la maximisation de  $f$  dans  $\mathbb{R}^n$  (voir I-1.2).

### 32- METHODE DU GRADIENT PROJETE DE ROSEN.

Dans le cas où  $B$  est un polyèdre linéaire, il est possible de simplifier considérablement le calcul de  $z^k$ , en ne résolvant pas complètement le programme linéaire correspondant: on peut se contenter, avec Rosen, de la première étape de cheminement de plus forte pente sur le polyèdre, .../...

relativement à  $d'$ . Cela revient pratiquement à projeter le gradient  $d'(X, \lambda^k)$  calculé au point  $X^k$  (c'est à dire  $\nabla f(X^k)$ ) sur le cône tangent à  $E^k \cap B$  en  $X^k$ . Soit  $\vec{v}^k$  cette projection. Le point  $Z^k$  est alors pris à l'extrémité de l'intersection de  $B$  avec la demi droite d'origine  $X^k$  et de direction  $\vec{v}^k$ .

cette solution approchée  $Z^k$  est acceptable dans la définition de l'algorithme général, si l'on a  $\|X^k - Z^k\| \geq \epsilon$  étant constante indépendante de  $k$ .



On doit avoir en effet:

$$\alpha \cdot d'(Z^k, X^k, \lambda^k) \geq \text{Max} \{ d'(X, X^k, \lambda^k) / X \in B \} = d'(C^k, X^k, \lambda^k)$$

avec  $\alpha \geq 1$ , constante indépendante de  $k$ . En remarquant que  $\vec{v}^k$  est la direction de plus forte pente sur  $B$ , au point  $X^k$ , pour  $d'(X, X^k, \lambda^k)$ , on peut écrire :

$$d'(Z^k, X^k, \lambda^k) \geq \frac{|Z^k - X^k|}{|C^k - X^k|} d'(C^k, X^k, \lambda^k)$$

Puisque  $B$  est bornée,  $\frac{|C^k - X^k|}{|Z^k - X^k|} \leq B$ , constante. Par suite, en prenant  $\alpha = B/\epsilon \geq 1$ , On a bien la condition cherchée.

Si le point  $Z^k$  ainsi trouvé est trop proche de  $X^k$ , c'est à dire si  $\|Z^k - X^k\| < \epsilon$  il suffit de continuer sur la trajectoire de plus forte pente, sans modifier le gradient  $f(X)$ , jusqu'à ce que l'on ait  $\|Z^k - X^k\| \geq \epsilon$ , ou bien  $d'(Z^k, X^k, \lambda^k) = \max \{ d'(X, X^k, \lambda^k) / X \in B \}$ . On sait en effet qu'une telle trajectoire, linéaire par morceaux, converge en un nombre fini d'étapes vers une solution optimale  $C^k$  du programme linéaire, et que la pente moyenne des solutions courantes ainsi définies est décroissante:

On aura donc toujours:

$$\text{pente moyenne sur } [X^k, Z^k] \geq \text{pente moyenne sur } [X^k, C^k].$$

III -PARTIE -

-APPLICATION PRATIQUE -

METHODE DES CENTRES LINEARISEE

1- INTRODUCTION

Nous établissons dans ce qui suit, avec deux variantes, un algorithme de résolution pour les programmes mathématiques convexes, du type:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Maximiser } f(X) \text{ sous les conditions} \\ g_i(X) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{array} \right.$$

où les fonctions  $f$  et  $g_i$ , définies dans  $\mathbb{R}^n$ , sont concaves et continuellement différentiables. Nous supposons de plus qu'il existe un point  $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $g_i(\bar{X}) > 0$ , pour l'ensemble des fonctions  $g_i$  non affines.

L'intérêt de cet algorithme est de conduire à la résolution d'une suite, théoriquement infinie, mais finie pratiquement, de programmes linéaires analogues c'est à dire dont le nombre de contraintes est constant. Plus précisément, ces contraintes linéaires sont obtenues en linéarisant les diverses fonctions  $f$  et  $g_i$ , en des points tendant vers la solution optimale du problème donné.

Si certaines fonctions  $g_i$  sont de plus affines, les contraintes correspondantes des programmes linéaires ont leurs expressions inchangées, ce qui fait que cet algorithme ne détruit pas la partie linéaire du problème: à la limite, si le problème donné est un problème linéaire, les calculs se ramènent à la méthode simpliciale, avec paramétrisation d'un second membre.

Nous donnons dans ce qui suit des rappels concernant la méthode des centres, en nous limitant au minimum nécessaire et en utilisant une fonction F- distance  $d(X, A)$  au lieu de  $d(X, E(\lambda))$  pour des raisons de simplification (voir I-2.4.1), puis nous établissons au problème posé ici.

2- RAPPELS SUR LA METHODE DES CENTRES.

2.1- PROBLEME ENVISAGE.

On considère le programme mathématique suivant:

P: 

$$\begin{aligned} &\text{maximiser } f(x) \text{ sous les conditions} \\ &x \in A \subset \mathbb{R}^n \\ &x \in B \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

où  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction numérique continue, bornée supérieurement sur  $A \cap B$ , telle que

$$\text{Fr}\{x / f(x) \geq \lambda\} = \{x / f(x) = \lambda\}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

et où A est un ensemble de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant l'hypothèse suivante:

$$\overset{\circ}{A} \neq \emptyset \text{ et } \text{Fr}(A) = \text{Fr}(\overset{\circ}{A}) \quad (2.2)$$

On désignera par  $E(\lambda)$  un "tronçon" de A, c'est à dire

$$E(\lambda) = \{x / x \in A, f(x) \geq \lambda\}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Aucune hypothèse n'est faite à présent sur B.

2.2- Fonction F- distance

On appelle F distance compatible avec f toute fonction numérique

$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant aux conditions=

- (i)  $d(x, \lambda) > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \overset{\circ}{E}(\lambda)$
- (ii)  $d(x, \lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \text{Fr}(E(\lambda))$

(iii)  $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$  on a:

$$x \in E(\lambda) \text{ et } \left. \begin{array}{l} \lambda > \lambda' \\ \lambda > \lambda' \end{array} \right\} d(x, \lambda) \leq d(x, \lambda')$$

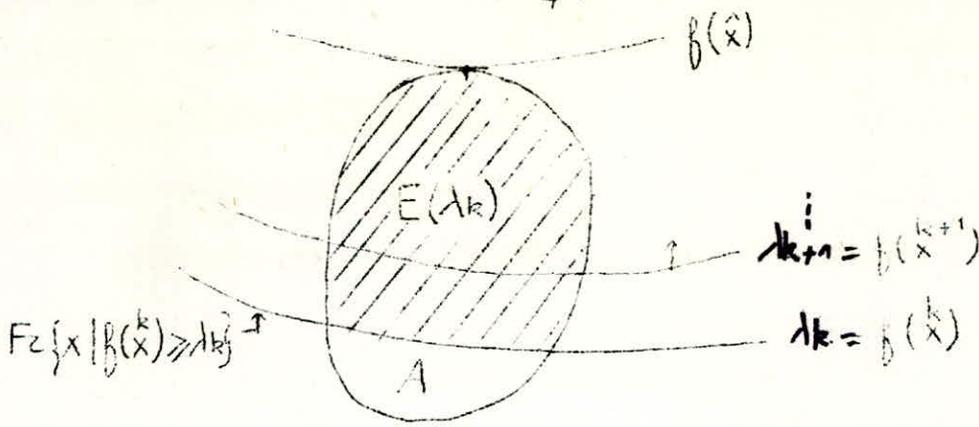
(iv) (compatibilité avec f)

$\forall$  la suite  $\lambda_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ , monotone non décroissante,

et  $\forall$  la suite  $x^k \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ , telle que:  $x^k \in \text{Fr}(E(\lambda_k)), \forall k$  on a:

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow d(x^k, \lambda_k) \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow +\infty$$



Remarque:

Cette propriété de "compatibilité" remplace - la propriété de "régularité" donnée en I-2.1.1.1., et joue un rôle analogue.

2.3-  $\epsilon$ -centre d'un tronçon

Etant donné un tronçon  $E(\lambda)$  et  $R$  tel que:

on appelle  $\epsilon$ -centre de  $E(\lambda)$  tout point  $C$  de  $E(\lambda)$  tel que:

Un 0-centre, s'il existe, est appelé un centre.

2.4- Méthode des centres.

Cette méthode consiste, après avoir choisi une  $F$ -distance compatible avec  $f$ , et une valeur initiale  $\lambda_0$  convenable, c'est à dire telle que

$$\lambda_0 < \sup \{ f(x) \mid x \in A \cap B \},$$

à résoudre la suite de programmes mathématiques suivante, pour  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$\phi_k$  :

<p>Maximiser <math>d(x, k)</math>, à <math>\epsilon^k</math> près,                  sous les conditions  <math>x \in E(\lambda_k)</math>  <math>x \in B</math></p>
--

En d'autres termes, la résolution de  $\phi_k$  consiste à déterminer un " $\epsilon$ -centre relatif" de  $E(\lambda_k)$  dans  $B$ . Soit  $x^{k+1}$  ce point. La suite des valeurs

$\lambda^k$  est obtenue par:

$$\lambda^k = f^k(X), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

La suite des  $\lambda^k$  doit être monotone décroissante, convergente vers 0 et satisfaire

à

$$0 \leq \varepsilon^k < \sup \left\{ d(X, \lambda^k) / X \in E(\lambda^k) \cap B \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Les  $\varepsilon^k$ -centres relatifs étant des points intérieurs aux tronçons  $E(\lambda^k)$

la contrainte  $X \in E(\lambda^k)$  est généralement inutile sur le plan pratique des calculs.

On obtient une suite de points  $X^k, k = 1, 2, 3, \dots$ , généralement infinie, qui converge vers une solution optimale  $X$  du problème P. Les tronçons  $E(\lambda^k)$

diminuent par inclusion et tendent vers une limite  $E(\hat{\lambda})$  telle que

$$E(\hat{\lambda}) \cap B = \emptyset \quad (\text{voir I-2-3.2.-})$$

Les valeurs de

$$\sup \left\{ d(X, \lambda^k) / X \in E(\lambda^k) \cap B \right\}$$

tendent vers 0 quand  $k \rightarrow +\infty$  (voir fig. de III. 2.1.)

Cette remarque permet de définir les  $\lambda^k$  de la façon suivante:

$$\varepsilon^k = (1 - \rho) \sup \left\{ d(X, \lambda^k) / X \in E(\lambda^k) \cap B \right\}$$

avec  $\rho \in ]0, 1]$ , - constante indépendante de  $k$ .

Dans ces conditions, les points  $X^{k+1}$  (qui sont des  $\varepsilon^{k+1}$  centres relatifs),

vérifient la relation ci-dessous.

$$\text{déterminer } X^{k+1} : d(X^{k+1}, \lambda^{k+1}) \geq \rho \sup \left\{ d(X, \lambda^k) / X \in E(\lambda^k) \cap B \right\} \quad (2.3.)$$

$$\rho \in ]0, 1]$$

3- RESOLUTION DU PROBLEME P.

3.1 Adaptation de la méthode des centres

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'appliquer la méthode des centres telle que nous l'avons décrite en III.2., dans les conditions particulières suivantes:

- I est un ensemble fini d'indices. Par exemple  $I = \{1, 2, \dots, m\}$

$$f, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in I. \quad (3-1)$$

Sont des fonctions concaves continuellement différentiables.

- f satisfait à (2.1) de III. 2.1 et les  $g_i$  à une condition semblable.

$$- A = \{X / g_i(X) \geq 0, \forall i \in I\} \quad (3.2)$$

A est donc un ensemble convexe fermé de  $\mathbb{R}^n$ , ainsi que les tronçons  $E(\lambda)$ .

$$- \overset{\circ}{A} \neq \emptyset \quad (3.3)$$

Par suite, puisque A est convexe, on a bien  $Fr(A) = Fr(\overset{\circ}{A})$  et l'hypothèse (2.2) de III. 2. 1 est satisfaite.

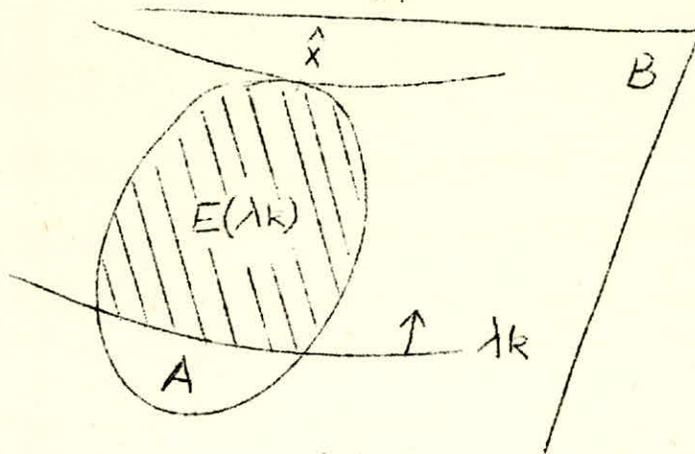
$$- B \text{ est un polyèdre linéaire fermé de } \mathbb{R}^n, \quad (3.4)$$

C'est à dire qu'il est défini par un système d'inégalités et d'égalités linéaires. Nous supposons de plus qu'il est borné, donc compact, ce qui est toujours possible en ajoutant éventuellement la condition  $X \in C$ , où C est un pavé de  $\mathbb{R}^n$ , assez grand pour ne pas modifier la solution du problème P, supposée à distance finie.

$$- d(X, \lambda) = \min \left\{ f(X) - \lambda, g_i(X) / i \in I \right\} \quad (3.5.)$$

Il s'agit bien d'une F- distance compatible avec f (voir démonstration en II.2.)

C'est une fonction concave en X ( puisque f et  $g_i$  le sont) pour tout R fixé ; elle prend des valeurs  $\leq 0$  pour tout  $X \in E(\lambda)$  ( voir hypothèse  $(H_3)$  de I.2.4.1) elle atteint son maximum par rapport à X, sur chaque ensemble  $E(\lambda) \cap P$ , d'intérieur non vide, en un point intérieur à  $E(\lambda)$ .



- Les différents points  $x^{k+1}$  fournis par la méthode des centres seront déterminés d'après le critère (2.3) de III.2.4. , c'est à dire en résolvant le problème suivant:

$Q_k$ :

Trouver  $x^{k+1} : d(x^{k+1}, \lambda^k) \geq \rho \cdot \sup \{ d(x, \lambda^k) \mid x \in E(\lambda^k) \cap B \}$   
 avec  $\rho \in ]0, 1]$  constante indépendante de  $k$   
 $\lambda^k = f(x^k)$ .

La suite des problèmes  $Q_k, k=1, 2, 3, \dots$  représentera, comme nous le verrons, l'essentiel des calculs à effectuer.

### 3.2- Linéarisation:

Soit  $g_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad i \in I$ , des fonctions numériques définies par :

$$g_i(x, y) = g_i(y) + \nabla g_i(y) \cdot (x - y) \quad (3.6)$$

et soit  $f': \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction numérique définie par:

$$f'(x, y) = f(y) + \nabla f(y) \cdot (x - y). \quad (3.7)$$

Les  $g_i$  et  $f'$  sont des fonctions affines de  $x$ . Posons par ailleurs

$$d'(x, y) = \min \{ f'(x, y) - \lambda, g_i(x, y) \mid i \in I \} \quad (3.8)$$

$d'$  est une fonction concave et affine par morceaux de  $x$ .

Nous avons la relation classique, liée à la concavité des fonctions envisagées:

$$d'(x, y, \lambda) \geq d(x, \lambda) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathcal{P}$$

Considérons le programme mathématique  $\rho'(\lambda, y)$  suivant.

$$\rho'(\lambda, y) = \begin{array}{l} \text{Maximiser } d'(x, y, \lambda) \text{ sous la condition} \\ x \\ x \in B \end{array}$$

et  $y$  étant fixé ( nous avons supprimé contrainte  $x \in E(\lambda)$  ). Ce problème peut se formuler sous la forme d'un programme linéaire en introduisant une variable supplémentaire  $u$ :

$$\rho''(\lambda, y) : \begin{array}{l} \text{Maximiser } u \text{ sous les conditions} \\ g_i(x, y) - \mu \geq 0, \quad \forall i \in I \\ f'(x, y) - \mu \geq \lambda \\ x \in B \end{array}$$

$\lambda$  et  $y$  étant fixés.

Nous allons établir un algorithme, dit partiel, qui nous permettra de résoudre le problème  $\rho_k$ , dans le cas  $\rho = 1$ , par une séquence infinie de résolutions de programmes linéaires  $\rho''(\lambda_k, y)$ , sous l'hypothèse de concavité des fonctions  $f$  et  $g_i$  envisagées.

### 3.3- Algorithme partiel (I)

Notons  $Z(\lambda, y)$  une solution optimale du programme linéaire

$\rho''(\lambda, y)$ . Considérons l'algorithme suivant au cours duquel  $\lambda$  demeure constant.

(1) Choisir une valeur de départ  $y \in B$ . Faire  $h = 0$

(2) Résoudre  $\rho''(\lambda, y^h)$  - Soit  $Z = Z(\lambda, y^h)$  une solution.

-3) Déterminer  $y^{h+1} : d(y^{h+1}, \lambda) = \max \left\{ d(x, \lambda) / x \in \left[ y^h, Z \right] \right\}$

(4) Aller en (2) avec  $h = h + 1$

- (1) pour la démonstration de la convergence consulter [6]

On obtient ainsi à l'aide de cet algorithme, une suite infinie de points  $Y^h$ , avec éventuellement à partir d'un certain rang, des points identiques : c'est le cas si l'on trouve  $Y^{h+1} = Y^h$  pour un certain rang  $h$ , ce qui entraîne alors que tous les problèmes ultérieurs sont identiques.

La suite des valeurs  $d(Y^h, \lambda)$   $h=0, 1, 2, \dots$  est monotone non décroissante d'après la partie (3) de l'algorithme.

