2/70

UNIVERSITE D'ALGER
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

1-Eco

DÉPARTEMENT ÉCONOMIE

THESE DE FIN D'ETUDES

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE CERTAINES STRUCTURES DE MATRICES CARREES REGULIERES ET CREUSES

SUJET

PROPOSÉ PAR :
Mr AIT OUYAHIA M.

ET

TRAITÉ PAR :
HIDOUS H.

ANNÉE SCOLAIRE 1969-70

UNIVERSITE D'ALGER
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT ECONOMIE

THESE DE FIN D'ETUDES

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE CERTAINES STRUCTURES DE MATRICES CARREES REGULIERES ET CREUSES

SUJET

PROPOSÉ PAR :
Mr. AIT OUYAHIA.M.

ET

TRAITÉ PAR :
HIDOUS.H.

ANNEE SCOLAIRE 1969-70

Avant-propos.

Que tous les professeurs ayant contribué à ma formation, trouvent ici, l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je tiens, plus particulièrement à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur AIT-OUYAHIA M., chargé du cours de recherche opérationnelle à l'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE, pour avoir bien voulu diriger ce travail, et ce, avec beaucoup de patience et de dévouement.

HIDOUS H.

I LES STRUCTURES.

1. Introduction:

Les problèmes de programmation linéaire sont formulés et traités à partir de matrices, lesquelles, en pratique, sont creuses. On a généralement une densité moyenne de 4 à 5% d'éléments non nuls.

On définit la densité par le rapport suivant:

$$d = \frac{\text{nombre d'éléments non nuls}}{\text{nombre total d'éléments}}$$

Certaines opérations sur ces matrices, comme la réinversion, sont grandement facilitées, si on en évidence la structure existante, et ce, par un réarrangement des lignes et des colonnes.

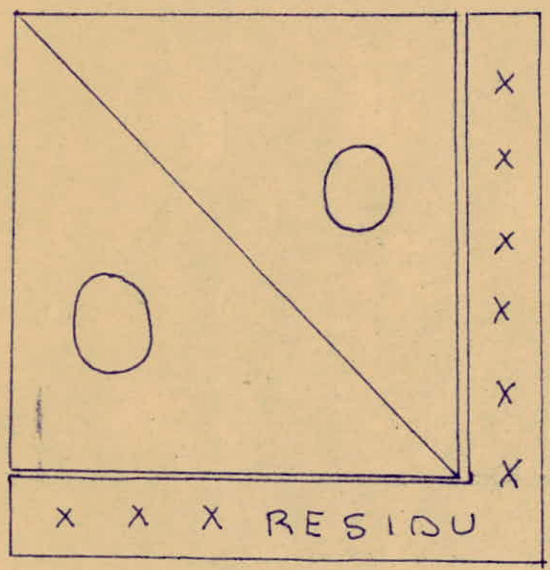
2. Les différentes structures.

La structure sera déterminée par la disposition des différents éléments non nuls composant la matrice.

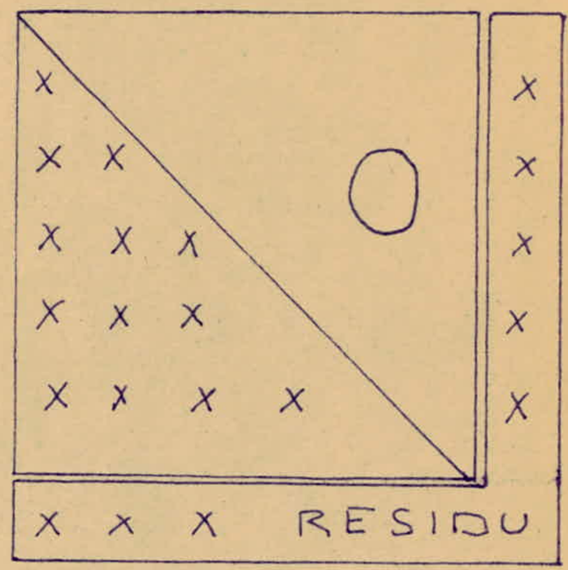
On distinguera deux types de structures:

- la structure diagonale;
- la structure triangulaire.

On peut avoir dans les deux cas un résidu non nul, en forme d'équerre.



Structure diagonale



Structure triangulaire

La diagonale est composée de blocs (sous-matrices) matriciels ou élémentaires (constitués d'un seul élément non nul).

