4/73

UNIVERSITÉ D'ALGER

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT D'ÉCONOMIE

THESE DE FIN D'ETUDES

TRAITEMENT STATISTIQUE DE DONNÉES EXPERIMENTALES.

DIRIGÉE PAR :
P. VATIN
Professeur de Statistique à l'ENPA

ETUDIÉE PAR :
A. DJEBIRI
A. KANOUNE.

1972-73

Nous exprimons nos vifs remerciements à Monsieur VATIN , professeur de statistiques, pour l'aide et les conseils qu'il nous a prodigués, à MONSIEUR OUABDESLAM, directeur de l' È.N.P.A,por avoir bien voulu présider le jury.

Nous exprimons également notre gratitude à MM. BENDJEDID et NOUAR pour l'aide matérielle qu'ils nous ont apportée.

Nous remercions enfin tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à notre formation.

Essentiellement axé sur l'emploi des statistiques en tant qu'outil décisionnel ou d'information, ce projet requiert une assez grande maitrise des statistiques appliquées.

Il ne nécessite par contre bien que portant sur des données de mécanique des sols, aucune connaissance en ce domaine.

Ce projet se déroule en deux phases:

- Liste à caractère exhaustif des outils statistiques.
- Application sur des données géotechniques actuellement au L.N.T.P.B(Husseun Dey)

Les traitements se font sur calculatrice HEWLET-PACKARD

TABLE DES MATIERES

****

INTRODUCTION

Le travail presenté ci-aprés est une etude sur des donnees de Mecanique des sols. nous disposons à chaque fois d'un echantillon d'observations à 2 variables Xet Y repre--sentant des caracteristiques d'un sol.Pour fixer les idees nous donnons certaines indications sur ces caracteristiques et les experiences ayant conduit à les determiner:

On definit la <u>teneur en eau</u> W comme étant pour un certain volume de sol le rapport du poids de l'eau au poids de la matiere sèche.La teneur en eau,notee W, est mesurable au laboratoire.

De même,on constate trois etats dans la consistance des argiles: les états liquide,plastique et solide.

On determine: - Une <u>limite de liquidité</u> W_L qui separe l'etat plastique de l'etat liquide;

- Une limite de <u>plasticité</u> W_P qui sépare l'etat plastique de l'état solide.

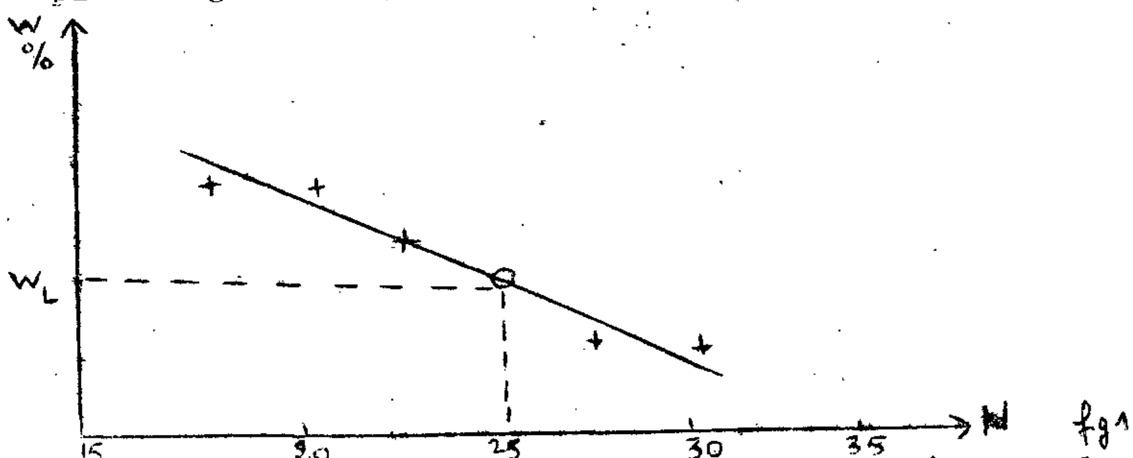
Pour determiner la limite de liquidité,on etend sur une coupelle,une couche d'argile dans laquelle on trace une rainure en "V" au moyen d'un instrument normalisé.

On imprime à la coupelle des chocs semblables en comptant le nombre de chocs nécessaires pour fermer la rainure sur 1 cm.On mesure alors la teneur en eau de la pâte.

Bien entendu,tout l'appareillage est rigoureusement normalisé. Par definition la limite de liquidité W_L est la teneur en eau (exprimée en %) qui correspond à une fermeture en 25 chocs. Si l'on étudie expérimentalement la relation qui lie le nombre de chocs N et la teneur en eau W, on constate que la courbe représentative est une droite en coordonnées semi-logarithmiques lorsque le nombre de chocs est compris entre 15 et 35.

Pour le même intervalle des valeurs de N, la formule approchée: $\cancel{W_L = W(N/2}$ $W_L = W\left(\frac{N}{25}\right)^{0,121}$ represente egalement assez bien les resultats experimentaux.

On peut donc employer cette dernière formule qui permet de determiner la limite de liquidité à l'aide d'une ou de deux mesures seulement. On peut egalement construire point par point la droite (cf. fig.1). Il est necessaire pour cela de realiser cinq (5) essais qui s'échelonnent régulièrement entre 15 et 35 coups ; ou entre 2o et 3o. Cette méthode est plus longue mais plus sûre :



Pour determiner la limite de plasticité, on roule l'échantillon en forme de fuseau que l'on amincit progressivement. La limite de Plasticité W_P est la teneur en eau (exprimée en %) du fuseau qui se brise en petits tronçons de 1 à 2 cm de longeur , au moment où son diamètre atteint 3 mm

Indice de Plasticité. I_P

L'indice de Plasticité I_P est la différence entre la limite de liquidité et la limite de Plasticité. Il s'exprime donc par la relation: $I_P = W_L - W_P$ (très utilisée dans les problèmes de geotèchnique routière).

CASAGRANDE a montré qu'il existe une relation de la forme: $I_P = aW_L - b$ pour tous les sols provenant d'une même formation geologique. a variant de 0,7 à 0,8 et b de 13 à 17.

Indice de Compression: C_C

Sur le sol est placée une enveloppe rigide; on exerce à sa partie supérieure une pression variable à l'aide d'un piston et on mesure les affaissements observés.

On determine ainsi la relation entre contraintes et deformation et on obtient la courbe "oedométrique"d'un sol on fait pour cela une transformation des échelles:
L'échelle des pressions est logarithmique en abscisse et les ordonnées ne representent pas les tassements relatifs mais les indices des vides successifs:

On a une courbe representative de la relation:

$$e = f(\mathrm{Log}\,\sigma)$$

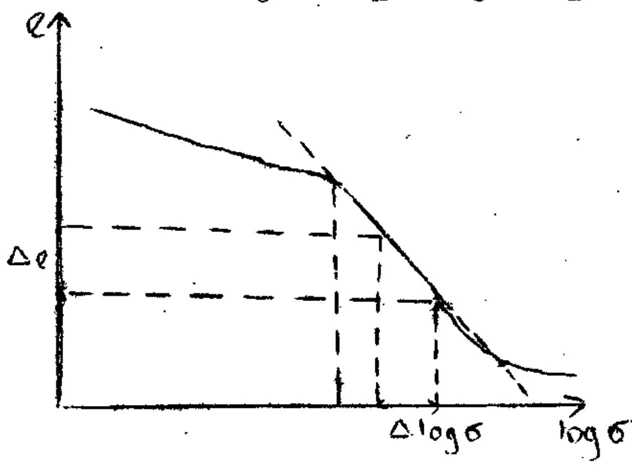
cette courbe présente une forme caractéristique: une partie sensiblement horizontale, puis au delà d'une certaine pression critique, une partie rectiligne de pente négative prononcée, et enfin une troisième partie qui tend vers une asymptote horizontale lorsque l'on fait tendre la pression vers l'infini.

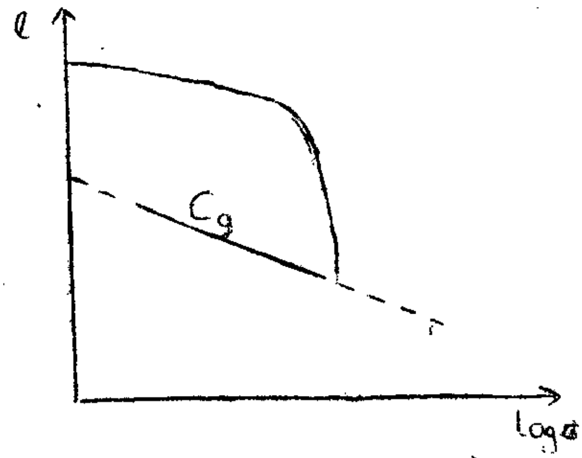
La partie médiane correspond à une variation proportionnelle entre e et $\mathrm{Log}\,\sigma$.

Le coefficient de proportionnalité est appelé indice de compression que definit par la formule:(pente de la droite)

$$C_c = -\frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma}$$

On recherchera la relation lineaire, si elle existe, qui relie C_c et W_L: $C_c = mW_L + b$





<u>Indice de gonflement</u> C_g

Lors du dechargement on remarque que la courbe $e=f(\text{Log}\sigma)$ est voisine d'une ligne droite ,mais cette fois-ci beaucoup moins inclinée sur l'axe des pressions:

C_g= est defini comme la pente de cette droite $C_g = -\frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma}$

On recherchera là aussi la relation de type lineaire qui existe entre C_c et C_g: $C_g = m'C_c + b'$.

CES notions etant précisées, le problème se pose de la manière suivante :

Etant donnés des echantillons de valeurs observées X_i et Y_i represantant chacune un caractère enumeré ci-dessus, existe-t'il une relation lineaire entre les 2 caractères?

Si oui ,trouver les meilleures estimations des paramètres de cette relation lineaire.

Mais tous les points (X_i,Y_i) ne sont pas forcement representatifs de la population à étudier.

Il existe en effet des valeurs de couples (X_i, Y_i) entâchés d'erreurs importantes.

Il en resulte que ces couples peuvent fausser les valeurs des paramètres à estimer. Le problème est donc de trouver des methodes statistiques permettant d'éliminer ces couples parasites ou "points aberrants".

Nous avons eu ainsi à etudier les relations existant

entre: I_p et W_L

C_c et W_L

C_g et C_c

CHAPITRE I- DIFFERENTS TEST UTILISES

A- LA CORRELATION LINEAIRE

I- Coéfficient de corrélation linéaire:

Le coefficient de corrélation r caractérise le degré de la liaison existant entre 2 variables X et Y. Sa valeur, comprise entre -I et +I, conduit suivant les cas aux conclusion suivantes:

$r = -1$: liaison linéaïre rigide négative(y diminuant proportionnellement aux accroissements de x)

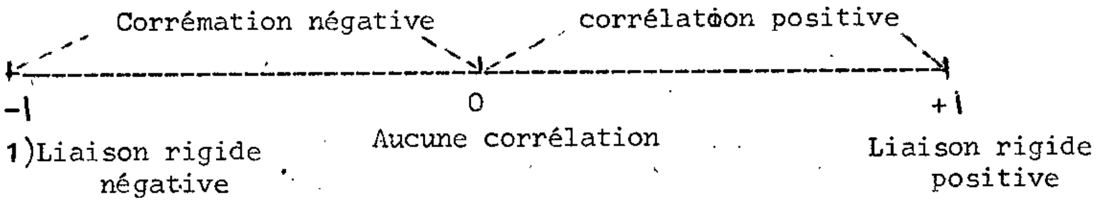
$-1 < r < 0$: corrélation négative d'autant plus nette que r est voisin de-1

$r=0$: Il n'éxiste aucune corrélation entre les 2 variables x et y

$0 < r < 1$: corrélation positive d'autant plus nette que r est voisin de 1

$r = 1$: liaison linéaire rigide positive(y croît proportionnellement aux accroissements de x)

r peut être représenté graphiquement sur un axe orienté par un point dont l'abcisse, compté à partir du point 0, varie de -1 à $+1$



II - ZONE D'INDETERMINATION DU COEFFICIENT DE CORRELATION

Tout coefficient de corrélation calculé à partir d'un échantillon des couples (X i, Y i) comporte, en effet une zone d'indétermination, d'autant moins large que l'effectif de l'échantillon est plus important. Théoriquement, c'est donc seulement en étendant le calcul à une population infinie que l'on pourrait supprimer cette marge d'erreur et déterminer la valeur ρ du coefficient de corrélation exprimant, dans l'absolu, le degré de liaison linéaire entre 2 caractères. Le calcul du coefficient de corrélation ne peut fournir qu'une estimation de la vraie valeur dont la détermination exacte est évidemment impossible. Il est donc indispensable de délimiter une zone pour apprécier la signification qui peut être attribuée à la valeur calculée.

La principale difficulté est que si d'une même population on tire plusieurs échantillons de n couples, les estimations ainsi trouvées du coefficient de corrélation : $r_1, r_2, .. r_n$ ne sont pas distribuées normalement autour de la vraie valeur. Fisher a introduit une variable auxiliaire. Les calculs étant assez long, on utilisera, pour la détermination de la zone d'erreur, l'abaque ci-dessous qui fournit immédiatement le résultat.

Si r_1 est la valeur du coefficient de corrélation à partir de n couples d'observations on portera :

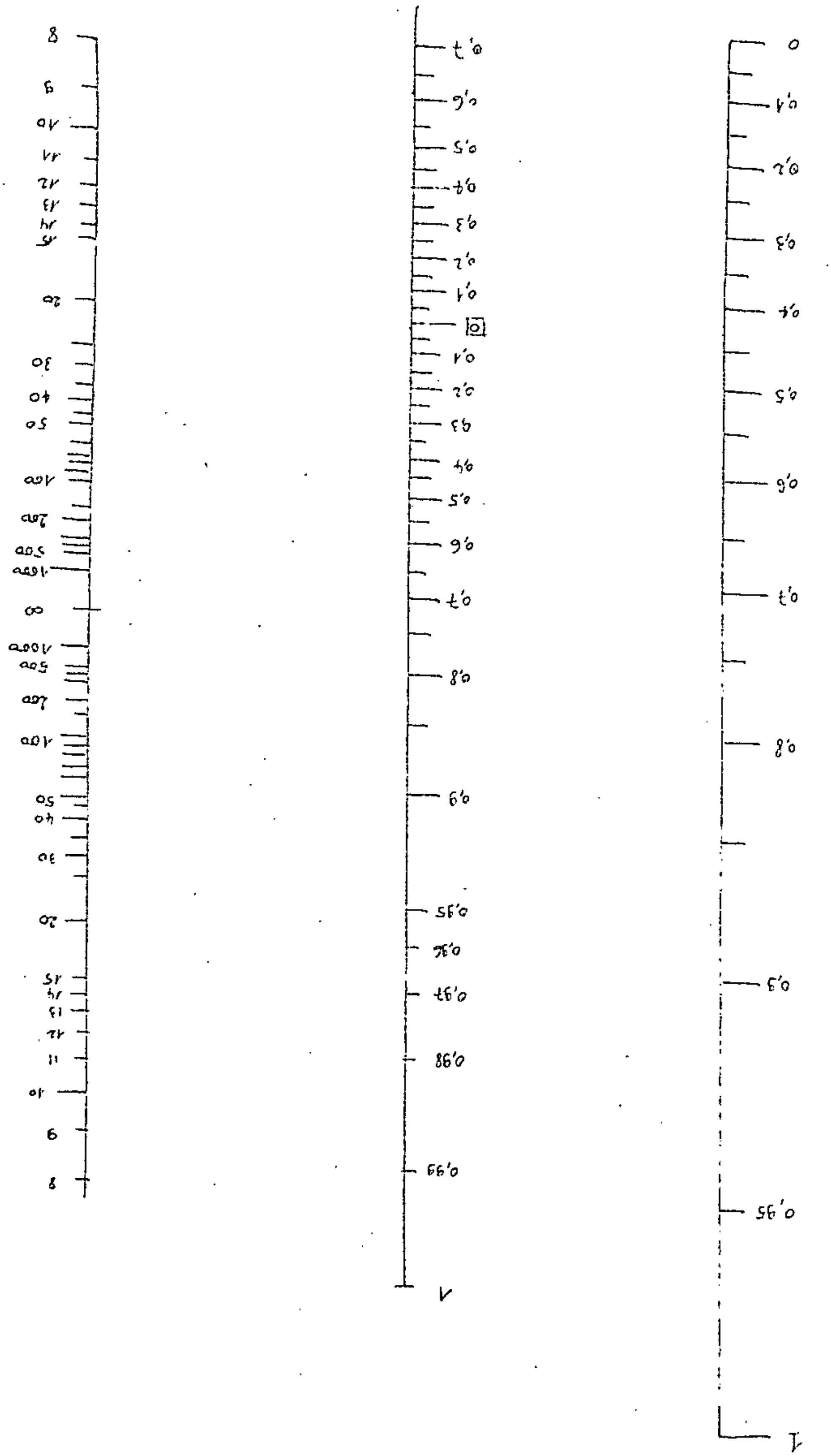
- Sur l'échelle de gauche le point A correspondant à r.

- Sur l'échelle de droite les 2 points B et B' correspondant à la valeur de n (voir abaque).

En joignant A et B' ; A et B" on déterminera sur l'échelle du milieu les points C' et C" délimilitant la zone dans laquelle (avec une probabilité de 95 %) se trouve la vraie valeur ρ du coefficient de corrélation.

III - TEST DE SIGNIFICATION DU COEFFICIENT DE CORRELATION OBSERVE :

Dans la population - mère le coefficient de corrélation a une valeur exacte estimée par r. Plus le nombre d'observations est important plus une valeur de r est le signe d'une relation entre les variables X et Y. Au contraire si le nombre d'observations est peu élevé, même une valeur voisine de 1 peut être due au hasard et ne revéler aucune liaison significative. Il est donc intéressant de savoir avec quelle précision le coefficient de corrélation ρ a été estimé. La loi de distribution du coefficient r observé sur l'échantillon dépend évidemment de celle de l'ensemble. On fait l'hypothèse fondamentale selon laquelle les variables X et Y suivent une loi gaussienne.



(1) <u>Comparaison de r à ρ (ρ : vraie valeur)</u>

--- a) Première méthode :

Pour des échantillons importants ($n > 50$) et une corrélation faible, le coefficient de corrélation r est distribué autour de la vraie valeur ρ suivant une loi sensiblement normale avec un écart type :

$$\sigma_r = \frac{1-\rho^2}{\sqrt{n-1}} \simeq \frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}$$

Donc : $$t = \frac{r-\rho}{\sigma_r} = \frac{r-\rho}{1-\rho^2}\sqrt{n} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

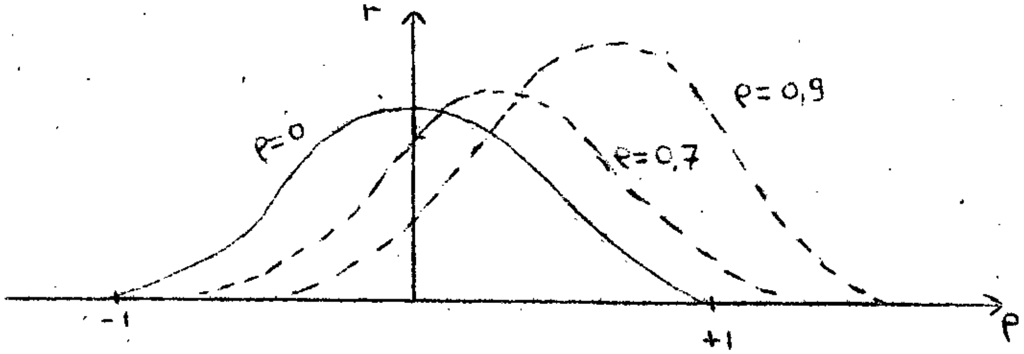
Ceci permet de tester la signification du coefficient de corrélation ρ. L'emploi de cette méthode est assez restreint car :

- $\sigma_r = f(\rho)$ or ρ est connu (sauf lorsqu'il s'agit de comparer r à $\rho = 0$)

- Si l'on remplaçait ρ par r l'erreur peut être assez importante

- Lorsque n est assez faible et ρ peu élevé, la distribution de r est loin d'être normale. Elle est d'autant plus dissymétrique, pour n donné, que ρ est plus élevé et pour ρ donné que n est plus faible.

Elle est alors insuffisamment caractérisée par



Cette méthode permet de conclure pour un seuil α de signification :

$$\text{Si } t \leq t_\alpha \Rightarrow \rho = 0$$

$$\text{Si } t > t_\alpha \Rightarrow \rho \neq 0$$

— b) 2° méthode : Méthode de la corrélation transformée de FISHER

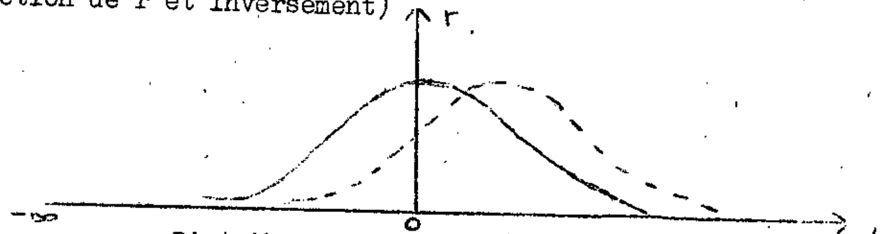
Fisher a montré que la variable $Z' = \text{argth}\ r$

$$\left(z' = \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r} = r + \frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5} + \ldots\right)$$

comprise entre $-\infty$ et $+\infty$ est distribuée presque normalement ($\forall$ la valeur exacte de ρ et n) autour de la moyenne $z = \text{argth}\ \rho$ et un écart type indépendant de ρ

$$\sigma_{z'} = \frac{1}{\sqrt{n-3}} \qquad E(z') = z$$

On peut donc tester la signification du coefficient de corrélation en passant par l'intermédiaire de z' et en appliquant les propriétés de la distribution normale (La table de Fisher donne la correspondance de z' en fonction de r et inversement)



Distribution de $z' = \text{argth}\ r$

Cette méthode analyse la variable $t = \dfrac{z' - 0}{\sigma_{z'}} = z'\sqrt{n-3} \leadsto N(0,1)$

— $t \leq t_\alpha \Rightarrow \rho = 0$

- Si $t > t_\alpha \Rightarrow \rho \neq 0$

α : Seuil de signification

c) 3° Méthode

Cette méthode utilise la table de distribution de r qui se trouve en annexe. Dans l'hypothèse $\rho=0$ la valeur de r qui a la probabilité d'être dépassée en module dépend seulement de la taille n de l'échantillon. FISHER a dressé des tables pour $\alpha= 0,1;\ 0,05;\ 0,02;\ ;\ 0,01$ et $\nu=n-2$ (nbre de degré de liberté de la variance résiduelle.)

Pour α donné et $\nu = n-2$ on détermine r_α

La régle de decision est la suivante:

$$\text{Si } r > r_\alpha \longrightarrow r \neq 0$$

$$r \leq r_\alpha \longrightarrow r = 0$$

B- TEST D'HOMOGENEITE

COMPARAISON DE 2 COEFFICIENTS DE CORRELATION

En utlisant les résultats c) on a :

Pour 2 échantillons indépendants, la différence des corrélations transformés $|z'_1 - z'_2|$ est distribuée normalement autour de la moyenne 0 si ρ a la même valeur dans les 2 populations avec

$$\sigma^2_{z'_1 - z'_2} = \sigma^2_{z'_1} + \sigma^2_{z'_2} = \frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}$$

n_1 et n_2 étant le nombres de couples d'observations d'échantillons

On considère

$$t = \frac{|z'_1 - z'_2|}{\sigma_{z'_1 - z'_2}} \rightarrow N(0,1)$$

D'où la règle de décision:

- $t \leq t_\alpha$ = la différence $r_1 - r_2$ n'est pas significative au seuil de signification α fixé

Les 2 échantillons n_1 et n_2 proviennent de la même population.

- $t > t_\alpha$: la différence $r_1 - r_2$ est significative au seuil α : les 2 échantillons n_1 et n_2 ne proviennent pas de la même population.

C - TEST DE χ^2

AJUSTEMENT D'UNE DISTRIBUTION EMPIRIQUE A UNE LOI DE PROBABILITE

1 EMPLOI DU TEST DU χ^2 COMME TEST D'HOMOGENEITE

Dans la pratique on est souvent amené à tester l'hypothèse qu'un échantillon au hasard est distribué suivant telle loi de probabilté d'après la forme suggérée par l'histogramme.De même on peut comparer plusieurs échantillons pour savoir s'ils proviennent de la même population: c'est le test d'homogéneité.

Une population sera dite homogène si elle est composée d'individus identiques aux fluctuations alèatoires près:seul le hasard intervient d ans les différences entre individus,c'est à dire un ensemble de causes imptévisibles plus ou moins nombreuses agissant dans un sens comme dans l'autre.On exclut donc l'existence d'une cause systématique des variations.Lorsque cette cause existe la population est dite "hétérogène " et le facteur responsable est dit "facteur d'hétérogéneité".Celui modifie la forme de la distribution de celle que l'on aurait avec une population homogène de même nature et de mêmes paramêtres.

Le test du χ^2 nous renseigne sur la probabilité d'un ajustement d'une distribution empirique à une distribution théorique et nous indique aussi si l'échantillon peut être considéré comme extrait d'une population homogène ou non.

L'ajustement permet de raisonner ultérieurement sur une loi générale au lieu de raisonner sur un fait empirique.

2- CONSTRUCTION DU TEST D'AJUSTEMENT A UNE LOI NORMALE

Soit un échantillon de N observations réparties en K classes d'effectifs respectifs $n_1, n_2 \ldots, N_k$ avec . $\sum n_i = N$

On fait l'hypothèse que la population peut être représentée par une var iable aléatoire X continue dont la loi de probabilité N(X) (loi normale)ajuste la distribution empirique de l'échantillon.

Le problème est de savoir si la distribution empirique est compatible avec ma distribution théorqùe de loi de probabilité N (X) ?

Soit H_0 l'hypothèse nulle:la distribution empirique est compatible avec la distribution théorique et H_1 l'hypothèse contraire.

Le problème revient à tester si les "fréquences observées" $p_i = \frac{n_i}{N}$ et les "fréquences théoriques" p_i (déduites de la table) sont-elles suffisamment "voisines "? Les écarts peuvent-ils être imputés au hasard(hypothèse Ho)ou sont-ils significatifs d'une différence réelle(hypothèse H_1).

Pour construire notre test nous allons donc considérer les écarts

$$\frac{n_i}{N} - p_i \quad \text{ou} \quad n_i - Np_i = n_i - E(n_i)$$

Np_i sont les "effectifs théoriques "

Cette somme ne peut pas servir à mesurer la précision de l'ajustement.On choisit donc comme indicateur d'écart de 2 distribution la quantité

$$\sum_i \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i} \qquad \text{qui suit la loi} \qquad \chi^2_{n-1}$$

Conditions de validité de l'indicateur d'écart:

a) Echantillon non exhaustif prélevé au hasard

b) Aucune probabilité p_i ne doitpas être voisine de 0 ou de 1

c) N_{pi} ne doit pas être trop petit,pas inférieur à 5

Dans ce dernier cas on est amené à regrouper certaibes classes de façon à avoir $Np_i \geq 5$ le nombre de dregré de liberté dimunuant.

Le test du permet de comparer l'indicateur d'écart $\chi^2_c = \sum \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$ à χ^2_α obtenu par la table du χ^2 en fonction du degré de liberté ν et du seuil de signification α.

(3) REGLE DE DECISION

a) $\chi^2_c \leqslant \chi^2_\alpha$ on accepte l'hypothèse H_o de l'ajustement :

La loi normale N (X) représente la distribution empirique et les écarts constatés sont attribués au hasard c'est - à dire ne sont pas significatifs.

b) $\chi^2_c > \chi^2_\alpha$ l'hypothèse H_o est refusée. Les écarts ne peuvent être attribués seulement au hasard.

Etant donné que la loi N (X) comporte des paramètres inconnus le nombre de degrés de liberté est

$$\nu = K - 1 - r$$

r = 2 dans notre cas (les inconnues étant la moyenne et l'écart type).

Tableau utile pour le test

classe	$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x}$		$\Pi(t)$		p_i	Np_i	n_i	$n_i - Np_i$	$(\quad)^2$	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
	t_{i-1}	t_i	$\Pi(t_{i-1})$	$\Pi(t_i)$	$\Pi(t_i) - \Pi(t_{i-1})$					

CHAPITRE II

METHODES UTILISANT LES MODELES DE MOINDRES CARRES

INTRODUCTION :

1) Ajustement linéaire

Nous cherchons souvent en économie à exprimer une liaison (de causalité ou d'interdépendance) entre 2 facteurs X et Y. Le plus souvent la nature de ces variables est telle que la liaison cherchée n'est pas toujours du type fonctionnel pur : il s'agit d'une liaison stochastique (c'est - à dire qu'à une valeur de x correspond non pas une valeur déterminée de y mais un ensemble de valeurs possibles distribuées selon une loi de probabilité déterminée (en général inconnue) et de même à une valeur donnée de x correspond une distribution des valeurs possibles de y).

Faute de mieux, nous nous contenterons le plus souvent de savoir comment en moyenne se font les variations correspondantes de x et y. Nous cherchons, par exemple, comment varie la moyenne $\bar{y}_{xo}$ de la distribution de y (xo) quand xo varie. ou la moyenne $\bar{x}_{yo}$ de x (yo) quand yo varie.

En fait nous ne sommes que très rarement maitres des variables x et y et nous n'avons pas les moyens d'étudier la distribution des valeurs de y (xo) pour x = xo, ni celle de x (yo). Nous ne pouvons donc pas espérer déduire les moyennes $\bar{y}_{xo}$ ou $\bar{x}_{yo}$ de l'étude de ces distributions.

Finalement les seules données dont nous pouvons disposer constituent un échantillon d'observations de valeurs associées de x et de y. Si nous portons ce groupe de valeurs sur un graphique, nous obtenons un ensemble de pts qui présentent une certaine régularité, ou si l'on veut une allure. Cette régularité nous permet en général de tracer au voisinage de ces pts une ligne régulière qui représentera au mieux l'allure. L'équation de cette courbe est la fonction ajustée que nous cherchons. Une telle estimation graphique nous donne, évidemment, ce que nous cherchons, mais elle dépend de la précision de l'opérateur, et nous préférons utiliser une méthode algébrique qui reproduise la démarche expliquée ci-dessus et qui conduise à une équation sur laquelle tous les calculateurs peuvent se mettre d'accord sans contestation. Il convient de résoudre 3 problèmes :

- Si les pts semblent manifester une tendance à s'aligner selon une ligne droite, qu'elle est la droite qui traduit le mieux, compte tenu de l'ensemble des observations, la liaison supposée entre x et y ?
(problèmes d'ajustement, consistent en la détermination de la droite d'estimation).

- Dans quelle mesure la droite ainsi trouvée (ou la relation linéaire entre x et y qui est son équation) est -elle représentative de l'ensemble des observations effectuées - en un mot, quel est le degré de la liaison (calcul du coefficient de corrélation).

- Enfin que peut-on en conclure quant à l'existence effective d'une liaison entre les phénomènes y et x ? -(valeur significative du coeff de corrélation). On admettra que la meilleure représentation d'un ensemble de pts est fournie par la droite dont la somme des carrés des distances aux divers pts est minimale, ces distances étant comptées parallélement à oy (méthode des moindres carrés).

2) Méthode des moindres carrés.

Considérons un ensemble de n couples de valeurs (x_i, y_i) dont certaines peuvent éventuellement être identique.

La méthode des moindres carrés conduit à la détermination de la droite D (D : $\hat{y} = \hat{m}x + \hat{b}$) et qui possède la propriété de fournir les meilleurs estimateurs linéaires sans biais de m et b.

La distance étant mesurée par la somme des carrés des écarts :

$$Q = \sum_{1}^{n} q_i^2 = \sum_{1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum [y_i - (mx_i + b)]^2 = f(m, b)$$

$\hat{m}$ et $\hat{b}$ sont déterminés de façon à rendre minimum la quantité Q c'est - à dire

$$\frac{\partial Q}{\partial m} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial b} = 0$$

En posant $q_i = y_i - mx_i - b$ on aura

$$\frac{\partial Q}{\partial m} = \sum_i \frac{\partial (q_i^2)}{\partial m} = \sum \left(2 q_i \frac{\partial q_i}{\partial m} \right) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = \sum \frac{\partial (q_i^2)}{\partial b} = \sum \left(2 q_i \frac{\partial q_i}{\partial b} \right) = 0$$

or

$$\frac{\partial q_i}{\partial m} = -x_i$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial b} = -1$$

D'où

$$\frac{\partial Q}{\partial m} = \sum (-2 q_i x_i) = -2 \left[\sum x_i y_i - m \sum x_i^2 - b \sum x_i \right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = \sum (-2 q_i) = -2 \left[\sum y_i - nb - m \sum x_i \right]$$

Les conditions $\frac{\partial Q}{\partial m} = 0$ et $\frac{\partial Q}{\partial b} = 0$ impliquent :

(1) $\sum x_i y_i = m \sum x_i^2 + b \sum x_i$

(2) $\sum y_i = m \sum x_i + nb$

Ces équatioss sont les équations normales de l'ajustement.

Ces 2 équations constituent un système de 2 équations à 2 inconnues qui nous permet de déterminer les valeurs m et b en fonction des données.

D'où : $$\hat{m} = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{vmatrix}} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

En tenant compte du fait que :

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n \bar{x}^2$$

$$\sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) = \sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}$$

on aura :

$$n \sum x_i^2 - \left[\sum x_i\right]^2 = n \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$n \sum x_i y_i - n^2 \bar{x} \bar{y} = n \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

D'où les valeurs de m et b.

$$\hat{m} = \frac{n \sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{n \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

D'où $$\boxed{\hat{m} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$$

et (2) $\Longrightarrow \hat{b} = \frac{1}{n} \sum y_i - \hat{m} \frac{\sum x_i}{n} = \bar{y} - \hat{m}\, \bar{x}$

$$\boxed{\hat{b} = \bar{y} - \hat{m}\, \bar{x}}$$

D'où l'opération de la droite D : $Y : \hat{m}\, x + \hat{b}$

La droite D ainsi trouvée est l'estimation d'une droite Δ inconnue qui a les sigmmfications suivantes :

- L'ensemble des couples (X_i, Y_i) est un échantillon aléatoire représentatif prélevé dans une population où le caractère Y est en corrélation linéaire avec la caractère X. La courbe de regression de Y en X dans l'ensemble de la population est une droite inconnue qui est la droite de regression de Y en X. Alors la droite D déterminée sur la base de l'échantillon par la méthode des minidres carrés est une estimation de la droite .

- L'ensemble des couple (X_i, Y_i) est un ensemble d'observations où les valeurs Y sont entachées d'erreurs de grandeurs ε_i inconnues liées linéairement aux observations Xi , lesquelles sont supposées connues sans erreur. (ou du moins sans erreur appréciable par rapport à celle commise sur Yi).

D'où $y_i = m x_i + b + \varepsilon_i$

Les pts (X_i, Y_i) ne sont pas alignés du fait des erreurs ; la droite $y = \hat{m} X + \hat{b}$ est alors l'estimation de la droite Δ traduisant la liaison fonctionnelle linéaire entre Y et x.

- Les erreurs ε_i sont des erreurs aléatoires non systématiques c'est à dire en moyenne nulle sur un grand nombre d'expérience : $E(\varepsilon_i) = 0$ (faute de quoi les paramètres m et b du modèle ne serait pas identifiables)

$$Var(\varepsilon_i) = \sigma^2_{\varepsilon_i}$$

- Les erreurs ε_n et ε_θ relatives à 2 observations différentes quelconques n et θ sont indépendantes entre elles.

- On suppose que $\varepsilon \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$

- En dehors de l'échantillon étudié on ne dispose d'aucune information sur les coefficients numériques m et b lesquels peuvent prendre, à priori, n'importe quelles valeurs : positives, négatives ou nulles.

En considérant les hypothèses énumérées ci-dessus comme vérifiées on cherche des méthodes d'élimination de pts aberrents qui existent dans l'échantillon et par la suite estimer les paramètres m et b par la méthode des monidres carrés. Aussi on a conçu 4 méthodes d'élimination de pts aberrents :

- Méthodes des droites en biais
- Construction d'un intervalle de prévision au seuil α.
- Méthode utilisant l'explication de la variante de y.
- Méthode de l'ellipse.

I METHODE DES DROITES EN BIAIS :

Dans cette méthode on considère le modèle $y_i = m x_i + b + \varepsilon_i$ en faisant les hypothèses :

- L'ensemble (x_i, y_i) est un échantillon aléatoire représentatif prélevé dans une population où y_i est en relation linéaire avec xi.

- L'ensemble (x_i, y_i) est un ensemble d'observations où les valeurs sont des mesures entachées d'erreur inconnues avec $E(\varepsilon_i) = 0$ et $\varepsilon_i \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$

- x endogène = explicante
  y exogène = expliquée.

- Les erreurs ε_n et ε_θ relatives à 2 observations différentes quelconques n et θ sont indépendantes entre elles.

- En dehors de l'échantillon on ne dispose d'aucune information sur les coefficients m et b.

En considérant comme vérifiées les hypothèse précédentes, considérant le plan (m, b) et considérons un domaine tel que $m \in [m_1 ; m_2]$

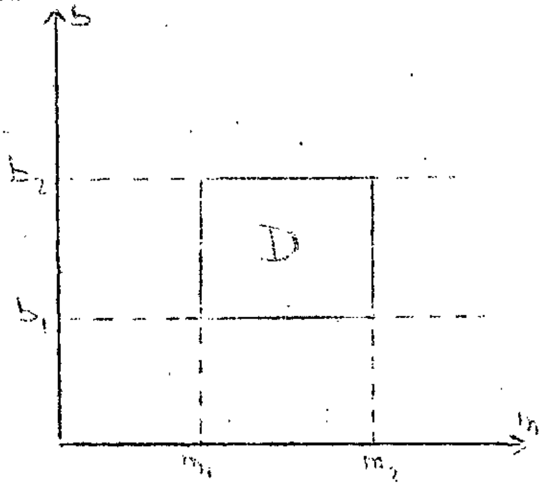
avec $m_1 = \hat{m} - 2\sigma_{\hat{m}}$

$m_2 = \hat{m} + 2\sigma_{\hat{m}}$

et $b \in \left(b_1 \; ; \; b_2\right)$ avec : $b_1 = \hat{b} - 2\,\sigma_{\hat{b}}$

$b_2 = \hat{b} + 2\,\sigma_{\hat{b}}$

$\hat{m}$ et $\hat{b}$ étant les estimateurs de m et b par la méthode des moindres carrés; $\sigma^2_{\hat{m}}$ et $\sigma^2_{\hat{b}}$ étant les variances de ces estimateurs.



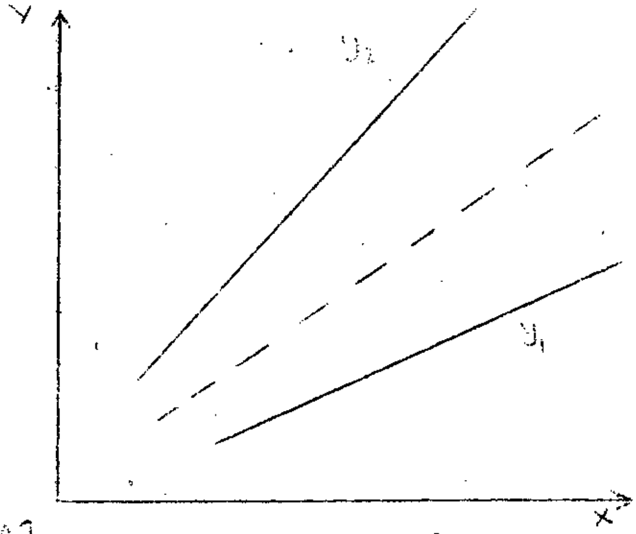


fig 1

Ayant établi ce domaine D on cherche la correspondance dans le plan (X,Y): plan des observations; on obtient le domaine D' (cf fig 1).

Pour calculer m_1, m_2, b_1, b_2 on est obligé de calculer $\hat{m}, \hat{b}$, $\sigma_{\hat{m}}, \sigma_{\hat{b}}$

1) Calcul de $\sigma^2_{\hat{m}}$ et $\mathrm{cov}(\hat{m}, \hat{b})$:

La méthode des moindres carrés donne les resultats suivant:

$$\hat{m} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \qquad (1)$$

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{m}\bar{x} \qquad (2)$$

D'où : $_{\hat{m}} = E\left\{(\hat{m} - m)^2\right\}$ or $y_i = m x_i + b + \varepsilon_i$

Exprimons $\hat{m}$ en fonction de la vraie valeur m; on aura:

$$\left.\begin{array}{l} y_i = m x_i + b + \varepsilon_i \\ \bar{y} = m\bar{x} + b + \bar{\varepsilon} \end{array}\right| \Longrightarrow m(x_i - \bar{x}) + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) = y_i - \bar{y}$$

D' où en considerant l'équation (1):

$$\hat{m} \quad \frac{\sum (x_i - \bar{x})\left[m(x_i - \bar{x}) + \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}\right]}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = m + \frac{\sum (x_i - \bar{x})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

En tenant compte du fait que $E(\varepsilon_i) = \bar{\varepsilon} = 0$ on aura

$$\hat{m} = m + \frac{\sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \Rightarrow \hat{m} - m = \frac{\sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

D'où $\quad \sigma^2_{\hat{m}} = E\left[(\hat{m} - m)^2\right] = E\left[\left(\frac{\sum (x_i - \bar{x}).\varepsilon_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\right)^2\right]$

$$\sigma^2_{\hat{m}} = E\left\{\frac{\sum_{i \neq j} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})\varepsilon_i\varepsilon_j + \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \varepsilon_i^2}{\left[\sum (x_i - \bar{x})^2\right]^2}\right.$$

$$= \frac{\sum_{i \neq j} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x}) E(\varepsilon_i\varepsilon_j)}{\left[\sum (x_i - \bar{x})^2\right]^2} + \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 E(\varepsilon_i^2)}{\left[\sum (x_i - \bar{x})^2\right]^2}$$

du fait que ε_i et ε_j sont indépendants on a $E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0 = E(\varepsilon_i)E(\varepsilon_j)$

d'où $\quad \boxed{\sigma^2_{\hat{m}} = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}$

De la même manière on peut calculer $\sigma^2_{\hat{b}}$ et $\text{cov}(\hat{m}, \hat{b})$.

$$\text{var}(\hat{b}) = \sigma^2_{\hat{b}} = E\left\{(\hat{b} - b)^2\right\} = E\left\{\left[(m - \hat{m})\bar{x} + \bar{\varepsilon}\right]^2\right\}$$

et ceci du fait que $\left.\begin{array}{l} b = \bar{y} - m\bar{x} - \bar{\varepsilon} \\ \hat{b} = \bar{y} - \hat{m}\bar{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{b} - b = (m - \hat{m})\bar{x} + \bar{\varepsilon}$

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\hat{b}} &= E\left\{(m - \hat{m})^2\bar{x}^2 + \bar{\varepsilon}^2 + 2\bar{x}(m - \hat{m})\bar{\varepsilon}\right\} \\
&= \bar{x}^2 E\left\{(m - \hat{m})^2\right\} + E(\bar{\varepsilon}^2) + 2\bar{x}.E\left[(m - \hat{m})\bar{\varepsilon}\right] \\
&= \bar{x}^2.\sigma^2_{\hat{m}} + E\left[\left(\frac{\sum \varepsilon_i}{n}\right)^2\right] + 2\bar{x}E\left[\frac{\sum (x_i - \bar{x})\varepsilon_i\bar{\varepsilon}}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\right]
\end{aligned}$$

$$\sigma^2_{\hat{b}} = \bar{x}^2 \frac{\sigma^2_\varepsilon}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E(\varepsilon_i^2) + \underbrace{2\bar{x}.\frac{\sum (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} E(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})}_{=0}$$

du fait que $\bar{\varepsilon} = \frac{\sum \varepsilon_j}{n}$ et que

ε_i et ε_j sont indépendantes

D'où $\quad \sigma^2_{\hat{b}} = \bar{x}^2 \frac{\sigma^2_\varepsilon}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + \frac{\sigma^2_\varepsilon}{n} = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{n}\left[1 + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}\right]$

De même $cov(\hat{m},\hat{b}) = E\left((m-\hat{m})(\hat{b}-b)\right)$

Comme $\hat{m}-m = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})\varepsilon_i}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$ et $\hat{b}-b = (m-\hat{m})\bar{x} + \varepsilon$

On a :

$$Cov(\hat{m},\hat{b}) = E\left\{ \frac{\sum(x_i-\bar{x})\,\varepsilon_i}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\left[-\frac{\sum(x_i-\bar{x})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\,\bar{x} + \bar{\varepsilon}\right]\right\}$$

$$= E\left\{ \frac{\sum(x_i-\bar{x})\,\varepsilon_i\bar{\varepsilon}}{\sum(x_i-\bar{x})^2} - \bar{x}\,\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right\}$$

$$cov(\hat{m},\hat{b}) = \underbrace{\frac{\sum(x_i-\bar{x})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\,E(\varepsilon_i\bar{\varepsilon})}_{0} - \bar{x}\,\frac{E(\varepsilon_i^2)}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

D' où $\boxed{cov(\hat{m},\hat{b}) = -\bar{x}\,\sigma^2_{\hat{m}}}$

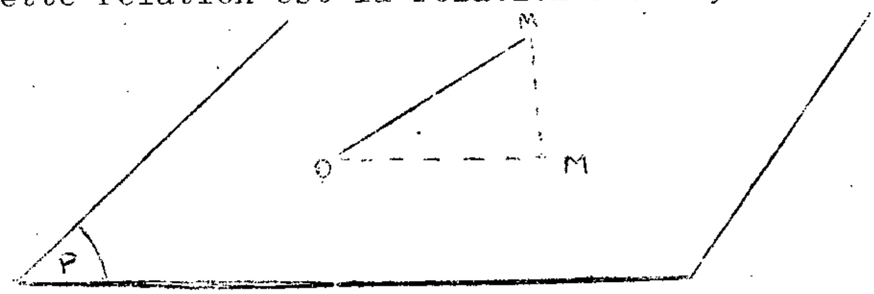
2) Estimation de ^{2}

Plaçons-nous dans un espace à n dimensions et supposons l'origine O au point $(\bar{y},\bar{y},\dots,\bar{y})$. dans cet espace le point M est le point $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ des observations; et le point ajusté M' $(\hat{y}_1,\hat{y}_2,\dots,\hat{y}_n)$ appartenant au plan.

Rendre $(y_i'-\hat{y}_i)^2$ minimum c'est prendre M' en la projection orthogonale de M sur le plan donné; alors $OM^2 = OM'^2 + M'M^2$ se traduit par la relation

$$\sum(y_i-\bar{y})^2 = \sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 + \sum(y_i-\hat{y}_i)^2$$

Cette relation est la relation d'analyse de variance



cette équation nous permet de voir que la variance résiduelle σ_ε^2 est estimé par $\dfrac{\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2}$ En effet :

$$\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2 = \Sigma\left[y_i-\bar{y}-\hat{m}(x_i-\bar{x})\right]^2 \quad \text{du fait que} \begin{cases}\hat{y}_i = \hat{m}x_i+\hat{b}\\ \text{et } \hat{b}=\bar{y}-\hat{m}\bar{x}\end{cases}$$

comme $y_i = mx_i+b+\varepsilon_i$ et $\bar{y}=m\bar{x}+b+\bar{\varepsilon}$ on aura :

$$\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2 = \sum_i\left[(m-\hat{m})(x_i-\bar{x})+\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}\right]^2$$

$$= (m-\hat{m})^2\sum_i(x_i-\bar{x})^2+\sum_i(\varepsilon_i-\varepsilon)^2+2(m-\hat{m})\Sigma(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})$$

or $\hat{m} = m+\dfrac{\Sigma(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$ (voir plus haut)

on a

$$\Sigma(x_i-\bar{x})(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon}) = (\hat{m}-m)\,\Sigma(x_i-\bar{x})^2$$

D'où

$$\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2 = (m-\hat{m})^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2+\Sigma(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})^2-2(\hat{m}-m)^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2$$

$$= \Sigma(\varepsilon_i-\bar{\varepsilon})^2-(m-\hat{m})^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2$$

$$E\left[\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2\right] = E\left\{\Sigma\varepsilon_i^2+n\bar{\varepsilon}^2-2\Sigma\varepsilon_i\bar{\varepsilon}\right\}-\Sigma(x_i-\bar{x})^2E\left\{(m-\hat{m})^2\right\}$$

$$= \sum_i E(\varepsilon_i^2)+nE(\bar{\varepsilon}^2)-2nE(\bar{\varepsilon}^2)-\Sigma(x_i-\bar{x})^2\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$$

$$= \sum_i E(\varepsilon_i^2)-nE(\bar{\varepsilon}^2)-\sigma_\varepsilon^2$$

$$= n\sigma_\varepsilon^2-nE\left[\frac{1}{n^2}(\Sigma\varepsilon_i)^2\right]-\sigma_\varepsilon^2 = n\sigma_\varepsilon^2-\frac{n}{n^2}\Sigma E(\varepsilon_i^2)-\sigma_\varepsilon^2$$

$$= n\sigma_\varepsilon^2-\sigma_\varepsilon^2-\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2(n-2).$$

D'où

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{E\left[\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2\right]}{n-2}$$

En prenant un estimateur sans biais on aura :

$$E\left[\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2\right] = \Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2$$

et

$$\boxed{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\Sigma(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2} = \sigma_\varepsilon^2}$$ estimateur sans biais de la variance résiduelle σ_ε^2

Cette variance peutt être estimée par $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{(1-\rho^2)\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-2}$

ρ étant le coeff de corrélation; en effet:

$$\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = \sum(\hat{m}x_i+\hat{b}-\hat{m}\bar{x}-\hat{b}) = \sum \hat{m}^2(x_i-\bar{x})^2$$

$$= \sum \rho^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}(x_i-\bar{x})^2 = \rho^2 \frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sum(x_i-\bar{x})^2$$

$$= \rho^2 \sum(y_i-\bar{y})^2$$

Du fait de la regression de y en x on aura $\hat{m} = \rho\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ et on aura pour la droite de regression l'équation $\hat{y}-\bar{y} = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$ r étant l'estimation de ρ.

DE l'équation de l'analyse de variance on obtient :

$$\sum(y_i-\hat{y}_i)^2 = \sum(y_i-\bar{y})^2 - \sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2$$

$$= \sum(y_i-\bar{y})^2 - \rho^2\sum(y_i-\bar{y})^2 = (1-\rho^2)\sum(y_i-\bar{y})^2$$

D'où

$$\boxed{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{(1-\rho^2)\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-2}}$$

Si on prend pour estimation de la vraie valeur , coeff de corrélation, la valeur r trouvée dans l'échantillon considéré on aura :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{(1-r^2)\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-2}$$

3) Principe de la méthode :

Etant donné un échantillon (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$; on calcul r_{xy}, $\hat{m}$, $\hat{b}$, $\sigma_{\hat{m}}$, $\sigma_{\hat{b}}$ par les formules ci-dessus et on considère

$m_1 = \hat{m} - 2\sigma_{\hat{m}}$ $\quad$ $m_2 = \hat{m} + 2\sigma_{\hat{m}}$

$b_1 = \hat{b} - 2\sigma_{\hat{b}}$ $\quad$ $b_2 = \hat{b} + 2\sigma_{\hat{b}}$

On aura ainsi dans le plan (m, b) un domaine D. La correspondance de celui-ci dans le plan des observations (X i, Y i) donne un domaine Δ limité pour les 2 droites telles que :

$$L_1 : \quad y_1 = m_2 X + b_2$$

$$L_2 : \quad y_2 = m_1 X + b_1$$

et qui sont les droites extrêmes en considérant toutes les combinaisons possibles entre m et b.

En se plaçant sur le champ des observations on regarde si tous les points sont à l'intérieur du domaine D :

- Si oui on prend pour estimation de m et b les valeurs $\hat{m}$ et $\hat{b}$

- Si non, on considère que par l'un de ces pts passe une droite qui se trouve à l'extérieur du domaine et que l'on peut l'éliminer et on refait une itération en calculant les nouvelles limites des nouveaux domaines D et Δ

Supposons que tous les points se trouvent à l'intérieur du domaine D à l'itération i à ce moment là on prend pour estimation de m et b les estimations sous biais $\hat{m}$ et $\hat{b}$ calculés de l'échantillon de la $(i-1)^{\text{ième}}$ itération.

4) LOIS DE DISTRIBUTION DE $\hat{m}$ et $\hat{b}$

Les lois de distribution de $\hat{m}$ et $\hat{b}$ sont liées aux lois suivies par les yi. Supposons que les yi suivent une loi normale ; on démontre que le vecteur aléatoire $(\hat{m}, \hat{b})$ suit une loi normale dont la matière de variance covariance est :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \mathrm{cov}(\hat{m}, \hat{b}) \\ \mathrm{cov}(\hat{m}, \hat{b}) & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^2 &= \mathrm{var}(\hat{m}) \\ \sigma_{22}^2 &= \mathrm{var}(\hat{b}) \\ \mathrm{cov}(\hat{m}, \hat{b}) &= -\bar{X}\sigma_{11}^2 \end{aligned}$$

D'où les lois marginales de $\hat{m}$ et $\hat{b}$ sont des lois normales.

II/ Méthode : construction d'un intervalle de prévision au seuil α

On considère toujours le modèle des moindres carrés $y_i = m x_i + b + \varepsilon_i$

avec $i = 1, 2, \dots, n$

$\hat{m}$ = estimateur sans biais et convergent de m

$\hat{b}$ = " " " " de b

La prévision consiste à prévoir (déterminer) la valeur y_{n+1} connaissant x_{n+1}

1/ Erreur de prévision :

A l'observation $n+1$ on a $y_{n+1} = m x_{n+1} + b + \varepsilon_{n+1}$ alors que le modèle calcule $\hat{y}_{n+1} = \hat{m} x_{n+1} + \hat{b}$; d'où l'erreur de prévision :

$$y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} = z_{n+1} = (m - \hat{m}) x_{n+1} + (b - \hat{b}) + \varepsilon_{n+1}$$

Le résidu ε_{n+1} étant une variable aléatoire, l'erreur de prévision z_{n+1} est une variable aléatoire.

D'où :

$$E(z_{n+1}) = E(\varepsilon_{n+1}) = 0$$

$$E(z_{n+1}^2) = var(z_{n+1}) = E\left\{ \left((m-\hat{m}) x_{n+1} + (b - \hat{b}) + \varepsilon_{n+1} \right)^2 \right\}$$

$$= E\left[(m-\hat{m})^2 \cdot x_{n+1}^2 + E\left[(b-\hat{b})^2\right] + E\left[(\varepsilon_{n+1})^2\right] + \cancel{2x_{n+1}} + 2x_{n+1} \operatorname{Cov}(\hat{m}, \hat{b})\right.$$

$$= \sigma_{\hat{m}}^2 \cdot x_{n+1}^2 + var(\hat{b}) + \sigma_\varepsilon^2 - 2\bar{x} \cdot x_{n+1} \sigma_{\hat{m}}^2$$

or $\sigma_{\hat{m}}^2 = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$ et $\sigma_{\hat{b}}^2 = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{n}\left[1 + \dfrac{n\bar{x}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right]$

D'où

$$E(z_{n+1}^2) = x_{n+1}^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n}\left[1 + \frac{n\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right] - 2\bar{x} \cdot x_{n+1} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \left[1 + \frac{1}{n}\right] + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\left[x_{n+1}^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x} \cdot x_{n+1}\right]$$

$$E\left[z_{n+1}^2\right] = \sigma_\varepsilon^2\left[1 + \frac{1}{n}\right] + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}(x_{n+1} - \bar{x})^2 \quad \text{avec} \quad \sigma_\varepsilon^2 = \frac{(1-\rho^2)}{n-2}\sum(y_i - \bar{y})^2$$

(voir méthode précédente)

2) Construction d'un intervalle de prévision, au seuil

On a supposé que $\varepsilon \longrightarrow N(0,I)$; d'où l'érreur de prévision est distribuer suivant une loi normale: $(Z_{n+1}) = N(0, \sigma_\varepsilon)$.