### 3.4 Reconnaissance d'un $\epsilon$ -centre - (1)

On peut arrêter l'algorithme partiel quand on a obtenu un point  $Y^h$  tel que :

$$d(Y^h, \lambda_k) \geq \rho d^*(Z^h, Y^h, \lambda_k), \quad \rho \in ]0, 1] \text{ donné}$$

Ce point  $Y^h$  est solution de  $\rho_k$  et l'on pose  $X^{k+1} = Y^h$

## 4- ASPECTS PRATIQUES PARAMETRISATION.

### 4.1- ASPECTS FINI DES CALCULS.

Nous avons vu en III-3 que la détermination d'un  $\epsilon$  centre revient à résoudre une suite infinie de programmes linéaires, séparés par la recherche du maximum d'une fonction concave sur un segment de droite. Les programmes linéaires peuvent être résolus par la " méthode ... ". Si les maximisations sur un segment sont approchées, le nombre d'itérations à effectuer pour trouver un  $\epsilon$  centre sera fini.

Le nombre d' $\epsilon$ -centres  $X^k$  à calculer est fini si nous déterminons non pas une solution optimale exacte  $\hat{X}$  du problème  $P$ , mais une valeur approchée  $\hat{X}'$  telle que :

$$f(\hat{X}') \geq f(\hat{X}) - \epsilon$$

avec  $\hat{X}' \in A \cap B$  et  $\epsilon > 0$  donné. ( Il en est toujours ainsi en pratique ).

Par suite, le calcul d'une solution approchée  $\hat{X}'$  peut se faire à l'aide d'une suite finie d'opération: (en particulier de résolutions de programmes linéaires)

4.2- CAS LINEAIRE- PARAMETRISATION.

Si l'on envisage le cas d'un programme  $P$  entièrement linéaire, c'est à dire où les fonctions  $f$  et  $g_i$ ,  $i \in I$ , sont affines, le calcul d'un centre se réduit à la résolution d'un simple programme linéaire, car on a:

$$g'_i(x, y) = g_i(x) \quad \forall i \in I \text{ et } \forall y$$

$$f'(x, y) = f(x) \quad \forall y.$$

et ce programme s'écrit:

$P_k$ :	Maximiser $\mu$ sous les conditions
	$g_i(x) - \mu \geq 0, \quad i \in I$
	$f(x) - \mu \geq \lambda_k$
	$x \in B$

Lorsque l'on a déterminé la solution optimale  $(x^{k+1}, \mu^{k+1})$  de ce programme linéaire, on peut alors faire varier continuellement la valeur de la "troncature" à partir de  $\lambda_k$ , par valeurs croissantes. La valeur de la solution optimale varie avec  $\lambda$ .

ALGORITHME:

Prendre au départ  $\lambda_0 \in K = \left[ \inf \{ f(x) / x \in A \}, f(\hat{x}) \right]$ , se fixer  $\epsilon > 0$ .

ITERATION k:

(.) on dispose de  $P_k$ .

(1) Résoudre  $P_k$  soit  $(x^{k+1}, \mu^{k+1})$  la solution optimale

(2)  $T$  est d'optimalité:  $\mu^{k+1} \leq \epsilon$  ?

OUI : Fin de l'algorithme. Imprimer  $\hat{x} = x^{k+1}$ ,  $f(\hat{x})$ .

Non : aller en (3)

(3) Faire  $k = k+1$  et prendre  $\lambda_k = f(x^k)$  Aller en (.)

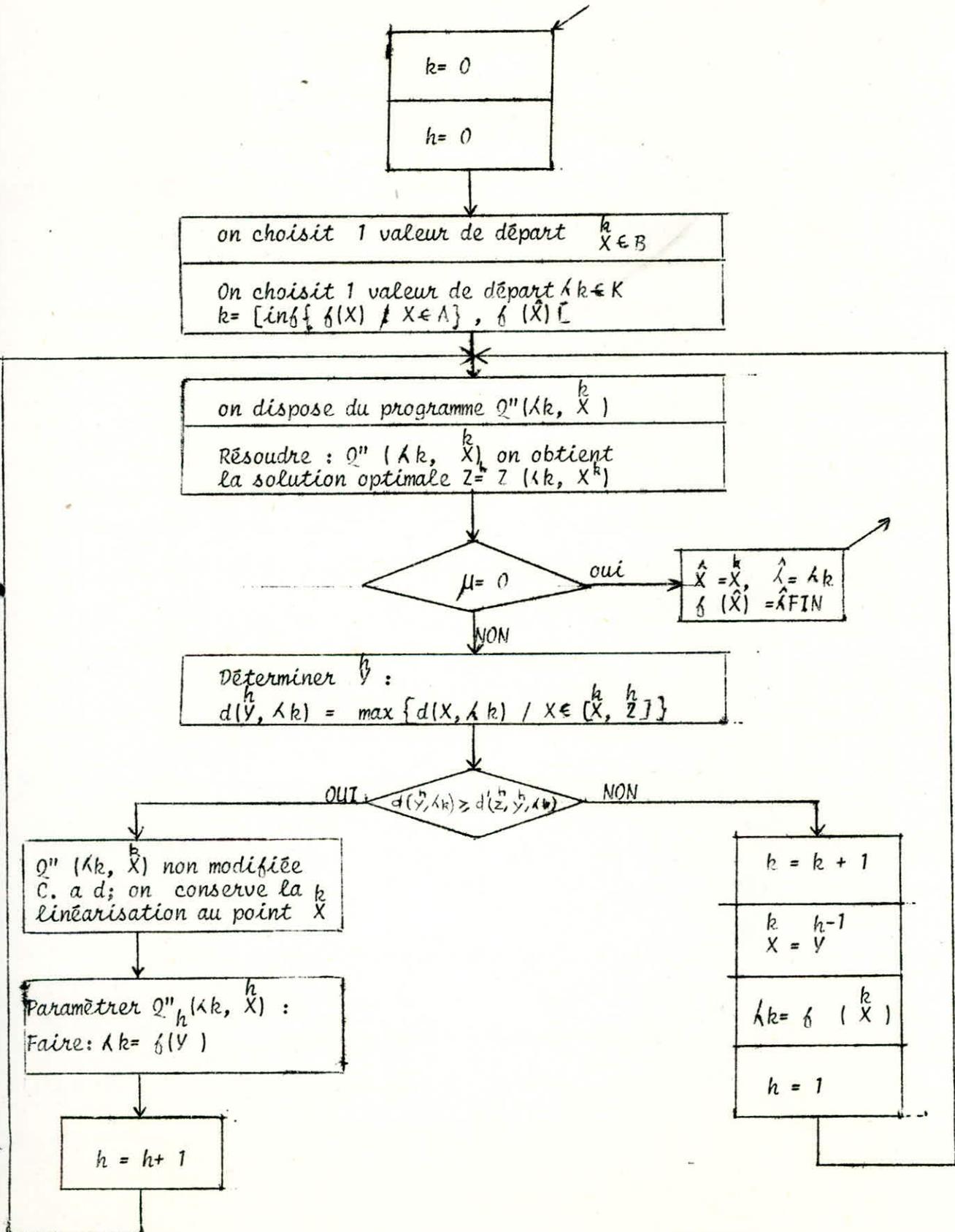
4.3- CAS Non linéaire paramétrisation-

On peut adapter le procédé de paramétrisation décrit précédemment au cas non linéaire, lorsqu'on détermine des  $\bar{E}$ -centres définis pratiquement par la relation (3.9.)

En effet supposons que nous soyons à l'étape  $k$ , avec la solution correspondante  $X^k$  et la troncature  $\lambda^k = f(X^k)$ . Après résolution d'un premier programme linéaire  $p''(k, X^k)$ , on obtient les points  $Z^k$  et  $Y^k$ . Si la condition (3.9) où l'on remplace  $h^*$  par 1, est satisfaite, on peut conserver la linéarisation au point  $X^k$  c'est à dire ne pas modifier  $p''(k, Y^k)$ ; mais paramétrer ce programme linéaire par rapport à  $\lambda$ , à partir de  $\lambda^k$ .

On obtient ainsi une suite de points  $Z^h$ , et pour chacun d'entre eux, on détermine le point  $Y^h$  qui maximise  $d(X, \lambda^h)$  sur  $[X^k, Z^h]$ , en désignant par  $\lambda^h$  la valeur du paramètre correspondant à la solution  $Z^h$ . Quand la condition (3.9) où l'on remplace  $h^*$  par  $h$  et  $\lambda^k$  par  $\lambda^{h-1}$ , n'est plus satisfaite pour un certain rang  $h$ , on choisit pour nouveau point  $X^{k+1}$  de linéarisation le point  $Y^{h-1}$ , et l'on prend pour nouvelle valeur de troncature  $\lambda^{k+1} = f(X^{k+1})$ . On résoud alors  $p''(\lambda^{k+1}, X^{k+1})$ , et on essaie la paramétrisation.

ALGORITHME DE RESOLUTION DU PROGRAMME Qk DANS LE CAS NON LINEAIRE



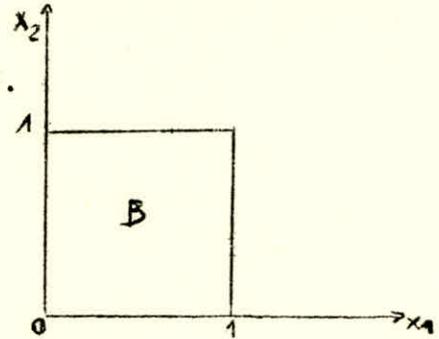
5- EXEMPLES NUMERIQUES

5.1- CAS LINEAIRE

5.1.1- PROBLEME POSE.

Maximiser  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ .

(P):  $\begin{cases} g^1(x_1, x_2) = 1 - x_1 \geq 0 \\ g^2(x_1, x_2) = 1 - x_2 \geq 0 \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$



5.1.2- APPLICATION DE LA METHODE DES CENTRES.

Le programme P est transformé en un programme Q équivalent:

Maximiser  $\mu$

(Q):  $\begin{cases} x_1 + x_2 - \mu \geq \kappa \\ -x_1 + 1 - \mu \geq 0 \\ -x_2 + 1 - \mu \geq 0 \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$

ou :

Maximiser  $\mu$

$\begin{cases} -x_1 - x_2 + \mu \leq -\kappa \\ x_1 + \mu \leq 1 \\ x_2 + \mu \leq 1 \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$

5.1.3- Résolution.

On applique l'algorithme décrit en III.4.2.

1ere itération  $\kappa = 0$

	$-x_1$	$-x_2$	$-\mu$	1
$x_0$	•	•	-1	•
F	-1	-1	0	•
A	1	•	1	1
B	•	1	1	1

	$-x_1$	$-x_2$	$-F$	1
$x_0$	-1	-1	1	•
M	-1	-1	1	•
A	②	1	-1	1
B	1	2	-1	1

	$-A$	$-x_2$	$-F$	1
$x_0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mu$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
B	$-\frac{1}{2}$	③	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

	$-A$	$-B$	$-F$	1
$x_0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\mu$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$x_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$x_2$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$x_1 = 1/3; x_2 = 1/3; \kappa = f(x_1, x_2) = 2/3; \mu = 2/3$

2ème itération:  $\mu = 2/3$

	$-x_1$	$-x_2$	$-\mu$	1
$x_0$	•	•	-1	•
F	-1	-1	1	$-\frac{2}{3}$
A	1	•	0	1
B	•	1	1	1

	$-x_1$	$-x_2$	$-A$	3	1
$x_0$	1	•	1	1	1
F	-2	①	-1	$-\frac{5}{3}$	•
$\mu$	1	•	1	1	1
B	-1	1	-1	•	•

	$-x_1$	$-F$	$-A$	1
$x_0$	1	•	1	1
$x_2$	2	-1	1	$\frac{5}{3}$
$\mu$	1	•	1	1
B	③	1	-2	$-\frac{5}{3}$

	$-B$	$-F$	$-A$	1
$x_0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$
$x_2$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$
$\mu$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$
$x_1$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$

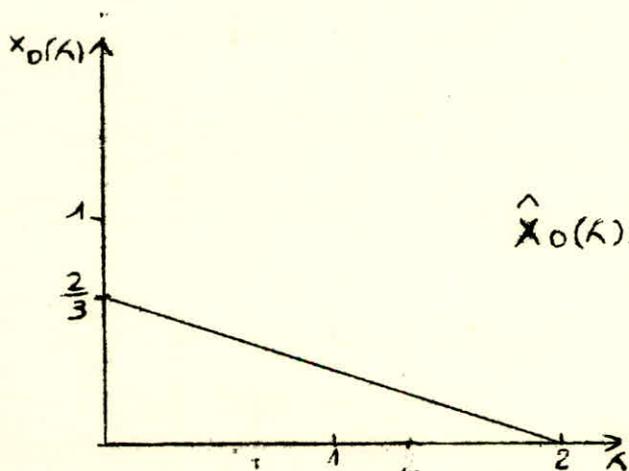
.../...

$x_1 = 5/9; x_2 = 5/9, \lambda = f(x_1, x_2) = 10/9; \mu = 4/9.$

etc ...

iterations	$x_1$	$x_2$	$\lambda = f(x_1, x_2)$	$\mu$
1	$1/3$	$1/3$	$2/3$	$2/3$
2	$5/9$	$5/9$	$10/9$	$4/9$
3	$19/27$	$19/27$	$38/27$	$8/27$
4	$65/81$	$65/81$	$130/81$	$16/81$
5	$211/243$	$211/243$	$422/243$	$32/243$
:				
9	$\frac{19165}{19665}$	$\frac{19165}{19665}$	$\frac{38330}{19665}$	$\frac{500}{19655}$
:	$\frac{19665}{19665}$	$\frac{19665}{19665}$	$\frac{19665}{19665}$	$\frac{19655}{19655}$

Variations de  $\hat{x}_0(\lambda)$  pour ce cas particulier :

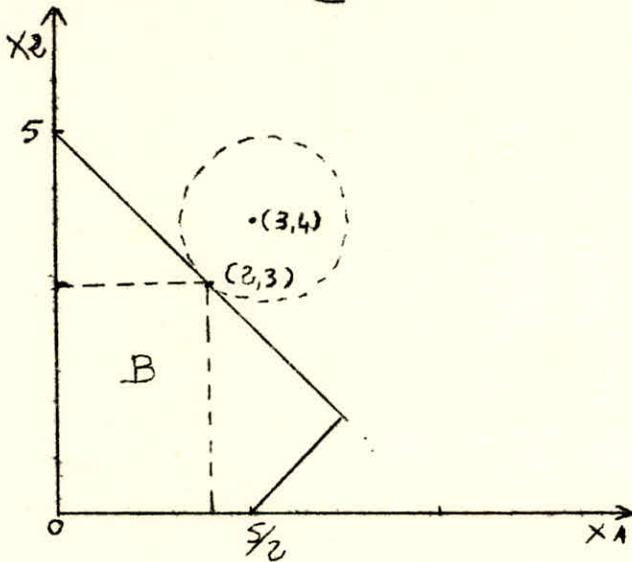


5.2. Cas NON LINEAIRE ALGORITHME 1:

5.2.1.- PROBLEME POSE

Soit le programme mathématique non linéaire suivant:

$$(P): \begin{cases} \text{Maximiser } f(x_1, x_2) = \{- [(x_1-3)^2 + (x_2-4)^2]\} \\ \begin{cases} g_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 5 \geq 0 \\ g_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 + \frac{5}{2} \geq 0 \end{cases} \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$



5.2.2.- APPLICATION DE LA METHODE DES CENTRES

On transforme le programme (P) en un Q'' (K, y) équivalent:

$$Q''(K, y): \begin{cases} \text{Maximiser } \mu \\ \begin{cases} f(x, y) - \mu \geq \lambda \\ -x_1 - x_2 + 5 - \mu \geq 0 \\ -x_1 + x_2 + \frac{5}{2} - \mu \geq 0 \end{cases} \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou :} \quad \begin{cases} \text{Maximiser } \mu \\ \begin{cases} -f(x, y) + \mu \leq \lambda \\ x_1 + x_2 + \mu \leq 5 \\ x_1 - x_2 + \mu \leq \frac{5}{2} \end{cases} \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

5.2.3.- LINEARISATION

$$f'(x, y) = f(y) + \nabla f(y) \cdot (x - y)$$

$$f(y) = \{- [(y_1-3)^2 + (y_2-4)^2]\}$$

$$\nabla f(y) = \left( \frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_1}, \frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_2} \right)$$

.../...

$$\frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_1} = (-) [2(y_1 - 3)]$$

$$\frac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_2} = (-) [2(y_2 - 4)]$$

$$x - y = \begin{cases} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{cases}$$

5.2.4. RESOLUTION DE Q''(K, Y) :

On applique l'algorithme décrit en III. 4.3

Phase 1: Recherche d'une solution initiale

Phase 2: Recherche d'une solution réalisable (Excentre).

