UNIVERSITÉ D'ALGER
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT ÉCONOMIE

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

SUJET

L'ÉTUDE DE CERTAINES CONFIGURATIONS DE MATRICES ENTIÈRES, CARRÉES ET RÉGULIÈRES

Proposé par :

Mr AIT OUYAHIA Mohand

Étudié par :

BAHAYOU H. Yahia

ANNEE 1970 - 1971

UNIVERSITÉ D'ALGER
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT ÉCONOMIE

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

SUJET

L'ÉTUDE DE CERTAINES CONFIGURATIONS DE MATRICES ENTIÈRES, CARRÉES ET RÉGULIÈRES

Proposé par :

Mr AIT OUYAHIA Mohand

Étudié par :

BAHAYOU H. Yahia

ANNEE 1970 - 1971

TABLE DES MATIERES

AVANT PROPOS

Je dédie cette modeste étude à tous ceux qui ont contribué à ma formation et particulièrement à mes parents, mes professeurs et mes amis.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à Mr Aït Ouyahia - professeur de la recherche Opérationnelle à L'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger - qui a bien voulu patronner cette étude et ce avec toute la patience et le dévouement nécessaires.

Y. BAHAYOU

PRELIMINAIRE

la résolution de certains problèmes de recherche opérationnelle nécessite l'utilisation de la programmation linéaire en entiers. Le problème rencontré dans celle-ci est le nombre d'opérations nécessaires qui est grand à cause de la convergence très lente de la méthode. Un nombre de spécialistes s'est déjà penché sur ce problème qui n'a pas encore été résolu entièrement.

- L'objet principal de cette étude est une modeste contribution à l'accélération de la convergence dans la programmation linéaire en entiers.

On se propose de remplacer la matrice A du programme linéaire en entiers qui a la caractéristique de diverser dans la recherche de l'optimum en continus par une matrice C ayant - à part la première ligne et la première colonne - toutes les lignes et colonnes prérédondants et à partir de C obtenir une matrice D triangulée inférieurement ou supérieurement qui par son intermédiaire l'optimisation du second membre qui st la première colonne de C st accélérée et peut être obtenu en moins de n-1 transformations, n étant la dimension de A.

L'Etude général de ces configurations a d'autres applications notamment dans l'inversion de matrices pseudo-singulières où on a un problème de précisions : alors on inversera la matrice équivalente D qui gardera toute la précision souhaitée.

Dans cet ouvrage j'ai adopté le plan suivant:

- Chapitre
- Table de matière de ce chapitre.
- Préliminaire qui est aussi un résumé du chapitre ce qui permettra au lecteur non seulement de le préparer pour aborder le chapitre mais aussi de lui donner déjà tous le contenu condensé en quelques lignes pour avoir au moins un aperçu pour les lecteurs qui n'auront pas la possibilité de voir le chapitre en détail.
- à la fin du chapitre vous trouverez une conclusion qui est aussi une remarque générale sur le chapitre en signalant les parties qui doivent être vues avec attention particulière.

J'espère que ce petit travail suscitera la curiosité de plusieurs lecteurs pour le continuer et le compléter, en lui consacrant un peu plus de temps; si cet espoir est réalisé mon but cherché est atteint.

BAHAYOU. H. Yahia.

* NOTATION *

Tout les coefficients qui interviennent dans cette étude sont des entiers.

$INT(\alpha/\beta)$ est l'entier de α/β.

α_{ij} i indique la ligne et j la colonne où se situe α.

$i = 1, n$ i varie de la valeur 1 jusqu'à la valeur n

$+, -$ représentent respectivement des éléments strictement positifs et strictement négatifs.

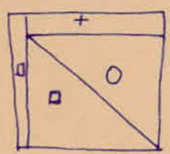
⊕ indique que la partie de la matrice a des coefficients positifs ou nuls $< |a_{jj}|$

□ La partie de la matrice a des coefficients entiers quelconques.

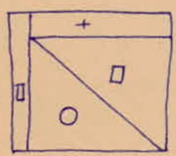
Δ La partie de la matrice a des coefficients réels quelconques.

O La partie de la matrice a des coefficients nuls

• représente un élément nul.



est dite matrice triangulée inférieurement.



est dite matrice triangulée supérieurement.

XAX Lorsqu'on fera une référence à une remarque ou propriété précédente le premier X est un chiffre indiquant le chapitre où elle se trouve.

CHAPITRE 1

PROPOSITION

PROPOSITION

FORMULATION DU PROBLEME

La matrice A

La matrice D

ETAPES DE LA TRANSFORMATION

Caractéristique

Organigramme.

THEOREME D'EXISTENCE

Lemme 1

Lemme 2

Théorème

CONCLUSION 1

*

* PROPOSITION *

Ayant une matrice A entière carré et régulière telle que pour tout $k = 1, n$ et $k' = 2, n$; $i = 2, n$ et $j = 2, n$.

ⓐ $a_{11} = 0$ $a_{1k'} \geq 0$

ⓑ $a_{k'j}$ pour j donné non tous ≥ 0
Pour tout $a_{k'1} \geq 0$

ⓒ $a_{ik'}$ pour i donné non tous ≤ 0
Pour tout $a_{k'1} \leq 0$

ⓓ $a_{ik'}$ pour i donné non tous ≥ 0

ⓔ Pour toutes colonnes j ($j \neq 1$) le premier élément non nul est positif.

L'Inverse de A = A^{-1} est telle que.
$a'_{11} < 0$ $a'_{1k'} \geq 0$ et $a'_{k'1} \geq 0$

On se propose d'obtenir une matrice D entière carré régulière triangulaire avec $a_{k'k'} < 0$ par 2 transformations matricielles telles que :
V = matrice entière carré, régulière et unimodulaire (son déterminant = 1)
U = matrice entière carrée et régulière.

$$\boxed{UAV = D}$$

I FORMULATION DU PROBLEME

I1 LA MATRICE A

I11 Définition :

Soit une matrice A carrée de dimension (n,n) entière et régulière ayant la première ligne $a_{1k} \geq 0$ pour tout $k = 1,n$ avec $a_{11} = 0$.

I12 Structure :

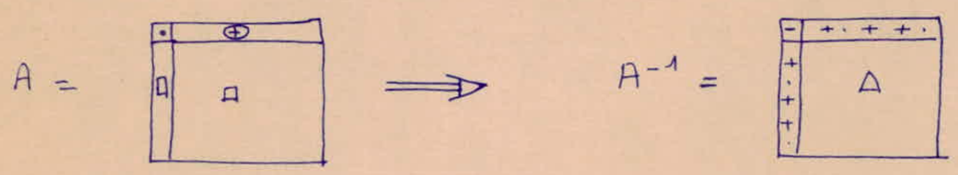
Toutes les colonnes j de A $(j = 2,n)$ sont Lexicographiquement positives c'est à dire que pour toute colonne j le premier coefficient a_{kj} pour $(k = 1,n)$ non nul est strictement positif. En effet une telle structure A existe car A est régulière : aucune colonne j n'a tous ses éléments nuls.

I13 Propriétés :

L'Inverse de $A = A^{-1}$ est une matrice carrée régulière continue et $A^{-1} = \{a'_{ij}\}$ pour $(j = 1,n$ et $i = 1,n)$ a la propriété suivante :

a) a'_{1k} et a'_{k1} pour $(k = 2,n)$ sont tous positifs ou nuls

b) a'_{11} négatif ou nul.



Entière Continue

Les colonnes de A ont les propriétés suivantes :

* CA : Pour toute colonne j $(j \neq 1)$ a_{kj} pour $k = 2,n$ non tous positifs ou nuls.

Les lignes de A ont les propriétés suivantes :

* L1A : Pour toute ligne i $(i \neq 1)$

Si $a_{i1} \geq 0$ a_{ik} $(k = 2, n)$ non tous négatifs ou nuls.

* L2A : Si $a_{i1} < 0$ a_{ik} $(k = 2, n)$ non tous positifs ou nuls.

REMARQUES

R1 : On définit les colonnes et les lignes de A qui perdent leur propriété CA et L1A comme rédondantes et la matrice A peut donc se réduire.

R2 : Si la matrice A perd sa propriété L2A on définit le problème comme vide de solution.

L'EXISTENCE DE TELLE MATRICE SERA DEMONTREE ULTERIEUREMENT.

I14 Hypothèse :

On admet que la matrice A est réduite à sa plus simple expression c'est à dire qu'au cours des transformations _ à définir ultérieurement _ garde ses propriétés CA et L1A. En réalité lorqu'on transforme A on est ramené des fois à réduire A jusqu'à ce que la réduction n'est plus possible. Pour simplifier le problème on admet cette hypothèse.

I2 LA MATRICE D

Ayant une matrice A ainsi définie on se propose d'obtenir à partir de celle-ci une matrice D entière carrée régulière ayant :

a) d_{jj} pour $j = 2, n$ strictement négatif.

b) $\{d_{ij}\}$ pour $(i = 2, n$ et $j = 2, n)$ triangulaire inférieurement ou supérieurement et après $(n-1)$ transformations au plus on a :

c) d_{k1} et $d_{1k} \geq 0$ pour tous $k = 2, n$

d) $d_{11} < 0$.

II LES ETAPES DE LA TRANSFORMATION

II 1 LES CARACTERISTIQUES

II 11 Définition

On se propose de transformer la matrice A pour obtenir une matrice C telle que toutes les transformations soient des matrices unimodulaires définies ultérieurement.

On se propose de transformer C par d'autres matrices et obtenir enfin la matrice D.

$$\boxed{UAV = U.C = D}$$

II 12 La matrice V

II 121 Propriétés :

La transformation V est le produit de plusieurs transformations qui ont toutes les propriétés suivantes :

a) ce sont toutes des matrices carrées entières régulières et unimodulaires - c'est à dire que leur déterminant est unitaire.

b) Ces matrices de transformation sont associatives.

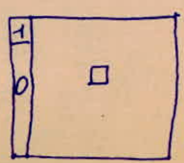
c) Elles ont la matrice unitaire comme élément neutre.

d) Elles sont inversibles (régulières), Leurs inverses sont aussi unimodulaires.

donc elles forment une structure de groupe pour la multiplication et la matrice V possède cette structure.

II 122 Structure :

La matrice V garde la première colonne de A intact elle a donc cette structure :



II 13 La matrice U

II 131 Propriétés :

C'est une matrice carrée entière régulière de dimension (n, n) généralement non unimodulaire :

U est l'union de U1 et U2

U a aussi la structure de groupe pour la multiplication.

II 132 Structure :

La matrice U ne transforme jamais la première ligne de la matrice C à l'exception de c_{11} dans une transformation particulière de la matrice D à définir ultérieurement. La matrice U ne transformant pas la première colonne de C a la structure suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \square \end{array}\right)$$

II 14 Conclusion

Pour obtenir la matrice C on se propose d'obtenir auparavant la matrice B par les transformations V1 puis V2 telle que :

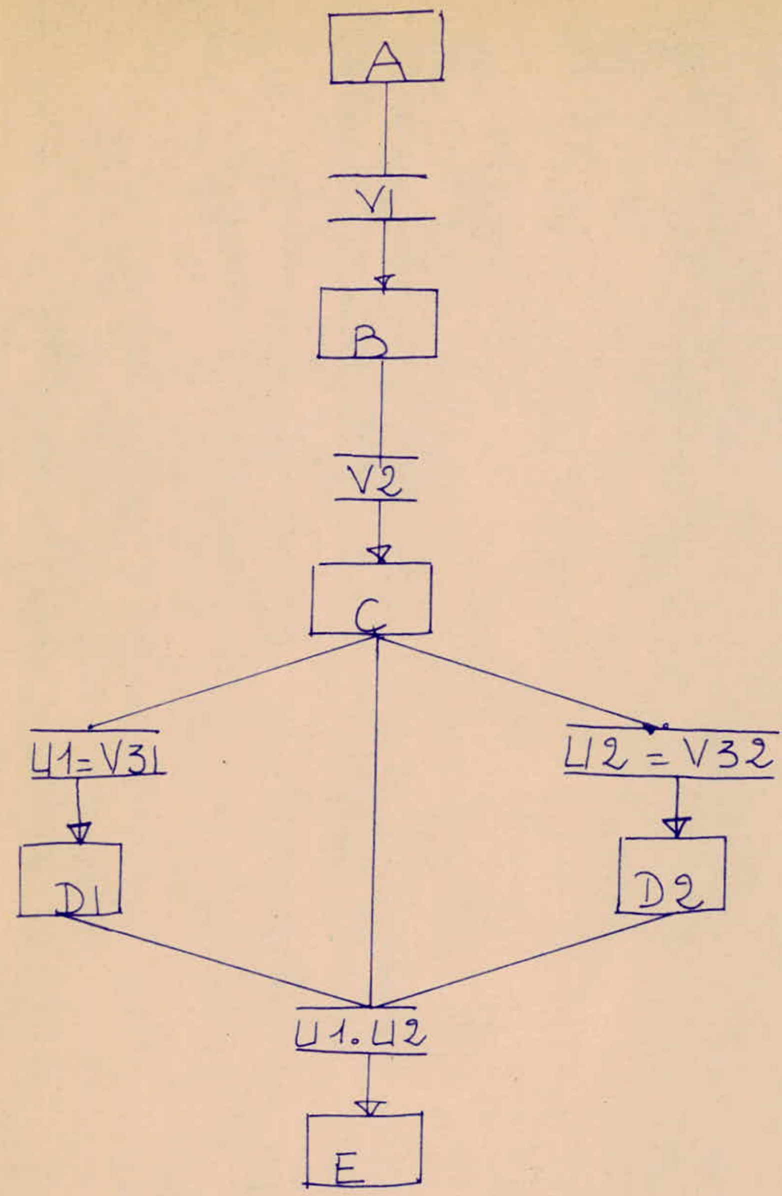
$$\boxed{AV1 = B \quad \text{et} \quad BV2 = C}$$

On définira aussi V1 comme le produit matriciel de V10, V11 et V12.

$$U1 = V31 \qquad U2 = V32$$

On définira enfin une transformation matricielle V'3 dans l'organigramme général.