Construisons un intervalle de confiance à 95% pour la valeur Z_{n+1}:

$$Pr\ (Z_{n+1} \in (A,B)) = 0,95 \qquad (1)$$

avec :

$$A = E(Z_{n+1}) - 2\sigma_{z_{n+1}} = -2\sigma_{z_{n+1}}$$
$$B = \ \text{"} \ + \ \text{"} \ = 2\sigma_{z_{n+1}}$$

du fait que $E(Z_{n+1}) = 0$

or $Z_{n+1} = y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}$ l'équation devient

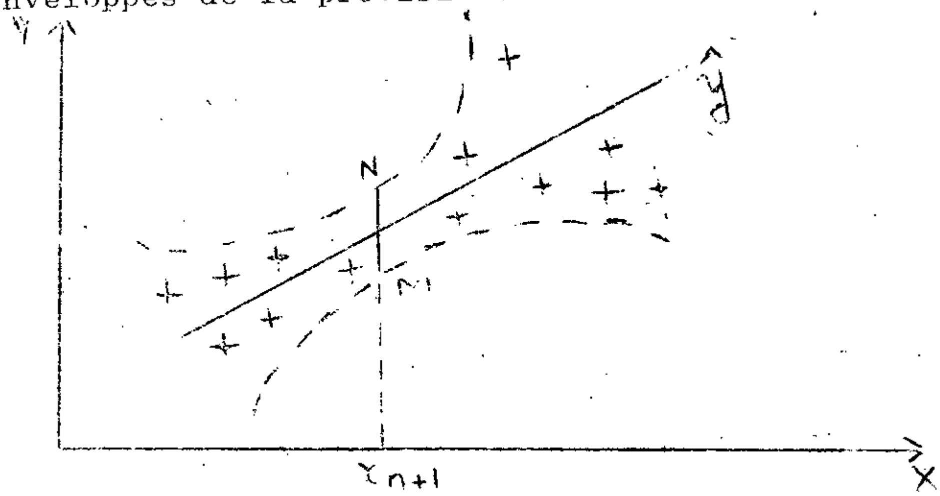
$$Pr\ (\hat{y}_{n+1} - 2\sigma_{z_{n+1}} < y_{n+1} < \hat{y}_{n+1} + 2\sigma_{z_{n+1}}) = 0,95$$

On obtient ainsi un intervalle (M,N) pour la prévision.

Au seuil de signification $\alpha = 5\%$, la prévision $y_{n+1} \in (M,N)$, intervalle symétrique, centré sur $\hat{y}_{n+1}$:

$$M = \hat{y}_{n+1} - 2\sigma_{z_{n+1}} \quad \text{et} \quad N = \hat{y}_{n+1} + 2\sigma_{z_{n+1}}.$$

Pour différentes valeurs numériques de la variable explicative x on obtient des intervalles ≠ qui permettent de tracer les courbes enveloppes de la prévision.



et au vue de ce domaine on considère que tous les pts qui se trouvent à l'exterieur (de ce domaine) peuvent être considérés comme aberrants et en les éliminant on obtient un échantillon qui représente la population et à trvers duquel on calcule les nouveaux estimateurs $\hat{m}$ et $\hat{\sigma}$, et on considère les itérations jusqu'à ce que tous les pts soient à l'intérieur de ce domaine.

Aussi pour approximer la courbe qui limite le domaine on utilise l'approximation de LAGRANGE qui consiste à remplacer dans un intervalle donné une fonction par un polynôme qui sera plus simple à manipuler. Pour cela on considère plusieurs valeurs de la variable X: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans l'intervalle; on peut calculer les n valeurs correspondantes de la fonction $f(x)$ soient: $b_1, b_2, \ldots, b_n$. On peut aussi définir un polynôme $P(x)$ de degré $(n-1)$ prenant les mêmes valeurs que la fonction pour les différentes valeurs de la variable.

Si on considère le polynôme $Q(x)$ de degré n:

$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) = (x-a_i)$; la fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ peut être décomposée en élément simples soit:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n} = \sum \frac{A_i}{x-a_i}$$

D'où : $$P(x) = Q(x) \sum \frac{A_i}{x-a_i} = \prod_{s \neq i} (x-a_s) \sum \frac{A_i}{x-a_i}$$

Si on fait $x=a_j$ dans l'expression ci-dessus, $P(x)$ prend la valeur b_j tandis que le 2ième membre est constitué de termes nuls à l'exception du terme d'indice $i=j$ soit:

$b_j = A_j (a_j-a_1)(a_j-a_2)\ldots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\ldots(a_j-a_n)$ où

$A_j = \dfrac{b_j}{\prod\limits_{\substack{s=1 \\ s \neq j}} (a_j-a_s)}$; on peut alors la formule de LAGRANGE:

$$P(x) = \sum_i b_i \frac{\prod_s (x-a_s)}{\prod_{s \neq i} (a_i-a_s)}$$

III Méthode utilisant l'explication de la variance de y

On considère toujours le modèle $y_i = mx_i + b +$; le champ d'hypothèses étant le même que pour les méthodes précédantes on aura (en considérant $m = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$)

$$y_i = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x_i + b + \varepsilon_i \Longrightarrow Y = \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} X + b + \varepsilon$$

D'où :

$$\mathrm{var}(Y) = \rho^2 \sigma^2_y + u^2$$

avec:

$\rho^2\sigma^2_y$: partie imputable à la variable X et qui se trouve donc expliquée par l'estimation $\hat{Y}$de Y en X.

$u^2 = S^2_{Y/X}$: variance residuelle non expliquée.

1) Calcul de u^2:

On calcule u^2 en considérant la définition du coeff de corrélation:

$$r^2 = \frac{\sum(Y_{est} - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

or $\sum(Y_i-\bar{Y})^2 = \sum(Y_i - Y_{est} + Y_{est} - \bar{Y})^2 = \sum(Y_i - Y_{est})^2 + \sum(Y_{est} - \bar{Y})^2$

du fait que $\sum(Y_i - Y_{est})(Y_{est} - \bar{Y}) = 0$ (équations normales)

Donc

$$r^2 = \frac{\sum(Y_i-\bar{Y})^2 - \sum(Y_i - Y_{est})^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum(Y_i - Y_{est})^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2}$$

$$= 1 - \frac{S^2_{Y/X}}{S^2_Y}$$

d'où $S^2_{Y/X} = (1-r^2)\, S^2_Y$

2) Formule complète de l'estimation :

Le residu correspondant à $\varepsilon = Y - Y'$ avec $Y' = m X + b$

m et b étant les valeurs données par la méthode des moidres carrés.

ε et une variable aléatoire avec $E(\varepsilon) = 0$ et $E(\varepsilon^2) = u^2 = S_y^2 (1 - r^2)$;
lequel est un résidu quadratique moyen, a la même nature qu'un écart type ; mais alors que dans le calcul de S_y les écarts sont comptés par rapport à $\bar{y}$, ils le sont (dans celui de u) comptés par rapport aux estimations Y'.

En définitive la relation entre Y et X s'écrit : $Y = MX + b + \varepsilon$

En supposant $\varepsilon \to N(0, u^2)$ on peut considérer que la quasi totalité des points se trouve entre les 2 droites :

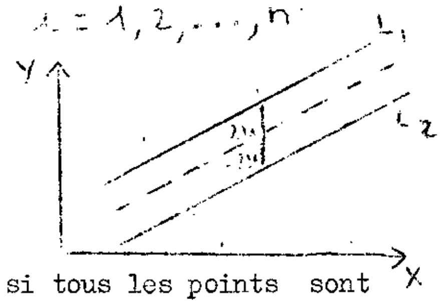
$$\left.\begin{array}{l} L_1 : Y' = \hat{m}X + \hat{b} + 2u \\ L_2 : Y' = \hat{m}X + \hat{b} - 2u \end{array}\right\}$$ et ceci avec une probabilité de 0,95

avec $$\hat{m} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{et} \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{m}\bar{x}$$

Une liaison stochastique peut donc se traduire par une bande d'autant plus étroite que r est voisin de ± 1 ;
ce qui nous permet d'éliminer des points et de refaire des itérations en évaluant chaque fois le degré de la liaison et par là même les coefficients à estimer $\hat{m}$ et $\hat{b}$, toujours par la méthode des moindres carrés.

3) PRINCIPE DE LA METHODE

Etant donné un échantillon (x_i, y_i) $i = 1, 2, \ldots, n$
- On calcule $\hat{m}$, $\hat{b}$, S_y, u.
- Chercher les droites limites pour 95 %



- La règle de décision consiste à voir si tous les points sont à l'intérieur de la bande limitée par L_1 et L_2

— Si oui prendre pour estimation des coefficients les valeurs calculées $\hat{m}$ et $\hat{b}$.

— Sinon éliminer ces pts et refaire les itérations jusqu'au moment où on se trouve dans le cas précédent.

IV/ Méthode de l'ellipse :

Dans cette méthode on considère X et Y comme variables aléatoires pour éliminer les points aberrants.

En considérant le vecteur $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (espace des observations) comme un vecteur gaussien c'est-à-dire que :

$$M \to N_2(\bar{m}, \Lambda') \quad \text{avec } \bar{m} = \begin{pmatrix} E(x) \\ E(y) \end{pmatrix}$$ et Λ' matrice de variance covariance

ou encore en supposant que les lois marginales de X et Y sont des lois normales :

$X \to N(E(x), \sigma_X^2)$ et $Y \to N(E(y), \sigma_Y^2)$

en faisant le changement de variable $Z = \dfrac{X - E(X)}{\sigma_X} \to N(0,1)$

$Q = \dfrac{Y - E(Y)}{\sigma_Y} \to N(0,1)$

Le vecteur $M\begin{pmatrix} Z \\ Q \end{pmatrix}$ est distribué suivant $N_2(0, \Lambda)$ avec $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$

où 0 est le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et ρ le coefficient de corrélation ρ_{xy}

on peut écrire la fonction de densité :

$$h(z,q) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \, e^{-\frac{1}{2}\, {}^tM \Lambda^{-1} M'}$$

avec $\Lambda^{-1} = \dfrac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}$ on a ${}^tM \Lambda^{-1} M' = \dfrac{1}{1-\rho^2}\left[z^2 + q^2 - 2\rho z q \right]$

D'où, en reprenant les variables x et y, on aura :

$$h(x,y) = \frac{1}{\cancel{\sigma}\cancel{\sigma} \cdot 2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x-E(x))^2}{\sigma_x^2} + \frac{(Y-E(Y))^2}{\sigma_Y^2} - 2\rho\frac{(x-E(x))(y-E(y))}{\sigma_X\sigma_Y}\right]}$$

D'où la variable aléatoire

$$T = \sqrt{\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x-E(x))^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-E(y))^2}{\sigma_y^2} - 2\rho\frac{(x-E(x))(y-E(y))}{\sigma_x\sigma_y}\right]}$$

est une variable normale.

Ainsi : $P_r\left[|T| < t\right]$ est lu sur une table normale pour une valeur de t fixée.

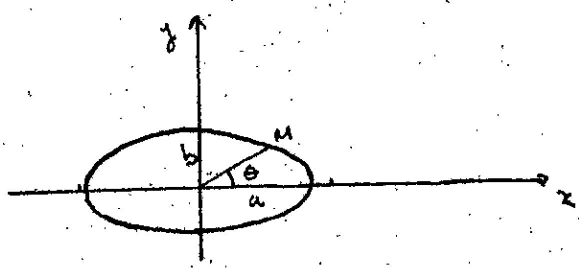
En considérant $|T| = t$ on aura :

$$(1)\quad \frac{(X-E(X))^2}{\sigma^2_X} + \frac{(Y-E(Y))^2}{\sigma^2_Y} - 2\rho\,\frac{(X-E(X))(Y-E(Y))}{\sigma_X \sigma_Y} = (1-\rho^2)\,t^2$$

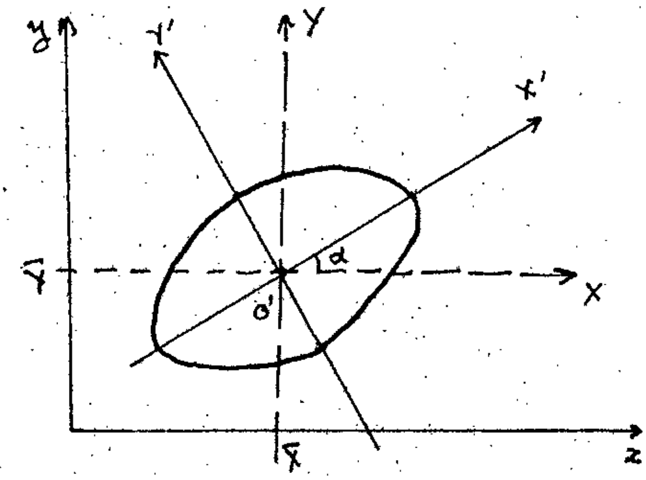
Cette équation représente une ellipse centrée en $(E(X), E(Y))$ et faisant un certain angle α avec les axes centrés en $(\bar{X}, \bar{Y})$

Cette ellipse sera estimée grace au paramètres : $\bar{X}, \bar{Y}, \hat{\sigma}_X, \hat{\sigma}_Y$

1). Calcul de α ; a (grand axe de l'ellipse) ; b (petit axe)



$x = a\cos\theta$
$y = b\sin\theta$



Les formules de passages de X' à X et de Y' à Y (du fait de la rotation $R(O', \alpha)$) donnent :

$X = X'\cos\alpha - Y'\sin\alpha$ or $x = X + \bar{X}$
$Y = X'\sin\alpha + Y'\cos\alpha$ $\quad y = Y + \bar{Y}$ } translation de O à O'

D'où :

$x = \bar{X} + X'\cos\alpha - Y'\sin\alpha$

$y = \bar{Y} + X'\sin\alpha + Y'\cos\alpha$

En considérant l'ellipse E_1 on aura $X' = a\cos\theta$ et $Y' = b\sin\theta$

D'où : $x = \bar{X} + a\cos\theta\cos\alpha - b\sin\theta\sin\alpha$

$y = \bar{Y} + a\cos\theta\sin\alpha + b\sin\theta\sin\alpha$

or l'équation (1) peut s'écrire:

$$A(X-\bar{X})^2 + 2B(X-\bar{X})(Y-\bar{Y}) + C(Y-\bar{Y})^2 + F = 0$$

avec : $A = 1/\sigma_x^2$; $B = -\rho/\sigma_x\sigma_y$; $C = 1/\sigma_y^2$; $F = -(1-\rho^2)\ t^2$

En considérant le repère (X',Y') cette équation devient

$A'X'^2 + 2\ B'\ X'Y' + C'\ Y'^2 + F = 0$ et en faisant $B'=0$ on aura la valeur de l'angle α

$$A\ X^2 = A(\ X'\cos\alpha - Y'\sin\alpha\ )^2 = A(\ X'^2\cos^2\alpha + Y'^2\sin^2\alpha - 2X'Y'\cos\alpha\ \sin\alpha$$

$$CY^2 = C(X'\sin\alpha + Y'\cos\alpha)^2 = C(X'^2\sin^2\alpha + Y'^2\cos^2\alpha + 2X'Y'\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$2BXY = 2B(X'\cos\alpha - Y'\sin\alpha)(X'\sin\alpha + Y'\cos\alpha)$$

$$= 2B\ (X'^2\cos\alpha\ \sin\alpha - Y'^2\sin\alpha\cos\alpha - X'Y'\sin^2\alpha + X'Y'\cos^2\alpha\ )$$

$$AX^2 + CY^2 + 2BXY = X'^2(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha) + Y'^2(\ A\ \sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha) + 2X'Y'\ (\ -A\cos\alpha\sin\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha - B\sin^2\alpha + B\ \cos^2\alpha\ )$$

$$= A'X'^2 + C'Y'^2 + 2B'\ X'Y'$$

avec :

$$A' = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + 2\ B'X'Y'$$

$$B' = (C-A)\cos\alpha\sin\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\ \sin(2\alpha).\ (C-A) + B\ \cos 2\alpha$$

$$C' = A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha$$

D'où le calcul de en faisant $B'=0$

$$\sin 2\alpha = \frac{-2B}{C-A}\cos 2\alpha \longrightarrow \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}$$

et $\boxed{= \frac{1}{2}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2B}{A-C}\right)}$ A,B,C étant des ctes

D'où l'équation (1) devient:

$$A'X'^2 + C'Y'^2 + F = 0 \text{ c-à-d } \quad \frac{X'^2}{-\frac{F}{A'}} + \frac{Y'^2}{-\frac{F}{C'}} - 1 = 0$$

équation d'une ellipse dont les axes sont déterminés par:

$$a^2 = -\frac{F}{A'} \Rightarrow a = \sqrt{-\frac{F}{A'}} = \sqrt{\frac{t^2(1-r^2)}{A'}}$$

(grand Axe)

$$b^2 = -\frac{F}{C'} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{t^2(1-r^2)}{C'}} \text{ (petit Axe).}$$

En annexe se trouve un programme qui permet de faire ces calculs et le tracé de l'éllipse pour les différentes valeurs de t.

2) PRINCIPE DE LA METHODE :

Vérifier que les lois marginales de X et Y sont normales

Si oui construire l'éllipse correspondante en se fixant t ; et la règle de décision est la suivante :

On regarde dans le plan des observations (X, Y) s'il existe des pts à l'extérieur de l'éllipse :

- Sinon prendre pour estimateur de m et b les valeurs données par l'échantillon les valeurs

$$m = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{et} \quad b = \bar{Y} - m\bar{X}$$

- Si oui éliminer ces points et refaire les itérations jusqu'au moment où on est dans le cas précédent.

En prenant

$$t = 2 \quad \text{on a} \quad p = 0{,}95 \quad (\alpha = 5\%)$$

CONCLUSION SUR LES METHODES UTILISEES

1) Dans les méthodes précédentes on a utilisé comme courbes de regression : les courbes qui cherchent à minimiser la somme des carrés des écarts pour résumer au moyen de 2 paramètres (m, b) un ensemble de points (X_i, Y_i) à peu près linéaire (nuage filiforme).

La méthode des moindres carrés perd alors pratiquement toutes ses justifications probalistes, néanmoins elle présente l'intérêt de conduire à un résumé objectif, préférable dans la pratique à un ajustement graphique toujours subjectif : ajustement mécanique d'une droite à un ensemble de pts disposés à peu près linéairement.

Dans cette troisième optique on a proposé d'autres méthodes d'ajustement que celles des moindres carrés qui fournit la droite d'ajustement de Y en X.

a) Méthode conduit à la détermination de la droite qui rend minimum la somme des valeurs absolues :

$$\sum | y_i - m x_i - b |$$

Cette méthode, qui a l'intérêt de donner un poids moindre aux couples (X_i, Y_i) aberrants, puisqu'elle fait intervenir la puissance 1 des écarts et non la puissance 2, conduit à des calculs inextircables sur le plan algébrique et doit, pour cette raison, être abandonnée.

b) Méthode de l'ajustement orthogonal :

Cette méthode conduit à lé déteminātion de la droite Δ qui rend la somme des carrés des écarts comptés $\perp$ à la droite.

Un reproche majeur que l'on peut faire à cette méthode est sa sensibilité aux changements d'origine d'échelle ; alors que les droites d'ajustement sont invariantes par changement d'origine et d'échelle :

$$\Delta : \quad \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = r \, \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}$$

puisqu'on variablèréduite son équation fait intervenir le rapport $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$;
par conséquent suivant le choix des unités qu'on retient pour mesurer X et Y' on obtient une droite D différente.

En outre cette méthode ne possède pas de justification probabiliste.

D'où on admettra que la meilleure représentation d'un ensemble de points est fournie par la droite dont la somme des carrés des distances aux divers points est minimale ; ces distances étant comptées parallèlement à OY. Une telle droite est une droite d'estimation de Y en X.

2) Pour l'élimination des pts aberrants on s'est servi des résultats acquis dans le processus de contrôle de fabrication.

- Dans la méthode des droites en biaison a considéré le domaine $\varphi : \{m, b\}$ à 2σ ceci pour évaluer un risque α dans le cas où les Yi sont des variables normales.

- La méthode : construction d'un intervalle de prévision au risque α, du pt de vue théorique elle est très rigoureuse mais elle n'a aucune utilisation pratique du fait de la construction de la courbe envellope.

- La méthode de l'éllipse est applicable seulement dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires et qui suivent des lois normales.

3) Nous n'insistons pas sur l'intérêt des calculs de corrélation (ou si l'on préfère de regression) ; ils permettent, par une confrontation judicieuse des observations de suppléer à l'expérimentation ; ainsi à la démarche des sciences expérimentales : observation $\rightarrow$ hypothèses $\rightarrow$ expérimentation est venu se substituer le processus : observation $\rightarrow$ hypothèses - traitement statistipes des observations.

Mais, pas plus que l'expérimentation, les calculs de corrélation ne sauaient se suffir à eux-mêmes, ils permettent simplement, de mettre en évidence et de mesurer des concomitances ; or de telles concomitances peuvent apparaitre, par l'effet du hasard, entre deux phénomènes foncièrement indépendants d'où il faut faire un test de signification sur le coefficient de corrélation.

ECHANTILLON 51

$r_{xy} = 0{,}8034$
$b = -2{,}058$
$m = 0{,}531$

$\bar{x} = 57{,}35$
$s_x = 14{,}68$

$\bar{y} = 28{,}24$
$s_y = 9{,}55$

	X	Y
1	55	31
2	49	29
3	45	23
4	57	24
5	48	24
6	56	25
7	73	29
8	63	27
9	69	29
10	74	30
11	64	30
12	69	29
13	47	28
14	64	29
15	46	32
16	58	36
17	63	30
18	45	21
19	84	31
20	63	26
21	59	25
22	74	32
23	64	28
24	82	31
25	74	30
26	64	31
27	45	26
28	84	54
29	73	48
30	89	57
31	73	48
32	66	40
33	54	28
34	38	17
35	38	17
36	34	12
37	48	24
38	39	17
39	62	32
40	40	17
41	43	17
42	42	18
43	36	13
44	40	16
45	44	19
46	38	21
47	39	24
48	55	30,5
49	64	38,5
50	74,5	38
51	70	43

ECHANTILLON 31

r_{xy} = 0,9276
m = 0,756
b = −11,702

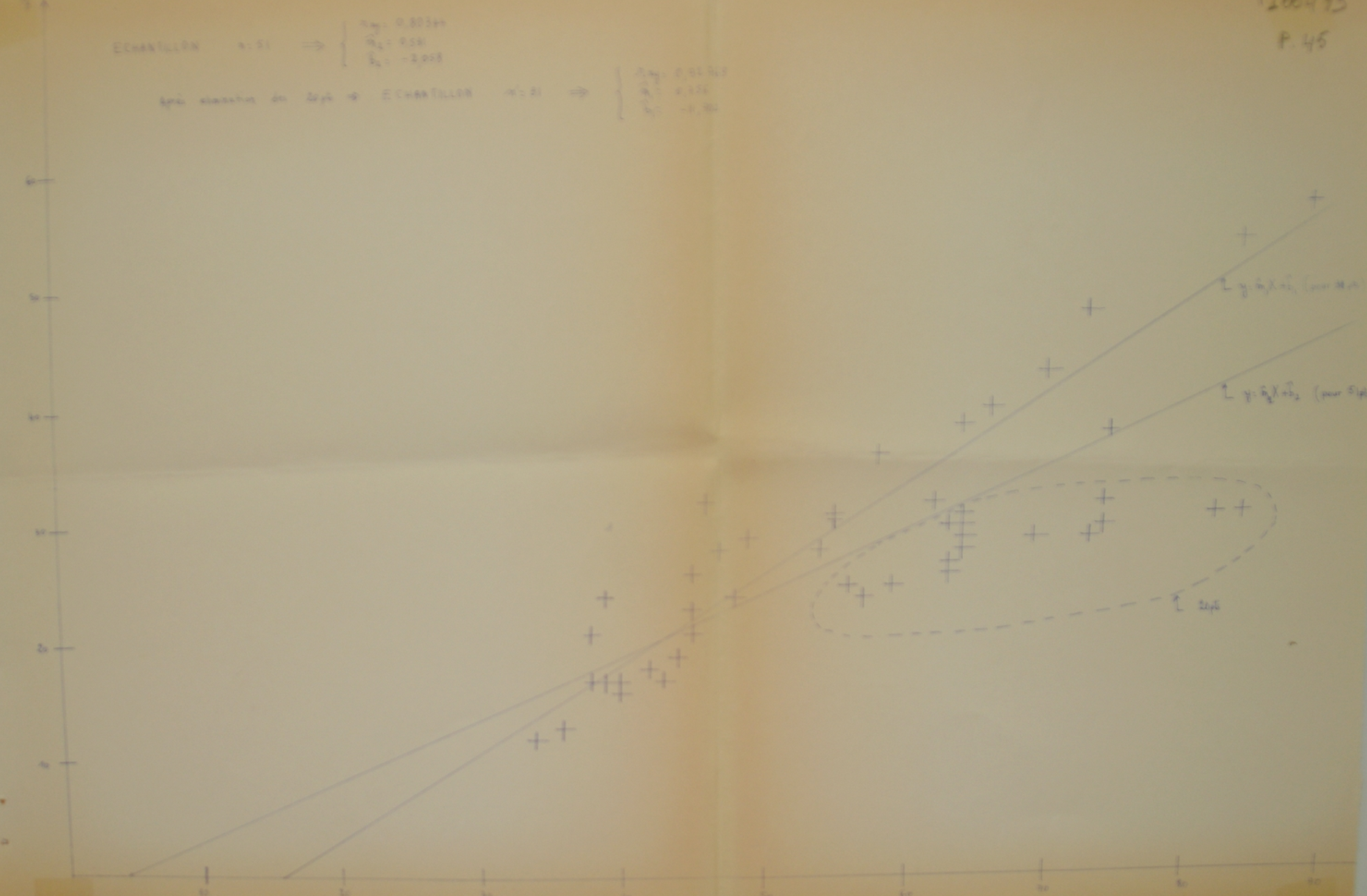
$\bar{x}$ = 49,266 $\bar{y}$ = 25,533
S_x = 12,323 S_y = 10,040

Cet échantillon est obtenu en éliminant 20 pts de l'échantillon 51 jugés aberrants (voir échantillon 51)

	X	Y
1	45	21
2	55	31
3	49	29
4	45	23
5	48	24
6	56	25
7	57	24
8	64	30
9	47	28
10	46	32
11	58	36
12	45	26
13	89	57
14	73	48
15	66	40

	X	Y
16	54	28
17	38	17
18	38	17
19	34	12
20	48	24
21	39	17
22	40	17
23	62	32
24	43	42
25	36	13

	X	Y
26	42	18
27	40	16
28	44	19
29	38	21
30	39	27
31	55	30,5


ECHANTILLON n = 51
ECHANTILLON n' = 21

ECHANTILLONS A 5I OBSERVATIONS ET A 3I OBSERVATIONS

La variable Y représente la caractéristique Ip qui est l'indico de plasticité défini précédemment.

La variable X représente la caractéristique Wl ou limite de liquidité. En mécanique des sols on montre qu'il existe une relation Ip =f(Wl). linéaire :

L'échantillon 3I est tiré de l'échantillon 5I par élimination de 20 observations (représentées par des points) jugées comme aberrantes.

APPLICATION DES TESTS SUR LES ECHANTILLONS 5I ET 3I :

Les tests sur la normalité des variables X et Y sont vérifiés (voir tableaux)

I/ Echantillon 5I

a) Test sur le coefficient de corrélation : Test de r à ρ=o

On ne peut appliquer la I° méthode du fait que r=0,8034

La 2° méthode donne :

$$t = \frac{|z' - 0|}{\sigma_{z'}} = |z'|\sqrt{n-3}$$

pour r=0,8034 la table de Fisher donne Z'=I,I08
d'où t=I,I08x6,92=7,667

comme t $\rightarrow$ N(0,I) on a t_α =I,96 (α =5 %)

On remarque que $t > t_\alpha$: la vraie valeur de ρ est différente de 0 (5 % de risque). Il existe donc une corrélation linéaire de Y et X.

— Par la 3ième méthode on aura

$\nu = n-2 = 51 - 2 = 49$

Pour $\alpha = 5\%$, la table de distribution de **r** nous donne

$r_\alpha = 0,276$; or pour $n = 51$ le coeff calculé est

$r = 0,8034$:

$r > r_\alpha$; on en déduit que la vraie valeur de ρ est différente de 0 (en prenant un risque $\alpha = 5\%$): il existe donc une relation linéaire entre X et Y.

b) Test de sur les variables X et Y (voir tableau).

2) <u>Echantillon n=31</u>

Test sur le coeff de corrélation:

(comparaison de r à $\rho = 0$)

- La 2° méthode nous donne:

$$t = \frac{z' - 0}{\sigma_{z'}} = z'\sqrt{n-3} = z'\sqrt{28}$$

pour $r = 0,9276$ la table donne $z' = 1,649$ d'où $\underline{\underline{t = 8,723}}$;

comme $t \dashrightarrow N(0,1)$ pour $\alpha = 5\%$ on a $t_\alpha = 1,96$

On remarque que $t > t_\alpha$: on peut affirmer avec risque $\alpha = 5\%$ que $\rho \neq 0$; il existe donc une relation linéaire entre X et Y.

- La 3° méthode nous donne :

$\nu = 29$ $\alpha = 5\%$ $r_\alpha = 0,3557$

or $r = 0,9276$ d'où $r > r_\alpha$: même conclusion que la 2° métho

3) <u>Test d'homogeneité des échantillons n= 51 et n= 31</u>:

Ce test est basé sur la comparaison des coeff de corrélation $r_1 = 0,8034$ et $r_2 = 0,9272$ qui correspondent aux 2 échantillons $n_1 = 51$ et $n_2 = 31$.

On considère la variable $t = \frac{z'_1 - z'_2}{\sigma_{z'_1 - z'_2}}$

or $\sigma_{z'_1 - z'_2} = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}$ en supposant que les 2 échantillons sont indépendants.

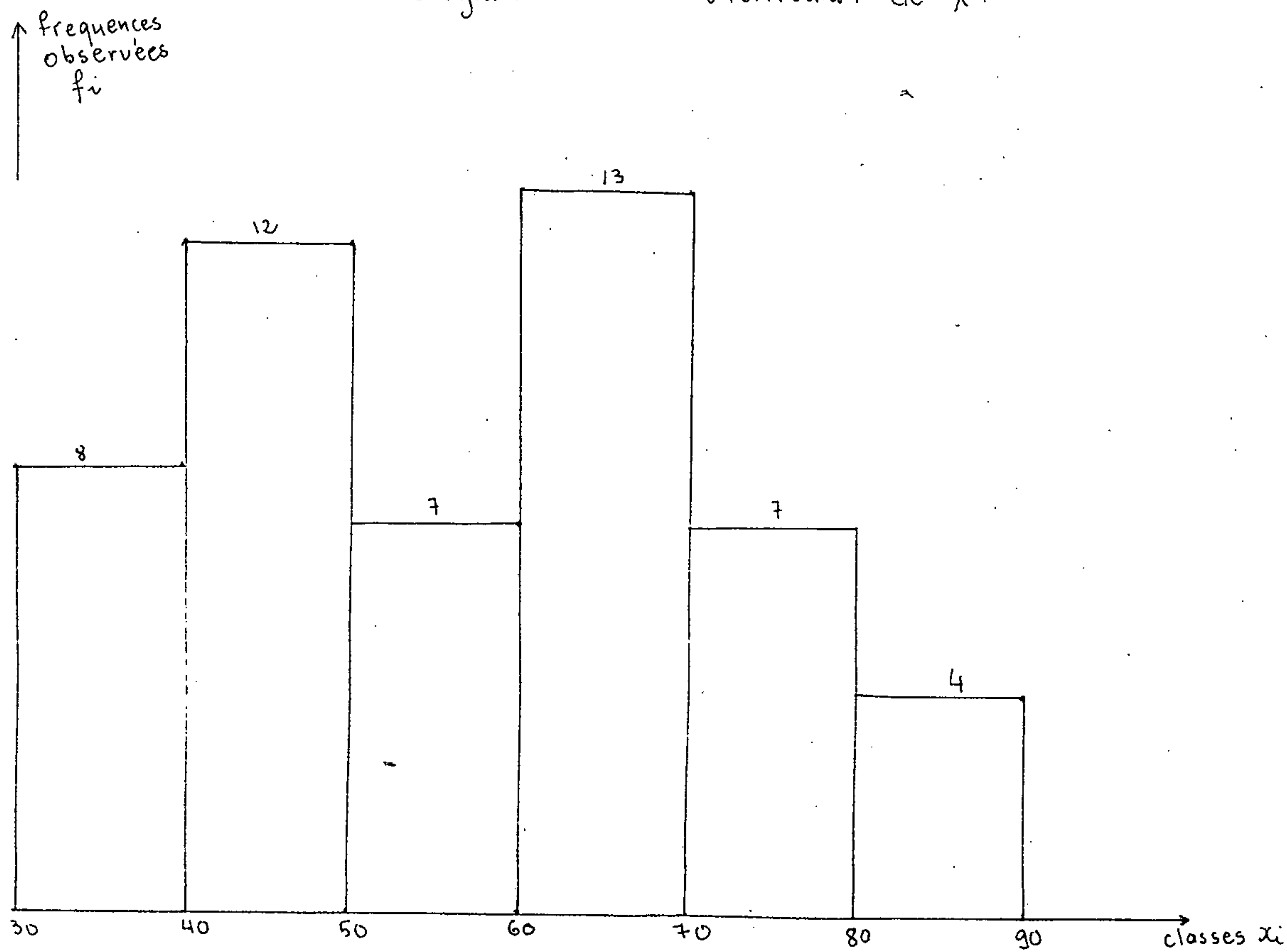
d'où $\sigma_{z'_1 - z'_2} = \sqrt{\frac{1}{48} + \frac{1}{28}} = 0,241$

$$\left.\begin{array}{l} \text{pour } r_1 = 0,8034 \text{ on a } z' = 1,649 \\ \phantom{\text{pour }} r_2 = 0,9276 \text{ on a } z' = 1,108 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{t = 2,24}}$$

Or $t \dashrightarrow N(0,1)$; pour $\alpha = 5\%$ on a $t_\alpha = 1,96$; on remarque $t > t_\alpha$ d'où la différence $r_1 - r_2$ est significative et on ne peut admettre que les 2 échantillons proviennent de la même population .

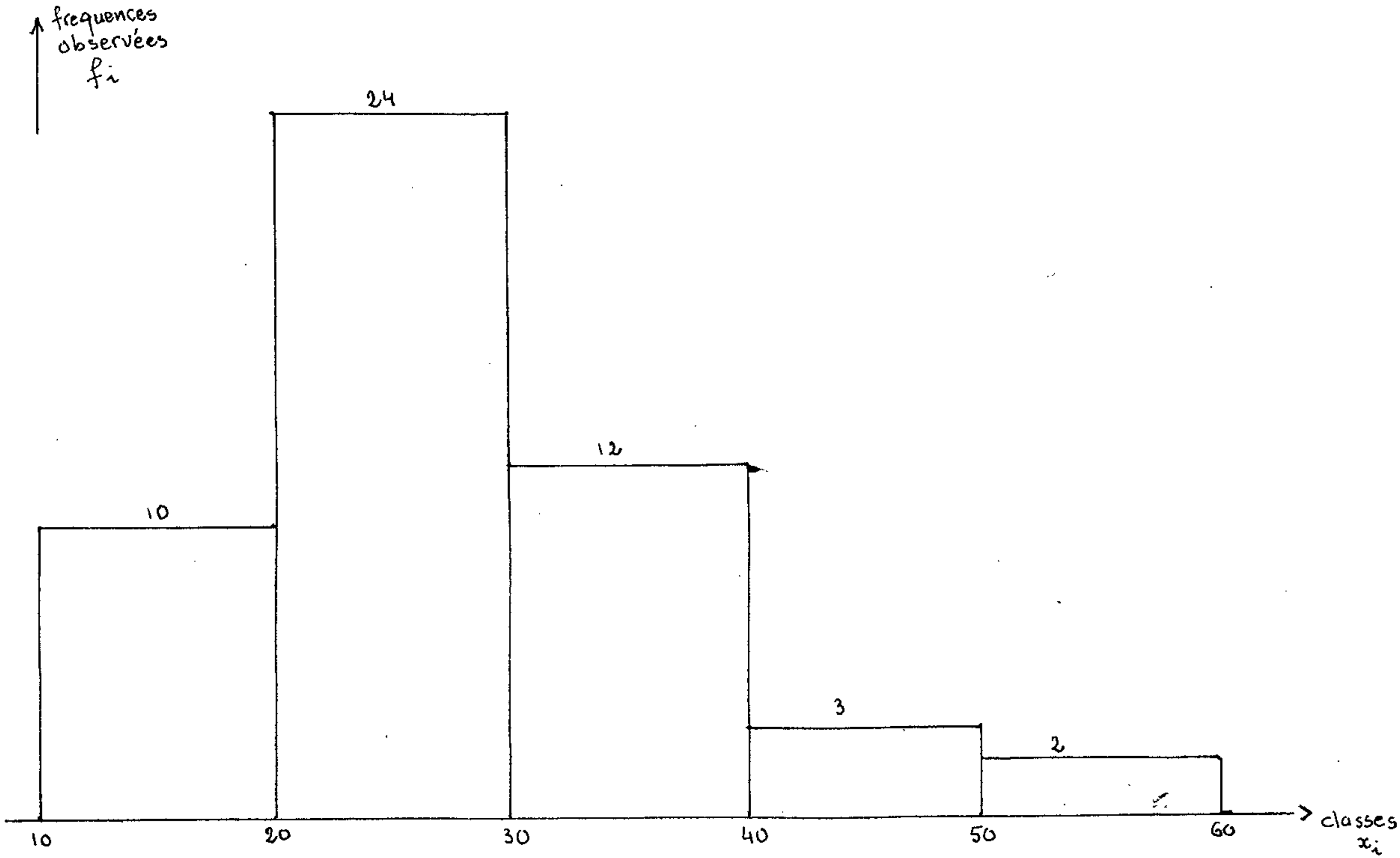
ECHANTILLON 51

Histogramme de la distribution de X.



ECHANTILLON 51

Histogramme de la distribution empirique de la variable Y



Echantillon 31

Test de χ^2 pour X et Y

$\bar{x} = 49\,266$

$S_x = 12,323$

Pour $\alpha = 1\%$ et $\nu = (4-1)-2 = 1$

on a

$\chi^2_{\alpha,\nu} = 6,635$

on remarque : $\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,\nu}$

d'où la différence entre la distribution empirique et la loi Normale n'est pas Significative

Classes	$t_i = \frac{x - 49,266}{12,323}$		$\pi(t)$		$p_i = \pi(t_i) - \pi(t_{i-1})$	Np_i	n_i	$n_i - Np_i$	$(n_i - Np_i)^2$	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{}$
	t_{i-1}	t_i	$\pi(t_{i-1})$	$\pi(t_i)$						
10-40	-1,5635	-0,752	0,0591	0,226	0,1669	5,1739	9	3,8261	14,639	2,8294
40-50	-0,752	0,0595	0,226	0,5202	0,2942	9,1202	11	1,8798	3,5336	0,3875
50-60	0,0595	0,871	0,5202	0,808	0,2878	8,9218	6	-2,9218	8,5369	0,9569
60-90	0,871	3,3055	0,808	0,9996	0,1916	5,9396	5	-0,9396	0,8828	0,1486

$\Sigma = 31$ $\chi^2_c = 4,3224$

$\bar{y} = 25,533$

$S_y = 10,0403$

Pour $\alpha = 1\%$ et $\nu = (4-1)-2 = 1$

on a

$\chi^2_{\alpha,\nu} = 6,635$

on remarque : $\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,\nu}$

d'où la différence entre la distribution empirique et la loi Normale n'est pas significative.

Classes	$t_i = \frac{y - 25,533}{10,0403}$		$\pi(t)$		$p_i = \pi(t_i) - \pi(t_{i-1})$	Np_i	n_i	$n_i - Np_i$	$(n_i - Np_i)^2$	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
	t_{i-1}	t_i	$\pi(t_{i-1})$	$\pi(t_i)$						
10-20	-1,5471	-0,5511	0,061	0,2909	0,2299	7,1269	10	2,8731	8,2547	1,1582
20-25	-0,5511	-0,0531	0,2909	0,4789	0,1880	5,828	8	2,172	4,7175	0,8094
25-30	-0,0531	0,4449	0,4789	0,6714	0,1925	5,9675	5	-0,9675	0,936	0,1568
30-60	0,4449	3,4328	0,6714	0,99959	0,3281	10,1738	8	-2,1738	4,7264	0,4644

$\Sigma = 31$ $\chi^2_c = 2,7285$

Echantillon 51

Test de χ^2 pour X et Y

$\bar{y} = 28,24$
$s_y = 9,5496$

Classes	$t_i = \frac{y - 28,24}{9,5496}$		$\Pi(t)$		$p_i = \Pi(t_i) - \Pi(t_{i-1})$	Np_i	n_i	$n_i - Np_i$	$(n_i - Np_i)^2$	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
	t_{i-1}	t_i	$\Pi(t_{i-1})$	$\Pi(t_i)$						
10 - 20	-1,91	-0,8629	0,0281	0,1944	0,1663	8,4813	10	1,5187	2,3064	0,2719
20 - 25	-0,8629	-0,3393	0,1944	0,3673	0,1729	8,8179	9	0,1812	0,033	0,0037
25 - 30	-0,3393	0,1843	0,3673	0,5729	0,2056	10,4856	15	4,5144	20,3798	1,9436
30 - 35	0,1843	0,7079	0,5729	0,7601	0,1872	9,5472	8	-1,5472	2,3938	0,2507
35 - 40	0,7079	1,2315	0,7601	0,8908	0,1307	6,6657	4	-2,6657	7,106	1,066
40 - 60	1,2315	3,3258	0,8908	0,99954	0,1087	5,5457	5	-0,5457	0,2977	0,0536

$\Sigma = 51$ $\chi^2_c = 3,5895$

Pour $\alpha = 1\%$ et $\nu = (6-1)-2 = 3$
on a
$$\chi^2_{\alpha,\nu} = 11,341$$

or $\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,\nu}$

d'où la différence entre la distribution empirique et la loi Normale n'est pas significative

$\bar{x} = 57,35$
$s_x = 14,6803$

Classes	$t_i = \frac{x - 57,35}{14,6803}$		$\Pi(t)$		$p_i = \Pi(t_i) - \Pi(t_{i-1})$	Np_i	n_i	$n_i - Np_i$	$(n_i - Np_i)^2$	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
	t_{i-1}	t_i	$\Pi(t_{i-1})$	$\Pi(t_i)$						
30 - 40 40 - 50	-1,863	-0,500	0,0312	0,3085	0,2773	14,1423	20	5,8577	34,3126	2,4262
50 - 60	-0,5	0,1801	0,3085	0,5714	0,2629	13,4079	7	-6,4079	41,0612	3,0625
60 - 70	0,1801	0,874	0,5714	0,8089	0,2375	12,1125	13	0,8875	0,7877	0,065
70 - 90	0,874	2,2241	0,8089	0,9869	0,1780	9,078	11	1,922	3,694	0,4068

$\Sigma = 51$ $\chi^2_c = 5,9605$

Pour $\alpha = 1\%$ et $\nu = (4-1)-2 = 1$
on a
$$\chi^2_{\alpha,\nu} = 6,635$$

or $\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,\nu}$

d'où : la différence entre la distribution empirique et la loi Normale n'est pas significative.

51

ECHANTILLON 91

$r_{xy} = 0,8325$
$m = 0,548$
$b = -0,971$

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	77	49
7	70	43
8	33	14
9	66	38
10	41	20
11	66	33
12	72	45
13	54	30
14	52	28
15	35	20
16	68	31
17	46	26
18	48	23
19	50	28
20	54	30
21	54	30
22	40	19
23	69	41
24	35	15
25	63	36
26	51	30
27	53	29
28	65	37
29	75	51
30	35	17

	X	Y
31	50	31
32	27	11
33	57	28
34	46	23
35	39	24
36	55	30,5
37	64	38,5
38	42,5	17,5
39	74,5	38
40	70	43
41	82	31
42	74	30
43	64	29
44	46	32
45	58	24
46	63	30
47	45	21
48	84	31
49	63	26
50	59	25
51	74	32
52	64	28
53	79	29
54	63	27
55	69	29
56	74	30
57	64	30
58	69	29
59	47	28
60	64	29

	X	Y
61	48	24
62	56	35
63	45	23
64	55	31
65	49	29
66	45	26
67	73	48
68	66	40
69	54	28
70	38	17
71	35	21
72	48	24
73	62	32
74	30	16
75	67	41
76	42	23
77	74	44
78	48	27
79	36	20
80	54	29
81	50	25
82	52	32
83	63	35
84	64	37
85	31	16
86	54	28
87	46	26
88	84	54
89	89	57
90	73	48
91	66	40

E C H A N T I L L O N $n = 91$

Les variables X et Y représentent les mêmes caractéristiques que dans les échantillons n=51 et n=31.

Y: I_p (indice de plasticité)

X: W_L (limite de liquidité);

avec $I_p = m\, W_L + b$

APPLICATION DES DIFFERENTS TESTS:

1) Les tests sur la normalité de X et Y sont donnés par les tableaux ci-joint.

2) Test sur le coeff de corrélation (comparer r à $\rho=0$)

- On ne peut appliquer la 1° méthode du fait que r= 0,8325
- La 2° méthode nous donne :

pour r= 0,8325 la table de FISHER donne z'= 1,196, d'où t= 11,218.

Comme $t \dashrightarrow N(0,I)$, pour $\alpha=5\%$ on a $t_\alpha = 1,96$; on remarque que $t > t_\alpha$: on peut affirmer que la vraie valeur de ρ est $\neq 0$ et qu'il existe une corrélation linéaire entre X et Y.

-La 3° méthode donne :

pour $\alpha=5\%$ et $\nu=89$ $r_\alpha = 0,2062$.

On remarque que $r > r_\alpha$ d'où on arrive à la même conclusion que pour la 2° méthode.

3) Test d'homogéneité des échantillons N=31 et N=91 :

Pour cela on considère les coeff de corrélation des 2 échantillons: $r_1 = 0,9276$ et $r_2 = 0,8323$; et on considère la variable :

$$t = \frac{|z'_1 - z'_2|}{\sigma_{z'_1 - z'_2}}$$

Pour $r_2=0,8323$ on a z'=1,196 et pour r_1 on a z'=1,649; d'où $|z'_1 - z'_2| = 0,453$ et $\sigma_{z'_1-z'_2} = 0,216$.

D'où t = 2,087, or $t \dashrightarrow N(0,I)$ pour $\alpha=5\%$ on a $t_\alpha = 1,96$

On remarque que $t > t_\alpha$ d'où la différence $r_1 - r_2$ est significative et les 2 échantillons ne sont pas issus de la même population.

4) Test d'homogéneité des échantillons n=51 et n=91

Pour cela on considère les coeff de corrélation $r_1=0,8034$ et $r_2= 0,8325$.

A r_1 correspond $z'_1 = 1,108$; et à r_2 correspond $z'= 1,196$.

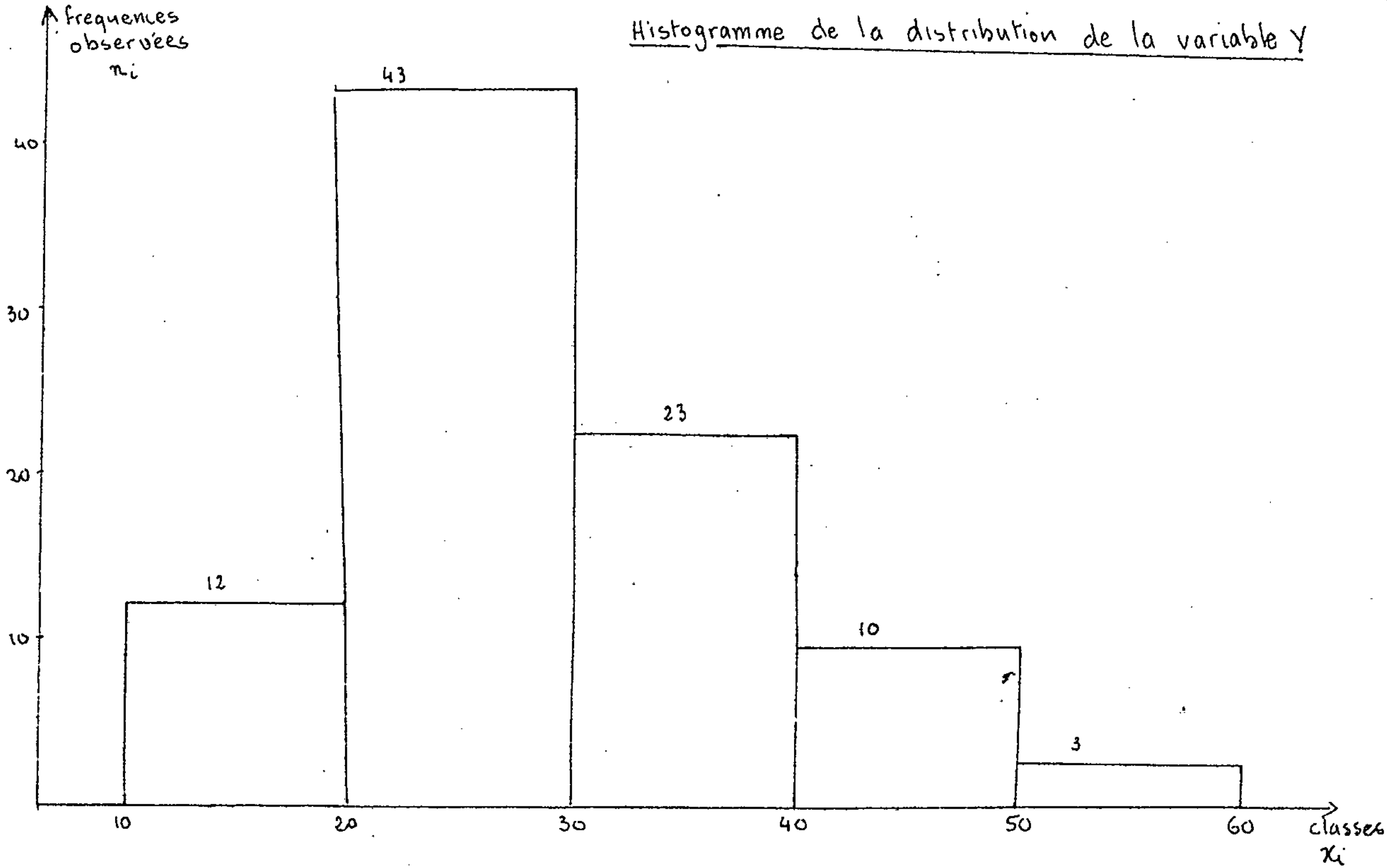
$\sigma_{z'_1-z'_2} = \sqrt{\sigma^2_{z'_1} + \sigma^2_{z'_2}} = 0,178$ (du fait que les échantillons sont indépendants).

D'où $t= 0,494$.

Or pour $\alpha =5\%$ on a $t_\alpha =1,96$, on remarque que $t > t_\alpha$ la différence r_1-r_2 n'est pas significative et les 2 échantillons sont issus de la même population.

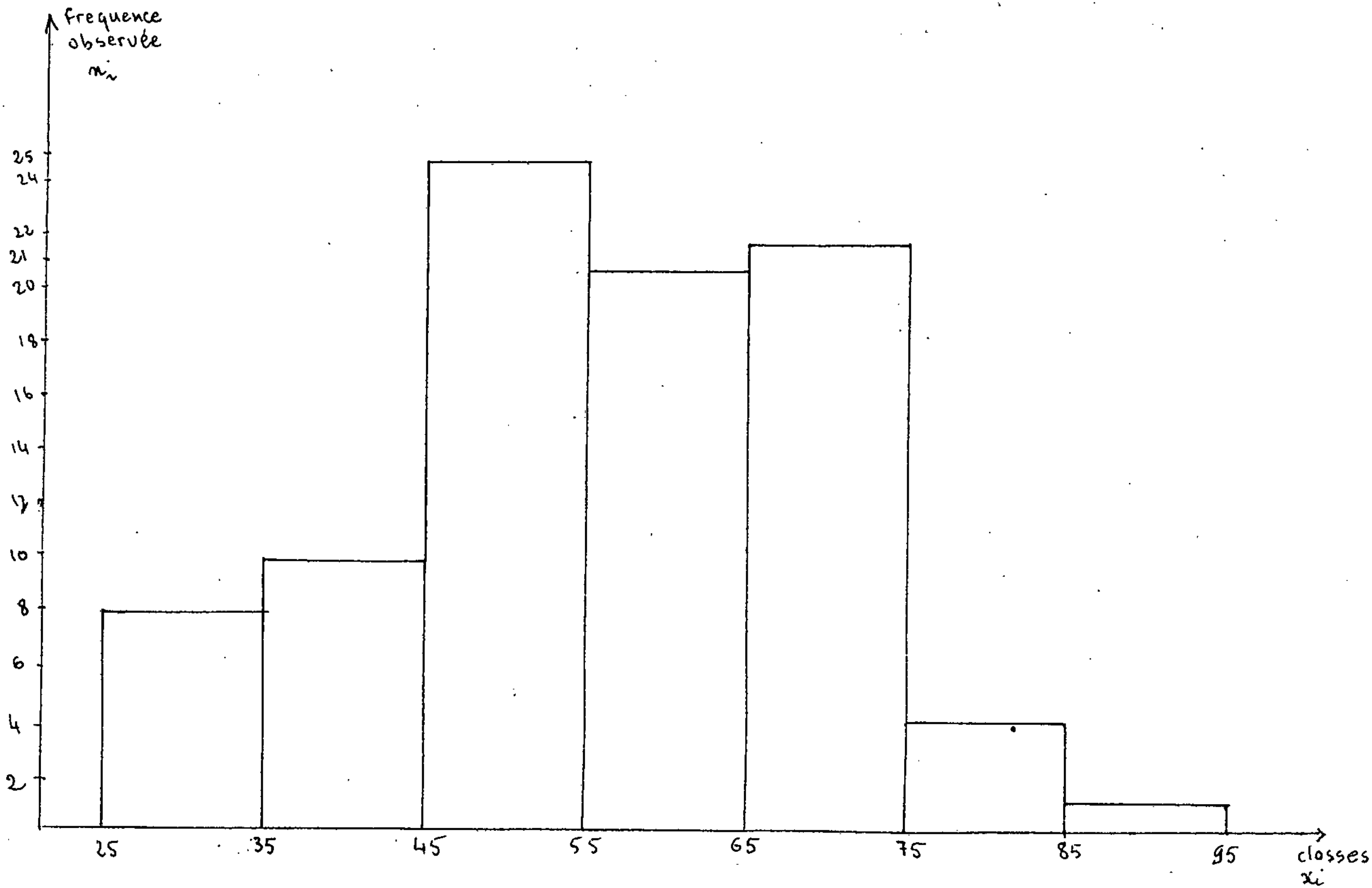
ECHANTILLON 91

Histogramme de la distribution de la variable Y



ECHANTILLON 91

Histogramme de la distribution de la variable X.