Phase 3: Recherche de la solution optimum

5.2.4.1. - PHASE 1

Choisissons comme point de départ le point  $x^k = (0, 0)$  et

linéarisons  $f$  en ce point:

$$f(0, 0) = -25$$

$$Vf(0, 0) = (6, 8)$$

$$\Rightarrow f'(x, y) = -25 + 6x_1 + 8x_2$$

Prenons  $k = f(0, 0) = -25$

Le programme  $Q''(k, Y)$  s'écrit alors: Maximiser  $\mu$

$$\begin{cases} -6x_1 - 8x_2 + \mu \leq -k - 25 = 0 \\ x_1 + x_2 + \mu \leq 5 \\ x_1 - x_2 + \mu \leq 5/2 \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

5.2.4.2. PHASE 2

1ère itération

(1) Détermination de Z:

	$-x_1$	$-x_2$	$-\mu$	1
$x_0$	0	0	-1	0
F	-6	-8	0	0
A	1	1	1	5
B	1	-1	1	$5/2$

	$-x_1$	$-x_2$	$-F$	1
$x_0$	-6	-8	1	0
$\mu$	-6	-8	1	0
A	7	9	-1	5
B	7	7	-1	$5/2$

	$-B$	$-x_1$	$-F$	1
$x_0$	$8/7$	2	$-1/7$	$20/7$
$\mu$	$8/7$	2	$-1/7$	$20/7$
A	$-9/7$	-2	$2/7$	$25/14$
$x_2$	$1/7$	1	$-1/7$	$5/14$

	$-B$	$-x_1$	$-A$	1
$x_0$	$1/2$	1	$1/2$	$15/4$
$\mu$	$1/2$	1	$1/2$	$15/4$
F	$-9/2$	-7	$7/2$	$25/4$
$x_2$	$-1/2$	0	$1/2$	$5/4$

$$Z^R = (0, 5/4), \mu = 15/4$$

(2) Détermination de  $\bar{y}^h$  :

$$d(\bar{y}^h, \lambda^k) = \text{Max} \{ d(x, \lambda^k) / x \in [\bar{x}^h, \bar{z}^h] \}$$

$$d(x, \lambda^k) = \inf \left\{ f(x) - \lambda^k, \{-x_1 - x_2 + 5, -x_1 + x_2 + 5/2\} \right\} = f(x) - \lambda^k, x \in E$$

$$\dots \Rightarrow \bar{y} = \bar{z} = (0, 5/4)$$

(3) T est de reconnaissance d'un  $\varepsilon$ -centre:

$$d(\bar{y}^h, \lambda^k) \geq \varepsilon d'(\bar{z}^h, \bar{y}^h, \lambda^k) \quad (1) \quad \varepsilon \in ]0, 1[ \text{ donné}$$

(1) est vérifiée car:

$$d(\bar{y}^h, \lambda^k) > 0 \text{ et } d'(\bar{z}^h, \bar{y}^h, \lambda^k) = 0 \quad (\text{car } \bar{y}^h = \bar{z}^h)$$

$\dots \Rightarrow$  On ne modifie pas  $Q^h(\lambda^k, \bar{x}^h)$ , mais on paramètre ce programme en prenant  $\lambda^k = f(\bar{y}^h) = f(0, 5/4) = \frac{-265}{4}$ . Faire  $h = h+1$  continuer en séquence.

2ème itération

(1) Détermination de  $\bar{z}^h$  :

	$-x_1$	$-x_2$	$-b$	1
$x_0$	•	•	-1	•
F	-6	-8	1	$-\frac{135}{16}$
A	1	1	0	5
B	1	-1	1	$\frac{5}{2}$

	$-x_1$	$-x_2$	A	1
$x_0$	1	1	1	5
F	-7	-9	-1	$-\frac{215}{16}$
$\mu$	1	1	1	5
B	•	⊖	-1	$-\frac{5}{2}$

	$-x_1$	$-x_2$	-A	1
$x_0$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
F	-7	⊖	$\frac{7}{2}$	$-\frac{35}{16}$
$\mu$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
$x_2$	•	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$

	$-x_1$	$-x_2$	-A	1
$x_0$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{25}{18}$	$\frac{505}{144}$
B	$\frac{14}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{7}{9}$	$\frac{35}{72}$
$\mu$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{505}{144}$
$x_2$	$\frac{7}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{215}{144}$

$\bar{z} = (0, 215/144), \mu = 505/144$

(2) Détermination de  $\bar{y}^h$  :

$$d(\bar{y}^h, \lambda^k) = \text{Max} \{ d(x, \lambda^k) / x \in [\bar{x}^h, \bar{z}^h] \}$$

$$d(x, \lambda^k) = \inf \left\{ f(x) - \lambda^k, \{-x_1 - x_2 + 5, -x_1 + x_2 + 5/2\} \right\} = f(x) - \lambda^k, x \in E$$

$$\dots \Rightarrow \bar{y} = \bar{z} = (0, 215/144)$$

(3) T est de reconnaissance d'un  $\varepsilon$  centre:

$d(\bar{y}^h, \lambda^k) > \varepsilon d'(\bar{z}^h, \bar{y}^h, \lambda^k)$  (1) est vérifiée pour les mêmes raisons que précédemment.

On prend  $\lambda^k = f(\bar{y}^h) = f(0, \frac{215}{144})$ . Faire  $h = h+1$  et continuer en séquence.

Soit  $h''$  une valeur de  $h$  pour laquelle la relation (1) n'est pas vérifiée: On fait  $k = k + 1, \bar{x} = \bar{y}^{h+1}, \lambda^k = f(\bar{x}^k)$ , et on recommence avec  $h = 1$  jusqu'à ce que  $\dots/\dots$

la relation (1) ne soit plus satisfaite. La phase 3 nous indique la solution optimale (voir algorithme de III.4.3)

5.3- CAS NON LINEAIRE - ALGORITHME 2.

Une autre méthode consiste à linéariser en tous les points  $\bar{y}^k$  pour chaque  $\bar{x}^k$  ( voir algorithme de III.3.3)

Appliquons cette méthode à l'exemple précédent.

5.3.1.- Problème posé

C'est le même que précédemment c'est à dire :

$$(P) \begin{cases} \text{Maximiser } f(x_1, x_2) = \{ -[(x_1-3)^2 + (x_2-4)^2] \} \\ g_1(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 5 \geq 0 \\ g_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_2 + 5/2 \geq 0 \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

5.3.2- Application de la méthode des centres

Le programme (P) est transformé en:

$$Q''(A, \mu) \begin{cases} \text{Maximiser } \mu. \\ -f'(x, y) + \mu \leq -1 \\ x_1 + x_2 + \mu \leq 5 \\ x_1 - x_2 + \mu \leq \frac{5}{2} \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

5.3.3- Résolution de Q'' (A, y)

La phase 1 est la même que précédemment, et le premier point obtenu est  $\bar{y}^k = (0, 5/4)$

5.3.3.1- Phase 2

1ère Itération

1) Linéarisation au point  $y = (0, 5/4)$ .

$$f(0, 5/4) = -\frac{265}{16} = 1k$$

$$\nabla f(0, 5/4) = (6, 11/2)$$

$$x-y \begin{cases} x_1 - 0 \\ x_2 - 5/4 \end{cases}$$

$$\dots \Rightarrow f'(x, y) = 6x_1 + \frac{11}{2}x_2 - \frac{375}{6}$$

Le programme  $Q^h(\lambda, k, Y)$  devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } \mu \\ -5x_1 - \frac{11}{2}x_2 + \mu \leq -55/8 \\ x_1 + x_2 + \mu \leq 5 \\ x_1 - x_2 + \mu \leq 5/2 \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{array} \right.$$

Faire  $h \rightarrow h+1$  continuer en séquence .

(2) Détermination de  $y^h$ .

	$-x_1$	$-x_2$	$-\mu$	1
$x_0$	•	•	-1	•
F	-6	$-\frac{11}{2}$	1	$-\frac{55}{8}$
A	1	1	①	5
B	1	-1	1	$\frac{5}{2}$

	$-x_1$	$-x_2$	-A	1
$x_0$	1	1	1	5
F	-7	$-\frac{13}{2}$	-1	$-\frac{95}{8}$
$\mu$	1	1	1	5
B	•	②	-1	$-\frac{5}{2}$

	$-x_1$	-B	-A	1
$x_0$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
F	③	$-\frac{13}{4}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{15}{4}$
$\mu$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
$x_2$	•	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$

	-F	-B	-A	1
$x_0$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{33}{28}$	$\frac{45}{14}$
$x_1$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{13}{28}$	$-\frac{9}{28}$	$\frac{15}{28}$
$\mu$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{33}{28}$	$\frac{45}{14}$
$x_2$	•	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$

$$y^h = (15/28, 5/4); \mu = \frac{45}{14}$$

2ème itération :

I) linéarisation au point  $y^h = (15/28, 5/4)$ .

$$f\left(\frac{15}{28}, \frac{5}{4}\right) = -\frac{5325}{392} = k$$

$$\nabla f\left(\frac{15}{28}, \frac{5}{4}\right) = \left(\frac{69}{14}, \frac{11}{2}\right)$$

$$x - y = \begin{vmatrix} x_1 - \frac{15}{28} \\ x_2 - \frac{5}{4} \end{vmatrix}$$

$$\dots \Rightarrow f'(x, y) = \frac{69}{14}x_1 + \frac{11}{2}x_2 - \frac{9055}{392}$$

le programme  $Q^h(\lambda, k, y^h)$  devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } \mu \\ -\frac{69}{14}x_1 - \frac{11}{2}x_2 + \mu \leq -\frac{1865}{196} \\ x_1 + x_2 + \mu \leq 5 \\ x_1 - x_2 + \mu \leq 5/2 \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{array} \right.$$

Faire  $h \rightarrow h+1$  continuer en séquence .

(2) détermination de  $\frac{h}{y}$  :

	$-x_1$	$-x_2$	$-\mu$	1
$x_0$	•	•	-1	•
F	$-\frac{62}{14}$	$-\frac{11}{2}$	1	$-\frac{1025}{196}$
A	1	1	①	5
B	1	-1	1	$\frac{5}{2}$

	$-x_1$	$-x_2$	-A	1
$x_0$	1	1	1	5
F	$-\frac{23}{14}$	$-\frac{13}{2}$	•	$-\frac{2845}{196}$
$\mu$	1	1	1	5
B	•	②	-1	$-\frac{5}{2}$

	$-x_1$	-B	-A	1
$x_0$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
F	$-\frac{23}{14}$	$-\frac{13}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3425}{392}$
$\mu$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
$x_2$	•	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$

	$-x_1$	-F	-A	1
$x_0$	$\frac{9}{91}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2585}{2348}$
-B	$\frac{156}{91}$	$-\frac{1}{13}$	$-\frac{9}{13}$	$\frac{15948}{2348}$
$\mu$	$\frac{9}{91}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{2585}{2348}$
$x_2$	$\frac{83}{91}$	$-\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{5335}{1274}$

$\frac{h}{y} = (0,3335/1224) ; \mu = 2585/2548$

Faire  $h=h+1$  et continuer en séquence jusqu'a l'optimum .

5.3.3.2.-Phase finale .

Partons du point  $y=(2,3)$  et linéarisons la fonction f en ce point.

$f(2,3) = -2$

$\nabla f(2,3) = 2,2$

$X-Y = \begin{cases} x_1 - 2 \\ x_2 - 3 \end{cases}$

$\dots \Rightarrow f'(x,y) = 2x_1 + 2x_2 - 12$

Le programme  $Q''(x,y)$  devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } \mu \\ -2x_1 - 2x_2 + \mu \leq -10 \\ x_1 + x_2 + \mu \leq 5 \\ x_1 - x_2 + \mu \leq 5/2 \\ (x_1, x_2) \geq 0 \end{array} \right.$$

	$-x_1$	$-x_2$	$-\mu$	1
$x_0$	•	•	-1	•
F	-2	-2	1	-10
A	1	1	①	5
B	1	-1	1	$\frac{5}{2}$

	$-x_1$	$-x_2$	-A	1
$x_0$	1	1	1	5
F	-3	-3	-1	-15
$\mu$	1	1	1	5
B	•	②	-1	$-\frac{5}{2}$

	$-x_1$	-B	-A	1
$x_0$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
F	③	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{45}{4}$
$\mu$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
$x_2$	•	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$

	-F	-B	-A	1
$x_0$	$\frac{1}{3}$	•	$\frac{2}{3}$	•
$x_1$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{15}{4}$
$\mu$	$\frac{1}{3}$	•	$\frac{2}{3}$	•
$x_2$	•	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$

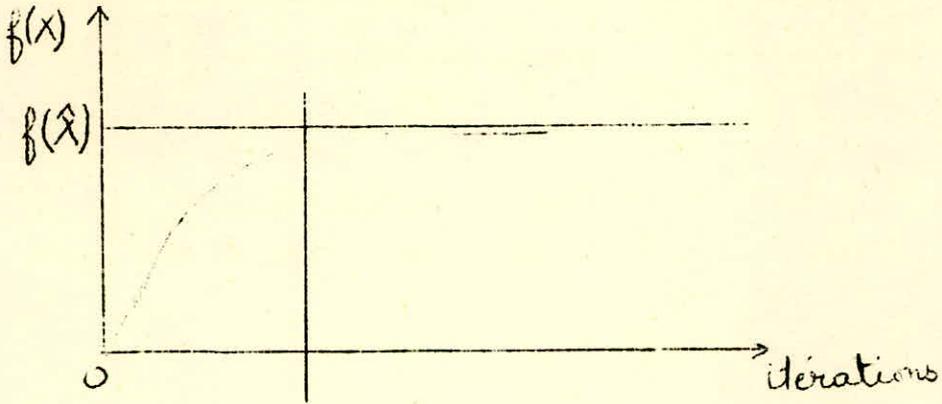
$\mu = 0 \Rightarrow X^* = (2,3)$

Remarque 1 :

Cette dernière méthode peut être utilisée dans le cas d'un programme fortement non linéaire (variations importantes des  $\nabla g_i$ ).

Remarque 2:

Si on représente les variations de  $f(x)$  en fonction des itérations, on aura la courbe suivante :



On a un optimum très plat .

IV- PARTIE

PROGRAMMATION

- PROGRAMMATION -

1- DONNEES - NOTATIONS-

A	Matrice des contraintes désignée aussi par (I,J)
X0	Fonction objectif.
RHS	Second membre (Right Hand side).
OPTI	Valeur de l'optimum
JX	Variables de bases ou variables indépendantes
IX	Variables d'écart ou variables dépendantes.
IXN	Vecteur colonne
IXN=	{ 0 si la variable d'écart correspondante est une contrainte égalité 1 sinon.
JXL	Vecteur ligne.
JXL=	{ 1 si la variable de base correspondante est libre 0 sinon.
INPVT	Vecteur colonne initialement nul. A l'instant t si:
INPVT=	{ 0 la variable IX correspondante est pivotable 1 la variable IX correspondante est interdite au pivotage.
JNPVT	Vecteur ligne initialement nul. A l'instant t si:
JNPVT=	{ 0 la variable JX correspondante est pivotable. 1 la variable JX correspondante est interdite au pivotage.

2- FORME DU PROGRAMME LINEAIRE DE DEPART:

Initialement nous avons un programme linéaire "quelconque", c'est-à-dire un programme linéaire pouvant comporter des variables indépendantes non soumises à la condition de positivité (variables que l'on qualifie de "libres") et/ ou des contraintes- égalités ( c'est-à- dire de variables dépendantes nulles).

Ce problème peut se mettre sous la forme du tableau suivant, appelée forme standard des programmes linéaires:

INPUT	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">•</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">•</td> <td style="width: 80%; text-align: center;">-----</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">•</td> </tr> </table>	•	•	-----	•
•	•	-----	•		
JXL	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">1</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">•</td> <td style="width: 80%; text-align: center;">-----</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">1</td> </tr> </table>	1	•	-----	1
1	•	-----	1		
JX	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="width: 10%; text-align: center;">M+1</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">M+2</td> <td style="width: 80%; text-align: center;">-----</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">M+N</td> </tr> </table>	M+1	M+2	-----	M+N
M+1	M+2	-----	M+N		

INPUT	IXN	IX	XO(J)	OPTI
•	•	1	A (I, J)	RHS (I)
•	1	2		
•	•	M		

.../...

Les variables  $IX(1) = 1$  et  $IX(M) = M$  sont des contraintes-égalités.

Les variables  $JX(1) = M+1$  et  $JX(N) = M+N$  sont des variables libres.

On est gêné dans la résolution des programmes linéaires par la présence de telles variables.

Les sous-programmes IRED, JRED et OUT (voir ci-dessous) permettent la mise sous forme canonique de tels programmes, forme dans laquelle toutes les variables pivotables, dépendantes ou non, sont positives ou nulles.

### 3- SOUS- PROGRAMMES

IRED Sous-programme qui pivote les variables dépendantes nulles.

JRED Sous-programme qui pivote les variables indépendantes libres.

OUT Sous-programme indiquant si le programme linéaire de départ est réduit ou non.

PIVO Sous-programme effectuant un pivotage.

SPRL Sous-programme de réarrangement des lignes.

SPRC Sous-programme de réarrangement des colonnes.

JADM Sous-programme de génération d'une base J- admissible de départ (selon BALINSKI- TUCKER).

SPRHS Sous-programme de résolution d'un programme linéaire paramétré sur second membre.

WOLF Sous-programme de maximisation d'une fonction concave sur un segment de droite (P. WOLFE).

REDUI Sous-programme de réduction du problème de départ

#### SOUS -PROGRAMME IRED:

(A, M, N, X0, OPT, -, RHS, ..., IX, JX, IXN, JXL, INPUT, INPUT)

IRED pivote chaque variable dépendante nulle avec une variable indépendante, libre si possible, positive sinon et interdit au pivotage les variables ainsi pivotées.

#### SOUS- PROGRAMME JRED :

(A, M, N, X0, OPT, -, RHS, ..., IX, JX, IXN, JXL, INPUT, INPUT)  
.....

JRED Pivote chaque variable indépendante libre avec une variable dépendante, nulle si possible, positive sinon et interdit au pivotage les variables ainsi pivotées.

SOUS-PROGRAMME OUT:

(JNPVT, INPVT, JXL, IXN, M, N)

OUT permet d'indiquer:

- Une réduction de la taille du programme linéaire de départ.
- Un domaine vide ou un optimum non borné éventuel (avant toute phase de calcul).