II2 ORGANIGRAMME



Les matrices U et V sont des transformations.

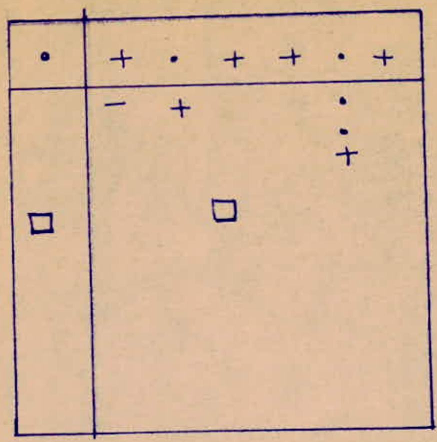
Les matrices B, C, D1, D2 et E sont les résultats successifs de la transformation de A

E est une matrice diagonale et présente la dernière étape de la transformation.

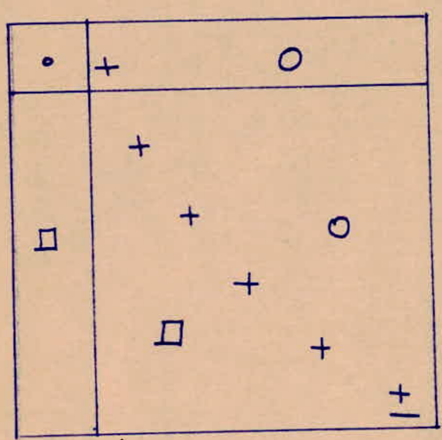
NOTA : On parlera indifféremment de transformation et de matrice U et V

MATRICES RESULTATS

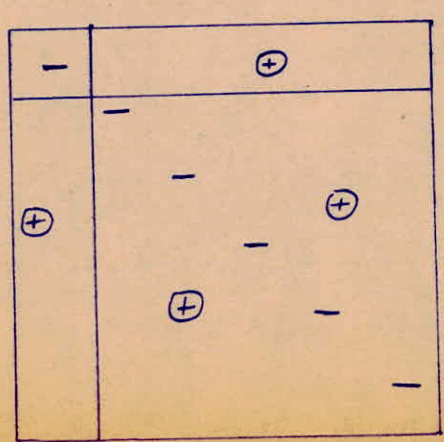
II21 la matrice A



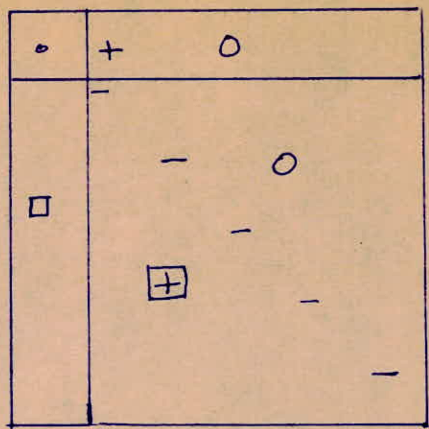
II 22 la matrice B



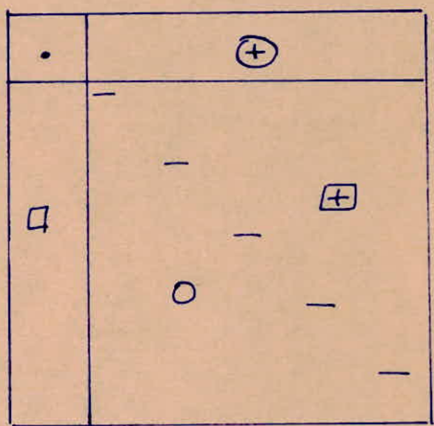
II23 La matrice C avec 1re colonne transformée.



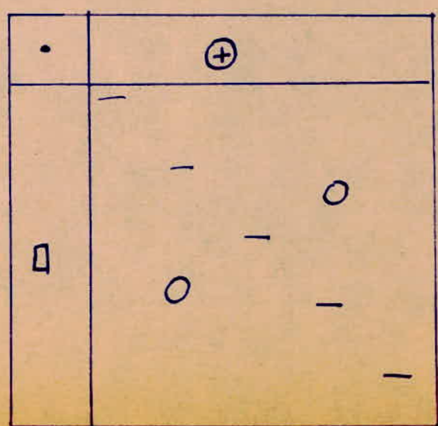
I24 LA Matrice D 1 :



I25 LA MATRICE D2 :



I26 LA Matrice E :



III THEOREME D'EXISTENCE

III 1 LEMME 1 :

Il éxiste toujours une transformation matricielle unimodulaire V1 qui appliquée à une matrice A donne une matrice B.

III 2 LEMME 2 :

Il existe toujours une transformation matricielle unimodulaire V2 qui appliqueé à une matrice B donne une matrice C.

III 3 THEOREME :

Il existe toujours une transformation matricielle généralement non unimodulaire U qui s'applique à la matrice C pour donner une matrice D.

autrement dit :

Pour toute matrice A il existe toujours deux transformations matricielles V et U telle que V est unimodulaire nous donne :

$$\boxed{UAV = D}$$

CONCLUSION 1

Pour simplifier l'étude théorique du problème on a admis l'hypothèse 1 I 14. En effet on ne dispose pas encore de moyens qui nous permettent de tester si une matrice A est réellement réduite à sa plus simple expression.
En pratique chaque fois que la matrice A perd sa propriété 1 CA ou 1 L 1 A on supprime la ou les colonnes et la ou les lignes correspondantes et on revient à l'inversion de A qui donnera lieu à une matrice A plus réduite et ainsi jusqu'à ce que la matrice A ne peut plus se réduire alors là A gardera ses propriétés 1CA et 1L1A durant toutes ses transformations.
La transformation de A en D se fait en 2 grandes étapes.

$$\boxed{UAV = UC = D}$$

*

CHAPITRE 2

TRANSFORMATION UNIMODULAIRE

TRANSFORMATION UNIMODULAIRE

* *

LA TRANSFORMATION UNIMODULAIRE

En effet cette transformation se subdivise en 2 transformations unimodulaires V1 et V2 qui donne lieu respectivement à la matrice B et C. telle que :

$$\boxed{AV1.V2 = BV2 = C}$$

la transformation V1 a son tour se subdivise en V10, V11 et V12.

<u>(V10)</u>$_i$ opère sur certaines colonnes de la ligne i et annule les éléments a_{ik} ($k = i+1, n$) à l'exception de $a_{ij_1} = \inf(a_{ik} \neq 0)$ et à l'avant dernière " transformation on obtient a_{ij_1} = P.G.C.D des ($a_{ik} \neq 0$) avec la formule de transformation suivante :

$$\boxed{a_{kj} = a_{kj} - \mathrm{INT}(a_{ij}/a_{ij_1}) * a_{kj_1}}$$

$$k = 1, n \qquad (j \neq j_1 \;;\; j = i+1, n)$$

<u>V11</u> restitue les signes des colonnes qui ont perdu leur positivité lexicographique en changeant tous les signes de la colonne j.

<u>V12</u> st une matrice de transposition qui amène le P.G.CD en position $a_{i\,i+1}$ pour $i = 1, n-1$.

et ainsi on obtient à partir de A la matrice B.

* *

La transformation V2 a pour rôle de remonter les négatifs à la position b_{kk} ($k = 2, n$) d'une part et d'autre part de réduire les positifs de part et d'autre de la diagonale par la formule de transformation suivante :

$$\boxed{b_{kj} = b_{kj} + \mathrm{INT}\left(b_{ij} / |b_{ii}|\right) * b_{ki}}$$

$k = 1, n \quad j = n, 1 \quad$ et $\quad b_{kj} \neq 0$

On obtient C telle que :

(a) $a_{kk} < 0 \quad k = 2, n$

(b) $0 \leq a_{ij} < |a_{ii}|$

$i = 2, n \quad$ et $\quad j = 2, n$.

En effet on obtient là une matrice C avec la première colonne non transformée.

* *

I L'INTERET DE CE TYPE DE TRANSFORMATION

R3 : Il est à préciser que toutes les transformations dans ce chapitre sont unimodulaires.

R4 : Soit l'application $y = Ax$ La transformation V correspond à un changement de variables tel que

$x = Vt$ $\quad$ $y = AVt$

V étant unimodulaire La transformation inverse :

$t = V^{-1}x$

conserve toutes les valeurs de x et par conséquent de y. $\quad y = AVV^{-1}x = Ax$

et on a déterminant $(A) = \text{dét}(A) \cdot \text{dét}(V)\, \text{dét}(V^{-1}) \cdot (-1)^k$

$\text{dét}\, V = \text{dét}(V^{-1}) = (-1)^k$ $\quad$ k entier.

II LEMME 1

II 1 PROPOSITION

On se propose d'obtenir à partir de A une matrice B et telle que : $\{b_{ij}\}$ pour ($i = 1, n-1$ et $j = 2, n$) soit triangulaire inférieurement avec $b_{kk} > 0$

II 2 DEMONSTRATION

D'une manière générale on peut toujours vider une ligne quelconque d'une matrice sauf un élément unique qui est égal au P.G.C.D. des éléments de la ligne considérée par la formule de transformation suivante :

$$\boxed{a_{kj} = a_{kj} - \text{INT}\left(\frac{a_{ij}}{a_{ij_1}}\right) * a_{kj_1}}$$

$a_{ij_1} \geq$ PGCD de $(a_{ij \neq 0})$

i est la ligne candidate $(k = 1, n)$ $j \neq j_1$

REMARQUES

R5 : Pour obtenir une telle ligne il faut généralement utiliser cette transformation plusieurs fois en prenant a_{ij_1} = le inf de a_{ij} pour tout $a_{ij} \neq 0$ à chaque nouvelle transformation jusqu'à obtenir avant la dernière transformation a_{ij_1} = P.G.C.D de a_{ij} donc le P.G.C.D de (a_{ij}) = inf des (a_{ij_1}).

R6 : Pour obtenir le P.G.C.D strictement positif il suffit d'avoir avant chaque transformation tous les éléments de la ligne positifs.

Pour cela il y a deux méthodes possibles :

* R61 : Après chaque transformation changer tous les signes des colonnes qui présentent un premier élément non nul strictement négatif.

** R62 : Pour que cette éventualité ne se présente pas on prendra chaque fois le P.G.C.D. Lexicographiquement positif.

LE P.G.C.D. POSITIF LEXICOGRAPHIQUEMENT.

En cas de plusieurs inf de (a_{ij}) il faut choisir celui qui conservera la positivité Lexicographique de la matrice et ceci est toujours possible.

Soient a_{ij_1} et a_{ij_2} égaux et inf de a_{ij} pour tout j

On testera $a_{i+1\,j_1}$ et $a_{i+1\,j_2}$

a) Si l'un deux seulement est strictement négatif on prendra comme colonne candidate la colonne correspondante à cet élément.

b) Si les deux sont strictement positifs on prendra la colonne candidate qui correspond au plus petit des deux.

c) Si les deux sont strictement négatifs la colonne candidate est celle de l'élément le plus petit c'est à dire le plus grand en valeur absolue.

d) Si l'un d'eux est nul la colonne candidate est celle de l'élément nul si l'autre est positif strictement, elle est celle de l'élément non nul si l'autre est strictement négatif

e) Si $a_{i+1 j_1} = a_{i+1 j_2}$ on teste $a_{i+2 j_1}$ et $a_{i+2 j_2}$

La matrice A étant régulière il y a toujours moyen de départager les ex-æquo.

En résumé si on a plusieurs éléments égaux au inf. de (a_{ij}) la colonne j_1 est celle qui possède un premier élément non égaux aux autres et inf. à tous ces autres.

J_1 est la colonne inférieure Lexicographiquement

R7 : Pour obtenir une série de P.G.C.D. sur une diagonale avec une triangularisation il faut et il suffit qu'après chaque transformation de ligne amener le P.G.C.D en position a_{ii} et transformer pour la ligne $i+1$ seulement les colonnes de $i+1$ à n sauf celle du P.G.C.D. une fois apparu après k transformations.

R8 : En fin de transformations on obtient a_{n-1n} strictement positif et a_{nn} strictement négatif par hypothèse 1I15.

CONVERGENCE

D'après ce qui précède le vecteur ligne $\vec{a} = \{a_{ik}\}$ pour tout $k = 2, n$ et $i = 1, n-1$ converge vers le vecteur Ligne $\vec{b} = \{b_{ik}\}$ telle que :

* $b_{ik} = 0$ pour $k > i$
* $b_{ii} > 0$

Cette convergence existe car $\{a_{ik}\}$ diminuent après chaque transformation tout en restant positif ou nul. pour la partie $\{a_{ik'}\}$ $k' > i$.

CONCLUSION

On remarque que chaque fois qu'un vecteur $\vec{a}_{ik}$ converge vers $\vec{b}_{ik}$ il fixe une composante pour tout le reste des vecteurs $\vec{a}_{ik}$ non encore transformés ainsi le dernier vecteur $\vec{a}_{n-2\,k}$ une fois transformé en $\vec{b}_{n-2\,k}$ par la transformation unique de sa dernière composante $\vec{a}_{n-2\,n}$ fixe la dernière composante du dernier vecteur $\vec{a}_{n1k}$ qui devient $\vec{b}_{n1k}$ ainsi que $\vec{a}_{nk}$

II 3 L'ETUDE DE LA TRANSFORMATION V1

II 31 Définition :

D'après L'étude précédente on remarque que la transformation V1 est le produit de 3 types de transformations :

* V10 qui annule certains coefficients de la ligne i et fait apparaitre leur P.G.C.D.
* V11 qui maintient la matrice à transformer lexicographiquement positive.
* V12 qui transpose les colonnes après la transformation de chaque ligne et amène le P.G.C.D. en position $b_{k\,k+1}$ dans la matrice $\{b_{ij}\}$ pour $(i = 1, n-1$ et $j = 2, n)$.