Echantillon 91

Test de χ^2 pour Y

$\bar{Y} = 30,25$

$S_Y = 9,1376$

Classes	$t_i = \frac{y_i - 30,25}{9,1376}$		$\Pi(t)$		$p_i = \Pi(t_i) - \Pi(t_{i-1})$	Np_i	n_i	$n_i - Np_i$	$(n_i - Np_i)^2$	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
	t_{i-1}	t_i	$\Pi(t_{i-1})$	$\Pi(t_i)$						
10 - 20	-2,2161	-1,1217	0,0114	0,131	0,1196	10,8836	12	1,1164	1,2463	0,1145
20 - 25	-1,1217	-0,5745	0,131	0,2827	0,1517	13,8047	13	-0,8047	0,6475	0,0469
25 - 30	-0,5745	-0,0274	0,2827	0,4892	0,2065	18,7915	30	11,2085	125,6305	6,6855
30 - 35	-0,0274	0,5198	0,492	0,6953	0,2033	18,5003	13	-5,5003	30,2533	1,6353
35 - 40	0,5198	1,067	0,6953	0,8569	0,1616	14,7056	10	-4,7056	22,1427	1,5057
40 - 60	1,067	3,2558	0,8569	0,99948	0,14258	12,9747	13	0,0252	0,006	0,00005
							$\Sigma = 91$			$\chi^2_c = 9,9879$

or pour $\alpha = 1\%$ et $\nu = (6-1)-2 = 3$ on a $\chi^2_{\alpha,3} = 11,341$

on remarque que : $\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,\nu}$ $\Rightarrow$ Y suit une loi Normale

Echantillon 91

Test de χ^2 pour X

on a : $\bar{X} = 56,9778$

$S_x = 13,8829$

Classes	$t_i = \frac{x_i - 56,9778}{13,8829}$		$\pi(t)$		$p_i = \pi(t_i) - \pi(t_{i-1})$	Np_i	n_i	$n_i - Np_i$	$(n_i - Np_i)^2$	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
	t_{i-1}	t_i	$\pi(t_{i-1})$	$\pi(t_i)$						
35 - 45	-2,3034	-0,8626	0,01061	0,1942	0,1836	16,7067	18	1,2933	1,6727	0,1001
45 55	-0,8626	-0,1425	0,1942	0,4436	0,2494	22,6954	25	2,3046	5,3118	0,2340
55 - 65	-0,1425	0,5778	0,4436	0,718	0,2744	24,8704	21	-3,8704	15,764	0,6313
65 - 75	0,5778	1,2982	0,718	0,9028	0,1848	16,8168	22	5,1832	26,8655	1,5975
75 - 95	1,2982	2,3786	0,9028	0,9912	0,0884	8,044	5	-3,044	9,2683	1,1521

$\chi^2_c = 3,715$

or pour $\alpha = 1\%$ et $\nu = (5-1)-2 = 2$ on a $\chi^2_{\alpha,\nu} = 9,21$

on remarque que $\chi^2_c < \chi^2_\alpha \Rightarrow \tilde{X}$ suit une loi Normale.

ECHANTILLON n= 91

Application des droites en biais

Pour cela il faut vérifier les hypothèses imposées par le modèle:

— L'ensemble (x_i, y_i) est un échantillon aléatoire représentatif prélevé dans la population où y_i est en corrélation lineaire avec x_i (voir test du coeff de corrélation linéaire)

— Les valeurs y_i sont des mesures entachées d'erreurs inconnues dont la moyenne est nulle: $E(\varepsilon_i)=0$

ceci est vérifié du fait que y suit une loi normale et que $y_i = mx_i + b + \varepsilon_i$

— Les erreurs ε_n et ε_θ relatives à 2 observations différentes quelconques n et θ sont indépendante entre elles.

— En dehors de l'échantillon on ne dispose d'aucune information sur les paramètres numériques m et b.

Les hypotheses précédentes étant vérifiées on peut appliquer la méthode des droites en biais à l'échantillon n=91 qui donne les résultats suivant:

Echantillon 91

1ère Itération → $n = 88$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,8637 \\ m = 0,5818 \\ b = -2,6845 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 91$ on a :

$\bar{x} = 56,9778$	$\bar{y} = 30,25$	$r_{xy} = 0,8325$
$S_x = 13,8829$	$S_y = 9,1376$	$m = 0,548$
$\bar{x}^2 = 3246,4696$	$S_y^2 = 83,4957$	$b = -0,971$
$S_x^2 = 192,7349$		

$$\sum_{i=1}^{91}(x_i - \bar{x})^2 = 17\,346,141 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{91}(y_i - \bar{y})^2 = 7514,613 \quad ; \quad \sigma_e^2 = 25,9127$$

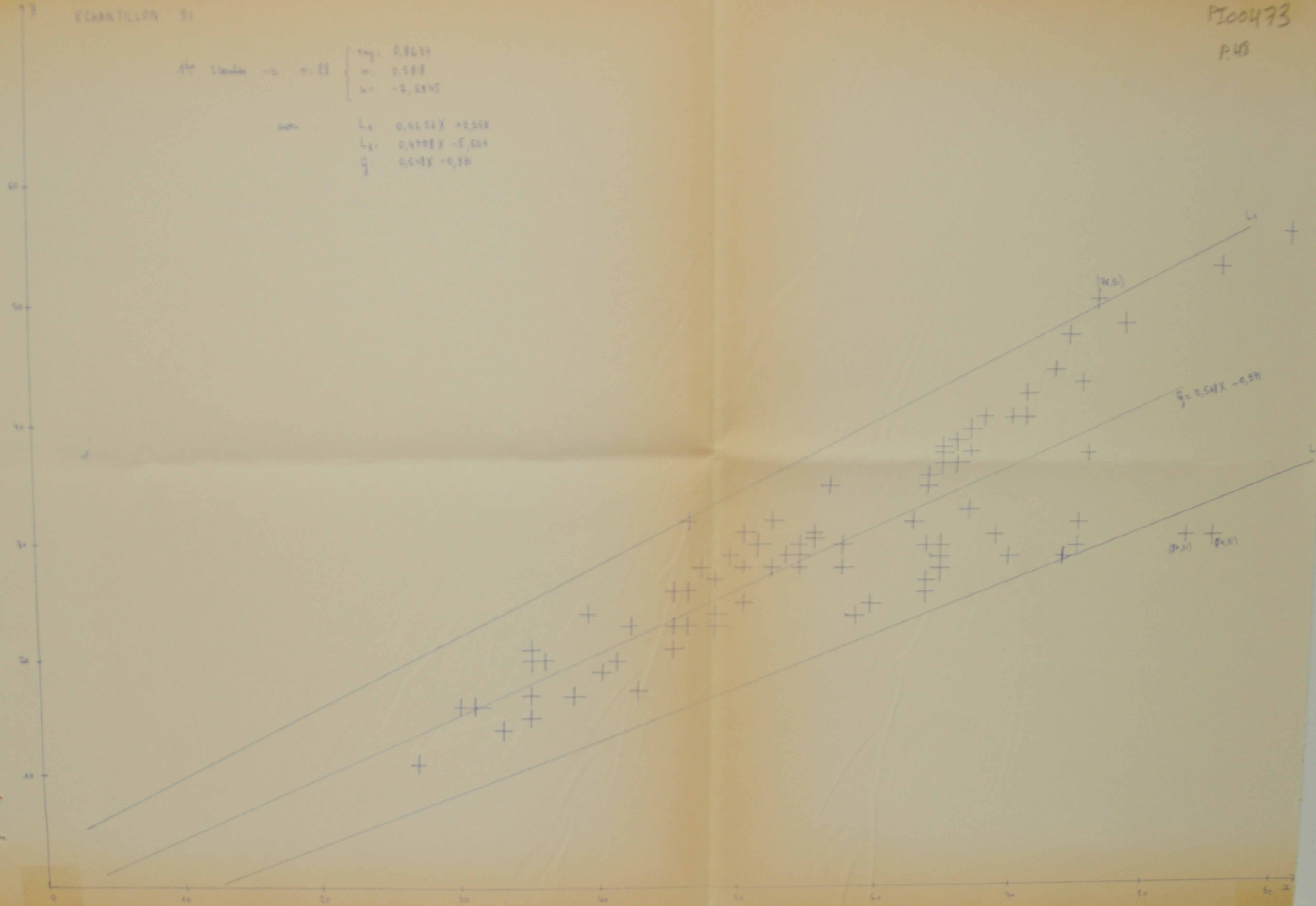
D'où $\sigma_m = 0,0386$ $\qquad \sigma_b = 2,265$

$2\sigma_m = 0,0772$ $\qquad 2\sigma_b = 4,53$

$$\left.\begin{array}{l} 0,4708 \le m \le 0,6252 \\ -5,501 \le b \le 3,559 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0,6252X + 3,559 \\ L_2 : 0,4708X - 5,501 \\ \hat{y} = 0,548X - 0,971 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à éliminer : (3)} \quad \binom{75}{51} ; \binom{82}{31} ; \binom{84}{31}$$

D'où l'échantillon $n = 88$

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	28
5	57	30
6	77	49
7	70	43
8	33	14
9	66	38
10	41	20
11	66	33
12	72	45
13	54	30
14	52	28
15	35	20
16	68	31
17	46	26
18	48	23
19	50	28
20	54	30
21	54	30
22	40	19
23	69	41
24	35	15
25	63	36
26	51	30
27	53	29
28	65	37
29	35	17
30	50	31
31	27	11
32	57	28
33	46	23
34	39	24
35	55	30,5
36	64	38,5
37	42,5	17,5
38	74,5	38
39	70	43
40	74	30
41	64	29
42	46	32
43	58	24
44	63	30
45	45	21
46	63	26
47	59	25
48	74	32
49	64	28
50	73	29
51	63	27
52	69	29
53	74	30
54	64	30
55	69	29
56	47	28
57	64	29
58	48	24
59	56	35
60	45	23
61	55	31
62	49	29
63	45	26
64	73	48
65	66	40
66	54	28
67	38	17
68	35	21
69	48	24
70	62	32
71	30	16
72	67	41
73	42	23
74	74	44
75	48	27
76	36	20
77	54	29
78	50	25
79	52	32
80	63	35
81	64	37
82	31	16
83	54	28
84	46	26
85	84	54
86	89	57
87	73	48
88	66	40


ECHANTILLON 91
r_{xy}: 0,8637
b: -2,6845
L_1: 0,6252X +3,558
L_2: 0,4708X -5,504
$\hat{y}$ = 0,548X -0,971
L_1
L_2

Echantillon 91

2ème Itération → $n = 85$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,8832 \\ m = 0,6071 \\ b = -3,8481 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 88$ on a :

$\bar{x} = 56,1512$ $\quad \bar{y} = 29,9942$ $\quad r_{xy} = 0,8637$

$S_x = 12,8276$ $\quad S_y = 9,0708$ $\quad m = 0,5818$

$\bar{x}^2 = 3152,9573$ $\quad S_y^2 = 82,2794$ $\quad b = -2,6845$

$S_x^2 = 164,5473$

$$\sum_{i=1}^{88} (x_i - \bar{x})^2 = 14\,315,6151 \qquad \sum_{i=1}^{88} (y_i - \bar{y})^2 = 7\,158,3078 \qquad \sigma_e^2 = 21,142$$

D'où $\sigma_m = 0,0384$ $\quad \sigma_b = 2,2128$

$2\sigma_m = 0,0768$ $\quad 2\sigma_b = 4,4256$

$$\left.\begin{array}{l} 0,505 \le m \le 0,659 \\ -7,11 \le b \le 1,741 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0,659X + 1,741 \\ L_2 : 0,505X - 7,11 \\ \hat{y} = 0,5818X - 2,6845 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à éliminer : } \binom{74}{70} ; \binom{73}{29} ; \binom{74}{70}$$

D'où l'échantillon $n = 85$

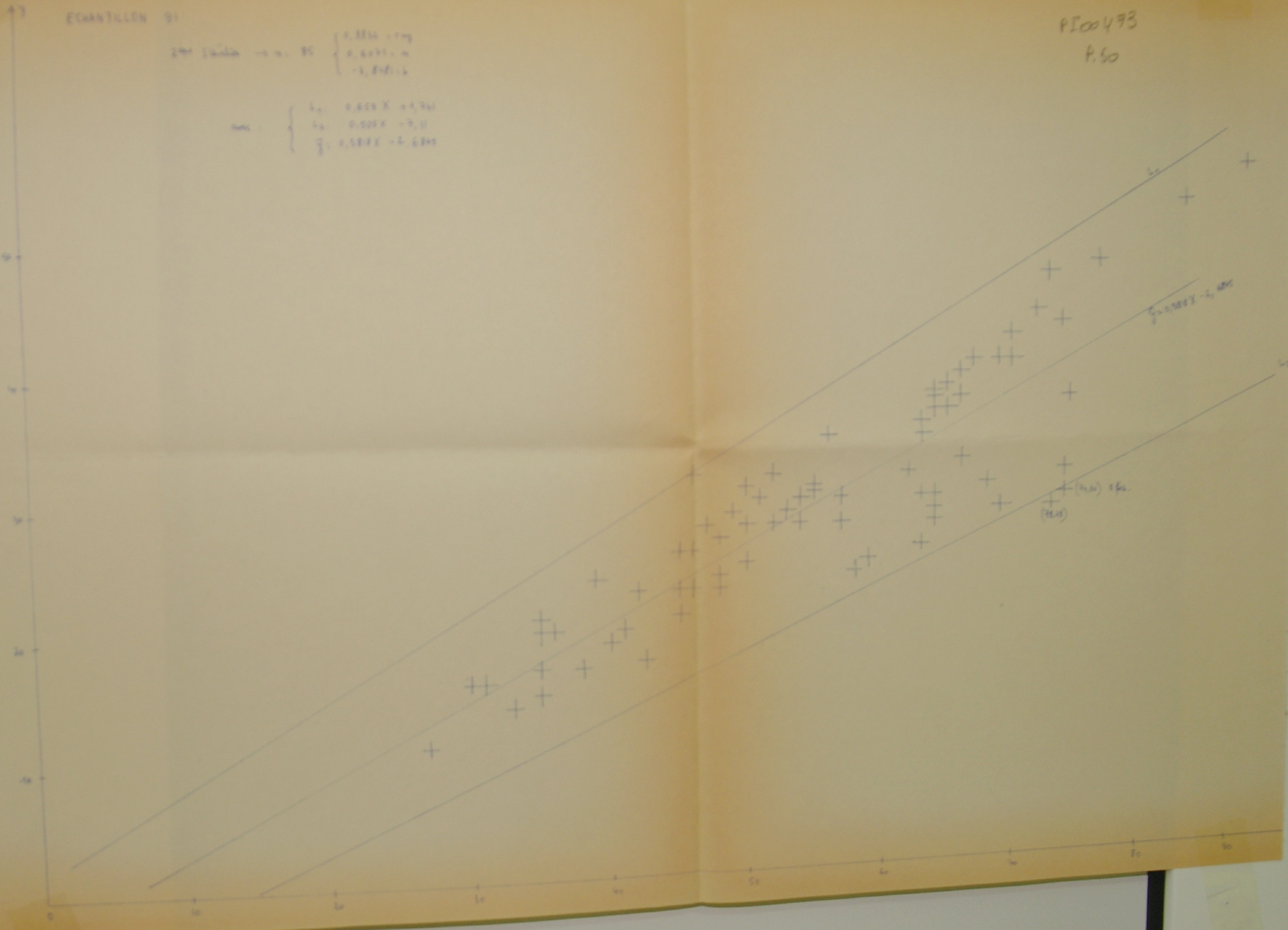
	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	28
5	57	30
6	77	49
7	70	43
8	33	14
9	66	38
10	41	20
11	66	33
12	72	45
13	54	30
14	52	28
15	35	20
16	68	31
17	46	26
18	48	23
19	50	28
20	54	30
21	54	30
22	40	19

	X	Y
23	69	41
24	35	15
25	63	36
26	51	30
27	53	29
28	65	37
29	35	17
30	50	31
31	27	11
32	57	28
33	46	23
34	39	24
35	55	30,5
36	64	38,5
37	42,5	17,5
38	74,5	38
39	70	43
40	64	29
41	46	32
42	58	24
43	63	30

	X	Y
44	45	21
45	63	26
46	59	25
47	74	32
48	64	28
49	63	27
50	69	29
51	64	30
52	69	29
53	47	28
54	64	29
55	48	24
56	56	35
57	45	23
58	55	31
59	49	29
60	45	26
61	73	48
62	66	40
63	54	28
64	38	17

	X	Y
65	35	21
66	48	24
67	62	32
68	30	16
69	67	41
70	42	23
71	74	44
72	48	27
73	36	20
74	54	29
75	50	25
76	52	32
77	63	35
78	64	37
79	31	16
80	54	28
81	46	26
82	84	54
83	89	57
84	73	48
85	66	40

PI00473
P.50



Echantillon 91

$3^{ème}$ Itération $\rightarrow n = 73 \begin{cases} r_{xy} = 0,9472 \\ m = 0,6622 \\ b = -6,141 \end{cases}$

En considérant l'échantillon n = 85 on a :

$\bar{x} = 55,765$ | $\bar{y} = 30,006$ | $r_{xy} = 0,8832$

$S_x = 13,274$ | $S_y = 9,124$ | $m = 0,6071$

$\bar{x}^2 = 3109,702$ | $S_y^2 = 83,247$ | $b = -3,8481$

$S_x^2 = 176,2$

$$\sum_{i=1}^{85} (x_i - \bar{x})^2 = 13\,977,49 \qquad \sum_{i=1}^{85} (y_i - \bar{y})^2 = 7075,995 \quad ; \quad \sigma_e^2 = 18,692$$

D'où $\sigma_m = 0,0353$ $\qquad \sigma_b = 2,0245$

$2\sigma_m = 0,0706$ $\qquad 2\sigma_b = 4,049$

$$\left.\begin{array}{l} 0,527 \leq m \leq 0,669 \\ -7,483 \leq b \leq 0,614 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0,669X + 0,614 \\ L_2 : 0,527X - 7,483 \\ \hat{y} = 0,6071X - 3,8481 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pt à éliminer : (12)}$$

$\binom{64}{28}$; $\binom{46}{32}$; $\binom{58}{24}$; $\binom{63}{26}$; $\binom{59}{25}$; $\binom{74}{32}$

$\binom{64}{28}$; $\binom{63}{27}$; $\binom{69}{29}$; $\binom{69}{29}$; $\binom{73}{48}$; $\binom{73}{48}$

D'où l'échantillon n = 73 :

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	57	30
5	77	49
6	70	43
7	33	14
8	66	38
9	41	20
10	66	33
11	72	45
12	54	30
13	52	28
14	35	20
15	68	31
16	46	26
17	48	23
18	50	28
19	54	30
20	54	30
21	40	19
22	69	41
23	35	15
24	63	36

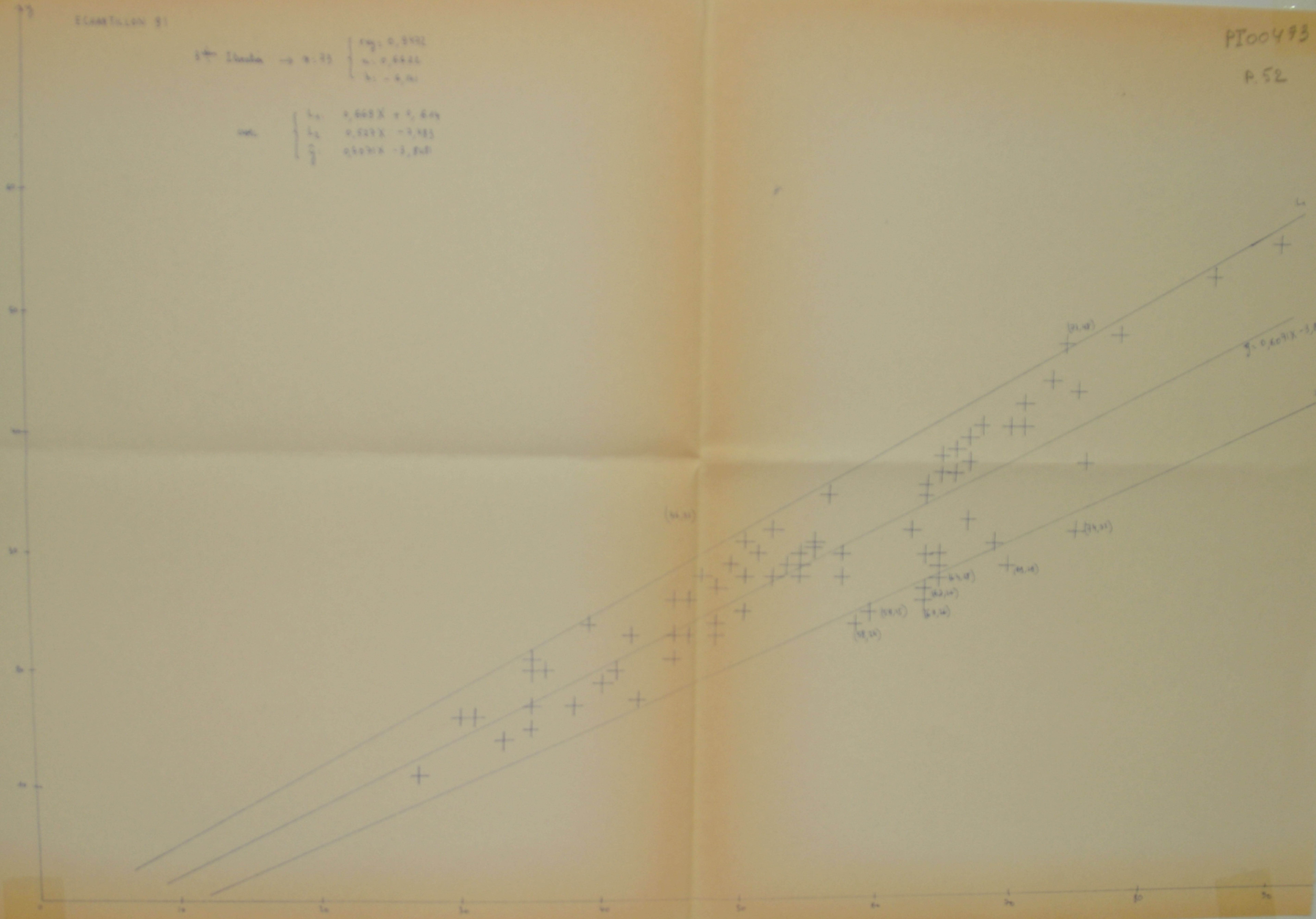
	X	Y
25	51	30
26	53	29
27	65	37
28	35	17
29	50	31
30	27	11
31	57	28
32	46	23
33	39	24
34	55	30,5
35	64	38,5
36	42,5	17,5
37	74,5	38
38	70	43
39	64	29
40	68	30

	X	Y
41	45	21
42	64	30
43	77	28
44	64	29
45	48	24
46	56	35
47	45	23
48	55	31
49	49	29
50	45	26
51	66	40
52	54	28
53	38	17
54	35	21
55	48	24
56	62	32

	X	Y
57	30	16
58	67	41
59	42	23
60	74	44
61	48	27
62	36	20
63	54	29
64	50	25
65	52	32
66	63	35
67	64	37
68	31	16
69	54	28
70	46	26
71	84	54
72	89	57
73	66	40

PI00493

P.52



Echantillon 91

4ème Itération → $n = 70 \begin{cases} r_{xy} = 0,9624 \\ m = 0,6839 \\ b = -6,9799 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 73$ on a :

$\bar{x} = 54,0417$	$\bar{y} = 29,6458$	$r_{xy} = 0,9472$
$S_x = 13,3355$	$S_y = 9,3234$	$m = 0,6622$
$\bar{x}^2 = 2920,5017$	$S_y^2 = 86,9256$	$b = -6,141$
$S_x^2 = 177,8363$		

$$\sum_{i=1}^{73} (x_i - \bar{x})^2 = 12804,2113 \qquad \sum_{i=1}^{73} (y_i - \bar{y})^2 = 6258,6444 \quad , \quad \sigma_e^2 = 9,0629$$

D'où $\sigma_m = 0,0266$ $\qquad \sigma_b = 1,4803$

$2\sigma_m = 0,0532$ $\qquad 2\sigma_b = 2,9606$

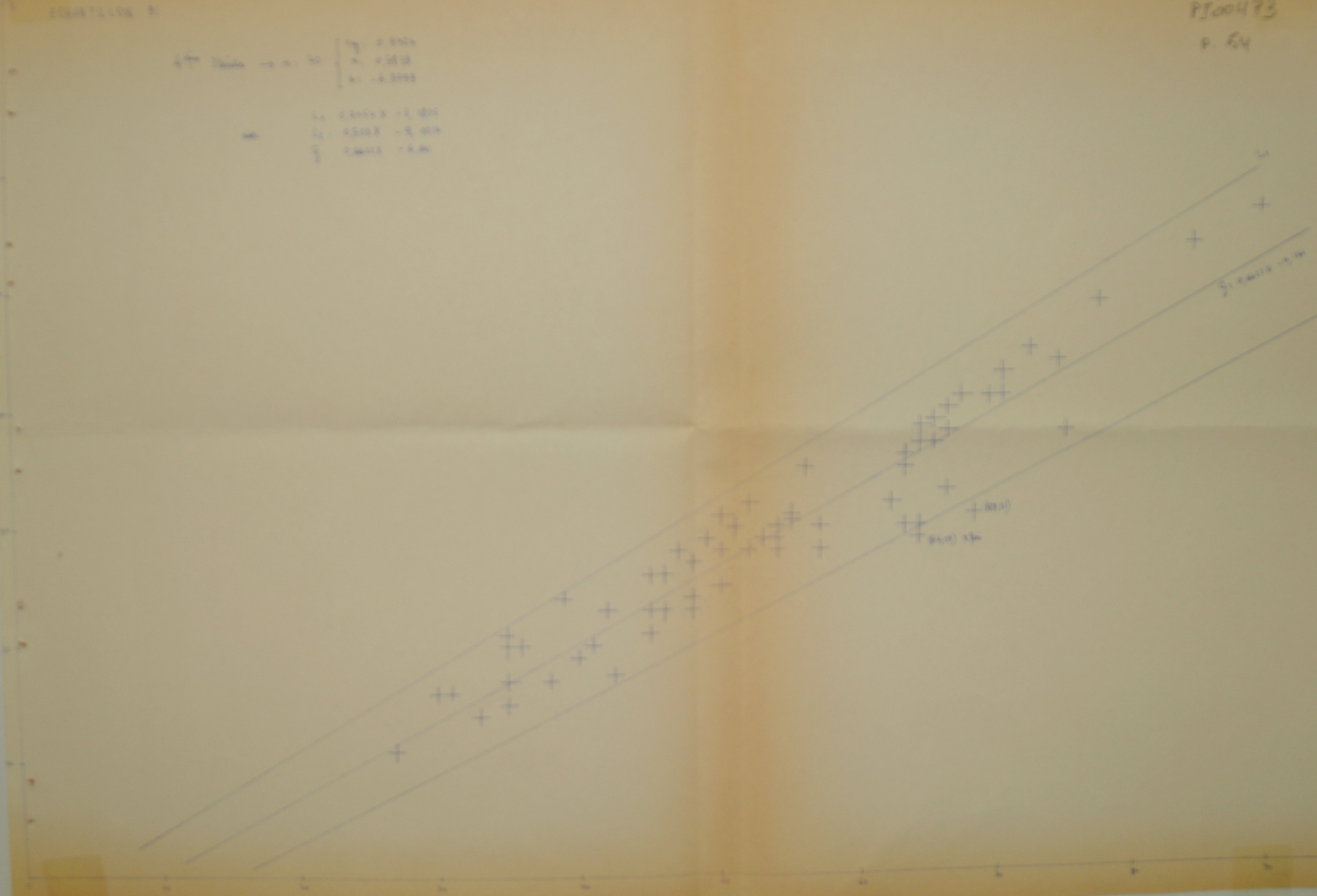
$$\left.\begin{array}{l} 0,609 \leq m \leq 0,7154 \\ -9,1017 \leq b \leq -3,1805 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0,7154X - 3,1805 \\ L_2 : 0,609X - 9,1017 \\ \hat{y} = 0,6622X - 6,141 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à éliminer : } \binom{68}{31} ; \binom{64}{29} ; \binom{64}{29}$$

D'où l'échantillon $n = 70$

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	57	30
5	77	49
6	70	43
7	33	14
8	66	38
9	41	20
10	66	33
11	72	45
12	54	30
13	52	28
14	35	20
15	46	26
16	48	23
17	50	28
18	54	30
19	54	30
20	40	19
21	69	41
22	35	15
23	63	36
24	51	30
25	53	29
26	65	37
27	35	17
28	50	31
29	27	11
30	57	28
31	46	23
32	39	24
33	55	30,5
34	64	38,5
35	42,5	17,5
36	74,5	38
37	70	43
38	63	30
39	45	21
40	64	30
41	47	28
42	48	24
43	56	35
44	45	23
45	55	31
46	49	29
47	45	26
48	66	40
49	54	28
50	38	17
51	35	21
52	48	24
53	62	32
54	30	16
55	67	41
56	42	23
57	74	44
58	48	27
59	36	20
60	54	29
61	50	25
62	52	32
63	63	35
64	64	37
65	31	16
66	54	28
67	46	26
68	84	54
69	89	57
70	66	40

PJ00473

p. 64



)

Echantillon $n = 91$

5ème Itération $\rightarrow n = 67 \left\{ \begin{array}{l} r_{xy} = 0,9708 \\ m = 0,6907 \\ b = -7,0757 \end{array} \right.$

En considérant l'échantillon $n = 70$ on a :

$\bar{x} = 53,5507$ $\bar{y} = 29,6449$ $r_{xy} = 0,9624$

$S_x = 13,4036$ $S_y = 9,5248$ $m = 0,6839$

$\bar{x}^2 = 2867,6801$ $S_y^2 = 90,7213$ $b = -6,9799$

$S_x^2 = 179,6555$

$$\sum_{i=1}^{70} (x_i - \bar{x})^2 = 12396,2279 \qquad \sum_{i=1}^{70} (y_i - \bar{y})^2 = 6259,7697 \quad ; \quad \sigma_e^2 = 6,7924$$

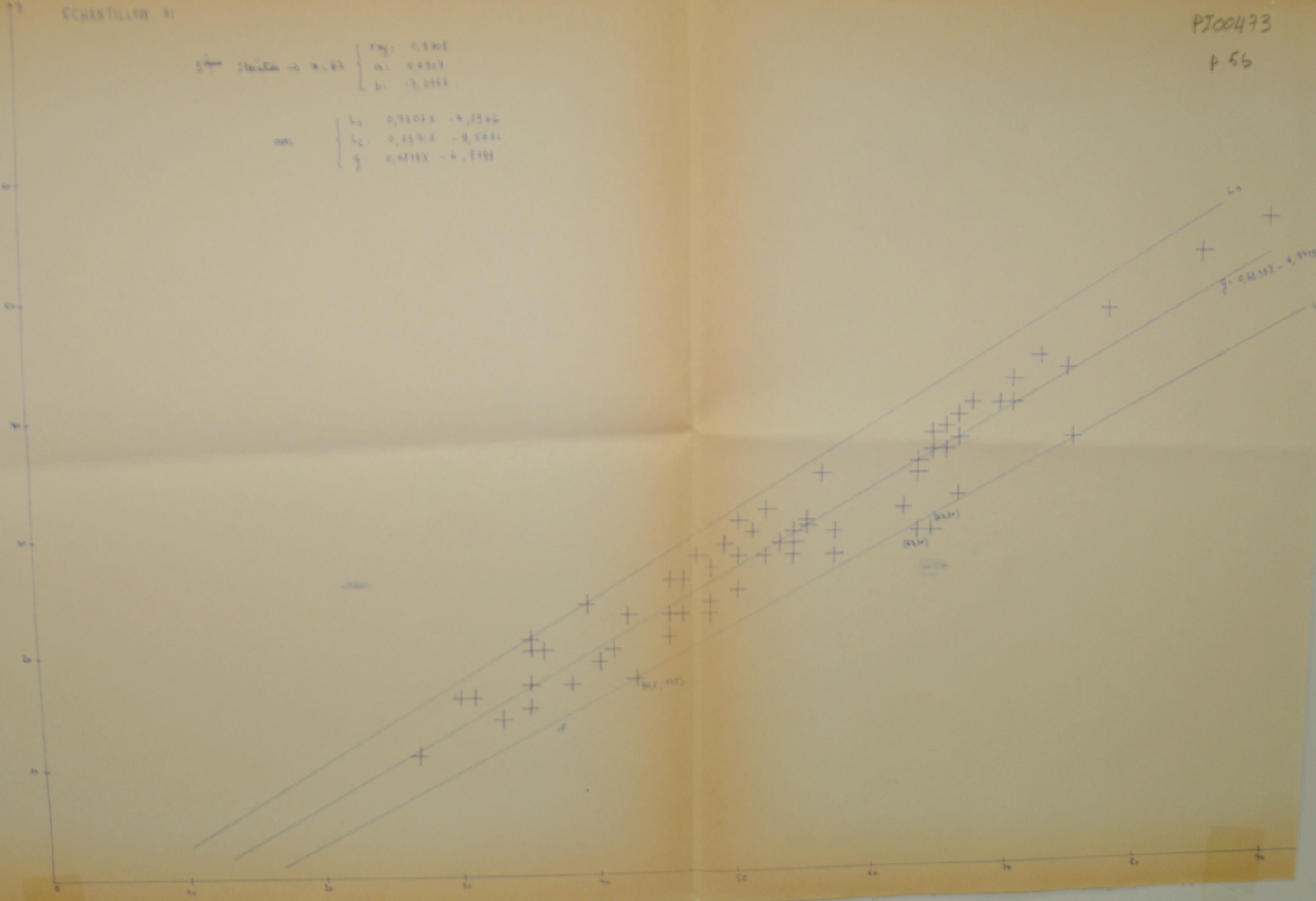
D'où $\sigma_m = 0,0234$ $\sigma_b = 1,2916$

$2\sigma_m = 0,0468$ $2\sigma_b = 2,5832$

$$\left. \begin{array}{l} 0,6371 \le m \le 0,7307 \\ -9,5632 \le b \le -4,3966 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} L_1 : 0,7307 X - 4,3966 \\ L_2 : 0,6371 X - 9,5632 \\ \hat{y} : 0,6839 X - 6,9799 \end{array} \right\} \rightarrow \text{pts à éliminer} : \begin{pmatrix} 42,5 \\ 17,5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 63 \\ 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 \\ 30 \end{pmatrix}$$

D'où l'échantillon $n = 67$:

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	57	30
5	77	49
6	70	43
7	33	14
8	66	38
9	41	20
10	66	33
11	72	45
12	54	30
13	52	28
14	35	20
15	46	26
16	48	23
17	50	28
18	54	30
19	54	30
20	40	19
21	69	41
22	35	15
23	63	36
24	51	30
25	53	29
26	65	37
27	35	17
28	50	31
29	27	11
30	57	28
31	46	23
32	39	24
33	55	30,5
34	64	38,5
35	74,5	38
36	70	43
37	45	21
38	47	28
39	48	24
40	56	35
41	45	23
42	55	31
43	49	29
44	45	26
45	66	40
46	54	28
47	38	17
48	35	21
49	48	24
50	62	32
51	30	16
52	67	41
53	42	23
54	74	44
55	48	27
56	36	20
57	54	29
58	50	25
59	52	32
60	63	35
61	64	37
62	31	16
63	54	28
64	46	26
65	84	54
66	89	57
67	66	40


ECHANTILLON

Echantillon 91

$$6^{\text{ième}} \text{ Itération} \rightarrow n = 63 \begin{cases} r_{xy} = 0,98 \\ m = 0,7219 \\ b = -8,6807 \end{cases}$$

En considérant l'échantillon $n = 67$ on a :

$\bar{x} = 53,4167$	$\bar{y} = 29,8182$	$r_{xy} = 0,9708$
$S_x = 13,5276$	$S_y = 9,6231$	$m = 0,6907$
$\bar{x}^2 = 2853,3403$	$S_y^2 = 92,6049$	$b = -7,0757$
$S_x^2 = 182,9968$		

$$\sum_{i=1}^{67} (x_i - \bar{x})^2 = 12077,7888 \qquad \sum_{i=1}^{67} (y - \bar{y})^2 = 6111,9231 \quad ; \quad \sigma_e^2 = 5,4112$$

D'où $\sigma_m = 0,0212$ $\qquad \sigma_b = 1,1658$

$2\sigma_m = 0,0424$ $\qquad 2\sigma_b = 2,3316$

$$\left.\begin{array}{l} 0,6484 \leq m \leq 0,733 \\ -9,4073 \leq b \leq -4,7441 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0,733X - 4,7441 \\ L_2 : 0,6484X - 9,4073 \\ \hat{y} : 0,6907X - 7,0757 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à éliminer} : \binom{66}{33} ; \binom{39}{24} ; \binom{35}{21} ; \binom{74,5}{38}$$

D'où l'échantillon $n = 63$

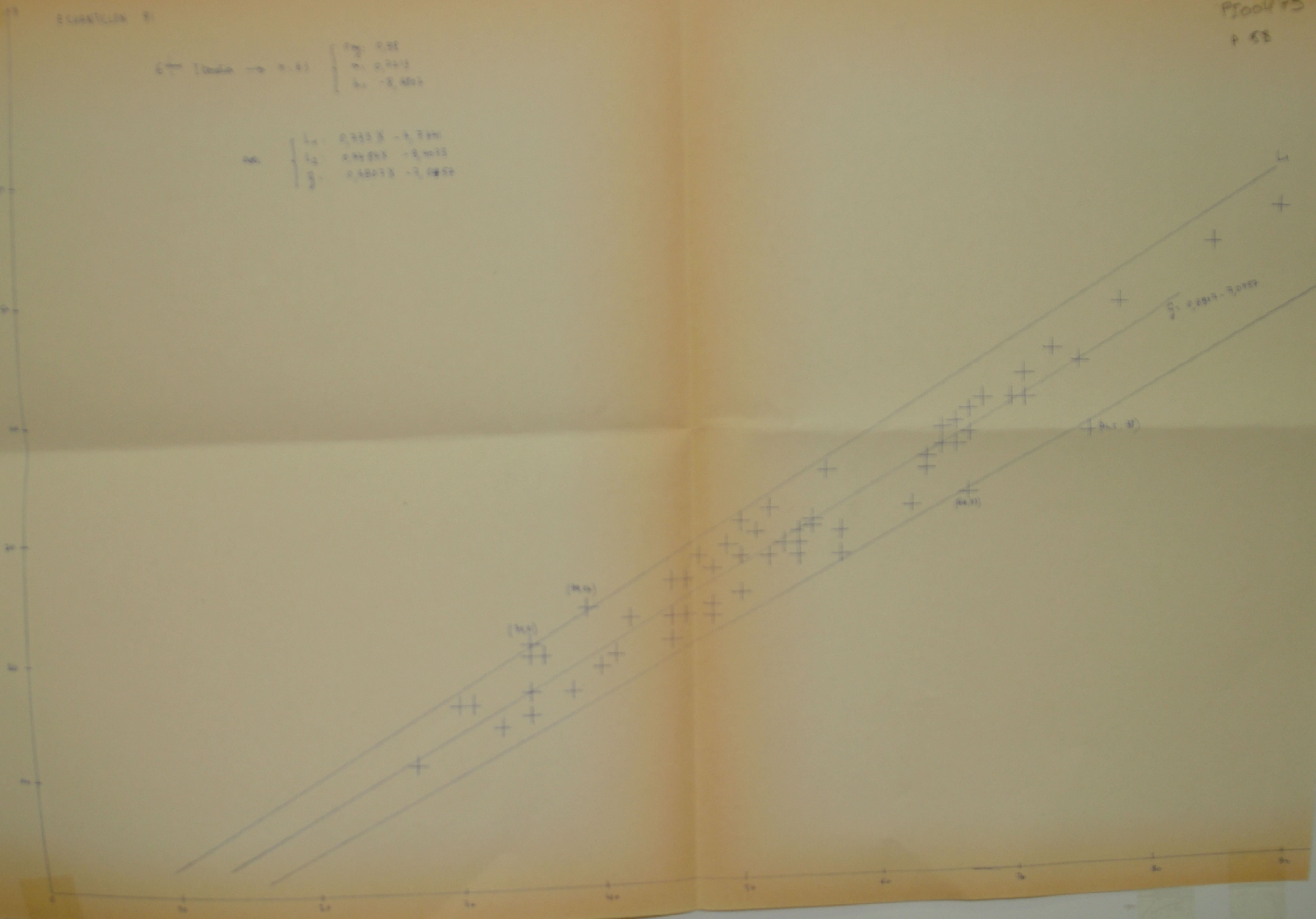
	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	57	30
5	77	49
6	70	43
7	33	14
8	66	38
9	41	20
10	72	45
11	54	30
12	52	28
13	35	20
14	46	26
15	48	23
16	50	28
17	54	30
18	54	30
19	40	13
20	69	41
21	35	15

	X	Y
22	63	36
23	51	30
24	53	29
25	65	37
26	35	17
27	50	31
28	27	11
29	57	28
30	46	23
31	55	30,5
32	64	38,5
33	70	43
34	45	21
35	47	28
36	48	24
37	56	35
38	45	23
39	55	31
40	49	29
41	45	26
42	66	40

	X	Y
43	54	28
44	38	17
45	48	24
46	62	32
47	30	16
48	67	41
49	42	23
50	74	44
51	48	27
52	36	20
53	54	29
54	50	25
55	52	32
56	63	35
57	64	37
58	31	16
59	54	28
60	46	26
61	84	54
62	89	57
63	66	40

PJ00478

f. 58



Echantillon 91

$7^{ième}$ Itération $\rightarrow$ $n = 60$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,9829 \\ m = 0,7373 \\ b = -9,5448 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 63$ on a :

$\bar{x} = 53,4032$ $\quad$ $\bar{y} = 29,871$ $\quad$ $r_{xy} = 0,9800$

$S_x = 13,272$ $\quad$ $S_y = 9,7766$ $\quad$ $m = 0,7219$

$\bar{x}^2 = 2851,9045$ $\quad$ $S_y^2 = 95,5814$ $\quad$ $b = -8,6807$

$S_x^2 = 176,1462$

$\sum_{i=1}^{63} (x_i - \bar{x})^2 = 10\,921,0656$ $\quad$ $\sum_{i=1}^{63} (y_i - \bar{y})^2 = 5926,0492$, $\quad$ $\sigma_e^2 = 3,8471$

D'où $\quad$ $\sigma_m = 0,0188$ $\quad$ $\sigma_b = 1,0323$

$2\sigma_m = 0,0376$ $\quad$ $2\sigma_b = 2,0646$

$$\left.\begin{array}{l} 0,6844 \le m \le 0,7594 \\ -10,7453 \le b \le -6,6161 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0,7594\,X - 6,6161 \\ L_2 : 0,6844\,X - 10,7453 \\ \hat{y} : 0,7219\,X - 8,6807 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à éliminer} : \binom{35}{20} ; \binom{57}{28} \; \binom{30}{16}$$

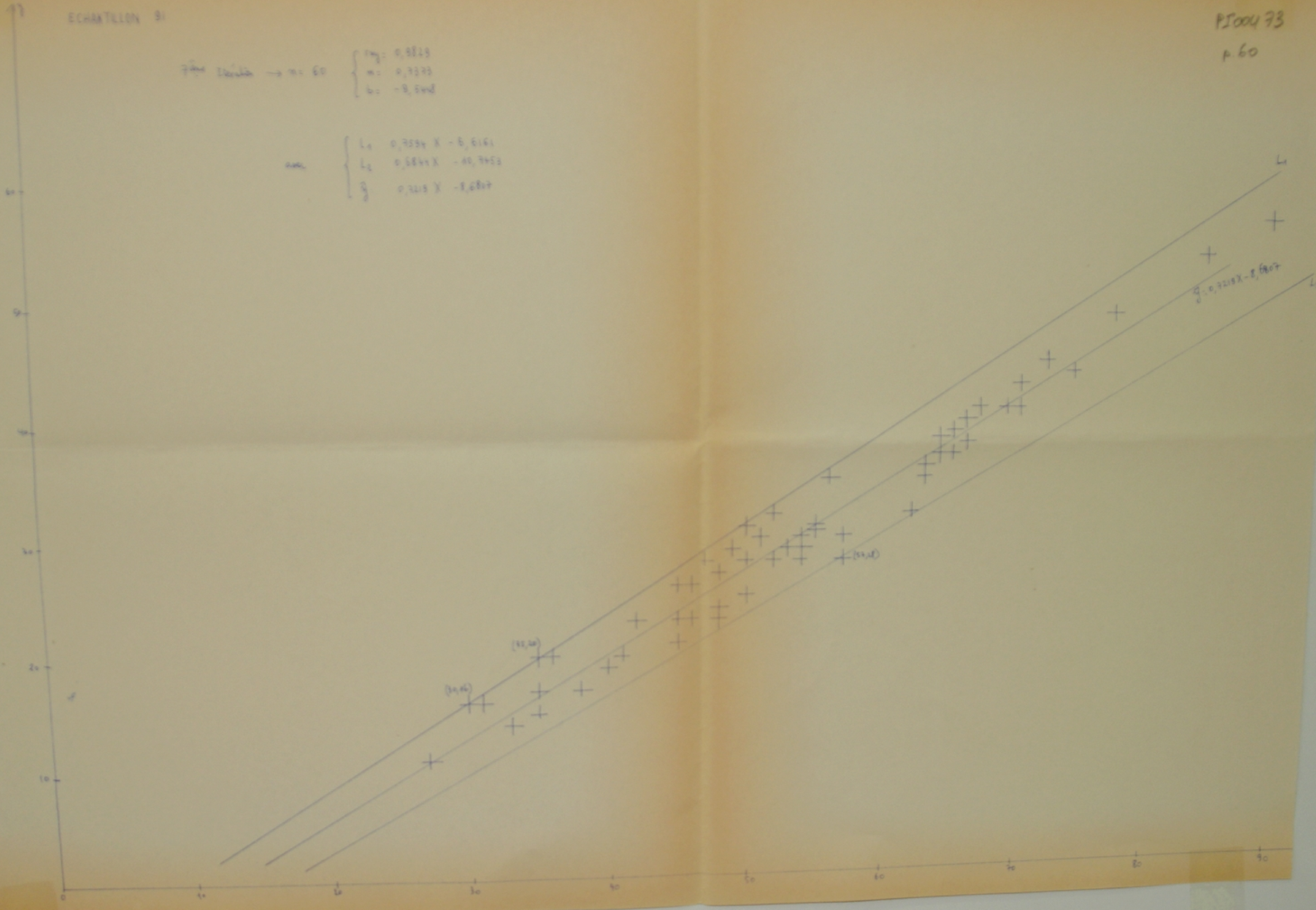
D'où l'échantillon $n = 60$

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	57	30
5	77	49
6	70	43
7	33	14
8	66	38
9	41	20
10	72	45
11	54	30
12	52	28
13	46	26
14	48	23
15	50	28
16	54	30
17	54	30
18	40	19
19	63	41
20	35	15

	X	Y
21	63	36
22	51	30
23	53	29
24	65	37
25	35	17
26	50	31
27	27	11
28	46	23
29	55	30,5
30	64	39,5
31	70	43
32	45	21
33	47	28
34	48	24
35	56	35
36	45	23
37	55	31
38	49	29
39	45	26
40	66	40

	X	Y
41	54	28
42	38	17
43	48	24
44	62	32
45	67	41
46	42	23
47	74	44
48	48	27
49	36	20
50	54	29
51	50	25
52	52	32
53	63	35
54	64	37
55	31	16
56	54	28
57	46	26
58	84	54
59	89	57
60	66	40

PJ00473
p.60


ECHANTILLON 91
n = 60
r_{xy} : 0,9829
m : 0,7373
b : -8,548
L_1 0,7594 X - 6,6161
L_2 0,6844 X - 10,7453
$\hat{y}$ 0,7219 X - 8,6807
L_1
$\hat{y}$: 0,7219 X - 8,6807
L_2

Echantillon 91

$8^{ème}$ itération $\rightarrow$ $n = 58$ $\begin{cases} r_{xy} : 0,9857 \\ m : 0,7422 \\ b : -9,8027 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 60$ on a :

$\bar{x} = 54,0508$ $\bar{y} = 30,3051$ $r_{xy} = 0,9829$

$s_x = 13,0125$ $s_y = 9,7609$ $m = 0,7373$

$\bar{x}^2 = 2921,489$ $s_y^2 = 95,276$ $b = -9,5448$

$s_x^2 = 169,325$

$\sum_{i=1}^{60} (x_i - \bar{x})^2 = 9990,1724$ $\sum_{i=1}^{60} (y_i - \bar{y})^2 = 5621,2846$; $\sigma_e^2 = 3,2863$

D'où $\sigma_m = 0,0181$ $\sigma_b = 1,0079$

$2\sigma_m = 0,0362$ $2\sigma_b = 2,0158$

$$\left.\begin{array}{l} 0,701 \le m \le 0,7736 \\ -11,5605 \le b \le -7,5291 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0,7736X - 7,5291 \\ L_2 : 0,701X - 11,5605 \\ y : 0,7373X - 9,5448 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à éliminer} : \binom{50}{31}, \binom{61}{32}$$

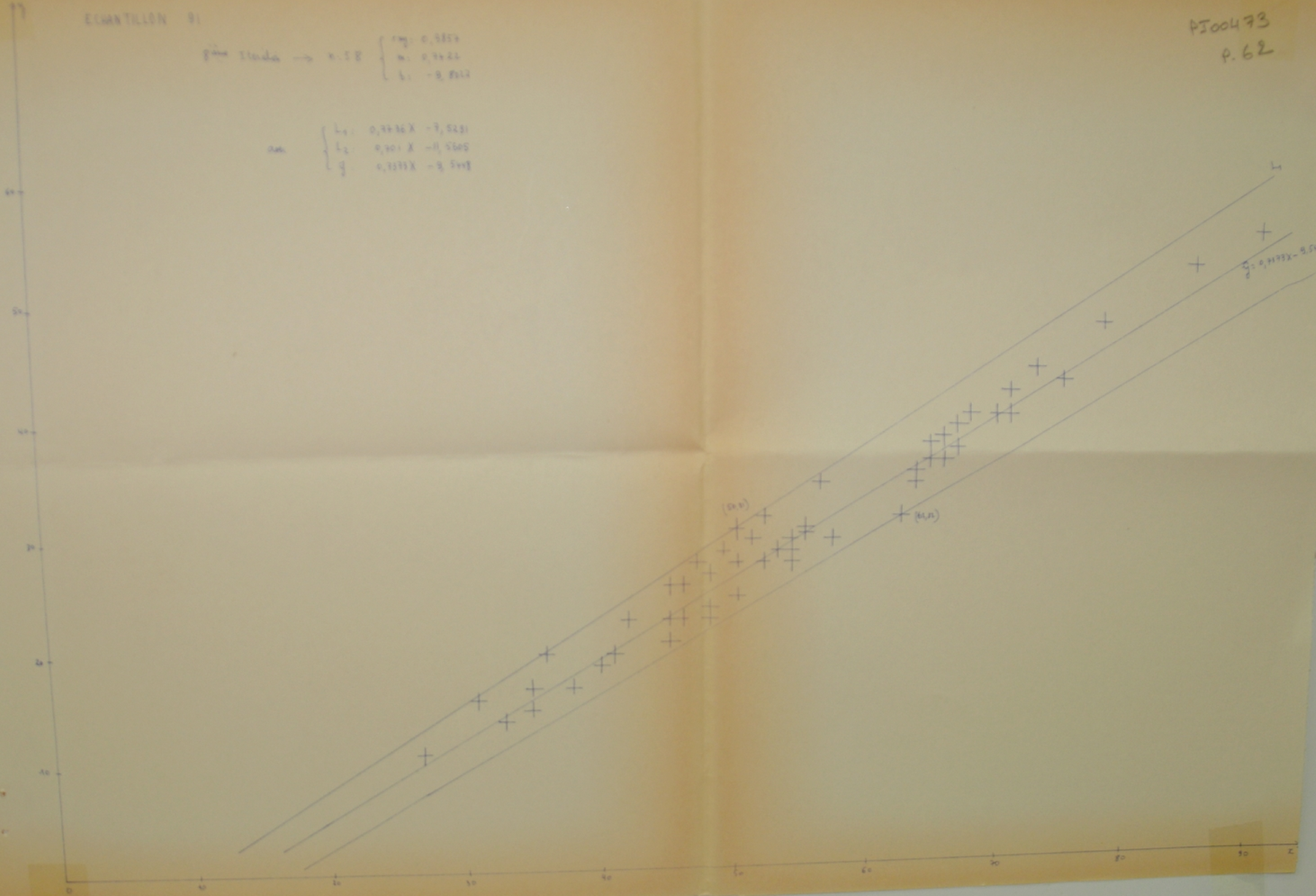
D'où l'échantillon $n = 58$

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	57	30
5	77	49
6	70	43
7	33	14
8	66	38
9	41	20
10	72	45
11	54	30
12	52	28
13	46	26
14	48	23
15	50	28
16	54	30
17	54	30
18	40	19
19	69	41
20	35	15

	X	Y
21	63	36
22	51	30
23	53	29
24	65	37
25	35	17
26	27	11
27	46	23
28	55	30,5
29	64	38,5
30	70	43
31	45	21
32	47	28
33	48	24
34	56	35
35	45	23
36	55	31
37	49	29
38	45	26
39	66	40
40	54	28

	X	Y
41	38	17
42	48	24
43	67	41
44	42	23
45	74	44
46	48	27
47	36	20
48	54	29
49	50	25
50	52	32
51	63	35
52	64	37
53	31	16
54	54	28
55	46	26
56	84	54
57	89	59
58	66	40

PJ00473
p. 62


ECHANTILLON 91
L_1 : 0,7736 X -7,5231
L_2 : 0,701 X -11,5605
$\hat{y}$: 0,7373 X -9,5448
$\hat{y}$ = 0,7373X - 9,5448
(51,11)
L_1
L_2

Echantillon 91

9ième Itération $\rightarrow n = 56 \begin{cases} r_{xy} : 0,9868 \\ m : 0,7562 \\ b : -10,6729 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 58$ on a :

$\bar{x} = 53,9825$ $\quad \bar{y} = 30,2632$ $\quad r_{xy} = 0,9857$

$s_x = 13,1889$ $\quad s_y = 9,9306$ $\quad m = 0,7422$

$\bar{x}^2 = 2914,1056$ $\quad s_y^2 = 98,617$ $\quad b = -9,8027$

$s_x^2 = 173,9461$

$$\sum_{i=1}^{58} (x_i - \bar{x})^2 = 9914,9277 \qquad \sum_{i=1}^{58} (y_i - \bar{y})^2 = 5621,1696 \quad ; \quad \sigma_e^2 = 2,8503$$