SOUS-PROGRAMME PIVO:

(A, M, N, NO, OPT, , RHS, , IX, JX, IP, JP)

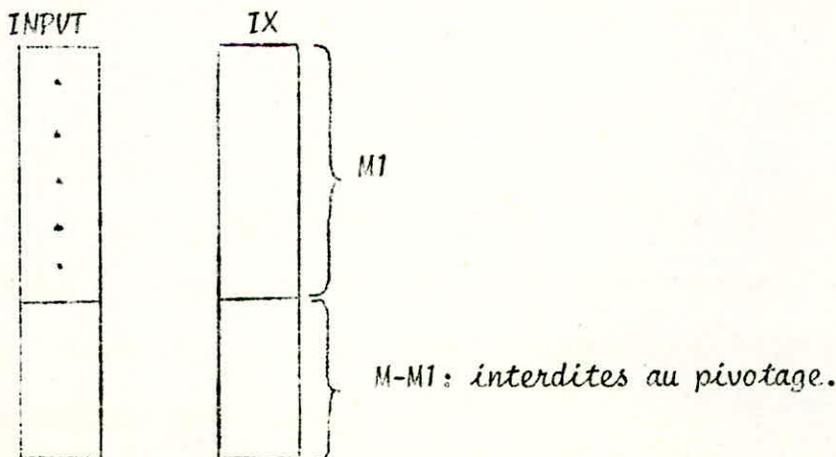
PIVO fait un pivotage autour de A(I1, J1)

SOUS -PROGRAMME SPRL :

(A, M, N, RHS, , IX, INPVT)

SPRL arrange les variables IX en

- variables IX pivotables
- et en variables IX interdites en pivotage.

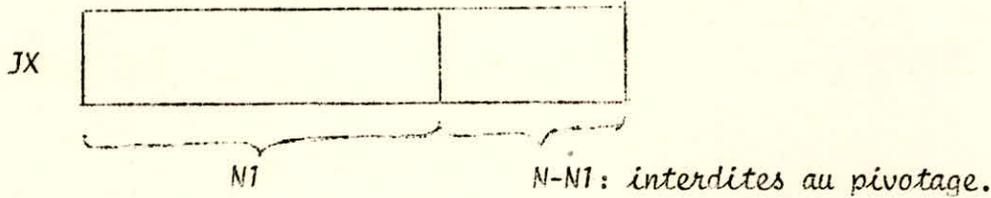


SOUS- PROGRAMME SPRC :

(A, M, N, ~~X0~~, JX, JNPVT)

SPRC arrange les variables JX en:

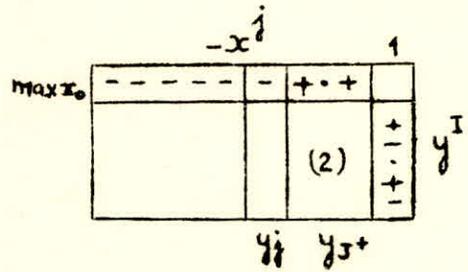
- variables JX pivotables.
- et en variables JX interdites au pivotage.



SOUS- PROGRAMME JADMD

(A, M, N, ~~X0~~, OPTI, RHS, LIS, IX, JX, )

JADMD gène une base J-admissible de départ du programme linéaire réduit selon BALINSKI-TUCKER. Cette méthode consiste à réarranger le tableau de façon à obtenir un sous -tableau qui ait une solution J-admissible.



on peut faire apparaître un + en  $(y_j, 1)$  en résolvant le programme linéaire réduit:

$$\min (-y_j)$$

$$\begin{cases} y_{j+} \geq 0 \\ y^I \geq 0 \end{cases}$$

Il suffit de changer le signe de la colonne  $-x^j$  et de cheminer .../...

par solutions J- admissibles sur le sous tableau (2) Dès que  $y_j$  cesse d'être positif, on change le signe de la colonne  $y_j$  et on recommence éventuellement avec comme nouvelle fonction économique colonne, une colonne commençant par un "moins".

SOUS - PROGRAMME SPRHS:

(A, M, N, X0, OPT, RHS, IX, JX)

SPRHS donne les variations de la fonction objectif en fonction de la variation du second membre des contraintes.

		JX(J)	
		X0(J)	OPTI
IX(I)	M1	A(I,J)	RHS(I)

(le paramètre sur second membre porte sur le programme linéaire réduit c'est - à -dire mis sous forme canonique).

SOUS-PROGRAMME WOLF.

(X0, H, EPS, FCT)

WOLF maximise une fonction concave sur un segment de droite.

On suppose que le maximum de la fonction concave FCT est contenu dans l'intervalle  $X0, X0+H$  et que les valeurs de la fonction sont connues aux points

$X0 + R^2H$  et  $X0 + RH$  avec  $R = \frac{1}{2} (\sqrt{5}-1)$ ; ( $R^2 + R = 1$ ,  $R^3 + 2R^2 = 1$ )

le maximum est donc contenu dans l'intervalle  $X0, X0 + RH$  si  $FCT(X0 + R^2H) > FCT(X0 + RH)$

.../...

est plus grande que  $FCT(SO+RN)$ ; dans le cas contraire, le maximum est contenu dans l'intervalle  $XO+R^2H, XO+H$  .

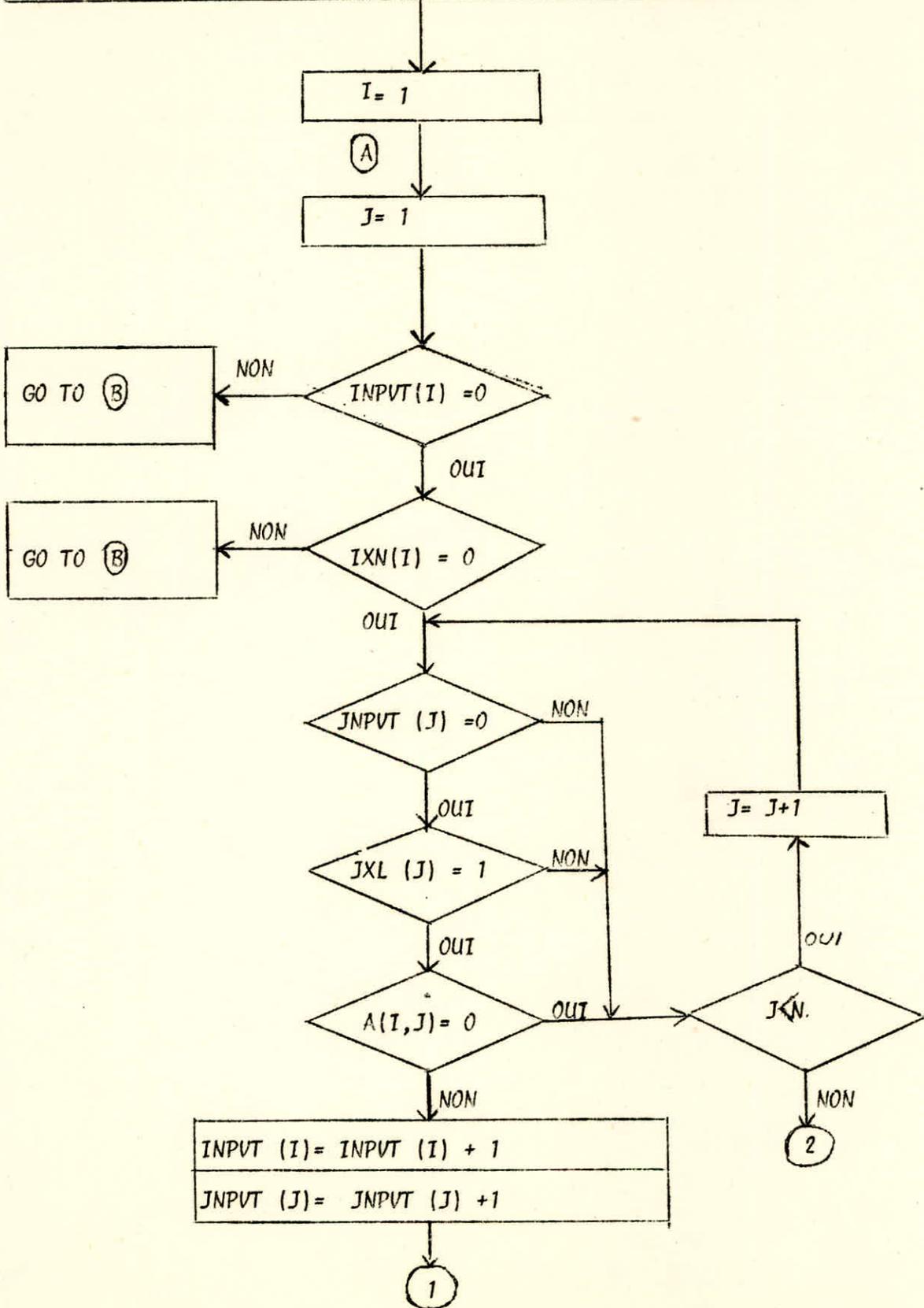
En remarquant que  $1-R^2 = R$ , nous voyons que la longueur de l'intervalle identifié a été diminuée par le facteur  $R$  et que la fonction  $FCT$  peut être évaluée en un nouveau point seulement ( ou bien  $XO+R^3H$ , ou bien  $XO+(1-R^3)H$  )

- ORGANIGRAMMES -

---

1- ORGANIGRAMME DE IRED

A, M, N, K, J, OPTI, RHS, IX, JX, IXN, JXL, INPVT, JNPVT



①  
②

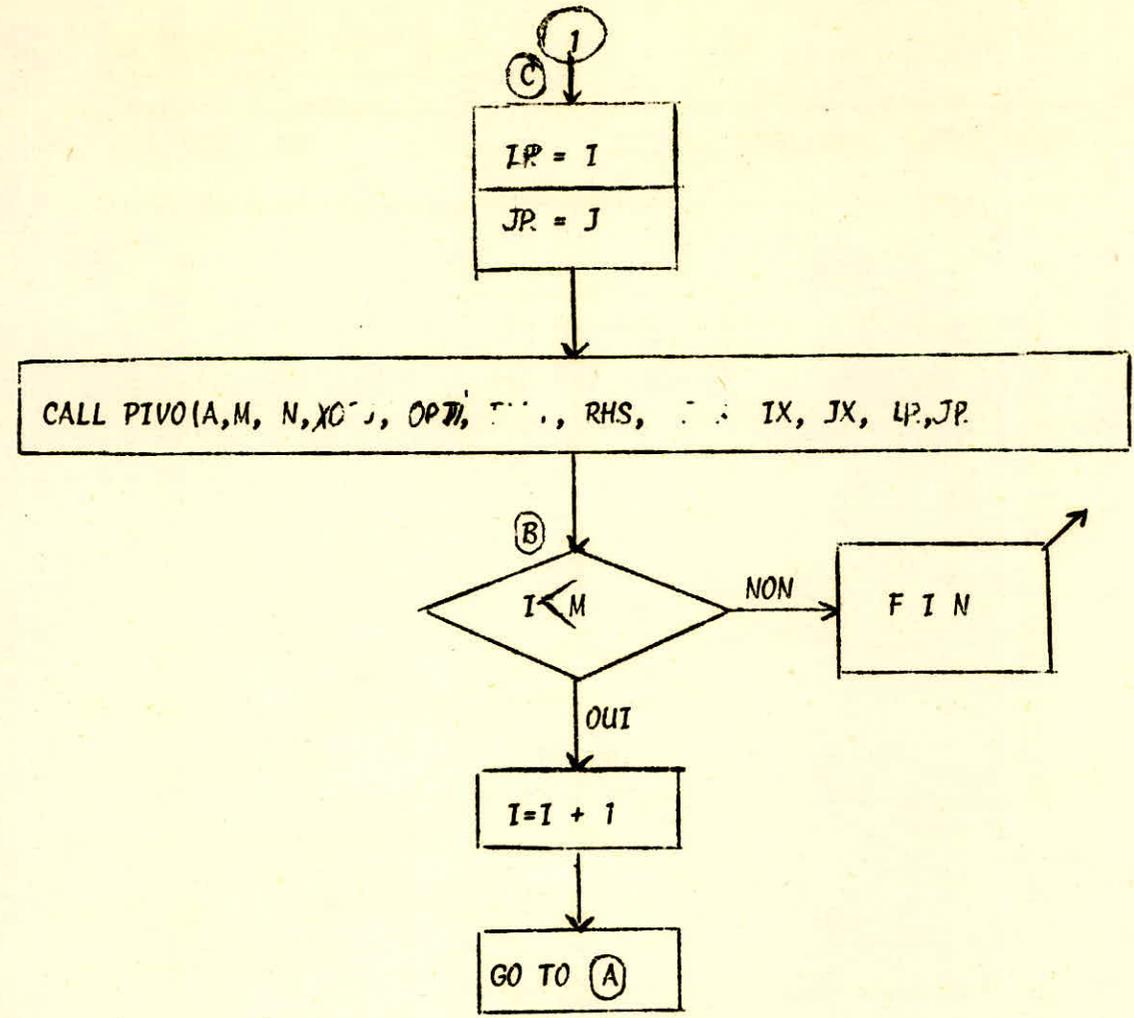
IP = I  
JP = J

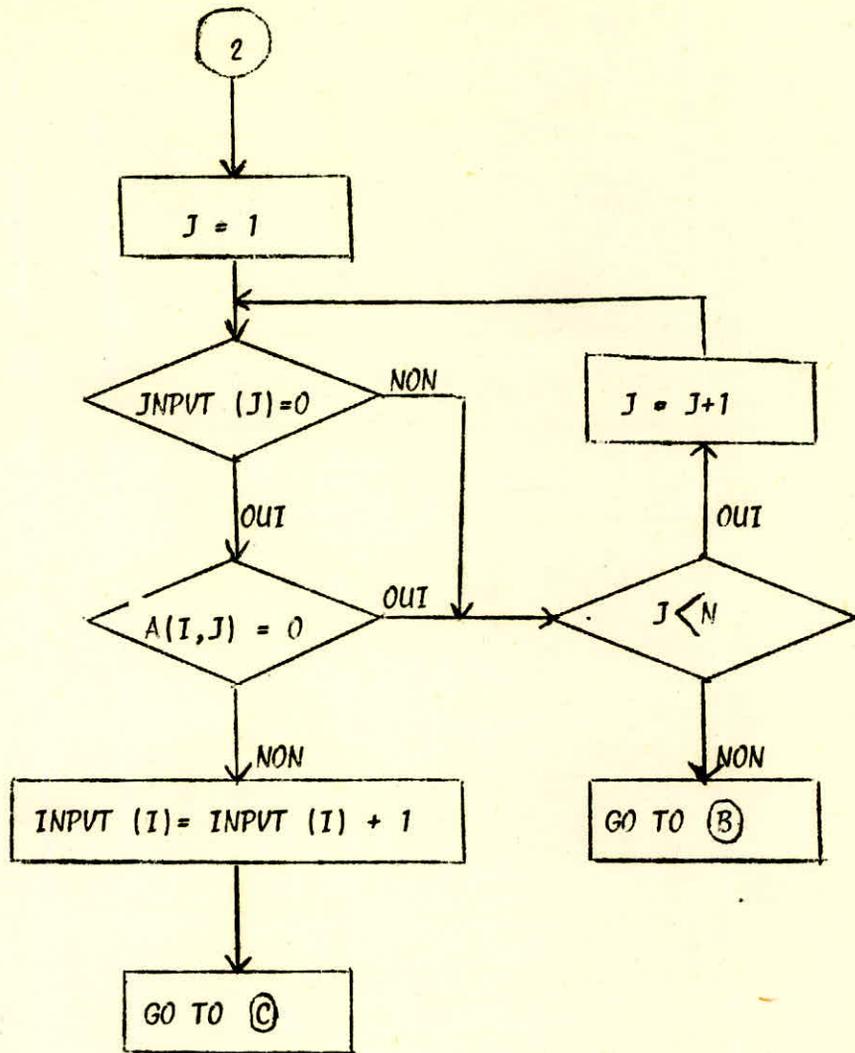
CALL PIVO(A, M, N, XC, OPT, ..., RHS, ..., IX, JX, LP, JP)