II311 L'Etude de la transformation V10 :

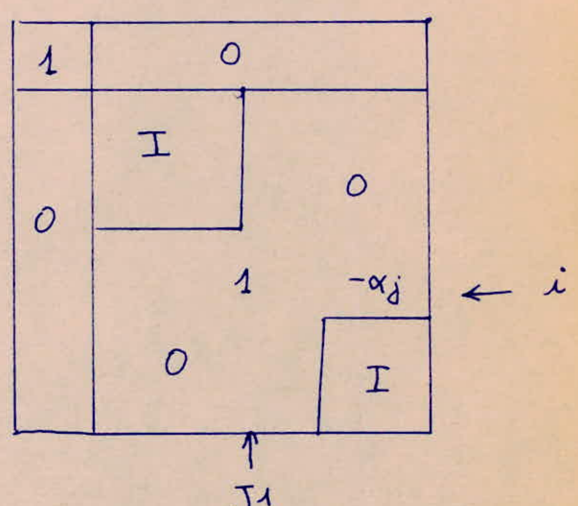
Définition :

On a vu que généralement on utilise plusieurs fois cette transformation car le inf de (a_{ij}) pour $j = i+1, n$ est généralement supérieur au PGCD de (a_{ij}) et ceci en changeant après chaque transformation j_1.

Structure :

V10 est le produit de matrices élémentaires transformant une seule colonne du type α.

$$\alpha(i, j, \alpha_j) \quad =$$



$$\alpha_j = \mathrm{INT}\left(\frac{a_{ij}}{a_{ij_1}}\right)$$

I = sous matrice unitaire

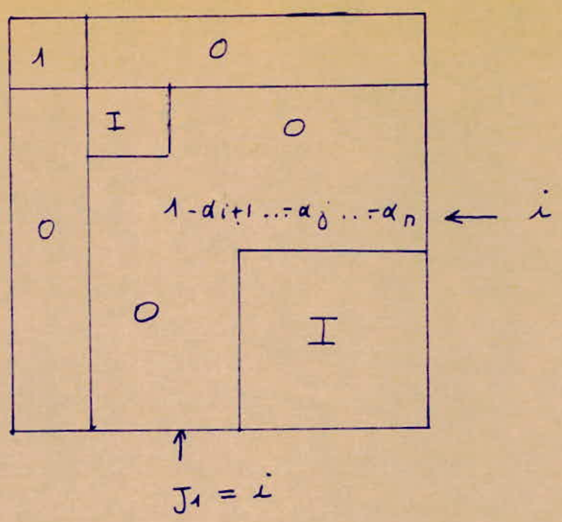
α_j est le nombre entier de fois qu'on pourrait retrancher la colonne candidate j_1 de la colonne j.

avec $j \neq j_1$ et $j = i+1, n$.

REMARQUES

<u>R9</u> : Si on ramène chaque fois par V12 la colonne candidate j_1 en position $i+1$ on obtient V10 de la structure suivante pour la transformation d'une

seule ligne :



R10 : La matrice V10 a la structure S suivante : La première ligne et la première colonne sont vides à part le premier élément qui est égal à l'unité.

Propriétés :

V10 possède les propriétés communes aux transformations unimodulaires. (2 I 121)

Formule de transformation :

$$\boxed{a_{kj} = a_{kj} - \mathrm{INT}\left(\frac{a_{ij}}{a_{ij_1}}\right) * a_{kj_1}}$$

Pour $k = 1, n$ et $(j \neq j_1 \; ; \; j = i+1, n)$.

i et j_1 respectivement ligne et colonne candidates.

II 312 Etude de la transformation V11

Définition :

Elle change les signes des colonnes qui ont perdues après une transformation leur positivité lexicographique.

Structure :

Elle possède la même structure S que V10

$$V11 = \left[\begin{array}{c|ccccc} 1 & & & 0 & & \\ \hline & \pm 1 & & & & \\ & & \pm 1 & & 0 & \\ 0 & & & \pm 1 & & \\ & & 0 & & \pm 1 & \\ & & & & & \pm 1 \end{array}\right]$$

Elle possède en outre la structure diagonale avec les coefficients unitaires affectés de signes $\pm$ à partir de la deuxième ligne.

Formule de transformation :

$$\boxed{a_{ij} = - a_{ij}}$$

pour $(i = 1,n$ et $j = 2,n)$.

II313 Etude de la transformation V12

Définition :

Elle a pour rôle de transposer les colonnes : c'est une matrice connue de transposition

Structure :

Elle possède aussi la structure S.

$$\begin{array}{cc} & V12 = \left[\begin{array}{c|cccccc} 1 & & & 0 & & & \\ \hline & 1 & & & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ 0 & & & \cdot & & 1 & \\ & & 0 & & 1 & & 0 \\ & & & 1 & & \cdot & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j_1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$j_2 \rightarrow$

On ramène par cette transformation élémentaire la colonne j_2 à la place de j_1 et vis-versa.
la matrice V12 est le produit matriciel de $(V12)_i$
Formule de transformation :

j_1 et j_2 colonnes à transposer, avec $k = 1,n$

$$\boxed{\begin{aligned} m_{kj_1} &= a_{kj_1} \\ a_{kj_1} &= a_{kj_2} \\ a_{kj_2} &= m_{kj_1} \end{aligned}}$$

II32 CONCLUSION

La matrice V1 a la structure S et les propriétés communes à V10, V11 et à V12
Pour transformer chaque ligne i on utilise $(V1)_i$

$$\boxed{(V1)_i = \prod_k (V10 . V11)_k . (V12)_i}$$

$(k-1)$ est le nombre de transformations qu'il a fal lu pour faire apparaître le P.G.C.D. des éléments à transformer de la ligne i

$$\boxed{V1 = \prod_{i=1}^{i=n-1} (V1)_i}$$

III LEMME 2

III1 PROPOSITION

On se propose d'obtenir par une transformation de B une matrice C telle que $|c_{ij}|$ $(i = 2,n \; ; \; j = 2,n)$ possède un seul moins par Ligne et par colonne sur la diagonale et tels que les co-

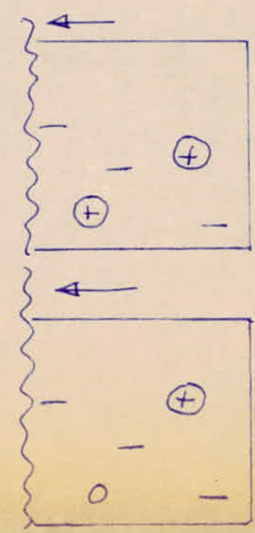
efficients positifs c_{ij} de $\{c_{ij}\}$ soient inférieurs à la valeur absolue de c_{ii} $(i = 2, n)$.
En dernier stade de C on transforme la première colonne de la même manière que les autres.

III 2 DEMONSTRATION

Pour constituer la matrice C on partira de la matrice élémentaire à un élément puis à (2, 2) et de proche en proche en réalisera C pour la dimension (n, n). On montrera que toutes ces sous-matrice (p, p) possèdent les mêmes structures et propriétés que $C(n, n)$. On raisonnera par récurrence.

REMARQUE

R11 : On pourra associer à chaque $\{c_{ij}\}$ trouvé un $\{d_{ij}\}$ correspondant et ainsi chaque transformation de colonne b_{kj} s'accompagne de la transformation de ligne c_{ik} par V3. On découvrira ainsi pas à pas et parallèlement la matrice C et D.
Sans l'intervention de la matrice D la matrice C risque d'être longue à obtenir.



III3 RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

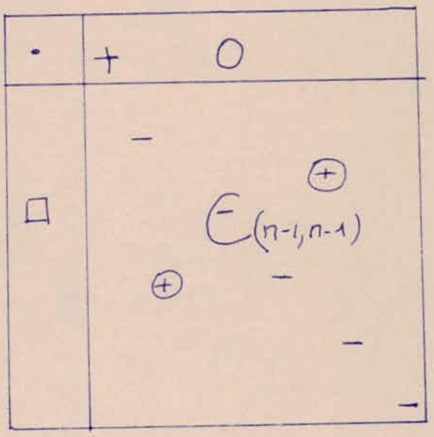
III31 HYPOTHESE

On suppose avoir obtenu la sous-matrice C de dimension $(n-1, n-1)$ avec : C_{ij} $(j \neq i,\ j = 1, n-1) \geq 0$ $C_{ii} < 0$ pour tout $i = 1, n-1$ et $C_{ij} < ABS(C_{ii})$

III32 PROPOSITION

On se propose d'obtenir la matrice C de dimension (n, n) à partir de la sous matrice $C(n-1, n-1)$

$B_n =$



Pour cela il faut transformer la colonne 1 telle que :

$C_{k1} \geq 0$ pour $(k = 2, n)$ $\quad C_{k1} < AB(C_{kk})$ et $C_{11} < 0$

III33 PROBLEME :

La transformation d'un élément C_{k1} $(k \neq 1)$ n'st pas unique à cause des éléments $C_{ij} > 0$ $(j \neq i)$ de la matrice, mais après avoir transformé <u>une fois</u> tous les éléments C_{k1} $(k \neq 1)$ <u>Les C_{k1} sont tous en valeur absolue inférieurs à la valeur absolue de C_{kk}</u> et ne peuvent en aucun cas dépasser cette valeur. donc pour rendre un C_{k1} $(k \neq 1)$ positif il suffit maintenant de retrancher une seule fois la colonne k de la première colonne : chaque fois que C_{k1} redevient négatif à cause d'une autre transformation.

III 34 CONVERGENCE

Il s'agit de savoir si C_{k1} finira par rester positif pour toute autre transformation de $C_{k'1}$ ($k' \neq k$)
Soit un élément C_{k1} après la première transformation de la colonne 1. C_{k1} devient négatif à la suite de la transformation de l'élément C_{i1}

III 35 DEMONSTRATION :

On pose $a = C_{k1}$ $\quad b = C_{ki}$ $\quad A = ABS(C_{KK})$

on a $0 \leq a < b < A$

le problème est d'obtenir après N transformations finies $a' \geq 0$ a' est le transformé de a.

les Formules de transformations sont les suivantes

(1) $CL_1 = CL_1 - CL_i$ pour transformer C_{i1}

(2) $CL_1 = CL_1 - CL_K$ pour rendre $C_{k1} > 0$

d'après (1) on a : $C_{k1} = a - b$

d'après (2) on a : $C_{k1} = a - b + A$

La transformation continue on a :

(1) $C_{k1} = a - 2b + A$

(2) $C_{k1} = a - 2b + 2A$

ainsi nous obtenons après N transformations d'après (1)

$$a' = a - (N+1)\,b + NA$$

Plaçons nous dans le cas le plus défavorable

$a = 0 \quad b = A - 1$ nous obtenons :

$$a' = -(N+1)(A-1) + NA = N - A + 1 \qquad a' = 0$$

donc à partir de ($\underline{N = A-1}$) a' est positif et reste positif.

III 36 CONCLUSION

donc pour atteindre l'équilibre il faut au maximum $A-1$ transformations. A est fini donc N est un nombre fini. LA CONVERGENCE MATHEMATIQUE EXISTE.

REMARQUES

R12 : Pour $n = 1$ la matrice C se réduit à un élément $b_{nn} < 0$. Pour $n = 2$ la sous-matrice C (1,1) représente toutes les caractéristiques pour transformer la colonne 1 de C(2,2) qui se réduit à l'élément $b_{n\,n-1}$ et de proche en proche on obtient $C(p-1, p-1)$ on en déduit $C(p,p)$ p variant de 2 jusqu'à n.

R13 On commence par réduire les positifs sous la diagonale et si la convergence s'avère très lente on réduira les positifs sur la diagonale et si on constate que les positifs sont moins nombreux d'un côté de la diagonale on commencera la première transformation des C_{k1} $(k \neq 1)$ par $k = n$ jusqu'à 2 ou par $k = 2$ jusqu'à n respectivement si le côté est sous ou sur la diagonale ceci est dû à une propriété qu'on verra dans le chapitre suivant

R14 : En pratique pour accélérer la convergence du premier vecteur colonne on associe la matrice D et on transforme la première colonne de D et de C par la même transformation. Voir l'organigramme général.

R15 : On remarque que la convergence est d'autant moins lente que la matrice C est près de la triangulation.

III 4 L'ETUDE DE LA TRANSFORMATION V2

III 41 Définition :

$$\boxed{BV2 = C}$$

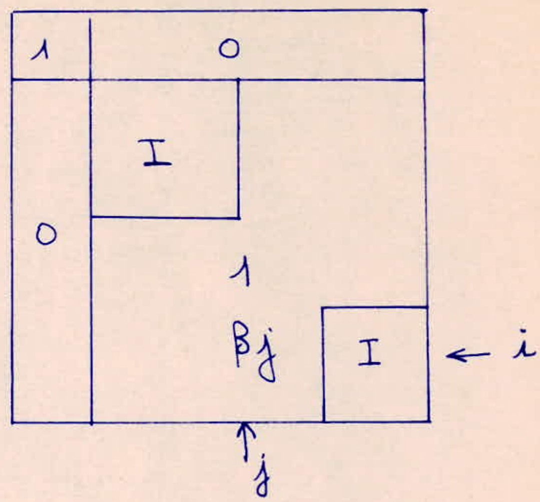
* V2 chasse les moins de b_{kj} vers l'élément b_{kk}
* V2 réduit les positifs obtenus des colonnes $(j = 1, n)$.

