UNIVERSITÉ D'ALGER
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT ÉCONOMIE

THÈSE DE FIN D'ÉTUDES

SUJET

ÉTUDE DES ALLOCATIONS EN PIÈCES DE RECHANGE POUR DES ARTICLES A FAIBLE CONSOMMATION

ANNEE 1970 - 1971

Proposé par :

Mr A. BOISRAYON

Étudié par :

A. RIMAOUI

UNIVERSITÉ D'ALGER
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT ÉCONOMIE

THÈSE DE FIN D'ÉTUDES

SUJET

ÉTUDE DES ALLOCATIONS EN PIÈCES DE RECHANGE POUR DES ARTICLES A FAIBLE CONSOMMATION

ANNEE 1970 - 1971

Proposé par :

Mr A. BOISRAYON

Étudié par :

A. RIMAOUI

AVANT - PROPOS

Je tiens à exprimer toute ma trés grande reconnaissance à

MONSIEUR LE PROFESSEUR A.BOISRAYONS
Expert de l'UNESCO à l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, pour toute l'aide qu'il m'a apportée, ainsi que pour toute la documentation qu'il a bien voulu mettre à ma disposition.
Lesquels ont été indispensables à l'élaboration de cette étude.

A.RIMAOUI

- INTRODUCTION -

Les domaines d'utilisation de la machine s'élargissent de plus en plus, et la machine commence à jouer un rôle principal dans toutes les activités de l'homme, cette intégration a donné à la science un trés grand essort. Par exemple l'invention des imprimeries a fait avancer la civilisation dans le monde d'un siècle.

Mais cette machine n'a pas seulement facilité et simplifié la tâche de l'homme mais aussi a permis d'aborder de nouveaux domaines, que l'homme était incapable d'exploiter sans la machine, de ce point de vue l'aviation, les ordinateurs etc...

Mais la machine devient de plus en plus complexe, et le problème de defaillance commence à être inquiétant et couteux.

Pour maintenir le matériel et conserver son caractère opérationnel et en vue de réduire le coût de maintenance, on a commencé à étudier la fiabilité. La fiabilité a commencé avec la mécanisation appliquée non seulement à l'industrie de pointe mais aussi à tous les matériels de série dont les défaillances ont des causes multiples, etmodifient dans des conditions importantes les conditions de l'utilisation.

Les avaries sont un problème délicat. Elles échappent à toute prédetermination. Elles surviennent toujours au hasard, ce phénomène est dû à la faute de savoir analyser tous les facteurs qui peuvent avoir certaines corrélations entre eux. On constate globalement l'effet résultant combiné. La tenue des matériels a fait depuis toujours l'objet d'études, ce sujet se rattache étroitement aux notions de statistiques et de probabilité, malgré tout on a vu que jusqu'à ces dernières années la prévision n'est pas faite d'une manière trés satisfaisante.

Dans cette étude, nous allons essayer de déterminer une loi précise de ces avaries à partir d'observations et avec l'utilisation des statistiques mathématiques, qui nous permet de construire un programme d'approvisionnement pour maintenir le matériel et finalement d'aboutir à la minimisation de l'ensemble des coûts.

TABLE DES MATIERES

DEFINITION

AXIOMES FONDAMENTAUX DE LA THEORIE DES PROBABLITES

A ÉPREUVE : On appelle épreuve une expérience que l'on peut répété, au moins théoriquement, dans les mêmes conditions et dont le resultat varie. Les conditions qui définissent l'épreuve doivent être précisées.

B EVENEMENT : l'épreuve liée des évènements qui seront, ou ne seront pas réalisés une fois l'épreuve effectuée. Ces évènements sont dits aleatoires avant l'epreuve

C ENSEMBLE FONDAMENTAL : (Ω), l'ensemble des évènements forme l'ensemble (Ω)

D PROBABILITÉS : L'ensemble Ω est fini et non vide, on appelle probabilité sur Ω toute application P de l'ensemble $P(\Omega)$ des évènements dans l'ensemble R_+ des nombres réels positifs satisfaisant aux deux conditions suivantes : * $P(\Omega) = 1$

** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont deux évènements incompatibles.

E PROBABILITE CONDITIONNELLES : Soit Ω un ensemble fini muni d'une probabilité P, et B un évènement de probabilité non nulle. l'application de $P(\Omega)$ dans R_+ qui a tout évène-

. -ement A associe le nombre réel positif.

$P(A \cap B) \,/\, P(B)$

. est encore une probabilité sur Ω, appelée probabilité conditionnelle relative à B, et associé à P. On entend par cette définition qu'elle est la probabilité conditionnelle de A relative à B. $P(A/B)$

F LA FORMULE DE BAYES : pour toute couple (A,B) d'évènements de probabilité non nulles.

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A)\, P(B/A) \qquad (1)$$

F-1) LA PROBABILITÉ TOTALE : supposons que $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$, un système complet d'évènements de probabilité non nulles, pour tout évènement A.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)$$

c'est qu'on appelle probabilité totale.

F-2) Remplaçons dans (1) $P(A)$

$$P(B/A) = \frac{P(B_K) \cdot P(A/B_K)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A/B_i)}$$

Si les évènements B_i sont appelés les causes, alors, on appelle cette formule de probabilité des causes

G) ÉVÈNEMENTS INDEPENDANTES :

A et B deux évènements de probabilité non nulles, on dit que A indépendante de B si $P(A/B) = P(A)$

CHAPITRE I

PRESENTATION DU PROJET

SOMMAIRE

PRESENTATION DU PROJET

Certains ensembles complexes où les mécanismes automatisés prennent de plus en plus de place, mettent en œuvre des équipements électroniques qui, en raison même de leur complexité, sont devenus extrêmement fragiles.

On peut citer:

- Les usines comportant de nombreux ateliers automatisés
- Les navires de commerce et de guerre, ces derniers tout particulièrement en raison de leur équipement de détection (sonar, radar) électronique qu'on y installe. L'équipement de cet ensemble peut être composé d'appareillage dans lequel interviennent plusieurs dizaines de milliers de types de composants électroniques s'étendant sur toute la gamme des dimensions et des prix.

Pour permettre à l'ensemble considéré de pouvoir assumer sa maintenance en toute sécurité avec un petit atelier de réparation, permettant essentiellement la détection des éléments avariés et leur remplacement, il est nécessaire d'attribuer à ces ensembles des allocations en rechange. Les rechanges correspondantes seront ou non consommées au cours de la période d'autonomie qui s'étend entre les arrêts de l'activité de l'ensemble considéré. Cette periode d'autonomie sera par exemple, pour une usine, l'intervalle de temps s'écoulant entre les arrêts saisonniers (cas d'une sucrerie, par exemple). Les rechanges d'allocation doivent être determinés en tenant compte des considérations techniques basées essentiellement sur la fiabilité des composants et sur l'importance operationnelle des appareillages dans lesquels ils interviennent. Connaissant la liste qualitative des rechanges jugées indispensables, nous nous intéresserons à la liste quantitative des rechanges, c'est à dire à la grandeur des allocations.

Cette détermination doit tenir compte :

- du prix, du volume, du poids (sur un navire) et de la fiabilité des composants en place.
- de la durée de la période d'autonomie.
- du coût de la rupture de stocks (arrêt de fabrication, réduction des moyens de contrôle ou des dispositifs de sécurité, immobilisation du navire).

- des possibilités de stockage, et des considérations du stock de rechanges (important pour les navires et le stockage pour les usines travaillant en climat tropical).
- des conséquences financières résultant de la constitution des allocations de rechanges (immobilisation de capital, pertes resultant de la déterioration de ce matériel en matière de stockage).

Comme on le voit, il s'agit d'un problème très complexe dépendant de nombreux facteurs. D'aute part certains éléments ne peuvent pas être évalués de façon précise; en particulier le coût de la rupture de stock et les incidences financières résultant **de la déterioration de stock de** rechanges représentant un caractère assez aléatoire. La résolution de ce problème necessite la connaissance d'un certain nombre de donneés, dont certaines ont un caractère statistique. Par contre, d'autres donneés peuvent être connues assez facilement et avec une précision convenable. Ce sont:

- le nombre, le volume et le poids des pièces en fonctionnement, ainsi que leur coût.
- La durée de la période d'autonomie (avec quelquefois une petite tolérance, les navires dont

la marche peut être sujète à des perturbations aléatoires).

Il est clair que le sujet ne peut être traité dans toute son ampleur, étant donné son importance theorique.

LES DONNES DU PROJET.

- Coût de la rupture de stock :

Il est clair que le coût de la rupture de stock est essentiellement fonction du rôle opérationnel des éléments de l'ensemble qui sont paralysés par cette rupture, ce coût peut être relativement négligeable dans certains cas, ou au contraire, conduire à la paralysie totale de l'ensemble (manque de pièces de rechanges pour reparer le disque d'un ordinateur). On se contentera de supposer que le coût est uniforme, ce qui constitue une simplification considérable.

- Possibilité de stockage et de conservation du stock des pièces de rechange :

Etant donné que ce stock est relativement faible, on peut admettre en première approximation que son logement ne pose aucun problème, pas plus que sa conservation, il n'existe donc, aucune contrainte concer-nant la grandeur de ce stock.

- <u>Conséquences financières concernant la constitution de l'allocation de rechange.</u>

On admettra qu'il n'existe pas de conséquences financières concernant la détérioration des stocks et on admettra que l'incidence des conséquences financières se réduit à la valeur de l'investissement que constitue la formation de stock.

- <u>Loi de répartition de la consommation</u> :

Supposons que les pièces sont bien fabriquées et ont subi un contrôle de qualité très sévère, donc les avaries infantiles n'ont pas lieu, et d'après notre hypothèse d'une période d'autonomie relativement courte par rapport à la durée de vie probable d'un matériel, on peut admettre que les composants ne subissent que des avaries purement fortuites et que le taux d'avarie est constant dans le temps.
Si on désigne par m la consommation moyenne exacte par période unitaire (période couverte par l'allocation correspondant à la période d'autonomie) par x la consommation, on a :

$$Pr\,(x \text{ si } m) = \frac{m^x e^{-m}}{x!}$$

on verra la démonstration de cette formule dans l'annexe II et, on démontrera que la consommation passée permet alors de prévoir la consommation future au moyen d'une loi de Poisson.

- Evaluation de la consommation moyenne :

Les renseignements sur la consommation moyenne nous permettent de lui donner des bornes :

$$m_1 < m < m_2$$

On fixe la loi de répartition comme étant la loi uniforme.

- Relation entre la consommation moyenne statistique et la consommation moyenne exacte m :

C : représente le nombre d'avaries des pièces sur la période D

la consommation moyenne statistique est :

$$M_e = \frac{C}{D}$$

d'après l'annexe II on peut conclure que :

$$P_r\,(C \text{ si } m) = \frac{(Dm)^C e^{-Dm}}{C!}$$

CHAPITRE II

ETUDE THEORIQUE DU PROJET

SOMMAIRE

- Méthode d'optimisation de l'allocation de rechange.
- Sûreté d'une allocation.
- Loi de probabilité de la consommation.
- Evaluation de la consommation moyenne.
- La loi de Bayes et le calcul des lois de la consommation moyenne, de la consommation instantanée pour une valeur de la consommation.

ETUDE THEORIQUE DU PROJET

II.1. Méthode d'optimisation de l'allocation de Rechange :

Si A désigne l'allocation de rechange et N le nombre moyen de ruptures de stock (excès moyen de la demande par rapport à l'allocation).
r le coût d'une rupture de stock -
S le coût d'une pièce de rechange supplémentaire -
le coût moyen des ruptures de stock sera alors:

$$\boxed{R = Nr}$$

Faisons le bilan économique entre :
- le coût S d'une pièce de rechange supplémentaire
- la diminution $R(A) - R(A+1)$ du coût moyen des ruptures de stock résultant de l'adjonction d'une pièce à l'allocation A.

Si :
$$R(A) - R(A+1) \geqslant S$$
On a intérêt à augmenter l'allocation. Maintenant si c'est l'économie qu'on réalise en supprimant une pièce de rechange. L'augmentation $R(A-1)-R(A)$ du coût moyen des ruptures de stock est positif.
$$S' > F(A-1) - R(A)$$
Dans ce cas là, on a intérêt à diminuer l'allocation.

L'optimum est atteint lorsqu'aucune modification de l'allocation n'apparait souhaitable-

$$R(A-1)-R(A) \geq S' ; \; R(A)-R(A+1) < S$$

En réalité $S \neq S'$ car le coût d'une pièce de rechange n'est pas forcément une fonction linéaire du nombre de ces pièces. Cependant pour simplifier, et faute d'informations précises sur le rapport $\frac{S}{S'}$, on <u>admettra</u> que $S = S'$

La condition d'optimisation deviendra

$$R(A-1)-R(A) \geq S > R(A)-R(A+1)$$

mais on a vu que

$$R = Nr$$

donc

$$\boxed{N(A-1)-N(A) \geq \frac{S}{r} > N(A)-N(A+1)} \quad (i)$$

Il s'agit d'évaluer $N(A)$ (le nombre moyen de rupture de stock) ce qui nous permettra de déterminer l'allocation optimum-

II.2.1 Formule De Bayes Et Etude De $Pr(M=m \; si \; C)$ et $Pr(X=x \; si \; C)$

On va utiliser la formule de Bayes appliquée à la variable continue m définie dans l'intervalle (m_1, m_2). Ce qui nous permettra d'établir des formules générales, faisant intervenir $Pr(X=x \; Si \; m)$ et $Pr(m)$ (distribution de M dans l'intervalle (m_1 et m_2) homogène). Pour les deux lois $Pr(M=m \; si \; C)$ et $Pr(X=x \; si \; C)$, on va étudier les distributions obtenues, et leurs paramètres caractéristiques; valeur moyenne et écart type.