③  
I < M  
NON → FIN

OUI  
I = I + 1

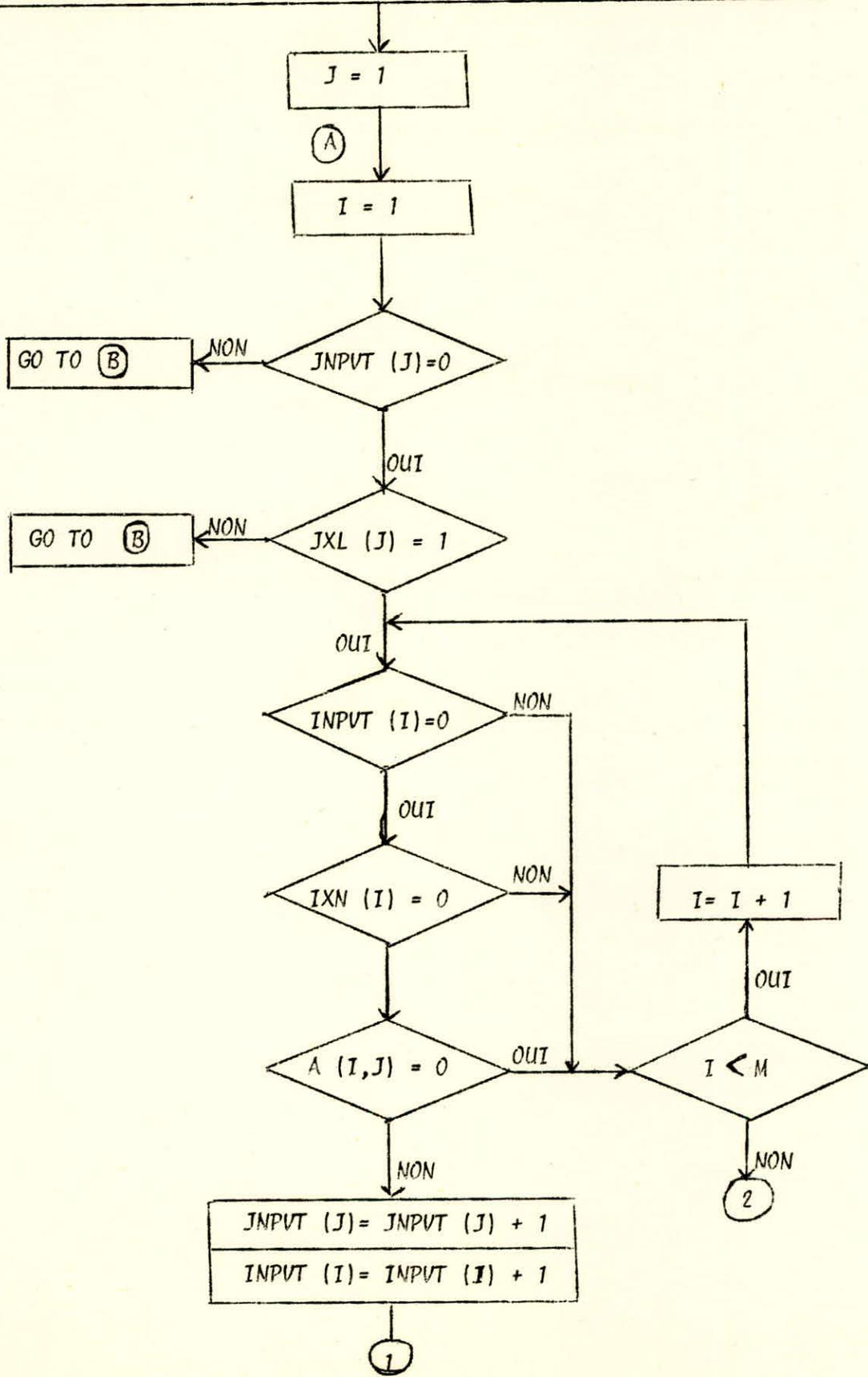
GO TO ④





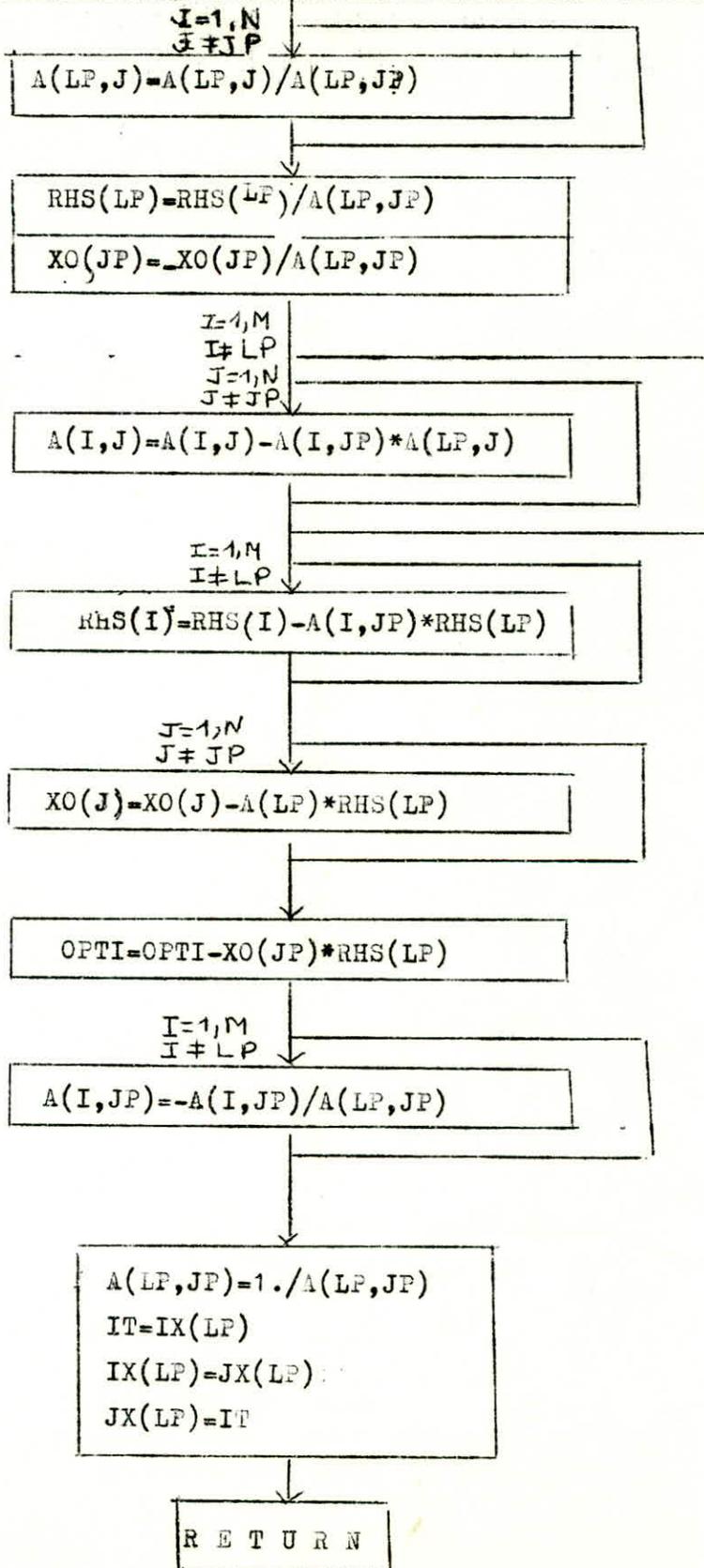
2- ORGANIGRAMME DE JRED

A, M, N, XO, OPT, RHS, IX, JX, IXN, JXL, INPVT, JNPVT

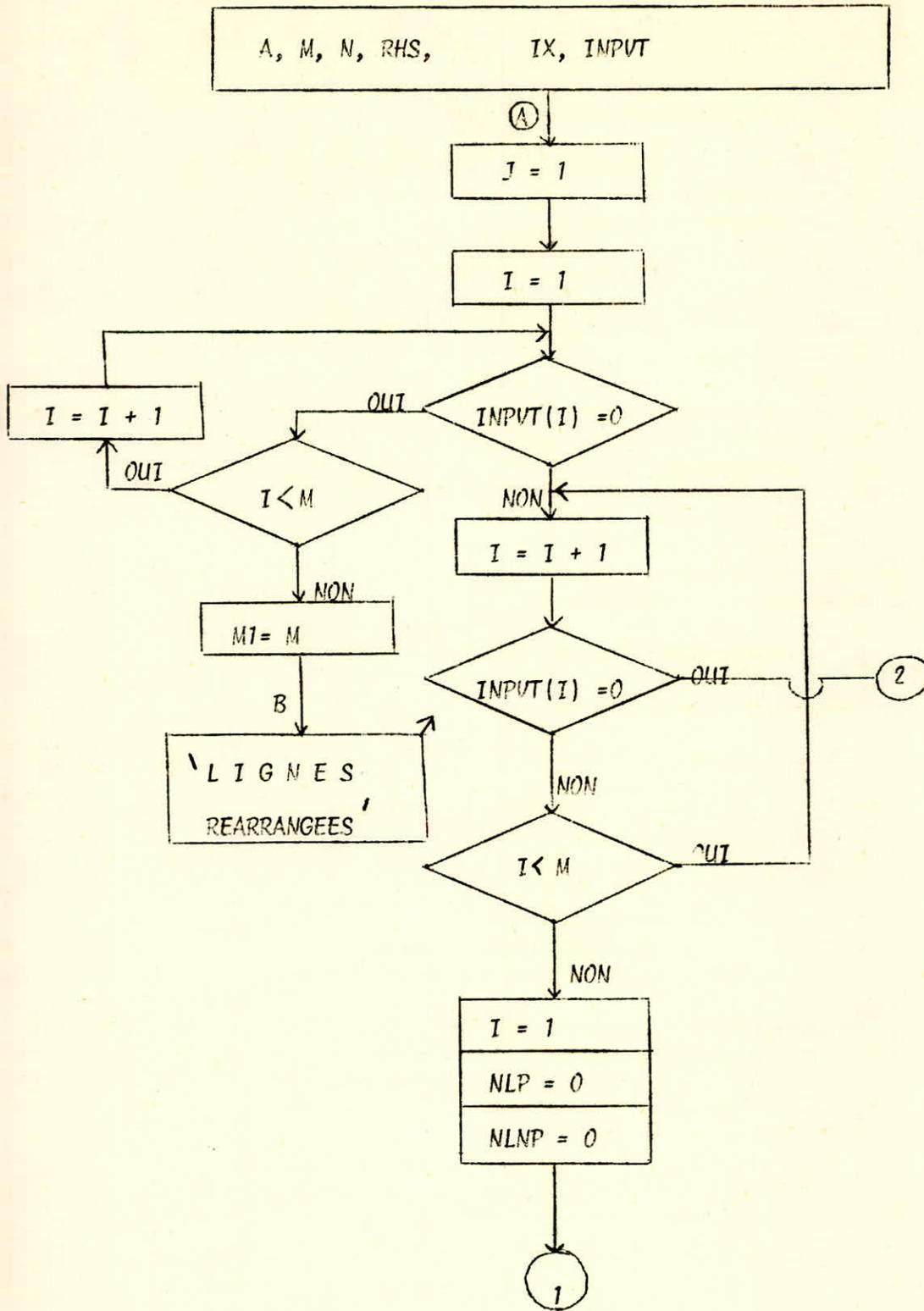


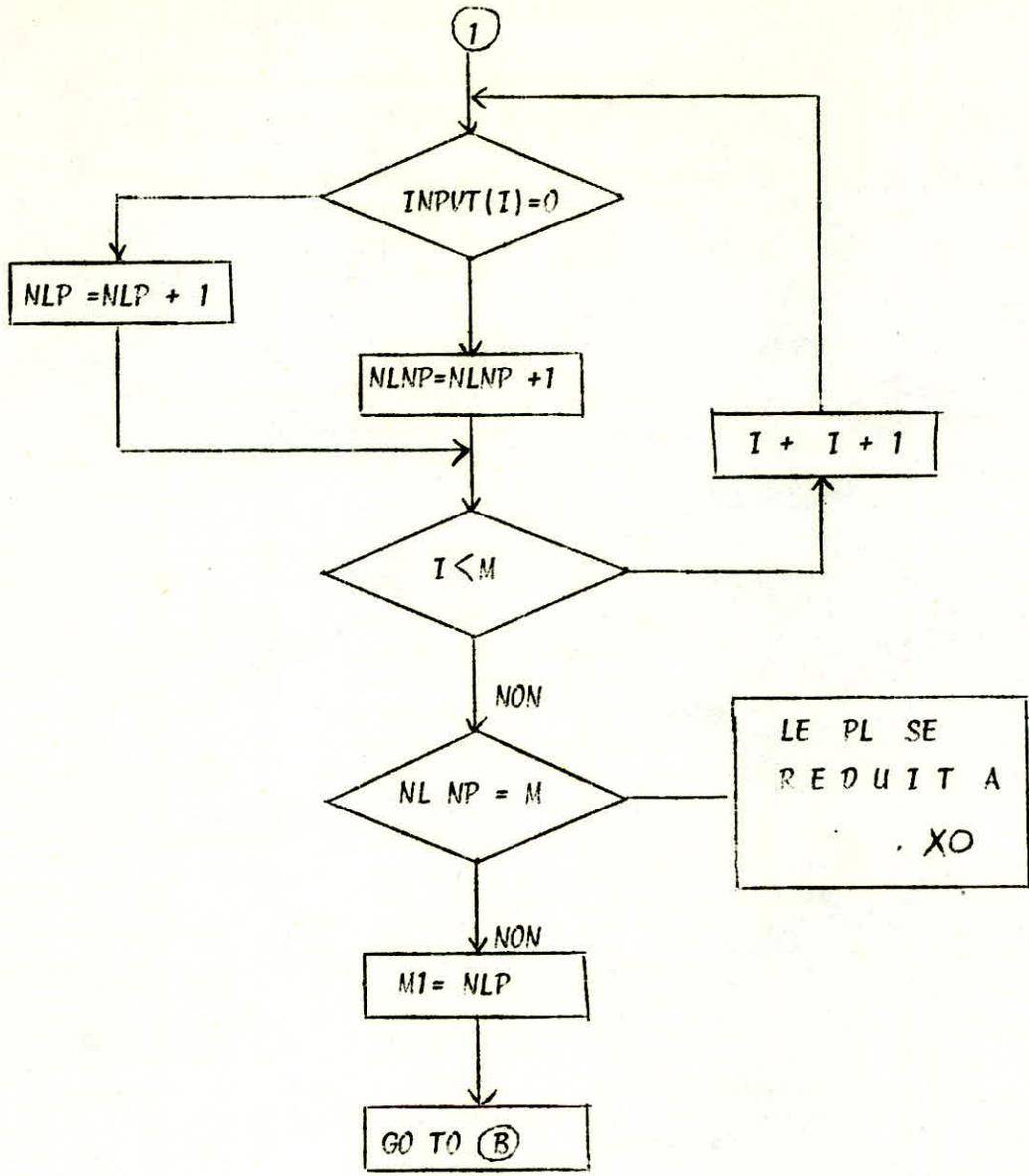
## 4- ORGANIGRAMME DE 'PIVO'.

C P T I , A , N ; M ; I X , J X , R H S , X O , J P , L P

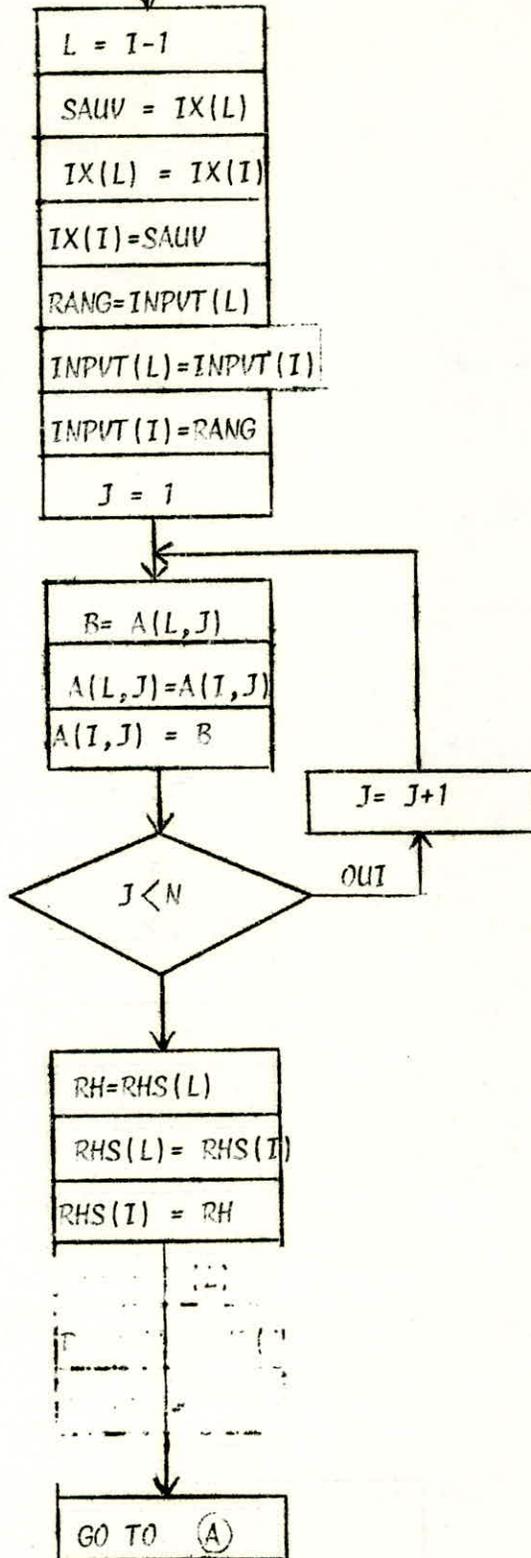


5- ORGANIGRAMME DE 'SPRL'