III 42 STRUCTURE

V2 possède la structure S pour $j \neq 1$ si $V2 = V21$

V2 est le produit de matrices élémentaires suivantes :

$\beta(i, j, \beta j)$



j est la colonne à transformer.

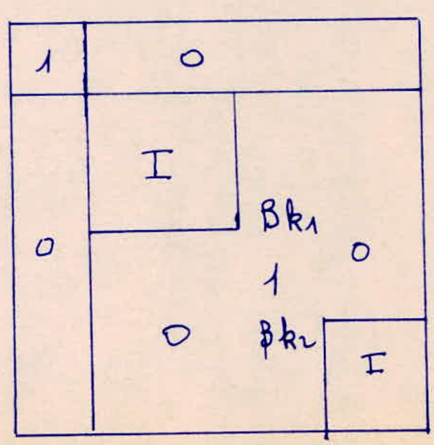
i est la ligne candidate de l'élément à transformer

$\beta j = \text{INT} \left(B(I,J) / \text{ABS}(B(I,I)) \right)$

βj est la quantité qu'on multiplie par les coefficients de la colonne i et qu'on ajoute aux coefficients correspondants de la colonne j.

Pour la transformation complète des éléments de la colonne j on a la structure suivante

$(V2)_j = \prod_k (\beta j)_k$



$k_1 = (1, j-1)$; $k_2 = (j+1, n)$

DONC ON a : $\boxed{V2 = \prod_{j=n}^{j=1} (V2)_j}$

III 43 FORMULE DE TRANSFORMATION

$$\boxed{B(K,J) = B(K,J) + INT\left(B(I,J)/ABS(B(I,I))\right) * B(K,I)}$$

$k = 1, n \quad j = n, 1 \quad b_{kj} \neq 0$

REMARQUE

R16 : On peut distinguer dans V2 deux sortes de transformations de même formule : V20 et V21.

a) la transformation V20 intéresse les éléments des colonnes sous la diagonale.

donc V20 a la structure triangulaire suivante.

$$V20 = \left[\begin{array}{c|ccccc} 1 & & & 0 & & \\ \hline & 1 & & & & \\ & & 1 & & 0 & \\ \beta_1 & & & 1 & & \\ & & \beta_{ij} & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array}\right]$$

V20 ne possède pas la structure S car on transforme aussi la première colonne en partant de $j = n-1$

b) La transformation V21 transforme les éléments des colonnes sur la diagonale pour $j = 3, n$ donc V21 possède la structure S et est triangulée supérieurement.

R17 : V21 ne peut avoir lieu qu'après les transformations V20 des colonnes $j = n-1, 1$.

V21 transforme uniquement des coefficients positifs en les réduisant.

IV L'ETUDE DE LA TRANSFORMATION V

IV 1 DEFINITION

V est le produit de matrices carrées entières régulières et unimodulaires de dimension (n, n) donc V est aussi une matrice carrée entière régulière et unimodulaire : $\text{dét } V = \text{dét}(V1)\,\text{dét}(V2) = (-1)^k$ avec k entier.

$$\boxed{V = \prod_i \left(\prod_k (V10 \,.\, V11)_k \,.\, V12 \right)_i \,.\, \prod_{j_1} \left(\prod_k (\beta 1)_k \right)_{j_1} \,.\, \prod_{j_2} \left(\prod_k (\beta 2)_k \right)_{j_2}}$$

$i = 1, n-1$; $k = 1, L$ (L entier variant mais fini)

$j_1 = n-1, 1$ $j_2 = 3, n$.

$\beta 1$ est la matrice élémentaire de V20.

$\beta 2$ est la matrice élémentaire de V21.

IV 2 STRUCTURE

La matrice V perd la structure S à cause de V20 mais possède une structure de groupe pour la multiplication.

CONCLUSION 2

Le problème de ce chapitre est la convergence du 1er membre d'une matrice C(p,p) qui reste lente à cause des plus de la matrice. La convergence est démontrée mathématiquement mais il suffit encore de trouver une méthode d'accélération de convergence et c'est dans ce but qu'on va introduire une transformation de C qui nous donnera une matrice équivalente D dont la convergence rapide va accélérer celle de la première colonne de C.

* *

CHAPITRE 3

TRANSFORMATION NON UNIMODULAIRE

TRANSFORMATION NON UNIMODULAIRE

THEOREME
Proposition
démonstration
Etude de la transformation V3.
CONCLUSION
Comparaison entre V31 et V32
ORGANIGRAMME GENERAL

$$A \xrightarrow{\mathcal{C}} B$$

$$B \xrightarrow{\mathcal{C}} C \xrightarrow{\mathcal{C}} D$$

CONCLUSION 3

* * *

LA TRANSFORMATION NON UNIMODULAIRE

Ayant obtenu la matrice C il nous est possible maintenant de la transformer en D par une prémultiplication matricielle U.
U est généralement non unimodulaire mais reste une matrice entière carrée et régulière.
U opère sur les lignes par la formule de transformation suivante :

$$\boxed{D(I,K) = 1/P_2 \left(C(I,K) * ABS(C(J,J)) + C(J,K) * C(I,J) \right)}$$

P_2 P.G.C.D de $C(I,J)$ et $ABS(C(J,J))$.
$K = 1, N$ $\quad I = 2, n$ et $J = 1, n$.

et annule les éléments positifs d'un côté de la diagonale par des combinaisons de lignes. Ces <u>combinaisons sont strictement positives</u>.

A la fin de ce chapitre vous trouverez un organigramme général qui trace toutes les étapes et opérations de la transformation de A en D.

* * *

I THEOREME

I1 PROPOSITION

On se propose d'obtenir à partir de la sous matrice C (p-1, p-1) avec une colonne et une ligne supplémentaire une matrice D(p,p) triangulée inférieurement ou supérieurement. (voir nota au début du chapitre 1.)

I2 DEMONSTRATION

On peut toujours par des transformations de lignes faire disparaître les positifs de C d'un côté de la diagonale et même des deux si on veut obtenir une matrice E (diagonale) mais la transformation d'une ligne de L éléments ne se fait pas généralement en L transformations mais en m. m entier fini supérieur ou égal à L.

REMARQUE

R 18 : Si on remarque que pour tout i $i = 2, n-1$ $b_{i\,i+1}$ sont les multiples de b_{ii} on peut transformer la matrice B par V20 puis triangulariser C inférieurement par U1 unimodulaire.

I3 ETUDE DE LA TRANSFORMATION V3

I31 DEFINITION :

$$\boxed{U = V3 = U(V31, V32) = U1\,U\,U2}$$

$\boxed{V3C = D}$

V3 triangularise C en D1 ou D2. On a vu que cette transformation peut se faire de proche en proche avec la transformation V2 :

$$* \quad V31C = D1 \quad *$$

$$* \quad V32C = D2 \quad *$$

V3 est le produit de transformations élémentaires qui annule chaque fois un élément positif de la colonne j par $c_{jj} < 0$

<u>REMARQUES</u>

*<u>R19</u> : Pour que la matrice D obtenu soit la plus proche possible de C on calcule pour chaque transformation élémentaire le P = P.P.C.M. de $|c_{jj}|$ et de c_{ij} élément à annuler. Ainsi les coefficients de la ligne i **varieront le moins** possible.

*<u>R20</u> : La transformation V32 commence par la ligne $3, n$ et V31 par la ligne $n-1, 2$.

*<u>R21</u> : $V31 . V32 . C = V32 . V31 . C = E$

*<u>R22</u> : Les transformations V3 sont toutes des pré-multiplications matricielles qui diminuent en général les c_{ii} en valeur absolue.

*<u>R23</u> : Pour que V3 soit unimodulaire il suffit que tous les $c_{ij} > 0$ $(j \neq i)$ à annuler soient des multiples respectives de c_{jj}.

*<u>R24</u> : Les transformations V31 et V32 ont les mêmes propriétés et structures.

*<u>R25</u> : les transformations V31 et V32 sont le produits de matrices élémentaires $\gamma(\gamma_i, \gamma_j)$.

I32 STRUCTURE DE U :

$$\gamma(\gamma_i, \gamma_j) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & 0 & \\ \hline & I & 0 & \\ 0 & & \gamma_i \quad \gamma_j & \leftarrow i \\ & 0 & I & \\ & & \uparrow j & \end{array}\right]$$

i est la ligne candidate de l'élément c_{ij} à transformer.

On multiplie les éléments de la ligne i par γ_i et on leur ajoute les éléments correspondants de la ligne j multipliés par γ_j. C_{ij} deviendra nul.

$$\gamma_i = \frac{P_i}{C_{ij}} \qquad C_{ij} > 0 \qquad P_i = \text{P.P.C.M de } C_{ij} \text{ et } |C_{jj}|$$

$$\gamma_j = \frac{P_i}{|C_{jj}|} \qquad C_{jj} < 0$$

II 33 LA MATRICE V31

La transformation V31 commence à la ligne $n-1$ et finit à la ligne 2.

$$V31 = U1 = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & & 0 & & \\ \hline & \gamma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & \gamma_i & \gamma_j & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & \gamma_{n-1} & \\ \hline & & 0 & & 1 \end{array}\right]$$

I34 LA MATRICE $V32 = U2$

La transformation V32 commence de la ligne 3 et finit à la ligne n.

Elle a la structure suivante :

$$V32 = U2 = \begin{array}{|cc|ccccc|} \hline 1 & \cdot & & & 0 & & \\ \cdot & 1 & & & & & \\ \hline & & \gamma_3 & & & & \\ & & & \ddots & \gamma_i & 0 & \\ & & \gamma_j & & & \ddots & \\ & & & & & & \gamma_n \\ \hline \end{array}$$

I4 CONCLUSION

La matrice γ possède la structure de groupe pour la multiplication donc U forme aussi cette structure.

$$\boxed{U = \prod_i \left(\prod_k (\gamma)_k \right)_i}$$

$k = M, 1$ M entier fini

* $i = n, 3$ pour U2
* $i = 2, n-1$ pour U1 car il s'agit de pré-multiplication.

REMARQUES

R26 : On remarque que le calcul du $P_1 = p.p.c.m$ entraine un calcul du $P_2 = p.g.c.d.$ car on a $P_1(a,b) = a \cdot b / P_2$ d'où la formule de transformation de V3 est :

$$\boxed{D(I,K) = 1/P_2 \left(C(I,K) * ABS(C(J,5)) + C(J,K) * C(I,J) \right)}$$

$K = 1, N$ $\quad P_2 = P_2\left(C(I,5), |C(J,J)| \right).$

I5 COMPARAISON ENTRE V31 et V32

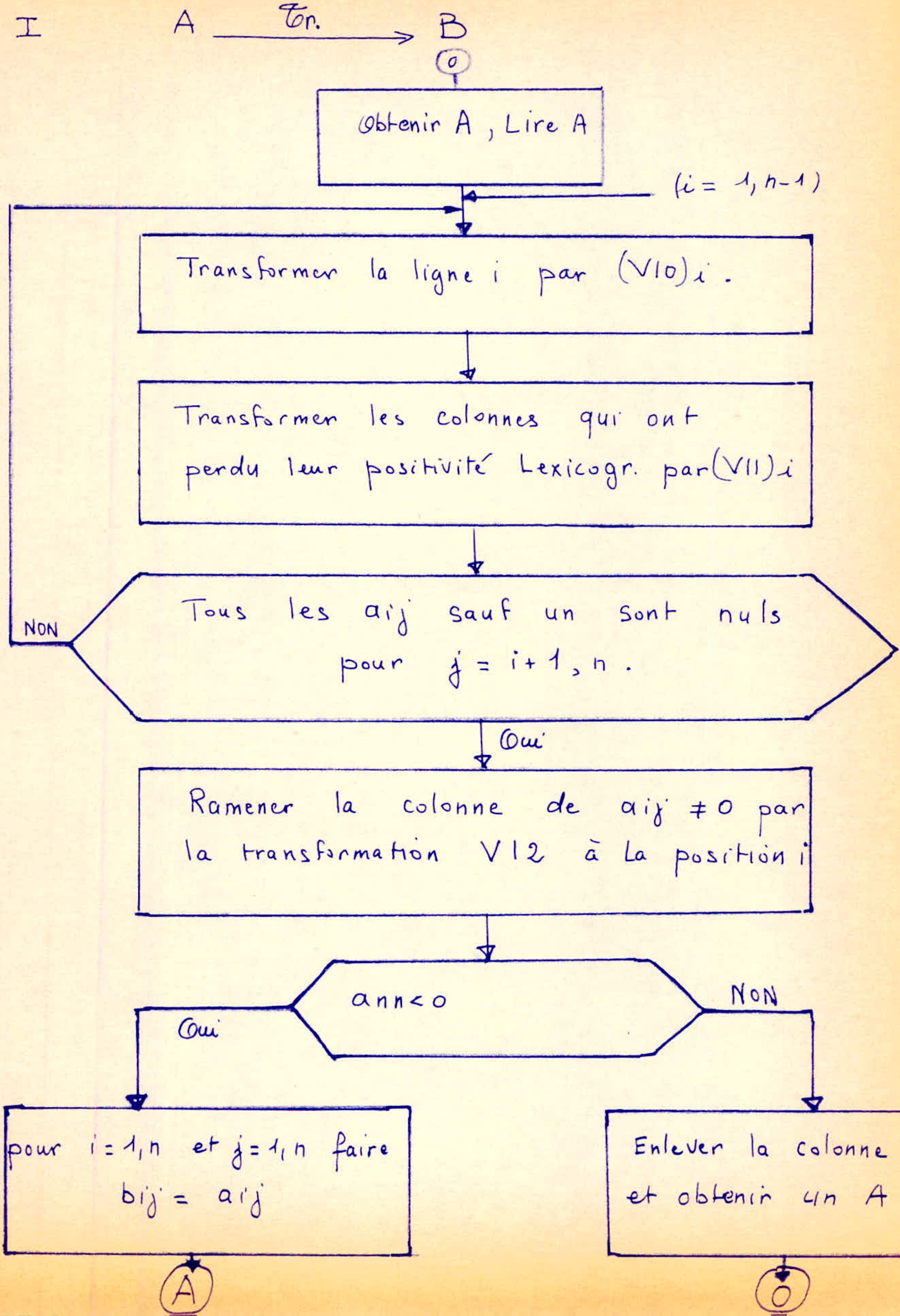
On a intérêt à minimiser le nombre de transformations pour obtenir D qui donnera lieu à C' car la convergence de Ck1 est d'autant meilleur (moins lente) que D est proche de C avant la transformation de sa première colonne.