II.2.2 La Sûreté d'Allocation:

Après l'étude de la loi $Pr(X=x \; si \; C)$, on introduit ce qu'on appelle sureté d'allocation définie par:

$$Pr(x \leqslant A) = S(A)$$

Cette fonction qui est définie dans $[0,1]$ nous permet d'évaluer le nombre moyen de ruptures de stock $N(A)$, pour une valeur donnée de la consommation C.

L'allocation de rechange peut être quelconque entre 0, et $+\infty$ on peut alors écrire:

$$N(A,C) = \sum_{x=A+1}^{\infty} (x-A) \, Pr(X=x \; si \; C)$$

II.23 Calcul De l'Allocation Optimum -

A l'aide de l'inéquation (i) on peut, en évaluant $N(A, C)$, calculer l'allocation optimum -

La détermination de A nécessite l'utilisation du tableau de distribution de la Loi $P(X \text{ si } C)$.

C représente la consommation sur une période D, et pour chaque combinaison des deux valeurs on trouvera une allocation à l'aide de l'ordinateur, on calculera toutes ces combinaisons -

II 3: LA SÛRETE D'UNE ALLOCATION $\sigma(A)$

La sûreté d'une allocation est définie par la probabilité que cette allocation assure le fonctionnement pendant la période d'autonomie.

Donc il s'agit de connaître les propriétés de cette fonction, dans les formules mathématiques, on va désigner par A l'allocation, et par X la consommation. La fonction de sûreté d'allocation est dans ce cas définie par la probabilité que X soit au plus égale à A.

$$\sigma(A) = Pr(X \leq A)$$

La variable aléatoire X prend des valeurs discrètes à cette occasion on peut écrire que la fonction de sûreté est définie par la somme des probabilités que la variable X prenne des valeurs inférieures ou égales à l'allocation A

$$\sigma(A) = \sum_{k=0}^{A} Pr(X = k)$$

Cette fonction en escalier est croissante ; elle est définie dans l'intervalle [0, 1].

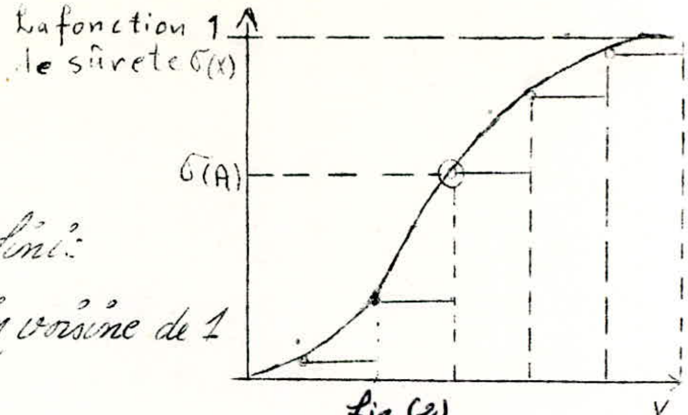


fig (2)

. Si la valeur de A est voisine de l'infini : on aura une fonction voisine de 1

C'est-à-dire que :

$$\sigma(\infty) = 1 \quad \text{(La fonction de sûreté)}$$

Autrement pour une valeur quelconque de A, on a

$$\boxed{\sigma(A) = 1 - \alpha}$$

Le problème sera donc le suivant :
La sûreté d'allocation est une politique du service d'approvisionnement et d'entretien et pour avoir une fonction très sûre on aura besoin d'avoir une valeur de α voisine de zéro.
Après l'étude de la loi de probabilité de X, on va calculer la fonction de sûreté d'une manière détaillée.
Avant de passer à l'étude de la fonction de sûreté de deux variables aléatoires, la courbe ② montre l'allure de la fonction de sûreté quand la variable aléatoire est continue. C'est évidemment une sorte de cas particulier dans lequel on introduit la fonction de réparation.

II.4. LA FONCTION DE SÛRETÉ POUR DEUX PIÈCES X et Y.

Dans les consommations désignées par x et y, supposons en premier lieu que X et Y varient d'une manière indépendante, on rappelle que les deux variables X et Y sont discrètes. La fonction de sûreté sera définie comme suit :

$$\sigma(A_1, A_2) = P_r(X \leq A_1 \cap Y \leq A_2)$$

puisque ces deux variables sont indépendantes alors on peut écrire :

$$\sigma(A_1, A_2) = P_r(X \leq A_1) \cdot P_r(Y \leq A_2)$$

où l'on a défini auparavant que :

$$\sigma(A) = \sum_{k=0}^{A} P_r(X = k) = P_r(X \leq A)$$

Ce qui nous permet de déduire la relation suivante

$$\boxed{\sigma(A_1, A_2) = \sigma(A_1) \cdot \sigma(A_2)} \quad (1)$$

Si les deux variables X et Y ne sont pas indépendantes on ne peut pas faire le même calcul mais on peut écrire :

$$\sigma(A_1, A_2) = \sum_{k=0}^{A_1} \sum_{j=0}^{A_2} P_r(X = k \cap Y = j)$$

De même ici, quand on calcule la fonction de sûreté de deux variables continues, on remplace **tout simplement** le calcul précédent par un autre calcul relatif à des variables continues pour arriver en fin de compte à la formule (1) si les deux variables sont indépendantes.

II.1. Généralisation pour un ensemble composé de n pièces dont les allocations sont $A_1, A_2, .., A_n$

Si $\vec{X}$ est le **vecteur** de consommation

$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$x_i \in R$

$\vec{X} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{A}$ représente l'ensemble des allocations

$A_i \in R$

$\vec{A} \in \mathbb{R}^n$

La fonction de sûreté $\sigma(\vec{A})$ est définie par :

$$\sigma(\vec{A}) = \sigma(A_1, \ldots, A_n) = Pr(X_1 \leq A_1 \cap \ldots X_n \leq A_n)$$

Si les X_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes alors on peut dire que :

$$Pr(X_1 \leq A_1 \cap X_2 \leq A_2 \cap \ldots X_n \leq A_n) =$$
$$Pr(X_1 \leq A_1) \cdot Pr(X_2 \leq A_2)$$

$$\boxed{\sigma(\vec{A}) = \prod_{i=1}^{n} \sigma(A_i)}$$

II 4.2 Les Propriétés fondamentales de la fonction de sûreté:

1°) La fonction $\sigma(A)$ est une fonction croissante pour chacune de ses valeurs-

2°) C'est une fonction monotone,

3°) $\sigma(\vec{A}) = 0$. Si l'un des A_i égale à zéro à savoir que $i \in [1, n]$

4°) Si chacun des A_i est suffisamment grand alors la fonction $\sigma(\vec{A})$ tend vers 1.

5°) La fonction $\sigma(\vec{A})$ est dite continue si les variables qui définissent cette fonction sont continues-

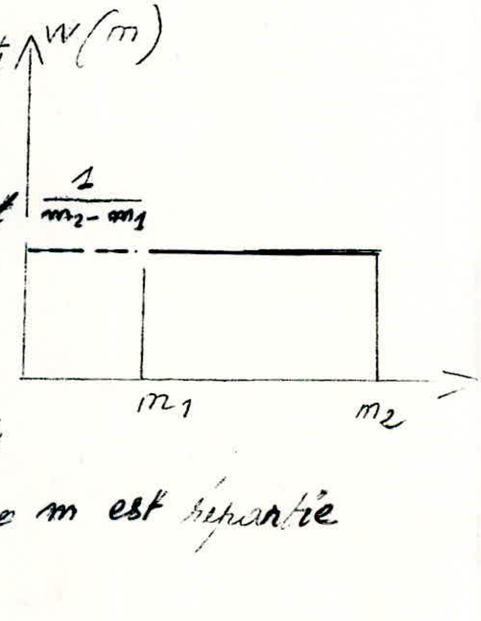
6°) Cette fonction est définie positive donc égale à zéro si l'une des composantes est négative -

La fonction de sûreté est donc comprise entre 0 et 1 donc plus la fonction est voisine de un plus on a une bonne sûreté -

II.5 Loi de Répartition de la Consommation

On peut admettre que le constructeur des machines possède une idée générale sur la durée de fonctionnement, ce qui nous permet de calculer la Consommation moyenne. Supposons que la Consommation moyenne m est comprise dans l'intervalle $[m_1, m_2]$

Donc m peut prendre n'importe quelle valeur dans cet intervalle donc sur cette **hypothèse il faut** préciser que la répartion de m peut être n'importe quelle loi de probabilité, et ici en vue de simplifier le calcul, on dit **que m est** **répartie** d'une manière homogène.



II.5.1 W(m) définit la fonction de densité : cette

fonction est telle que.

$$W(m) \begin{cases} \dfrac{1}{m_2 - m_1} & \text{si } m \in [m_1, m_2] \\ 0 & \text{ailleures.} \end{cases}$$

La $Pr(M \leq m) = \int_{m_1}^{m_2} W(m)\, dm$

L'Espérance **mathématique** de M

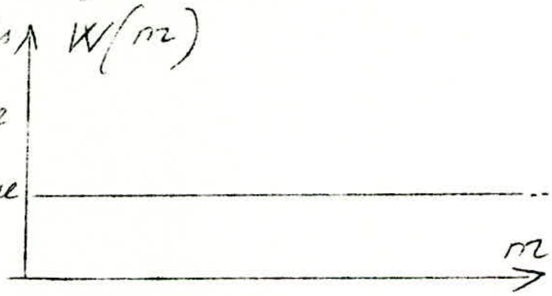
$$E(M) = \int_{m_1}^{m_2} m\,w(m) = \int_0^\infty m\,w(m)\,dm \quad \text{si} \begin{cases} m_1 = 0 \\ m = \infty \end{cases}$$

$$E(M) = \frac{(m_2^2 - m_1^2)}{2(m_2 - m_1)} = \frac{m_2 + m_1}{2}$$

$$\boxed{E(M) = \frac{m_2 + m_1}{2}}$$

II.5.2 Cas particulier :

Si la valeur de m_1 est voisine de 0, alors la valeur de m_2 est voisine de l'infini donc on aura une nouvelle forme et plus on augmente le domaine D dans lequel la moyenne est comprise, plus on peut accorder une confiance à la précision. Il arrive que les pièces soient bien contrôlées et bien entretenues donc les accidents infantiles sont complètement rares et ainsi le matériel peut assurer le fonctionnement pendant un bon temps.

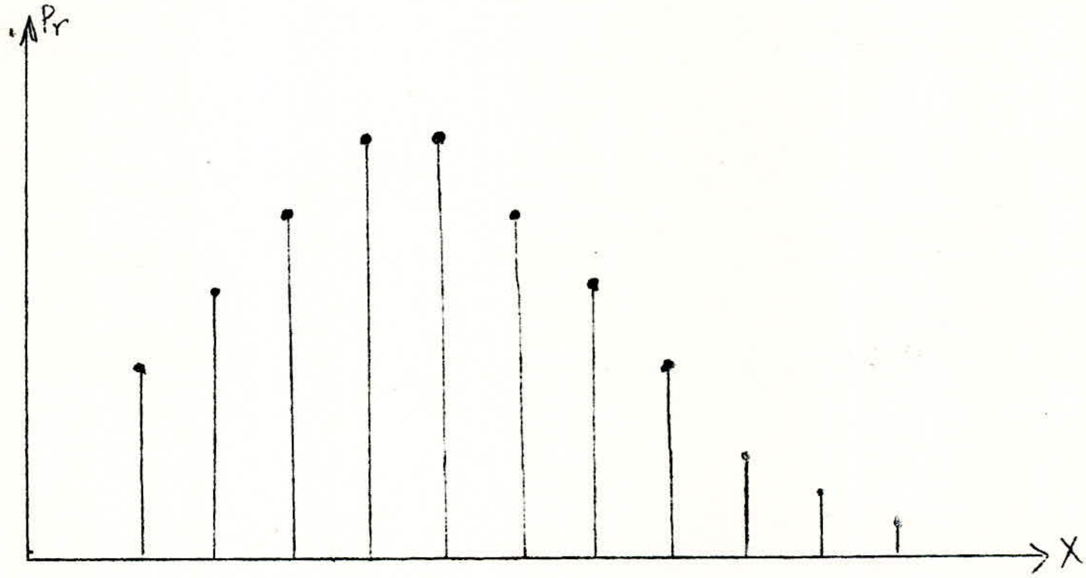


II.6. Loi De Répartition de la Consommation

Désignons par X la consommation instantanée, cette hypothèse est caractérisée par la répartition de X suivant une loi de Poisson avec un paramètre m dont on a vu la loi de répartition.