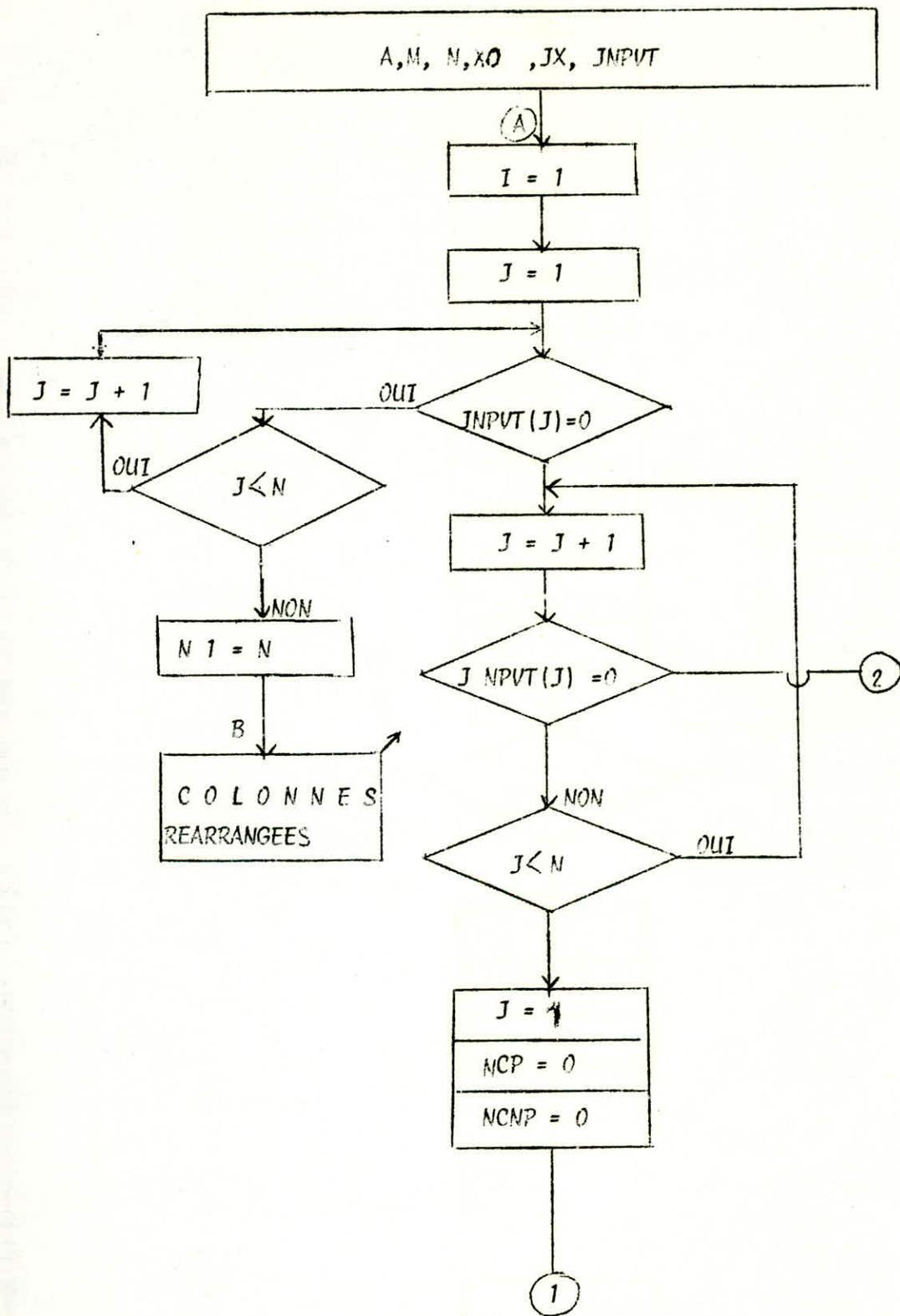


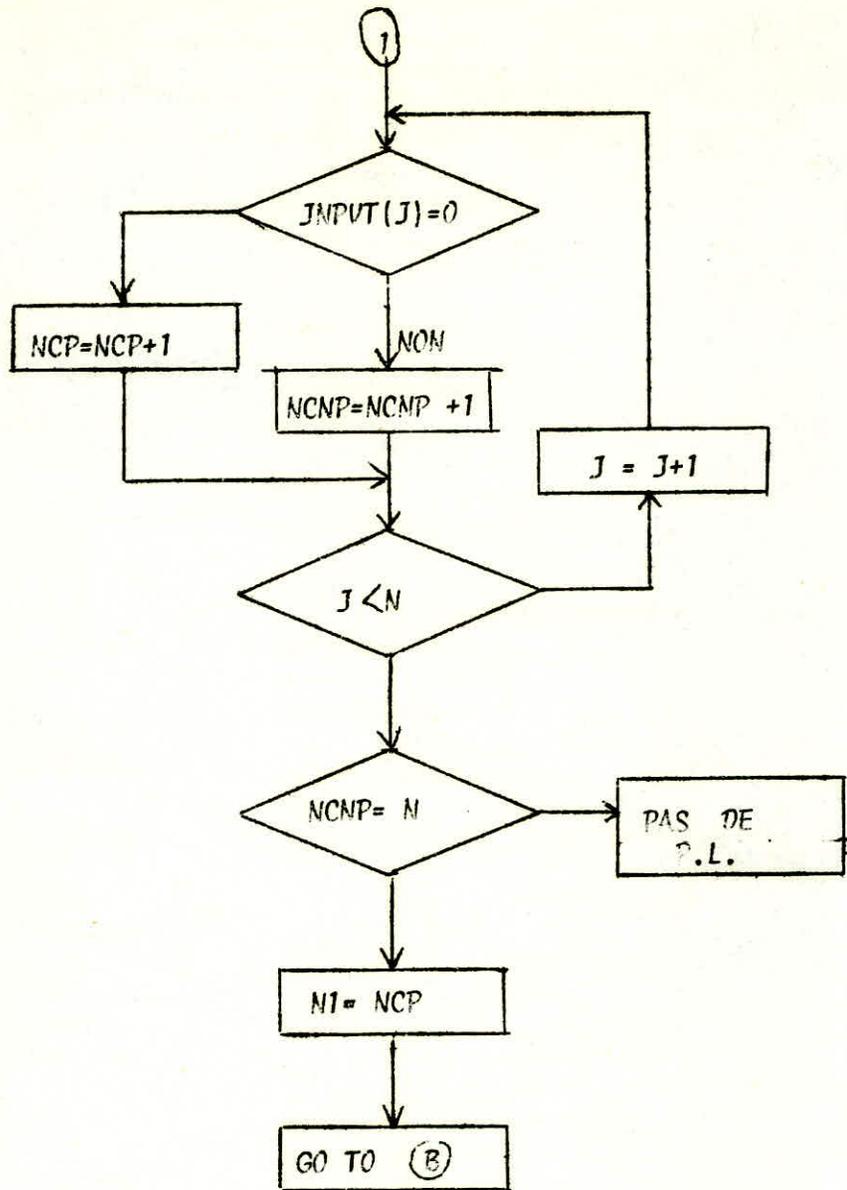


2

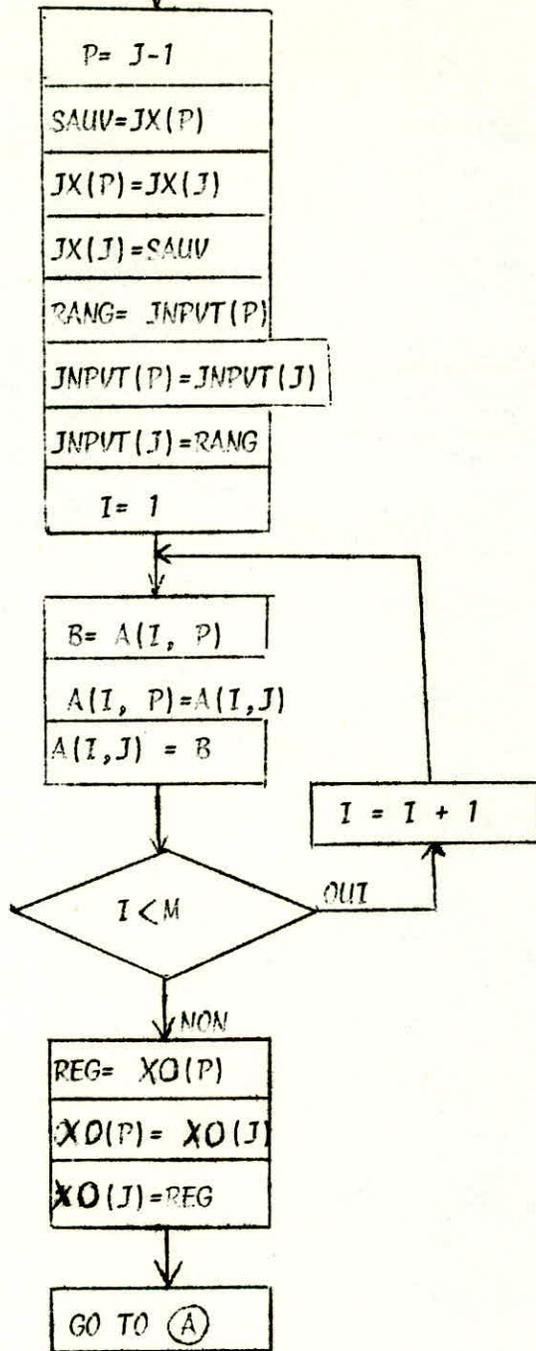


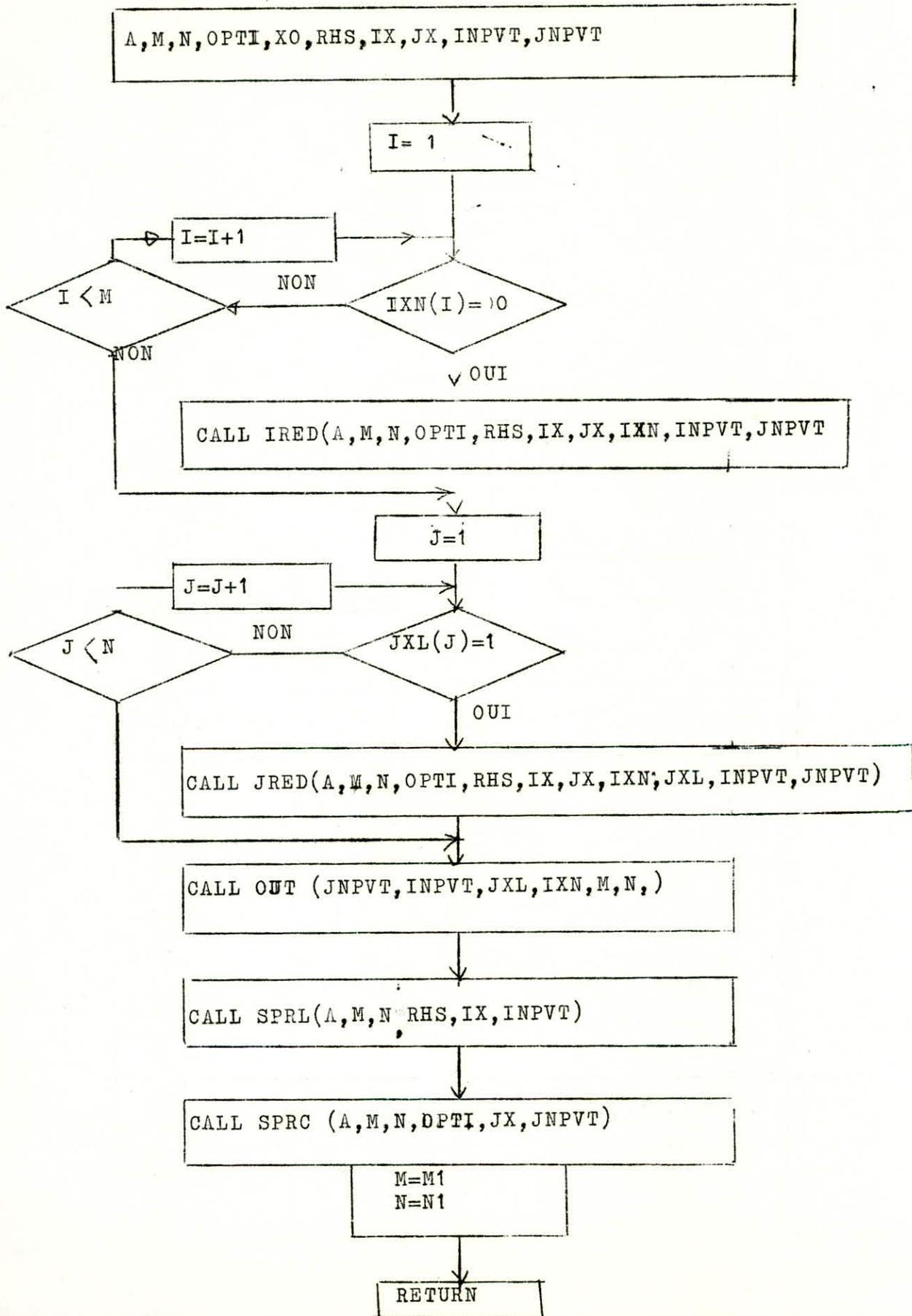
6- ORGANIGRAMME DE SPRC





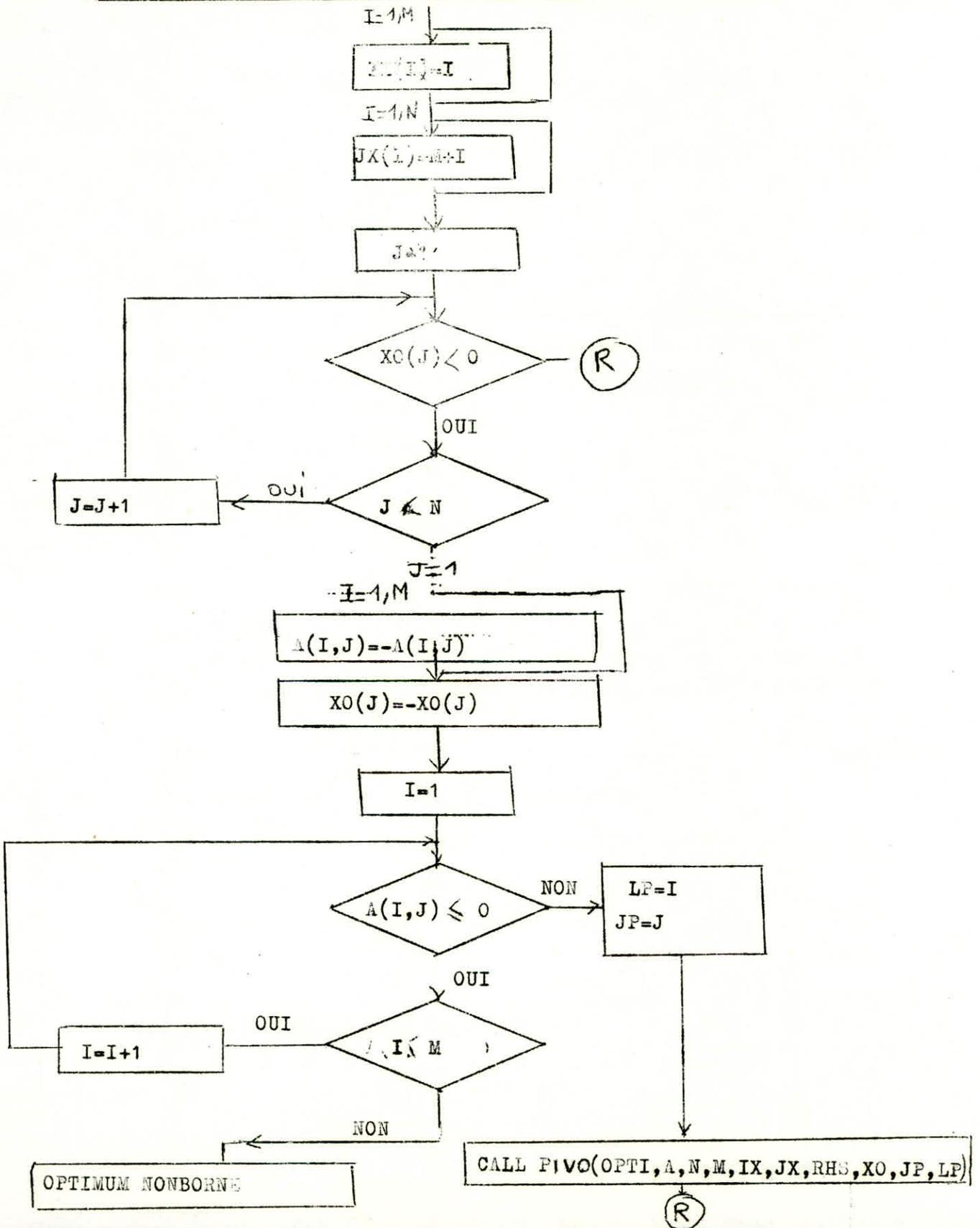
②

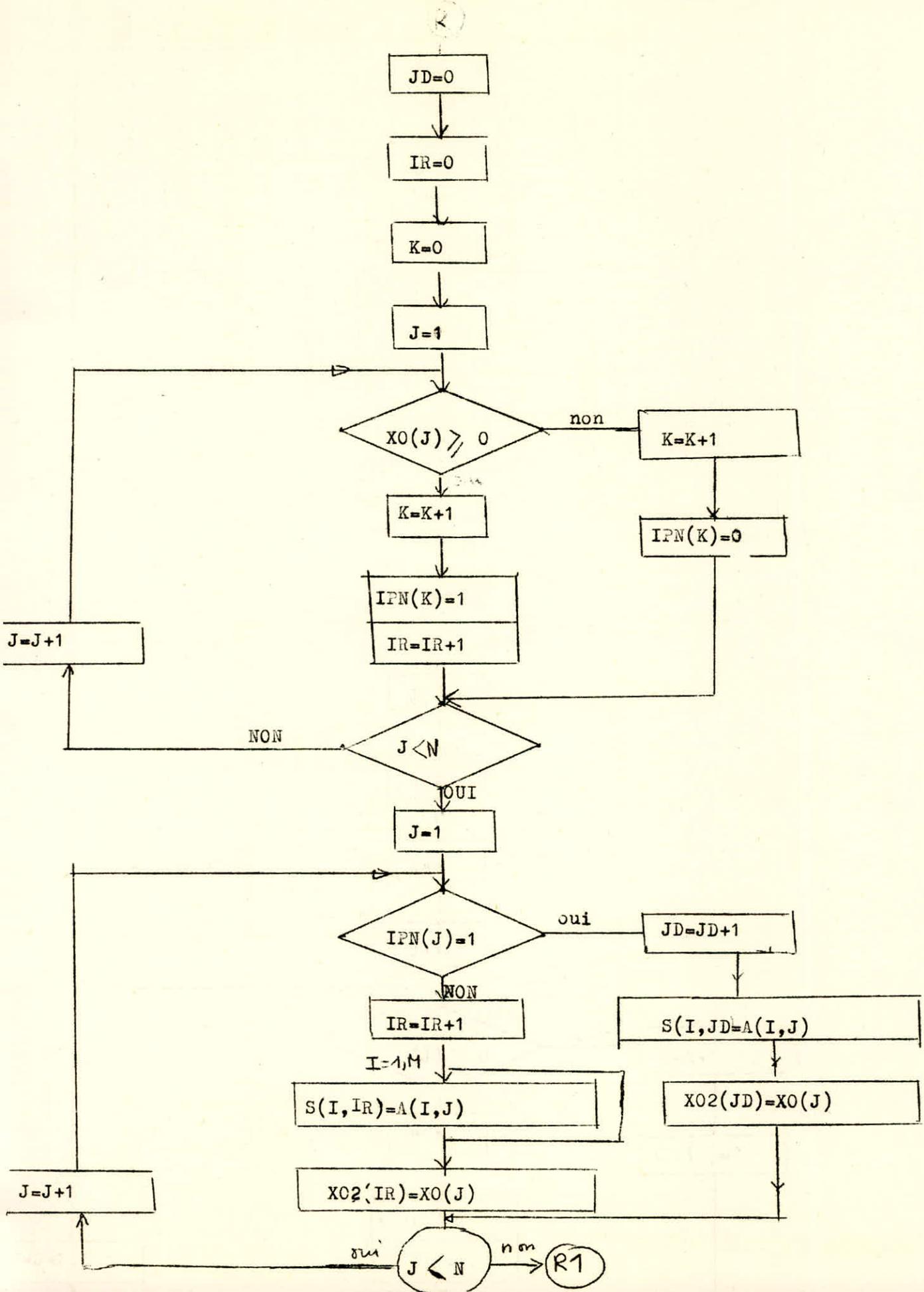