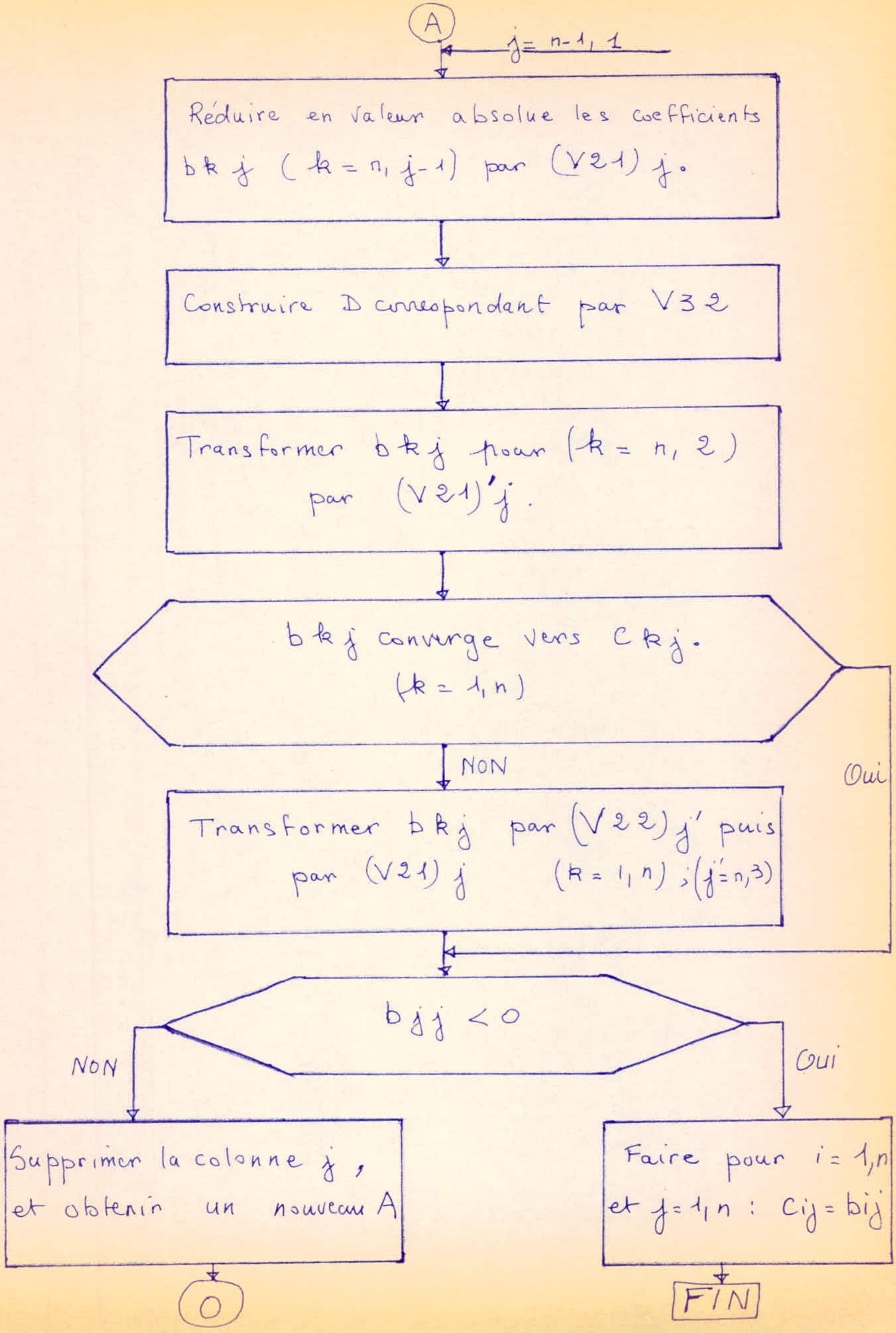
Donc on formera D1 ou D2 suivant le nombre de plus existants sur ou sous la diagonale sont moins nombreux et près de la diagonale.

Si on constate que l'obtention de D1 ou D2 nécessite à peu près le même nombre de transformations on optera pour celle qui donne lieu à plus de transformations unimodulaires si elles existent.

NOTA. C' est la matrice C ayant la colonne Ck1 non transformée.

ORGANIGRAMME GENERAL




A
j = n-1, 1
Réduire en valeur absolue les coefficients bkj (k = n, j-1) par (V21) j.
Construire D correspondant par V32
Transformer bkj pour (k = n, 2) par (V21)'j.
bkj converge vers Ckj. (k = 1, n)
NON
Oui
Transformer bkj par (V22) j' puis par (V21) j (k = 1, n) ; (j' = n, 3)
bjj < 0
NON
Oui
Supprimer la colonne j, et obtenir un nouveau A
Faire pour i = 1,n et j = 1,n : Cij = bij
O
FIN

CONCLUSION 3

En effet la matrice $C(n,n)$ est constituée de proche en proche de $p=2$ à $p=n$ et à chaque $C(p,p)$ on associe une matrice $D(p,p)$ et avec une matrice unimodulaire $V'2$ on transforme à la fois la première colonne de C et de D par la formule de transformation suivante :

$$\boxed{Ckj = bkj + V(I,J) * bki}$$

$i = n,1$ $\qquad\qquad$ $k = 1,n$

avec $V(I,J) = INT(dij / ABS(dii))$

Si après p-1 transformations la première colonne n'est pas telle que : $|Ckk| > Ck1 \geq 0$ $(k = 2,n)$

On retransforme C par $V2$ et ainsi on obtiendra obligatoirement la transformation voulue après M fini de transformations.

* * *

CHAPITRE 4

ORGANIGRAMME & APPLICATION

ORGANIGRAMME & APPLICATION

ORGANIGRAMME DETAILLE

PROGRAMMATION en FORTRAN IV

EXEMPLE D'APPLICATION

Vérifions que $AV1 = B$

Vérifions que $(V3)_5 . C_5 = D$

Vérifions que $C_5 V'2 = C$

CONCLUSION 4

* * *

*

ORGANIGRAMME α APPLICATION

L'organigramme (O)—(B) décrit la transformation V1 qui donne la matrice B.

(B)—(FIN) décrit les transformations parallèles de B et C qui donne C et D respectivement.

J'ai pris un exemple simple qui s'est réduit et m'a donné une matrice A(5, 5) à laquelle on peut associer un programme linéaire en entiers.

La transformation V'2 est la matrice suivante :

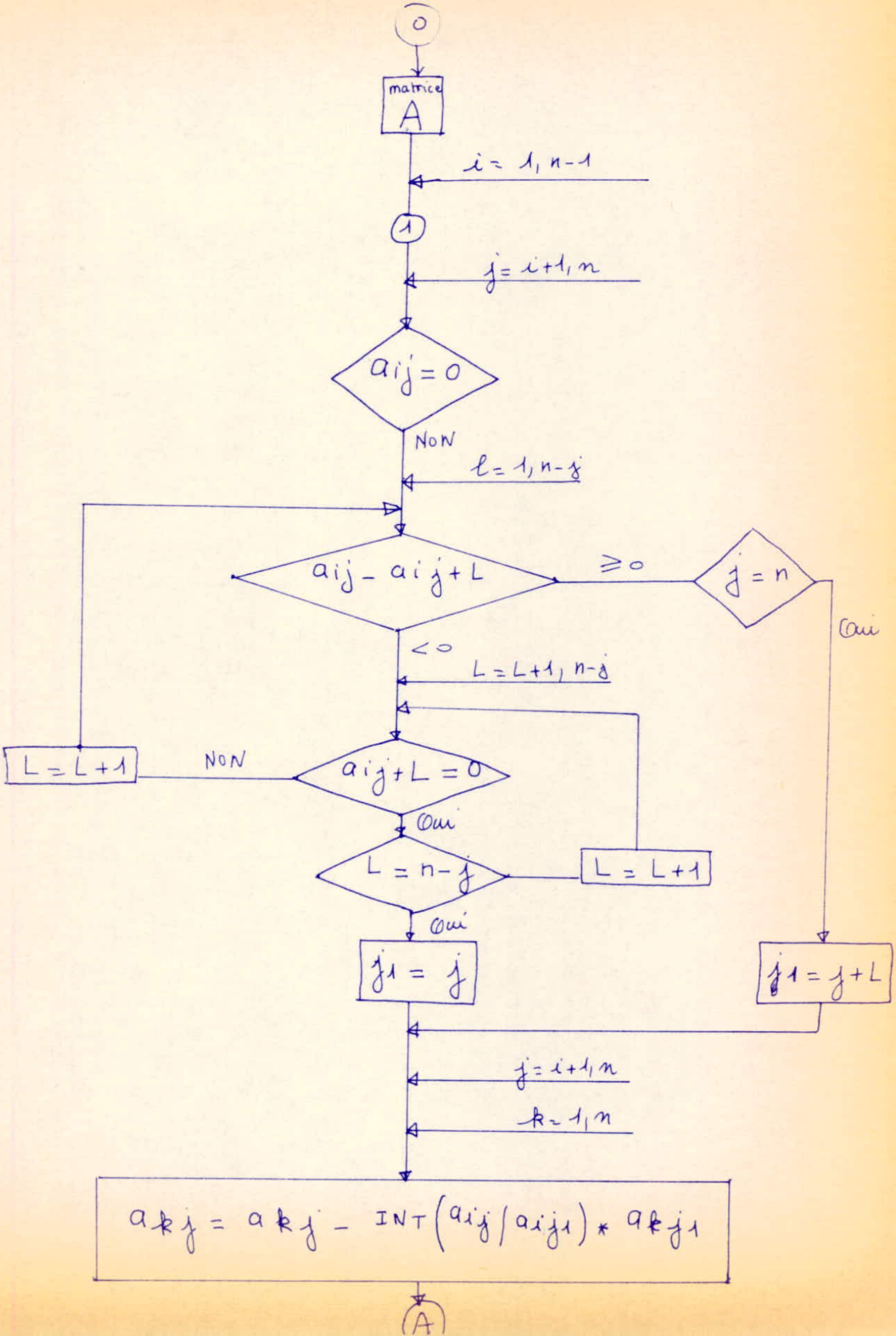
$$V'2 = \begin{matrix} 1 & & & & \\ -20 & 1 & & 0 & \\ -21 & & 1 & & \\ -24 & & & 1 & \\ -3 & 0 & & & 1 \end{matrix}$$

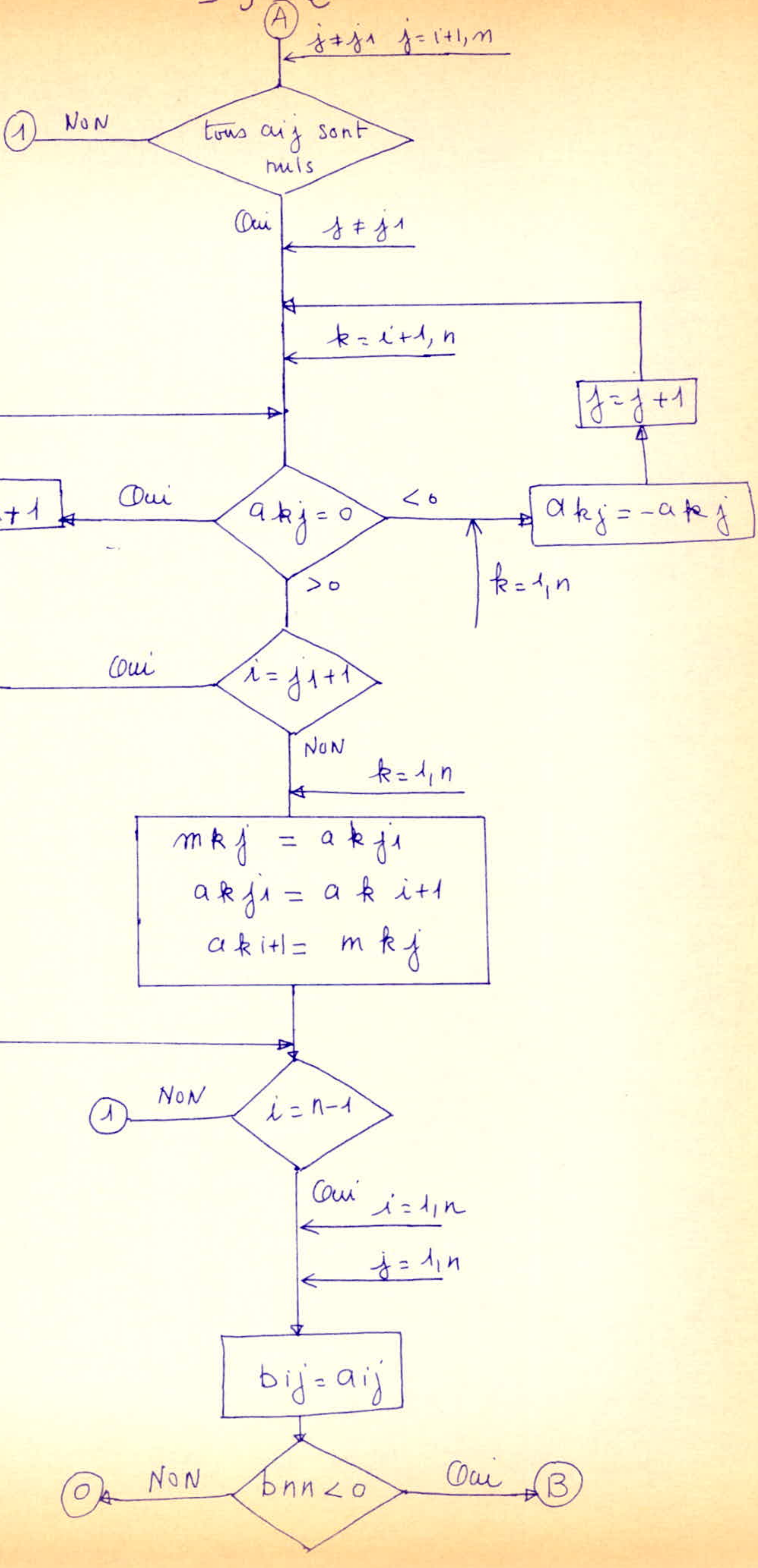
Elle a une seule colonne ($j=1$) ayant des coefficients négatifs a_{k1} $k = 2, 5$.