En programmation linéaire, les structures les plus intéressantes à mettre en évidence sont les suivantes :

- avec blocs élémentaires et sans résidu, la structure diagonale ;
- " " " " triangulaire ;
- " " et avec résidu, la structure diagonale ;
- " " " " triangulaire ;
- en dernier lieu, avec blocs matriciels et résidu, la structure triangulaire.

Les structures avec résidu ne feront pas l'objet de notre étude.

II LES BLOCS

1- Blocs orphelins.

On distinguera deux types de blocs orphelins:

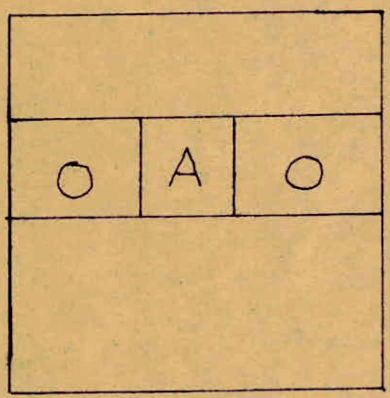
- Les blocs I-orphelins;
- les blocs J-orphelins.

a)- blocs I-orphelins:

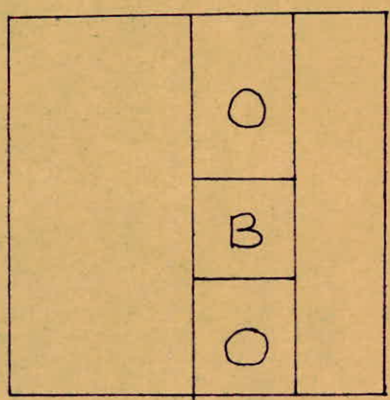
Un bloc sera dit I-orphelin, si la partie des lignes autre que le bloc est vide.

b)- blocs J-orphelins:

Un bloc sera dit J-orphelin, si la partie des colonnes autre que le bloc est vide.



A est un bloc I-orphelin;



B est un bloc J-orphelin.

2. Blocs carrés :

a) Définition:

Un bloc carré est un bloc constitué par autant de lignes que de colonnes.

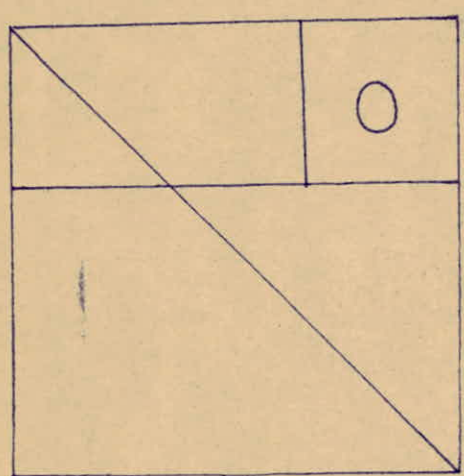
Il sera défini par son rang r.

On utilisera les notations suivantes:

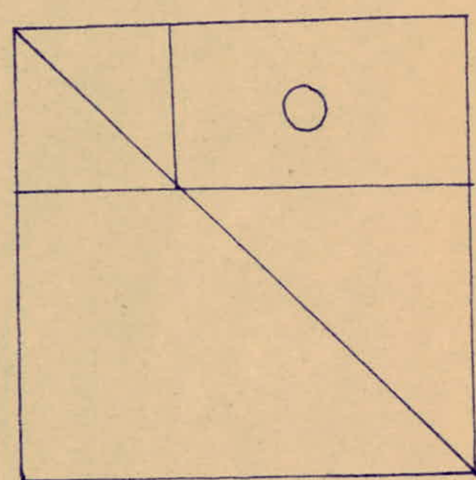
- B(r) pour un bloc carré de rang r ;
- I-r " " " et I-orphelin ;
- J-r " " " et J-orphelin.

b) Bloc carré premier:

Un bloc carré sera dit premier si on ne peut y extraire un autre bloc carré orphelin.



bloc carré premier.



bloc carré non premier.

c) Configuration des blocs carrés premiers :

- de rang 1

$$\boxed{\times}$$

B(1)

B(1) sera constitué d'un seul élément non nul. On a donc une seule représentation possible.

- de rang 2.

$$\boxed{\begin{array}{cc} \times & \times \\ \times & \times \end{array}}$$

B(2)

B(2) sera composé de 4 éléments non nuls disposés en carré. On ne peut avoir une ligne à un seul élément, car dans ce cas, B(2) étant décomposable en I-1, ne serait plus premier.
On a là aussi, une seule configuration possible.