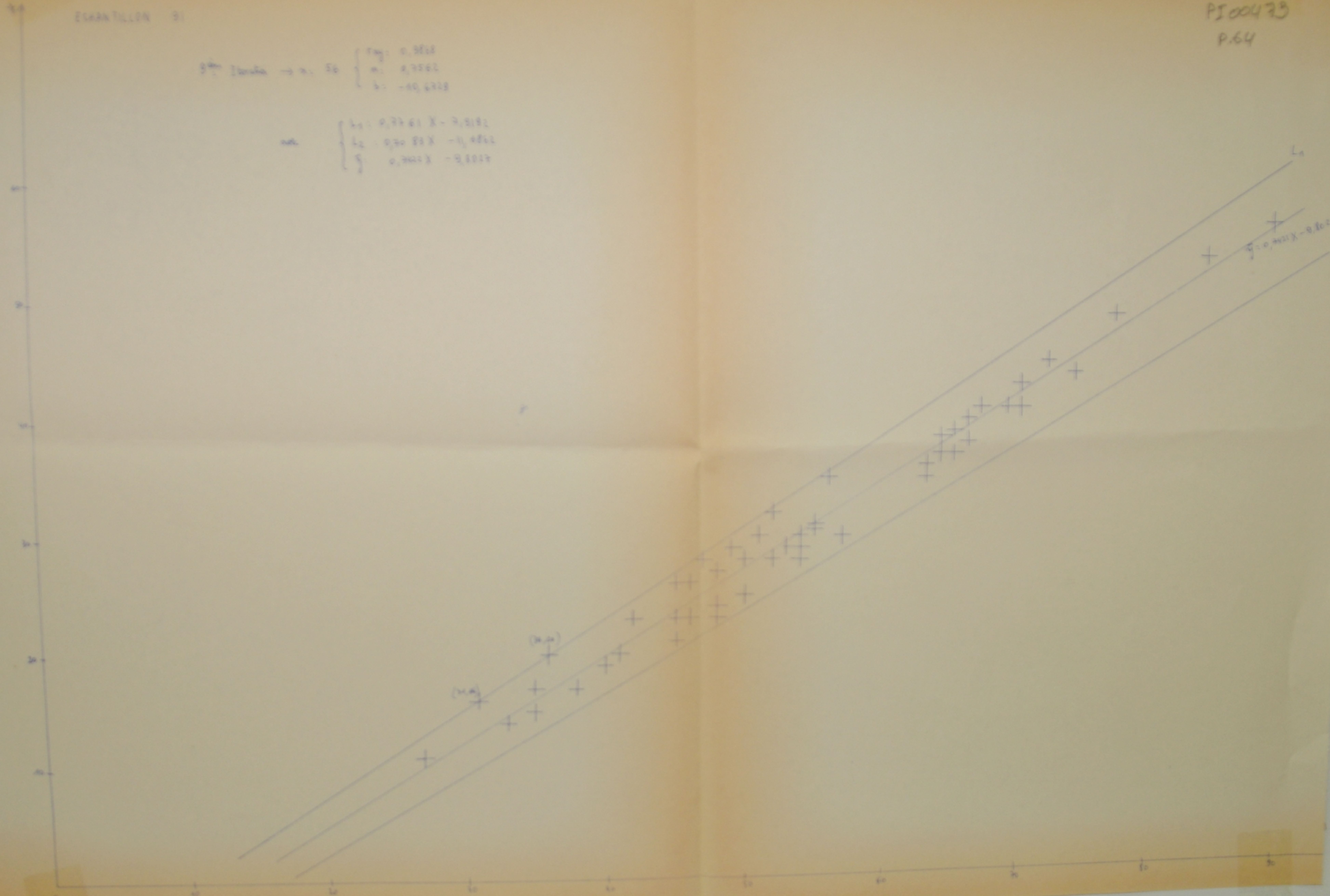
D'où $\sigma_m = 0,017$ $\qquad \sigma_b = 0,9417$

$2\sigma_m = 0,034$ $\qquad 2\sigma_b = 1,8834$

$$\left.\begin{array}{l} 0,7083 \leq m \leq 0,7761 \\ -11,6862 \leq b \leq -7,9192 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0,7761X - 7,9192 \\ L_2 : 0,7083X - 11,6862 \\ \hat{y} : 0,7422X - 9,8027 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à éliminer } \binom{31}{16} ; \binom{36}{20}$$

D'où l'échantillon $n = 56$

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	57	30
5	77	49
6	70	43
7	33	14
8	66	38
9	41	20
10	72	45
11	54	30
12	52	28
13	46	26
14	48	23
15	50	28
16	54	30
17	54	30
18	40	19
19	69	41
20	35	15
21	63	36
22	51	30
23	53	29
24	65	37
25	35	17
26	27	11
27	46	23
28	55	30,5
29	64	38,5
30	70	43
31	45	21
32	47	28
33	48	24
34	56	35
35	45	23
36	55	31
37	49	29
38	45	26
39	66	40
40	54	28
41	38	17
42	48	24
43	67	41
44	42	23
45	74	44
46	48	27
47	54	29
48	50	25
49	52	32
50	63	35
51	64	37
52	54	28
53	46	26
54	84	54
55	89	57
56	66	40



Echantillon 91

$10^{\text{ème}}$ Itération $\rightarrow$ $n = 56$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,9868 \\ m = 0,7562 \\ b = -10,6729 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 56$ on a :

$\bar{x} = 54,7273$ — $\bar{y} = 30,7091$ — $r_{xy} = 0,9868$

$s_x = 12,8084$ — $s_y = 9,8158$ — $m = 0,7562$

$\bar{x}^2 = 2995,0784$ — $s_y^2 = 96,349$ — $b = -10,6729$

$s_x^2 = 164,0539$

$$\sum_{i=1}^{56} (x_i - \bar{x})^2 = 9022,963 \qquad \sum_{i=1}^{56} (y_i - \bar{y})^2 = 5299,1944 \; ; \quad \sigma_e^2 = 2,5736$$

D'où $\sigma_m = 0,0169$ — $\sigma_b = 0,9488$

$2\sigma_m = 0,0338$ — $2\sigma_b = 1,8976$

$$\left.\begin{array}{l} 0,7224 \leq m \leq 0,79 \\ -12,6729 \leq b \leq -8,7753 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} L_1 : 0,79X - 8,7753 \\ L_2 : 0,7224X - 12,6729 \\ \hat{y} : 0,7562X - 10,6729 \end{array}$$

On remarque que tous les pts sont dans le domaine limité par L_1, L_2 d'où l'estimation de m, b, r_{xy}, y

$\boxed{m = 0,7562}$ $\boxed{b = -10,6729}$ $\boxed{r_{xy} = 0,9868}$ $\boxed{y = 0,7562X - 10,6729}$

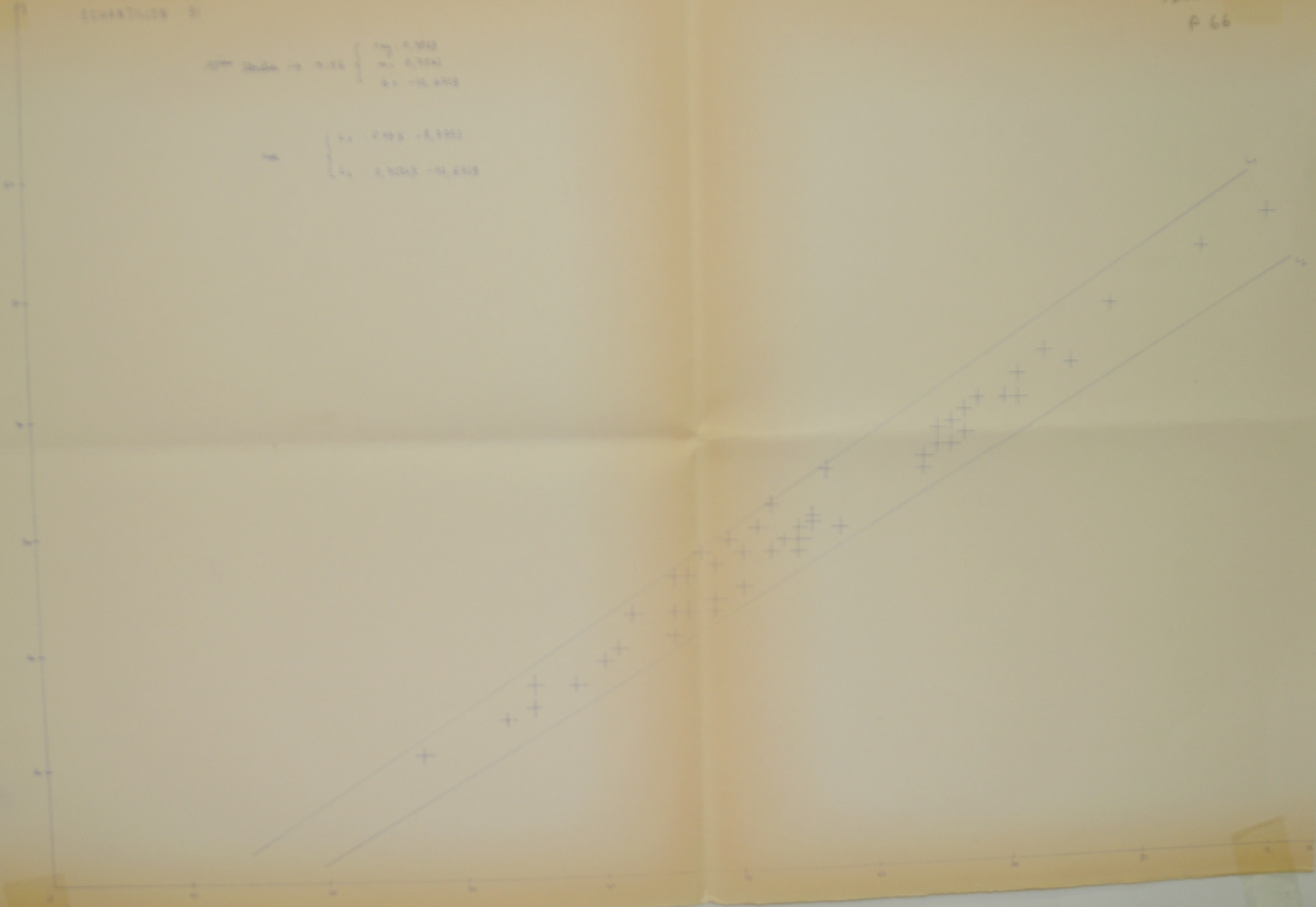
D'où l'échantillon $n = 56$

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	57	30
5	77	49
6	70	43
7	33	14
8	66	38
9	41	20
10	72	45
11	54	30
12	52	28
13	46	26
14	48	23
15	50	28
16	54	30
17	54	30
18	40	19
19	69	41
20	35	15

	X	Y
21	63	36
22	51	30
23	53	29
24	65	37
25	35	17
26	25	11
27	46	23
28	55	30,5
29	64	38,5
30	70	43
31	45	21
32	47	28
33	48	24
34	56	35
35	45	23
36	55	31
37	49	29
38	45	26
39	66	40
40	54	28

	X	Y
41	38	17
42	48	24
43	67	41
44	42	23
45	74	44
46	48	27
47	54	29
48	50	25
49	52	32
50	63	35
51	64	37
52	54	28
53	46	26
54	84	54
55	89	57
56	66	40

PI00473
P 66



En appliquant les Methodes:

- En considerant la variance de la variable Y.
- De l'Ellipse (pour t=2).

On aura les resultats suivant:

Echantillon 91

1ère Itération $n = 88 \begin{cases} r_{xy} = 0,8637 \\ m = 0,5818 \\ b = -2,6845 \end{cases}$

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	77	49
7	70	43
8	33	14
9	66	38
10	41	20
11	66	33
12	72	45
13	54	30
14	52	28
15	35	20
16	68	31
17	46	26
18	48	23
19	50	28
20	54	30
21	54	30
22	40	19
23	69	41
24	35	15
25	63	36
26	51	30
27	53	29
28	65	37
29	35	17
30	50	31

	X	Y
31	27	11
32	57	28
33	46	23
34	39	24
35	55	30,5
36	64	38,5
37	42,5	17,5
38	74,5	38
39	70	43
* 40	74	30
41	64	29
42	46	32
43	58	24
44	63	30
45	45	21
46	63	26
47	59	25
48	74	32
49	64	28
* 50	73	29
51	63	27
52	69	29
* 53	74	30
54	64	30
55	69	29
56	47	28
57	64	29
58	48	24
59	56	35
60	45	23

	X	Y
61	55	31
62	49	29
63	45	26
64	73	48
65	66	40
66	54	28
67	38	17
68	35	21
69	48	24
70	62	32
71	30	16
72	67	41
73	42	23
74	74	44
75	48	27
76	36	20
77	54	29
78	50	25
79	52	32
80	63	35
81	64	37
82	31	16
83	54	28
84	46	26
85	84	54
86	89	57
87	73	48
88	66	40

$u = \sqrt{1-\rho^2}\ S_y = 5,0625$ $\quad 2u = 10,1249$ $\quad (\rho = 0,8325\ ;\ s_y = 9,1376$ Echant. 91$)$

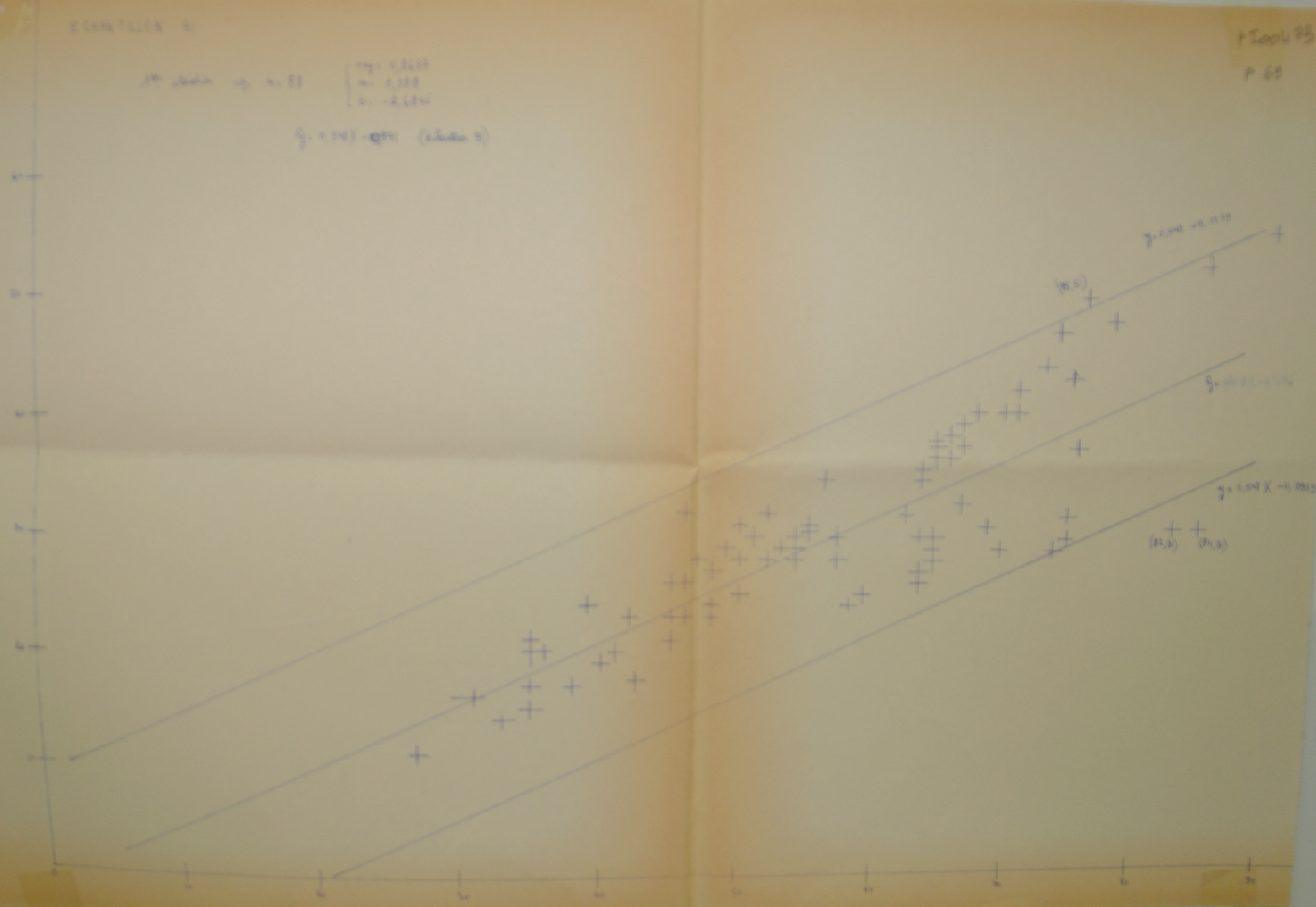
$\hat{m} = 0,548\ ;\ \hat{b} = -0,971$

$L_1 :\ \hat{m} X + \hat{b} + 2u = 0,548\,X + 9,1539$

$L_2 :\ = 0,548\,X - 11,0959$

Cette itération élimine les pts $\begin{pmatrix}75\\51\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}82\\31\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}84\\31\end{pmatrix}$ de l'échantillon $n = 91$

D'où 1ère itération $\underline{\underline{n = 88}}$



P 69

(II)

Echantillon 91

2ème Itération $\Rightarrow n = 85 \begin{cases} r_{xy} = 0,8832 \\ m = 0,6071 \\ b = -3,8481 \end{cases}$

On a : $\left. \begin{array}{l} S_y = 9,0708 \\ \rho = 0,8637 \\ \hat{m} = 0,5818 \\ \hat{b} = -2,6845 \end{array} \right\}$ Echantillon $n = 88$

D'où $u = \sqrt{1-\rho^2}\, S_y = 4,5715$; $2u = 9,1429$

D'où $\left. \begin{array}{l} L_1 : \ 0,5818\,X + 6,4584 \\ L_2 : \ 0,5818\,X - 11,8274 \end{array} \right\} \Rightarrow$ Eliminer les pts $\binom{74}{30}$; $\binom{73}{29}$; $\binom{74}{30}$

D'où l'échantillon $n = 85$

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	77	49
7	70	43
8	33	14
9	66	38
10	41	20
11	66	33
12	72	45
13	54	30
14	52	28
15	35	20
16	68	31
17	46	26
18	48	23
19	50	28
20	54	30
21	54	30
22	40	19
23	69	41
24	35	15
25	63	36
26	51	30
27	53	29
28	65	37
29	35	17
30	50	31
31	27	11
32	58	28
33	46	23
34	39	24
35	55	30,5
36	64	38,5
37	42,5	17,5
38	74,5	38
39	70	43
40	64	29
41	46	32
42	58	24
43	63	30
44	45	21
45	63	26
46	59	25
* 47	74	32
48	64	28
49	63	27
* 50	69	29
51	64	30
* 52	69	29
53	47	28
54	64	29
55	48	24
56	56	35
57	45	23
58	55	31
59	49	29
60	45	26
61	73	48
62	66	40
63	54	28
64	38	17
65	35	21
66	48	24
67	62	32
68	30	16
69	67	41
70	42	23
71	74	44
72	48	27
73	36	20
74	54	29
75	50	25
76	52	32
77	63	35
78	64	37
79	31	16
80	54	28
81	46	26
82	84	54
83	89	57
84	73	48
85	66	40

Echantillon 91

$$3^{\text{ème}} \text{ Itération} \Rightarrow n=82 \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{xy} = 0,9162 \\ m = 0,6534 \\ b = -5,9241 \end{array} \right.$$

$$\text{On a :} \left. \begin{array}{l} S_y = 9,124 \\ \rho = 0,8832 \\ \hat{m} = 0,6071 \\ \hat{b} = -3,8481 \end{array} \right\} \text{Echantillon } n=85 \text{. D'où } u = \sqrt{1-\rho^2}\, S_y = 4,2791 \ ; \quad 2u = 8,5582$$

$$\text{D'où} \left. \begin{array}{l} L_1 : \ 0,6071\,X + 4,7101 \\ L_2 : \ 0,6071\,X - 12,4063 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{pts à éliminer } \begin{pmatrix} 74 \\ 32 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 69 \\ 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 69 \\ 29 \end{pmatrix}$$

D'où l'échantillon $n=82$

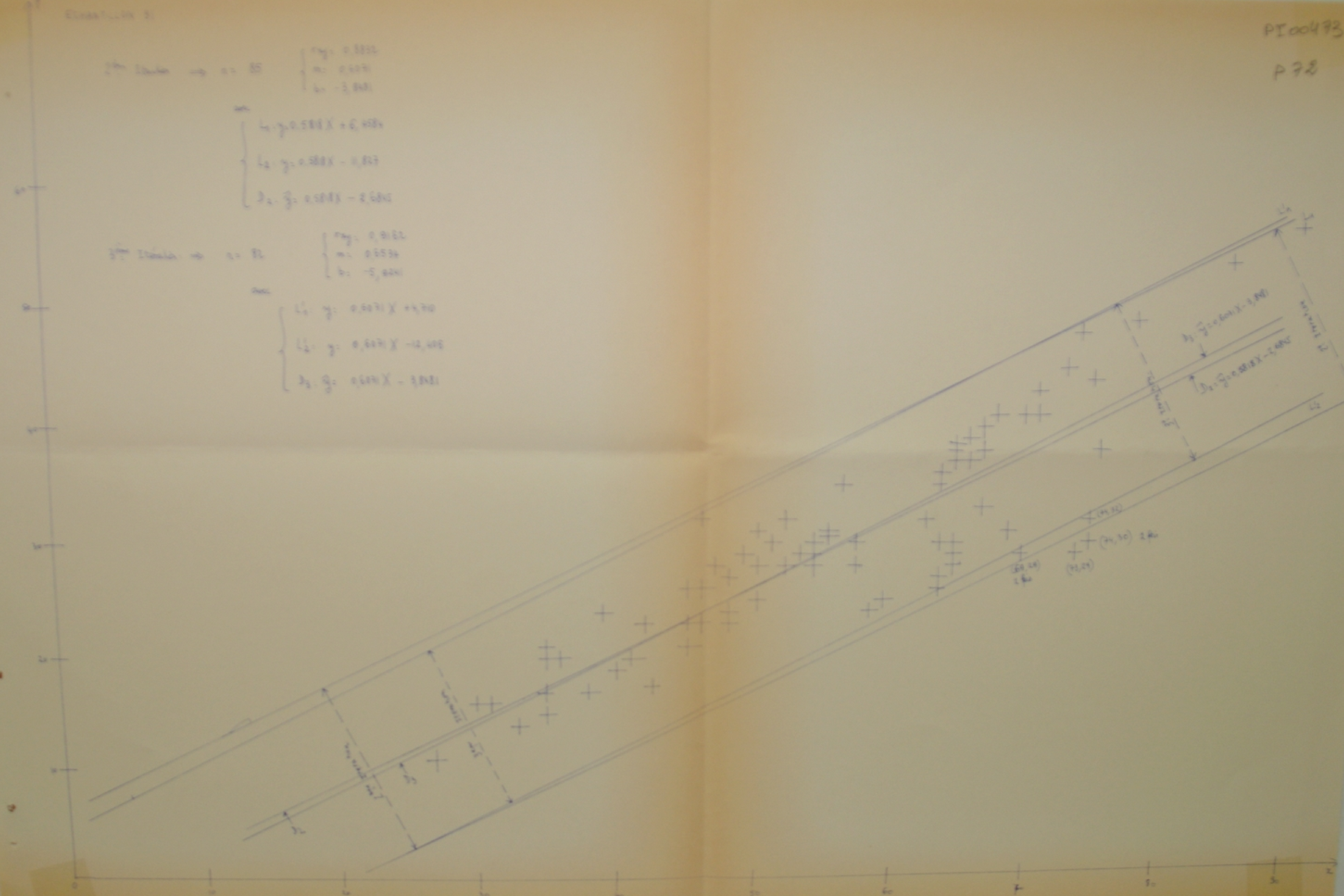
	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	77	49
7	70	43
8	33	14
9	66	38
10	41	20
11	66	33
12	72	45
13	54	30
14	52	28
15	35	20
* 16	68	31
17	46	26
18	48	23
19	50	28
20	54	30
21	54	30
22	40	19
23	69	41
24	35	15
25	63	36
26	51	30
27	53	29
28	65	37
29	35	17
30	50	31

	X	Y
31	27	11
32	57	28
33	46	23
34	39	24
35	55	30,5
36	64	38,5
37	42,5	17,5
38	74,5	38
39	70	43
40	64	29
* 41	46	32
* 42	58	24
43	63	30
44	45	21
* 45	63	26
* 46	59	25
* 47	64	28
* 48	63	27
49	64	30
50	47	28
51	64	29
52	48	24
53	56	35
54	45	23
55	55	31
56	49	29
57	45	26
58	73	48
59	66	40
60	54	28

	X	Y
61	38	17
62	35	21
63	48	24
64	62	32
65	30	16
66	67	41
67	42	23
68	74	44
69	48	27
70	36	20
71	54	29
72	50	25
73	52	32
74	63	35
75	64	37
76	31	16
77	54	28
78	46	26
79	84	54
80	89	57
81	73	48
82	66	40

PI 00473

P 72



2ème Itération → n = 85
r_{xy} = 0,8832
m = 0,6071
b = −3,8481
L_1 : y = 0,5818 X + 6,4584
L_2 : y = 0,5818 X − 11,827
D_2 : $\hat{y}$ = 0,5818 X − 2,6845
3ème Itération → n = 82
r_{xy} = 0,9162
m = 0,6534
b = −5,6041
L_1' : y = 0,6071 X + 4,710
L_2' : y = 0,6071 X − 12,406
D_3 : $\hat{y}$ = 0,6071 X − 3,8481
D_3 : $\hat{y}$ = 0,6071 X − 3,8481
D_2 : $\hat{y}$ = 0,5818 X − 2,6845
(74,32)
(74,30) 2 fois
(69,29) 2 fois
(73,29)

Ⅱ

EChantillon 91

4ème Itération ⇒ n = 75 $\begin{cases} r_{xy} = 0{,}9533 \\ m = 0{,}6877 \\ b = -7{,}2451 \end{cases}$

on a :

$\left.\begin{array}{l} S_y = 9{,}3453 \\ \rho = 0{,}9162 \\ \hat{m} = 0{,}6534 \\ \hat{b} = -5{,}9241 \end{array}\right\}$ Echantillon n = 82   D'où $u = \sqrt{1-\rho^2}\, S_y = 3{,}7449$; $2u = 7{,}4897$

D'où $\left.\begin{array}{l} L_1 : 0{,}6534X + 1{,}5656 \\ L_2 : 0{,}6534X - 13{,}4138 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Elimine les pts : $\binom{68}{31}$; $\binom{46}{32}$; $\binom{58}{24}$; $\binom{63}{26}$; $\binom{59}{25}$; $\binom{64}{28}$; $\binom{63}{27}$

D'où l'échantillon n = 75

	X	Y		X	Y		X	Y
1	70	41	26	53	29	51	73	48
2	65	39	27	65	37	52	66	40
3	45	21	28	35	17	53	54	28
4	64	38	29	50	31	54	38	17
5	57	30	30	27	11	55	35	21
6	77	49	31	57	28	56	48	24
7	70	43	32	46	23	57	62	32
8	33	14	33	39	24	58	30	16
9	66	38	34	55	30,5	59	67	41
10	41	20	35	64	38,5	60	42	23
11	66	33	36	42,5	17,5	61	74	44
12	72	45	* 37	74,5	38	62	48	27
13	54	30	38	70	43	63	36	20
14	52	28	* 39	64	29	64	54	29
15	35	20	40	63	30	65	50	25
16	46	26	41	45	21	66	52	32
17	48	23	42	47	28	67	63	35
18	50	28	* 43	64	30	68	64	37
19	54	30	* 44	64	29	69	31	16
20	54	30	45	48	24	70	54	28
21	40	19	46	56	35	71	46	26
22	69	41	47	45	23	72	84	54
23	35	15	48	55	31	73	89	57
24	63	36	49	49	29	74	73	48
25	51	30	50	55	26	75	66	40

(II)

Echantillon 91

$5^{ème}$ Itération $\Rightarrow n = 71$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,9699 \\ m = 0,7158 \\ b = -8,3498 \end{cases}$

On a :

$\left.\begin{array}{l} S_y = 9,7134 \\ \rho = 0,9533 \\ \hat{m} = 0,6877 \\ \hat{b} = -7,2451 \end{array}\right\}$ Echantillon n = 75

D'où $u = \sqrt{1-\rho^2}\, S_y = 2,9337$; $2u = 5,8674$

D'où $L_1 : 0,6877\,X - 1,3777$

$L_2 : 0,6877\,X - 13,1125$

$\Rightarrow$ pts à éliminer $\binom{74,5}{38}$; $\binom{64}{29}$; $\binom{64}{30}$; $\binom{64}{29}$

D'où l'échantillon n = 71

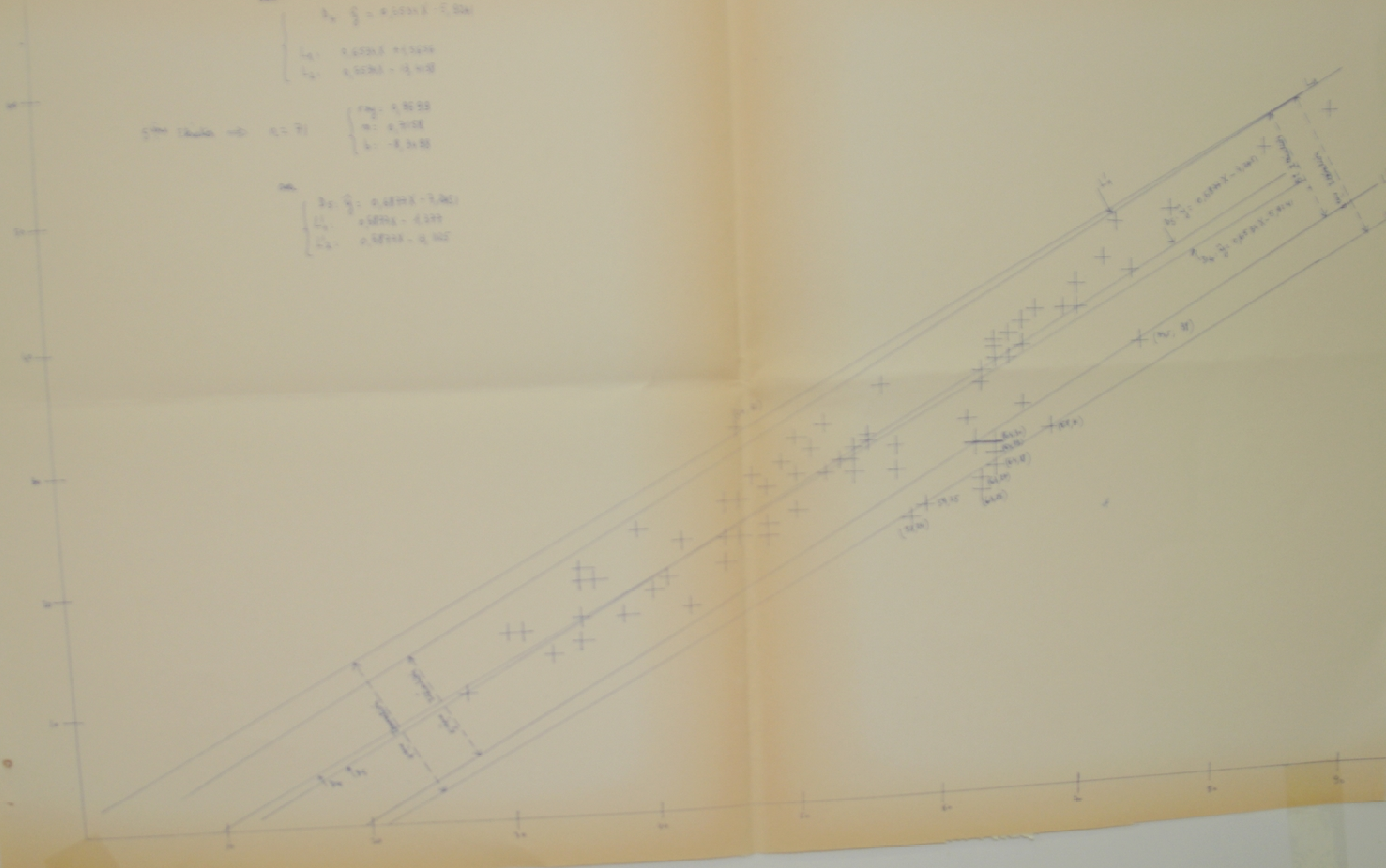
	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	77	49
7	70	43
8	33	14
9	66	38
10	41	20
* 11	66	33
12	72	45
13	54	30
14	52	28
15	35	20
16	46	26
17	48	23
18	50	28
19	54	30
20	54	30
21	40	19
22	69	41
23	35	15
24	63	36
25	51	30

	X	Y
26	53	29
27	65	37
28	35	17
29	50	31
30	27	11
31	57	28
32	46	23
33	39	24
34	55	30,5
35	64	38,5
36	42,5	17,5
37	70	43
* 38	63	30
39	45	21
40	47	28
41	48	24
42	56	35
43	45	23
44	55	31
45	49	29
46	45	26
47	73	48
48	66	40
49	54	28
50	38	17

	X	Y
51	35	21
52	48	24
53	62	32
54	30	16
55	67	41
56	42	23
57	74	44
58	48	27
59	36	20
60	54	29
61	50	25
62	52	32
63	63	35
64	64	37
65	31	16
66	54	28
67	46	26
68	84	54
69	89	57
70	73	48
71	66	40

PI00473

A.75



Echantillon 91

$6^{\text{ème}}$ Itération $\Rightarrow n = 69$ $\begin{cases} r_{xy} : 0,9762 \\ m : 0,727 \\ b : -8,7638 \end{cases}$

On a :

$\left.\begin{array}{l} S_y : 9,9947 \\ \rho : 0,9699 \\ \hat{m} : 0,7158 \\ \hat{b} : -8,3498 \end{array}\right\}$ Echantillon 71 D'où $u : \sqrt{1-\rho^2}\, S_y = 2,4216$; $2u = 4,8431$

D'où $\left.\begin{array}{l} L_1 : 0,7158X - 3,5067 \\ \\ L_2 : 0,7158X - 13,1929 \end{array}\right\}$ pts à éliminer $\begin{pmatrix} 66 \\ 33 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 63 \\ 30 \end{pmatrix}$

D'où l'échantillon $n = 69$

		X	Y
	1	70	41
	2	65	39
	3	45	21
	4	64	38
	5	57	30
	6	77	49
	7	70	43
	8	33	14
	9	66	38
	10	41	20
	11	72	45
	12	54	30
	13	52	28
	14	35	20
	15	46	26
	16	48	23
	17	50	28
	18	54	30
	19	54	30
	20	40	19
	21	69	41
	22	35	15
	23	63	36
	24	51	30
	25	53	29
	26	65	37
	27	35	17
	28	50	31
	29	27	11
*	30	57	28
	31	46	23
*	32	39	24
	33	55	30,5
	34	64	38,5
*	35	42,5	17,5
	36	70	43
	37	45	21
	38	47	28
	39	48	24
	40	56	35
	41	45	23
	42	55	31
	43	49	29
	44	45	26
	45	73	48
	46	66	40
	47	54	28
	48	38	17
*	49	35	21
	50	48	24
*	51	62	32
	52	30	16
	53	67	41
	54	42	23
	55	74	44
	56	48	27
	57	36	20
	58	54	29
	59	50	25
	60	52	32
	61	63	35
	62	64	37
	63	31	16
	64	54	28
	65	46	26
	66	84	54
	67	89	57
	68	73	48
	69	66	40

Echantillon 91

I

$7^{ième}$ Itération $\Rightarrow n = 64$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,9831 \\ m = 0,7394 \\ b = -9,3588 \end{cases}$

On a :

$\left.\begin{array}{l} S_y = 10,086 \\ \rho = 0,9762 \\ \hat{m} = 0,727 \\ \hat{b} = -8,7638 \end{array}\right\}$ Echantillon $n = 69$ D'où $u = \sqrt{1-\rho^2}\, S_y = 2,1874$; $2u = 4,3747$

D'où $\left.\begin{array}{l} L_1 : 0,727X - 4,3891 \\ L_2 : 0,727X - 13,1385 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ pts à éliminer : $\binom{57}{28}$; $\binom{39}{24}$; $\binom{44,5}{13,5}$; $\binom{35}{21}$; $\binom{62}{32}$

D'où l'échantillon $n = 64$.

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	77	49
7	70	43
8	33	14
9	66	38
10	41	20
11	72	45
12	54	30
13	52	28
14	35	20
15	46	26
16	48	23
17	50	28
18	54	30
19	54	30
20	40	19
21	69	41
22	35	15
23	63	36
24	51	30
25	53	29
26	65	37
27	35	17
28	50	31
29	27	11
30	46	23
31	55	30,5
32	64	38,5
33	70	43
34	45	21
35	47	28
36	48	24
37	56	35
38	45	23
39	55	31
40	49	29
41	45	26
42	73	48
43	66	40
44	54	28
45	38	17
46	48	24
47	30	16
48	67	41
49	42	23
50	74	44
51	48	27
52	36	20
53	54	29
54	50	25
55	52	32
56	63	35
57	64	37
58	31	16
59	54	28
60	46	26
61	84	54
62	89	57
63	73	48
64	66	40

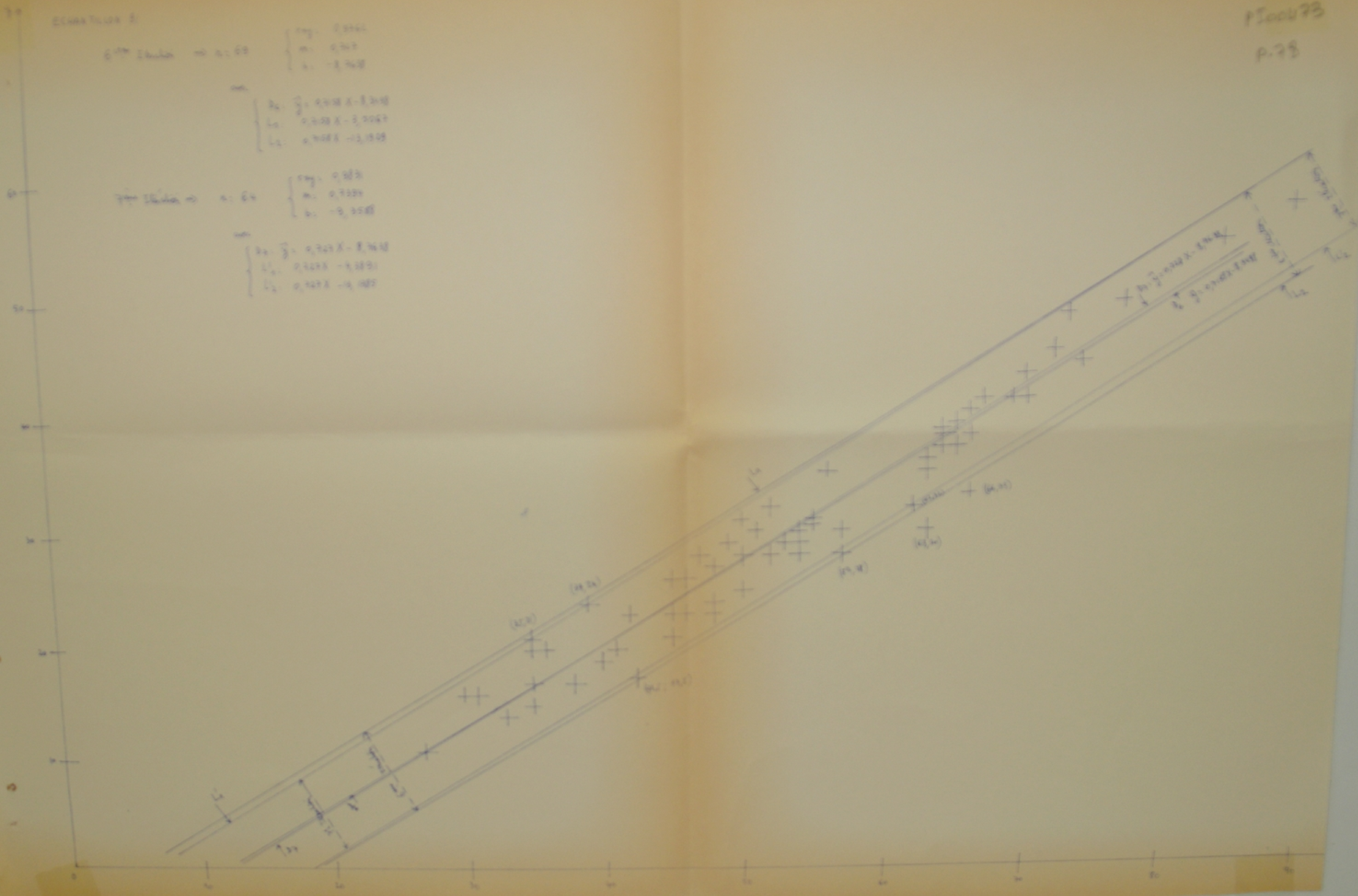
$8^{ième}$ itération :

On a $\left.\begin{array}{l} \rho = 0,9831 \\ \hat{m} = 0,7394 \\ \hat{b} = -9,3588 \\ S_y = 10,1324 \end{array}\right\}$ échantillon $n = 64$ D'où $u = \sqrt{1-\rho^2}\, S_y = 1,8549$; $2u = 3,7099$

et $\begin{cases} L_1 : 0,7394X - 5,6489 \\ L_2 : 0,7394X - 13,0687 \end{cases}$

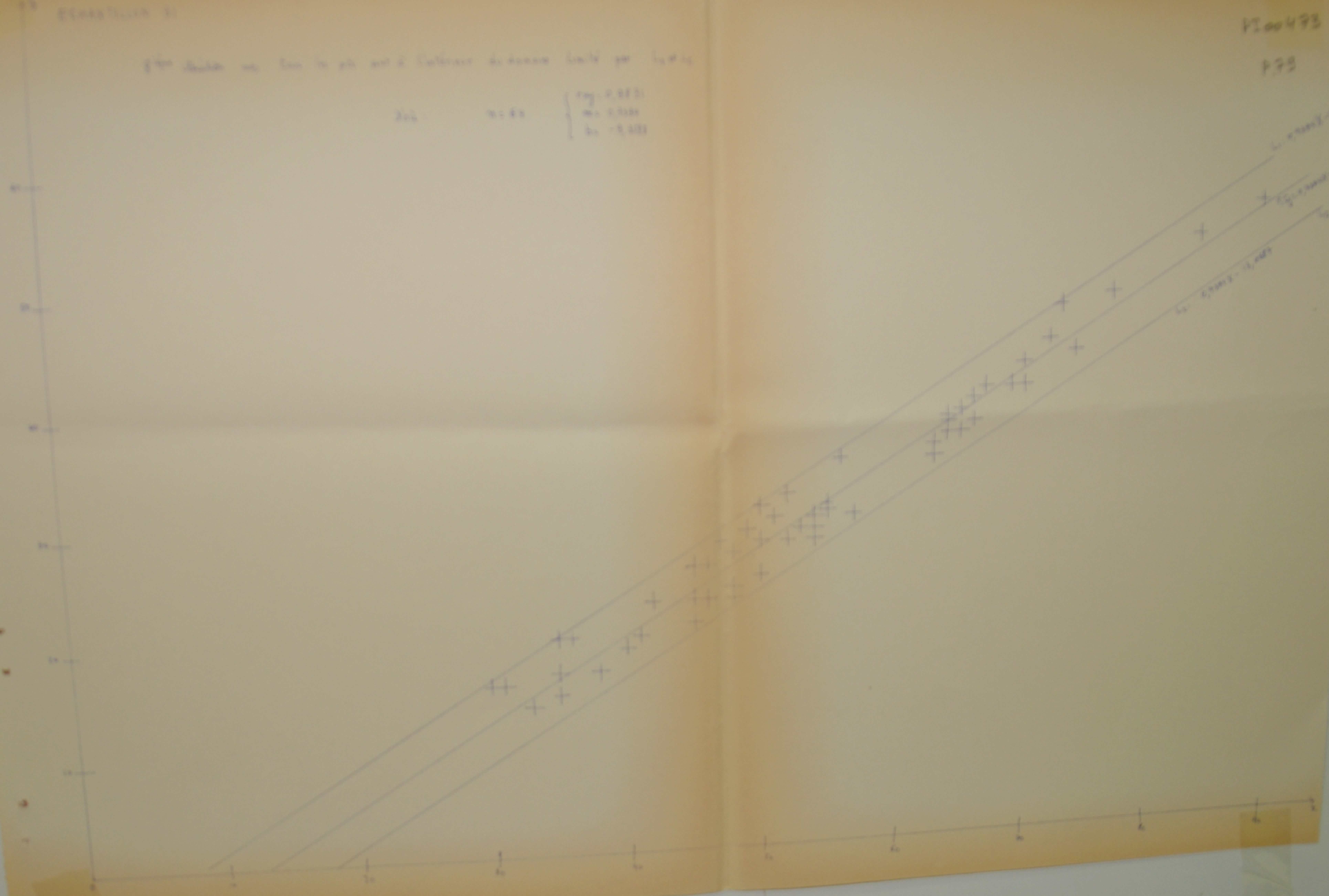
on remarque que tous les pts sont à l'intérieur du domaine limité par L_1 et L_2

D'où $\boxed{r_{xy} = 0,9831 \qquad \hat{m} = 0,7394 \qquad \hat{b} = -9,3588}$



VI 00473

P.73



Echantillon 91

1ère Itération → $n = 79$ $\begin{cases} r_{xy} = 0{,}8574 \\ a = 0{,}5424 \\ b = -0{,}6157 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 91$ on a :

$\bar{x} = 56{,}9778$ $\quad \bar{y} = 30{,}25$ $\quad r_{xy} = 0{,}8325$
$s_x^2 = 192{,}7349$ $\quad s_y^2 = 83{,}4957$

D'où l'ellipse centrée en $(\bar{x}, \bar{y})$ → pts à éliminer : $\binom{77}{49}$; $\binom{75}{51}$ $\binom{27}{11}$ $\binom{82}{31}$ $\binom{74}{30}$ $\binom{73}{29}$
$\binom{84}{31}$ $\binom{74}{30}$ $\binom{73}{48}$ $\binom{84}{54}$ $\binom{89}{57}$ $\binom{73}{48}$

D'où l'échantillon $n = 79$

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	70	43.
7	33	14
8	66	38
9	41	20
10	66	33
11	72	45
12	54	30
13	52	28
14	35	20
15	68	31
16	46	26
17	48	23
18	50	28
19	54	30
20	54	30
21	40	19
22	69	41
23	35	15
24	63	36
25	51	30

	X	Y
26	53	29
27	65	37
28	35	17
29	50	31
30	57	28
31	46	23
32	39	24
33	55	30,5
34	64	38,5
35	42,5	17,5
36	74,5	38
37	70	43
38	64	29
39	46	32
40	58	24
41	63	30
42	45	21
43	63	26
44	59	25
45	74	32
46	64	28
47	63	27
48	69	29
49	64	30
50	69	29

	X	Y
51	47	28
52	64	29
53	48	24
54	56	35
55	45	23
56	55	31
57	49	29
58	45	26
59	66	40
60	54	28
61	38	17
62	35	21
63	48	24
64	62	32
65	30	16
66	67	41
67	42	23
68	74	44
69	48	27
70	36	20
71	54	29
72	50	25
73	52	32
74	63	35
75	64	37
76	31	16
77	54	28
78	46	26
79	66	40

II

Echantillon 91

9ème Itération → n: 69 $\begin{cases} r_{xy}: 0,8806 \\ m: 0,5864 \\ b: -2,7632 \end{cases}$

En considérant l'échantillon n=79 on a:

$\bar{x} = 54,3974$ $\bar{y} = 28,891$ $r_{xy} = 0,8574$

$s_x^2 = 136,9893$ $s_y^2 = 54,8289$

Soit l'ellipse centrée en $(\bar{x},\bar{y})$ → pts à éliminer: $\binom{30}{16}\binom{31}{16}\binom{33}{14}\binom{46}{32}\binom{63}{26}$ $\binom{69}{29}\binom{69}{23}\binom{74}{32}\binom{72}{45}\binom{74}{44}$

Soit l'échantillon n=69

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	70	43
7	66	38
8	41	20
9	66	33
10	72	45
11	54	30
12	52	28
13	35	20
14	68	31
15	46	26
16	48	23
17	50	28
18	54	30
19	54	30
20	40	19
21	69	41
22	35	15
23	63	36
24	51	30
25	53	29

	X	Y
26	65	37
27	35	17
28	50	31
29	57	28
30	46	23
31	39	24
32	55	30,5
33	64	38,5
34	42,5	17,5
35	74,5	38
36	64	29
37	58	24
38	63	30
39	45	21
40	59	25
41	64	28
42	63	27
43	64	30
44	64	29
45	47	28
46	48	24
47	56	35
48	45	23
49	55	31
50	49	29

	X	Y
51	45	26
52	66	40
53	54	28
54	38	17
55	35	21
56	48	24
57	62	32
58	67	41
59	42	23
60	48	27
61	36	20
62	54	29
63	50	25
64	63	35
65	64	37
66	54	28
67	46	26
68	66	40
69	52	32

III

Echantillon 91

3ᵉ Itération $\rightarrow$ $n = 57$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,9332 \\ m = 0,65 \\ b = -5,4642 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 69$ on a :

$\bar{x} = 54,209$ $\quad$ $\bar{y} = 29,1103$ $\quad$ $r_{xy} = 0,8806$

$S_x^2 = 111,4633$ $\quad$ $S_y^2 = 49,3123$

l'ellipse centrée sur $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow$ pts à éliminer : $\begin{pmatrix} 70 \\ 43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 72 \\ 45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 74,5 \\ 38 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 64 \\ 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 58 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 59 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 \\ 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 63 \\ 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 \\ 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 35 \\ 21 \end{pmatrix}$

D'où l'échantillon $n = 57$

	X	Y		X	Y		X	Y
1	70	41	21	53	29	41	66	40
2	65	39	22	65	37	42	54	28
3	45	21	23	35	17	43	38	17
4	64	38	24	50	31	44	48	24
5	57	30	25	57	28	45	62	32
6	66	38	26	46	23	46	67	41
7	41	20	27	39	24	47	42	23
8	66	33	28	55	30,5	48	48	27
9	54	30	29	64	38,5	49	36	20
10	52	28	30	42,5	17,5	50	54	29
11	35	20	31	63	30	51	50	25
12	46	26	32	45	21	52	63	35
13	48	23	33	64	30	53	64	37
14	50	28	34	47	28	54	54	28
15	54	30	35	48	24	55	46	26
16	54	30	36	56	35	56	66	40
17	40	19	37	45	23	57	52	32
18	69	41	38	55	31			
19	63	36	39	49	29			
20	51	30	40	45	26			

Echantillon 91

4ème itération $\to n : 50$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,9614 \\ m = 0,7201 \\ b = -8,981 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n : 57$ on a :

$\bar{x} = 53,0625$ $\bar{y} = 29,0268$ $r_{xy} = 0,9332$

$S_x^2 = 92,9824$ $S_y^2 = 6,7159$

L'ellipse centrée en $(\bar{x}, \bar{y})$ on a : pts à éliminer : $\binom{66}{33}\binom{35}{20}\binom{39}{24}\binom{42,5}{17,5}\binom{63}{30}\binom{64}{30}\binom{36}{20}$

D'où l'échantillon $n : 50$:

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	66	38
7	41	20
8	54	30
9	52	28
10	46	26
11	48	23
12	50	28
13	54	30
14	54	30
15	40	19
16	69	41
17	63	36
18	51	30
19	53	29
20	65	37

	X	Y
21	35	17
22	50	31
23	57	28
24	46	23
25	55	30,5
26	64	38,5
27	45	21
28	47	28
29	48	24
30	56	35
31	45	23
32	55	31
33	49	29
34	45	26
35	66	40

	X	Y
36	54	28
37	38	17
38	48	24
39	62	32
40	67	41
41	42	23
42	48	27
43	54	29
44	50	25
45	63	35
46	64	37
47	54	28
48	46	26
49	66	40
50	52	32

Echantillon 91

5ième itération → n = 44 $\begin{cases} r_{xy} : 0,9726 \\ m : 0,7347 \\ b : -9,8086 \end{cases}$

En considérant l'échantillon n = 50 on a :

$\bar{x} = 53,5918$ $\quad \bar{y} = 29,6122$ $\quad r_{xy} = 0,9614$

$S_x^2 = 79,9133$ $\quad S_y^2 = 44,2736$

L'ellipse centré en $(\bar{x},\bar{y})$ → pts à éliminer : $\binom{35}{17}$; $\binom{50}{31}$; $\binom{57}{28}$

$\binom{56}{35}$; $\binom{62}{32}$; $\binom{52}{32}$

D'où l'échantillon n = 44

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	66	38
7	41	20
8	54	30
9	52	28
10	46	26
11	48	23
12	50	28
13	54	30
14	54	30
15	40	19
16	69	41
17	63	36
18	51	30
19	53	29
20	65	37
21	46	23
22	55	30,5
23	64	38,5
24	45	21
25	47	28
26	48	24
27	45	23
28	55	31
29	49	29
30	45	26
31	66	40
32	54	28
33	38	17
34	48	24
35	67	41
36	42	23
37	48	27
38	54	29
39	50	25
40	63	35
41	64	37
42	54	28
43	46	26
44	66	40

Echantillon 91

$6^{\text{ème}}$ itération $\rightarrow n = 42 \begin{cases} r_{xy} = 0,9781 \\ m = 0,7499 \\ b = -10,7773 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 44$ on a :

$\bar{x} = 53,4884$ $\bar{y} = 29,4884$ $r_{xy} = 0,9726$
$s_x^2 = 75,8749$ $s_y^2 = 43,2915$

L'ellipse centrée en $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow$ élimination des pts $\binom{47}{28}$; $\binom{45}{26}$

D'où l'échantillon $n = 42$:

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	66	38
7	41	20
8	54	30
9	52	28
10	46	26
11	48	23
12	50	28
13	54	30
14	54	30
15	40	19

	X	Y
16	69	41
17	63	36
18	51	30
19	53	29
20	65	37
21	46	23
22	55	30,5
23	64	38,5
24	45	21
25	48	24
26	45	23
27	55	31
28	49	29
29	66	40
30	54	28

	X	Y
31	38	17
32	48	24
33	67	41
34	42	23
35	48	27
36	54	29
37	50	25
38	63	35
39	64	37
40	54	28
41	46	26
42	66	40

Echantillon 91

7ième itération → $n=40 \begin{cases} r_{xy} = 0,9821 \\ m = 0,7651 \\ b = -11,7383 \end{cases}$

En considérant l'échantillon n=42 on a :

$\bar{x} = 53,8537$ $\bar{y} = 29,6098$ $r_{xy} = 0,9781$

$s_x^2 = 76,678$ $s_y^2 = 45,0814$

L'ellipse centrée en $(\bar{x}, \bar{y})$ → élimination des pts : $\binom{49}{29}$; $\binom{42}{23}$

D'où l'échantillon n = 40

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	66	38
7	41	20
8	54	30
9	52	28
10	46	20
11	48	23
12	50	28
13	54	30
14	54	30
15	40	19
16	69	41
17	63	36
18	51	30
19	53	29
20	65	37

	X	Y
21	46	23
22	55	30,5
23	64	38,5
24	45	21
25	48	24
26	45	23
27	55	31
28	66	40
29	54	28
30	38	17
31	48	24
32	67	41
33	48	27
34	54	29
35	50	25
36	63	35
37	64	37
38	54	28
39	46	26
40	66	40

Echantillon 91

$8^{\text{ième}}$ itération $\rightarrow n = 37$, $\begin{cases} r_{xy} = 0{,}9883 \\ a = 0{,}7825 \\ b = -12{,}9307 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 40$ on a :

$\bar{x} = 54{,}2821$ $\bar{y} = 29{,}7949$ $r_{xy} = 0{,}9821$

$S_x^2 = 76{,}2028$ $S_y^2 = 46{,}2594$

L'ellipse centrée en $(\bar{x}, \bar{y})$ $\rightarrow$ pts à éliminer $\begin{pmatrix} 54 \\ 28 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 46 \\ 26 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 51 \\ 30 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 46 \\ 26 \end{pmatrix}$

D'où l'échantillon $n = 37$

	X	Y
1	70	41
2	65	39
3	45	21
4	64	38
5	57	30
6	66	38
7	41	20
8	54	30
9	52	28
10	48	23
11	50	28
12	54	30
13	54	30
14	40	19
15	69	41

	X	Y
16	63	36
17	53	29
18	65	37
19	46	23
20	55	30,5
21	64	38,5
22	45	21
23	48	24
24	45	23
25	55	31
26	66	40
27	54	28
28	38	17
29	48	24
30	67	41

	X	Y
31	48	27
32	54	29
33	50	25
34	63	35
35	64	37
36	54	28
37	66	40

(II)

Echantillon 91

$9^{ème}$ Itération $\rightarrow n = 33 \begin{cases} r_{xy} = 0,9891 \\ m = 0,7843 \\ b = -13,0636 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 37$ on a :

$\bar{x} = 54,5714$ $\bar{y} = 29,7714$ $r_{xy} = 0,9883$

$s_x^2 = 77,958$ $s_y^2 = 48,8727$

L'ellipse centrée en $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow$ pts à éliminer : $\binom{45}{21} \binom{45}{21} \binom{69}{41} \binom{48}{27}$

D'où l'échantillon $n = 33$

	Y	Y
1	70	41
2	65	39
3	64	38
4	57	30
5	66	38
6	41	20
7	54	30
8	52	28
9	48	23
10	50	28
11	54	30

	X	Y
12	54	30
13	40	19
14	63	36
15	53	29
16	65	37
17	46	23
18	55	30,5
19	64	38,5
20	48	24
21	45	23
22	55	31

	X	Y
23	66	40
24	54	28
25	38	17
26	48	24
27	67	41
28	54	29
29	50	25
30	63	35
31	64	37
32	54	28
33	66	40

II

Echantillon 91

10ème Itération → n = 30 $\begin{cases} r_{xy} = 0,9897 \\ m = 0,7848 \\ b = -13,0476 \end{cases}$

En considérant l'échantillon n = 33 on a :

$\bar{x} = 54,625$ $\bar{y} = 28,7813$ $r_{xy} = 0,9898$
$s_x^2 = 74,4355$ $s_y^2 = 46,8064$

L'ellipse centrée en $(\bar{x}, \bar{y})$ → élimination des pts : $\binom{50}{28}$ $\binom{67}{41}$ $\binom{70}{41}$

D'où l'échantillon n = 30

	X	Y
1	65	39
2	57	30
3	66	38
4	41	20
5	54	30
6	52	28
7	47	23
8	54	30
9	54	30
10	40	19

	X	Y
11	63	36
12	53	29
13	65	37
14	46	23
15	30,55	30,5
16	64	38,5
17	48	24
18	45	23
19	55	31
20	66	40

	X	Y
21	54	28
22	38	17
23	48	24
24	54	29
25	50	25
26	63	35
27	64	37
28	54	28
29	66	40
30	64	38

Echantillon 91

$11^{ème}$ itération → $n=30$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,9897 \\ m = 0,7848 \\ b = -13,0476 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n=30$ on a :

$\bar{x} = 54,2333$ $\bar{y} = 29,4333$ $r_{xy} = 0,9897$
$s_x^2 = 60,7023$ $s_y^2 = 44,7195$

L'ellipse centrée en $(\bar{x},\bar{y})$ → tous les pts appartiennent à l'ellipse

D'où une estimation de r_{xy}, m, b, y

$\boxed{r_{xy} = 0,9897}$ $\boxed{m = 0,7848}$ $\boxed{b = -13,0476}$ $\boxed{y = 0,7848X - 13,0476}$

D'où l'échantillon $n=30$

	X	Y
1	65	39
2	64	38
3	57	30
4	66	38
5	41	20
6	54	30
7	52	28
8	48	23
9	54	30
10	54	30

	X	Y
11	40	19
12	63	36
13	53	29
14	65	37
15	46	23
16	55	30,5
17	64	38,5
18	48	24
19	45	23
20	55	31

	X	Y
21	66	40
22	54	28
23	38	17
24	48	24
25	54	29
26	50	25
27	63	35
28	64	37
29	54	28
30	66	40

ECHANTILLON 74

r_{xy} = 0,4537
m = 0,0 863
b = 0,0034

	X	Y
1	70	0,38
2	54	0,48
3	32	0,28
4	35	0,19
5	65	0,32
6	45	0,45
7	64	0,46
8	57	0,39
9	16	0,055
10	77	0,33
11	70	0,39
12	40	0,075
13	30	0,01
14	54	0,34
15	40	0,268
16	41	0,333
17	72	0,374
18	54	0,26
19	45	0,184
20	52	0,394
21	46	0,59
22	17	0,026
23	31	0,237
24	27	0,11
25	35	0,287

	X	Y
26	23	0,212
27	35	0,15
28	41	0,31
29	43	0,3
30	46	0,13
31	43	0,324
32	50	0,22
33	54	0,369
34	54	0,27
35	48	0,38
36	51	0,376
37	26	0,08
38	69	0,35
39	18	0,162
40	35	0,3
41	63	0,37
42	51	0,22
43	75	0,23
44	35	0,36
45	50	0,32
46	27	0,172
47	57	0,141
48	22	0,08
49	46	0,182
50	74	0,42

	X	Y
51	46	0,41
52	63	0,46
53	63	0,255
54	45	0,097
55	74	0,155
56	73	0,13
57	63	0,14
58	74	0,23
59	57	0,21
60	48	0,16
61	45	0,134
62	55	0,165
63	49	0,218
64	20	0,042
65	55	0,182
66	39	0,215
67	75	0,278
68	70	0,4
69	89	0,36
70	73	0,21
71	54	0,122
72	40	0,083
73	36	0,116
74	44	0,125

Les variables X et Y désignant dans ce cas:

X : Limite de liquidité W_L

Y : l'indice de compression Cc

nous allons tester s'il existe une relation linéaire entre Cc et W_L: $Cc = m\,W_L + b$ et quel est le degré de la liaison entre Cc et W_L; et ceci en appliquant les ≠ tests.