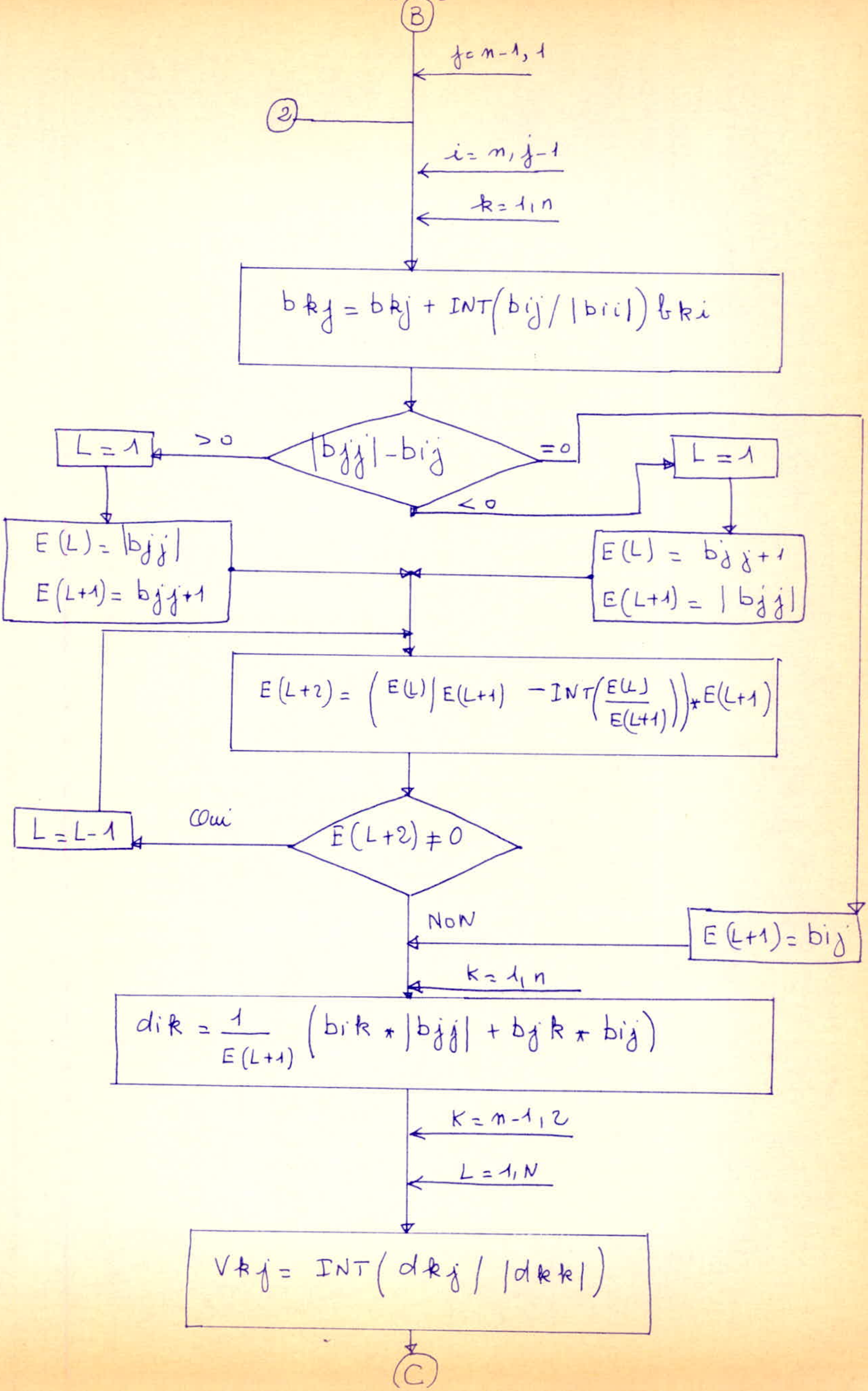
* * *

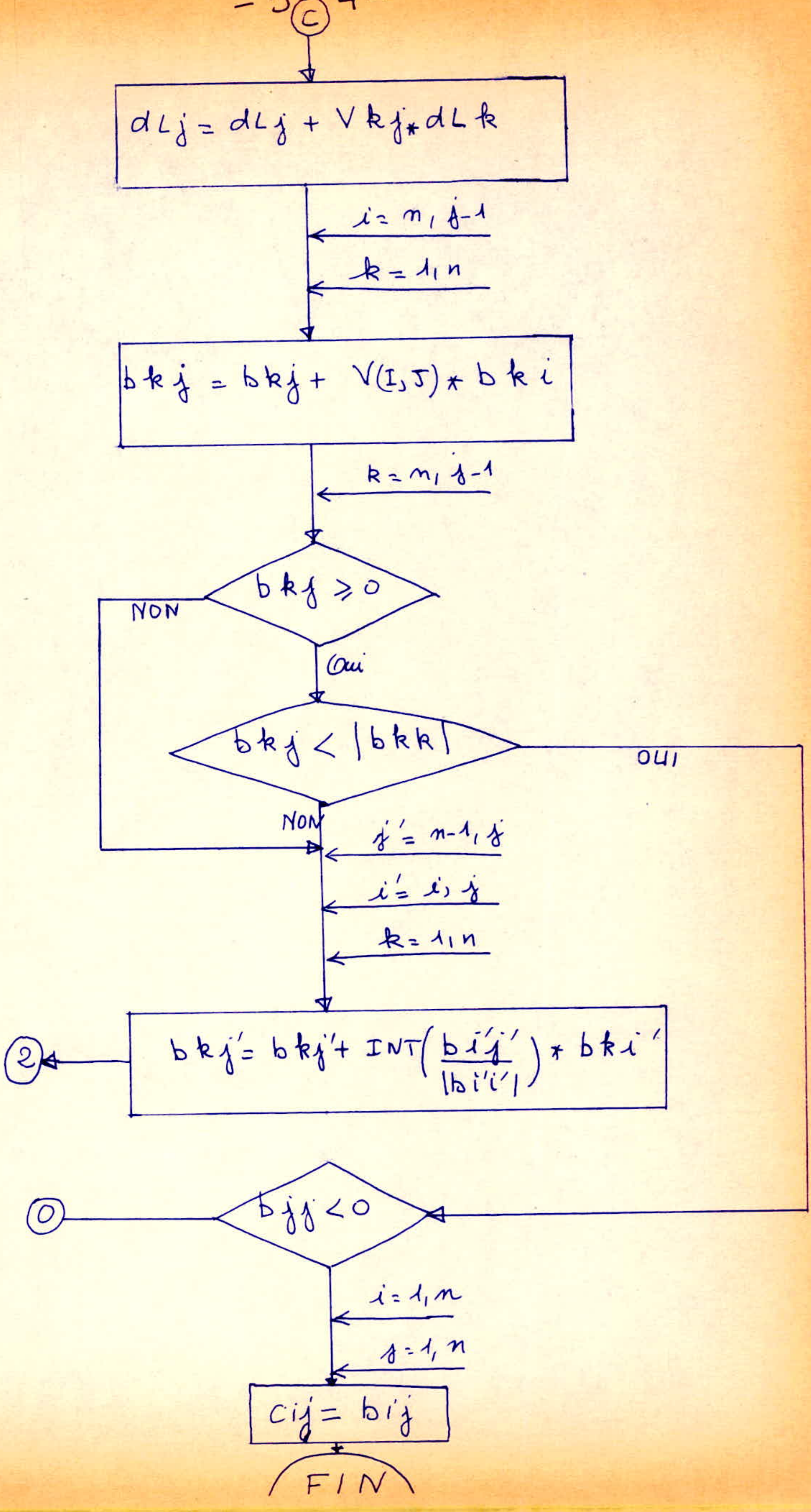
*

ORGANIGRAMME DETAILLE




A
$j \neq j_1$ $j = i+1, n$
1
NON
tous aij sont nuls
Oui
$j \neq j_1$
$k = i+1, n$
$j = j+1$
$k = k+1$
Oui
$akj = 0$
< 0
$akj = -akj$
> 0
$k = 1, n$
Oui
$i = j_1 + 1$
NON
$k = 1, n$
$mkj = akj_1$
$akj_1 = ak\,i+1$
$ak\,i+1 = mkj$
1
NON
$i = n-1$
Oui
$i = 1, n$
$j = 1, n$
$bij = aij$
0
NON
$bnn < 0$
Oui
B


B
j = n-1, 1
2
i = n, j-1
k = 1, n
bkj = bkj + INT(bij / |bii|) bki
|bjj| - bij
> 0
= 0
< 0
L = 1
L = 1
E(L) = |bjj|
E(L+1) = bjj+1
E(L) = bjj+1
E(L+1) = |bjj|
E(L+2) = (E(L) | E(L+1) - INT(E(L) / E(L+1))) * E(L+1)
L = L-1
Oui
E(L+2) ≠ 0
NON
E(L+1) = bij
k = 1, n
dik = 1 / E(L+1) (bik * |bjj| + bjk * bij)
K = n-1, 2
L = 1, N
Vkj = INT(dkj / |dkk|)
C


C
dLj = dLj + Vkj * dLk
i = n, j-1
k = 1, n
bkj = bkj + V(I, J) * bki
k = n, j-1
bkj ≥ 0
NON
Oui
bkj < |bkk|
OUI
NON
j' = n-1, j
i' = i, j
k = 1, n
bkj' = bkj' + INT(bi'j' / |bi'i'|) * bki'
2
0
bjj < 0
i = 1, n
j = 1, n
cij = bij
FIN

PROGRAMMATION 55 EN FORTRAN IV.

```
      DIMENSION  M(N,N)
      INTEGER A(N,N), B(N,N), C(N,N), D(N,N), E(M), V(N,N)
      READ (2,1) ((A(I,J), I = 1,N), J = 1,N).
      L = 0
      DO 2 I = 1, N-1
   22 DO 3 J = I+1, N
    6 IF (A(I,J)) 4, 3, 4
    3 CONTINUE
    4 L = L + 1
   14 IF (A(I,J) - A(I, J+L)) 7, 8, 8
    7 DO 9  LL = L+1, N-J
      IF (A(I, J+LL)) 10, 11, 10
   10 GO TO 4
   11 IF (LL-N+J) 9, 12, 12
    9 CONTINUE
   12  J1 = J
       GO TO 15
    8 IF (J-N) 5, 13, 13
    5 J = J+1
      GO TO 14
   13 J1 = J+L
   15 CONTINUE
      DO 16   J = I+1, N
      DO 16   K = 1, N
   16 A(K,J) = A(K,J) - INT(A(I,J)/A(I,J1)) * A(K,J1)
      DO 17   J = I+1, N
```

```
   IF (J-J1) 18,17,18
18 IF (A(I,J)) 21,20,21
21 GOTO 22
20 IF (J-N) 17,19,19
17 CONTINUE
19 DO 22 J= I+1, N
   DO 23 K= I+1, N
   IF (A(K,J)) 24,23,22
23 CONTINUE
24 DO 26 K = 1,N
26 A(K,J) = - A(K,J)
22 CONTINUE
   IF (I-J1+1) 25,27,25
25 DO 28 K = 1,N
   M(K,J) = A(K,J1)
   A(K,J1) = A(K,I+1)
28 A(K,I+1) = M(K,J)
27 IF (I-N+1) 2,30,30
2  CONTINUE
30 IF (A(N,N)) 31,32,32
31 DO 29 I = 1,N
   DO 29 J = 1,N
29 B(I,J) = A(I,J)
   J = N-1
57 I = N
46 DO 34 K = 1,N
34 B(K,J) = B(K,J) + INT (B(I,J)/ABS (B(I,I)))* B(K,I)
   L = 1
```

```
      IF (ABS(B(J,J)) - B(I,J)) 35, 36, 37
   35 E(L) = B(J, J+1)
      E(L+1) = ABS (B(J,J))
      GO TO 38
   37 E(L) = ABS(B(J,J))
      E(L+1) = B(J, J+1)
   38 E(L+2) = (E(L)/E(L+1) - INT(E(L)/E(L+1))) * E(L+1)
      IF (E(L+2)) 39, 40, 39
   39 L = L-1
      GOTO 38
   36 E(L+1) = B(I,J)
   40 DO 41 K = 1, N
   41 D(I,K) = (1/E(L+1))*(B(I,K) * ABS(B(J,J)) + B(J,K) * B(I,J))
      IF (I- J+1) 42, 42, 43
   43 I = I-1
      GOTO 46
   42 K = N-1
   68 DO 64 L = 1, N
      V(K,J) = INT(D(K,J)/ABS(D(K,K)))
   64 D(L,J) = D(L,J) + V(K,J) * D(L,K)
      IF (K-2) 65, 65, 67
   67 K = K-1
      GO TO 68
   65 CONTINUE
      I = N
   47 DO 44 K = 1, N
   44 B(K,J) = B(K,J) + V(I,J) * B(K,I)
      IF (I- J+1) 45, 45, 46
```

```
46 I=I-1
   GOTO47
45 K=N
63 IF (B(K,J)) 48, 49, 49
49 IF (B(K,J) - ABS (B(K,K))) 50,48,48
48 JJ = N-1
61 DO 51 II = I, JJ
   DO 51 K = 1, N
51 B(K,JJ) = B(K,JJ) + INT(B(I,JJ)/ABS(B(I,I)))*B(K,I)
   IF (JJ-J) 60, 60, 53
53 JJ = JJ-1
   GOTO 61
50 IF(K-J+1) 66, 66, 62
62 K = K-1
   GO TO 63
60 GOTO 57
66 IF(B(J,J)) 52, 32, 32
52 IF (J-1) 55, 55, 56
56 J = J-1
   GOTO 57
55 DO 58 I = 1, N
   DO 58 J = 1, N
58 C(I,J) = B(I,J)
   WRITE (3,59) C(1,1)
32 WRITE (3,33)
1  FORMAT (20X, 10I8)
33 FORMAT (20X, 'Changer A')
59 FORMAT (4X, I8)
   END
```