- de rang 3.

Pour être premier, B(3) ne devra pas être décomposable en I-1 ou J-1. Une configuration possible sera donc la suivante:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \times & \times & \\ & \times & \times \\ \times & & \times \end{array}}$$

Pour les blocs carrés premiers de rang supérieur à 2, on aura donc plusieurs représentations possibles.

d) Nombre minimum d'éléments non nuls dans un bloc carré premier.

propriété :

Un bloc carré premier de rang r est composé d'au moins (2 r) éléments non nuls.

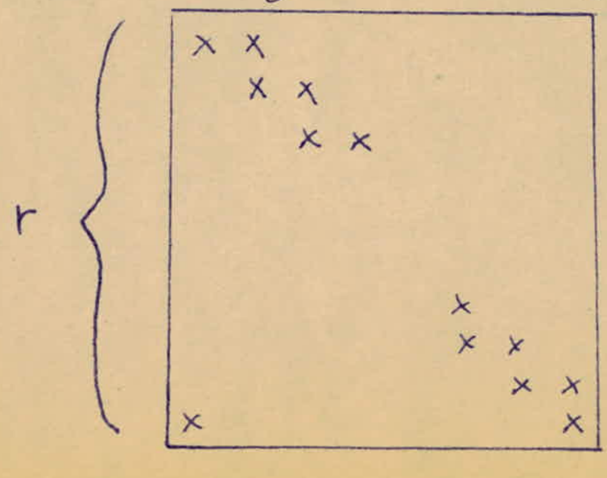
Démonstration :

Soit un bloc carré premier de rang r, chaque ligne et chaque colonne ne doivent pas comporter un seul élément non nul, car dans ce cas on aurait un bloc orphelin, carré, de rang 1 et B(r) ne serait plus premier.

On aurait donc au minimum 2 éléments par ligne et par colonne.

le problème revient donc à voir s'il est possible de disposer des éléments non nuls, à raison de 2 par ligne et par colonne, de façon à avoir un bloc carré premier de rang r.

La disposition "en escalier" est une solution valable au problème, et B(r) comprend (2r) éléments.



e) Bloc carré homogène de rang r et de niveau k.

Définition:

Un bloc carré homogène de rang r et de niveau k sera un bloc carré premier de rang r et comportant k éléments non nuls par ligne et par colonne.

L'intérêt de la notion de bloc homogène sera précisé au chapitre III, paragraphe 4.

f) Intersection de 2 blocs carrés premiers orphelins.

-Théorème:

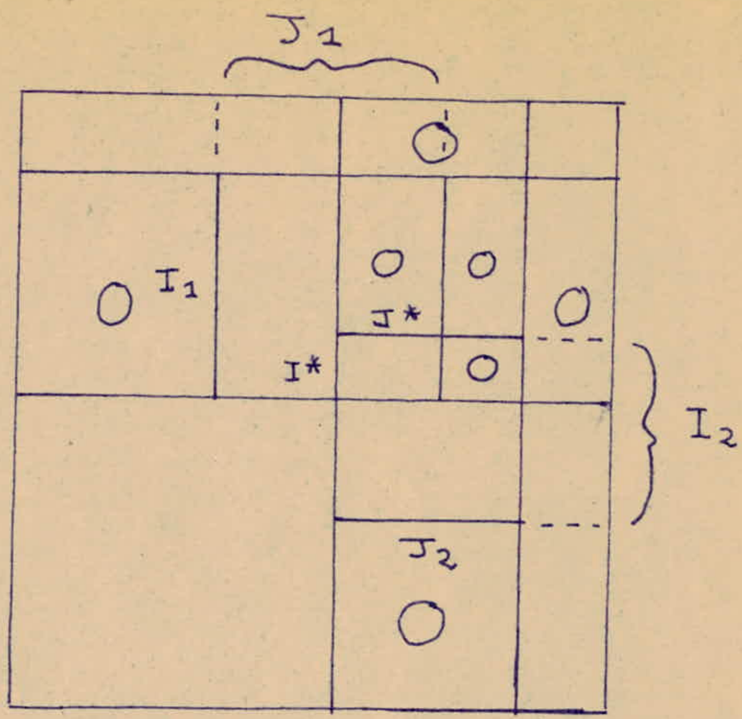
L'intersection de 2 blocs carrés premiers, l'un étant I-orphelin, et l'autre J-orphelin, est vide.