Il est intéressant de connaitre les caractéristiques de la loi de Poisson.

La loi de Poisson est utilisée pour évaluer les petites probabilités. Et on verra dans l'annexe "usure et remplacement" que la consommation des pièces suit la loi de Poisson quand le taux de consonimation est constant. Ainsi, dans ce cas, on va supposer également que le taux de consommation est constant ; autrement dit, on garde toujours les mêmes conditions de travail.



$$Pr\,(X \text{ si } m) = \frac{m^x e^{-m}}{x!}$$

Calculons l'espérance mathématique de X:

$$E(X) = \sum_{K=0}^{\infty} K\, e^{-m} \frac{m^K}{K!} = m\, e^{-m} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{m^{K-1}}{(K-1)!} = m\, e^{-m} e^{m} = m$$

$$E(X) = m = M_1(X)$$

Calculons le moment d'ordre 2 :

$$M_2(X) = \sum_{K=0}^{\infty} K^2 \, \frac{e^{-m} \, m^K}{K!}$$

écrivons K^2 sous la forme :

$$K^2 = K(K-1) + K$$

$$M_2(X) = m^2 e^{-m} \sum_{K=2}^{\infty} \frac{m^{K-2}}{(K-2)!} + m e^{-m} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{m^{K-1}}{(K-1)!} = m^2 + m$$

la variance de X :

$$V(X) = m^2 + m - m^2 = m$$

$$\boxed{V(X) = m}$$

Donc si l'on a fait une observation sur une période D et si l'on a determiné le nombre C de consommations sur cette période, la consommation moyenne est alors :

$$M_e = \frac{C}{D}$$

Cette consommation moyenne suit donc une loi de Poisson.

II. 6 La loi de la consommation C sur une période :

D'après la définition de la loi de probabilité de la consommation moyenne, on peut écrire que :

$$\boxed{P_r(C \text{ si } m) = \frac{(Dm)^C \, e^{-(Dm)}}{C!}}$$

C'est la loi de Poisson de paramètre (Dm).

Cette probabilité est appelée probabilité à priori.

II.8. La formule de Bayes :

Nous constatons qu'à toute valeur de m de l'intervalle $[m_1, m_2]$ correspond une valeur de C et une valeur de $P_r(m \text{ si } C)$. On peut trouver cette valeur à partir du tableau de la loi de Poisson. Par souci de simplification, donnons un detail par le shéma de la figure 3.

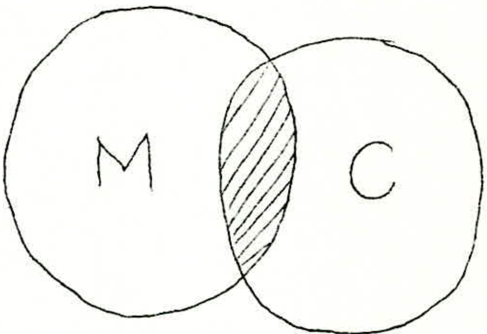


fig.3

Et d'après la théorie de probabilité conditionnelle, on a :

$$P_r(M \cap C) = P_r(M) \cdot P_r(C \text{ si } M) = P_r(C) \cdot P_r(M \text{ si } C)$$

d'où l'on tire la formule suivante :

$$\boxed{P_r(M \text{ si } C) = \frac{P_r(M) \cdot P_r(C \text{ si } M)}{P_r(C)}} \quad (\text{II})$$

Mais, quelle est la loi de probabilité de (C) ?

On a vu qu'à une valeur de m peut correspondre plusieurs valeurs de C. Donc, d'après le principe de probabilité totale, on peut écrire :

$$\boxed{P_r(C = c) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_r(M = m) \cdot P_r(C \text{ si } M)} \quad (\text{III})$$

. La probabilité $P_r(M \text{ si } C)$ donné par la formule II, est appeleé probabilité à postériori.

II. 9. La loi de probabilité à porstériori de (M si C) :

On a dit que M est une variable aléatoire continue, comprise dans l'intervalle $[m_1, m_2]$. En considérant la formule (III), on a :

$$P_r(m \leq M \leq m + dm) = W(m)\,dm$$

$$P_r(C) = \int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{m_2 - m_1} \cdot \frac{e^{-(Dm)}(mD)^C\, d(Dm)}{DC!}$$

Si pour simplifier le calcul, on pose :

$$K = \frac{1}{DC!\,(m_2 - m_1)}$$

alors :

$$\boxed{P_r(C) = K \int_{m_1}^{m_2} e^{-u} (mD)^C\, d(Dm)} \quad (IV)$$

posons le changement de variables :

$$u = Dm$$

d'où : $P_r(C) = K \int_{m_1/D}^{m_2/D} e^{-u} u^C\, du$

Prenons le cas particulier, où : $m_1 = 0$, $m_2 = \infty$

$$P_r(C) = K \int_0^{\infty} e^{-u} u^C\, du = K.C!$$

alors :

$$\boxed{P_r(C) = \frac{1}{D(m_2 - m_1)}}$$

Le remplacement dans (II) nous permet de calculer la loi de probabilité à posteriori de (M si C) :

$$Pr\,(M \text{ si } C) = \frac{\dfrac{dm}{(m_2-m_1)} \cdot \dfrac{(mD)^C\, e^{-Dm}}{C!}}{\dfrac{1}{D\,(m_2-m_1)}} = \frac{D\,(mD)^C\, e^{-Dm}}{C!}\,dm$$

Vérifions que :

$$g(m) = \frac{D\,(mD)^C \cdot e^{-Dm}}{C!}$$

est une fonction de distribution de cette distribution. Il suffit pour cela d'intégrer de 0 à ∞ et on vérifiera que cette intégrale est égale à 1.

$$\int_0^{\infty} \frac{(Dm)^C e^{-Dm}}{C!}\, d(Dm) = \frac{1}{C!}\int_0^{\infty} (Dm)^C\, e^{-Dm}\, d(mD)$$

$$= \frac{C!}{C!} = 1$$

donc $g(m)$ est une fonction de distribution de la loi Pearson III. On va voir tous les détails quand on étudiera la loi de probabilité de M si C.

II . 10 la loi de probabilité à Postoriori de X si C

X représente la consommation instantannée, qui peut être une variable aléatoire, qui prend nimporte quelle valeur positive, pour une valeur donnée de la consommation moyenne, qu'on à défini.

On a dit que M prend des valeurs dans un intervalle $[a, b]$, cet intervalle peut être décomposé en sous-intervalles.

Applons E l'ensemble des valeurs que prend M sur cet intervalle.

$$E = \{ m_1, m_2, m_3, \dots, m_n \}$$

on peut écrire que :

$$(X \cap E) = (X \cap m_1 + X \cap m_2 + \dots + X \cap m_n)$$

de même

$$(C \cap E) = (C \cap m_1 + C \cap m_2 + \dots + C \cap m_n, ..)$$

$$\text{(V)} \quad \boxed{Pr(X \text{ si } C) = P(\underset{\text{si } C}{X \cap m_1}) + P(\underset{\text{si } C}{X \cap m_2}) + \dots + P(\underset{\text{si } C}{X \cap m_n})}$$

on à obtenu cette formule d'après le principe de probabilité totale.

a savoir que :

$$\text{(VI)} \quad \boxed{Pr(m_i \cap X \text{ si } C) = Pr(m_i \text{ si } C) \cdot Pr(X \text{ si } C \cap m_i)}$$

mais $Pr(mi \text{ si } C) = \dfrac{Pr(mi) \cdot Pr(C \text{ si } mi)}{\sum_{i=1}^{n} Pr(mi) \cdot Pr(C \text{ si } mi)}$

remplaçons dans la formule VI

$$Pr(mi \cap x \text{ si } C) = \frac{Pr(mi)\, Pr(C \text{ si } mi)}{\sum_{i=0}^{n} Pr(mi) \cdot Pr(C \text{ si } mi)} \cdot Pr(x \text{ si } C \cap mi)$$

En remplaçant dans la formule V on trouve :

$$(\text{V}') \quad Pr(X=x \text{ si } C) = \sum_{i=0}^{n} \frac{Pr(mi)\, Pr(C \text{ si } mi)}{\sum_{i=0}^{n} Pr(mi) \cdot Pr(C \text{ si } mi)} \cdot Pr(X=x \text{ si } C \cap mi)$$

Puisque X independante de C, alors :

$$Pr(X \text{ si } C \cap mi) = Pr(x \text{ si } mi)$$

donc la formule (V') prend la forme

$$(\text{VI}) \quad \boxed{Pr(X \text{ si } C) = \frac{\sum_{i=0} Pr(mi) \cdot Pr(C \text{ si } mi)\, Pr(x \text{ si } mi)}{\sum Pr(mi) \cdot Pr(C \text{ si } mi)}}$$

c'est la probabilité à postoriori pour que $X = x$ pour une valeur donnée de C.

Les deux distributions $Pr(M=m \text{ si } C)$ et $Pr(X=x \text{ si } C)$ seront l'objet du chapitre suivant...

« M sera concidéré ~~comme~~ variable continue dans l'intervalle $[m_1, m_2]$ avec $m_1 = 0$, $m_2 = \infty$.

CHAPITRE III

ETUDE DES LOIS DE DISTRIBUTION

SOMMAIRE

$Pr(m \text{ si } C)$:

La loi de distribution de la consommation moyenne en fonction de la consommation

$Pr(X \text{ si } c)$:

La loi de distribution de la consommation instantanee en fonction de la consommation

Calcul de la sûreté d'allocation.

ETUDE DE LA LOI DE DISTRIBUTION DE LA PROBABILITE A POSTORIORI DE M SI C

Cette loi de probabilité est définie pour la probabilité de m si c.

$$P_r(m \text{ si } c) = \frac{(Dm)^c \, e^{-(Dm)}}{c!} \cdot d(Dm) = g(m) \cdot d(Dm)$$

La fonction $g(m)$ est la fonction de densité de probabilité. Cette fonction est la fonction de densité de la loi de probabilité $\Gamma(c)$ à condition que $m \in [0, \infty]$

Nous allons considérer dans cette étude que $m_1 = 0$ et $m_2 = \infty$.

I Etude de la fonction de densité $g(m)$

1°/ si $c = 1$ dans ce cas ;

$g(m) = 1$ pour $m = 0$

$g(m) = 0$ pour $m = \infty$

2°/ si $c < 1$ on aura

$g(m) \to \infty$ pour $m = 0$

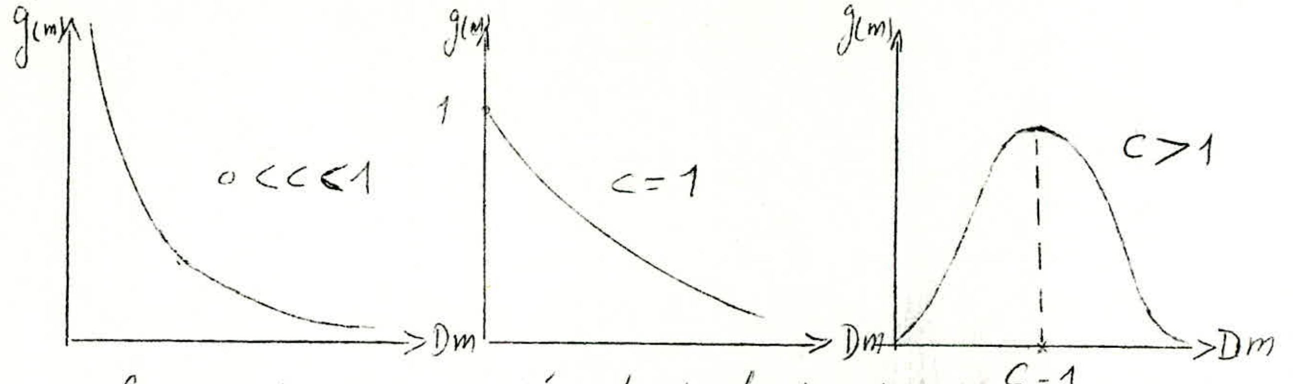
$g(m) \to 0$ pour $m = \infty$

3°/ si $c > 1$

$g(m) = 0$ pour $m = 0$

$g(m) = 0$ pour $m = \infty$

Ce qui nous permet de représenter cette fonction graphiquement par les graphes suivants.



Les courbes qui représentent la fonction de densité g(m) pour différentes valeurs de C.

Les courbes qui représentent g(m) pour differentes valeurs de c.

II - Espérance Mathématique de M

$$E.(m\ pour\ c) = \int_0^{\infty} \frac{(Dm)^{c+1} \cdot e^{-(Dm)}}{D.C!} d(Dm)$$

$$E(m\ pour\ c) = \frac{1}{D.c!} \int_0^{\infty} (Dm)^{c+1} \cdot e^{-(Dm)} d(Dm)$$

alors :-

$$E(m\ pour\ c) = \frac{\Gamma(c+2)}{D.C!} = \frac{(c+1)!}{D.C!} = \frac{c+1}{D}$$

Finalement

$$\boxed{E(M\ si\ c) = \frac{c+1}{D}} \quad (VII)$$

III - Le moment d'ordre deux.