EXEMPLE D'APPLICATION

Nous partons de l'exemple suivant :

$$\vec{x} = M(-\vec{t})$$

$M = \{m_{ij}\}$ $i = 1, N$; $j = 1, MM$ $MM \geq N$

On par hypothèse $t_1 = -1$ et $x_1 = 1$

	$-t_1$	$-t_2$	$-t_3$	$-t_4$	$-t_5$	$-t_6$
x_1	.	1	1	2	.	1
x_2	1	1	-2	1	3	-1
x_3	-2	.	3	.	-2	.
x_4	3	.	2	-2	.	1
x_5	-4	1	-1	.	2	-1
x_6	-5	2	.	.	-2	.

Si on associe à M un programme linéaire dont la colonne t_1 est le second membre et la ligne x_1 est la fonction économique et si on résoud le problème en continue on obtient La base optimale x_2, x_4, x_5, x_6, t_2. d'où on constitue la matrice A suivante

$$A = \begin{array}{cccccc} . & 1 & 1 & 2 & . & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & . & 2 & -2 & . & 1 \\ -4 & 1 & -1 & . & 2 & -1 \\ -5 & 2 & . & . & -2 & . \\ . & -1 & . & . & . & . \end{array}$$

REMARQUE

Ra : On remarque que A n'est pas réduit à sa plus simple expression car la dernière ligne doit être supprimé ainsi que la colonne 2 ceci d'après les propriétés vues de A.

La matrice A deviend :

$$A = \begin{matrix} . & 1 & 2 & . & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & . & 1 \\ -4 & -1 & . & 2 & -1 \\ -5 & . & . & -2 & . \end{matrix}$$

On remarque que a_{12} = P.G.C.D de a_{1k} pour $k = 2,5$; donc on transformera la ligne 1 en une seule fois par $(V10)_1$.

$$(V10)_1 = \begin{matrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & -2 & . & -1 \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 \end{matrix}$$

* Ligne 1 :

La transformation de A par $(V10)_1$ nous donne A_1

$$A_1 = \begin{matrix} . & 1 & . & . & . \\ 1 & -2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & . & -1 \\ -4 & -1 & 2 & 2 & . \\ -5 & . & . & -2 & . \end{matrix}$$

REMARQUE

<u>Rb</u> : $(V1)_1 = (V10)_1$ La matrice V11 et V12 sont unitaires.

**<u>Ligne 2</u> :

a_{25} = PGCD a_2k $k = 3, 5$ donc la transformation $(V10)_2$ est unique. Mais après cette transformation il faut rétablir les signes de la troisième colonne par $(V11)_2$ et amener a_{25} en a_{22} par $(V12)_2$ d'où

$$(V1)_2 = (V10)_2 \cdot (V11)_2 \cdot (V12)_2$$

$$(V1)_2 = \begin{matrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & -1 \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & -3 & 5 \end{matrix}$$

La transformation de A_1 par $(V1)_2$ nous donne A_2 telle que $A1 \cdot (V1)_2 = A2$

$$A2 = \begin{matrix} . & 1 & . & . & . \\ 1 & -2 & 1 & . & . \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & . & 2 & -2 \\ -5 & . & . & -2 & . \end{matrix}$$

***<u>Ligne 3</u> :

a_{35} = PGCD de (a_{34}, a_{35}) donc la transforma-

Mion $(V10)_3$ est unique :

$$(V1)_3 = (V10)_3 \cdot (V12)_3$$

REMARQUES

Rc : La positivité lexicographique est conservée donc $(V11)_3 = I$.

Rd : $(V1)_3$ transforme A2 pour donner B

$$(V1)_3 = \begin{matrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & 1 & -3 \end{matrix}$$

La matrice V1

$$V1 = \begin{matrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & -1 & -3 & 12 \\ . & . & . & -1 & 3 \\ . & . & . & . & 1 \\ . & . & 1 & 5 & -18 \end{matrix}$$

I VERIFIONS QUE $AV1 = B$

$$AV1 = \begin{matrix} . & 1 & . & . & . \\ 1 & -2 & 1 & . & . \\ 3 & 2 & -1 & 1 & . \\ -4 & -1 & . & -2 & 8 \\ -5 & . & . & . & -2 \end{matrix} = B$$

On va obtenir C et D à partir de B suivant l'organigramme général.

REMARQUE

Re : La matrice B contient beaucoup de zéro et peu de négatifs, on a respectivement $(V_2)_1 = (V2)_2 = (V2)_3 = (V2)_4 = I$

$$* \quad C_1 = D_1 = -2$$

$$** \quad C_2 = D_2 = \begin{array}{cc} -2 & 8 \\ \cdot & -2 \end{array}$$

$$*** \quad C_3 = D_3 = \begin{array}{ccc} -1 & 1 & \cdot \\ \cdot & -2 & 8 \\ \cdot & \cdot & -2 \end{array}$$

$$**** \quad C_4 = D_4 = \begin{array}{cccc} -2 & 1 & \cdot & \cdot \\ 2 & -1 & 1 & \cdot \\ -1 & \cdot & -2 & 8 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -2 \end{array}$$

On transforme la première colonne de C_4 par $(V2)_5$

$$(V2)_5 = \begin{array}{ccccc} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{array}$$

On obtient après cette transformation C_4 avec la particularité d'avoir La première colonne transformée puis on découvre C_5.

$$C_5 = B(V2)_5$$

$$C_5 = \begin{matrix} . & 1 & . & . & . \\ 1 & -1 & 1 & . & . \\ 3 & . & -1 & 1 & . \\ -4 & 1 & . & -2 & 8 \\ -5 & . & . & . & -2 \end{matrix}$$

C_5 est différent de D_5 car l'élément de la quatrième Ligne et de la deuxième colonne est différent de zéro.
Pour obtenir D_5 on transforme C_5 par $(V3)_5$ en remarquant que $(V3)_1 = (V3)_2 = (V3)_3 = (V3)_4 = I$

$$(V3)_5 . C_5 = D_5$$

$$(V3)_5 = \begin{matrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & 1 & 1 & 1 & . \\ . & . & . & . & 1 \end{matrix}$$

Remarquons que $D_5 = D$

II <u>VERIFIONS QUE $(V3)_5 . C_5 = D$</u>

$$D = \begin{matrix} . & 1 & . & . & . \\ 1 & -1 & 1 & . & . \\ 3 & . & -1 & 1 & . \\ . & . & . & -1 & 8 \\ -5 & . & . & . & -2 \end{matrix}$$

REMARQUES

Rf : En effet C_5 est la matrice C ayant sa première colonne non transformée. Pour la transformer on utilise $V'2$ en premier lieu

Rg : La transformation $V'2$ est appliquée à la fois à la première colonne de D et C. Nous savons de ce qui précède que la transformation de la première colonne de D se fait au maximum en $n-1$ fois et après cette transformation on teste la première colonne de C si elle est transformée complètement. sinon on utilise $V2$.

$$V'2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -20 & 1 & & 0 & \\ -21 & & 1 & & \\ -24 & 0 & & 1 & \\ -3 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la première colonne sont déterminés par l'organigramme général par les transformations suivante

Pour $k = n-1, 2$ Faire :

Pour $L = 1, n$ Faire :

$$* \quad Vk1 = \mathrm{INT}\left(\frac{dk1}{|dkk|}\right)$$

$$* \quad dL1 = dL1 + Vk1 * dLk$$

La transformation $V'2$ est donc unimodulaire car $\det(V'2) = 1$.

Rh : En effet la transformation V'2 active la convergence de C.

III VERIFIONS QUE C_5 V'2 = C

$$C = \begin{matrix} -20 & 1 & . & . & . \\ . & -1 & 1 & . & . \\ . & . & -1 & 1 & . \\ . & 1 & . & -2 & 8 \\ 1 & . & . & . & -2 \end{matrix}$$

CONCLUSION

Ainsi on a obtenu par une simple transformation V'2 La matrice C transformé.

$C_{11} = -20$. Si on attache à la matrice M initiale un programme linéaire en entiers et si le problème ne présente pas de Finition d'ordre 2 C_{11} est l'optimum de la fonction économique.

REMARQUE

Ri : En effet on n'a pas été amené à réduire les coefficients $c_{i\,i+1}$ car la convergence n'a pas été très lente.

CONCLUSION 4

J'ai choisi la programmation en Fortran IV car elle répond assez bien au type de l'organigramme établi. Le Fortran IV est un langage assez répandu et connu du moins en Algérie.
Dans notre exemple on constate que plusieurs matrices VIJ sont unitaires car dans une matrice on n'a pas toujours à transformer toutes les colonnes et cela dépend des nombres de zéros de la matrice et d'autres facteurs plus ou moins faciles à déceler d'avance sur la matrice A du départ.
On ne peut pas conclure beaucoup sur la matrice A et ce n'est qu'au cours des transformations que nous pourrons constater ses propriétés.

* * *
*

CHAPITRE 5

AUTRES CONFIGURATIONS

AUTRES CONFIGURATIONS

* * *

*

*

AUTRES CONFIGURATIONS

Il st intéressant de diminuer le nombre d'étapes et de transformations si possible car les opérations sur un ordinateur risque d'être très coûteuses.
Il st intéressant de voir si on pourra obtenir une matrice D uniquement par des transformations unimodulaires. Cela pourra se faire en deux étapes

① obtenir une matrice F triangulaire avec $\underline{a_{kk} < 0}$ $(k = 2, n)$. Par la formule de transformations

$$\boxed{a_{kj} = a_{kj} - \mathrm{INT}(a_{ij}/a_{ij1}) * a_{kj1}}$$

$k = 1, n$ $i = 2, n$ et $j = i, n$

② transformer F par X pour obtenir D par la même formule de transformation que celle de V2
Notre contrainte st la conservation ou la possibilité de rendre tous les éléments de la première ligne (à l'exception du premier élément) ≥ 0.
Si les cas suivants se présentent l'obtention de F et de D par X reste impossible.

ⓐ Corollaire I

F ne peut être obtenu à partir de A dans le cas suivant :

(1) Le P.G.C.D. de $(a_{ij} \neq 0)$ pour $j = i+1, n$ est strictement positif ; soit a_{ij_1} = P.G.C.D.

(2) $a_{1j_1} = \inf (a_{1j} \neq 0)$ pour $j = i+1, n$.

(3) a_{ij_1} n'a pas d'ex-aequo.

Dans la destruction de F a_{ij_1} est astreint à rester > 0 et la transformation X ne pourra le changer.

(D) Corollaire II

Pour que X soit applicable à F il faut et il suffit que pour $a_{ij} < 0$ on a :

$$\boxed{a_{1j} \geq ABS(INT(a_{ij}/ABS(a_{ii})) * a_{1i})}$$

$j = i+1, n$.

NOTA :

Dans ce chapitre on parlera d'existence de F c'est à dire de possibilité d'obtenir F à partir de A et d'existence de X c'est à dire de possibilité d'appliquer X à F pour obtenir D.

* * *

*

*

I

PROPOSITION

On se propose dans certains cas qui seront définis par la suite de trianguler inférieurement ou supérieurement la matrice A par une matrice W unimodulaire qui donnera naissance à la matrice F1 ou F2. puis par une autre transformation X unimodulaire quand elle existe on obtient C telle que :

①	$AW = F1 \cup F2$
②	$FX = C = D$

$F = F1 \cup F2$

REMARQUE

r1 : W pourra diagonaliser complètement A ; dans ce cas $X = I$ et $C = D = E$.

II

COROLLAIRE I

F existe toujours sauf dans le cas particulier suivant :

① Le P.G.C.D. de (a_{ij}) pour $j = i+1, n$ est strictement positif. Soit a_{ij_1} = P.G.C.D.

② $a_{1j_1} = \inf(a_{1j})$ pour $j = i+1, n$.

③ a_{ij_1} n'a pas d'ex æquo.

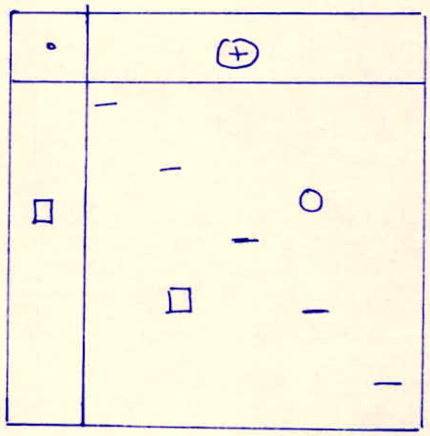
a_{ij_1} est astreint à rester positif et aucune transformation ne pourra le rendre négatif sans la destruction de la configuration de F.