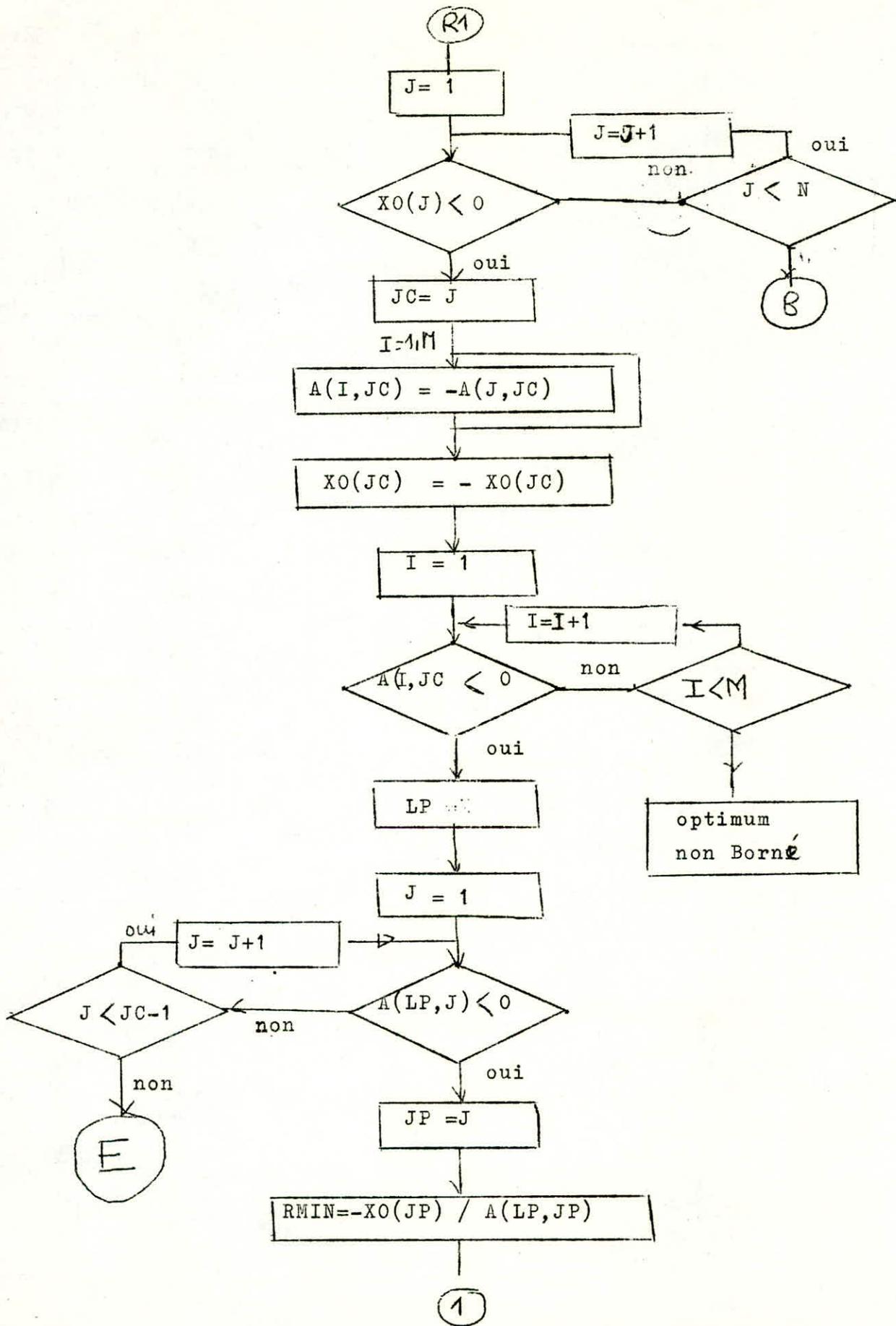


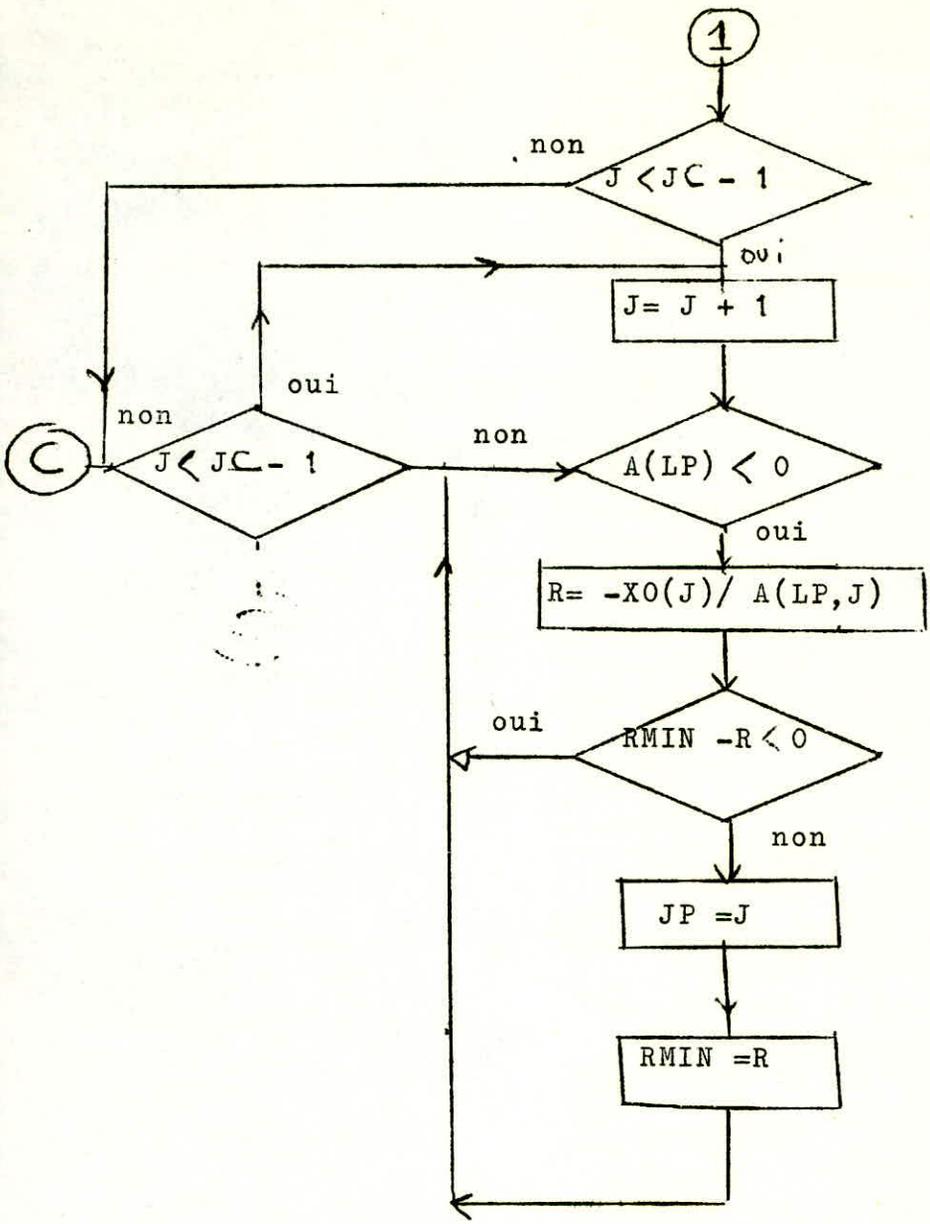
8 - ORGANIGRAMME DE JADMD

A, M, N, X0, RHS, OPTI, IBJD, IX, JX,

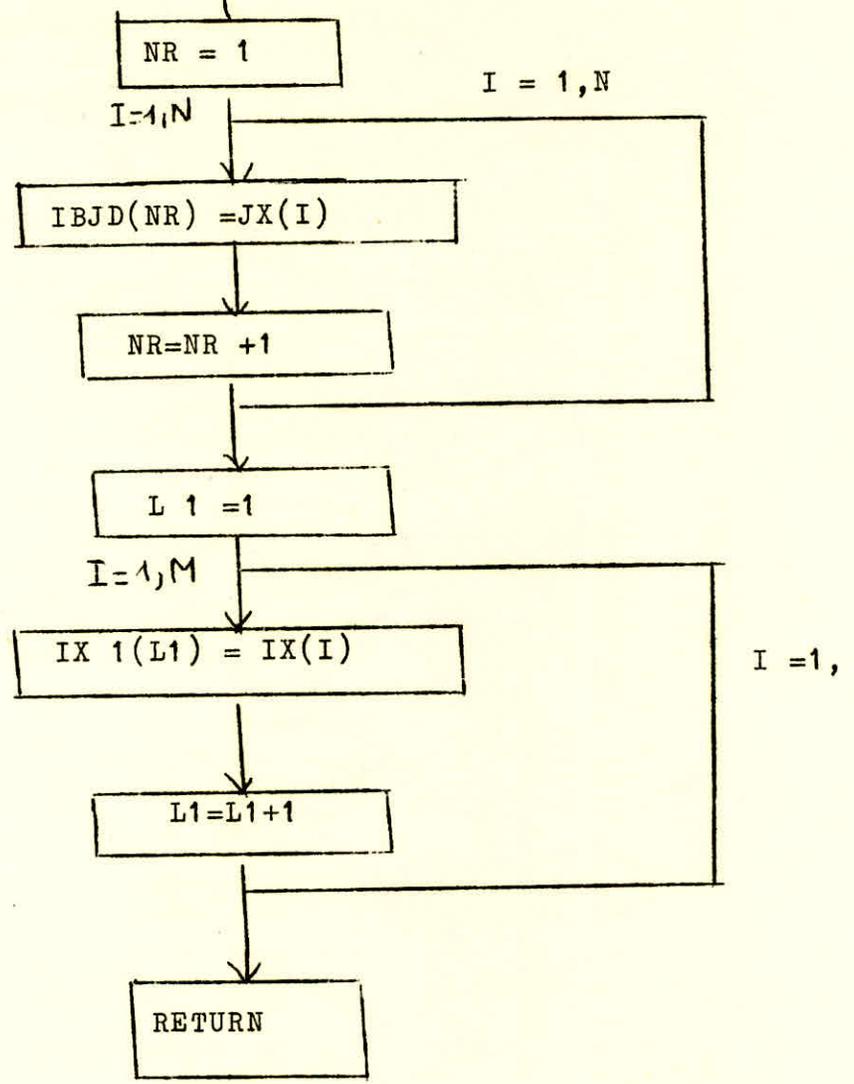


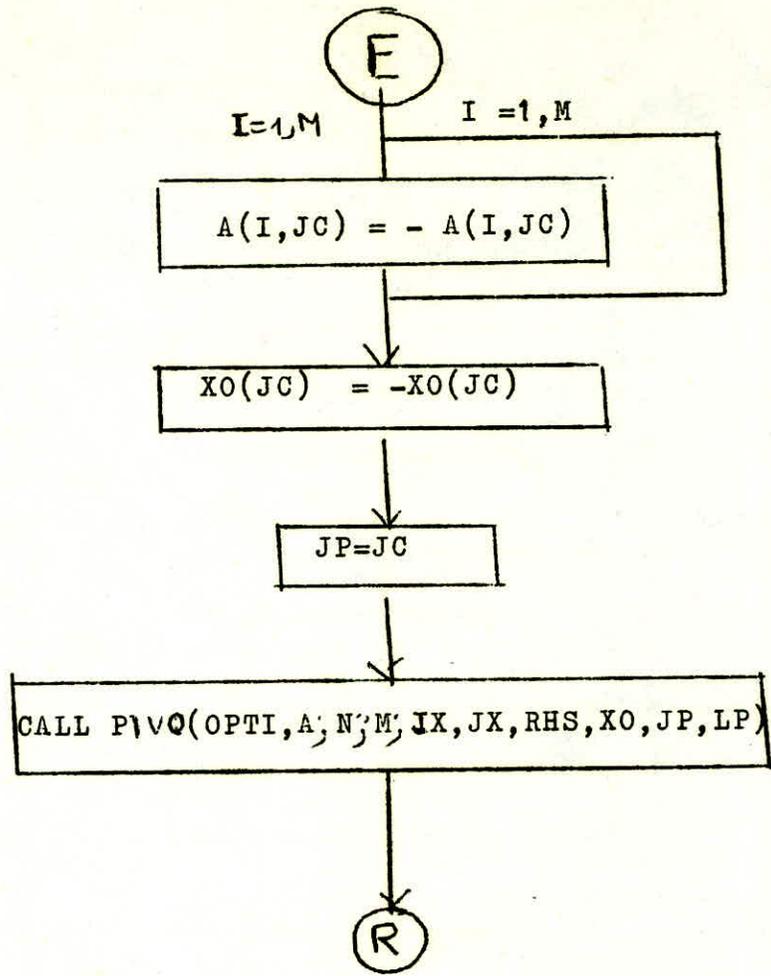






(B)





(C)

CALL PWQ(OPTI, A, N, M, JX, JX, RHS, XO, JP, LP)