Toujours en considérant $m_1 = 0$ et $m_2 = 0$ on a ;

$$E(M^2 si\ c) = \int_0^{\infty} m^2 g(m)\, d(Dm)$$

d'où $E(M^2 \text{ si } c) = \dfrac{\Gamma(c+3)}{D^2 c!} = \dfrac{(c+2)(c+1)}{D^2}$

on en déduit :

$$E(M \text{ pour } c) = \frac{c+1}{D}$$

et

$$\boxed{E(M^2 \text{ pour } c) = \frac{(c+2)(c+1)}{D^2}} \quad (\text{VIII})$$

IV Calcul de la variance de M si C

$$Var(M \text{ si } C) = E(M^2 \text{ si } C) - [E(M \text{ si } C)]^2$$

alors $Var(M \text{ si } C) = \dfrac{(C+2)(C+1)}{D^2} - \dfrac{(C+1)^2}{D^2}$

$$Var(M \text{ si } C) = \frac{C+1}{D^2}$$

d'où l'on définit l'écart type $\sigma(M \text{ si } C)$ telle que

$$\boxed{\sigma(M \text{ si } C) = \sqrt{\frac{C+1}{D^2}}} \quad (\text{IX})$$

ETUDE DE LA LOI DE PROBABILITE A POSTORIORI DE (X si C)

On va faire le calcul pour $m_1 = 0$ et $m_2 = \infty$ c'est à-dire, on va appliquer le cas particulier. Dans le chapitre 2, on à défini la Probabilité pour que $X = x$ pour une valeur c par la formule (VI)

$$Pr(X = x \text{ si } c) = \frac{\sum_{i=0}^{n} Pr(mi) . Pr(c \text{ si } mi) . Pr(x \text{ si } mi)}{\sum Pr(mi) . Pr(c \text{ si } mi)}$$

Cette formule peut s'exprimer sous forme d'intégration parceque m est une variable aléatoire continue :

$$Pr(X = x \text{ si } C) = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{m^x (mD)^c}{(m_2 - m_1)} \frac{\bar{e}^{(mD)} \bar{e}^{m}}{c!\, x!} dm}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{(mD)^c \bar{e}^{(mD)}}{D(m_2 - m_1) C!} d(mD)}$$

$$Pr(X = x \text{ si } C) = \frac{\mathring{J}}{D(m_2 - m_1)}$$

cette dernière écriture vient de ce que $Pr(C) = \frac{1}{D(m_1 - m_1)}$, donc il ne nous reste qu'à évaluer le numérateur $\mathring{J}$.

alors ; $J = \frac{1}{(m_2 - m_1)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{(mD)^c \bar{e}^{(mD)}}{C!} \frac{m^x \bar{e}^{m}}{x!} dm$

pour simplifier le calcul on peut poser :

$$T = \frac{D^c}{x!\, c!\, (m_2 - m_1)}$$

$$n = c + x$$

$$z = D + 1$$

il reste finalement la formule suivante :

$$\mathring{J} = T \int^{\infty} m^n \, e^{-zm} \, dm$$

pour calculer l'intégrale, posons le change-
-ment de variables :

$$u = zm \qquad \text{alors} \qquad du = z\, dm$$

$$J = \frac{T}{z^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{n+1} du = \frac{T}{z^{n+1}} \Gamma(n+1)$$

$$J = \frac{T\, n!}{z^{n+1}} = \frac{D^c\, (x+c)!}{x!\, c!\, (m_2 - m_1)\, (D+1)^{n+1}}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\boxed{Pr\,(X = x \text{ si } C) = \frac{D^{(c+1)}}{(D+1)^{(c+x+1)}} \cdot \frac{(x+c)!}{x!\, c!}} \qquad (\mathrm{X})$$

Pour calculer le moment et l'écart type de cette loi on va voir le dévélopement mathe-
-matique des fonctions suivantes.

1°/ $f(\lambda) = \dfrac{1}{(1-\lambda)}$

avec le developement de Mac-Laurin

$$f(\lambda) = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n + \cdots$$

2°/ $f(\lambda) = \dfrac{1}{(1-\lambda)^{(i+1)}} = (1-\lambda)^{-(i+1)}$

avec la même méthode cette fonction peut s'écrire:

$$f(\lambda) = 1 + \frac{(i+1)}{1!}\lambda + \frac{(i+1)(i+2)}{2!}\lambda^2 + \cdots + \frac{(i+1)\ldots(i+P)}{P!}\lambda^P$$

ou de la forme:

$$\boxed{f(\lambda) = \frac{1}{(1-\lambda)^{(i+1)}} = \sum C_n^i \lambda^{(n-i)}} \qquad (2)$$

LES MOMMENTS:

1°/ Le momment d'ordre un.

$$E(X \text{ si } C) = \left(\frac{D}{D+1}\right)^{(C+1)} \frac{(C+1)}{(D+1)} \cdot \sum \frac{1}{(D+1)^{(x-1)}} \frac{n!}{(x-1)!\,(C+1)!}$$

D'après la formule (2) on trouve.

$$E(X \text{ si } C) = \frac{D^{(C+1)}\,(C+1)}{(D+1)^{(C+2)}} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{(D+1)}\right)^{C+2}}$$

$$\boxed{E(X \text{ si } C) = \frac{(C+1)}{D}.} \qquad (\underline{XIV})$$

2°/ Le momment d'ordre deux:

$$E(X^2 \text{ si } C) = \left(\frac{D}{D+1}\right)^{(C+1)} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{(D+1)^x} \frac{(x+C)!\;x^2}{x!\;C!}$$

mais $\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x+1}$

d'où:

$$E(X^2 \text{ si } C) = \left(\frac{D}{D+1}\right)^{(C+1)} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{(1+D)^x} \cdot \frac{(x+c)!}{C! \cdot (x-2)!} \cdot \left(1+\frac{1}{x-1}\right)$$

$$= E(X \text{ si } C) + \left(\frac{D}{1+D}\right)^{(C+1)} \frac{(C+1)(C+2)}{(D+1)^2} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{(D+1)^{x-2}} \frac{(x+c)!}{(c+2)!(x-2)!}$$

d'après la formule (?) on trouve.

$$E(X^2 \text{ si } C) = E(X \text{ si } C) + \left(\frac{D}{D+1}\right)^{(C+1)} \frac{(C+1)(c+2)}{(D+1)^2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{D+1}\right)^{(c+3)}}$$

$$\boxed{E(X^2 \text{ si } C) = \frac{C+1}{D} + \frac{(C+1)(C+2)}{D^2}} \qquad (\underline{XV})$$

LA VARIANCE VAR(X si C) :

σ_X^2 peut être calculé à partir des moyennes

$$\sigma_X^2 = \frac{(C+1)(D+1)}{D^2}$$

alors l'écart type sera :

$$\boxed{\sigma_X = \frac{\sqrt{(C+1)(D+1)}}{D}} \qquad (\underline{XVI})$$

CALCUL DE LA SÛRETÉ D'ALLOCATION

On a vu au début que la fonction de sûreté de X est définie par la fonction de répartition de X.

$$S(A,C) = Pr(X \leq A) = \sum_{x=0}^{x=A} Pr(X \text{ si } C)$$

alors,

$$\boxed{S(A,C) = \sum_{x=0}^{A} \frac{(x+c)!}{x!\,c!} \cdot \frac{D^{(c+1)}}{(D+1)^{(c+x+1)}}} \quad (\overline{XVII})$$

On a dit que cette fonction est strictement croissante. Et, elle croît avec la valeur A pour pour un valeur fixe de C.

Nous allons calculer les formules de récurrence et évaluer par conséquent le nombre moyen de ruptures de stock en fonction de la sûreté. Ce qui nous permet finalement d'utiliser cette fonction pour calculer l'allocation optimum qui est le but principal de cette étude.

CHAPITRE IV

LE NOMBRE MOYEN DE RUPTURE DE STOCK

* Le nombre moyen de rupture de Stock

** La Formule de récurrence.

- A partire de $N(A,C)$
- la methode directe
- Proprietés de cette formule.

I LE NOMBRE MOYEN DE RUPTURES DE STOCK

Pour assurer le fonctionnement d'une installation sur une période, l'allocation A prévue par le service de prévision doit tenir compte de tous les nécessaires pour la bonne conduite.

On va voir comment nous allons savoir dans quelle mesure une allocation A n'assure pas la fonctionnement. Et puis finalement les répercution relatives aux ruptures de stock.

$$N(A,C) = \sum_{x=A+1}^{\infty} (x-A) \Pr(X \text{ si } C)$$

mais : $S(A,C) = 1 - \sum_{x=A+1}^{\infty} \Pr(X \text{ si } C)$

alors :

(a) $$N(A,C) = \sum_{x=A+1}^{\infty} X \Pr(X \text{ si } C) - A\left[1 - S(A,C)\right]$$

formule qui permet de déterminer $N(A,C)$ en fonction de la sûreté d'allocation.

posons :

$$B = \sum_{x=A+1}^{\infty} X \Pr(X \text{ si } C)$$

$$B = \sum \frac{(x+c)!}{(x-1)!\,c!} \cdot \left(\frac{D}{D+1}\right)^{(c+1)} \cdot \left(\frac{1}{D+1}\right)^{x}$$

pour pouvoir simplifier la formule posons le changement de variable :
$t = x - 1$
Alors l'expression B devient :

$$B = \sum_{t=A}^{\infty} \frac{(t+c+1)!}{t!\, c!} \cdot \left(\frac{D}{D+1}\right)^{(c+1)} \cdot \left(\frac{1}{D+1}\right)^{t+1} = \frac{(c+1)}{(c+1)} \cdot B$$

d'où :

$$B = \frac{(c+1)}{D} \sum_{t=A}^{\infty} \frac{(t+c+1)!}{t!\,(c+1)!} \left(\frac{D}{D+1}\right)^{(c+1)} \left(\frac{1}{D+1}\right)^{2}$$

Mais :

$$1 - S(A,C) = \frac{1}{c!} \left(\frac{D}{D+1}\right)^{(c+1)} \sum_{x=A+1}^{\infty} \frac{(X+c)!}{X!\,(D+1)^{x}}$$

$$B = \frac{c+1}{D}\left[1 - S(A-1, c+1)\right]$$

Revenons au détail et remplaçons dans la formule (a) on trouve l'expression :

$$\boxed{N(A,C) = \frac{C+1}{D}\left[1 - S(A-1, C+1)\right] - A\left[1 - S(A,C)\right]} \quad (\text{XVIII})$$

S(A, C) peut se présenter sous la forme.

$$S(A,c) = \sum_{k=c+1}^{k=A+c+1} C_{A+c+1}^{k} \frac{D^{k}}{(D+1)^{(A+c+1)}}$$

$$S(A-1, C+1) = \sum_{k=c+2}^{A+c+1} C_{A+c+1}^{k} \frac{D^{k}}{(D+1)^{(A+c+1)}}$$

$$S(A-1,C+1) = \sum_{k=C+1}^{A+C+1} C_{A+k+1}^{k} \frac{D^k}{(D+1)^{A+C+1}} - C_{A+C+1}^{C+1} \frac{D^{C+1}}{(D+1)^{A+C+1}}$$

$$S(A-1,C+1) = S(A,C) - \frac{(A+C+1)!}{(C+1)!\,A!} \cdot \frac{D^{C+1}}{(D+1)^{A+C+1}}$$

mais puisque :

$$Pr\,(X=A \text{ si } C) = \frac{(C+A)!}{A!\,C!} \cdot \frac{D^{(C+1)}}{(D+1)^{C+1}}$$

d'où l'on tire la formule :

$$\boxed{S(A-1,C+1) = S(A,C) - \frac{(A+C+1)}{C+1} Pr\,(X=A \text{ si } C)}$$

$(\overline{\underline{XIX}})$

En remplaçant $S(A-1,C+1)$ dans la formule $(\overline{\underline{XVIII}})$ on trouve :

$$N(A,C) = \frac{(C+1)}{D}\left[1 - S(A,C) + \frac{A+C+1}{C+1} \cdot Pr(X=A \text{ si } C)\right] - A\left[1 - S(A,C)\right]$$

$$N(A,C) = \left[\frac{C+1}{D} - A\right]\left[1 - S(A,C)\right] + \frac{(A+C+1)}{D} Pr(X=A \text{ si } C)$$

$(\overline{\underline{XX}})$

Calculons maintenant $S(A+1,C)$:

$$S(A+1, C) = \sum_{x=0}^{x=A+1} Pr(X \text{ si } C)$$

$$S(A+1, C) = S(A, C) + Pr(X = A+1 \text{ si } C)$$

Mais $Pr(X = A+1 \text{ si } C) = \dfrac{(C+A+1)!}{(A+1)!\, C!} \cdot \dfrac{D^{C+1}}{(D+1)^{C+A+2}}$

$$Pr(X = A+1 \text{ si } C) = \frac{C+A+1}{(A+1)(D+1)} \cdot Pr(X = A \text{ si } C)$$

ce qui nous permet de déduire que

$$\boxed{S(A+1, C) = S(A, C) + \frac{C+A+1}{(A+1)(D+1)} Pr(X = A \text{ si } C)}$$

(XXI)

parallellement à la formule (XVIII) déduisons la formule :

$$\mathcal{N}(A+1, C) = \left(\frac{C+1}{D} - A - 1\right)\left[1 - S(A+1, C)\right]$$

$$+ \frac{A+C+2}{D} Pr(X = A+1 \text{ si } C)$$

remplaçons $S(A+1, C)$ et $Pr(X = A+1, \text{si } C)$ on trouve :

$$N((A+1), C) = \left(\frac{C+1}{D} - A - 1\right)\left[1 - S(A, C) - \frac{C+A+1}{(A+1)(D+1)} Pr(X = A \text{ si } C)\right]$$

$$+ \frac{A+C+2}{D} \cdot \frac{C+A+1}{(A+1)(D+1)} \cdot Pr(X = A \text{ si } C)$$

En simplifiant le calcul on trouve :

$$\boxed{N(A+1,C) = \left(\frac{C+1}{D} - A - 1\right)\left(1 - S(A,C)\right) + \frac{A+C+1}{D} P_r(X=1 \text{ si } C)} \quad (\mathrm{XXII})$$

à partir de ces formules XVIII et XXII, on va calculer la formule qu'on dit formule de récurrence.