-Démonstration:

Soient $B_1(I_1, J_1)$ un bloc carré, premier, I-orphelin et
$B_2(I_2, J_2)$ " " " J-orphelin.

Le bloc intersection est $B^*(I^*, J^*)$

$$B^*(I^*, J^*) = B_1(I_1, J_1) \cap B_2(I_2, J_2)$$



$$B^*(I^*, J^*) = B_1(I_1, J_1) \cap B_2(I_2, J_2)$$

B_2 est régulier et B_1 est I-orphelin, donc les lignes I^* de B^* sont indépendantes entre elles, et le rang de B^* est donné par I^*.

B_1 est régulier et B_2 est J-orphelin, donc les colonnes J^* de B^* sont indépendantes entre elles, et le rang de B^* est donné par J^*.

Le rang de B^* est égal à la fois à I^* et à J^*, comme il doit être unique, on a donc affaire à un bloc carré.

Mais si B^* est un bloc carré, les blocs B_1 et B_2 ne sont plus alors premiers, donc nécessairement l'intersection des deux blocs est vide.

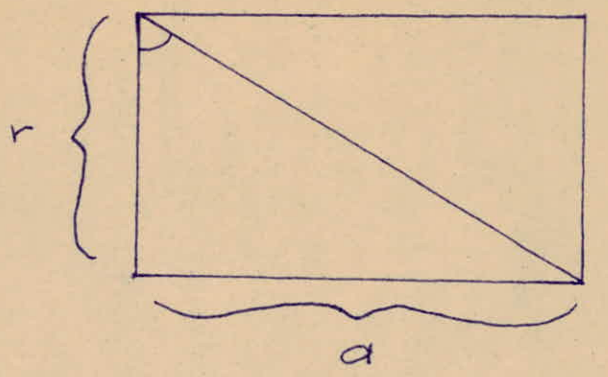
$$B^*(I^*, J^*) = \varnothing$$

- Intérêt du théorème :

Ce théorème va donc nous permettre de réduire la matrice aprés obtention d'un bloc carré orphelin, comme on le verra au chapitre III.

3- Les blocs rectangulaires.

a) définition:



Un bloc rectangulaire sera défini par:

- le rang r : c'est la plus petite des dimensions du bloc.
- l'allongement α : c'est le rapport entre l'autre dimension et le rang.

$$\alpha = \frac{a}{r}$$

remarques:

- par définition, l'allongement d'un bloc rectangulaire est toujours supérieur à l'unité.
- l'allongement est mesuré par la tangente de l'angle formé par la diagonale et le rang du bloc.

Notation:

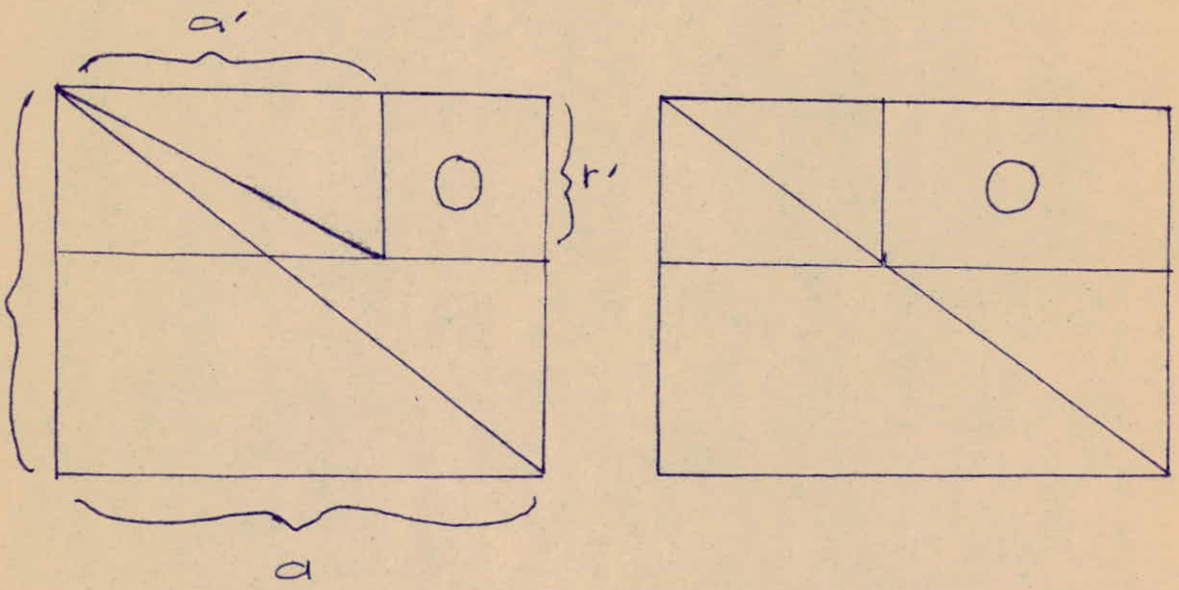
On utilisera la notation suivante:
$B(r, \alpha)$ pour un bloc rectangulaire de rang r et d'allongement α.