I=1

$A(I, JC) < 0$

non

$XO(JC) \leq 0$

oui

I = I + 1

oui

$I < M$

non

$XO(JC) = -XO(JC)$

$A(I, JC) = A(I, JC)$

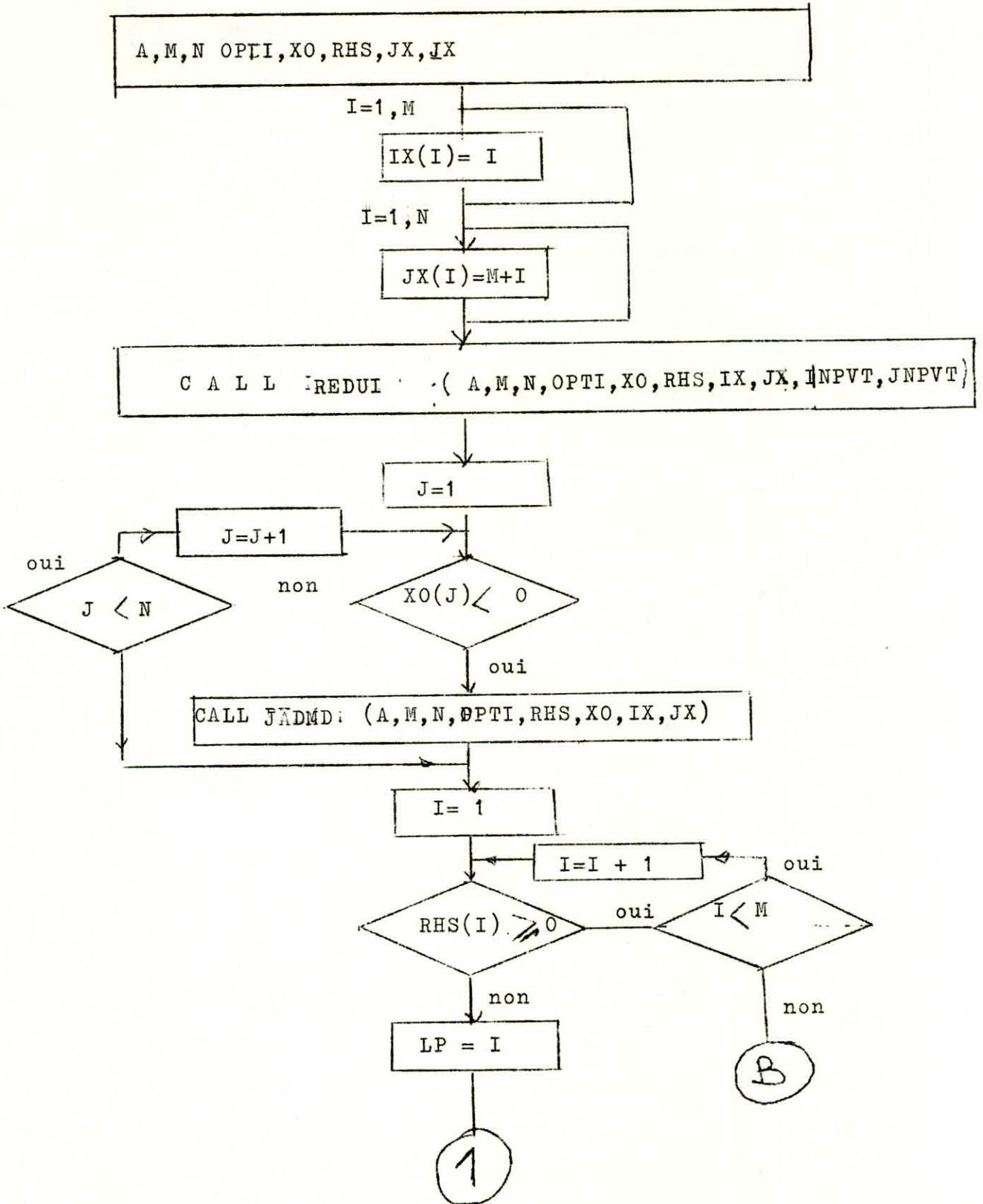
O.N.B

oui

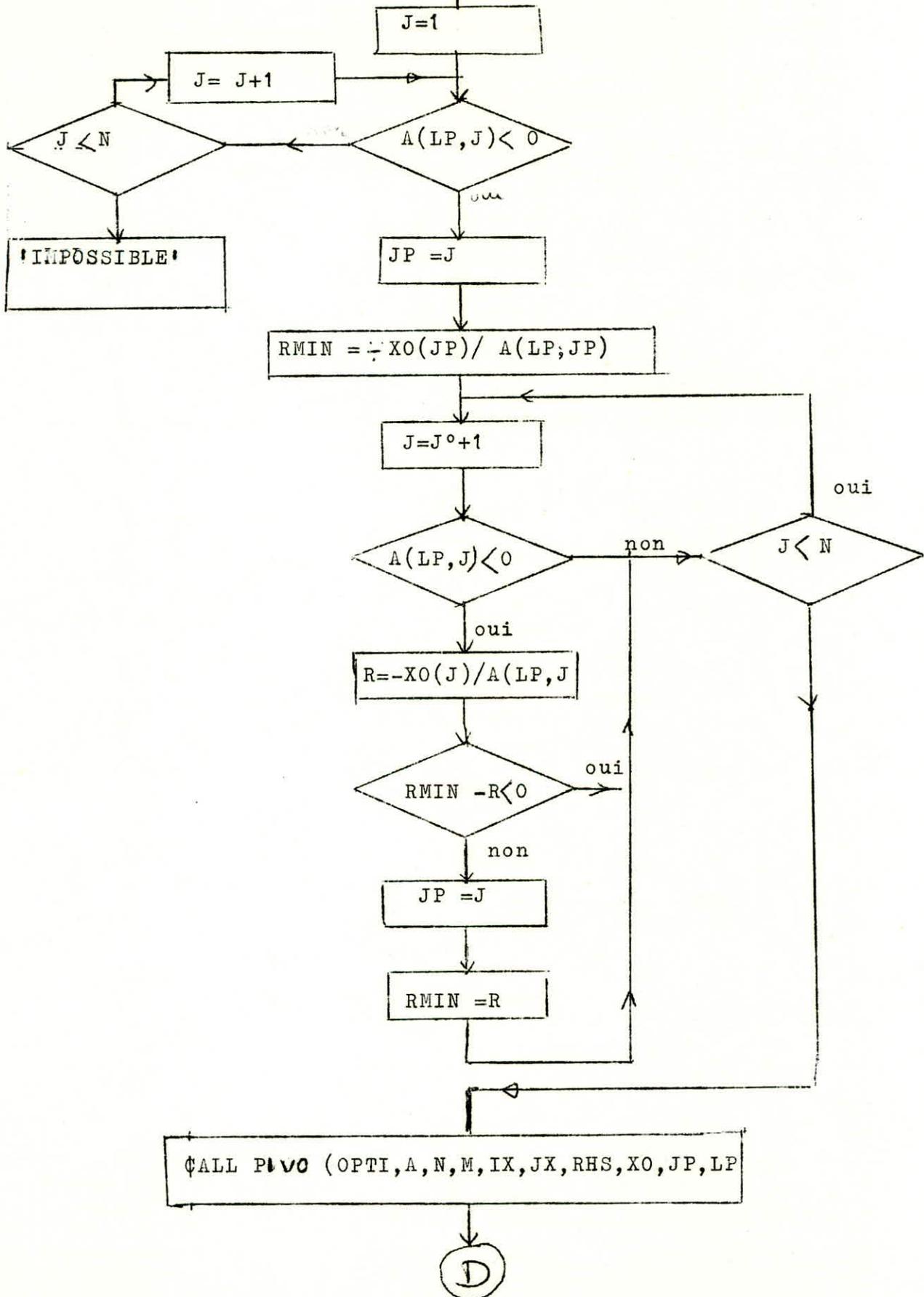
$XO(JC) > 0$

non

(R)



1



(B)

NR = 1

IBOP(NRD) = JX(I)

I = 1, N

NR = NR + 1

L1 = 1

IX1(L1) = IX(I)

I = 1, M

L1 = L1 + 1

NR = 1

IBOP(NR) = M + N

OUI

non

NR = NR + 1

oui

NR < N

non

I = 1

I = I + 1

oui

I < M

IX(I = M + N)

ERREUR

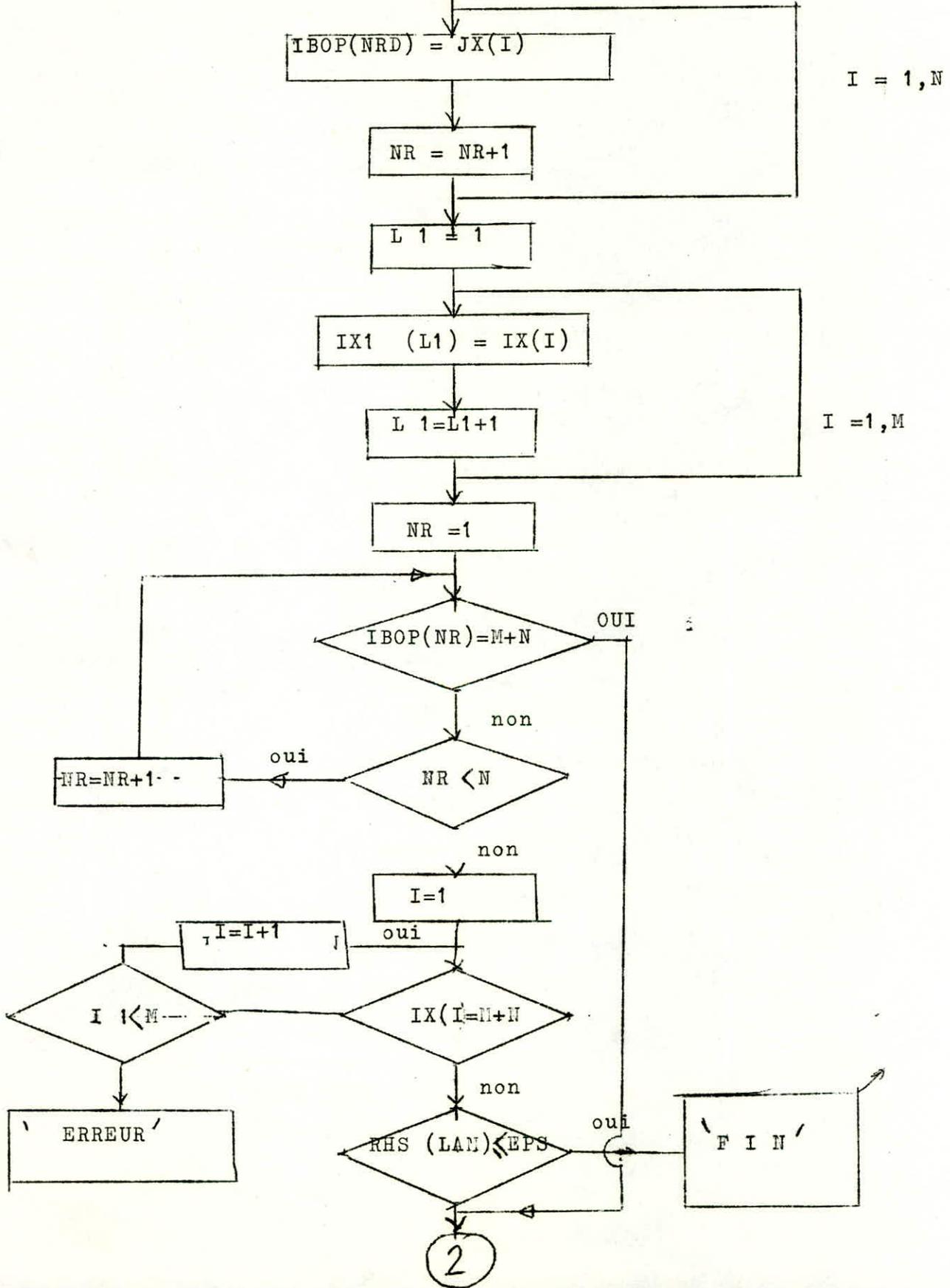
non

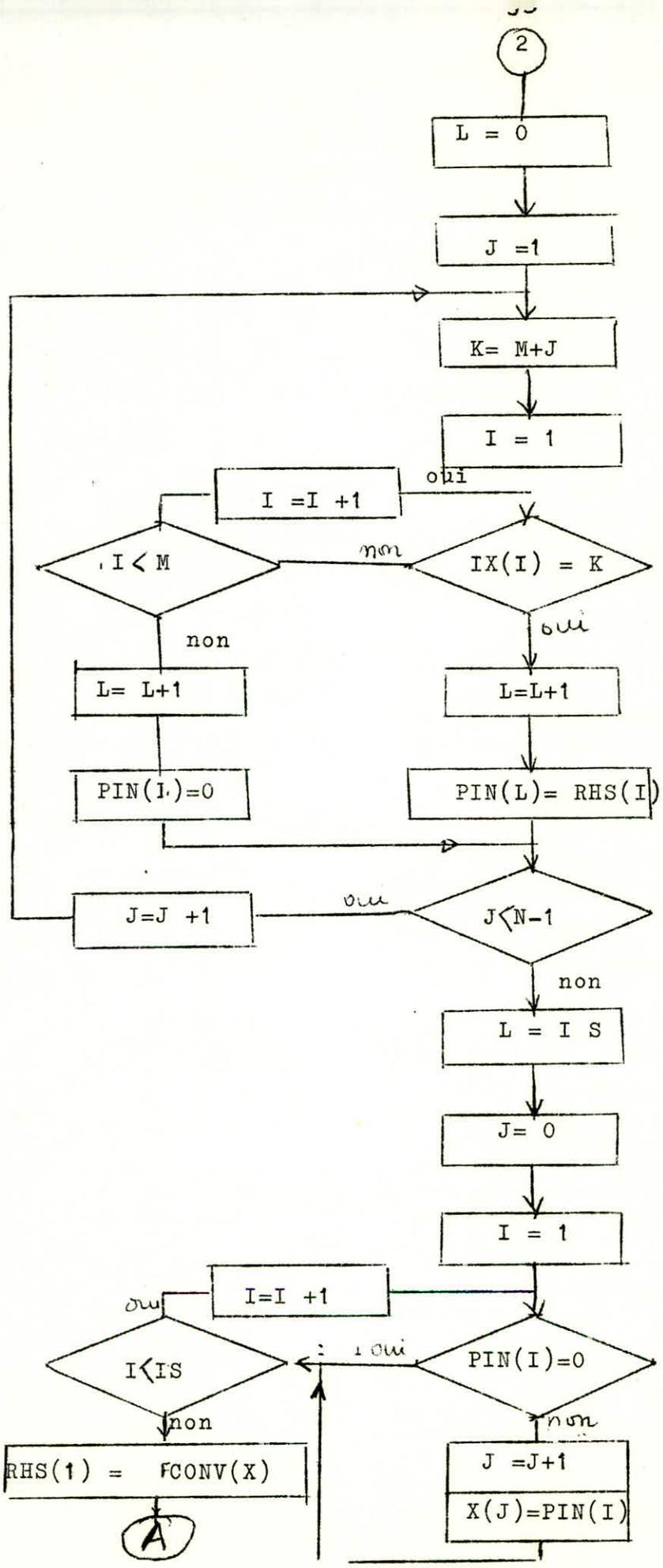
RHS(LAN) < EPS

oui

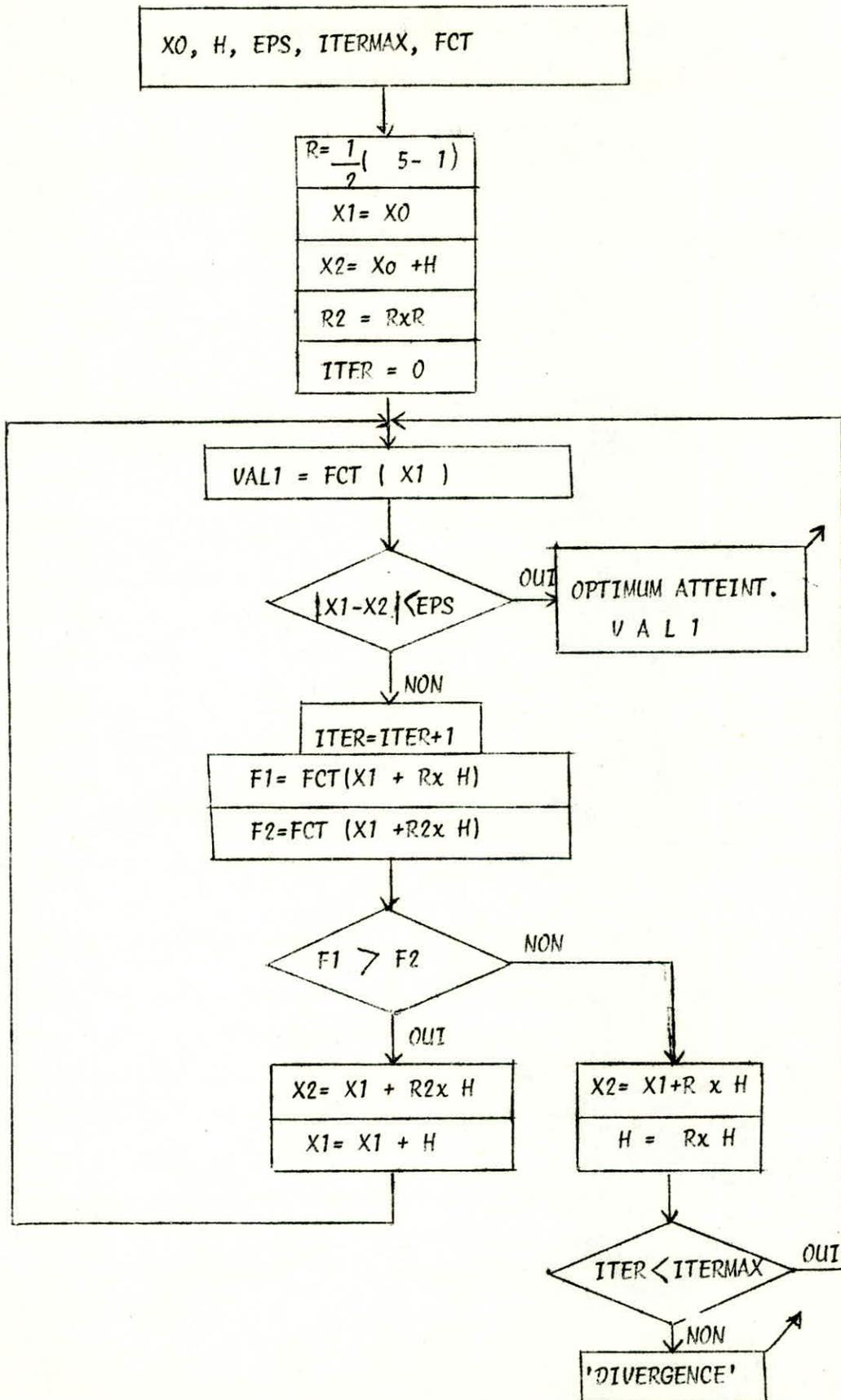
FIN

(2)





10 - ORGANIGRAMME DE 'WOLF'



-CONCLUSION-

L'intérêt pratique de cette méthode dépend des caractéristiques du problème traité:

1) L'application de l'algorithme décrit en III.4.3. nécessite des fonctions faiblement non linéaires.

2) Dans le cas d'un programme fortement non linéaire, on retrouvera l'algorithme décrit en III.3.3., si pour tout  $X$ , on doit linéariser en tous les points  $Y$ .

3) D'un autre côté, dans le cas d'un programme linéaire, on retrouvera la méthode décrite en III.4.2, la linéarisation devenant sans objet, et les  $Y$  sont de vrais centres: cette dernière méthode n'a qu'un intérêt théorique; la méthode classique nous donne de meilleurs résultats.

MISE EN OEUVRE INFORMATIQUE = on insistera sur les trois points suivants:

- . Taille du programme-
- . Fréquence de résolutions.
- . Optimum.

1) TAILLE DU PROGRAMME:

Dans le cas d'un programme géant, c'est à dire un programme dont la matrice des contraintes ne peut pas être introduite en mémoire centrale de l'ordinateur, on emploiera la méthode qui consiste à décomposer cette matrice géante en blocs qu'on résoudra séparément. Cette méthode a fait l'objet d'une étude à l'E.N.P.A.

2) FREQUENCE DE RESOLUTIONS:

Si la fréquence de résolution est très petite (ex. résolution de programmes d'investissements), le programme ne nécessite pas d'être stocké sur disque.

Mais s'agissant d'un programme dont la fréquence de résolution est très grande (ex: cas de réseaux électriques), on a intérêt à stocker ce programme sur disque (sous forme de sous-programme)

3) OPTIMUM:

L'optimum est très plat d'où la nécessité de se fixer un seuil à partir duquel on arrête les calculs.

En résumé;

La taille du programme, sa fréquence de résolution et la forme de son optimum, nécessitent la mise au point d'un algorithme efficient.

- BIBLIOGRAPHIE -

- (1) M. AIT-OUYAHIA : Cours de programmation linéaire dispensé à l'Ecole Nationale Polytechnique.
- (2) P. HUARD : Méthode des centres et Méthode des Centres par Majorations. Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches. E D F Série C N° 2 1970 P. 33-52
- (3) P. HUARD : Programmation mathématique convexe, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches. E D F. Série C N° 1 1968 p. 61- 74.
- (4) P. WOLFE : An outline of nonlinear programming.
- (5) J.P. BERTRANDIAS : Mathématique pour l'informatique  
1. Analyse fonctionnelle- Collection U.  
Armand Colin
- (6) W.J. BAUMOL : Théorie économique et Analyse Opérationnelle.  
p. 105-124. DUNOD
- (7) HP. KUNZI- W. KRELLE : La programmation non linéaire. Gauthier-Villars  
P A R I S.
- (8) H. SEGALEN-M. JOUVENT : La programmation non linéaire.  
DUNOD ECONOMIE Collection la vie de l'Entreprise
- (9) C.A. BURDET : Deux modèles de minimisation d'une fonction concave. RIRO. 4e Année, V-1, 1970.p. 49- 84.