(II) LA FORMULE DE RÉCURRENCE

1° DEDUCTION DE CETTE FORMULE A PARTIR DE LA FORMULE (XXII)

dans la formule (XXII) remplaçons $(A+1)$ par A ; on trouve la formule relative à A, soit.

$$\boxed{N(A\ ,C) - N(A+1,C) = 1 - S(A,C)} \quad (\mathrm{XXIII})$$

résultat qui montre clairement que le nombre de rupture de stock est une fonction de la sûreté d'allocation $S(A,C)$.

2° LA METHODE DIRECTE

On a défini $N(A,C)$ par :

$$N(A,C) = \sum_{x=A+1}^{\infty} (x-A)\, Pr(x \text{ si } C)$$

$$N(A+1,C) = \sum_{x=A+2}^{\infty} (x-(A+1))\, Pr(x \text{ si } C)$$

$$N(A+1,C) = \sum_{x=A+2}^{\infty} (x-A)\, Pr(x \text{ si } C) - \sum_{x=A+2}^{\infty} Pr(x \text{ si } C)$$

$$+ \quad Pr(X=A+1 \text{ si } C) - Pr(X=A+1 \text{ si } C)$$

d'où

$$N(A+1,C) = \sum_{x=A+2}^{\infty} (x-A)\, Pr(x \text{ si } C) - \sum_{x=A+1}^{\infty} Pr(X \text{ si } C)$$

$$+ Pr[x = A+1 \text{ si } C]$$

$$N(A+1,C) = \sum_{x=A+1}^{\infty} (x-A)\, Pr(X \text{ si } C) - \sum_{x=A+1}^{\infty} Pr(X \text{ si } C)$$

$$-N(A+1,C) + N(A,C) = \sum_{x=A+1}^{\infty} Pr(X \text{ si } C) = 1 - S(A,C)$$

d'où

$$\boxed{N(A,C) - N(A+1,C) = 1 - S(A,C)}$$

cette methode justifie : le calcul précédent

et par cette methode on peut conclure

que ce résultat est indépendant de la loi de distribution qu'on étudie.

3° LES PROPRIÉTÉS DE LA FORMULE DE RÉCURRENCE

Pour pouvoir étudier les propriétés de la formule de récurrence, on doit revenir à la sûreté de fonctionnement $S(A,C)$.
Dans la définition de la fonction de sûreté on a dit que cette fonction est strictement croissante, définie entre 0 et 1.
Cette fonction égale à 1 pour A tendant vers l'infini pour cela $[1 - S(A,C)]$ décroit avec A, et chaque fois, pour une valeur fixe de C, on a une valeur de A. Valeur unique, qui correspond à l'inégalité :

$$\boxed{N(A,C) - N(A+1,C) < S/R}$$

CHAPITRE V

CALCUL DE L'ALLOCATION OPTIMUM

SOMMAIRE

CALCUL DE L'ALLOCATION

I ANALYSE DU PROGRAMME DE CALCUL :

On va utiliser la formule de récurrence (XXIII) pour calculer l'allocation optimum.

Nous allons commencer nos observations à partir des periodes où la consommation est nulle.

1°/ A partir de la formule $\boxed{XXIII}$, et pour des valeurs de D (période d'observation), par exemple sur 10 ans au maximum.
C'est-a-dire D varie entre 0 et 120 mois.
Sur cette période il y a la consommation C qui varie, par exemple entre zéro et 20 pièces.
A partir des données, on va calculer le tableau de depart

$$Pr(X=0 \text{ si } C) = \left(\frac{D}{D+1}\right)^{(C+1)}$$

2°/ D'après les formules précédentes on aura :

$$S(A=0, C) = Pr(X=0 \text{ si } C)$$
$$N(A=0, C) = \frac{C+1}{D}$$

3°/ A partir des formules précédentes, et avec le tableau de départ, on continue le calcul par récurrence, en faisant varier D entre 0 et l'infini, et en même temps, C entre 0 et 20. Ainsi en introduisant le critère économique S/R, nous calculons les allocations optimum.

$$Pr(X = A \text{ si } C) = \frac{C+A}{A(D+1)} \cdot Pr(X = A-1 \text{ si } C)$$

$$S(A,C) = S(A-1,C) + Pr(X = A \text{ si } C)$$

$$N(A,C) = N(A-1,C) + S(A-1,C) - 1$$

4°/ Avec un test on trouve la valeur de A qui réalise cette inégalité.

$$N(A,C) - N(A+1,C) < S/R$$

Si non ; on revient sur la 3ᵉ étape

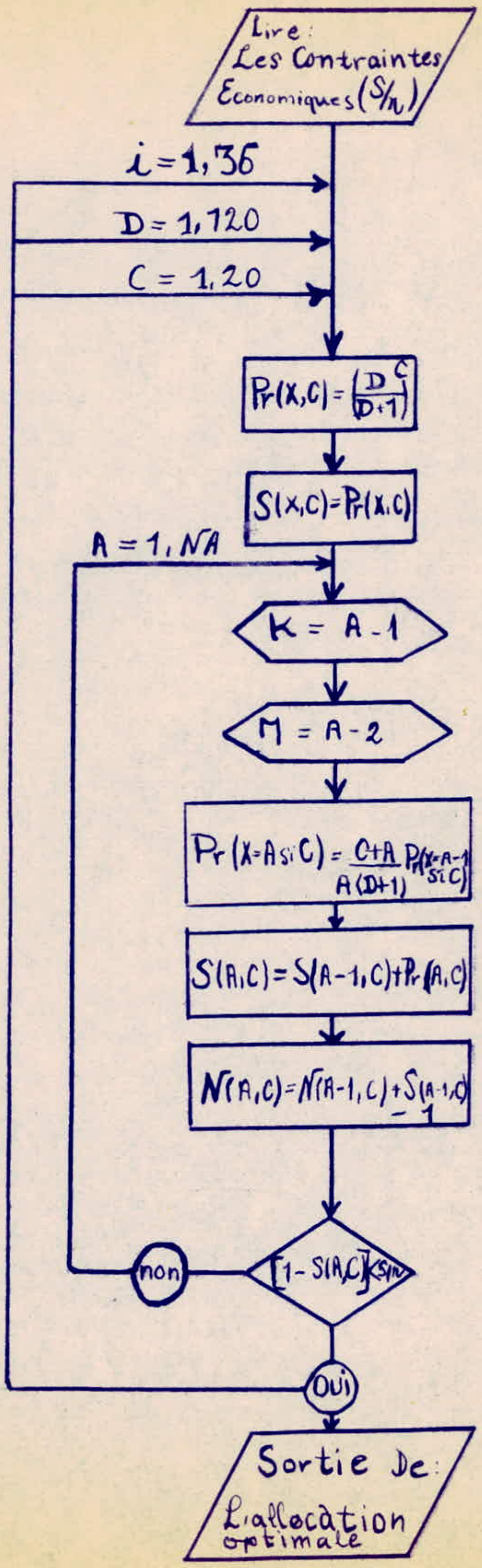
si oui : on note la valeur de A, qu'on cherche.

On va prendre 36 valeurs de S/R qui sont représentées sur le tableau de la page suivante. pour chaque valeur, on calcule les allocations correspondantes.

TABLEAU DES VALEURS DE r/S

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{90}$
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{700}$	$\frac{1}{800}$	$\frac{1}{900}$
$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{3000}$	$\frac{1}{4000}$	$\frac{1}{5000}$	$\frac{1}{6000}$	$\frac{1}{7000}$	$\frac{1}{800}$	$\frac{1}{9000}$
$\frac{1}{10.000}$	$\frac{1}{25.000}$	$\frac{1}{75.000}$	$\frac{1}{100.000}$	$\frac{1}{250.000}$	$\frac{1}{500.000}$	$\frac{1}{750.000}$	$\frac{1}{30.000}$	$\frac{1}{1000.000}$

ORGANIGRAMME



Le Programme Fortran

```
      INTEGER X, A, D, C
      DIMENSIØN PR(40,20), R(36), S(40,20)
      ND = 120
      NA = 40
      NC = 20
      READ(2,40) (R(I), I = 1,36)
40    FØRMAT (9F8.0)
      WRITE (3,350)
      L = 0
      X = 0
      DØ 90 I = 1,36
      T = 1./R(I)
      DØ 33 C = 1, NC
      DØ 44 D = 1, ND
      G = FLØAT(C)
      Z = FLØAT(D)
      PR(X,C) = (Z/(Z+1))**C
      S(X,C) = PR(X,C)
      DØ 30 A = 2,40
      K = A - 1
      M = A - 2
      Y = FLØAT(K)
```

```
      W = FLØAT(M)
      PR(A,C) = ((G+W)/(Y*(Z+1.)))*PR(K,C)
      S(A,C) = S(A,C) +PR(A,C)
      IF((1.- S(A,C)) -T) 65,30,30
30    CØNTINUE
65    IF(A) 17,17,19
19    IF(A-L) 17,44,17
17    L = A
      WRITE(3,300) I,D,C,A,T
44    CØNTINUE
33    CØNTINUE
90    CØNTINUE
250   FØRMAT(10X,27HTABLEAU D'ALLOCATION )
300   FØRMAT(10X,2HI=,I3,7X,2HD=,I3,7X,2HC=,
      I3,7X,2HA=,I3,7X,2HT=, F10.7).
```

3 EXEMPLE D'APPLICATION DU PROGRAMME

Quand on trouve au cours d'observations aucune pièce consommée c'est-à-dire $C = 0$:

$$E(M \text{ si } C) = \frac{C+1}{D}$$

alors pour $C = 0$

$$E(M \text{ si } C=0) = \frac{1}{D}.$$

De même pour la distribution $P_r(X \text{ si } C)$

$$P_r(X \text{ si } C=0) = \frac{D}{(D+1)^{(x+1)}} \quad \text{pour } C=0.$$

$$E(X \text{ si } C) = \frac{C+1}{D}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{D} = E(X \text{ si } C=0).$$

En ce qui concerne la fonction de sûreté

$$S(A, C=0) = 1 - \frac{1}{(D+1)^{A+1}}$$

Dans tous les cas, la moyenne de la consommation future n'est pas nulle. Ce qui nous permet de constater que l'Allocation A dependra de la durée d'observation D, mais aussi que $\bar{X}$ depende de la consommation.

Avec une sûreté d'allocation égale à 0,989, on trouve les résultats suivants :

N° Numéro	C La Consommation	D La durée d'observation	A l'allocation opt. correspondante
1	0	1	6
	0	2	4
	0	3	3
	0	4 – 8	2
	0	9 – 100	1
	0	101 – ∞	0
2	10	1	22
	10	2	13
	10	3	9
	10	4	7
	10	5 – 6	6
	10	7 – 8	5
	10	9 – 12	4
	10	13 – 23	3
	10	24 – 66	2
	10	67 – 1000	1
	10	1001 – ∞	0
3	20	1	37
	20	2	20
	20	3	15
	20	4	12
	20	5	10
	20	6	9
	20	7	8
	20	8 – 9	7
	20	10 – 11	6
	20	12 – 16	5
	20	17 – 24	4
	20	25 – 45	3
	20	46 – 130	2

Comme c'est indiqué sur le tableau precedant On remarque, l'influence de la consommation sur la durée d'observation, cette influence se manifiste plus, quand la durée est entre un et dix mois.