1) Le tset de normalité est traité dans les tableaux ci-joint.

2) <u>Test de signification du coeff de corrélation</u> (comparaison de r à =0)

— En appliquant la 1ère méthode du fait que n 50 et r=0,4537

on a : $t = \frac{r-\rho}{\sigma_r} = \frac{r-\rho}{1-\rho^2}\sqrt{n-1} = r\sqrt{n-1} = \underline{\underline{3{,}8774}}$

or $t \longrightarrow N(0,1)$; pour =5% on a $t_\alpha = 1{,}96$ on remarque que $t > t_\alpha$: la vraie valeur de est différente de 0 et il une relation entre X et Y

— En appliquant la 2ème méthode (corrélation transformée)

on a : $t = \frac{z' - 0}{\sigma_{z'}} = z'\sqrt{n-3}$; la table de FISHER donne pour r= 0,4537 z'= 0,489 ;d'où t= $0{,}489\sqrt{71} = \underline{\underline{4{,}117}}$

or $t \longrightarrow N(0,1)$; pour α =5% on a $t_\alpha = 1{,}96$

On remarque que $t > t_\alpha$ on peut affirmer avec un risque de 5% que la vraie valeur de ρ est différente de 0 et qu'il existe une relation entre X et Y.

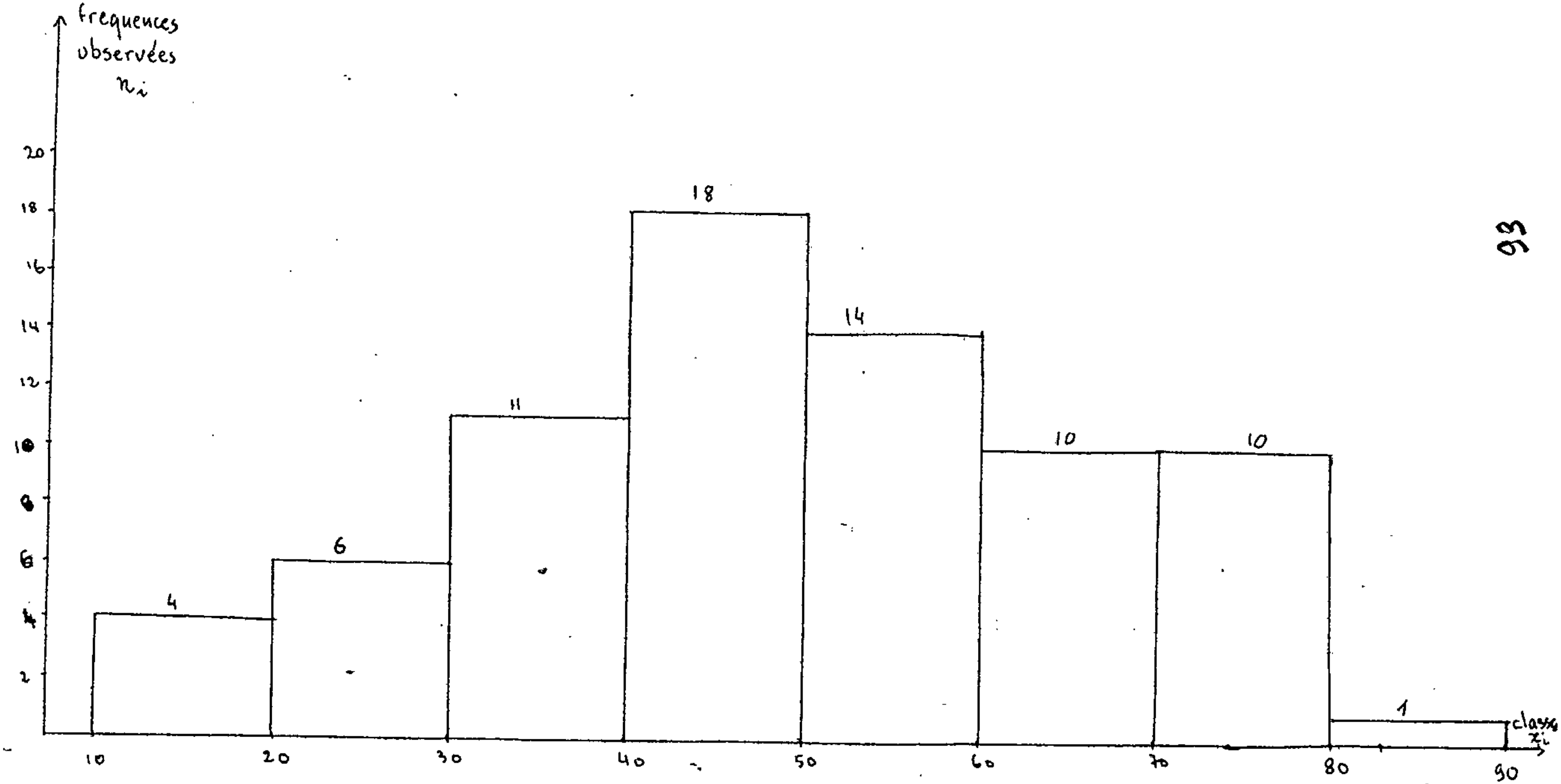
— En applicant la 3ième méthode :

La table de la distribution de r donne pour un seuil de 5% et ν = 74-2= 72 r_α = 0,229

On remarque que $r > r_\alpha$: la vraie valeur de ρ est ≠ de 0 d'où il existe une relation entre X et Y pas forcement lineaire du fait de faible valeur de r.

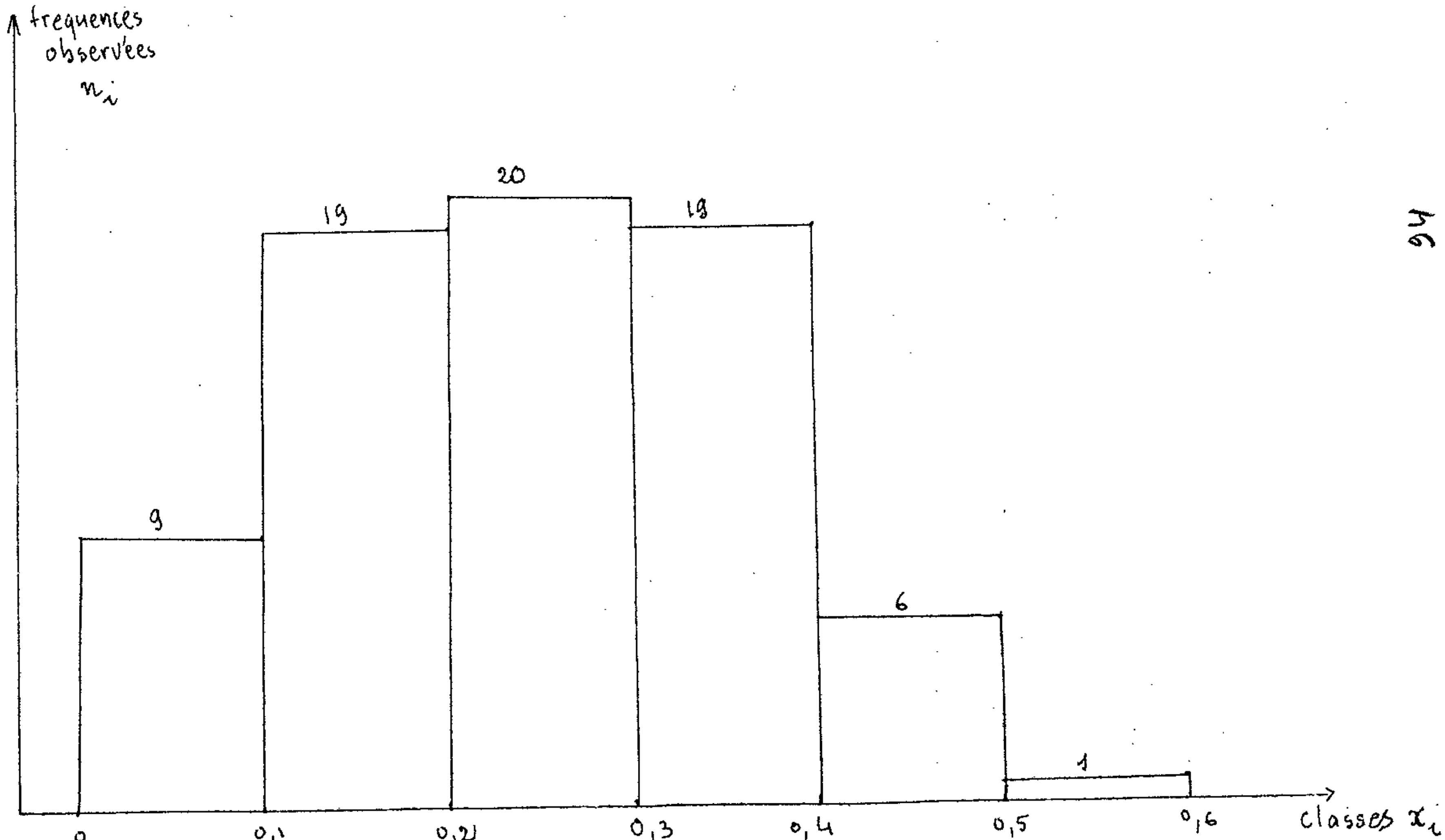
ECHANTILLON 74

Histogramme de la distribution de la variable X



ECHANTILLON 74

Histogramme de la distribution de Y



Echantillon 74

Test de χ^2 pour Y

On a $\bar{Y} = 0,2533$; $s_y = 0,1256$

Classes	$t_i = \frac{y_i - 0,2533}{0,1256}$		$\Pi(t)$		$p_i = \Pi(t_i) - \Pi(t_{i-1})$	Np_i	n_i	$n_i - Np_i$	$(n_i - Np_i)^2$	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
	t_{i-1}	t_i	$\Pi(t_{i-1})$	$\Pi(t_i)$						
0 - 0,1	-2,0088	-1,2126	0,0223	0,1126	0,0903	6,6822	9	2,3178	5,3722	0,8040
0,1 - 0,2	-1,2126	-0,4464	0,1126	0,3386	0,226	16,724	19	2,276	5,1802	0,3097
0,2 - 0,3	-0,4464	0,3798	0,3386	0,648	0,3094	22,8956	20	-2,8956	8,3845	0,3662
0,3 - 0,4	0,3798	1,1760	0,648	0,8802	0,2322	17,1828	19	1,8172	3,3022	0,1922
0,4 - 0,6	1,176	1,9721	0,8802	0,9972	0,117	8,658	7	-1,658	2,749	0,3175

$\Sigma = 74$ $\qquad$ $\chi^2_c = 1,9896$

or pour $\alpha = 1\%$ et $\nu = (5-1) - 2 = 2$ on a $\chi^2_{\alpha,\nu} = 9,21$

- on remarque que $\chi^2_c < \chi^2_\alpha \Rightarrow$ Y suit une loi normale

Echantillon 74

Test de χ^2 pour X

On a $\bar{x} = 49,4658$, $s_x = 16,7838$

Classe	$t_i = \frac{x_i - 49,4658}{16,7838}$		$\Pi(t)$		$p_i = \Pi(t_i) - \Pi(t_{i-1})$	Np_i	n_i	$n_i - Np_i$	$(n_i - Np_i)^2$	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
	t_{i-1}	t_i	$\Pi(t_{i-1})$	$\Pi(t_i)$						
10 - 30	-2,3514	-1,1598	0,0092	0,123	0,1138	8,4212	11	2,5788	6,6502	0,7897
30 - 40	-1,1598	-0,564	0,123	0,2864	0,1634	12,091	11	-1,091	1,1916	0,0986
40 - 50	-0,564	0,0318	0,2864	0,513	0,2266	16,7684	18	1,2316	1,5168	0,0905
50 - 60	0,0318	0,6276	0,513	0,735	0,222	16,428	14	-2,428	5,8952	0,3588
60 - 70	0,6276	1,2235	0,735	0,8895	0,1545	11,433	10	-1,433	2,0535	0,1796
70 - 90	1,2235	2,4151	0,8895	0,9922	0,1027	7,5998	10	2,4002	5,761	0,758

$\Sigma = 74$ $\qquad$ $\chi^2_c = 2,2752$

or pour $\alpha = 1\%$ et $\nu = (6-1) - 2 = 3$ on a $\chi^2_{\alpha,\nu} = 11,345$

On remarque que $\chi^2_c < \chi^2_{\alpha,\nu}$ $\Rightarrow$ X suit une loi Normale

E C H A N T I L L ON 74

Nous n'avons pas voulu appliquer la methode de l'ellipse du fait que pour t=2 cette methode est trop sélective (elimination des 2/3 des points).

En appliquant les deux autres methodes on aura les resultats suivant :

ECHANTILLON 74

Application de la méthode des droites en biais

Il faut, pour cela, vérifier les hypothèses imposées par le modèle:

- L'ensemble des couples(X_i, Y_i)est un échantillon aléatoire représentatif prélevé dans la population où Y est en relation avec X (critère vérifié précedemment

- Les valeurs Y_i sont entachées d'erreurs ε_i inconnues que l'on peut considérer de moyenne nulle: $E(\varepsilon_i) = 0$ et de distribution $N(0,6^2)$ du fait que Y est une variable normale et que X est une variable explicative.

- Les erreurs ε_n et ε_θ relatives à 2 observations n et θ sont indépendantes entre elles.

- En dehors de l'échantillon on ne dispose d'aucune information sur les coefficients numériques m et b.

- Les hypothèses précedentes étant vérifiées on peut appliquer la méthode des droites en biais à l'échantillon n= 74 dont les résultats sont exposés ci-après:

Echantillon 74

$1^{ère}$ Itération $\longrightarrow n = 65$ $\quad r_{xy} = 0,544$; $m = 0,0034$; $b = 0,0723$

En considérant l'échantillon 74 ma :

$\bar{x} = 49,4658$ $\qquad \bar{y} = 0,2523$ $\qquad r_{xy} = 0,4537$

$S_x = 16,7838$ $\qquad S_y = 0,1256$ $\qquad m = 0,0034$

$\bar{x}^2 = 2446,865$ $\qquad S_y^2 = 0,0158$ $\qquad b = 0,0863$

$S_x^2 = 281,696$

$$\sum_{i=1}^{74}(x_i - \bar{x})^2 = 20\,563,808 \qquad \sum_{i=1}^{74}(y_i - \bar{y})^2 = 1,1534 \qquad \sigma_e^2 = 0,0127$$

D'où $\sigma_m = 0,00079$ $\qquad \sigma_b = 0,0410$

$2\sigma_m = 0,00158$ $\qquad 2\sigma_b = 0,082$

$$\left.\begin{array}{l} 0,0018 < m \leq 0,0049 \\ 0,0042 < b \leq 0,1683 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0,0049\,X + 0,1683 \\ L_2 : 0,0018\,X + 0,0042 \\ \hat{y} : 0,0034\,X + 0,0863 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à éliminer : } (9)$$

$\binom{46}{0,59}$; $\binom{54}{0,48}$; $\binom{45}{0,41}$ $\binom{46}{0,41}$ $\binom{35}{0,36}$

$\binom{17}{0,023}$; $\binom{30}{0,01}$; $\binom{40}{0,075}$; $\binom{73}{0,13}$

D'où l'échantillon $n = 65$

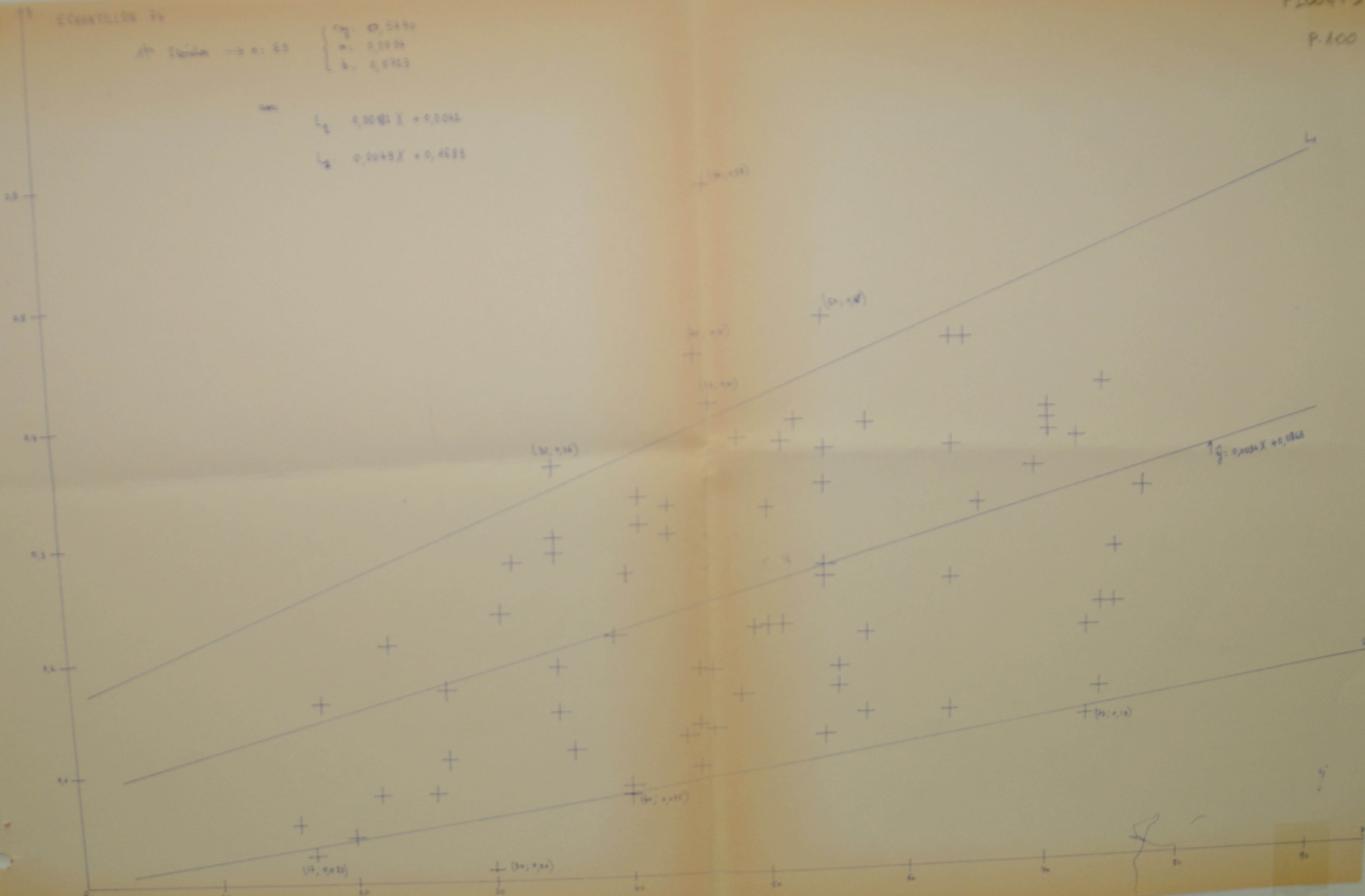
	X	Y
1	70	0,38
2	32	0,28
3	35	0,19
4	65	0,32
5	64	0,46
6	16	0,055
7	77	0,33
8	70	0,39
9	54	0,34
10	40	0,268
11	72	0,374
12	54	0,26
13	45	0,184
14	52	0,394
15	31	0,237
16	27	0,11
17	35	0,287
18	23	0,212
19	35	0,15
20	41	0,31
21	43	0,3
22	46	0,13
23	43	0,324

	X	Y
24	50	0,22
25	54	0,369
26	54	0,27
27	48	0,38
28	51	0,376
29	26	0,08
30	69	0,35
31	18	0,162
32	35	0,3
33	63	0,37
34	51	0,22
35	75	0,23
36	50	0,32
37	27	0,172
38	22	0,08
39	46	0,182
40	74	0,42
41	57	0,141
42	63	0,46
43	63	0,255
44	74	0,155
45	74	0,23

	X	Y
46	63	0,14
47	57	0,21
48	48	0,16
49	45	0,134
50	55	0,165
51	49	0,218
52	20	0,042
53	55	0,182
54	39	0,215
55	75	0,278
56	70	0,4
57	89	0,36
58	73	0,21
59	54	0,122
60	40	0,083
61	36	0,116
62	44	0,125
63	57	0,39
64	41	0,333
65	45	0,097

PI00473

P.100



Echantillon 74

2° Itération $\longrightarrow$ $n = 60$ $\begin{cases} r_{xy} = 0{,}5758 \\ m = 0{,}0034 \\ b = 0{,}0733 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 65$ on a :

$\bar{x} = 50{,}371$ $\bar{y} = 0{,}2482$ $r_{xy} = 0{,}544$

$s_x = 16{,}7696$ $s_y = 0{,}108$ $m = 0{,}0034$

$\bar{x}^2 = 2537{,}2376$ $s^2_y = 0{,}0117$ $b = 0{,}0723$

$S^2_x = 281{,}2195$

$\sum_{i=1}^{65} (x_i - \bar{x})^2 = 17\,998{,}048$ $\sum_{i=1}^{65} (y_i - \bar{y})^2 = 0{,}7465$ $\sigma_e^2 = 0{,}00834$

D'où $\sigma_m = 0{,}00068$ $\sigma_b = 0{,}0361$

$2\sigma_m = 0{,}00136$ $2\sigma_b = 0{,}0722$

$\left.\begin{array}{l} 0{,}0021 \le m \le 0{,}0048 \\ 0{,}0001 \le b \le 0{,}1445 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0{,}0048X + 0{,}1445 \\ L_2 : 0{,}0021X + 0{,}0001 \\ \hat{y} : 0{,}0034X + 0{,}0723 \end{array}\right\} \rightarrow$ pts à éliminer : (5)

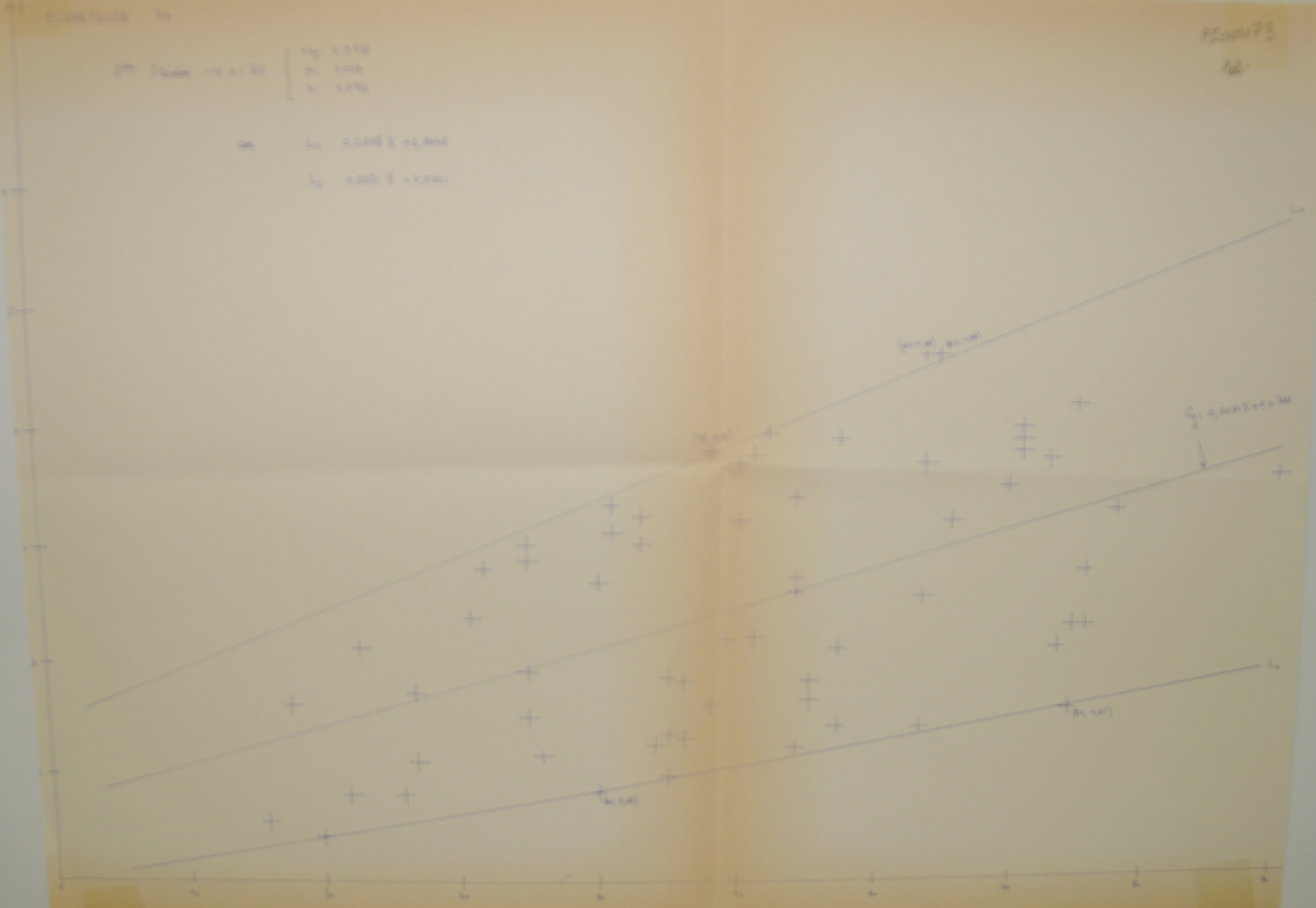
$\binom{74}{0{,}151}; \binom{40}{0{,}083}; \binom{48}{0{,}38}; \binom{63}{0{,}46}; \binom{64}{0{,}46}$

D'où l'échantillon $n = 60$

	X	Y
1	70	0,38
2	32	0,28
3	35	0,19
4	65	0,32
5	16	0,055
6	77	0,33
7	70	0,39
8	54	0,34
9	40	0,268
10	72	0,374
11	54	0,26
12	45	0,184
13	52	0,394
14	31	0,237
15	27	0,11
16	35	0,287
17	23	0,212
18	35	0,15
19	41	0,31
20	43	0,3

	X	Y
21	46	0,13
22	43	0,324
23	54	0,369
24	50	0,22
25	54	0,27
26	51	0,376
27	26	0,08
28	69	0,35
29	18	0,162
30	35	0,3
31	63	0,37
32	51	0,22
33	75	0,23
34	50	0,32
35	27	0,172
36	22	0,08
37	46	0,182
38	74	0,42
39	57	0,141
40	63	0,255

	X	Y
41	74	0,23
42	63	0,14
43	57	0,21
44	48	0,16
45	45	0,134
46	55	0,165
47	49	0,218
48	20	0,042
49	55	0,182
50	39	0,215
51	75	0,278
52	70	0,4
53	89	0,36
54	73	0,21
55	54	0,122
56	36	0,116
57	44	0,125
58	57	0,39
59	41	0,333
60	45	0,095



Echantillon 74.

$3^{ème}$ Itération $\rightarrow n = 54$ $\begin{cases} r_{xy} = 0{,}6088 \\ m = 0{,}0033 \\ b = 0{,}0816 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 60$ on a

$\bar{x} = 49{,}7627$ $\quad$ $\bar{y} = 0{,}2431$ $\quad$ $r_{xy} = 0{,}5758$

$S_x = 17{,}0388$ $\quad$ $S_y = 0{,}101$ $\quad$ $m = 0{,}0034$

$\bar{x}^2 = 2476{,}3275$ $\quad$ $S_y^2 = 0{,}0102$ $\quad$ $b = 0{,}0733$

$S_x^2 = 290{,}322$

$$\sum_{i=1}^{60} (x_i - \bar{x})^2 = 17128{,}998 \qquad \sum_{i=1}^{60} (y_i - \bar{y})^2 = 0{,}6018 \qquad \sigma_e^2 = 0{,}0069$$

D'où $\quad \sigma_m = 0{,}00063 \quad\quad \sigma_b = 0{,}0331$

$2\sigma_m = 0{,}00126 \quad\quad 2\sigma_b = 0{,}0662$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}0021 \leq m \leq 0{,}0046 \\ 0{,}0071 \leq b \leq 0{,}1395 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0{,}0046X + 0{,}1395 \\ L_2 : 0{,}0021X + 0{,}0071 \\ y = 0{,}0034X + 0{,}0733 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à éliminer : (6)}$$

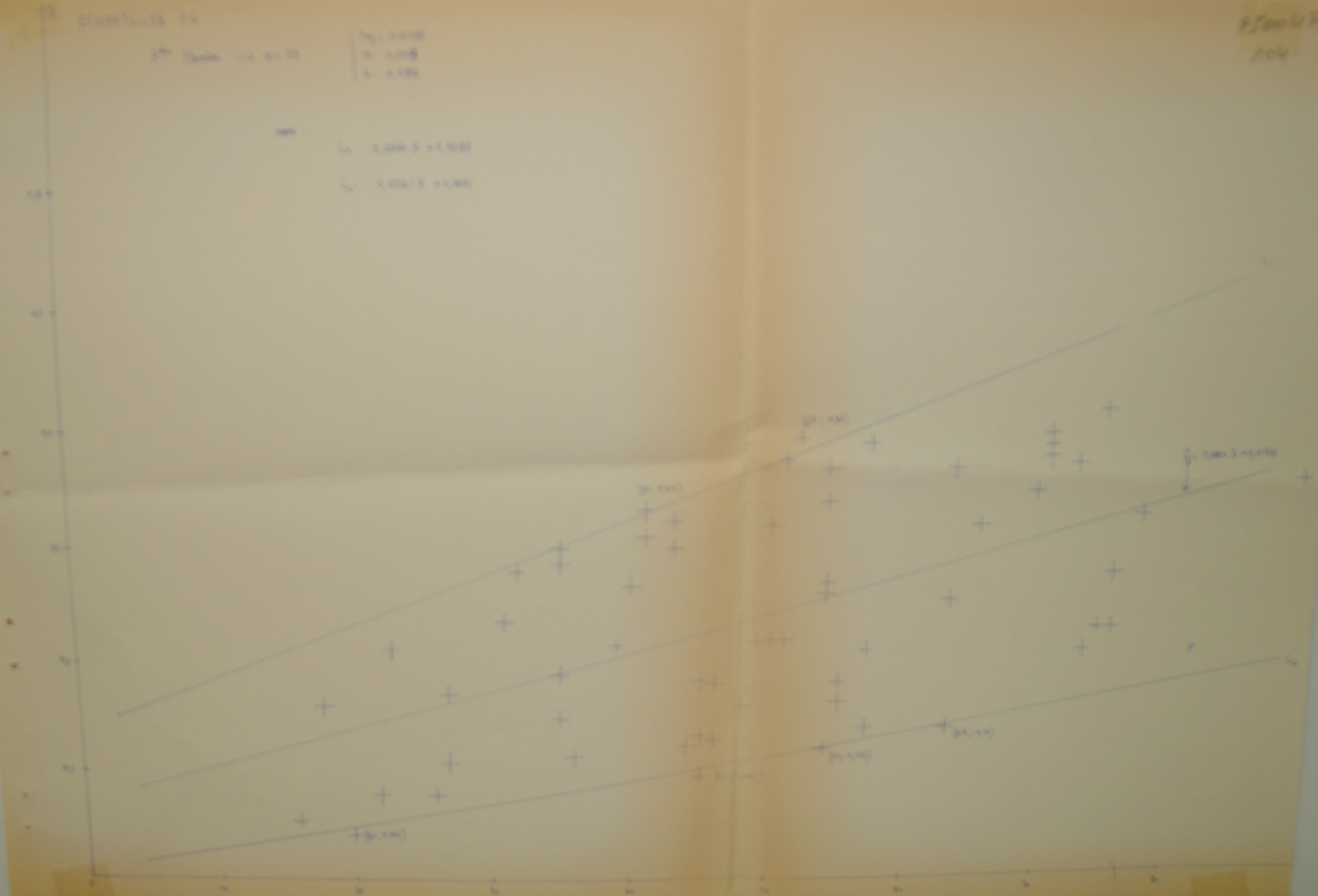
$\binom{63}{0{,}14}; \binom{54}{0{,}122}; \binom{45}{0{,}097}; \binom{20}{0{,}042}; \binom{57}{0{,}39}; \binom{41}{0{,}333}$

D'où l'échantillon $n = 54$:

	X	Y
1	70	0,38
2	32	0,28
3	35	0,19
4	65	0,32
5	16	0,055
6	77	0,33
7	70	0,39
8	54	0,34
9	40	0,268
10	72	0,374
11	54	0,26
12	45	0,184
13	52	0,394
14	31	0,237
15	27	0,11
16	35	0,287
17	23	0,212
18	35	0,15
19	41	0,31
20	43	0,3

	X	Y
21	46	0,13
22	43	0,324
23	50	0,22
24	54	0,369
25	54	0,27
26	51	0,376
27	26	0,08
28	69	0,35
29	18	0,162
30	35	0,3
31	63	0,37
32	51	0,22
33	75	0,23
34	50	0,32
35	27	0,172
36	22	0,08
37	46	0,182
38	74	0,42
39	57	0,141
40	63	0,255

	X	Y
41	74	0,23
42	57	0,21
43	48	0,16
44	45	0,134
45	55	0,165
46	49	0,218
47	55	0,182
48	39	0,215
49	75	0,278
50	70	0,4
51	89	0,36
52	73	0,21
53	36	0,116
54	44	0,125



Echantillon 74

4ième Itération → $n = 52$ $\left\{ \begin{array}{l} r_{xy} = 0,6298 \\ m = 0,0033 \\ b = 0,0801 \end{array} \right.$

En considérant l'échantillon $n = 54$ on a :

$\bar{x} = 50,1132$ $\quad \bar{y} = 0,252$ $\quad r_{xy} = 0,6088$

$S_x = 17,3212$ $\quad S_y = 0,0943$ $\quad m = 0,0033$

$\bar{x}^2 = 2511,3336$ $\quad S_y^2 = 0,0089$ $\quad b = 0,0816$

$S_x^2 = 300,0254$

$\sum_{i=1}^{54} (x_i - \bar{x})^2 = 15901,346$ $\quad \sum_{i=1}^{54} (y_i - \bar{y})^2 = 0,4716$ $\quad \sigma_e^2 = 0,00571$

D'où : $\sigma_m = 0,0006$ $\quad \sigma_b = 0,0317$

$2\sigma_m = 0,0012$ $\quad 2\sigma_b = 0,0634$

$\left. \begin{array}{l} 0,0022 \leq m \leq 0,0046 \\ 0,0182 \leq b \leq 0,145 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} L_1 : 0,0046X + 0,145 \\ L_2 : 0,0022X + 0,0182 \\ \hat{y} : 0,0033X + 0,0816 \end{array} \right\} \rightarrow$ pts à éliminer : $\binom{55}{0,165}$; $\binom{52}{0,394}$

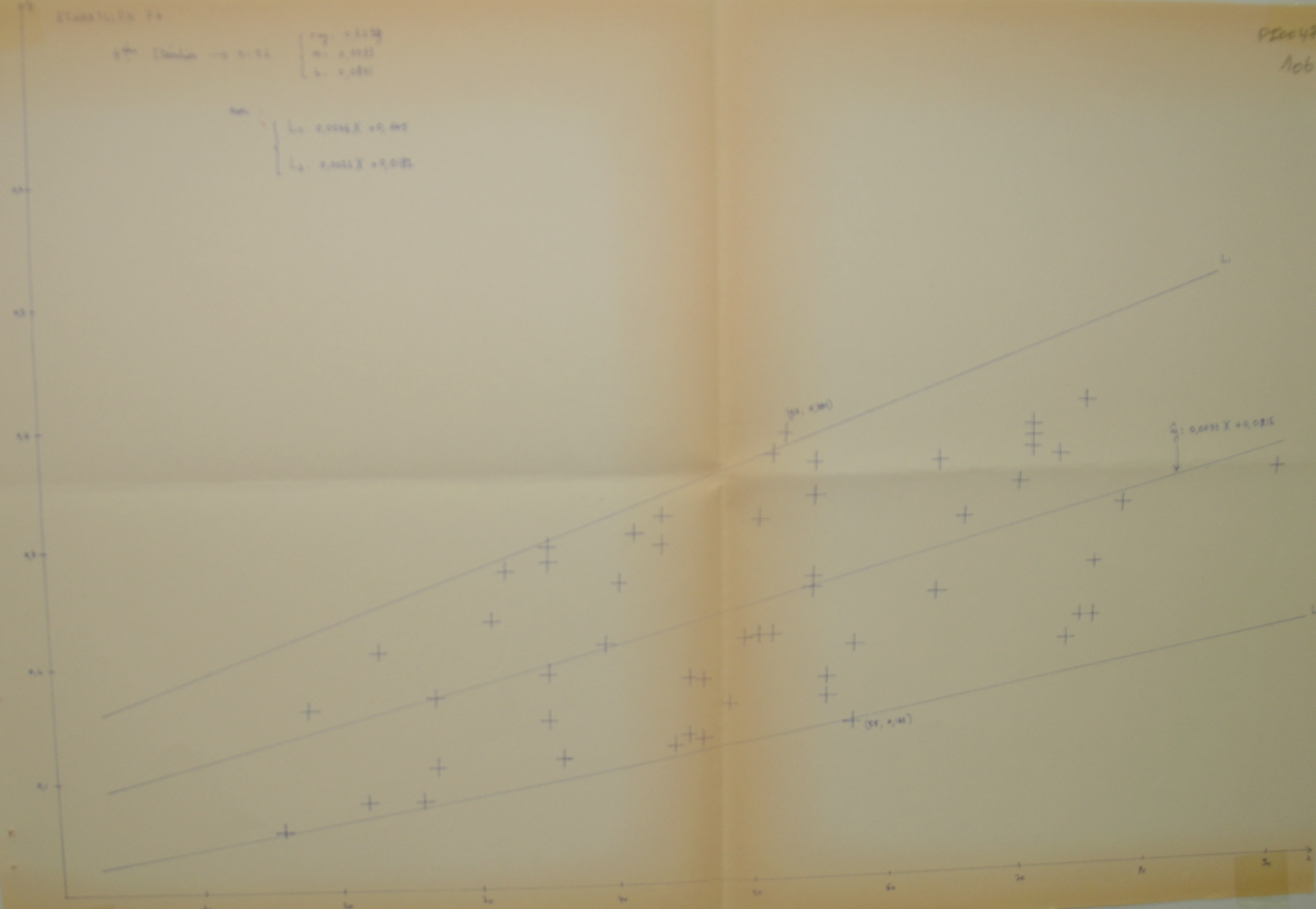
D'où l'échantillon $n = 52$

	X	Y
1	70	0,38
2	32	0,28
3	35	0,19
4	65	0,32
5	16	0,055
6	77	0,33
7	70	0,39
8	54	0,34
9	40	0,268
10	72	0,374
11	54	0,26
12	45	0,184
13	31	0,237
14	27	0,11
15	35	0,287
16	23	0,212
17	35	0,15
18	41	0,31
19	43	0,3
20	46	0,13

	X	Y
21	43	0,324
22	50	0,22
23	54	0,369
24	54	0,27
25	51	0,376
26	26	0,08
27	69	0,35
28	18	0,162
29	35	0,3
30	63	0,37
31	51	0,22
32	75	0,23
33	50	0,32
34	27	0,172
35	22	0,08
36	46	0,182
37	74	0,42
38	57	0,141
39	63	0,255
40	74	0,23

	X	Y
41	57	0,21
42	48	0,16
43	45	0,134
44	49	0,218
45	55	0,182
46	39	0,215
47	75	0,278
48	70	0,4
49	89	0,36
50	73	0,21
51	36	0,116
52	44	0,125

PI00473
106



I

Echantillon 74

$5^{\text{ième}}$ Itération → $n = 49$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,6764 \\ m = 0,0035 \\ b = 0,0705 \end{cases}$

. En considérant l'échantillon $n = 52$ on a :

$\bar{x} = 49,9804$ $\bar{y} = 0,2482$ $r_{xy} = 0,6299$

$S_x = 17,6482$ $S_y = 0,0942$ $m = 0,0033$

$\bar{x}^2 = 2498,0396$ $S_y^2 = 0,0088$ $b = 0,0801$

$S_x^2 = 311,4596$

$\sum_{i=1}^{52} (x_i - \bar{x})^2 = 15884,4401$ $\sum_{i=1}^{52} (y_i - \bar{y})^2 = 0,4528$ $\sigma_e^2 = 0,00546$

D'où $\sigma_m = 0,00059$ $\sigma_b = 0,0310$

$2\sigma_m = 0,00118$ $2\sigma_b = 0,0620$

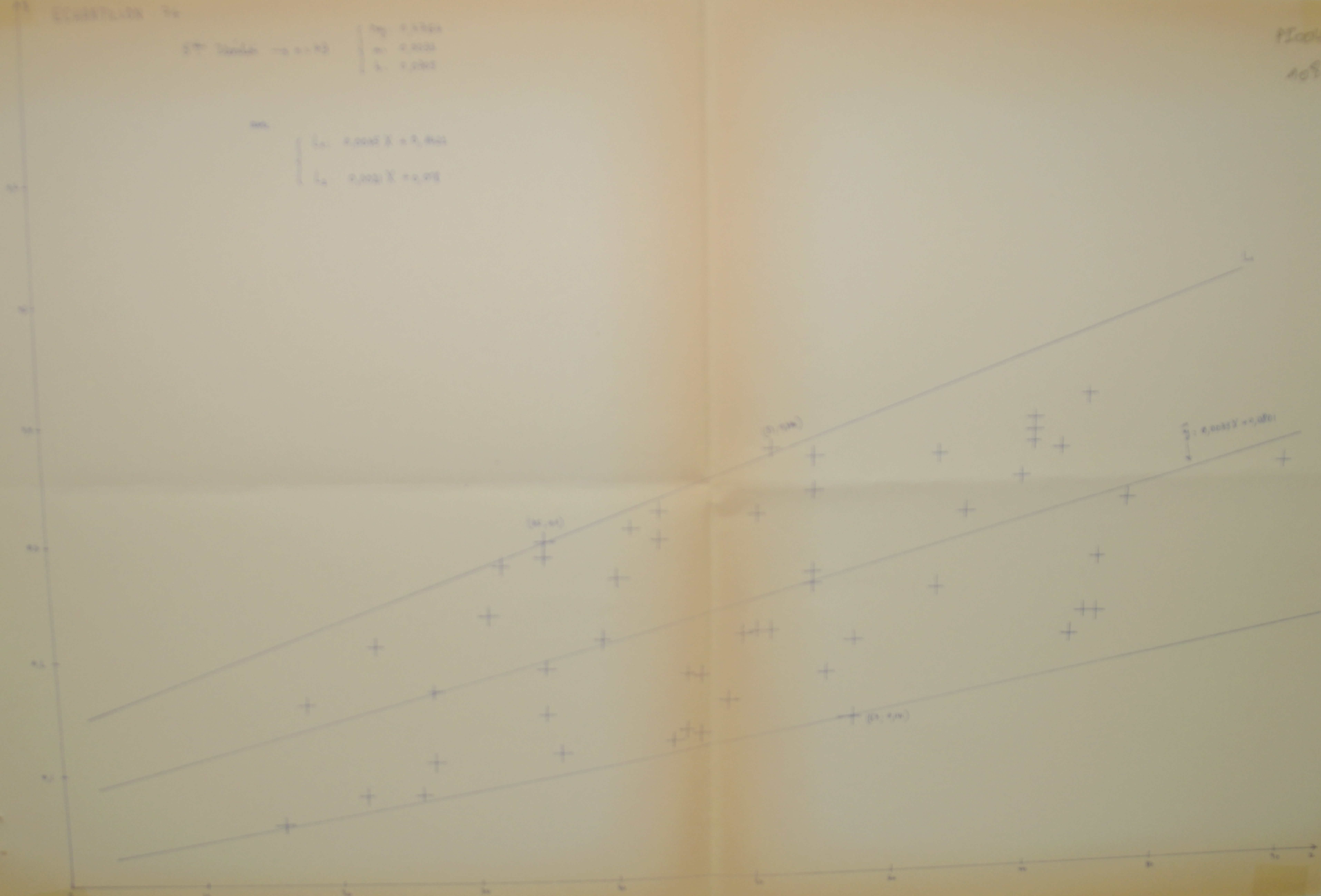
$\left.\begin{matrix} 0,0021 \leq m \leq 0,0045 \\ 0,0180 \leq b \leq 0,1422 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ $\left.\begin{matrix} L_1 : 0,0045 X + 0,1422 \\ L_2 : 0,0021 X + 0,018 \\ \hat{y} : 0,0033 X + 0,0801 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ pts à éliminer : $\binom{57}{0,141} ; \binom{51}{0,316} ; \binom{35}{0,3}$

D'où l'échantillon $n = 49$

	X	Y
1	70	0,38
2	32	0,28
3	35	0,19
4	65	0,32
5	16	0,055
6	77	0,33
7	70	0,39
8	54	0,34
9	40	0,268
10	72	0,374
11	54	0,26
12	45	0,184
13	31	0,237
14	27	0,11
15	35	0,287
16	23	0,212
17	35	0,15
18	41	0,31
19	43	0,3
20	46	0,13

	X	Y
21	43	0,324
22	50	0,22
23	54	0,369
24	54	0,27
25	26	0,08
26	69	0,35
27	18	0,162
28	63	0,37
29	51	0,22
30	75	0,23
31	50	0,32
32	27	0,172
33	22	0,08
34	46	0,182
35	74	0,42
36	63	0,255
37	74	0,23
38	57	0,21
39	48	0,16
40	45	0,134

	X	Y
41	49	0,218
42	55	0,182
43	39	0,215
44	75	0,278
45	70	0,4
46	89	0,36
47	73	0,21
48	36	0,116
49	44	0,125



Echantillon 74

6ème Itération $\rightarrow$ $n = 48$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,6927 \\ m = 0,0036 \\ b = 0,0623 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 49$ on a :

$\bar{x} = 50,125$ — $\bar{y} = 0,2468$ — $r_{xy} = 0,6764$

$s_x = 18,0404$ — $s_y = 0,0938$ — $m = 0,0035$

$\bar{x}^2 = 2512,5156$ — $s_y^2 = 0,0088$ — $b = 0,0705$

$s_x^2 = 325,4734$

$\sum_{i=1}^{49} (x_i - \bar{x})^2 = 15622,7232$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{49} (y_i - \bar{y})^2 = 0,4224$ $\qquad$ $\sigma_e^2 = 0,00487$

D'où : $\sigma_m = 0,00056$ $\qquad$ $\sigma_b = 0,02971$

$2\sigma_m = 0,00112$ $\qquad$ $2\sigma_b = 0,0594$

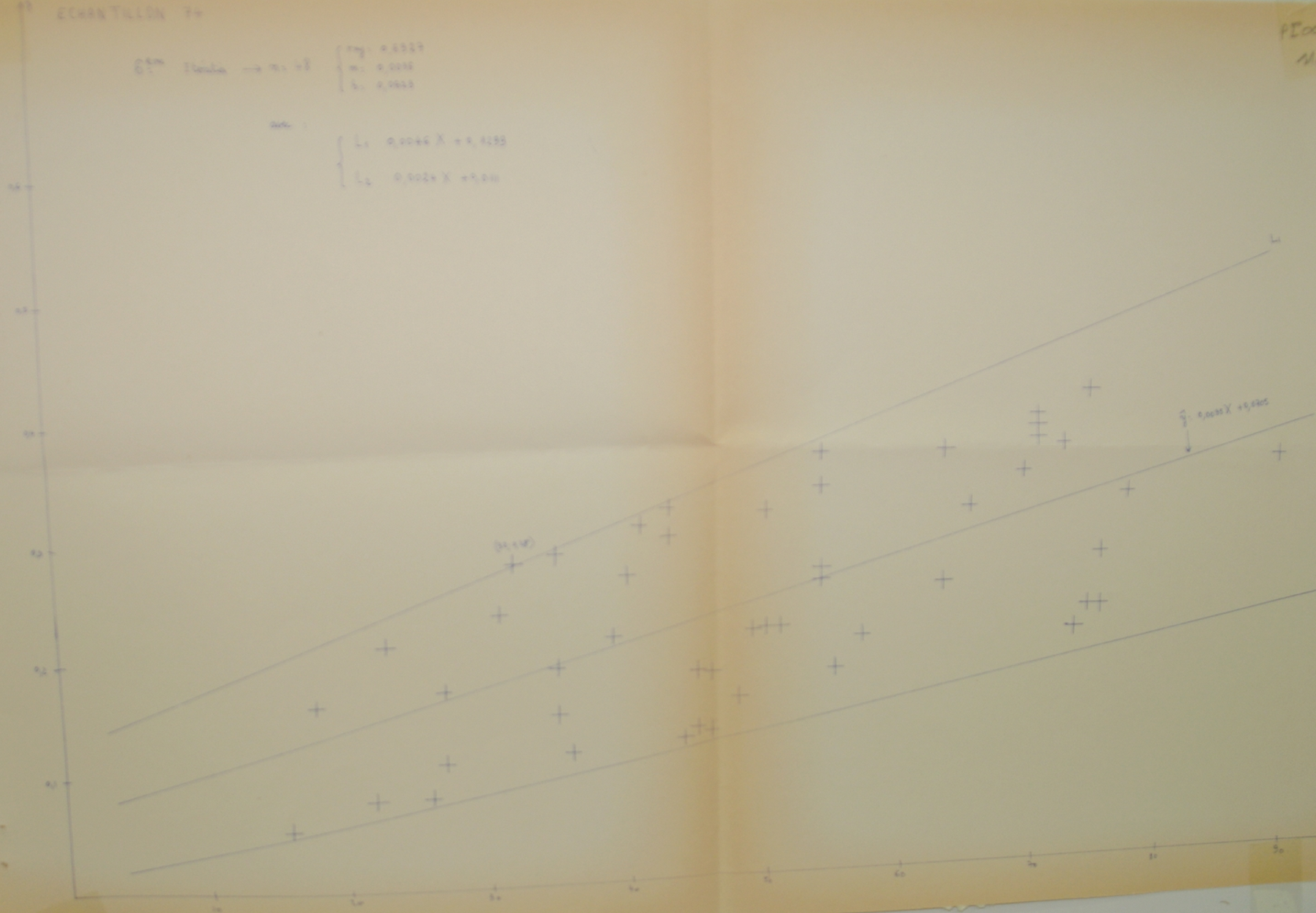
$\left.\begin{matrix} 0,0024 \leq m \leq 0,0046 \\ 0,0111 \leq b \leq 0,1299 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} L_1 : 0,0046X + 0,1299 \\ L_2 : 0,0024X + 0,0111 \\ \hat{y} : 0,0035X + 0,0705 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ pt à éliminer : $\begin{pmatrix} 32 \\ 0,28 \end{pmatrix}$

D'où l'échantillon $n : 48$

	X	Y
1	70	0,38
2	35	0,19
3	65	0,32
4	16	0,055
5	77	0,33
6	70	0,39
7	54	0,34
8	40	0,268
9	72	0,374
10	54	0,26
11	45	0,184
12	31	0,237
13	27	0,11
14	35	0,287
15	23	0,212