I 1 DEMONSTRATION

La transformation W ne pourra rendre l'élément a_{ij_1} négatif sans rendre a_{1j_1} aussi négatif car toutes combinaisons de colonnes j ($j = i, n$) négatives nous donnent : $\left[a_{1j_1} = a_{1j_1} - a_{1j} * \alpha\right]$ a_{ij_1} négatif pour tout α entier positif.

A part ce cas particulier cité on obtient toujours F1 ou F2.

2 La matrice F1 :



I 3 LA TRANSFORMATION W

Faire pour $I = 2, n$.

Faire pour $j = i, j_1 - 1$ et $j = j_1 + 1, n$

Faire pour $k = 1, n$

$$\boxed{a_{kj} = a_{kj} - \mathrm{INT}\left(\frac{a_{ij}}{a_{ij_1}}\right) \times a_{kj_1}.}$$

pour $a_{ij_1} >$ PGCD. Soit W1 cette transformation.

rétablir les signes si nécessaire de certaines colonnes avec V11.

rechercher un nouveau $a_{ij_1} \neq 0$ et inf a_{ij} $j = i, n$.

Si a_{ij_1} = P.G.C.D. de a_{ij} $j = 1,n$ testa a_{ij_1}

Si $a_{ij_1} > 0$ rétablir son signe par :

ⓐ $\underline{V1}$ si $\underline{a_{ij_1} = 0}$.

ⓑ $\underline{W2}$ s'il existe un $a_{ij} < 0$ $j \neq j_1$ $j = 1,m$ avec La formule de transformation suivante :

$$\boxed{a_{kj_1} = a_{kj_1} + a_{kj}} \qquad \underline{|a_{ij}| > a_{ij_1}}.$$

ⓒ $\underline{W3}$ s'il n'existe pas de $a_{ij} < 0$, soit un $a_{ij_2} > 0$, telle que :

* $a_{ij_2} = \inf(a_{ij})$ $(j \neq j_1 \quad j = 1,n)$ donc :

$$\underline{\underline{a_{ij_1} - a_{ij_2} \geq 0}}$$

* la formule de transformation sera :

$$\boxed{a_{kj_1} = a_{kj_1} - a_{kj_2}} \qquad \underline{a_{ij_2} > a_{ij_1}}$$

REMARQUE

$\underline{r2}$: Si $|a_{ij}| = a_{ij_1}$ W1 aura comme formule :

$$\boxed{a_{kj_1} = a_{kj_1} + a_{kj} - 1}$$

$\underline{r3}$: Si $a_{ij_2} = a_{ij_1}$ La condition sur a_{ij_2} sera :

$$\underline{\underline{a_{ij_1} - a_{ij_2} - 1 \geq 0}}$$ et si cette relation n'est pas verifiée on choisira a_{ij_2} comme P.G.C.D.

et on procèdera de la manière suivante en changeant j_1 en j_2 et j_2 en j_1.

La formule de transformation dans ce cas sera:

$$\boxed{a_{kj_1} = a_{kj_1} - (a_{kj_2} + 1)}$$

On n'oublie pas de rétablir avec VII les signes des colonnes qui ont perdu leur J admissibilité ($a_{ij} < 0$).
et enfin de ramener par VI2 l'élément a_{ij_1} = PGCD en a_{ii}.

-II

COROLLAIRE II

III 1 ENNONCE 1 :

1 Pour que la transformation X existe il suffit que tout $a_{ij} < 0$ candidat à la transformation soit multiple de a_{ii}.

ENNONCE 2

2 Pour que la transformation X existe il faut et il suffit que pour $a_{ij} < 0$, et a_{ij} transformé $\neq 0$:

$$a_{1j} \geq ABS(INT(a_{ij} / ABS(a_{ii})) * a_{1i})$$

III 2 DEMONSTRATION 1

1: En cas où la transformation de a_{ij} rend a_{1j} négatif pour qu'on puisse le rendre positif par VII il suffit que tous les a_{kj} $(k \neq j)$ soient nuls ou multiple de a_{ii}

REMARQUE

r4 : le nombre de transformations de VII pour une colonne quelconque est pair car cette colonne n'est pas rédondante : A est réduit à sa plus simple expression.

DEMONSTRATION 2

2 : La transformation X est identique à la transformation V2 déjà étudiée et a pour formule de transformation :

$$\boxed{a_{kj} = a_{kj} + INT(a_{ij} / ABS(a_{ii})) * a_{ki}}$$

Pour $k = 1$ on a pour $a_{ij} < 0$:

$$a_{1j} = a_{1j} - ABS(INT(a_{ij} / ABS(a_{ii}) * a_{1i})$$

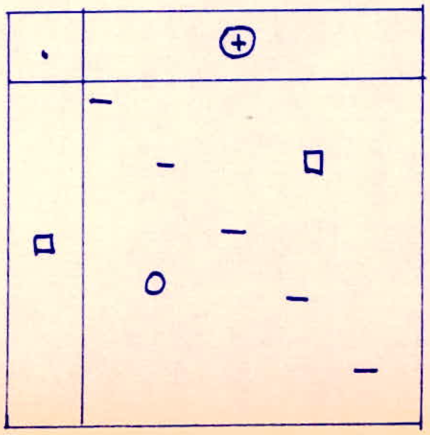
$a_{1j} \geq 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour l'existance de X car si on a $a_{1j} < 0$ VII transforme la colonne j et rend a_{ij} négatif précédemment transformé si a_{ij} transformé est $\neq 0$.

II 3 CONCLUSION

DE LA MEME MANIERE on peut obtenir F2.
La transformation W est la même mais on commence par la dernière ligne.

LA MATRICE F2 :

F2 =



REMARQUES

r5 : chaque fois qu'on annule a_{ij} on peut changer indifféremment les signes de la colonne si nécessaire.

r6 : UNE fois C obtenu on peut transformer la première colonne comme aux chapitres précédents.

r7 : La transformation W est le produit de plusieurs transformations W_1, W_2, W_3, V11 et V12. et X = V2.

IV CAS POSSIBLES

IV 1 F EXISTE

Dans ce cas il y a trois cas possibles :

A/ DIAGONALISATION

C'est certes le cas le plus rare et aussi le plus intéressant. Après l'obtention de F on remarque que le P.G.C.D. de $a_{ij} = a_{ii}$ pour $i = 3$ et $j = 2, 3$ dans le cas de F1 et pour $i = n-1$ et $j = n-1, n$ dans le cas de F2 et après la transformation de la ligne on remarque la même chose pour la suivante ; respectivement dans F1 et F2 $j = 2, i$ et $j = i, n$.

On peut aussi procéder directement si on a intérêt par l'algorithme suivant qui est un parmi d'autres

① $i = n$

② Pour $j = 2, i$ soit $|a_{ij_1}| = \inf |a_{ij}|$ pour $a_{ij} \neq 0$

③ $|a_{ij}| - |a_{ij_1}| < 0$ Si Oui la diagonalisation impossible pour $j = i+1, n$ Si NON $\Rightarrow$ ④

(4) $a_{kj} = a_{kj} - INT\left(\frac{a_{ij}}{a_{ij1}}\right) a_{kj1}$.

pour $k = 1, m$.

$a_{1j} \geq 0 \Rightarrow$ (5)

$a_{1j} < 0$ faire $a_{kj} = -a_{kj}$ $(k = 1, m)$

(5) Soit p = PGCD de a_{ij} $j = 2, n$. $a_{ij} \neq 0$

Si $a_{ij1} = p \Rightarrow$ (6)

Sinon $\Rightarrow$ (2)

(6) reporter a_{ij1} en position a_{ii}.

B1 EXEMPLE D'APPLICATION

$$\boxed{AY = E}$$

Y est une transformation matricielle unimodulaire.

On reprend l'exemple déjà traité dans les transformations U et V.

$$A = \begin{matrix} . & 1 & 2 & . & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & . & 1 \\ -4 & -1 & . & 2 & -1 \\ -5 & . & . & -2 & . \end{matrix}$$

$$Y = \begin{matrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 2 & 1 & -1 & 4 \\ . & 1 & 1 & . & 3 \\ . & . & . & . & 1 \\ . & -2 & -1 & 2 & -2 \end{matrix}$$

$$AY = \begin{array}{ccccc} . & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & \boxed{-1} & . & . & . \\ 3 & . & \boxed{-1} & . & . \\ -4 & . & . & \boxed{-1} & . \\ -5 & . & . & . & \boxed{-2} \end{array} = E$$

Il nous reste à transformer la première colonne ce qui est très Facile. Soit θ cette transformation on a :

$$\theta = \begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & 0 & \\ 3 & & 1 & & \\ -4 & 0 & & 1 & \\ -3 & & & & 1 \end{array}$$

θ est unimodulaire

C1 <u>VERIFICATION</u>

Vérifions la valeur de C_{11}

$$E.\theta = \begin{array}{ccccc} -20 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ . & -1 & . & . & . \\ . & . & -1 & . & . \\ . & . & . & -1 & . \\ 1 & . & . & . & -2 \end{array}$$

$C_{11} = -20$

<u>REMARQUE</u>

<u>r8</u> : il est important de souligner que pour toute transformation unimodulaire de la matrice $\{a_{ij}\}$ $i = 2, n$ et $j = 2, n$ la colonne $j = 1$ en fin d'opération

se transforme de la même manière et on obtient un vecteur colonne unique.

dans notre exemple ce vecteur est

$$^{t}V = (-20, 0, 0, 0, 1)$$

A2 TRIANGULARISATION 1

On a vu si F existe la matrice A se triangularise par une transformation matricielle unimodulaire W telle que : $AW = F$ $\quad F = F1$ ou $F2$

et si X n'existe pas il nous est impossible d'obtenir D par une postmultiplication matricielle unimodulaire on revient donc à la méthode générale.

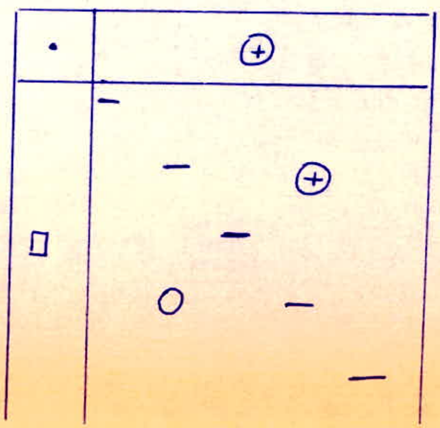
A3 TRIANGULARISATION 2.

C'est le cas où F et X existent c'est le cas recherché et suffisant pour la résolution de certains problèmes de programmation linéaire.

On transforme A par W.X pour obtenir C = D avec W.X = matrice unimodulaire telle que :

$$\boxed{A.W.X = F.X = C = D}$$

F2.X =



IV2 F n'Existe Pas.

Dans ce cas là on obtient toujours une triangulation supérieure ou inférieure avec les éléments de la diagonale strictement positifs ou strictement négatifs soient H ces matrices. H trouveront une application dans l'inversion de matrices pseudo-singulière.

V PERSPECTIVES DE CETTE ETUDE

Il est très intéressant de voir si par un moyen ou un autre on arrive toujours au moins à la triangularisation de A par des transformations unimodulaires et ceci

① en voyant si toute matrice A triangularisable par V est aussi triangularisable par W. X

② si F réellement existe dans tous les cas et si le cas particulier qu'on avait vu n'est qu'une rédondance cachée dans ce cas réduit A.

On pourra intituler la suite de cette étude comme suit: L'Etude de la triangularisation de certaines matrices carrées entières et régulières par des transformations unimodulaires.

*   *   *

*   *

CONCLUSION 5

Il s'agit de savoir si on peut éviter le cas où F n'existe pas : si un a_{ii} $(i = 2, n) > 0$ qu'on ne peut rendre négatif n'est pas ou ne peut pas être une colonne supplémentaire pour A qu'on pourra supprimer. En effet on remarque maintenant l'utilité de passer par une matrice B dont les colonnes sont lexicographiquement positives et les éléments a_{ik} (pour $k = i+2, n$) <u>nuls</u> pour $(i = 1, n-1)$ et ainsi l'application de V2 est toujours possible ce qui n'est pas le cas de X pour F.

Si on veut inverser une matrice A pseudo-singulière il est toujours possible d'obtenir par une transformation W' unimodulaire une matrice F' équivalente à A dont la diagonale a des entiers quelconques non nuls. On pourra inverser F à la place de A.

W' a la même formule de transformation que W.

*   *

*

*

*

CONCLUSION GENERALE

L'essentiel de cette étude se trouve au chapitre 2 car le problème qui a donné naissance à cette étude est la transformation de la 1re colonne de la matrice C pour avoir (pour tout $k = 2, n$)

$$0 \leq C_{k1} < |C_{kk}|$$

Nous avons vu que ce problème se pose pour toutes les colonnes de B de $n-1$ jusqu'à 1 et pour chaque colonne p on lui associe une $C(p-1, p-1)$ et une $D(p,p)$ et de proche en proche on transforme la colonne 1.

Il faut bien remarquer qu'on a tenté de résoudre la moitié du problème des programmes linéaires en entiers car on a une autre matrice ($X_I^{*\prime}$) du P.L.E.tangent qui donne bien des fois à des finitions d'ordre II.

*

FIN

BIBLIOGRAPHIE

Le cours de recherche opérationnelle de Mr Aït Ouyahia Mohand à L'E.N.P.A

Sujet proposé Fin Février 1971

Soutenu Fin Juin 1971

* * * * *

* * *

*