Pour une durée d'observation trés grande On observe l'influence d'une pièces en plus sur la sûreté d'allocation.

pour cela regardons le tableau suivant:

La Sûreté	La Consommation	Observation	A
0,90	2	7 - 120	1
0,95	2	10 - 120	1
0,975	2	14 - 120	1
0,988	2	8 - 20	2
0,988	2	21 - 120	1
0,99	2	9 - 22	2
0,99	2	23 - 120	1
0,99999	2	12 - 18	6
0,99999	2	19 - 30	5
0,99999	2	31 - 66	4
0,99999	2	67 - 74	3
0,99999	2	74 - 120	2

sur ce tableau, on remarque que pour une valeur de $C = 2$, pour un valeur de D comprise entre deux ans et dix ans, et si l'on exige une fonction de sûrté de **90%** ou de **98%**.

il faut faire passer l'allocation de 1 à 2 unites.

Ansi l'adjonction d'une unite suplimetair à l'allocation augmente considérablement la sûreté de cette allocation.

CHAPITRE VI

DISCUSSION SUR LES FORMULES TROUVÉES

SOMMAIRE

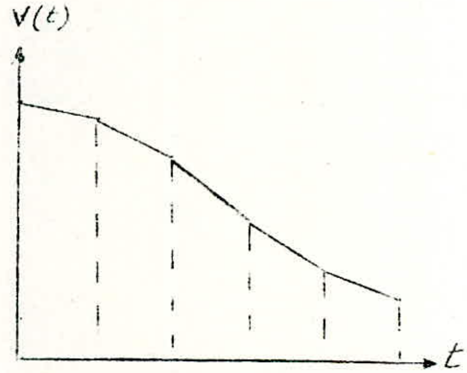
COURBE DE SURVIE

La courbe de survie expérimentale est une ligne polygonale dont les sommets aux bornes d'intervalles, dans lesquels on a divisé la durée de vie totale du matériel.
Cette décomposition en tranche est, en effet, nécessaire pour le calcul à partir des avaries constatées.

On peut utiliser cette courbe de deux methodes :

1- On peut l'utiliser directement

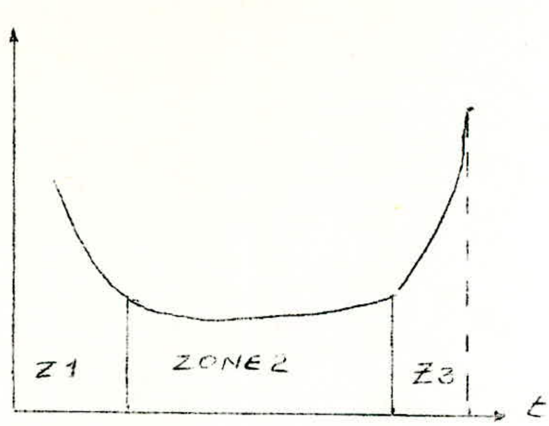
2- Soit examiner dans quelle mesure une loi théorique simple peut représenter les resultats bruts.



Il est difficile, à partir d'une expérimentation opérationnelle, de determiner avec précision la valeur numérique des paramètres λ.
Par exemple dans la plupart du temps il est necessaire d'introduire la limite de fonctionnement.
Plus la limite de fonctionnement est faible, plus le volant à constituer est important.
Il faut choisir la limite de fonctionnement la plus élevée possible, compatible avec le taux d'avarie maximum que l'on puisse tolérer, alors, on fixe un taux d'avarie, par exemple maximum de l'ordre de ceux rencontrés au rodage, qui correspond à la première zone de la courbe en tube.

Sur cette courbe, il y a généralement trois zônes caractéristiques :

1- 1e zône : c'est celle dite de défaillance de jeunesse ou d'enfance



Courbe du taux de défaillance en fonction du temps

2- 2e zône : c'est celle dite des défaillances aléatoires car elles ont un caractère fluctuant (le taux de défaillance est sensiblement constant)-

3- 3e zône : d'ordonnée constamment croissante, c'est celle dite des défaillances d'usures par dégradation.

Donc, on peut fixer un taux d'avarie maximum égal à deux ou trois fois le taux moyen rencontré dans la "zône deux" de la courbe ci-dessus.

Mais pourquoi une loi expérimentale décroissante? L'expérience montre qu'elle est suivie par des matériels constitués de nombreuses composantes dont on s'applique, par des précautions très minutieuses, à minimiser le plus parfaitement possible les défauts -
Cette loi présente l'avantage d'être d'une simplicité extrême au dépens de l'inexactitude car **les phénomènes ne sont pas si simple**

D'après l'annexe, on verra que la distribution exponentielle a un taux de défaillance constant. Le taux d'avarie d'une composante est déterminé, dans des conditions de travail données, et

D'après des essais, ou prélèvements d'échantillons représentatifs.

<u>La loi de probabilité de la consommation:</u>

Quand on considère des éléments, qui fonctionnent en régime continu, on fait intervenir le nombre moyen de réalisations de l'événement considéré, notamment le nombre de consommations pour une certaine durée de fonctionnement.

mD représente le nombre moyen de consommations au cours du temps, c'est-à-dire que m est le nombre moyens de consommation par unité de temps.

La probabilité de n'avoir aucune consommation durant le temps D est, bien sûr, la fonction de survie exposée ci-dessus.

Alors: $$P_0(D) = F = e^{-mD}$$

et la probabilité d'avoir exactement une consommation au cours de la même durée de fonctionnement D est: $P_1(D) = (mD)\, e^{-mD}$

et comme on verra dans l'annexe :

$$P_i(D) = \frac{(Dm)^i e^{-mD}}{i!}$$

On remarque que la probabilité de la consommation d'un élément facilite souvent la détermination de la fiabilité des systèmes complexes, mais on peut dire que la distribution de Poisson n'est applicable, pour un ensemble de composantes, que si la possibilité de défaut d'une composante est une petite fraction de celle du système complet.

LA DISTRIBUTION DE LA CONSOMMATION
EN FONCTION DU PARAMETRE C noté : P(M/C)

On a supposé au départ, que m varie dans un intervalle (m_1, m_2), et est distribuée suivant la loi homogène.

Avec l'utilisation de la formule de Bayes, on a déterminé la probabilité à postériori pour que m prenne une valeur quelconque.

Cette nouvelle valeur est fonction de la consommation et de la durée des observations.

On a été amené à faire ce calcul parce que la valeur de la consommation moyenne par unité de temps varie suivant la composante considérée et peut varier d'un jour à l'autre ; sa distribution pouvant être déterminée.

Si l'on tient compte de toutes ces conditions, il faudra considérer m comme une fonction du temps et multiplier les essais.

En observant la consommation c sur une période D et avec l'utilisation de cette loi, on peut détecter facilement la nouvelle variation de la moyenne.

Donc, on possède une autonomie d'observations de la variation de la moyenne, en fonction de la consommation et de la durée d'observation.

Ce dynamisme permet de donner des valeurs aussi voisines de la réalité, ce qui facilite considérablement l'application pour pouvoir évaluer avec précision la valeur de l'attraction.

La moyenne de cette distribution : $E(M \text{ si } C) = m^*$

$m^* = \dfrac{C+1}{D}$. Cette moyenne est une fonction de la durée d'observation et de la consommation.

m^* est indépendant de toute autre valeur de m^*. Ceci explique que la moyenne m peut prendre n'importe quelle valeur entre zéro et l'infini.

La variance : $V(M \text{ si } C)$: cette valeur semble plus petite que la moyenne.

$$V(M \text{ si } C) = \frac{C+1}{D^2} = \frac{m^*}{D}$$

Donc, on affirme de plus que la variance est fonction de la durée d'observation et de la consommation. La distribution de M n'influence ni la moyenne, ni la variance.

Avec cette distribution, et autres distributions, on va évaluer la loi de distribution de X si C

La loi de distribution de la consommation instantanée (X si C) :

On part avec l'hypothèse que X est répartie suivant la loi

de Poisson de paramètre m - On appelle cela la probabilité à priori, puis on a trouvé la probabilité à postériori de m en fonction de la consommation C. Par le principe des probabilités composées, on a utilisé la loi de Bayes pour calculer X pour une valeur de C, et en étudiant cette distribution, on a trouvé que X varie en fonction de la durée et de la consommation. La fonction de répartition de cette distribution qu'on a appelée fonction de sûreté d'allocation.
La sûreté d'allocation a permis d'évaluer le nombre moyen de ruptures de stock, et par l'utilisation de la formule de récurrence qu'on a vue dans le chapitre d'allocation optimum.

La moyenne E (X si C) :

A partir des deux distributions, on trouve E (M si C) qui est identique à E (X si C) - Toutes les deux représentent finalement la même chose; ce qu'on peut noter c'est que $m^* = \frac{C+1}{D}$ existe, même pour une consommation nulle, ce qui démontre que la consommation moyenne et une fonction du temps aussi ; et pour pouvoir apprécier la valeur de m, il faut faire des observations sur des périodes très grandes.

La variance de $X = x$ pour C :

Cette variance est égale à $\frac{(C+1)(D+1)}{D}$. Elle est d'ailleurs, comme la moyenne, indépendante de la loi de distribution, mais elle est fonction de C et D.

CONCLUSION

La fiabilité s'appuie sur le calcul de probabilités et les statistiques. comme dans tous les calculs statistiques et probabilités, il faut faire un certain nombre d'hypothèses sur la distribution des différents types de défaillances -

Faut-il souligner que les expressions théoriques de la fiabilité ne sont **pas** conformes à la réalité, que dans la mesure où les modèles adoptés traduisent bien les distributions réelles des défaillances -

Quant au calcul des données statistiques des moyennes des écarts types ou des probabilités en s'appuyant sur un modèle, on ne peut **jamais être sûr** de la concordance entre les valeurs calculées et les valeurs relatives à la population réelle, d'une manière absolue.

La meilleure distribution qui concorde le mieux avec les observations faites en pratique sur échantillons -

En dehors de ce problème des modèles statistiques, la fiabilité soulève celui des probabilités - Une composante a une certaine probabilité de survie, ou un certain taux d'avarie dans certaines conditions d'environnement et de fonctionnement. Il suffit de modifier légèrement les contraintes pour faire

varier immédiatement les paramètres d'endurance -
Les changements dans l'environnement ont souvent des répercussions considérables dans le même système, et cela est encore plus radical pour des systèmes différents.

Le taux d'avarie représente un problème fondamental dans le calcul de fiabilité, il est très ardu, parfois, de le mesurer, mais il existe de nos jours un matériel très fiable.
Combien de temps peut-on faire fonctionner une composante, à un certain régime, avant l'apparition du phénomène d'usure, si l'on tolère l'usure des composantes, on diminue radicalement la fiabilité du matériel -
Pour établir un programme de remplacement préventif ou de révision, il faut connaître l'évolution des phénomènes d'usure ou de dérive au cours de la vie des composantes - Alors une telle information représente un besoin d'argent à cause de ses répercussions sur la fiabilité, sur l'aptitude à la maintenance et à la disponibilité en service réel d'un équipement ou d'un système.

La connaissance des caractéristiques de fiabilité des composantes, permet de prédire de façon très réaliste, ce que sera la fiabilité de l'appareil ou du système, par des techniques de calcul.

Dans cette étude, on a décrit dans l'annexe, les conditions qui nous ont amenés à choisir le taux d'avarie constant. Et, on a vu d'une manière générale, les distributions statistiques qui répondent bien à la réalité.

La consommation moyenne a représenté le point d'articulation de cette étude, sur cette moyenne; on fait l'hypothèse que la moyenne est distribuée d'une manière homogène.

Ainsi, pour la consommation instantanée X, on a supposé que cette variable est distribuée à priori par la distribution de Poisson du paramètre de la "consommation moyenne"

En utilisant la formule de Bayes, on a pu calculer la distribution à posteriori de m pour une valeur de c. Et puis la distribution de X pour une valeur de c aussi.

A partir de la dernière distribution, on a évalué la fonction de sûreté, puis le nombre moyen de ruptures de stock. Le nombre moyen a été calculé en fonction de la sûreté. La formule de récurrence, calculée à partir du nombre moyen de ruptures de stock, nous a permis d'évaluer l'allocation optimum A.

Un programme, à la fin de cette étude, qui répond à la variation de A en fonction de la durée d'observation et de la consommation sur cette période –

Ce calcul donne une commodité d'utilisation ; il suffit de savoir chaque fois la consommation et la durée d'observation, et la valeur de la contrainte pour trouver l'allocation A nécessaire –

Donc, cette étude répond aux besoins du service d'approvisionnement de deux côtés principaux, assure une politique de remplacement préventive avec un coût minimum –

On ne peut pas dire que ce modèle est parfait, car en effet, il ne peut être appliqué qu'à des catégories de matériaux. Pour qu'il puisse être applicable à toute sorte de matériaux, il faut qu'il tienne compte d'un très grand nombre de facteurs, par exemple la consommation moyenne peut-être distribuée selon une loi autre que la loi homogène ; ce phénomène est dû à la variété des contraintes attribuées à chaque catégorie de pièces.

Donc, il sera nécessaire de faire des modeles qui tiennent compte des difficultés de contraintes. On obtient finalement un ensemble de modèles qui peuvent s'appliquer à n'importe quelle sorte de matériaux.