	X	Y
16	35	0,15
17	41	0,31
18	43	0,3
19	46	0,13
20	43	0,324
21	50	0,22
22	54	0,369
23	54	0,27
24	26	0,08
25	69	0,35
26	18	0,162
27	63	0,37
28	51	0,22
29	75	0,23
30	50	0,32

	X	Y
31	27	0,172
32	22	0,08
33	46	0,182
34	74	0,42
35	63	0,255
36	74	0,23
37	57	0,21
38	48	0,16
39	45	0,134
40	49	0,218
41	55	0,182
42	39	0,215
43	75	0,278
44	70	0,4
45	89	0,36
46	73	0,21
47	36	0,116
48	44	0,125


ECHANTILLON
L1
L2

Echantillon 74

$7^{\text{ème}}$ Itération $\rightarrow$ $n = 46$ $\begin{cases} r_{xy} = 0{,}7236 \\ m = 0{,}0038 \\ b = 0{,}0495 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 48$ on a :

$\bar{x} = 50{,}5106$ $\quad S_x = 18{,}0348$ $\quad r_{xy} = 0{,}6927$

$\bar{y} = 0{,}246$ $\quad S_x^2 = 325{,}2554$ $\quad m = 0{,}0036$

$\bar{x}^2 = 2551{,}3246$ $\quad S_y = 0{,}0946$ $\quad b = 0{,}0623$

$\bar{y}^2 :$ $\quad S_y^2 = 0{,}00896$

$$\sum_{i=1}^{48} (x_i - \bar{x})^2 = 15\,287{,}006 \qquad \sum_{i=1}^{48} (y_i - \bar{y})^2 = 0{,}4407 \qquad \sigma_e^2 = 0{,}00417$$

D'où $\sigma_m = 0{,}00056$ $\quad \sigma_b = 0{,}028$

$2\sigma_m = 0{,}00112$ $\quad 2\sigma_b = 0{,}056$

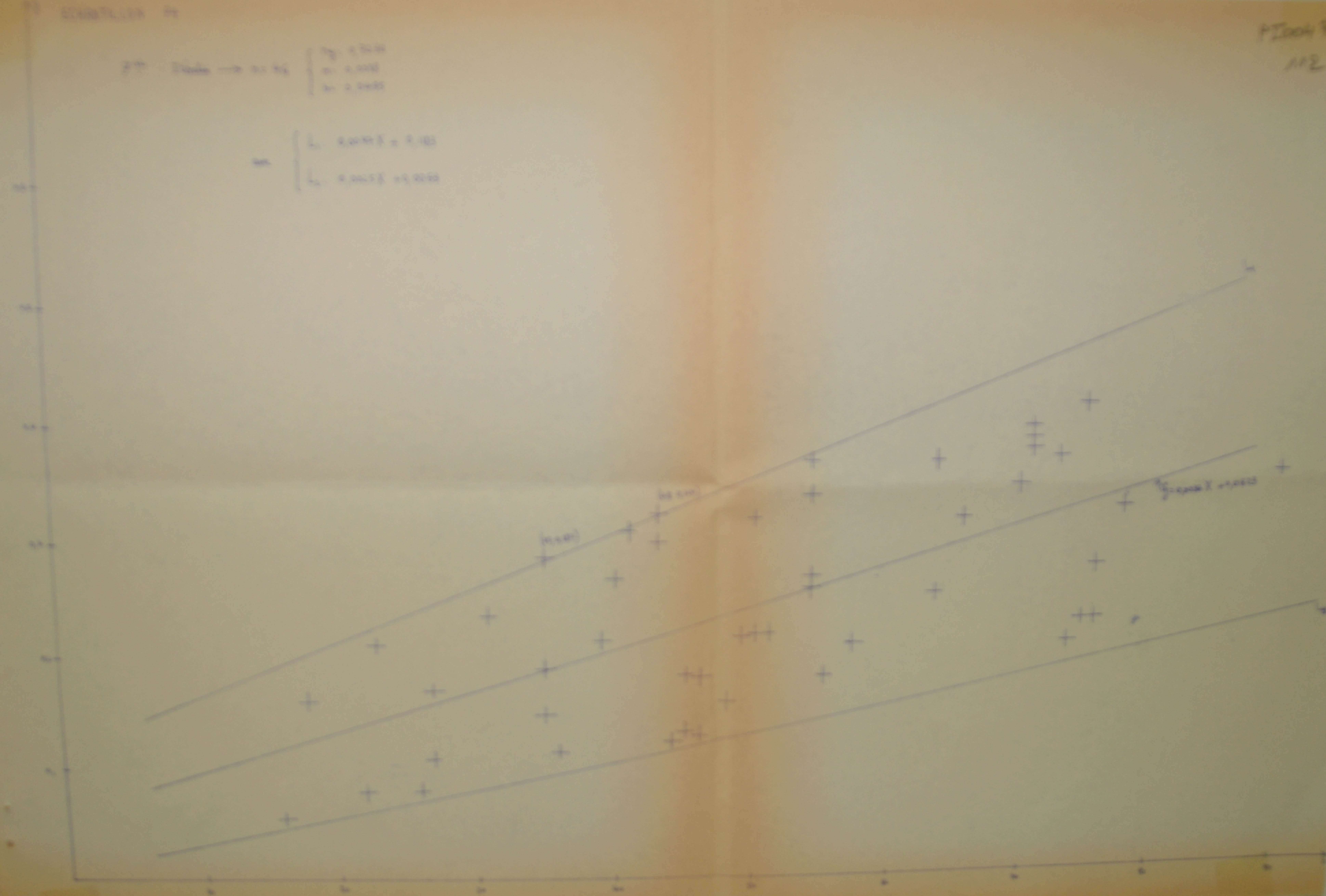
$$\left.\begin{array}{l} 0{,}0025 \leq m \leq 0{,}0047 \\ 0{,}0063 \leq b \leq 0{,}1183 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0{,}0047X + 0{,}1183 \\ L_2 : 0{,}0025X + 0{,}0063 \\ \hat{y} : 0{,}0036X + 0{,}0623 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à éliminer} : \binom{35}{0{,}187} ; \binom{43}{0{,}324}$$

D'où l'échantillon $n = 46$

	X	Y
1	70	0,38
2	35	0,19
3	65	0,32
4	16	0,055
5	77	0,33
6	70	0,39
7	54	0,34
8	40	0,268
9	72	0,374
10	54	0,26
11	45	0,184
12	31	0,237
13	27	0,11
14	23	0,212
15	35	0,15

	X	Y
16	41	0,31
17	43	0,3
18	46	0,13
19	50	0,22
20	54	0,369
21	54	0,27
22	26	0,08
23	69	0,35
24	18	0,162
25	63	0,37
26	51	0,22
27	75	0,23
28	50	0,32
29	27	0,172
30	22	0,08

	X	Y
31	46	0,182
32	74	0,42
33	63	0,255
34	74	0,23
35	57	0,21
36	48	0,16
37	45	0,134
38	49	0,218
39	55	0,182
40	39	0,215
41	75	0,278
42	70	0,4
43	89	0,36
44	73	0,21
45	36	0,116
46	44	0,125



112

Echantillon 74

$8^{ième}$ Iteration $\rightarrow$ $n = 45$ $\begin{cases} r_{xy} : 0,7392 \\ m = 0,0038 \\ b = 0,0433 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 46$ on a :

$\bar{x} = 51,022$ $\qquad$ $\bar{y} = 0,2434$ $\qquad$ $r_{xy} = 0,7236$

$S_x = 18,2489$ $\qquad$ $S_y = 0,0958$ $\qquad$ $m = 0,0038$

$\bar{x}^2 = 2603,2671$ $\qquad$ $S_y^2 = 0,00918$ $\qquad$ $b = 0,0495$

$S_x^2 = 333,022$

$\sum_{i=1}^{46} (x_i - \bar{x})^2 = 14\,985,989$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{46} (y_i - \bar{y})^2 = 0,41322$ $\qquad$ $S_e^2 = 0,00447$

D'où : $\quad \sigma_m = 0,000546$ $\qquad$ $\sigma_b = 0,02956$

$2\sigma_m = 0,00109$ $\qquad$ $2\sigma_b = 0,05912$

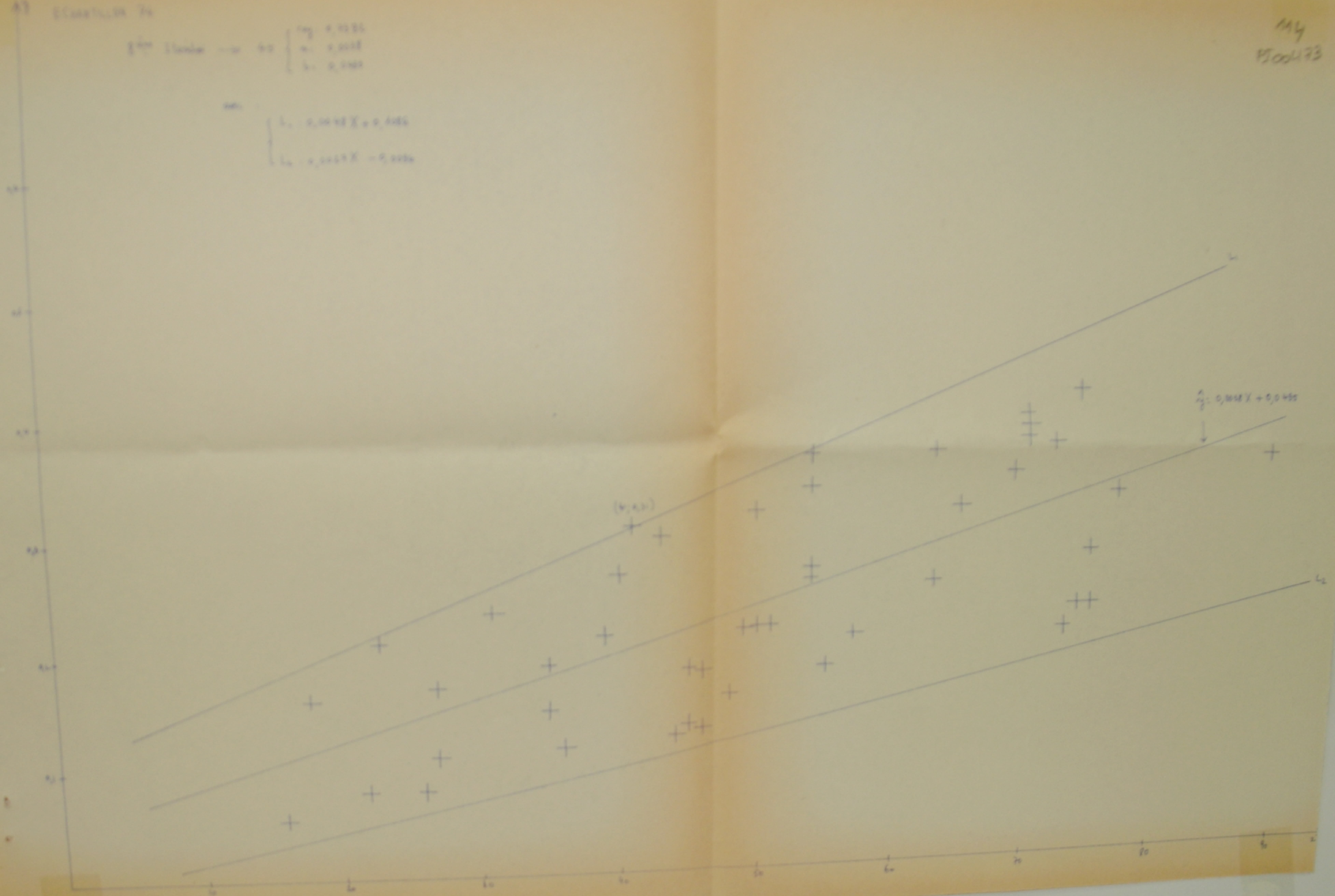
$\left.\begin{array}{l} 0,0027 \leq m \leq 0,0048 \\ -0,0096 \leq b \leq 0,10864 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : \ 0,0048X + 0,10864 \\ L_2 \ \ 0,0027X - 0,0096 \\ \hat{y} : \ 0,0038X + 0,0495 \end{array}\right\} \rightarrow$ pt à éliminer : $\binom{41}{0,31}$

D'où l'échantillon $n = 45$

	X	Y
1	70	0,38
2	35	0,19
3	65	0,32
4	16	0,055
5	77	0,33
6	70	0,39
7	54	0,34
8	40	0,268
9	72	0,374
10	54	0,26
11	45	0,184
12	31	0,237
13	27	0,11
14	23	0,212
15	35	0,15

	X	Y
16	43	0,3
17	46	0,13
18	50	0,22
19	54	0,369
20	54	0,27
21	26	0,08
22	69	0,35
23	18	0,162
24	63	0,37
25	51	0,22
26	75	0,23
27	50	0,32
28	27	0,172
29	22	0,08
30	46	0,182

	X	Y
31	74	0,42
32	63	0,255
33	74	0,23
34	57	0,21
35	48	0,16
36	45	0,134
37	49	0,218
38	55	0,182
39	39	0,215
40	75	0,278
41	70	0,4
42	89	0,36
43	73	0,21
44	36	0,116
45	44	0,125



Echantillon 74

9ième Iteration → n = 44 $\begin{cases} r_{xy} = 0{,}7505 \\ m = 0{,}0039 \\ b = 0{,}048 \end{cases}$

En considérant l'échantillon n = 45 on a :

$\bar{x} = 51{,}25$ $\bar{y} = 0{,}2418$ $r_{xy} = 0{,}7392$

$S_x = 18{,}395$ $S_y = 0{,}0963$ $m = 0{,}0038$

$\bar{x}^2 = 2626{,}5625$ $S_y^2 = 0{,}00929$ $b = 0{,}0433$

$S_x^2 = 338{,}3779$

$$\sum_{i=1}^{45} (x_i - \bar{x})^2 = 14888{,}6276 \qquad \sum_{i=1}^{45} (y_i - \bar{y})^2 = 0{,}4087 \qquad \sigma_e^2 = 0{,}0043$$

D'où $\sigma_m = 0{,}000538$ $\sigma_b = 0{,}02925$

$2\sigma_m = 0{,}00107$ $2\sigma_b = 0{,}0585$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}0028 \leq m \leq 0{,}0049 \\ -0{,}0156 \leq b \leq 0{,}1018 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0{,}0049X + 0{,}1018 \\ L_2 : 0{,}0028X - 0{,}0156 \\ \hat{y} : 0{,}0038X + 0{,}0433 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pt à éliminer : } \begin{pmatrix} 54 \\ 0{,}369 \end{pmatrix}$$

D'où l'échantillon n = 44

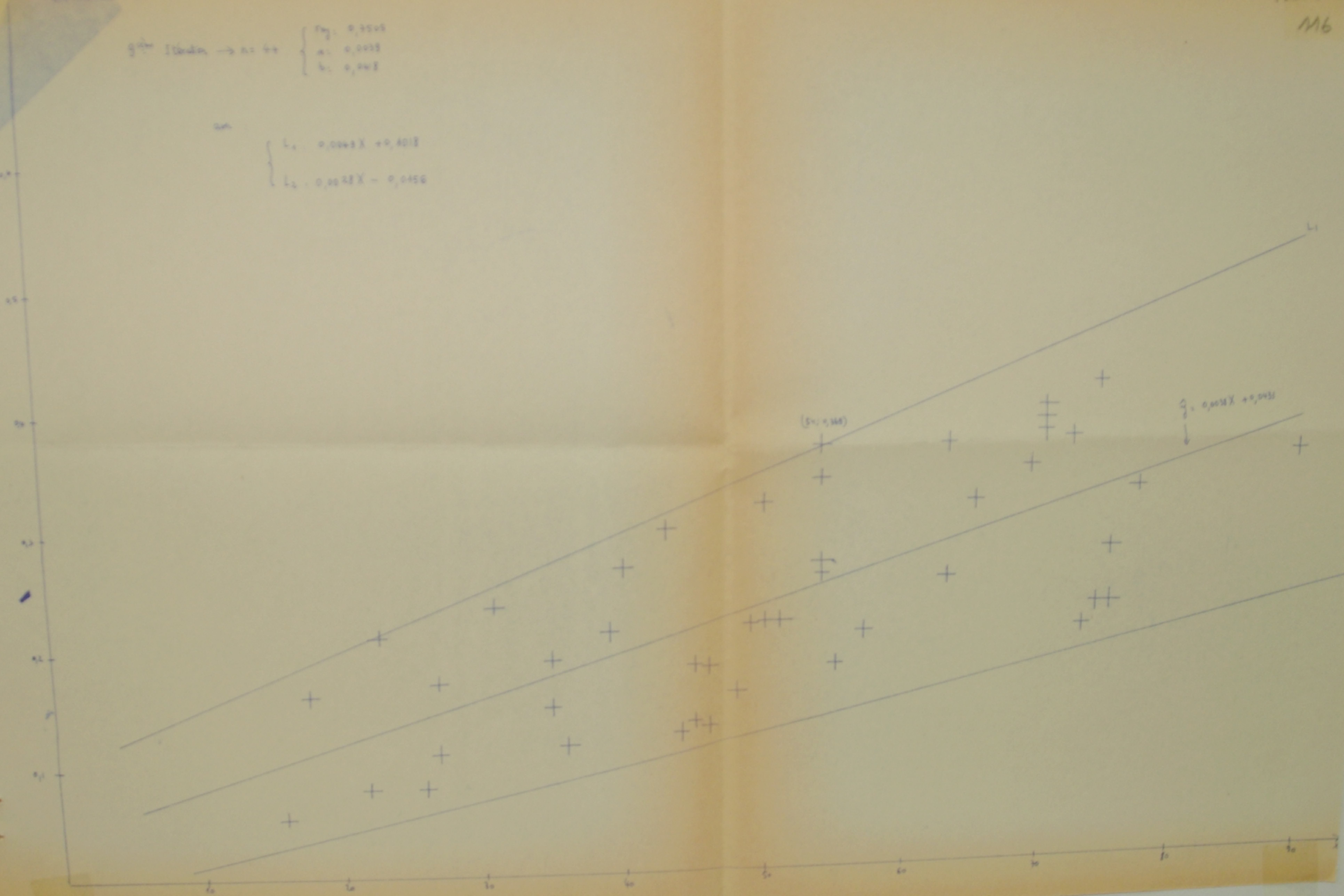
	X	Y
1	70	0,38
2	35	0,19
3	65	0,32
4	16	0,055
5	77	0,33
6	70	0,39
7	54	0,34
8	40	0,268
9	72	0,374
10	54	0,26
11	45	0,184
12	31	0,237
13	27	0,11
14	23	0,212
15	35	0,15

	X	Y
16	43	0,3
17	46	0,13
18	50	0,22
19	54	0,27
20	26	0,08
21	69	0,35
22	18	0,162
23	63	0,37
24	51	0,22
25	75	0,23
26	50	0,32
27	27	0,172
28	22	0,08
29	46	0,182
30	74	0,42

	X	Y
31	63	0,255
32	74	0,23
33	57	0,21
34	48	0,16
35	45	0,134
36	49	0,218
37	55	0,182
38	39	0,215
39	75	0,278
40	70	0,4
41	89	0,36
42	73	0,21
43	36	0,116
44	44	0,125

ECHANTILLON 74

P1004173
116



Echantillon 74

10ème itération $\rightarrow n = 43$ $\begin{cases} 0{,}7624 = r_{xy} \\ 0{,}004 = m \\ 0{,}031 = b \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 44$ ma.

$\bar{x} = 51{,}186$ $\quad \bar{y} = 0{,}2389$ $\quad r_{xy} = 0{,}7509$

$s_x = 18{,}6078$ $\quad s_y = 0{,}0955$ $\quad m = 0{,}0039$

$\bar{x}^2 = 2620{,}0114$ $\quad s_y^2 = 0{,}091$ $\quad b = 0{,}0418$

$s_x^2 = 346{,}2503$

$\sum_{i=1}^{44} (x_i - \bar{x})^2 = 14888{,}762$ $\quad \sum_{i=1}^{44} (y_i - \bar{y})^2 = 0{,}3921$ $\quad \sigma_e^2 = 0{,}0042$

D'où $\sigma_m = 0{,}00052$ $\quad \sigma_b = 0{,}0286$

$2\sigma_m = 0{,}0010$ $\quad 2\sigma_b = 0{,}0572$

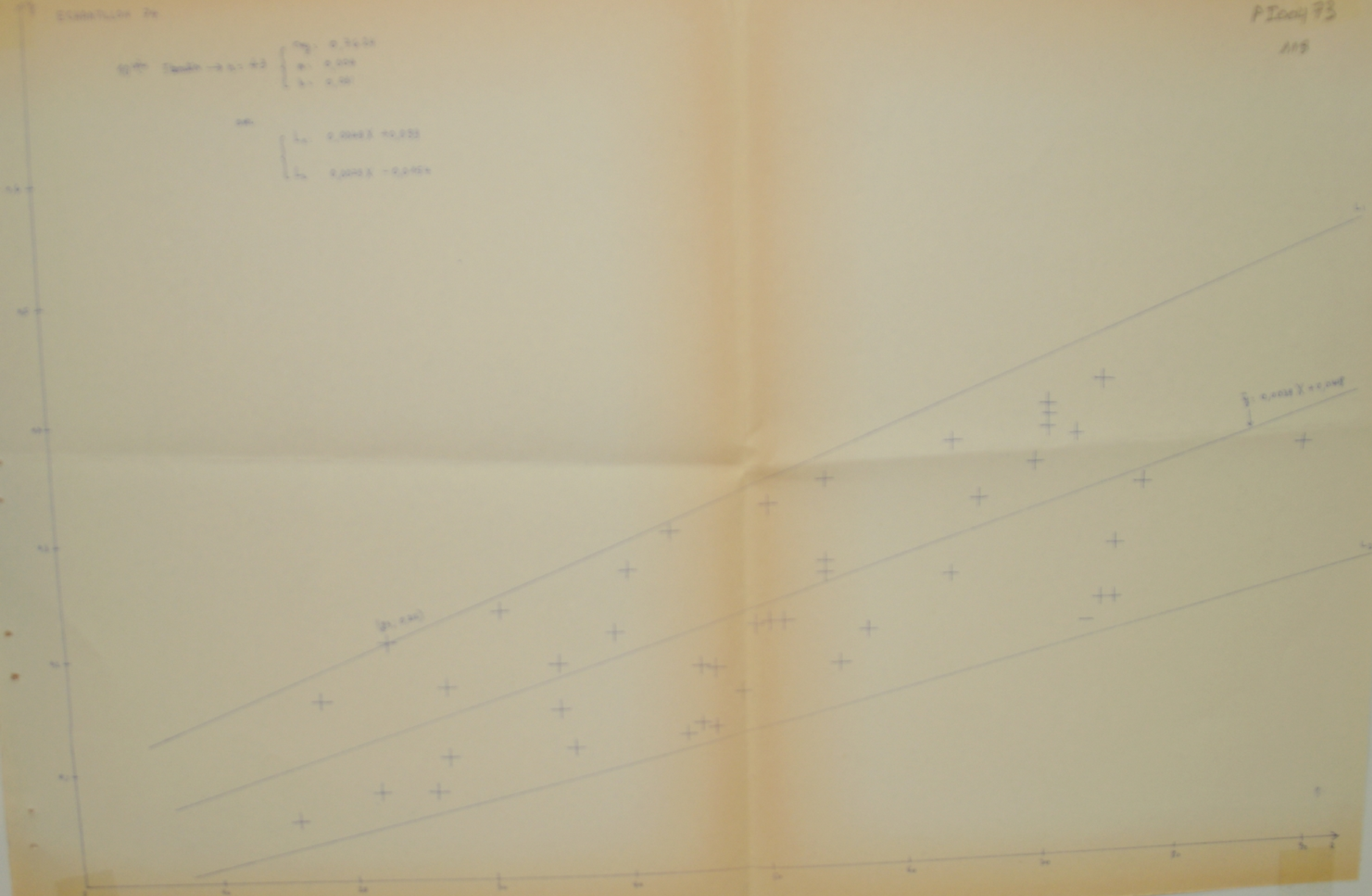
$\left.\begin{array}{l} 0{,}0029 \leq m \leq 0{,}0049 \\ -0{,}0154 \leq b \leq 0{,}099 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0{,}0049X + 0{,}099 \\ L_2 : 0{,}0029X - 0{,}0154 \\ \hat{y} : 0{,}0039X + 0{,}0418 \end{array}\right\} \rightarrow$ pt à éliminé : $\begin{pmatrix} 23 \\ 0{,}212 \end{pmatrix}$

D'où l'échantillon $n = 43$

	X	Y
1	70	0,38
2	35	0,19
3	65	0,32
4	16	0,055
5	77	0,33
6	70	0,39
7	54	0,34
8	40	0,268
9	72	0,374
10	54	0,26
11	45	0,184
12	31	0,237
13	27	0,11
14	35	0,15
15	43	0,3

	X	Y
16	46	0,13
17	50	0,22
18	54	0,27
19	26	0,08
20	69	0,35
21	18	0,162
22	63	0,37
23	51	0,22
24	75	0,23
25	50	0,32
26	27	0,172
27	22	0,08
28	46	0,182
29	74	0,42
30	63	0,255

	X	Y
31	74	0,23
32	57	0,21
33	48	0,16
34	45	0,134
35	49	0,218
36	55	0,182
37	39	0,215
38	75	0,278
39	70	0,4
40	89	0,36
41	73	0,21
42	36	0,116
43	44	0,125



Echantillon 74

$11^{ème}$ Itération $\rightarrow n = 43$ $\begin{cases} rxy = 0,7624 \\ m = 0,004 \\ b = 0,031 \end{cases}$

En considérant l'échantillon n = 43 on a :

$\bar{x} = 51,8571$ $\bar{y} = 0,2396$ $rxy = 0,7624$
$s_x = 18,2991$ $s_y = 0,0966$ $m = 0,004$
$\bar{x}^2 = 2689,1633$ $s_y^2 = 0,0093$ $b = 0,031$
$S_x^2 = 334,8571$

$\sum_{i=1}^{43} (x_i - \bar{x})^2 = 14063,9982$ $\sum_{i=1}^{43} (y_i - \bar{y})^2 = 0,3906$ $\sigma_e^2 = 0,004$

D'où $\sigma_m = 0,00055$ $\sigma_b = 0,0293$
$2\sigma_m = 0,0011$ $2\sigma_b = 0,0586$

$\left.\begin{array}{l} 0,0029 \leq m \leq 0,0051 \\ -0,0276 \leq b \leq 0,0886 \end{array}\right\} \rightarrow$ $L_1 : 0,0051X + 0,0886$
$L_2 \quad 0,0029X - 0,0276$
$\hat{y} = 0,004X + 0,031$

On remarque que tous les pts sont dans le domaine limité par L_1 et L_2 d'où les estimations de m, b, rxy, y

$\boxed{m = 0,004}$ $\boxed{b = 0,031}$ $\boxed{rxy = 0,7624}$ $\boxed{y = 0,004X + 0,031}$

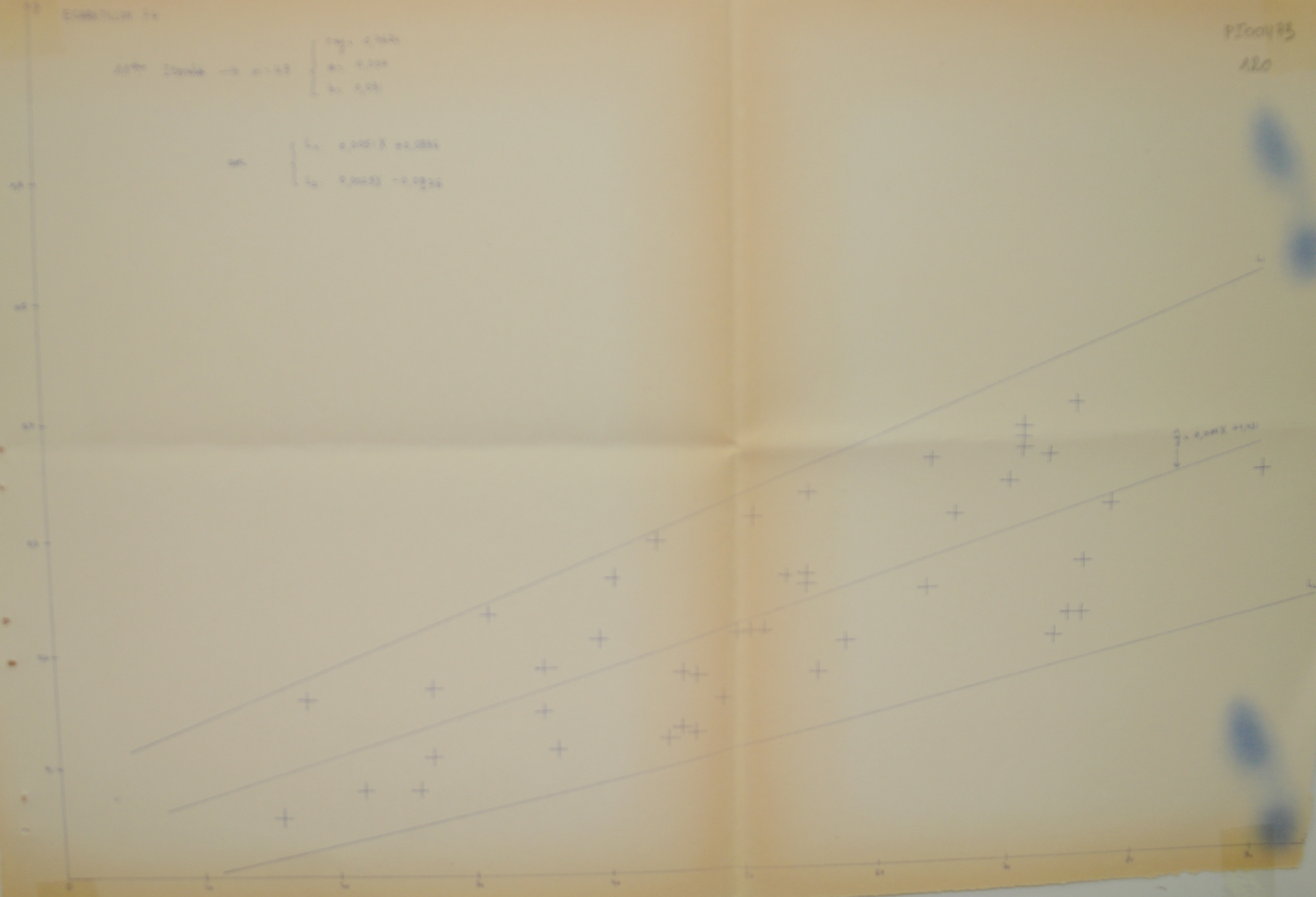
avec l'échantillon n = 43

	X	Y
1	70	0,38
2	35	0,19
3	65	0,32
4	16	0,055
5	77	0,33
6	70	0,39
7	54	0,34
8	40	0,168
9	72	0,374
10	54	0,26
11	45	0,184
12	31	0,237
13	27	0,11
14	35	0,15
15	43	0,3

	X	Y
16	46	0,13
17	50	0,22
18	54	0,27
19	26	0,08
20	69	0,35
21	18	0,162
22	63	0,37
23	51	0,22
24	75	0,23
25	50	0,32
26	0,27	0,172
27	22	0,08
28	46	0,182
29	74	0,42
30	63	0,255

	X	Y
31	74	0,23
32	57	0,21
33	48	0,16
34	45	0,134
35	49	0,218
36	55	0,182
37	39	0,215
38	75	0,278
39	70	0,4
40	89	0,36
41	73	0,21
42	36	0,116
43	44	0,125

PI00493
120



Echantillon 74

$1^{ère}$ Itération $\longrightarrow$ $n = 73$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,4946 \\ m = 0,0035 \\ b = 0,074 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 74$ on a :

$$\left.\begin{array}{l} r_{xy} = 0,4537 \\ m = 0,0034 \\ b = 0,0863 \\ \bar{y} = 0,2523 \\ s_y = 0,1256 \end{array}\right\} \rightarrow u = \sqrt{1-r^2}\, S_y = 0,119 \quad \text{d'où } 2u = 0,2238$$

D'où

$$\left.\begin{array}{l} L_1 : 0,0034X + 0,3102 \\ L_2 : 0,0034X - 0,1376 \\ \hat{y} : 0,0034X + 0,0863 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pt à éliminer : } \binom{48}{0,59}$$

D'où l'échantillon $n = 73$

	X	Y
1	70	0,38
2	54	0,48
3	32	0,28
4	35	0,19
5	65	0,32
6	45	0,45
7	64	0,46
8	57	0,39
9	16	0,055
10	77	0,33
11	70	0,39
12	40	0,075
13	30	0,01
14	54	0,34
15	40	0,268
16	41	0,333
17	72	0,374
18	54	0,26
19	45	0,184
20	52	0,394
21	17	0,026
22	31	0,237
23	27	0,11
24	35	0,287
25	23	0,212

	X	Y
26	35	0,15
27	41	0,31
28	43	0,3
29	46	0,13
30	43	0,324
31	50	0,22
32	54	0,369
33	54	0,27
34	48	0,38
35	51	0,376
36	26	0,08
37	69	0,35
38	18	0,162
39	35	0,3
40	63	0,37
41	51	0,22
42	75	0,23
43	35	0,36
44	50	0,32
45	27	0,172
46	57	0,141
47	22	0,08
48	46	0,182
49	74	0,42
50	48	0,41

	X	Y
51	63	0,46
52	63	0,255
53	45	0,097
54	74	0,155
55	73	0,13
56	63	0,14
57	74	0,23
58	57	0,21
59	48	0,16
60	45	0,134
61	55	0,165
62	49	0,218
63	20	0,042
64	55	0,182
65	39	0,215
66	75	0,278
67	70	0,4
68	89	0,36
69	73	0,21
70	54	0,122
71	40	0,083
72	36	0,116
73	44	0,125

Echantillon 74

$2^{ème}$ Itération $\rightarrow$ $n=71$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,5197 \\ m = 0,0035 \\ b = 0,0677 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n=73$ on a :

$$\left.\begin{array}{ll} r_{xy} = 0,4946 & ; \ \bar{y} = 0,2475 \\ m = 0,0035 & ; \ S_y = 0,1198 \\ b = 0,074 & \end{array}\right\} \rightarrow u = \sqrt{1-r^2}\ S_y = 0,1041 \quad \text{d'où} \quad 2u = 0,2082$$

D'où :

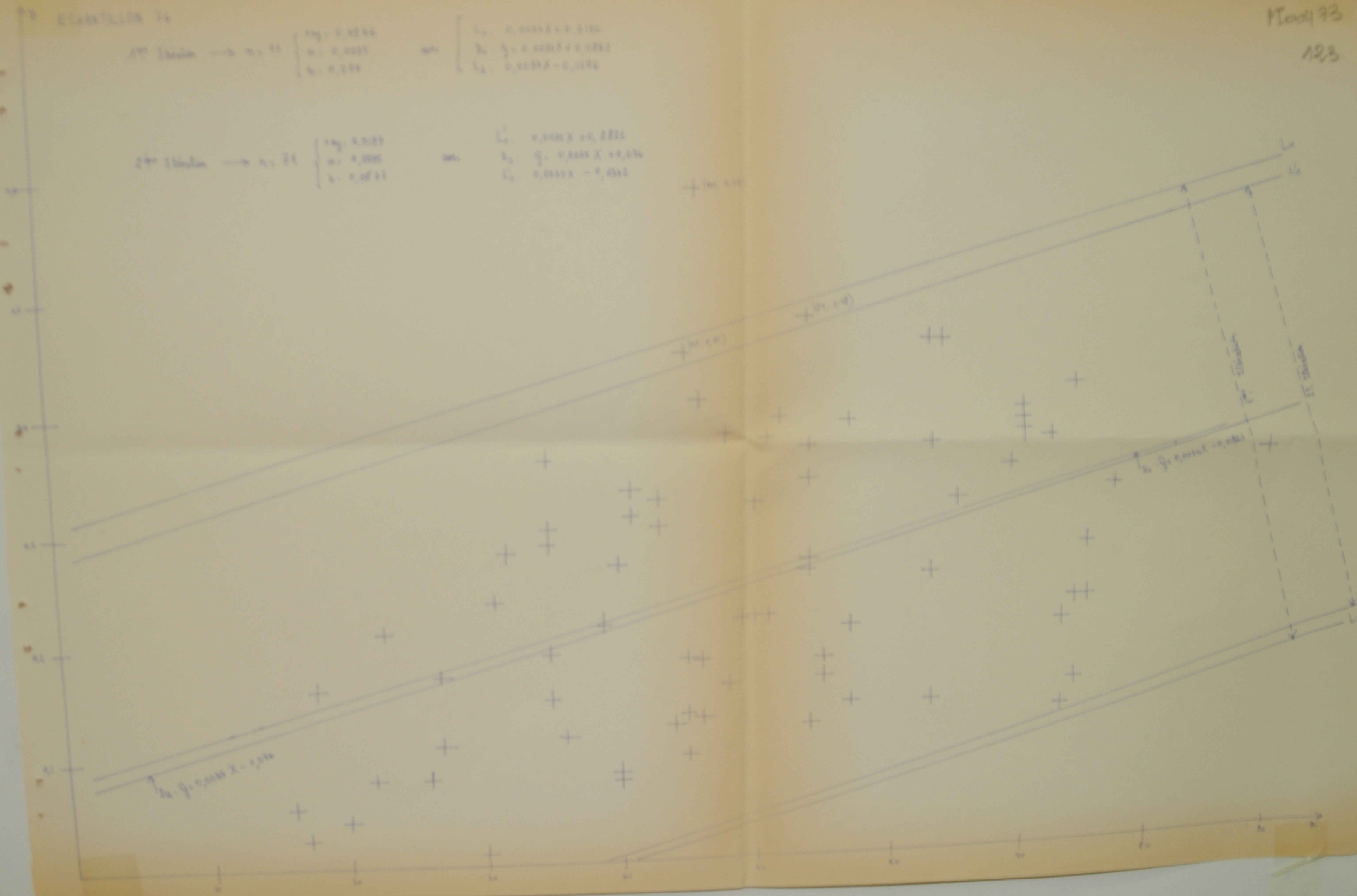
$$\left.\begin{array}{ll} L_1 : & 0,0035X + 0,2822 \\ L_2 : & 0,0035X - 0,1342 \\ \hat{y} : & 0,0035X + 0,074 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à éliminer} : \begin{pmatrix} 54 \\ 0,48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

D'où l'échantillon $n=71$

	X	Y
1	70	0,38
2	32	0,28
3	35	0,19
4	65	0,32
5	64	0,46
6	57	0,39
7	15	0,055
8	77	0,33
9	70	0,39
10	40	0,075
11	30	0,01
12	54	0,34
13	40	0,268
14	41	0,333
15	72	0,374
16	54	0,26
17	45	0,184
18	52	0,394
19	17	0,026
20	31	0,237
21	27	0,11
22	35	0,287
23	23	0,212
24	35	0,15
25	41	0,31

	X	Y
26	43	0,3
27	46	0,13
28	42	0,324
29	50	0,22
30	54	0,369
31	54	0,27
32	48	0,38
33	51	0,376
34	26	0,08
35	69	0,35
36	18	0,152
37	35	0,3
38	63	0,37
39	51	0,22
40	75	0,23
41	35	0,36
42	50	0,32
43	27	0,172
44	57	0,141
45	22	0,08
46	46	0,182
47	74	0,42
48	46	0,41
49	63	0,46
50	63	0,255

	X	Y
51	45	0,097
52	74	0,155
53	73	0,13
54	63	0,14
55	74	0,23
56	57	0,21
57	48	0,16
58	45	0,134
59	55	0,165
60	49	0,218
61	20	0,042
62	55	0,182
63	39	0,215
64	75	0,278
65	70	0,4
66	89	0,36
67	73	0,21
68	54	0,122
69	40	0,083
70	36	0,116
71	44	0,125


ECHANTILLON 74

Echantillon 74

$3^{ième}$ Itération $\longrightarrow$ $n = 71$ $\begin{cases} r_{xy} : 0,5197 \\ m : 0,0035 \\ b : 0,0677 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 71$ on a :

$$\left.\begin{array}{ll} m = 0,0035\ , & r_{xy} : 0,5197 \\ b = 0,0677\ , & \bar{y} = 0,2402 \\ & S_y : 0,116 \end{array}\right\} \rightarrow u = \sqrt{1-r^2}\, S_y = 0,0991 \quad \text{d'où } 2u = 0,1982$$

D'où :

$$\left.\begin{array}{ll} L_1 : & 0,0035\,X + 0,2659 \\ L_2 & 0,0035\,X - 0,1305 \\ \hat{y} : & 0,0035\,X + 0,0677 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Aucun pt à éliminer.}$$

D'où l'échantillon $n = 71$

	X	Y
1	70	0,38
2	32	0,28
3	35	0,19
4	65	0,32
5	64	0,46
6	57	0,39
7	16	0,055
8	77	0,33
9	70	0,39
10	40	0,075
11	30	0,01
12	54	0,34
13	40	0,268
14	41	0,333
15	72	0,374
16	54	0,26
17	45	0,184
18	52	0,394
19	17	0,026
20	31	0,237
21	27	0,11
22	35	0,287
23	23	0,212
24	35	0,15
25	41	0,31

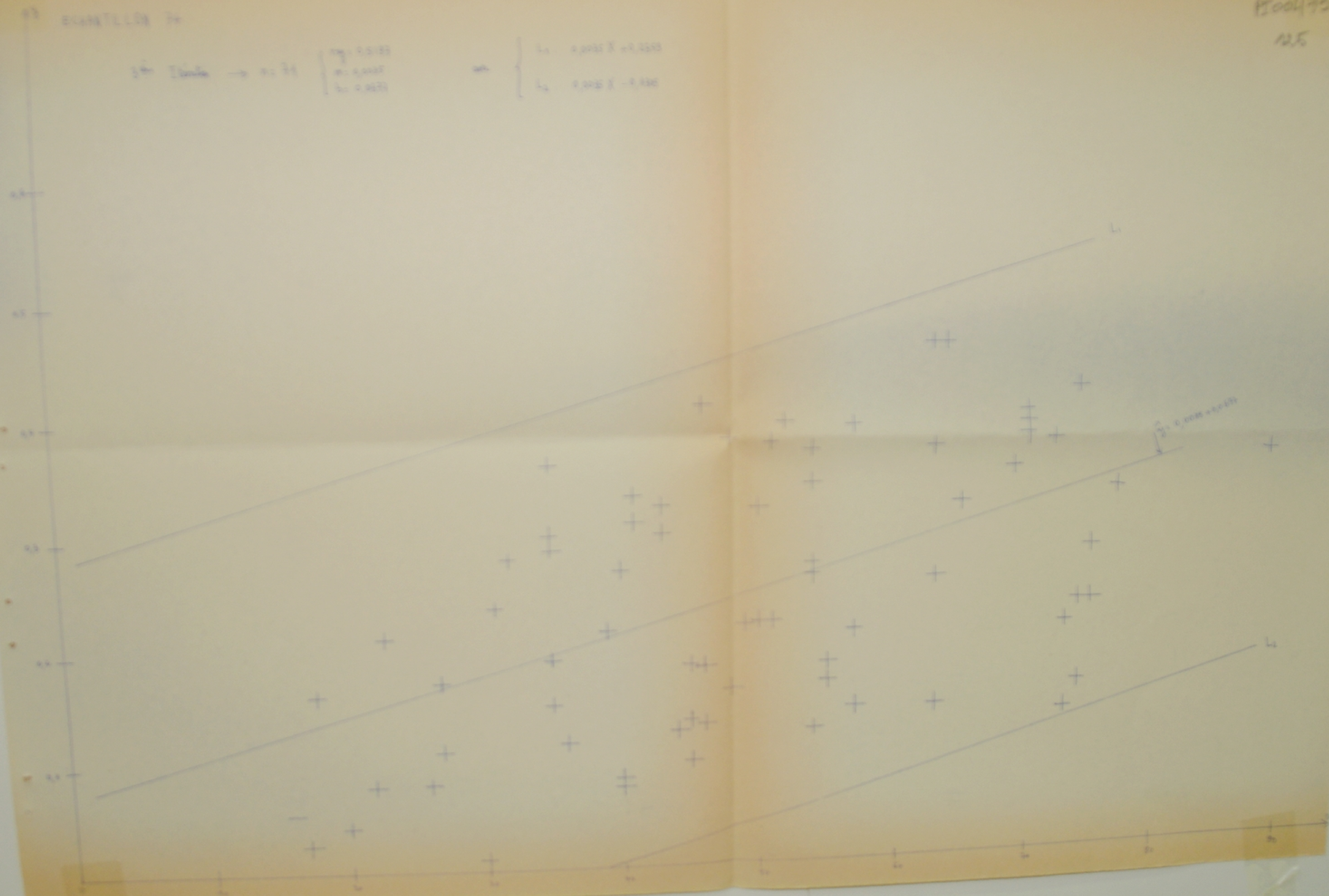
	X	Y
26	43	0,3
27	48	0,13
28	43	0,324
29	50	0,22
30	54	0,369
31	54	0,27
32	48	0,38
33	51	0,376
34	26	0,08
35	69	0,35
36	18	0,162
37	35	0,3
38	63	0,37
39	51	0,22
40	75	0,23
41	35	0,36
42	50	0,32
43	27	0,172
44	57	0,141
45	22	0,08
46	46	0,182
47	74	0,42
48	46	0,41
49	63	0,46
50	63	0,255

	X	Y
51	45	0,097
52	74	0,155
53	73	0,13
54	63	0,14
55	74	0,23
56	57	0,21
57	48	0,16
58	45	0,134
59	55	0,165
60	49	0,218
61	20	0,042
62	55	0,182
63	39	0,215
64	75	0,278
65	70	0,4
66	89	0,36
67	73	0,21
68	54	0,122
69	40	0,083
70	36	0,16
71	44	0,125

On remarque que tous les pts sont dans le domaine limité par L_1 et L_2 d'où les estimations de m, b, r_{xy}

$\boxed{m = 0,0035}$ $\boxed{b = 0,0677}$ $\boxed{r_{xy} = 0,5197}$

et la droite a pour équation : $\boxed{y = 0,0035\,X + 0,0677}$


L1
L2

ECHANTILLON 47

$r_{xy} = 0{,}8200$
$m = 0{,}3087$
$b = 0{,}0143$

	X	Y
1	0,36	0,13
2	0,21	0,085
3	0,122	0,057
4	0,08	0,04
5	0,13	0,039
6	0,083	0,041
7	0,357	0,113
8	0,116	0,04
9	0,125	0,045
10	0,182	0,051
11	0,366	0,156
12	0,215	0,06
13	0,278	0,111
14	0,4	0,073
15	0,42	0,16

	X	Y
16	0,41	0,14
17	0,46	0,18
18	0,255	0,125
19	0,097	0,032
20	0,155	0,04
21	0,13	0,07
22	0,14	0,09
23	0,23	0,1
24	0,15	0,07
25	0,21	0,1
26	0,16	0,054
27	0,12	0,107
28	0,134	0,065
29	0,165	0,064
30	0,218	0,063

	X	Y
31	0,38	0,12
32	0,48	0,18
33	0,32	0,16
34	0,46	0,107
35	0,39	0,188
36	0,077	0,012
37	0,18	0,031
38	0,34	0,1
39	0,268	0,098
40	0,333	0,127
41	0,374	0,12
42	0,26	0,079
43	0,394	0,108
44	0,172	0,033
45	0,141	0,114
46	0,08	0,016
47	0,182	0,045

Dans ce cas les variables représentent:

X: Indice de compression Cc.

Y: Indice de gonflement Cg ;

nous allons tester s'il existe une relation linéaire de la forme Cg = mCc + b ; en appliquant les ≠ tests:

----- On remarque que le caractère X ne suit pas une normale, cependant on peut considérer que ceci vient des erreurs commises sur l'indice de compressibilité et qu'à la limite X suit une loi normale; d'où les tests sur le coeff de corrélation lineaire: (comparaison de r avec $\rho = 0$)

— On ne peut appliquer la 1ière méthode du fait que r= 0,82

— En appliquant la 2 ième méthode (corrélation transformée) on a:

$$t = \frac{z' - 0}{\sigma_{z'}} = z'\sqrt{n-3} = z'\sqrt{44}$$

or pour r= 0,83 la table de FISHER donne z'= 1,15

d'où t= $1,15\sqrt{44} = \underline{\underline{7,629}}$

comme $t \rightarrow N(0,1)$, pour α= 5% on a $t_{/\alpha} = 1,96$

on remarque que $t > t_{\alpha}$: la vraie valeur de ρ est différente de 0 et il existe une relation linéaire entre X et Y (r= 0,82)

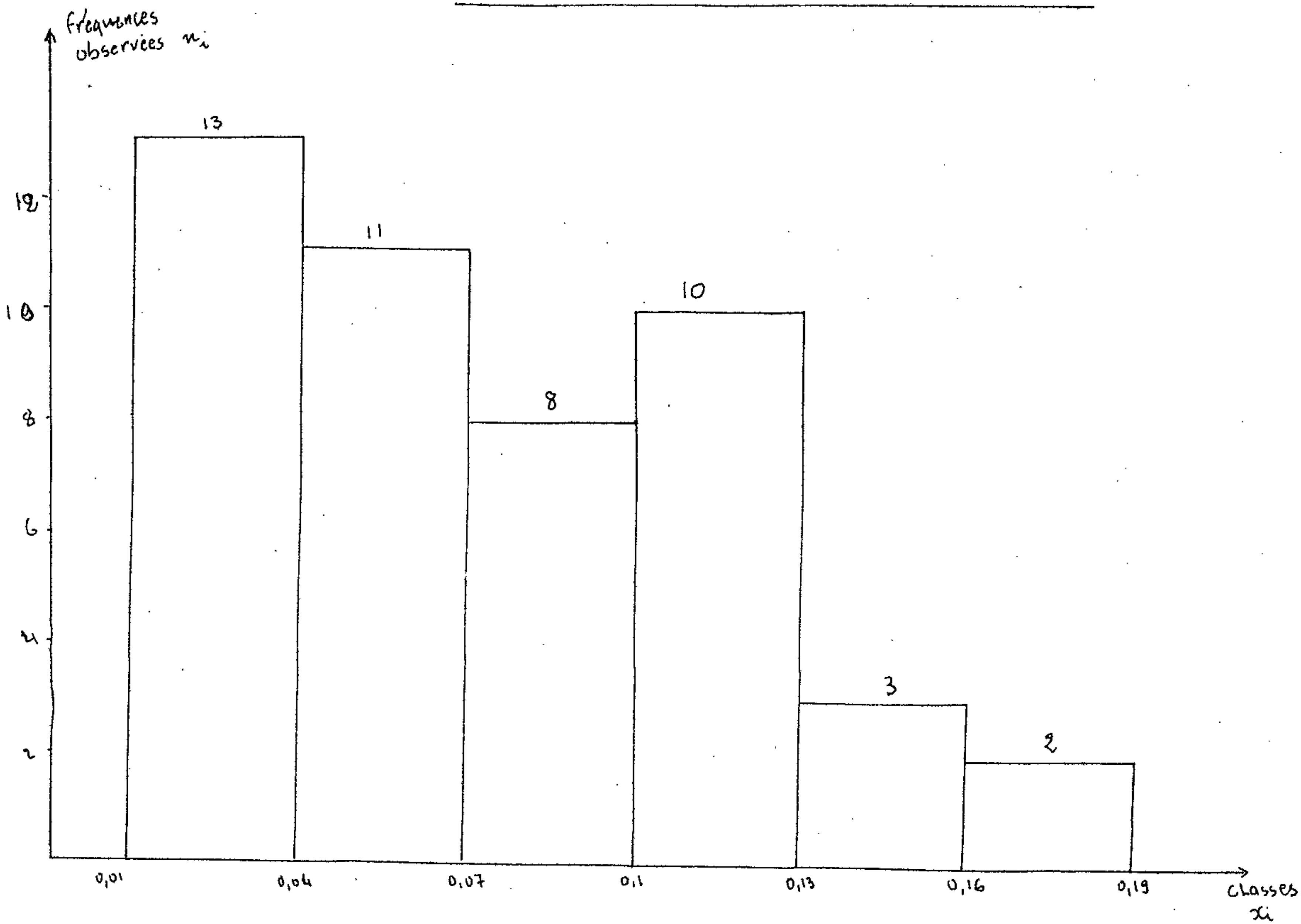
— La 3ième méthode donne:

pour α =5% et ν =45 r_{α} =0,2874

On remarque que $r > r_{/\alpha}$ d'où on arrive à la même conclusion qu'avec la 2 ième méthode.

ECHANTILLON 47

HISTOGRAMME DE LA DISTRIBUTION DU CARACTERE X



Echantillon 47

Test de χ^2 pour X

On a $\bar{x} = 0{,}2419$

$s_x = 0{,}1224$

classes	$t_i = \frac{x_i - 0{,}2419}{0{,}1224}$		$\Pi(t)$		$p_i = \Pi(t_i) - \Pi(t_{i-1})$	Np_i	n_i	$n_i - Np_i$	$(n_i - Np_i)^2$	$\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$
	t_{i-1}	t_i	$\Pi(t_{i-1})$	$\Pi(t_i)$						
0,05 - 0,15	-1,5678	-0,7508	0,0585	0,2264	0,1679	7,8913	15	7,1087	50,5336	6,4037
0,15 - 0,2	-0,7508	-0,3423	0,2264	0,3661	0,1397	6,5659	7	0,4341	0,1884	0,0287
0,2 - 0,25	-0,3423	0,0661	0,3661	0,5263	0,1602	7,5294	5	-2,5294	6,3979	0,8497
0,25 - 0,3	0,0661	0,4746	0,5263	0,6824	0,1561	7,3367	4	-3,3367	11,1336	1,5175
0,3 - 0,35	0,4746	0,8831	0,6824	0,8114	0,129	6,063	3	-3,063	9,382	1,5474
0,35 - 0,5	0,8831	2,1086	0,8114	0,9825	0,1711	8,047	13	4,9583	24,5847	3,0572
						$\Sigma =$	47		$\chi^2_c =$	13,4042

Or pour $\alpha = 1\%$, $\nu = (6-1)-2 = 3$ on a $\chi^2_{\alpha,\nu} = 11{,}34$

On remarque que $\chi^2_c > \chi^2_{\alpha,\nu} \Longrightarrow$ X ne suit pas une loi Normale

E C H A N T I L L O N 47

En appliquant les Methodes:

- En considerant la variance de la variable Y .

- Des droites en biais .

On aura les résultats suivant :

ECHANTILLON DE 47 OBSERVATIONS

APPLICATION DE LA METHODES DES DROITES EN BIAIS

Les hypothèses doivent être vérifiées pour appliquer le modèle:

-L'ensemble des couples(X_i, Y_i) est un échantillon aléatoire représentat: prélevé dans la population où Y est relié linéairement à X(voir test du coefficient de corrélation)

-Les valeurs Y_i sont entachées d'erreurs ε_i inconnues que l'on peut considérer comme étant de moyenne nulle $(E(\varepsilon_i) = o)$ et on peut considérer qu'à la limite $\varepsilon \rightarrow N(0, \sigma^2)$

- Les erreurs ε_i relatives à 2 observations quelconques net e sont indépendantes entre elles.

- En dehors de l'echantillon on ne dispose d'aucune information sur les coéfficients numériques m et b

Les hypothèses précédentes étant vérifiées on peut appliquer la méthode des droites en biais à l'échantillon 47.