Ainsi, les lois de distributions théoriques existantes ne correspondent guère à certaines catégories de matériaux, donc on sera amené à calculer ses lois. Ce qui constitue un domaine de recherche assez important -

ANNEXE 1

RESULTAT DE SORTIE DU PROGRAMME

Dans le résultat de sortie du programme, nous allons expliciter les variables, qui figurent dans le tableau d'allocation optimum :

I : représente l'indice de contrainte économique

D : représente la période d'observation.

C : représente la consommation durant cette période.

A : allocation optimum corespondant à la période et à la consommation durant cette pérode.

T : contrainte économique, c'est-à-dire le rapport du coût d'une rupture de stock à celui d'une pièce de rechange supplementaire. ($T = r/s$).

Interpretation du résultat de sortie :

l'indice I varie de 1 à 36, et à chacune des valeurs de I correspond une contrainte économique définie au préalable.

Pour une valeur donnée de C et pour differentes périodes, on obtient les allocations optimums correspondantes. On a remarqué que pour une même consommation sur des durées differentes, on obtient la même allocation : c'est pourquoi on a jugé utile de n'écrire qu'une seule fois la même valeur de A, pour cela, on donnera à D la première pour

laquelle A reste constante: la valeur de D qui correspondra à une nouvelle valeur de A.
Un exemple nous aidera à lire le tableau.

$I = 1$	$D = 10$	$C = 16$	$A = 4$
$I = 1$	$D = 15$	$C = 16$	$A = 3$
$I = 1$	$D = 31$	$C = 16$	$A = 2$

Cela veut dire que pour $D = 10, 11, 12 \ldots 13$ et 14 mois on a la même allocation $A = 4$.
Pour $D = 15, 16, 17, \ldots, 30$ mois, on à la même allocation $A = 3$, et pour $D = 31, 32, \ldots, 200$ on a la même allocation pour $A = 2$.

ANNEXE II

THEORIE DU RENOUVELLEMENT

La théorie du renouvellement trouve son origine dans l'étude des problèmes probabilistes liés à la défaillance ou au remplacement de composants. Lorsqu'un composant ne fonc-tionne plus, il est immédiatement remplacé par un neuf identique, et ainsi de suite.

La théorie du renouvellement comporte l'étude de sources de variables aléatoires indépendantes, étude qui dépasse le cadre des problèmes de défaillance et présente un grand intérêt pour les calculs de probabilités.

Dans de nombreux problèmes de recherche opérationnelle en aval de l'étude de renouvellement surgit un problème de décision. Quelle stratégie de remplacement doit-on adopter ?

1. La dureé de vie des composants :

Soit T la dureé de vie d'un composant. Cette dureé de vie commence à partir du moment où l'équipement fonctionne. Et, notre étude est baseé sur la connaissance de la loi de cette variable aléatoire.

2. La fonction de densité de T :

. La probabilité pour qu'une pièce périsse dans l'intervalle

$[t, t+dt]$ est donneé par la valeur de $f(t).dt$:

$$\boxed{f(t).dt = P_r(t \leq T < t+dt)}$$

3. La fonction de dureé de vie de l'équipement :

Cette fonction donne la probabilité pour que T soit infé-rieur à t, autrement dit, pour que la pièce ait cessé de fonctionner dans l'intervalle $[0, t]$.

alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} F(t) = P_r(T<t) \\ F(t) = \int_0^t f(u)\,du \end{array}}$$

4. La fonction de survie :

Cette fonction définit la probabilité pour qu'une pièce ne périsse pas dans l'intervalle $[0, t]$, et pour qu'elle fon-ctionne j'usqu'à la limite de fonctionnement. Il s'agit donc d'une fonction complementaire de $F(t)$.

$$\boxed{G(t) = 1 - F(t) = P_r(T \geqslant t)}$$

5. Le taux d'avarie :

Le taux d'avarie représente le nombre moyen d'avaries par unité de temps. Soit λ, ce nombre.

Alors, sur un laps dt, la probabilité pour qu'il y ait une avarie, est : $P_c(t) = \lambda\, dt$.

$P_c(t)$ représente la probabilité conditionnelle pour que l'avarie tombe dans l'intervalle $[t, t+dt]$.

$$P(t \leq T \leq t+dt) = P(T \geqslant t) \cdot P_c(t)$$

$$f(t)\,dt = G(t) \cdot P_c(t)$$

d'où : $$f(t)\,dt = G(t) \cdot \lambda\, dt$$

et : $$\lambda = \frac{f(t)}{G(t)}$$

ou : $$\boxed{\lambda = -\frac{G'(t)}{G(t)}}$$

Pour compléter l'étude sur la **variable T il est interes-sant** d'en calculer la moyenne et l'écart type.

6. La moyenne de T :

a) $E(t) = m_1$:

$$m_1 = E(t) = \int_0^{\infty} f(t)\,dt = -\int_0^{\infty} t\, G'(t)\,dt$$

en intégrant par partie, on trouve :

$$\boxed{E(t) = \int_0^{\infty} G(t)\,dt}$$

b) $E(t^2) = m_2$:

$$E(t^2) = -\int_0^{\infty} t^2\, G(t)\,dt$$

en intégrant par partie, on trouve :

$$\boxed{m_2 = E(t^2) = 2\int_0^{\infty} t\, G(t)\,dt}$$

. On note que la fonction $G(t)$ est nulle à l'infini, donc cette **propriété** qui est toujours valable, permet de simplifier le calcul précédent. Dans le but de simplifier les calculs, introduisons la fonction $Q(t)$, telle que :

$$Q(t) = \int_t^\infty G(u)\,du.$$

alors : $$dQ(t) = -G(t)\,dt$$

donc, avec cette nouvelle fonction :

$$m_2 = 2\int_0^\infty Q(t)\,dt$$

7. Calcul de l'écart-type :

$$V(t) = \sigma_T^2 = m_2 - m_1^2$$

$$\boxed{\sigma_T = \sqrt{m_2 - m_1^2}}$$

Application :

Le taux d'avarie peut prendre différentes valeurs et peut aussi être constant.

Etudions le cas où la variable λ prend une valeur constante ; on a vu que :

$$\lambda = -\frac{G'(t)}{G(t)}$$

donc : $$\lambda dt = -\frac{dG(t)}{G(t)}$$

en intégrant cette équation differentielle, on trouve :

$$\text{Log}\, G(t) = -\lambda t$$

soit ; $$\boxed{G(t) = e^{-\lambda t}}$$

. Cette distribution est une loi exponentielle :

$$m_1 = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}\, \Gamma(1) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\boxed{m_1 = \frac{1}{\lambda}}$$

Calcul de $Q(t)$:

$$Q(t) = \frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t}$$

$$m_2 = \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\boxed{m_2 = \frac{2}{\lambda^2}}$$

l'ecart-type vaut alors :

$$\boxed{\sigma_T = \frac{1}{\lambda}}$$

La technique précédente nous permet de connaitre les caractères de cette variable T et finalement, nous permet par exemple pour un ensemble de pièces, le nombre d'heures de fonctionnement que cet ensemble peut assurer.

Pour éclairer le problème, considérons un nombre L de pièces homogènes dans la meme condition de travail.

Si Ti représente la durée de vie de chaque pièce, alors :

soit : $S = T_1 + T_2 + \cdots + T_L$

alors, $\bar{S} = L m_1$

$$\sigma_S^2 = L\, \sigma_T^2$$

On a supposé que :

$\sigma^2_{T_i} = \sigma^2$ et , $m_{T_i} = m_1$

Si L est suffisamment grand , alors S suit la loi normale $N(\bar{S}, \sigma_S^2)$.

A partir du tableau de la loi normale, on aura :

$$\boxed{P_r\left(\bar{S} - 1{,}96\,\sigma_S \leq S \leq 1{,}96\,\sigma_S + \bar{S}\right) = 0{,}95}$$

puisqu'on connait $\bar{S}$ et σ_S , alors, on peut savoir ā 5% d'erreur que les L composants assure le fonctionnement de S heures. De là, vient l'intérêt de pouvoir prévoir le nombre de pieces necessaires pour assurer la continuité de fonctionnement.

Loi Des Probabilité Des Consommations

les etudes faites jusqu'à maintenant, permettent de determiner combien d'heures de fonctionnement seront assurés au total par N' materiaux

Mais nous voulons savoir quelles sont les probabilités à priori pour que l'on ait « consommé » aucune piece, une piece, etc... Lorsque ces pieces ont été utilisées sur une periode D.

Soit: $C(t)$ la consommation de materiaux bien determinés, sur t heures de fonctionnement, et **C** peut prendre toutes les valeurs entieres positives ou nulles avec les probabilités :

$$\begin{cases} P_0(t) & \text{pour } C = 0 \\ P_n(t) & \text{pour } C = n \end{cases}$$

sur une periode de t heures de fonctionnement definit :

$$K(t) = \overline{C(t)} = 0 \times P_0(t) + \dots + n P_n(t)$$

supposons qu'on dispose de N materiaux dont chacun à effectuer.

<u>La Consommation</u>

C_1 t_1 heures de fonctionnement du 1^{o} materiau

⋮

C_n t_n heures de fonctionnement de n^{o} materiau

La Consommation globale B_n en Materiaux Z c'est à dire le nombre total de ceux-ci, qui ont du être déposés soit pour avarie majeure, soit ayant atteint la limite de fonctionnement

B_N est une variable aléatoire

$B_N = C_1(t_1) + C_2(t_2) + \dots + C_n(t_n)$

avec $C_i(t_i)$ sont des variables aleatoires mutuellement independantes.

$\overline{B_N} = \overline{C}_1(t_1) + \dots + \overline{C}_N(t_n)$

ou $\overline{B_N} = K(t_1) + \dots + K(t_n)$ (1)

Sachant que $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_n$ sont identiques pour la même valeur de t.

A partir de cette formule, on peut examiner les cas suivants :

- $V(t)\,dt$ est la fonction probabilité pour que des N machines soit encore en etat de fonctionnement au temps t

$$\int_0^\infty V(t)\,dt = 1$$

La consommation globale en materiel Z pour les N machines est la variable aleatoire.

$$B_N = \int_0^\infty N\,V(t)\,C(t)\,dt$$

en prenant les moyennes

$$\overline{B_N} = \int_0^\infty N\,V(t)\,K(t)\,dt$$

- Si les N machines auront fait exactement le même nombre t d'heures de fonctionnement d'apres la relation (1)

$$\overline{B_N} = N\, K(t) \quad (2)$$

- Si l'on considere que $K(t)$ est une fonction lineaire de t de la forme :

$$K(t) = \alpha + \beta t$$

et si l'on se place dans le cas general où les machines ont effectué les nombres d'heures de fonctionnement differents $t_1, \dots, t_n$

alors : $\overline{B_N} = \alpha + \beta t_1 + \alpha + \beta t_2 + \dots \alpha + \beta t_N$

$$\overline{B_N} = N\alpha + \beta \Sigma t_i$$

alors la consommation moyenne rapportée à une machine, est :

$$\frac{\overline{B_N}}{N} = \alpha + \beta \frac{(\Sigma t_i)}{N} = k(t_m)$$

avec $t_m = \dfrac{\Sigma(t_i)}{N}$

Nous venons d'etudier en quelque sorte l'utilisation de la moyenne de la variable aleatoire $C(t)$.

Faisons la meme chose pour le moment du second ordre de la variable $C(t)$

(3) $\mathcal{L}(t) = \overline{C^2}(t) = 0^2 \times P_0(t) + \dots + n^2 \times P_n(t)$

l'ecart-type $\sigma_c(t)$ sera :

$$\sigma_c^2(t) = \overline{C^2(t)} - \left[\overline{C(t)}\right]^2 = \mathcal{L}(t) - K^2(t)$$

puisque $B_N = \sum_{i=1}^{N} C(t_i)$

avec C_i, C_j mutuellements independantes

La variance $\sigma^2_{B_N}$ est la somme de ces variables de consommations :

(4) $$\sigma^2_{B_N} = \sigma_c^2(t_1) + \dots + \sigma_c^2(t_N)$$

Si les t_i sauf egaux à t

(5) $$\sigma^2_{B_N} = N\,\sigma_c^2(t)$$

Si N est suffisament grand, B_N obeit sensiblement à une loi de Gauss de moyen

$$\begin{cases} \overline{B_N} = K(t) \cdot N \\ \sigma_{B_N} = \sqrt{N} \times \sigma_c(t) \end{cases}$$

Pour risque α, (Consommation globale reelle observée) verifie les inegalités :

$$N K(t) - t_\alpha \sigma_c(t)\sqrt{N} < B_N < N K(t) + t_\alpha \sigma_c(t)\sqrt{N}$$

de même, pour une machine on peut ecrire

$$K(t) - t_\alpha \sigma_c(t)\frac{1}{\sqrt{N}} < \frac{B_N}{N} < K(t) + t_\alpha \sigma_c(t)\frac{1}{\sqrt{N}}$$

Donc la connaissance du nombre N et des fonctions $K(t)$ et $\sigma_c(t)$ permet de trouver l'intervalle où le chiffre de consommation globale B_N reellement observée se placera presque sûrement.

"Determination De La Loi De Probabilité Des Consommations et des Fonctions $K(t)$ et $\overline{\sigma}_i(t)$ A Partir de la Fonction de Survie "

Nous allons etablir les relations entre la fonction de survie et la loi de probabilité des consommations.

: $G(t) = P_n\{T \geq t\}$ = la fonction de survie

$P_0(t) = P_n\{T \geq t\} = G(t)$ c'est à dire $C = 0$

$P_1(t)$ c'est la probabilité qu'il y a une avarie (On depose à limite de fonctionnement) La Courbe de Survie englobe ces deux cas à un âge u compris entre 0 et t

Or la probabilité pour qu'il y ait une avarie entre les âges u et $u + du$ est $i(u)\,du$, avec ce qu'on a vu, ou encore $dG(t)$

La probabilité pour qu'un materiel remplaçant monté à l'âge u fonctionne sans avarie entre u et t est $G(t-u)$

Ces événements étant independants, la probabilité que l'un ou l'autre se produise est d'apres ce theoreme des probabilités composées egale au produit des probabilités de chacun d'eux, soit :

$i(u) . G(t-u)\, du$

ou :

$G(t-u)\, d\,G(u)$

or il faut considerer les possibilités d'avarie du premier materiel monté aux divers âges u compris entre o et t et sommer les probabilités totales on a en definitive :

$$P_1(t) = \int_0^t G(t-u)\, i(u)\, du = -\int_0^t G(t-u)\, d\,V(u)$$

On montrera qu'il existe une relation de recurrence donnant la probabilité $P_n(t)$ en fonction de $P_{n-1}(t)$. Pour qu'en effet il y ait consommation de n materiaux dans l'intervalle $(0,t)$ il faut et il suffit qu'il y ait une depose, à un âge u quelconque compris entre 0 et t et qu'ensuite exactement $(n-1)$ materiaux Z le même raisonnement que ci-dessous conduit ainsi à la relation :

$$(7) \quad P_n(t) = \int_0^t P_{n-1}(t-u)\, i(u)\, du = -\int_0^t P_{n-1}(t-u)\, dG(u)$$

Avec la transformation de Laplace $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(P)$ t est une variable reelle et P une variable complexe

$$F(P) = \int_0^\infty e^{-tp} f(t)\, dt$$

Si on peut representer la fonction $f(t)$ par

$$f(t) = \int_0^t f_2(\tau)\, f_1(t-\tau)\, d\tau$$

Alors $F(P) = F_1(P)\, F_2(P)$

cette relation facilite la transformation de formeles (7)

Si $G(P) = \mathcal{L}(G(t))$

Mais $G(t) = 1 - \int_0^t i(u)\,du = 1 - I(P)$

alors :

(8) $G(P) = \frac{1}{P} - I(P) = \frac{1}{P} - \frac{i(P)}{P} = \frac{1}{P}\left[1 - i(P)\right]$

Les transformées des probabilités seront donc explicitées sous la forme :

(9) $\begin{cases} P_0(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} P_0(P) = G(P) \\ P_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} P_1(P) = i(p) \times P_0(P) \\ \vdots \\ P_n(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} P_n(P) = i(p) \times P_{n-1}(P) \end{cases}$

et on peut encore expliciter ce système sous la forme :

$P_0(P) = G(P)$

$P_1(P) = i(P) \cdot G(P)$

(10) $P_n(P) = i^n(P) \times G(P) = G(P)\left[1 - G(P)\right]^n$

(On peut facilement calculer les fonctions $K(t)$ et $\sigma_c(t)$ avec leurs transformées de Laplace que nous noterons :

$K(t) = \overline{C(t)} = \sum_{i=0}^{n} C_i\, P_{ci}(t)$

$$K(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} K(P) = \frac{1}{P} \frac{i(P)}{1-i(P)}$$

(11) $$\boxed{P\,K(P) = \frac{i(P)}{1-i(P)}}$$

De même, pour le moment d'ordre deux:

$$Z(t) = \sum_{i=0}^{n} C^2 i \; P_{ci}(t)$$

$$Z(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z(P)$$

(12) avec $$\boxed{Z(P) = \left[\frac{1}{P\,V(P)-1}\right]\left[\frac{2}{P\,V(P)}-1\right]}$$

Ce qu'on a fait jusqu'à present, se base sur l'hypothèse que l'on compte les heures de fonctionnement t de la machine à partir du moment où un premier materiel $\mathcal{Z}$ neuf est monté.

Cependant si le matériel monté n'est pas neuf autrement dit ce materiel a fonctionné dejà pendant θ temps, bien sûr qu'on connaid.

La somme de la probabilité conditionnelle pour qu'un matériel ayant atteint sans avarie l'âge θ, fasse en plus t heures de fonctionnement sans avarie, c'est-à-dire atteigne l'âge $\theta + t$ sera appelé $G_\theta(t)$

$G(t+\theta)$ représente la probabilité a priori de cette évènement avec la même définition que $G(t)$.

D'après la théorie des probabilités composées

$$G(t+\theta) = G(\theta) \times G_\theta(t).$$

$$(14) \qquad G_\theta(t) = \frac{G(t+\theta)}{G(\theta)} \quad \text{pour } t > 0$$

A partir de $G_\theta(t)$, on trouve les probabilités qui sont semblables à ce qu'on a vu $P_\theta(t), \ldots\ldots, P_{n\theta}(t)$.

Ou de même on peut appliquer la transformation de Laplace.

on trouve
$$\begin{cases} P_{i\theta} = i_\theta(p)\, i^{n-1}(p)\, G(p) \\ G_\theta(P) = \dfrac{1}{P}\left[1 - i_\theta(P)\right] \\ P\, K_\theta(P) = \dfrac{i_\theta(P)}{1 - i(P)} \end{cases}$$

Soit B_N la consommation globale lorsque N matériaux Z montés sur les machines aient respectivement les âges

$$\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots, \theta_N.$$

La moyenne de la consommation globale $\overline{B_N}$ en matériel Z lorsque à partir de l'origine des temps les machines ont effectué les heures de fonctionnement.

$t_1, \ldots, t_N$

est :

(15) $\overline{B_N} = K_{\theta_1}(t_1) + \ldots + K_{\theta_n}(t_N)$

ceci présente une simplification par rapport à la relation (1)

Prenons l'exemple précédent et on va calculer $P_m(t)$ pour cet exemple :

On dit que $\Theta(t) = e^{-\lambda t}$

$$\mathcal{L}\,\Theta(t) = \frac{P}{P+\lambda}$$

Remplaçons dans la formule (10), on aura :

$$P_m(P) = \frac{P}{P+\lambda}\left(1 - \frac{P}{P+\lambda}\right)^m$$

$$P_m(P) = \lambda^m \frac{P}{(P+\lambda)^{m+1}}$$

Donc on trouve que : $P_m(t) = \mathcal{L}^{-1} P_m(P)$

$$\boxed{P_m(t) \quad \frac{(\lambda)^m e^{-\lambda t}}{m!}}$$

Cette $P_m(t)$ correspond à une loi de distribution de type de Poisson où la moyenne est la même que l'écart type :

$$m_1 = \sigma_T = \lambda t$$

On peut dire que la consommation dépend de la durée de fonctionnement du taux de consommation λ

LOI DE PROBABILITE DE L'AGE DES MATERIAUX AUCOURS DE L'UTILISATION

Nous considérons toujours comme précédemment une machine initialement effectuant t heures de fonctionnement, au cours desquelles les matériaux Z sont déposés et remplacés par d'autres matériaux neufs.

Nous voulons savoir ce que l'on peut dire sur l'âge θ du matériel Z qui est monté sur la machine lorsque celui-ci a fait t heures de fonctionnement.

Autrement dit, nous cherchons combien d'heures, depuis son installation sur la machine, a réalisé le dernier matériel Z, celui qui est encore monté sur cette machine, lorsque celui-ci vient d'effectuer t heures de fonctionnement.

Pourcela, on doit déterminer la densité de probabilité de θ.

$$\text{Prob}\left\{\theta \leqq \theta \leq \theta \times d\theta\right\} = \sigma_t(\theta)d\theta$$

Pour déterminer $\sigma_t(\theta)$ on va étudier le moyen $K(t)$ pour N machines effectuant toutes ensemble le même nombre d'heures de fonctionnement u, par machine d'après (6)

$$B_N = N . K(u)$$

puisque N est supposé très grand.

Pendant une heure de fonctionnement de chaque machine, u varie d'une unité, et le nombre global de matériaux déposés est la dérivée de B_N par rapport à u, soit : $\quad N . K'(u)$

Ces matériaux sont remplacés nombre par nombre lorsque chaque machine aura effectué t heures de fonctionnement.

Le nombre total de matériaux encore en fonctionnement à cet instant se décomposera ainsi :

1° Les matériaux initiaux encore « vivants ». Leur nombre est, d'après la définition de la courbe de survie, et pusque l'on considère toujours N très grand : $\quad N . G(t)$

2° Ceux qui « vivent » encore parmi les matériaux qui ont remplacé ceux que l'on a déposés en cours de route ; leur nombre est :

$$\int_0^t N . K'(u)\, G(t-u) . du$$

(16) avec $G(t) + \int_0^t K'(u)\, G(t-u)\, du = 1$
puisque le nombre des matériaux égale le nombre des machines.

En transformant (16)

$$G(p) + pK(p)\, G(p) = \frac{1}{p}$$

$$K(p) = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{p\,G(p)} - 1\right]$$

En ce qui concerne $\sigma_\theta(t)$: parmi les N machines. Le nombre de machines qui ont des matériaux d'âge compris entre θ et $\theta + d\theta$ sachant que chacune d'elles a effectué t heures de fonctionnement, est $N\,\sigma_t(\theta)\,d\theta$

Mais à l'époque considérée, les matériaux d'âge θ ne peuvent provenir que de deux sources:

1) Si θ est différent de t, inférieur à t, ils proviennent des matériaux montés quand "l'âge" des machines (nombre d'heures de fonctionnement effectuées) était au tour de $t - \theta$ et qui "vivent" encore à l'âge t leur nombre est donc:

$$N\,\sigma_t(\theta)\,d\theta = N K'(t-\theta)\, G(\theta)\, d\theta$$

2) Si $t = \theta$ dans ce cas le nombre de matériel de l'âge θ

$$N \cdot G(\theta)$$

On suppose toujours que les machines étaient équipées de matériaux neufs au moment zero "moment de départ".

La fonction de densité sera de la forme

$$\sigma_t(\theta) = K'(t-\theta)\, G(\theta) + \delta(\theta - t)\, G(\theta)$$

où $\delta(t)$ est une fonction dite de "dirac" qui est définit par $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\, dt = 1$

La formule de $\sigma_t(\theta)$ signifie

1) Si θ_1 supérieur à t,

On veut sur N machines ayant toutes t heures de fonctionnement calculer le nombre d'entre elles qui ont des matériels Σ d'âge superieur à θ_1

$$N \int_{\theta_1}^{t} K'(t-\theta)\, G(\theta)\, d\theta + N G(t)$$

2) Si θ_1 **inférieur** à t, le nombre de machines qui dans les mêmes conditions ont des materiaux d'âge inférieur à θ_1 ce nombre est

$$N \int_{0}^{\theta_1} K'(t-\theta)\, G(\theta)\, d\theta.$$

Remarque :

On a étudié un cas particulier où λ (taux de consommation) est constant ; mais il peut être variable en fonction du temps. Pour compléter l'étude, il suffit de revenir à notre bibliographie (L'article de Mr DESCAMPS).

-:- B I B L I O G R A P H I E -:-

I - Durée de vie, Fiabilité, Disponibilité des materiels de Lánglois-Berthelot (Dunod - Paris)

2 - L'Econométrie au service de l'Entreprise de Henou (Gauthier - Villars Paris)

3 - Fiabilité de BAZOVSKY (Dunod - Paris)

4 - Méthode et Modèles de la Recherche Opérationnelle I de (A. KAUFMANN) (Dunod - Paris)

5 - Théorie de renouvellement de Cox (Paris)

6 - Theorie and problemes of finite Mathematics by (SEYMOUR LIPSCHUTZ) (SCHAMS) (Mc GRAW - HILL)

7 - Cours de Statistique Mathématique à l'Ecole Nationale Polytechnique par le professeur SOLAIR (ALGER)

<u>Publication sur le sujet ou des sujets voisins</u> :

I - "Prévisions statistiques des avaries et calcul des volants et rechange"

DOCAERO N° 4I et 43 Novembre I956 et Mars I957 (Paris) par M. DESCAMPS Ingénieur Principal de l'air.

2 - Chains de MORKOV HOMOGENES Séminaire files d'attent par C. FERRABU Ministère de l'Equipement et du logement - Direction des Routes et de la Ciculation Routière S.E.T.R.A. ex S.E.R.C.R. (Alger)

3 - Cours sur les processus stochastiques, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées ES I7 Recherche Opérationnelle 630 (Paris)

- Note d'orientation de M° BOISRAYON