Ce qui donne les résultats ci-après:

Echantillon 47

$1^{ère}$ Iteration $\rightarrow$ $n = 36$ $\left\{ \begin{array}{l} r_{xy} = 0{,}9319 \\ m = 0{,}3348 \\ b = 0{,}0077 \end{array} \right.$

En considérant l'échantillon $n = 47$ on a :

$\bar{x} = 0{,}2419$ $\quad$ $\bar{y} = 0{,}089$ $\quad$ $r_{xy} = 0{,}82$

$s_x = 0{,}1224$ $\quad$ $s_y = 0{,}0461$ $\quad$ $m = 0{,}3087$

$\bar{x}^2 = 0{,}0585$ $\quad$ $s_y^2 = 0{,}0021$ $\quad$ $b = 0{,}0143$

$s_x^2 = 0{,}015$

D'où : $\sum_{i=1}^{47}(x_i - \bar{x})^2 = (n-1)\, s_x^2 = 0{,}69$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{47}(y_i - \bar{y})^2 = (n-1)\, s_y^2 = 0{,}0966$

$$\sigma_e^2 = \frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{n-2}(1 - r^2) = 0{,}0007$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}} = 0{,}0319 \qquad \sigma_b = \sqrt{\frac{\sigma_e^2}{n}\left[1 + \frac{n\bar{x}^2}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}\right.} = 0{,}0086$$

D'où $\quad 2\sigma_m = 0{,}0638 \qquad 2\sigma_b = 0{,}0172$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}2449 \leq m \leq 0{,}3725 \\ -0{,}0029 \leq b \leq 0{,}0315 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 : 0{,}3725\,X + 0{,}0315 \\ L_2 : 0{,}2449\,X - 0{,}0029 \\ \hat{y} = 0{,}3087\,X + 0{,}0143 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{pts à éliminer : (11)}$$

$\binom{0{,}4}{0{,}073}$; $\binom{0{,}14}{0{,}09}$ $\binom{0{,}12}{0{,}107}$ $\binom{0{,}32}{0{,}16}$

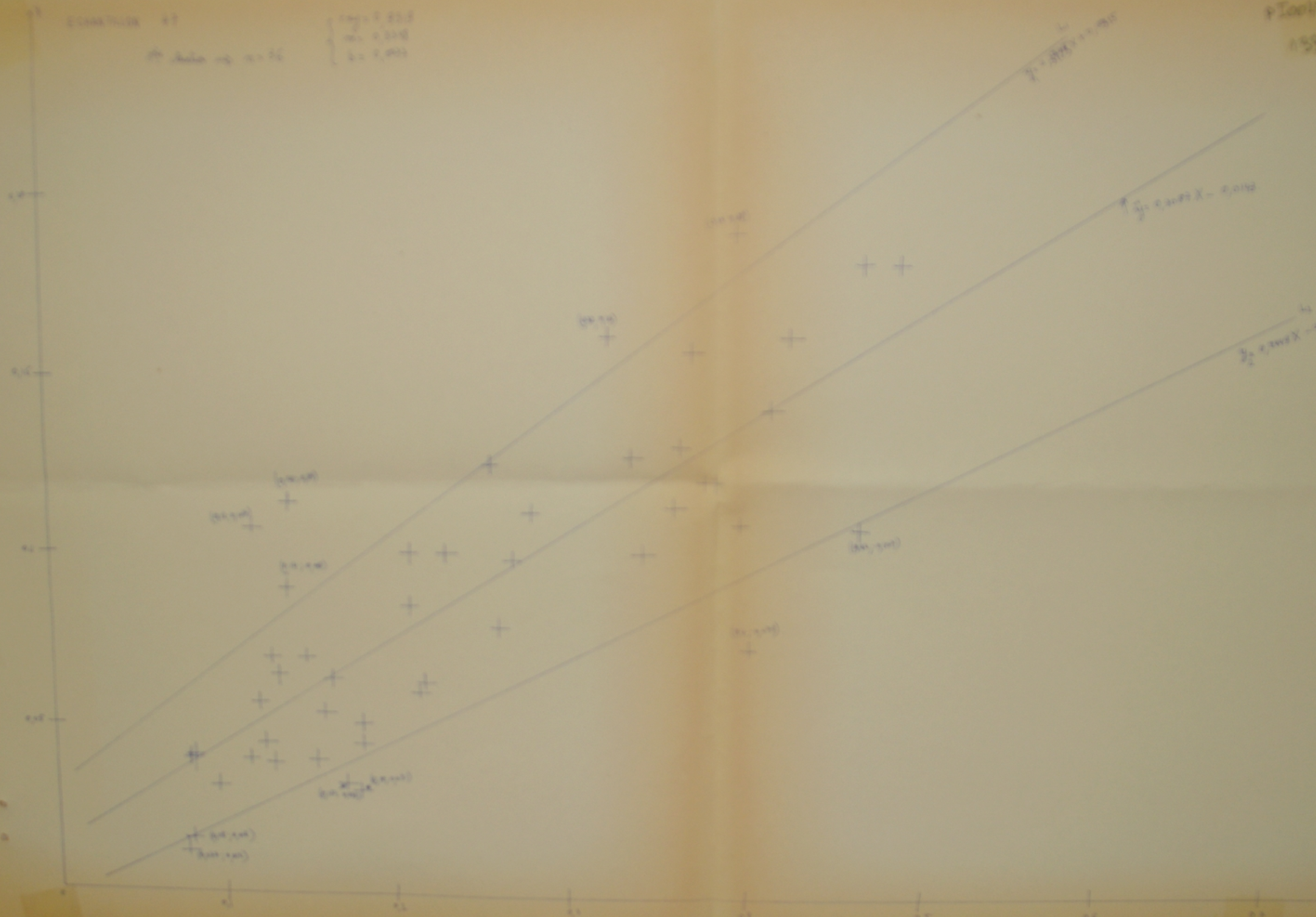
$\binom{0{,}46}{0{,}107}$; $\binom{0{,}39}{0{,}188}$ $\binom{0{,}077}{0{,}012}$ $\binom{0{,}18}{0{,}031}$ $\binom{0{,}132}{0{,}033}$ $\binom{0{,}41}{0{,}114}$ $\binom{0{,}08}{0{,}016}$

D'où l'échantillon $n = 36$

	X	Y
1	0,36	0,13
2	0,21	0,085
3	0,122	0,057
4	0,08	0,04
5	0,13	0,039
6	0,083	0,041
7	0,357	0,113
8	0,116	0,04
9	0,125	0,045
10	0,182	0,051
11	0,366	0,156
12	0,215	0,06

	X	Y
13	0,278	0,111
14	0,42	0,16
15	0,41	0,14
16	0,46	0,18
17	0,255	0,125
18	0,097	0,032
19	0,155	0,04
20	0,13	0,07
21	0,23	0,1
22	0,15	0,07
23	0,21	0,1
24	0,16	0,054

	X	Y
25	0,134	0,065
26	0,165	0,064
27	0,218	0,063
28	0,38	0,12
29	0,48	0,18
30	0,34	0,1
31	0,268	0,098
32	0,333	0,127
33	0,374	0,12
34	0,26	0,079
35	0,394	0,108
36	0,182	0,045



Echantillon 47

$2^{\text{ème}}$ Itération $\rightarrow n = 30$ $\begin{cases} r_{xy} = 0{,}9594 \\ m = 0{,}3484 \\ b = 0{,}0041 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 36$ on a :

$\bar{x} = 0{,}2471$ $\quad$ $\bar{y} = 0{,}0904$ $\quad$ $r_{xy} = 0{,}9319$

$S_x = 0{,}1182$ $\quad$ $S_y = 0{,}0425$ $\quad$ $m = 0{,}3348$

$\bar{x}^2 = 0{,}061$ $\quad$ $S_y^2 = 0{,}0018$ $\quad$ $b = 0{,}0077$

$S_x^2 = 0{,}014$

$\sum_{i=1}^{36}(x_i - \bar{x})^2 = 0{,}49$ $\quad$ $\sum_{i=1}^{36}(y_i - \bar{y})^2 = 0{,}063$ $\quad$ $\sigma_e^2 = 0{,}0002$

D'où $\sigma_m = 0{,}0223$. $\quad$ $\sigma_b = 0{,}0055$

$2\sigma_m = 0{,}0446$ $\quad$ $2\sigma_b = 0{,}0110$

$\left.\begin{array}{l} 0{,}2902 \le m \le 0{,}3794 \\ -0{,}0033 \le b \le 0{,}0187 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} L_1 = 0{,}3794X + 0{,}0187 \\ L_2 = 0{,}2902X - 0{,}0033 \\ \hat{y} = 0{,}3348X + 0{,}0077 \end{array}\right\} \rightarrow$ pts à éliminer : (6)

$\begin{pmatrix} 0{,}255 \\ 0{,}125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}155 \\ 0{,}04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}13 \\ 0{,}07 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0{,}21 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}394 \\ 0{,}108 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}182 \\ 0{,}045 \end{pmatrix}$

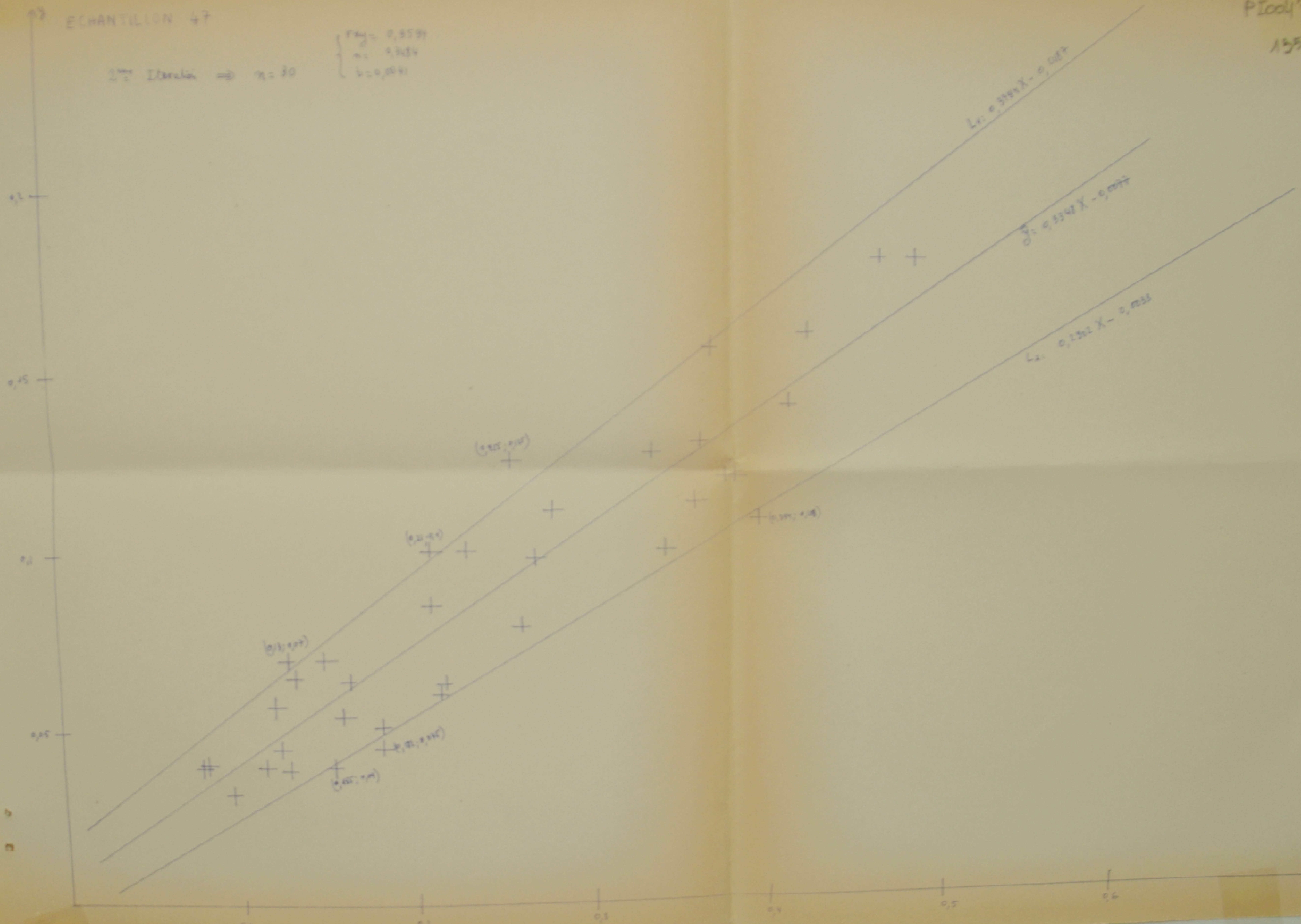
D'où l'échantillon $n = 30$

	X	Y
1	0,36	0,13
2	0,21	0,085
3	0,122	0,057
4	0,08	0,04
5	0,13	0,039
6	0,083	0,041
7	0,357	0,113
8	0,116	0,04
9	0,125	0,045
10	0,182	0,051

	X	Y
11	0,366	0,156
12	0,215	0,06
13	0,278	0,111
14	0,42	0,16
15	0,41	0,14
16	0,46	0,18
17	0,037	0,032
18	0,23	0,1
19	0,15	0,07
20	0,16	0,054

	X	Y
21	0,134	0,065
22	0,165	0,064
23	0,218	0,063
24	0,38	0,12
25	0,48	0,18
26	0,34	0,1
27	0,268	0,098
28	0,333	0,127
29	0,374	0,12
30	0,26	0,079

PI00473
135


ECHANTILLON 47
2ème Itération ⇒ n = 30
0,05
0,1
0,15
0,2
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6

Echantillon 47

3ème Itération $\rightarrow n = 30$ $\left\{ \begin{array}{l} r_{xy} = 0,9594 \\ m = 0,3484 \\ b = 0,0041 \end{array} \right.$

En considérant l'échantillon $n = 30$ on a :

$\bar{x} = 0,2498$	$\bar{y} = 0,0911$	$r_{xy} = 0,9594$
$S_x = 0,1238$	$S_y = 0,045$	$m = 0,3484$
$\bar{x}^2 = 0,0624$	$s_y^2 = 0,002$	$b = 0,0041$
$S_x^2 = 0,0153$		

$\sum_{i=1}^{30}(x_i - \bar{x})^2 = 0,4445$ $\sum_{1}^{30}(y_i - \bar{y})^2 = 0,058$ $\sigma_e^2 = 0,0002$

D'où $\sigma_m = 0,0193$ $\sigma_b = 0,00589$

$2\sigma_m = 0,0386$ $2\sigma_b = 0,047$

$\left. \begin{array}{l} 0,3098 \leq m \leq 0,387 \\ -0,0077 \leq b \leq 0,0159 \end{array} \right\} \rightarrow$ $\left. \begin{array}{l} L_1 : 0,387X + 0,0159 \\ L_2 : 0,3098X - 0,0077 \\ \hat{y} = 0,3484X + 0,0041 \end{array} \right\} \rightarrow$ Aucun pt à enlever

D'où l'échantillon $n = 30$

	X	Y
1	0,36	0,13
2	0,21	0,085
3	0,122	0,057
4	0,08	0,04
5	0,13	0,039
6	0,083	0,041
7	0,357	0,143
8	0,116	0,04
9	0,125	0,045
10	0,182	0,051

	X	Y
11	0,366	0,156
12	0,215	0,06
13	0,278	0,111
14	0,42	0,16
15	0,41	0,14
1	0,46	0,18
16	0,097	0,032
17		
18	0,23	0,1
19	0,15	0,07
20	0,16	0,054

	X	Y
21	0,134	0,065
22	0,165	0,064
23	0,218	0,063
24	0,38	0,162
25	0,48	0,18
26	0,34	0,1
27	0,268	0,098
28	0,333	0,127
29	0,374	0,12
30	0,26	0,079

On remarque que tous les pts sont dans le domaine limité par L_1, L_2 d'où les estimations de m, b, r_{xy}

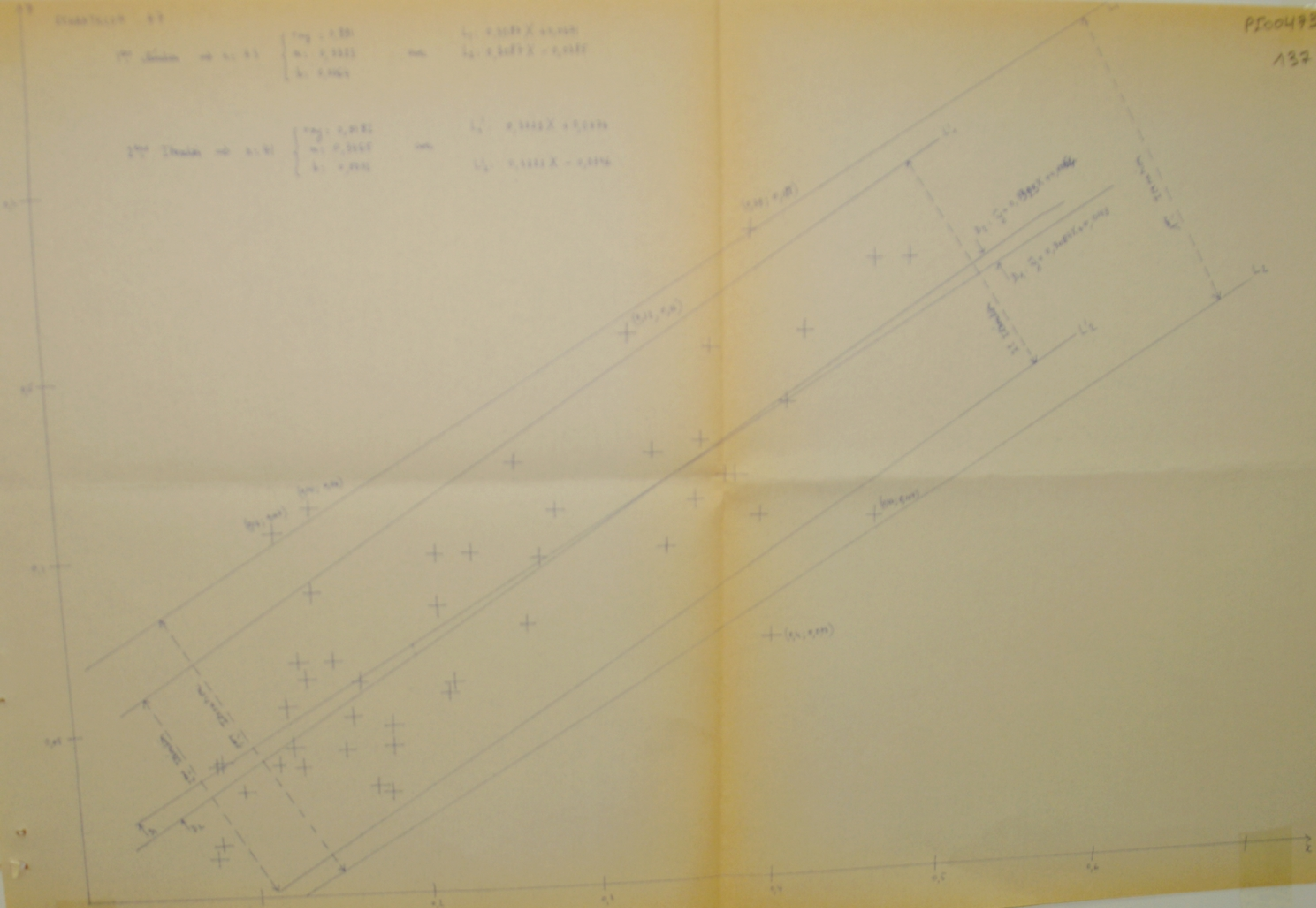
$\boxed{m = 0,3484}$ $\boxed{b = 0,0041}$ $\boxed{r_{xy} = 0,9594}$

D'où l'estimation de y :

$$\boxed{y = 0,3484X + 0,0041}$$

PI00473

137



(II)

Echantillon 47

1ère Itération $\rightarrow n = 43 \begin{cases} r_{xy} = 0,891 \\ m = 0,3323 \\ b = 0,0064 \end{cases}$

En considérant l'échantillon 47 on a :

$$\left.\begin{array}{ll} m = 0,3087 & ;\ r_{xy} = 0,82 \\ b = 0,0143 & ;\ \bar{y} = 0,089 \\ & ;\ s_y = 0,0461 \end{array}\right\} \rightarrow u = \sqrt{1 - r^2}\, s_y = 0,0264 \quad \text{d'où } 2u = 0,0528$$

D'où

$$\left.\begin{array}{l} L_1 : \ 0,3087\,X + 0,0671 \\ L_2 : \ 0,3087\,X - 0,0385 \\ \hat{y} = 0,3087\,X + 0,0143 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à enlever : } \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,073 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,107 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0,39 \\ 0,188 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0,141 \\ 0,114 \end{pmatrix}$$

D'où l'échantillon n = 43

	X	Y
1	0,36	0,13
2	0,21	0,085
3	0,122	0,057
4	0,08	0,04
5	0,13	0,039
6	0,083	0,041
7	0,357	0,113
8	0,116	0,04
9	0,125	0,045
10	0,182	0,051
11	0,366	0,156
12	0,215	0,06
13	0,278	0,111
14	0,42	0,16
15	0,41	0,14
16	0,46	0,18

	X	Y
17	0,255	0,125
18	0,095	0,032
19	0,155	0,004
20	0,13	0,07
21	0,14	0,09
22	0,23	0,1
23	0,15	0,07
24	0,21	0,1
25	0,16	0,054
26	0,134	0,065
27	0,165	0,064
28	0,218	0,063
29	0,38	0,12
30	0,48	0,18
31	0,32	0,16

	X	Y
32	0,46	0,107
33	0,077	0,012
34	0,18	0,031
35	0,34	0,1
36	0,268	0,098
37	0,333	0,127
38	0,374	0,12
39	0,26	0,079
40	0,394	0,108
41	0,172	0,033
42	0,08	0,016
43	0,182	0,045

II

Echantillon 47

$2^{ième}$ Itération $\rightarrow n = 41$ $\begin{cases} r_{xy} = 0{,}9182 \\ m = 0{,}3465 \\ b = 0{,}0032 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 43$ on a :

$$\left.\begin{array}{ll} m = 0{,}3323 \; ; & r_{xy} = 0{,}891 \\ b = 0{,}0064 \; ; & \bar{y} = 0{,}0861 \\ & S_y = 0{,}0452 \end{array}\right\} \rightarrow u = \sqrt{1 - r^2} \; S_y = 0{,}0205 \quad \text{d'où} \quad 2u = 0{,}041$$

D'où :

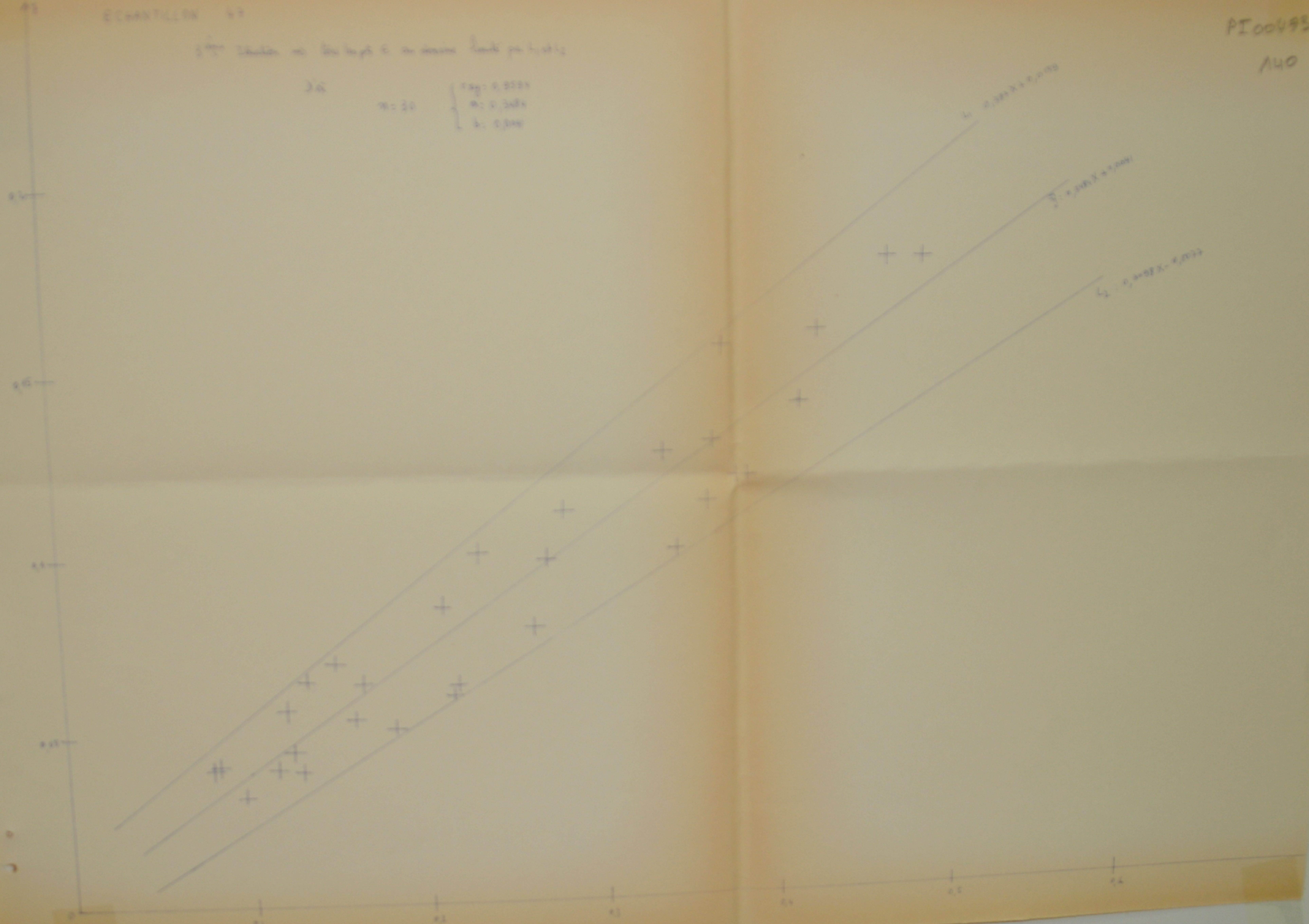
$$\left.\begin{array}{ll} L_1 : & 0{,}3323\,X + 0{,}0474 \\ L_2 : & 0{,}3323\,X - 0{,}0346 \\ \bar{y} = & 0{,}3323\,X + 0{,}0064 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pts à éliminer : } \begin{pmatrix} 0{,}32 \\ 0{,}16 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0{,}46 \\ 0{,}107 \end{pmatrix}$$

D'où l'échantillon $n = 41$

	X	Y
1	0,36	0,13
2	0,21	0,085
3	0,122	0,057
4	0,08	0,04
5	0,13	0,039
6	0,083	0,041
7	0,357	0,13
8	0,116	0,04
9	0,125	0,045
10	0,182	0,051
11	0,366	0,156
12	0,215	0,06
13	0,278	0,111
14	0,42	0,16
15	0,41	0,14

	X	Y
16	0,46	0,18
17	0,255	0,125
18	0,095	0,032
19	0,155	0,044
20	0,13	0,07
21	0,14	0,09
22	0,23	0,1
23	0,15	0,07
24	0,21	0,1
25	0,16	0,054
26	0,134	0,065
27	0,165	0,064
28	0,218	0,063
29	0,38	0,12
30	0,48	0,18

	X	Y
31	0,077	0,012
32	0,18	0,031
33	0,34	0,1
34	0,268	0,098
35	0,333	0,127
36	0,374	0,12
37	0,26	0,079
38	0,394	0,108
39	0,172	0,033
40	0,08	0,016
41	0,182	0,045


ECHANTILLON 47

Echantillon 47

$3^{ième}$ Iteration $\rightarrow n = 39$ $\left\{ \begin{array}{l} r_{xy} = 0{,}9266 \\ m = 0{,}352 \\ b = 0{,}0012 \end{array} \right.$

En Considérant l'échantillon n = 41 on a :

$$\left. \begin{array}{ll} m = 0{,}3465 \; ; & r_{xy} = 0{,}9182 \\ b = 0{,}0032 \; ; & \bar{y} = 0{,}0837 \\ & S_y = 0{,}0446 \end{array} \right\} \longrightarrow u = \sqrt{1-r^2}\, S_y = 0{,}0177 \quad \text{d'où } 2u = 0{,}0353$$

D'où :

$$\left. \begin{array}{l} L_1 : \; 0{,}3465\,X + 0{,}0385 \\ L_2 : \; 0{,}3465\,X - 0{,}0321 \\ \hat{y} = \; 0{,}3465\,X + 0{,}0032 \end{array} \right\} \longrightarrow \text{pts à enlever : } \binom{0{,}14}{0{,}09} ; \binom{0{,}18}{0{,}031}$$

D'où l'échantillon n = 39

	X	Y
1	0,36	0,13
2	0,21	0,085
3	0,122	0,057
4	0,08	0,04
5	0,13	0,039
6	0,083	0,04
7	0,357	0,113
8	0,116	0,04
9	0,125	0,045
10	0,182	0,051
11	0,366	0,156
12	0,215	0,06
13	0,278	0,111
14	0,42	0,16
15	0,41	0,14
16	0,46	0,18
17	0,095	0,032
18	0,155	0,044
19	0,13	0,07
20	0,23	0,1
21	0,15	0,07
22	0,21	0,1
23	0,16	0,054
24	0,134	0,065
25	0,165	0,064
26	0,218	0,063
27	0,38	0,12
28	0,48	0,18
29	0,077	0,012
30	0,34	0,1
31	0,268	0,098
32	0,333	0,127
33	0,374	0,12
34	0,26	0,079
35	0,394	0,108
36	0,172	0,033
37	0,255	0,125
38	0,08	0,16
39	0,182	0,045

Echantillon 47

4ème Iteration $\longrightarrow$ n = 38 $\begin{cases} r_{xy} = 0,941 \\ m = 0,3485 \\ b = 0,0017 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 39$ on a :

$$\left.\begin{array}{ll} m = 0,352 \; ; & r_{xy} = 0,9266 \\ b = 0,0012 \; ; & \bar{y} = 0,0849 \\ & S_y = 0,0449 \end{array}\right\} \rightarrow u = \sqrt{1-r^2}\, S_y = 0,0169 \quad \text{d'où } 2u = 0,0338$$

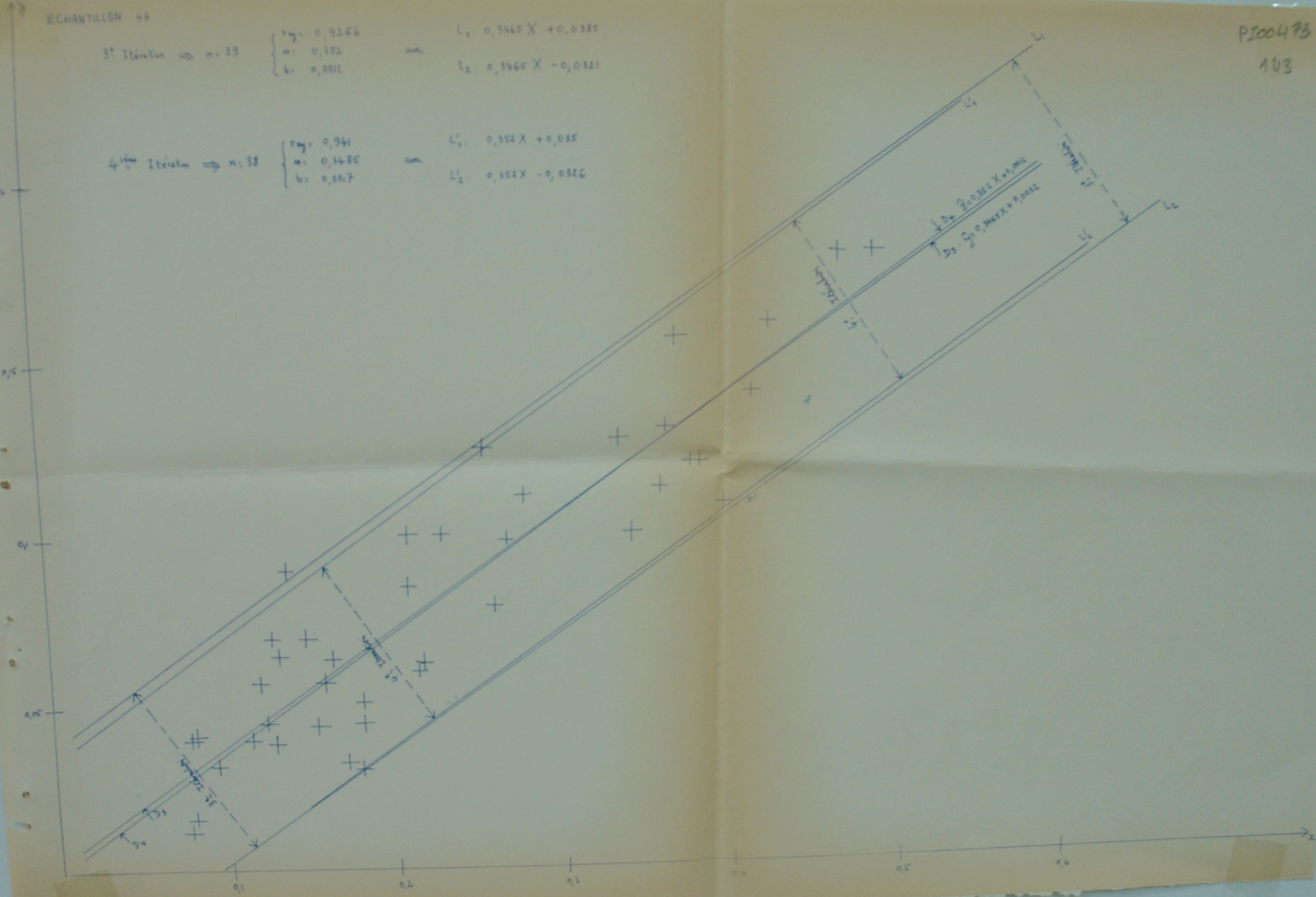
D'où :

$$\left.\begin{array}{ll} L_1 : & 0,352X + 0,035 \\ L_2 : & 0,352X - 0,0326 \\ \hat{y} = & 0,352X + 0,0012 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pt à éliminer} \begin{pmatrix} 0,255 \\ 0,125 \end{pmatrix}$$

D'où l'échantillon $n = 38$

	X	Y
1	0,36	0,13
2	0,21	0,085
3	0,122	0,057
4	0,08	0,04
5	0,13	0,039
6	0,083	0,041
7	0,357	0,113
8	0,116	0,04
9	0,125	0,045
10	0,182	0,051
11	0,366	0,156
12	0,215	0,06
13	0,278	0,111
14	0,42	0,16
15	0,41	0,14
16	0,46	0,18
17	0,055	0,032
18	0,155	0,044
19	0,13	0,07
20	0,23	0,1
21	0,15	0,07
22	0,21	0,1
23	0,16	0,054
24	0,134	0,065
25	0,165	0,064
26	0,218	0,063
27	0,38	0,12
28	0,48	0,18
29	0,077	[illegible]
30	0,34	0,1
31	0,268	0,098
32	0,333	0,127
33	0,374	0,12
34	0,26	0,079
35	0,394	0,108
36	0,172	0,033
37	0,08	0,016
38	0,182	0,045

PI00473
143


ECHANTILLON 47
3e Itération ⇒ n = 39
ryx = 0,9266
m : 0,352
b : 0,0012
avec
L1 : 0,3465 X + 0,0385
L2 : 0,3465 X − 0,0321
4ième Itération ⇒ n = 38
ryx = 0,941
m : 0,3485
b : 0,0017
avec
L'1 : 0,352 X + 0,035
L'2 : 0,352 X − 0,0326
L1
L2
L'1
L'2
0,05
0,1
0,15
0,2
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
x

Echantillon 47

$5^{\text{ième}}$ Itération $\rightarrow n = 37$ $\left\{ \begin{array}{l} r_{xy} = 0{,}9481 \\ m = 0{,}3585 \\ b = 0{,}0003 \end{array} \right.$

En considérant l'échantillon $n = 38$ on a :

$$\left. \begin{array}{ll} m = 0{,}3485 \; ; & r_{xy} : 0{,}941 \\ b = 0{,}0017 \; ; & \bar{y} : 0{,}0839 \\ & S_y : 0{,}0451 \end{array} \right\} \rightarrow u = \sqrt{1-r^2}\, S_y = 0{,}0153 \quad \text{d'où} \quad 2u = 0{,}0306$$

D'où :

$$\left. \begin{array}{ll} L_1 : & 0{,}3485\, X + 0{,}0322 \\ L_2 : & 0{,}3485\, X - 0{,}0288 \\ \hat{y} = & 0{,}3485\, X + 0{,}0017 \end{array} \right\} \rightarrow \text{pt à enlever} : \begin{pmatrix} 0{,}394 \\ 0{,}108 \end{pmatrix}$$

D'où l'échantillon $n = 37$

	X	Y
1	0,36	0,13
2	0,21	0,085
3	0,122	0,057
4	0,08	0,04
5	0,13	0,039
6	0,083	0,041
7	0,357	0,113
8	0,116	0,04
9	0,125	0,045
10	0,182	0,051
11	0,366	0,156
12	0,215	0,06
13	0,278	0,111
14	0,42	0,16
15	0,41	0,14
16	0,46	0,18
17	0,095	0,032
18	0,155	0,044
19	0,13	0,07
20	0,23	0,1
21	0,15	0,07
22	0,21	0,1
23	0,16	0,054
24	0,134	0,065
25	0,165	0,064
26	0,218	0,063
27	0,38	0,12
28	0,48	0,18
29	0,077	0,012
30	0,34	0,1
31	0,268	0,098
32	0,333	0,127
33	0,374	0,12
34	0,26	0,079
35	0,172	0,033
36	0,08	0,016
37	0,182	0,045

Echantillon 47

$6^{ième}$ Itération $\rightarrow$ $n = 36$ $\begin{cases} r_{xy} = 0{,}9527 \\ m = 0{,}355 \\ b = 0{,}0019 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 37$ on a :

$$\left.\begin{array}{lll} m = 0{,}3585 & ; & r_{xy} = 0{,}9481 \\ b = 0{,}0003 & ; & \bar{y} = 0{,}0832 \\ & & S_y = 0{,}0455 \end{array}\right\} \rightarrow u = \sqrt{1-r^2}\, S_y = 0{,}0145 \quad \text{d'où} \quad 2u = 0{,}029$$

D'où :

$$\left.\begin{array}{l} L_1 : 0{,}3585\,X + 0{,}0292 \\ L_2 : 0{,}3585\,X - 0{,}0286 \\ \hat{y} = 0{,}3585\,X + 0{,}0003 \end{array}\right\} \rightarrow \text{pt à éliminer} : \begin{pmatrix} 0{,}172 \\ 0{,}033 \end{pmatrix}$$

D'où l'échantillon $n = 36$

	X	Y
1	0,36	0,13
2	0,21	0,085
3	0,122	0,057
4	0,08	0,04
5	0,13	0,039
6	0,083	0,041
7	0,357	0,13
8	0,116	0,04
9	0,125	0,045
10	0,182	0,051
11	0,366	0,156
12	0,215	0,06

	X	Y
13	0,278	0,111
14	0,42	0,16
15	0,41	0,14
16	0,46	0,18
17	0,095	0,032
18	0,155	0,044
19	0,13	0,07
20	0,23	0,1
21	0,15	0,07
22	0,21	0,1
23	0,16	0,054
24	0,134	0,065

	X	Y
25	0,165	0,064
26	0,218	0,063
27	0,38	0,12
28	0,48	0,18
29	0,077	0,012
30	0,34	0,1
31	0,268	0,098
32	0,333	0,127
33	0,374	0,12
34	0,26	0,079
35	0,08	0,016
36	0,182	0,045

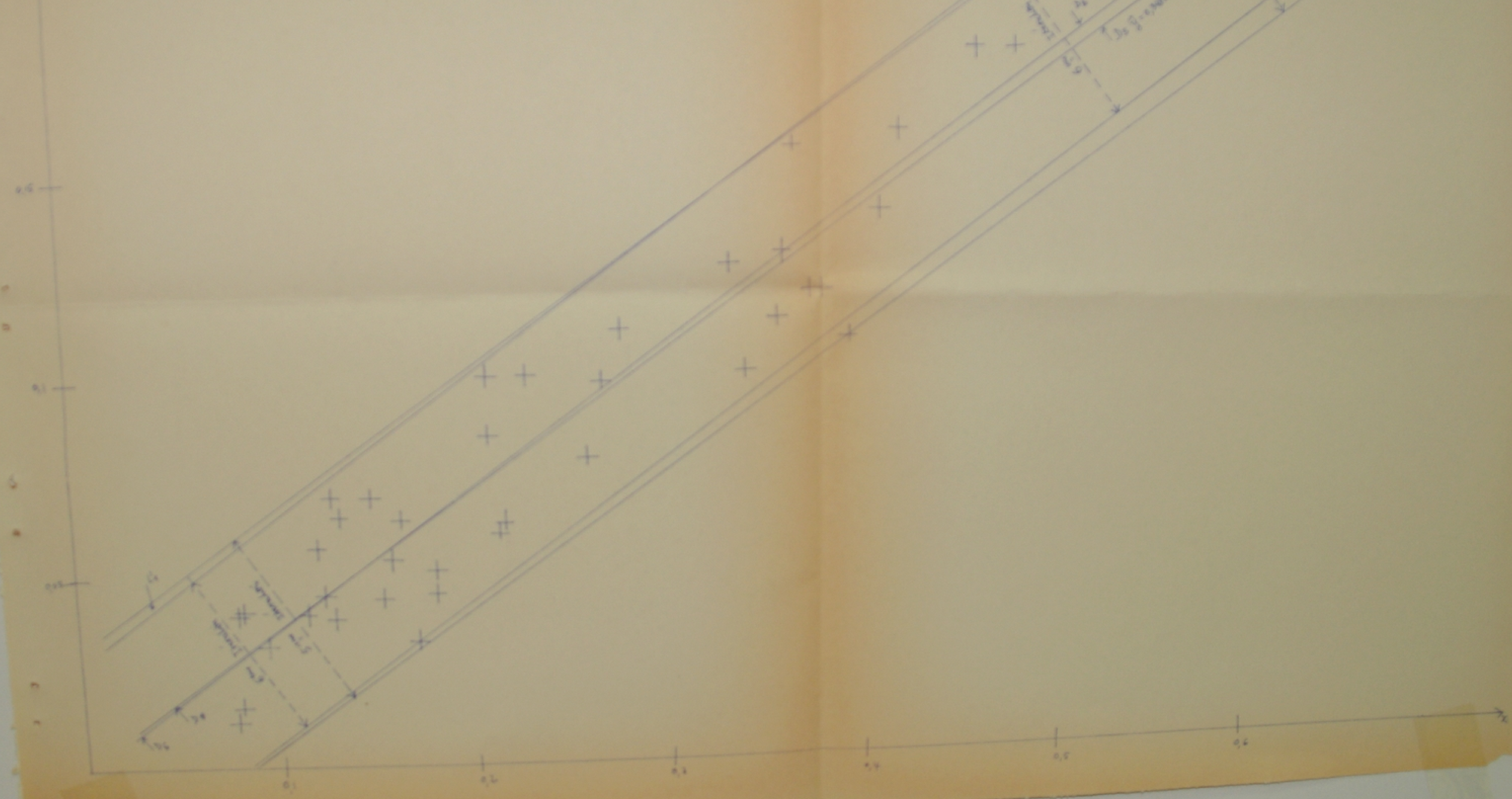
ECHANTILLON 47

PI00473

146

5ème Itération ⇒ n = 37 $\begin{cases} r_{xy} = 0{,}9481 \\ m = 0{,}3585 \\ b = 0{,}0003 \end{cases}$ ⇒ $L_1 : 0{,}3485\,X + 0{,}0321$; $L_2 : 0{,}3485\,X - 0{,}0288$

6ème Itération ⇒ n = 36 $\begin{cases} r_{xy} = 0{,}9527 \\ m = 0{,}355 \\ b = 0{,}0019 \end{cases}$ ⇒ $L_1 : 0{,}3585\,X + 0{,}0281$; $L_2 : 0{,}3585\,X - 0{,}0286$



Echantillon 47

$7^{ème}$ Iteration $\rightarrow n = 36$ $\begin{cases} r_{xy} = 0,9527 \\ m = 0,355 \\ b = 0,0019 \end{cases}$

En considérant l'échantillon $n = 36$ on a :

$$\left.\begin{array}{ll} m = 0,355 \ ; & r_{xy} = 0,9527 \\ b = 0,0019 \ ; & \bar{y} = 0,0846 \\ & s_y = 0,0453 \end{array}\right\} \rightarrow u = \sqrt{1-r^2}\, s_y = 0,0138 \quad \text{d'où } 2u = 0,0276$$

D'où

$$\left.\begin{array}{ll} L_1 : & 0,355\,X + 0,0294 \\ L_2 : & 0,355\,X - 0,0256 \\ \hat{y} : & 0,355\,X + 0,0019 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Aucun pt à enlever}$$

d'où l'échantillon $n = 36$

	X	Y
1	0,36	0,13
2	0,21	0,085
3	0,122	0,057
4	0,08	0,04
5	0,13	0,039
6	0,083	0,041
7	0,357	0,113
8	0,116	0,04
9	0,125	0,045
10	0,182	0,051
11	0,366	0,155
12	0,215	0,06

	X	Y
13	0,278	0,111
14	0,42	0,16
15	0,41	0,14
16	0,46	0,18
17	0,095	0,032
18	0,155	0,044
19	0,13	0,07
20	0,23	0,1
21	0,15	0,07
22	0,21	0,1
23	0,16	0,054
24	0,134	0,065

	X	Y
25	0,165	0,064
26	0,218	0,063
27	0,38	0,12
28	0,48	0,18
29	0,077	0,012
30	0,34	0,1
31	0,268	0,098
32	0,333	0,127
33	0,374	0,12
34	0,26	0,079
35	0,08	0,016
36	0,182	0,045

On remarque que tous les pts sont dans le domaine limité par L_1 et L_2 ; d'où une estimation de m, b, r_{xy} :

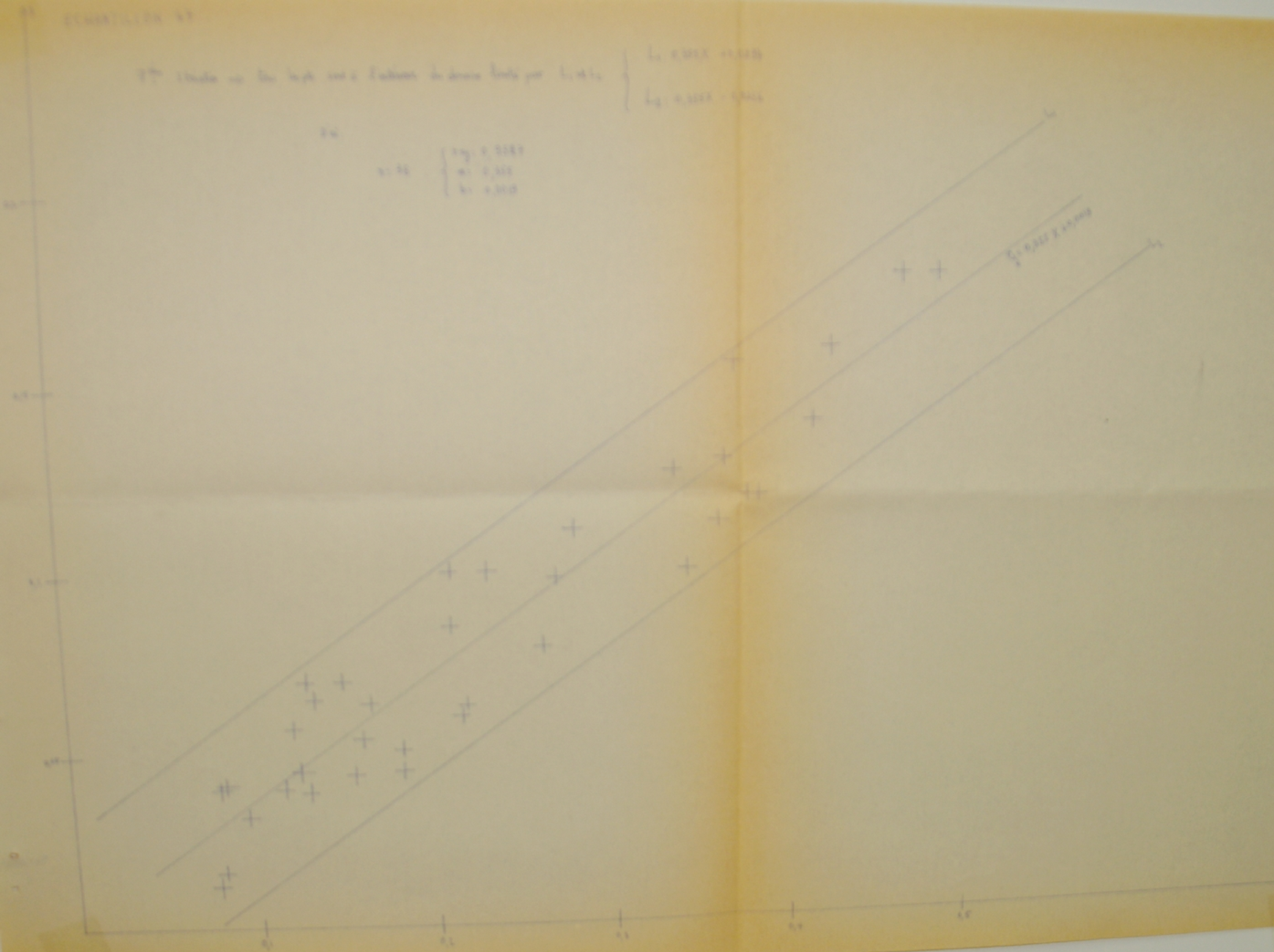
$\boxed{m = 0,355}$ $\boxed{b = 0,0019}$ $\boxed{r_{xy} = 0,9527}$

D'où l'éq de la droite :

$$\boxed{y = 0,355\,X + 0,0019}$$

PI001193

148



CONCLUSION

En employant les différentes méthodes nous arrivons à réduire l'échantillon initial et à determiner un nouvel échantillon plus représentatif de la "population -mère".

Le principal intêret de ces méthodes est qu'elles sont toutes convergentes c'est-à-dire qu'elles arrivent toutes à isoler un échantillon final.

Cependant sur les différents résultats obtenus d'une méthode à l'autre ,nous sommes amenés à prendre une décision concernant les estimations des paramètres. Dans toutes ces méthodes, il serait interessant de quantifier le seuil de signification des résultats obtenus;mais, là,nous nous sommes heurtés àdes problèmes théoriques très épineux ;et nous n'avons pu résoudre ce problème.

En ce qui concerne la méthode de l'ellipse nous remarquer que pour $t=2$ elle trop sélective (voir échantillon 91); pour $t=3$ elle trop rapidement convergente et ne permet pas d'obtenir les résultats escomptés (valeur faible du coefficient de corrélation) et elle est restrective sur les lois marginales. On en conclut que cette méthode n'est pas adéquate pour la recherche de l'échantillon représentatif.

Les autres méthodes donnent les résultats suivant :

<u>ECHANTILLON 91</u> : $I_p = m\, W_L + b$

1ière méthodes : $I_p = 0{,}7562\ W_L - 10{,}6729$

avec $r_1 = 0{,}9861$ ET $n = 56$

2ème méthode : $I_p = 0{,}7394\ W_L - 9{,}358$

avec $r_2 = 0{,}9831$ et $n=64$

<u>ECHANTILLON 47</u> : $C_g = m\, C_c + b$

1ième méthode : $C_g = 0{,}3484\ C_c + 0{,}0041$

avec $r_1 = 0{,}9594$ et $n=30$

2è méthode : $Cg = 0{,}355\ Cc + 0{,}0019$

avec $r_2 = 0{,}9527$ et $n=36$

<u>ECHANTILLON 74</u> : $Cc = m\, W_L + b$

1è méthode : $Cc = 0{,}004 W_L + 0{,}031$

avec $r_1 = 0{,}7624$ et $n=43$

2è méthode : $Cc = 0{,}0035\ W_L + 0{,}0677$

avec $r_2 = 0{,}5197$ et $n=71$

Cependant puisqu'on sait , que pour les échantillons $n=91$ et $n=47$, les relations qui existent entre I_p et W_L ; Cg et Cc sont des relations lineaires ($R_1 = 0{,}8325$ et $R_2 = 0{,}82$) donc on cherche à estimer les droites qui ajustent le mieux les échantillons $n=91$ et $n=47$; on remarque que la méthode des droites en biais donnent des résultats satisfaisant et ceci vient d'une part de la valeur du coefficient de corrélation qui est plus grand que celui truové dans la 2è méthode et d'autre part du fait même de la méthode utilisée: on a considéré un domaine D dans le plan (m,b) (domaine des paramètres à estimer) ce qui nous donne un domaine dans le champ des observations, pour l'élimination des points la règle est la suivante :

On considère un point qui se trouve à l'exterieur du domaine Δ, il n'existe pas de droite non aberrante passant par ce point (c-à-d il n'existe pas de couple (m,b) appartenant au domaine D) d'où on peut éliminer ce point ; on fait le même raisonnement pour les autres points extérieurs au domaine Δ et on obtient ainsi un echantillon pour estimer m et b. On refait les itérations jusqu'à ce que tous les points soient à l'intérieur du domaine Δ_i i étant l'indice caractérisant la i$^{\text{è}}$ itération.

D'où les résultats :

$$\boxed{I_p = 0{,}7562\ W_L - 10{,}6729}$$

et

$$\boxed{Cg = 0{,}3484\ Cc + 0{,}0041}$$

On remarque en ce qui concernex l'échantillon n=74 la relation qui existe entre Cc et W_L est loin dêtre linéaire (coefficient de corrélation R= 0,4537) d'où on ne peu t les résultats donnés par la méthode des droites en biais mais la deuxieme methode auxquels il faut ajouter un facteur f(z) ;c-à-d que la relation s'ecrit:

$Cc = 0{,}0035\ W_L + 0{,}0677 + f(z)$ z étant un parametre qu'il faut determiner. Pour déterminer ce facteur il aurait fallu employer l'Analyse de Variance ou la regression multifonctionnelle. Cette partie n'a pu être faite et ceci faute de temps.

Les droites obtenues dans les échantillons n=91 et n=47 ajustent le mieux l'ensemble des observations; elles s'expliquent cependant:

-<u>Analytiquement</u>: ces droites sont obtenues en minimisant la somme des carres des écarts parallelement à l'axe OY.

le champ des observations, pour l'élimination des points la règle est la suivante :

On considère un point qui se trouve à l'exterieur du domaine Δ, il n'existe pas de droite non aberrante passant par ce point (c-à-d il n'existe pas de couple (m,b) appartenant au domaine D) d'où on peut éliminer ce point ; on fait le même raisonnement pour les autres points extérieurs au domaine Δ et on obtient ainsi un echantillon pour estimer m et b. On refait les itérations jusqu'à ce que tous les points soient à l'intérieur du domaine Δ_i i étant l'indice caractérisant la $i^{\text{è}}$ itération.

D'où les résultats :

$$\boxed{I_p = 0{,}7562\ W_L - 10{,}6729}$$

et

$$\boxed{Cg = 0{,}3484\ Cc + 0{,}0041}$$

On remarque en ce qui concernex l'échantillon n=74 la relation qui existe entre Cc et W_L est loin dêtre linéaire (coefficient de corrélation R= 0,4537) d'où on ne peu t les résultats donnés par la méthode des droites en biais mais la deuxieme methode auxquels il faut ajouter un facteur f(z) ;c-à-d que la relation s'ecrit:

$Cc = 0{,}0035\ W_L + 0{,}0677 + f(z)$ z étant un parametre qu'il faut determiner. Pour déterminer ce facteur il aurait fallu employer l'Analyse de Variance ou la regression multifonctionnelle. Cette partie n'a pu être faite et ceci faute de temps.

Les droites obtenues dans les échantillons n=91 et n=47 ajustent le mieux l'ensemble des observations; elles s'expliquent cependant:

- <u>Analytiquement:</u> ces droites sont obtenues en minimisant la somme des carres des écarts parallelement à l'axe OY.

_Statistiquement:

Ces droites fournissent des estimations D_1 et D_2 des droites Y_1 et Y_2; correspondant aux deux populations dont sont issus les échantillons n=91 et n=47 lorsque W_L et Cc ont des valeurs connues.

On peut toujours discuter sur le modèle employé pour estimer les paramètres ~~me~~ m et b: en effet si les observations X(désignant W_L ou Cc) sont affectées d'erreur aleatoires, d'erreurs types ε_x; la variance calculée d'après ces observations, soit σ'^2_x, sera systématiquement superieure à la variance réelle σ^2_x puisque:

$$\sigma'^2_x = \sigma^2_x + \sigma^2_{\varepsilon x} \quad \text{(additivité des variances)}$$

et avec les notations, pour les observations Y(désignant I_p ou Cg) on aura: $\sigma'^2_y = \sigma^2_y + \sigma^2_{\varepsilon y}$

par contre aucune erreur n'affectera le terme $\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$. Le coefficient de corrélation aura pour expression:

$$r' = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{(\sigma^2_x + \sigma^2_{\varepsilon x})(\sigma^2_y + \sigma^2_{\varepsilon y})}}$$

et ce coefficient r' est inferieur au coeff r calculé en supposant X (désignant W_L ou Cc) connu.

Comme le montre l'expression précédente le coeff de corrélation lineaire est d'autant plus accusé que les erreurs d'observations sont importantes.

Titre PROG : Conversion Coordonnées $X_i \to X_{plot}$ $Y_i \to Y_{plot}$ et tracé des pts +

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
0 0	clear	20			
1	stop	41			
2	x→( )	23			
3	–	34			
4	a	13			
5	stop	41			
6	x→( )	23			
7	–	34			
8	b	14			
9	stop	41			
a	x→( )	23			
b	8	10			
c	stop	41			
d	x→( )	23			
1 0	9	11			
1	If flag	43			
2	1	1			
3	7	7			
4	Go To	44			
5	1	1			
6	b	14			
7	Go To	44			
8	–	34			
9	3	3			
a	7	7			
b	stop	41			
c	↑	27			
d	x→( )	23			
2 0	–	34			
1	c	36			
2	x←( )	67			
3	8	10			
4	–	34			
5	2	2			
6	0	0			
7	0	0			
8	×	36			
9	x←( )	67			
a	–	34			
b	a	13			
c	÷	35			
d	↑	27			

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
3 0	stop	41			
1	x→( )	23			
2	–	34			
3	d	17			
4	x⇄y	30			
5	x←( )	67			
6	9	11			
7	–	34			
8	2	2			
9	0	0			
a	0	0			
b	×	36			
c	x←( )	67			
d	–	34			
4 0	b	14			
1	÷	35			
2	Roll ↓	31			
3	x⇄y	30			
4	FMT	42			
5	↓	25			
6	Roll ↑	22			
7	5	5			
8	0	0			
9	+	33			
a	Roll ↓	31			
b	FMT	42			
c	↓	25			
d	Roll ↑	22			
5 0	–	34			
1	–	34			
2	Roll ↓	31			
3	FMT	42			
4	↓	25			
5	FMT	42			
6	↑	27			
7	Roll ↑	22			
8	+	33			
9	Roll ↓	31			
a	x⇄y	30			
b	Roll ↑	22			
c	+	33			
d	Roll ↓	31			

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
6 0	x⇄y	30			
1	FMT	42			
2	↓	25			
3	x⇄y	30			
4	Roll ↑	22			
5	–	34			
6	–	34			
7	x⇄y	30			
8	Roll ↑	22			
9	FMT	42			
a	↓	25			
b	FMT	42			
c	↑	27			
d	x←( )	67			
7 0	–	34			
1	d	17			
2	↑	27			
3	x←( )	67			
4	–	34			
5	c	16			
6	Print/space	45			
7	Go To	44			
8	–	34			
9	1	1			
a	0	0			
b	END	46			
c					
d					

Storage

f	
e	
d	
c	
b	
a	
9	
8	
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	
0	

titre PROG: Regression Linéaire - Calcul du coeff de corrélation

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
0 0	Clear	20			
1	x→( )	23			
2	d	17			
3	x→( )	23			
4	c	16			
5	x→( )	23			
6	b	14			
7	1	01			
8	x→( )	23			
9	a	13			
a	STOP	41			
b	IF FLAG	43			
c	3	03			
d	7	07			
1 0	ACC +	60			
1	↑	27			
2	×	36			
3	x⇄y	30			
4	y⇄( )	24			
5	d	17			
6	+	33			
7	y⇄( )	24			
8	d	17			
9	↓	25			
a	×	36			
b	b	14			
c	+	33			
d	y→( )	40			
2 0	b	14			
1	ROLL ↑	22			
2	↑	27			
3	×	36			
4	c	16			
5	+	33			
6	y→( )	40			
7	c	16			
8	a	13			
9	↑	27			
a	1	01			
b	+	33			
c	y→( )	40			
d	a	13			

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
3 0	0	00			
1	ROLL ↓	31			
2	x⇄y	30			
3	↓	25			
4	GO TO	44			
5	0	00			
6	a	13			
7	a	13			
8	↑	27			
9	1	01			
a	−	34			
b	↓	25			
c	x→( )	23			
d	a	13			
4 0	e	12			
1	↑	27			
2	a	13			
3	÷	35			
4	y⇄( )	24			
5	f	15			
6	÷	35			
7	y→( )	40			
8	e	12			
9	×	36			
a	e	12			
b	×	36			
c	d	17			
d	x⇄y	30			
5 0	−	34			
1	y→( )	40			
2	d	17			
3	c	16			
4	↑	27			
5	f	15			
6	↑	27			
7	×	36			
8	a	13			
9	×	36			
a	↓	25			
b	−	34			
c	y→( )	40			
d	c	16			

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
6 0	b	14			
1	↑	27			
2	f	15			
3	↑	27			
4	e	12			
5	×	36			
6	a	13			
7	×	36			
8	↓	25			
9	−	34			
a	d	17			
b	↑	27			
c	↓	25			
d	√x	76			
0	÷	35			
1	c	16			
2	√x	76			
3	÷	35			
4	d	17			
5	ROLL ↑	22			
6	x⇄y	30			
7	÷	35			
8	y⇄( )	24			
9	e	12			
a	e	12			
b	×	36			
c	f	15			
d	x⇄y	30			

Storage

f	
e	
d	
c	
b	
a	
9	
8	
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	
0	

II

Titre REGRESSION LINEAIRE Calcul du coefficient de correlation (Suite)

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
5 0	−	34			
1	e	12			
2	END	46			
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
a					
b					
c					
d					
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
a					
b					
c					
d					
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
a					
b					
c					
d					

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
a					
b					
c					
d					
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
a					
b					
c					
d					
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
a					
b					
c					
d					

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
a					
b					
c					
d					
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
a					
b					
c					
d					

Storage

f	
e	
d	
c	
b	
a	
9	
8	
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	
0	

III

Titre Programme calculant la moyenne $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum x_i$ et $S_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

Step	Key	Code
0 0	CLEAR	20
1	1	01
2	$x \to ()$	23
3	d	17
4	STOP	41
5	IF FLAG	43
6	1	01
7	7	07
8	↑	27
9	×	36
a	ACC +	60
b	d	17
c	$x \rightleftarrows y$	30
d	1	01
1 0	+	33
1	$y \to ()$	40
2	d	17
3	↓	25
4	GO TO ()()	44
5	0	00
6	4	04
7	d	17
8	↑	27
9	1	01
a	−	34
b	$y \to ()$	40
c	d	17
d	↑	27
2 0	Recall	61
1	ROLL ↑	22
2	÷	35
3	$y \to ()$	40
4	f	15
5	×	36
6	f	15
7	×	36
8	↓	25
9	−	34
a	d	17
b	↑	27
c	1	01
d	−	34
3 0	f	15
1	ROLL ↓	31
2	÷	35
3	d	17
4	ROLL ↓	31
5	$\sqrt{x}$	76
6	$x \rightleftarrows y$	30
7	ROLL ↑	22
8	END	46

RESULTAT

n	$\bar{X}$	S_x

Storage

f	
e	
d	
c	
b	
a	
9	
8	
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	
0	

IV

Titre: Calcul de a; $\sin\alpha$; b; $\cos\alpha$

$a \to -a$ $\quad$ $\sin\alpha \to f$

$b \to -b$ $\quad$ $\cos\alpha \to e$

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
0 0	Clear	20			
1	Stop	41	[illegible]		
2	$x \to ()$	23			
3	a	12			
4	Stop	41	σ^2_x		
5	$x \to ()$	23			
6	b	13			
7	↑	27		σ^2_x	
8	Stop	41	σ^2_y		
9	$x \to ()$	23			
a	c	14		$\sigma^2_x\sigma^2_y$	
b	×	36			
c	↓	22	$\sigma^2_x\sigma^2_y$		
d	$\sqrt{x}$	76	$\sigma_x\sigma_y$		
1 0	$x \to ()$	23			
1	d	15			
2	↑	27		$\sigma_x\sigma_y$	
3	2	2			
4	×	36		$2\sigma_x\sigma_y$	
5	a	12	ρ		
6	×	33		$2\rho\sigma_x\sigma_y$	
7	↑	27			$2\rho\sigma_x\sigma_y$
8	c	14	σ^2_y		$2\rho\sigma_x\sigma_y$
9	$x \rightleftarrows y$	30		σ^2_y	$2\rho\sigma_x\sigma_y$
a	b	13	σ^2_x	σ^2_y	$2\rho\sigma_x\sigma_y$
b	−	34		$\sigma^2_y-\sigma^2_x$	$2\rho\sigma_x\sigma_y$
c	↓	22	$\sigma^2_y-\sigma^2_x$	$2\rho\sigma_x\sigma_y$	
d	÷	35		$-\mathrm{tg}\,2\alpha$	
2 0	↓	25	$-\mathrm{tg}\,2\alpha$		
1	ch sign		$\mathrm{tg}\,2\alpha$		
2	Arc				
3	tg x		2α		
4	↑			2α	
5	2	2			
6	÷			[illegible]	
7	$y \to ()$			[illegible]	
8	e			α	
9	↓		α		
a	sin x		$\sin\alpha$		
b	$x \to ()$				
c	f				
d	e		α		

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
3 0	cos x		$\cos\alpha$		
1	$x \to ()$	23			
2	e		$\cos\alpha$		
3	↑	27	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	
4	×	36	$\cos\alpha$	$\cos^2\alpha$	
5	b	13	σ^2_x	$\cos^2\alpha$	
6	÷	35		$\cos^2\alpha/\sigma^2_x$	
7	f		$\sin\alpha$		
8	↑	27	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos^2\alpha/\sigma^2_x$
9	×	36	$\sin\alpha$	$\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha/\sigma^2_x$
a	c	14	σ^2_y	$\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha/\sigma^2_x$
b	÷	35	σ^2_y	$\sin^2\alpha/\sigma^2_y$	$\cos^2\alpha/\sigma^2_x$
c	↓	22	$\frac{\sin^2\alpha}{\sigma^2_y}$	$\frac{\cos^2\alpha}{\sigma^2_x}$	
d	+			A''	
4 0	e		$\cos\alpha$		
1	↑	27		$\cos\alpha$	A''
2	f		$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	A''
3	×	36	$\sin\alpha$	$\sin\alpha\cos\alpha$	A''
4	a	12	ρ		A''
5	×	36		$\rho\sin\alpha\cos\alpha$	A''
6	2	2			
7	×	36		$2\rho\sin\alpha\cos\alpha$	A''
8	d	15	$\sigma_x\sigma_y$		
9	÷	35		$\frac{2\rho\sin\alpha\cos\alpha}{\sigma_x\sigma_y}$	A''
a	↓	22	$\frac{2\rho\sin\alpha\cos\alpha}{\sigma_x\sigma_y}$	A''	
b	−	34		A'	
c	a	12	ρ	A'	
d	↑	27	ρ	ρ	A'
5 0	×	36		ρ^2	A'
1	1	1	1	ρ^2	A'
2	$x \rightleftarrows y$	30	ρ^2	1	A'
3	−	34	ρ^2	$1-\rho^2$	A'
4	4	4	4		
5	×	36	4	$4(1-\rho^2)$	A'
6	↓	22	$4(1-\rho^2)$	A'	
7	$x \rightleftarrows y$	30	A'	$4(1-\rho^2)$	
8	÷	35		a^2	
9	↓	22	a^2		
a	$\sqrt{x}$	76	a		
b	$x \to ()$	23			
c	−	34			
d	a	12	a		

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
6 0	f		$\sin\alpha$		
1	↑	27	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	
2	×	36	$\sin\alpha$	$\sin^2\alpha$	
3	b	13	σ^2_x	$\sin^2\alpha$	
4	÷	35	σ^2_x	$\sin^2\alpha/\sigma^2_x$	
5	e		$\cos\alpha$		
6	↑	27	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin^2\alpha/\sigma^2_x$
7	×	36	$\cos\alpha$	$\cos^2\alpha$	
8	c	14	σ^2_y	$\cos^2\alpha$	
9	÷	35	σ^2_y	$\cos^2\alpha/\sigma^2_y$	
a	↓	22	$\frac{\cos^2\alpha}{\sigma^2_y}$	$\frac{\sin^2\alpha}{\sigma^2_x}$	
b	+			C''	
c	e		$\cos\alpha$	C''	
d	↑	27	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	C''
0	f		$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	C''
1	×	36	$\sin\alpha$	$\sin\alpha\cos\alpha$	C''
2	a	12	ρ	$\sin\alpha\cos\alpha$	C''
3	×	33	ρ	$\rho\sin\alpha\cos\alpha$	C''
4	2	2	2		
5	×	36	2	$2\rho\sin\alpha\cos\alpha$	C''
6	d	15	$\sigma_x\sigma_y$	$2\rho\sin\alpha\cos\alpha$	C''
7	÷	35	$\sigma_x\sigma_y$	$\frac{2\rho\sin\alpha\cos\alpha}{\sigma_x\sigma_y}$	C''
8	↓	22	$\frac{2\rho\sin\alpha\cos\alpha}{\sigma_x\sigma_y}$	C''	
9	+			C'	
a	a	12	ρ	C'	
b	↑	27	ρ	ρ	C'
c	×	36	ρ	ρ^2	C'
d	1	01	1	ρ^2	C'

Storage

f	$\sin\alpha$	−f	$\bar{y}$
e	$\alpha \to \cos\alpha$	−e	$\bar{x}$
d	$\sigma_x\sigma_y$	−d	
c	σ^2_y	−c	
b	σ^2_x	−b	b
a	ρ	−a	a
9			
8			
7			
6			
5			
4			
3			
2			
1			
0			

UTILISATION DES PROGRAMMES SE TROUVANT EN ANNEXE

I- Programme permettant de calculer r_{xy}, m, b, et le tracé des points avec la droite d'équation $y = mx + b$:

- GO TO +00
- Prog ←
- Enregistrer le programme I
- → RUN
- GO TO -00
- Prog ←
- Enregistrer le programme II
- → RUN
- Rentrer X_s (nbre d' unités / cm de feuille sur X)
- CONT
- Rentrer Y_s (nbre d'unités/ cm de la feuille sur Y)
- CONT
- X_o
- CONT
- Y_s coordonnées à l'origine
- CONT
- GO TO -00
- Rentrer X_i —— X | Y_i —— Y | CONT ---→ tracé des pts (X_i, Y_i)

à la dernière donnée faire SET FLAG CONT

- GO TO -d0
- Prog ←
- Enregistrer le programme VI
- → RUN
- CONT

Ace moment là on aura la droite $y = m X + b$

II Programme calculant $\bar{X}$ et S_x ($S_x = \sqrt{\dfrac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$)

- GO TO +00
- Prog ←

- Enregistrer le programme I
- $\longrightarrow$ RUN
- GO TO +00
- CONT
- Rentrer X_i (pour la dernière donnée faire SET FLAG CONT)
- CONT

ON aura :

taille de l'échantillon Moyenne

n	$\bar{x}$	S_x

dispertion

III Programme : calcul des paramètres et tracé de l'ellipse

- GO TO +00
- Prog $\longleftarrow$
- Enregistrer les programmes IV et IV (suite)
- ~~66~~ $\rightarrow$ RUN
- GO TO -00
- Enregistrer programme tracé de l'ellipse.
- $\longrightarrow$ RUN
- X $\rightarrow$ -e
- Y $\longrightarrow$ - f
- END
- CONT
- S^2_x
- CONT
- S^2_y
- CONT
- X_s (nbre d'unités / cm de la feuille sur X)
- CONT
- Y_s (nbre d'unités / cm de la feuille)
- CONT
- X_o
- CONT
- Y_o
- CONT

Coordonnées à l'origine

A ce moment là on aura le tracé de l'ellipse

IV Programme : tracé de l'HISTOGRAMME :

D'abord déterminer W tel que $\frac{\bar{x}}{W} \leq 10$

- END
- Placer l'origine à (1,1)
- GO TO +00
- Prog ⟵
- Enregister le programme VII
- ⟶ RUN
- GO TO +CO
- Prog ⟵
- Enregistrer le programme VIII
- ⟶ RUN
- GO TO -00
- Prog ⟵
- Enregistrer le programme IX
- ⟶ RUN
- CONT
- W⟶ X
- CONT
- Entrer X_i (avec pour la dernière donnée [illegible])
- CONT
- CONT
- CONT tracé du 1er groupe
- CONT " du 2ième "
- " jusqu'à la fin de tous les groupes
- " A la fin on aura

1	M_h	σ_h^2

V Programme : tracé de la courbe de $N(M_h,\sigma_h^2)$

- Origine à (1,1)
- GO TO +00
- Prog ⟵
- Entrer du programme X
- ⟶ RUN
- END
- CONT

Ce programme doit suivre le programme de l'histogramme pour lequel on a $M_h \rightarrow f ; \sigma_h^2 \longrightarrow e$

IV

Titre: Calcul de a, sin α, b, cos α (Suite)

	Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
8	0	–		1	ρ^2-1	c'
	1	4	4	4	ρ^2-1	c'
	2	×	36	4	$4(\rho^2-1)$	c'
	3	↓	25	$4(\rho^2-1)$	c'	
	4	changement signe		$4(1-\rho^2)$	c'	
	5	$x \rightleftarrows y$	30	c'	$4(1-\rho^2)$	
	6	÷	35	c'	$\frac{4(1-\rho^2)}{c'}$	
	7	↓	25	b^2		
	8	$\sqrt{x}$	76	b		
	9	$x\to()$	23			
	a	–				
	b	b	13	b		
$X_S \to$	c	STOP	41			
	d	$x\to()$	23			
+9	0	a	12			
$Y_S \to$	1	STOP	41			
	2	$x\to()$	23			
	3	b	13			
$X_0 \to$	4	STOP	41			
	5	$x\to()$	23			
	6	c	14			
$Y_0 \to$	7	STOP	41			
	8	$x\to()$	23			
	9	d	15			
	a	GO TO ()()	44			
	b	–				
	c	0	0			
	d	0	0			

Storage

II

Rentrer $\bar{x} \to -e$; $\bar{y} \to -f$

Titre : Programme : tracé de l'ellipse d'inertie à 2σ

Step	Key	Code	x	y	z
00	π		π		
01	↑		π	π	
02	3		3		
03	6		36	π	
04	÷		36	π/36	
05	y→( )				
06	–				
07	d			π/36	
08	↓		θ		
09	x→( )				
0a	–				
0b	c				
0c	↑		θ	θ	
0d	cos x		cos θ	θ	
10	↑		cos θ	cos θ	θ
11	e		cos α	cos θ	θ
12	×		cos α	cos α cos θ	θ
13	x←( )				
14	–				
15	a		a	cos α cos θ	θ
16	×		a	a'	θ
17	Roll ↑		θ	a	a'
18	sin x		sin θ	a	a'
19	x⇄y			sin θ	a'
1a	f		sin α	sin θ	a'
1b	×		sin α	sin α sin θ	a'
1c	x←( )				
1d	–				
20	b		b	sin α sin θ	a'
21	×			b sin α sin θ	a'
22	↓		b sin α sin θ = b'	a'	
23	–			$x-\bar{x}$	
24	x←( )				
25	–				
26	e		$\bar{x}$	$x-\bar{x}$	
27	+			x	
28	y→( )				
29	–				
2a	9				
2b	x←( )				
2c	–				
2d	c		θ		

Step	Key	Code	x	y	z
30	↑		θ	θ	
31	cos x		cos θ	θ	
32	↑		cos θ	cos θ	θ
33	f		sin α	cos θ	θ
34	×		sin α	sin α cos θ	θ
35	x←( )				
36	–				
37	a		a	sin α cos θ	θ
38	×			a'	θ
39	Roll ↑		θ		a'
3a	sin x		sin θ		a'
3b	x⇄y			sin θ	a'
3c	e		cos α	sin θ	a'
3d	×			sin θ cos α	a'
40	x←( )				
41	–				
42	b		b	sin θ cos α	a'
43	×			b'	a'
44	↓		b'	a'	
45	+		b'	$y-\bar{y}$	
46	x←( )				
47	–				
48	f		$\bar{y}$	$y-\bar{y}$	
49	+			y	
4a	d		Y_0		
4b	–			$y-Y_0$	
4c	b		Y_s	$y-Y_0$	
4d	÷		Y_s	$\frac{y-Y_0}{Y_s}$	
50	2				
51	0				
52	0				
53	×		Y_s	Y_{plot}	
54	x←( )				
55	–				
56	9		x	Y_{plot}	
57	↑			x	Y_{plot}
58	c		X_0	x	Y_{plot}
59	–		X_0	$x-X_0$	Y_{plot}
5a	a		X_s	$x-X_0$	Y_{plot}
5b	÷		X_s	$\frac{x-X_0}{X_s}$	Y_{plot}
5c	2				
5d	0				

Step	Key	Code	x	y	z
60	0		200		
61	×			X_{plot}	Y_{plot}
62	↓		X_{plot}	Y_{plot}	
63	FMT				
64	↓		Y_{plot}	Y_{plot}	
65	y⇄( )				
66	–				
67	c			θ	
68	x←( )				
69	–				
6a	d		π/36	θ	
6b	+				
6c	π		π	θ	
6d	↑		π	π	θ
70	+			2π	θ
71	↓		2π	θ	
72	if x<y				
73	7				
74	9				
75	GOTO( )( )				
76	–				
77	0				
78	8				
79	FMT				
7a	↑				
7b	END				
7c					
7d					

Storage

f	sin α	-f	$\bar{y}$
e	cos α	-e	$\bar{x}$
d	Y_0	-d	π/36
c	X_0	-c	θ
b	Y_s	-b	b
a	X_s	-a	a
9		-9	x
8			
7			
6			
5			
4			
3			
2			
1			
0			

Titre VI

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
-d 0	x→( )	67			
1	−	34			
2	a	13			
3	x→( )	23			
4	a	13			
5	x→( )	67			
6	−	34			
7	b	14			
8	x→( )	23			
9	b	14			
a	Clear	20			
b	CONT	47			
c	CONT	47			
d	CONT	47			
0		–			
1		–			
2		–			
3		–			
4		–			
5		–			
6		–			
7		–			
8		–			
9		–			
a		–			
b		–			
c		–			
d		–			
+d 0	x←	67			
1	d	17			
2	↑	27			
3	x←( )	67			
4	c	16			
5	↑	27			
6	a	13			
7	×	36			
8	x←( )	67			
9	b	14			
a	÷	35			
b	y→( )	40			
c	e	12			
d	x←( )	67			

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
+1 0	c	16			
1	x⇄y	30			
2	x←( )	67			
3	8	10			
4	×	36			
5	↓	25			
6	+	33			
7	x←( )	67			
8	9	11			
9	−	34			
a	x←( )	67			
b	b	14			
c	÷	35			
d	2	2			
2 0	0	0			
1	0	0			
2	×	36			
3	e	12			
4	y→( )	40			
5	b	14			
6	x→( )	23			
7	a	13			
8	0	0			
9	↑	27			
a	FMT	42			
b	↑	27			
c	x→( )	23			
d	f	15			
3 0	1	1			
1	0	0			
2	0	0			
3	ACC +	60			
4	x←( )	67			
5	b	14			
6	↑	27			
7	x←( )	67			
8	a	13			
9	↑	27			
a	f	15			
b	×	36			
c	Roll↓	31			
d	+	33			

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
+4 0	7	7			
1	0	0			
2	0	0			
3	0	0			
4	CONT	47			
5	if x<y	52			
6	5	5			
7	6	6			
8	Roll ↓	31			
9	x⇄y	30			
a	Roll ↑	22			
b	if x<y	52			
c	5	5			
d	6	6			
5 0	Roll ↓	31			
1	FMT	42			
2	↓	25			
3	GO TO	44			
4	3	3			
5	0	0			
6	d	17			
7	↑	27			
8	c	16			
9	Print/space	45			
a	END	46			
b					
c					
d					

VII

	Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
0	0	clear	20			
	1	x→( )	23			
	2	9	11			
	3	x→( )	23			
	4	8	10			
	5	x→( )	23			
	6	7	7			
	7	x→( )	23			
	8	6	6			
	9	x→( )	23			
	a	5	5			
	b	x→( )	23			
	c	4	4			
	d	x→( )	23			
+1	0	3	3			
	1	Stop	41			
	2	x→( )	23			
	3	a	13			
	4	clear	37			
	5	x→( )	23			
	6	2	02			
	7	Go To	44			
	8	c	16			
	9	0	0			
	a	CONT	47			
	b	CONT	47			
	c	CONT	47			
	d	CONT	47			
+2	0	CONT	47			
	1	CONT	47			
	2	CONT	47			
	3	CONT	47			
	4	CONT	47			
	5	CONT	47			
	6	CONT	47			
	7	CONT	47			
	8	CONT	47			
	9	CONT	47			
	a	CONT	47			
	b	CONT	47			
	c	CONT	47			
	d	CONT	47			

VIII

	Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
+ c	0	x→( )	23			
	1	0	0			
	2	x→( )	23			
	3	1	1			
	4	1	1			
	5	CHG Signe	32			
	6	Roll ↓	31			
	7	↓	25			
	8	1	1			
	9	+	33			
	a	↑	27			
	b	↓	25			
	c	CONT	47			
	d	Stop	41			
+d	0	If flag	43			
	1	d	17			
	2	d	17			
	3	↑	27			
	4	×	36			
	5	ACC	60			
	6	x ⇄ y	30			
	7	a	13			
	8	÷	35			
	9	Go To	44			
	a	−	34			
	b	0	0			
	c	2	2			
	d	Go To	44			

IX

Step		Key	Code	Display x	Display y	Display z
-0	0	3	3			
	1	0	0			
	2	↓	25			
	3	int x	64			
	4	↑	27			
	5	ENTER EXP	26			
	6	9	11			
	7	+	33			
	8	y→( )	40			
	9	−	34			
	a	1	1			
	b	clear x	37			
	c	clear x	37			
	d	y⇄( )	24			
-1	0	0	0			
	1	0	0			
	2	0	0			
	3	0	0			
	4	0	0			
	5	0	0			
	6	0	0			
	7	0	0			
	8	0	0			
	9	0	0			
	a	0	0			
	b	0	0			
	c	0	0			
	d	0	0			
-2	0	if flag	43			
	1	2	2			
	2	a	13			
	3	clear x	37			
	4	1	1			
	5	+	33			
	6	set flag	54			
	7	Go to	44			
	8	0	0			
	9	d	17			
	a	go to	44			
	b	+	33			
	c	c	16			
	d	7	7			

Step		Key	Code	Display x	Display y	Display z
-3	0	y→( )	40			
	1	b	14			
	2	clear x	37			
	3	↑	27			
	4	ENTER EXP	26			
	5	9	11			
	6	+	33			
	7	y→( )	40			
	8	−	34			
	9	4	4			
	a	−	34			
	b	0	0			
	c	↑	27			
	d	y⇄( )	24			
-4	0	0	0			
	1	0	0			
	2	0	0			
	3	0	0			
	4	0	0			
	5	0	0			
	6	0	0			
	7	0	0			
	8	0	0			
	9	0	0			
	a	0	0			
	b	0	0			
	c	0	0			
	d	0	0			
-5	0	y→( )	40			
	1	−	34			
	2	1	1			
	3	b	14			
	4	÷	35			
	5	ENTER EXP	26			
	6	2	2			
	7	×	36			
	8	1	1			
	9	Roll ↑	22			
	a	+	33			
	b	x←( )	67			
	c	−	34			
	d	1	1			

Step		Key	Code	Display x	Display y	Display z
-6	0	x⇄y	30			
	1	Stop	41			
	2	CONT	47			
	3	Roll ↑	22			
	4	↑	27			
	5	7	7			
	6	5	5			
	7	×	36			
	8	Roll ↑	22			
	9	x⇄y	30			
	a	1	1			
	b	−	34			
	c	5	5			
	d	0	0			
-7	0	0	0			
	1	×	36			
	2	↓	25			
	3	FMT	42			
	4	↓	25			
	5	↑	27			
	6	5	5			
	7	0	0			
	8	0	0			
	9	+	33			
	a	↓	25			
	b	FMT	42			
	c	↓	25			
	d	x⇄y	30			

IX (Suite)

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
-8 0	0	0			
1	x⇄y	30			
2	FMT	42			
3	↓	25			
4	↑	27			
5	5	5			
6	0	0			
7	0	0			
8	÷	35			
9	1	1			
a	0	0			
b	if x>y	53			
c	3	3			
d	4	4			
-9 0	0	0			
1	↑	27			
2	FMT	42			
3	↓	25			
4	5	5			
5	ENTER EXP	26			
6	3	3			
7	x⇄y	30			
8	FMT	42			
9	↓	25			
a	↑	27			
b	FMT	42			
c	↓	25			
d	Rcl	61			
-a 0	↑	27			
1	b	14			
2	÷	35			
3	y→( )	40			
4	f	15			
5	×	36			
6	f	15			
7	×	36			
8	↓	25			
9	−	34			
a	b	14			
b	÷	35			
c	f	15			
d	↑	27			

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
-b 0	0	0			
1	STOP	41			
2	CONT	47			
3	a	13			
4	÷	35			
5	x⇄y	30			
6	Roll ↓	31			
7	÷	35			
8	÷	35			
9	↓	25			
a	x⇄y	30			
b	x→( )	23			
c	f	15			
d	y→( )	40			
-c 0	e	12			
1	↑	27			
2	1	1			
3	STOP	41			
4	CONT	47			
5	END	46			
6					
7			1	M_n	σ_n^2
8					
9					
a					
b					
c					
d					

Titre X Programme permettant le tracé de la courbe $N(M_a, \sigma^2_e)$ avec $M_a \to f$, $\sigma^2_e \to e$

Step		Key	Code	Display x	Display y	Display z
0	0	e	12			
	1	$\sqrt{x}$	76			
	2	↑	27			
	3	π	56			
	4	↑	27			
	5	2	2			
	6	×	36			
	7	↓	25			
	8	$\sqrt{x}$	76			
	9	×	36			
	a	y→( )	40			
	b	c	16			
	c	0	0			
	d	↑	27			
1	0	y→( )	40			
	1	d	17			
	2	f	15			
	3	−	34			
	4	↓	25			
	5	↑	27			
	6	×	36			
	7	e	12			
	8	↑	27			
	9	2	2			
	a	×	36			
	b	↓	25			
	c	÷	35			
	d	↓	25			
2	0	CHG signe	32			
	1	e^x	74			
	2	↑	27			
	3	c	16			
	4	÷	35			
	5	7	7			
	6	5	5			
	7	0	0			
	8	0	0			
	9	×	36			
	a	d	17			
	b	↑	27			
	c	5	5			
	d	0	0			
3	0	0	0			
	1	×	36			
	2	↓	25			
	3	FMT	42			
	4	↓	25			
	5	d	17			
	6	↑	27			
	7	.	21			
	8	1	1			
	9	+	33			
	a	1	1			
	b	0	0			
	c	.	21			
	d	1	1			
4	0	If x>y	53			
	1	1	1			
	2	0	0			
	3	clear	20			
	4	FMT	42			
	5	↑	27			
	6	END	46			

Storage

f	
e	
d	
c	
b	
a	
9	
8	
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	
0	

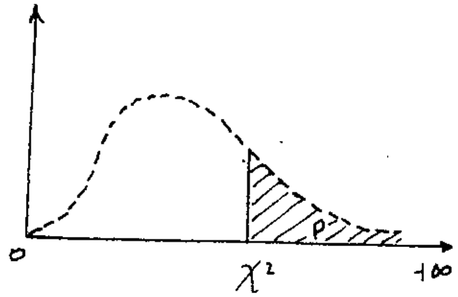


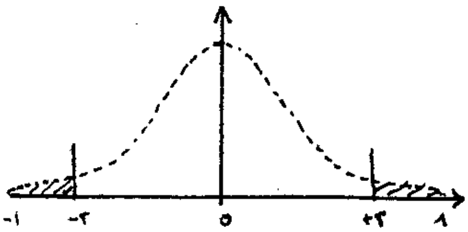
Table de la distribution de χ^2

valeurs de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassée.

ν \ P	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
1	0,00016	0,00098	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,60	5,99	7,38	9,21
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,24
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,1	13,28
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,8	15,09
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,0	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,0	18,47
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,5	20,09
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,0	21,66
10	2,56	3,25	3,94	4,86	15,99	18,31	20,5	23,21
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,9	24,72
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,3	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,7	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,1	29,14
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,5	30,58
16	5,81	6,81	7,96	9,31	23,54	26,30	28,8	32,00
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,2	33,41
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,3	34,80
19	7,63	8,91	10,1	11,65	27,20	30,14	32,9	36,19
20	8,26	9,59	10,9	12,44	28,41	31,41	34,2	37,57
21	8,90	10,3	11,6	13,24	29,61	32,67	35,5	38,93
22	9,54	11,0	12,3	14,04	30,81	33,92	36,8	40,29
23	10,2	11,7	13,1	14,85	32,01	35,17	38,1	41,64
24	10,9	12,4	13,8	15,66	33,20	36,41	39,4	42,98
25	11,5	13,1	14,6	16,47	34,38	37,65	40,6	44,31
26	12,2	13,8	15,4	17,29	35,56	38,88	41,9	45,64
27	12,9	14,6	16,2	18,11	36,74	40,11	43,2	46,96
28	13,6	15,3	16,9	18,94	37,92	41,34	44,5	48,28
29	14,3	16,0	17,7	19,77	39,09	42,56	45,7	49,59
30	15,0	16,8	18,5	20,60	40,26	43,77	47,0	50,89

NOTA : ν est le nombre de degrés de liberté

Table de la distribution du coefficient de correlation r



valeur de r ayant la probabilité P dépassé en module

P / $\nu = n-2$	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,9877	0,9969	0,9995	0,9999
2	0,9000	0,9500	0,9800	0,9900
3	0,8054	0,8783	0,9343	0,9587
4	0,7293	0,8114	0,8822	0,9172
5	0,6694	0,7545	0,8329	0,8745
6	0,6215	0,7067	0,7887	0,8343
7	0,5822	0,6664	0,7498	0,7977
8	0,5494	0,6319	0,7155	0,7646
9	0,5214	0,6021	0,6851	0,7348
10	0,4973	0,5760	0,6581	0,7079
11	0,4762	0,5529	0,6339	0,6835
12	0,4575	0,5324	0,6120	0,6614
13	0,4409	0,5139	0,5923	0,6411
14	0,4259	0,4953	0,5742	0,6226
15	0,4124	0,4821	0,5577	0,6055
16	0,4000	0,4683	0,5425	0,5897
17	0,3887	0,4555	0,5285	0,5751
18	0,3783	0,4432	0,5155	0,5614
19	0,3687	0,4329	0,5034	0,5487
20	0,3598	0,4227	0,4921	0,5368
25	0,3233	0,3809	0,4451	0,4869
30	0,2960	0,3494	0,4093	0,4489
35	0,2746	0,3246	0,3810	0,4182
40	0,2573	0,3044	0,3578	0,3939
45	0,2428	0,2874	0,3384	0,3721
50	0,2306	0,2732	0,3218	0,3541
60	0,2108	0,2500	0,2948	0,3248
70	0,1954	0,2319	0,2737	0,3018
80	0,1829	0,2172	0,2565	0,2830
90	0,1726	0,2050	0,2422	0,2673
100	0,1638	0,1946	0,2301	0,2540

Pour une correlation totale, ν est égal au nombre diminué de 2 des paires d'observations de l'echantillon.
Pour une correlation liée il faut en outre retrancher le nombre des variables de liaison

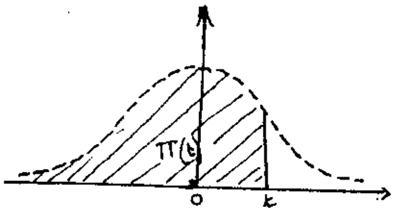


TABLE DE LA LOI DE LAPLACE-GAUSS

Probabilité d'une valeur inférieure à t

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8383
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9955	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
π(t)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

NOTA : La table donne les valeurs de π(t) pour t positif.
Si $t < 0$ $\pi(t) = 1 - \pi(-t)$ ($\pi(-t)$ est lue sur la table)

Title

VI

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
+0 0	x→()	67			
1	–	34			
2	a	13			
3	x→()	23			
4	a	13			
5	x→()	67			
6	–	34			
7	b	14			
8	x→()	23			
9	b	14			
a	Clear	20			
b	CONT	47			
c	CONT	47			
d	CONT	47			
0		–			
1		–			
2		–			
3		–			
4		–			
5		–			
6		–			
7		–			
8		–			
9		–			
a		–			
b		–			
c		–			
d		–			
+0 0	x←	67			
1	d	17			
2	↑	27			
3	x←()	67			
4	c	16			
5	↑	27			
6	a	13			
7	x	36			
8	x←()	67			
9	b	14			
a	÷	35			
b	y→()	40			
c	e	12			
d	x←()	67			
+1 0	c	16			
1	x⇄y	30			
2	x←()	67			
3	8	10			
4	x	36			
5	↓	25			
6	+	33			
7	x←()	67			
8	9	11			
9	–	34			
a	x←()	67			
b	b	14			
c	÷	35			
d	2	2			
2 0	0	0			
1	0	0			
2	x	36			
3	e	12			
4	y→()	40			
5	b	14			
6	x→()	23			
7	a	13			
8	0	0			
9	↑	27			
a	FMT	42			
b	↑	27			
c	x→()	23			
d	f	15			
3 0	1	1			
1	0	0			
2	0	0			
3	Acc +	60			
4	x←()	67			
5	b	14			
6	↑	27			
7	x←()	67			
8	a	13			
9	↑	27			
a	f	15			
b	x	36			
c	Roll↓	31			
d	+	33			
+4 0	7	7			
1	0	0			
2	0	0			
3	0	0			
4	CONT	47			
5	if x < y	52			
6	5	5			
7	6	6			
8	Roll ↓	31			
9	x⇄y	30			
a	Roll ↑	22			
b	if x < y	52			
c	5	5			
d	6	6			
5 0	Roll ↓	31			
1	FMT	42			
2	↓	25			
3	Go To	44			
4	3	3			
5	0	0			
6	d	17			
7	↑	27			
8	c	16			
9	Run/Space	45			
a	END	46			
b					
c					
d					

VII

	Step	Key	Code	Display		
				x	y	z
0	0	clear	20			
	1	$x \to ()$	23			
	2	9	11			
	3	$x \to ()$	23			
	4	8	10			
	5	$x \to ()$	23			
	6	7	7			
	7	$x \to ()$	23			
	8	6	6			
	9	$x \to ()$	23			
	a	5	5			
	b	$x \to ()$	23			
	c	4	4			
	d	$x \to ()$	23			
+1	0	3	3			
	1	Stop	41			
	2	$x \to ()$	23			
	3	a	13			
	4	clear	37			
	5	$x \to ()$	23			
	6	2	02			
	7	Go To	44			
	8	c	16			
	9	0	0			
	a	CONT	47			
	b	CONT	47			
	c	CONT	47			
	d	CONT	47			
+2	0	CONT	47			
	1	CONT	47			
	2	CONT	47			
	3	CONT	47			
	4	CONT	47			
	5	CONT	47			
	6	CONT	47			
	7	CONT	47			
	8	CONT	47			
	9	CONT	47			
	a	CONT	47			
	b	CONT	47			
	c	CONT	47			
	d	CONT	47			

VIII

	Step	Key	Code	Display		
				x	y	z
+c	0	$x \to ()$	23			
	1	0	0			
	2	$x \to ()$	23			
	3	1	1			
	4	1	1			
	5	CHG Signe	32			
	6	Roll ↓	31			
	7	↓	25			
	8	1	1			
	9	+	33			
	a	↑	27			
	b	↓	25			
	c	CONT	47			
	d	Stop	41			
+d	0	If flag	43			
	1	d	17			
	2	d	17			
	3	↑	27			
	4	×	36			
	5	ACC	60			
	6	$x \rightleftarrows y$	30			
	7	a	13			
	8	÷	35			
	9	Go To	44			
	a	−	34			
	b	0	0			
	c	2	2			
	d	Go To	44			

IX

Step		Key	Code	Display x	Display y	Display z
0	0	3	3			
	1	0	0			
	2	↓	25			
	3	int x	64			
	4	↑	27			
	5	ENTER EXP	26			
	6	9	11			
	7	+	33			
	8	y→()	40			
	9	−	34			
	a	1	1			
	b	clear x	37			
	c	clear x	37			
	d	y⇄()	24			
1	0	0	0			
	1	0	0			
	2	0	0			
	3	0	0			
	4	0	0			
	5	0	0			
	6	0	0			
	7	0	0			
	8	0	0			
	9	0	0			
	a	0	0			
	b	0	0			
	c	0	0			
	d	0	0			
2	0	if flag	43			
	1	2	2			
	2	a	13			
	3	clear x	37			
	4	1	1			
	5	+	33			
	6	set flag	54			
	7	Go to	44			
	8	0	0			
	9	d	17			
	a	go to	44			
	b	+	33			
	c	c	16			
	d	7	7			
3	0	y→()	40			
	1	b	14			
	2	clear x	37			
	3	↑	27			
	4	ENTER EXP	26			
	5	9	11			
	6	+	33			
	7	y→()	40			
	8	−	34			
	9	4	4			
	a	−	34			
	b	0	0			
	c	↑	27			
	d	y⇄()	24			
4	0	0	0			
	1	0	0			
	2	0	0			
	3	0	0			
	4	0	0			
	5	0	0			
	6	0	0			
	7	0	0			
	8	0	0			
	9	0	0			
	a	0	0			
	b	0	0			
	c	0	0			
	d	0	0			
5	0	y→()	40			
	1	−	34			
	2	1	1			
	3	b	14			
	4	÷	35			
	5	ENTER EXP	26			
	6	2	2			
	7	×	36			
	8	1	1			
	9	Roll ↑	22			
	a	+	33			
	b	x←()	67			
	c	−	34			
	d	1	1			
6	0	x⇄y	30			
	1	stop	41			
	2	CONT	47			
	3	Roll ↑	22			
	4	↑	27			
	5	7	7			
	6	5	5			
	7	×	36			
	8	Roll ↑	22			
	9	x⇄y	30			
	a	1	1			
	b	−	34			
	c	5	5			
	d	0	0			
7	0	0	0			
	1	×	36			
	2	↓	25			
	3	FMT	42			
	4	↓	25			
	5	↑	27			
	6	5	5			
	7	0	0			
	8	0	0			
	9	+	33			
	a	↓	25			
	b	FMT	42			
	c	↓	25			
	d	x⇄y	30			

IX (Suite)

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
-8 0	0	0			
1	x⇄y	30			
2	FMT	42			
3	↓	25			
4	↑	27			
5	5	5			
6	0	0			
7	0	0			
8	÷	35			
9	1	1			
a	0	0			
b	if x>y	53			
c	3	3			
d	4	4			
-9 0	0	0			
1	↑	27			
2	FMT	42			
3	↓	25			
4	5	5			
5	ENTER EXP	26			
6	3	3			
7	x⇄y	30			
8	FMT	42			
9	↓	25			
a	↑	27			
b	FMT	42			
c	↓	25			
d	Rcl	61			
-a 0	↑	27			
1	b	14			
2	÷	35			
3	y→( )	40			
4	f	15			
5	×	36			
6	f	15			
7	×	36			
8	↓	25			
9	−	34			
a	b	14			
b	÷	35			
c	f	15			
d	↑	27			
-b 0	0	0			
1	STOP	41			
2	CONT	47			
3	a	13			
4	÷	35			
5	x⇄y	30			
6	Roll ↓	31			
7	÷	35			
8	÷	35			
9	↓	25			
a	x⇄y	30			
b	x→( )	23			
c	f	15			
d	y→( )	40			
-c 0	e	12			
1	↑	27			
2	1	1			
3	STOP	41			
4	CONT	47			
5	END	46			
6					
7			1	M_n	σ_n^2
8					
9					
a					
b					
c					
d					

X

Titre : Programmes permettant le tracé de la courbe $N(M_q, \sigma^2_q)$ avec $\sigma^2_q \to e$, $M_q \to f$

Step	Key	Code	Display x	Display y	Display z
0 0	e	12			
1	$\sqrt{x}$	76			
2	↑	27			
3	π	56			
4	↑	27			
5	2	2			
6	×	36			
7	↓	25			
8	$\sqrt{x}$	76			
9	×	36			
a	y→( )	40			
b	c	16			
c	0	0			
d	↑	27			
1 0	y→( )	40			
1	d	17			
2	f	15			
3	−	34			
4	↓	25			
5	↑	27			
6	×	36			
7	e	12			
8	↑	27			
9	2	2			
a	×	36			
b	↓	25			
c	÷	35			
d	↓	25			
2 0	CHG Signe	32			
1	e^x	74			
2	↑	27			
3	c	16			
4	÷	35			
5	7	7			
6	5	5			
7	0	0			
8	0	0			
9	×	36			
a	d	17			
b	↑	27			
c	5	5			
d	0	0			
3 0	0	0			
1	×	36			
2	↓	25			
3	FMT	42			
4	↓	25			
5	d	17			
6	↑	27			
7	.	21			
8	1	1			
9	+	33			
a	1	1			
b	0	0			
c	.	21			
d	1	1			
4 0	If x>y	53			
1	1	1			
2	0	0			
3	clear	20			
4	FMT	42			
5	↑	27			
6	END	46			

Storage

f	
e	
d	
c	
b	
a	
9	
8	
7	
6	
5	
4	
3	
2	
1	
0	

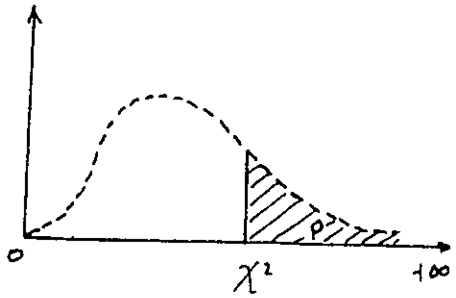


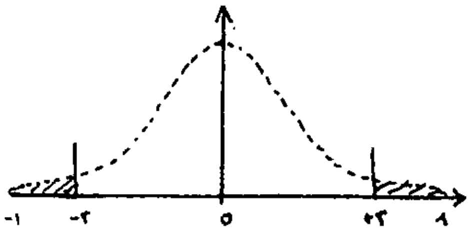
Table de la distribution de χ^2

valeurs de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassée.

ν \ P	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010
1	0,00016	0,00098	0,00393	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,60	5,99	7,38	9,21
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,24
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,1	13,28
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,8	15,09
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,0	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,0	18,47
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,5	20,09
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,0	21,66
10	2,56	3,25	3,94	4,86	15,99	18,31	20,5	23,21
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,9	24,72
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,3	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,7	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,1	29,14
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,5	30,58
16	5,81	6,81	7,96	9,31	23,54	26,30	28,8	32,00
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,2	33,41
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,3	34,80
19	7,63	8,91	10,1	11,65	27,20	30,14	32,9	36,19
20	8,26	9,59	10,9	12,44	28,41	31,41	34,2	37,57
21	8,90	10,3	11,6	13,24	29,61	32,67	35,5	38,93
22	9,54	11,0	12,3	14,04	30,81	33,92	36,8	40,29
23	10,2	11,7	13,1	14,85	32,01	35,17	38,1	41,64
24	10,9	12,4	13,8	15,66	33,20	36,41	39,4	42,98
25	11,5	13,1	14,6	16,47	34,38	37,65	40,6	44,31
26	12,2	13,8	15,4	17,29	35,56	38,88	41,9	45,64
27	12,9	14,6	16,2	18,11	36,74	40,11	43,2	46,96
28	13,6	15,3	16,9	18,94	37,92	41,34	44,5	48,28
29	14,3	16,0	17,7	19,77	39,09	42,56	45,7	49,59
30	15,0	16,8	18,5	20,60	40,26	43,77	47,0	50,89

NOTA : ν est le nombre de degrés de liberté

Table de la distribution du coefficient de correlation r

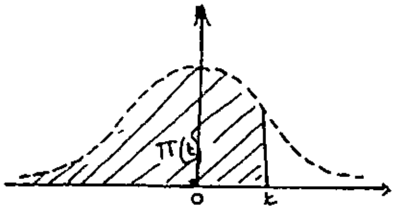


valeur de r ayant la probabilité P dépassé en module

$\nu = n-2$ \ P	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,9877	0,9969	0,9995	0,9999
2	0,9000	0,9500	0,9800	0,9900
3	0,8054	0,8783	0,9343	0,9587
4	0,7293	0,8114	0,8822	0,9172
5	0,6694	0,7545	0,8329	0,8745
6	0,6215	0,7067	0,7887	0,8343
7	0,5822	0,6664	0,7498	0,7977
8	0,5494	0,6319	0,7155	0,7646
9	0,5214	0,6021	0,6851	0,7348
10	0,4973	0,5760	0,6581	0,7079
11	0,4762	0,5529	0,6339	0,6835
12	0,4575	0,5324	0,6120	0,6614
13	0,4409	0,5139	0,5923	0,6411
14	0,4259	0,4953	0,5742	0,6226
15	0,4124	0,4821	0,5577	0,6055
16	0,4000	0,4683	0,5425	0,5897
17	0,3887	0,4555	0,5285	0,5751
18	0,3783	0,4432	0,5155	0,5614
19	0,3687	0,4329	0,5034	0,5487
20	0,3598	0,4227	0,4921	0,5368
25	0,3233	0,3809	0,4451	0,4869
30	0,2960	0,3494	0,4093	0,4487
35	0,2746	0,3246	0,3810	0,4182
40	0,2573	0,3044	0,3578	0,3939
45	0,2428	0,2874	0,3384	0,3721
50	0,2306	0,2732	0,3218	0,3541
60	0,2108	0,2500	0,2948	0,3248
70	0,1954	0,2319	0,2737	0,3018
80	0,1829	0,2172	0,2565	0,2830
90	0,1726	0,2050	0,2422	0,2673
100	0,1638	0,1946	0,2301	0,2540

Pour une correlation totale, ν est égal au nombre diminué de 2 des paires d'observations de l'echantillon. Pour une correlation liée il faut en outre retrancher le nombre des variables de liaison

TABLE DE LA LOI DE LAPLACE-GAUSS



Probabilité d'une valeur inférieure à t

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8383
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
π(t)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

NOTA : La table donne les valeurs de π(t) pour t positif.
Si $t < 0$ $\pi(t) = 1 - \pi(-t)$ ($\pi(-t)$ est lue sur la table)

Table de r pour des valeurs de z (de 0 à 3)

Corrélation transformée de R.A. FISHER.

$$r = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

$$z = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Log}(1+r) - \mathrm{Log}(1-r)\right]$$

z	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
0,0	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0599	0,0699	0,0798	0,0898	0,0997
0,1	0,1096	0,1194	0,1293	0,1391	0,1489	0,1586	0,1684	0,1781	0,1877	0,1974
0,2	0,2070	0,2165	0,2260	0,2355	0,2449	0,2548	0,2636	0,2729	0,2821	0,2913
0,3	0,3004	0,3095	0,3185	0,3275	0,3364	0,3452	0,3540	0,3627	0,3714	0,3800
0,4	0,3885	0,3969	0,4053	0,4136	0,4219	0,4301	0,4382	0,4462	0,4542	0,4621
0,5	0,4699	0,4777	0,4854	0,4930	0,5005	0,5080	0,5154	0,5227	0,5299	0,5370
0,6	0,5441	0,5511	0,5580	0,5649	0,5717	0,5784	0,5850	0,5915	0,5980	0,6044
0,7	0,6107	0,6169	0,6231	0,6291	0,6351	0,6411	0,6469	0,6527	0,6584	0,6640
0,8	0,6696	0,6751	0,6805	0,6858	0,6911	0,6963	0,7014	0,7064	0,7114	0,7164
0,9	0,7211	0,7259	0,7306	0,7352	0,7398	0,7443	0,7487	0,7531	0,7574	0,7616
1,0	0,7658	0,7699	0,7739	0,7779	0,7818	0,7857	0,7895	0,7932	0,7969	0,8005
1,1	0,8041	0,8076	0,8110	0,8144	0,8178	0,8210	0,8243	0,8275	0,8306	0,8337
1,2	0,8367	0,8397	0,8426	0,8455	0,8483	0,8511	0,8538	0,8565	0,8591	0,8617
1,3	0,8643	0,8668	0,8692	0,8717	0,8741	0,8764	0,8787	0,8810	0,8832	0,8854
1,4	0,8875	0,8896	0,8917	0,8937	0,8957	0,8977	0,8996	0,9015	0,9033	0,9051
1,5	0,9069	0,9087	0,9104	0,9121	0,9138	0,9154	0,9170	0,9186	0,9201	0,9217
1,6	0,9232	0,9246	0,9261	0,9275	0,9289	0,9302	0,9316	0,9329	0,9341	0,9354
1,7	0,9366	0,9379	0,9391	0,9402	0,9414	0,9425	0,9436	0,9447	0,9458	0,94681
1,8	0,94783	0,94884	0,94983	0,95080	0,95175	0,95268	0,95359	0,95449	0,95537	0,95624
1,9	0,95709	0,95792	0,95873	0,95953	0,96032	0,96109	0,96185	0,96259	0,96331	0,96403
2,0	0,96473	0,96541	0,96609	0,96675	0,96739	0,96803	0,96865	0,96926	0,96986	0,97045
2,1	0,97103	0,97159	0,97215	0,97269	0,97323	0,97375	0,97426	0,97477	0,97526	0,97574
2,2	0,97622	0,97668	0,97714	0,97752	0,97803	0,97846	0,97888	0,97929	0,97970	0,98010
2,3	0,98049	0,98087	0,98124	0,98161	0,98197	0,96233	0,98267	0,98301	0,98335	0,98367
2,4	0,98399	0,98431	0,98462	0,98492	0,98522	0,98551	0,98579	0,98607	0,98635	0,98661
2,5	0,98688	0,98714	0,98739	0,98764	0,98788	0,98812	0,98835	0,98858	0,98881	0,98903
2,6	0,98924	0,98946	0,98966	0,98987	0,99007	0,99026	0,99045	0,99064	0,99083	0,99101
2,7	0,99118	0,99137	0,99153	0,99170	0,99185	0,99202	0,99218	0,99233	0,99248	0,99263
2,8	0,99278	0,99292	0,99306	0,99320	0,99333	0,99346	0,99359	0,99372	0,99384	0,99396
2,9	0,99408	0,99420	0,99431	0,99443	0,99454	0,99464	0,98475	0,99485	0,99495	0,99505

BIBLIOGRAPHIE

A. LIORZOU : Initiation pratique à la statistique

A.H. BOWKER et GJ. LIEBERMAN : Methodes statistiques de l'ingenieur

G. TINTNER : Mathematique et statistique pour les Economistes

G. CALOT : Cours de statistique descriptive

GIRAULT : Calcul de probabilité en vue des applications

A.M. MOOD et F.A. G.HILL : Introduction to the theory of statistics

C. FOURGEAUD et A. FUCHS : Statistique

E. MORICE et CHARTIER : Methodes statistiques 2^{e} partie: Analyse statistique

J. COSTET et G. SANGLERAT : Cours pratique de Mecanique des sols