b) bloc rectangulaire premier:

- définition:

Un bloc rectangulaire $B(r,\alpha)$ sera dit premier, si tout autre bloc extrait de lui, $B'(r',\alpha')$ possède un allongement supérieur.

$$\forall r' < r, \ \alpha' > \alpha .$$



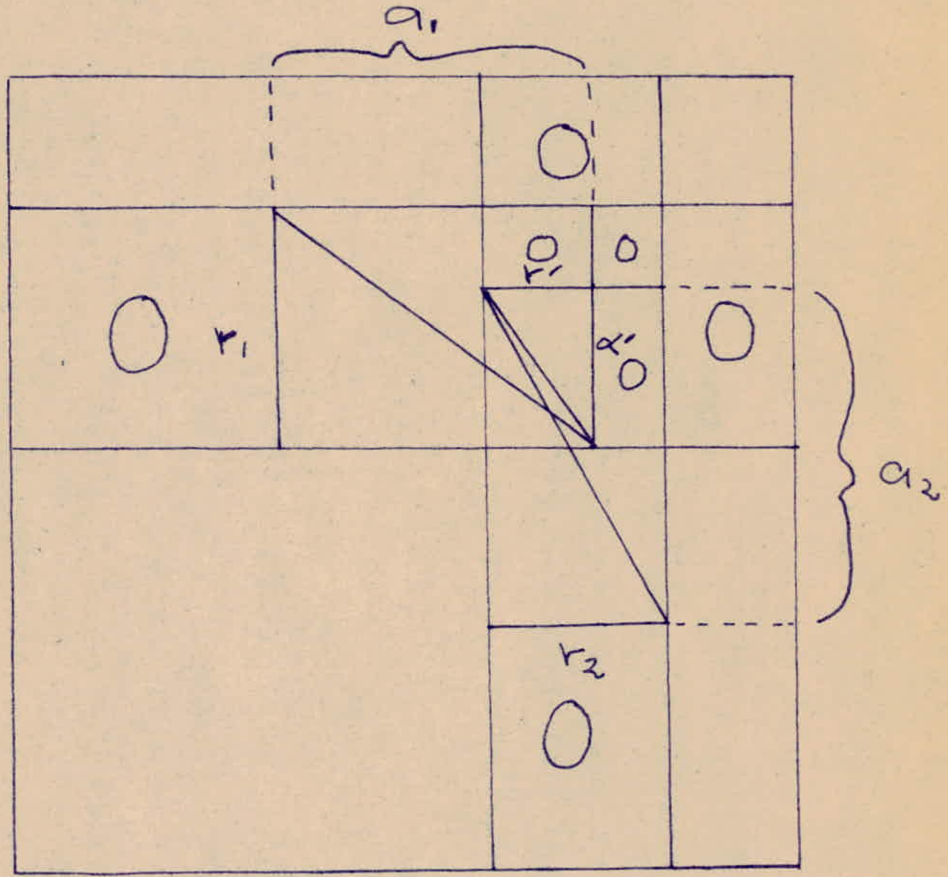
bloc premier   bloc non premier.

remarque:

Par suite de la régularité de la matrice, un bloc rectangulaire I-orphelin a un allongement latéral
et " " J-orphelin " " longitudinal

c) Intersection de 2 blocs rectangulaires premiers et orphelins.

On considère le bloc-intersection $B'(r', \alpha')$ de 2 blocs rectangulaires premiers $B_1(r_1, \alpha_1)$ et $B_2(r_2, \alpha_2)$, le premier étant I-orphelin et le deuxième J-orphelin.



Le bloc B_1 étant premier, on a:

$$\frac{a'}{r'} > \frac{r_1}{a_1} \quad \text{d'où} \quad \alpha' > \frac{1}{\alpha_1}$$

Le bloc B_2 étant premier, on a:

$$\frac{r'}{a'} > \frac{r_2}{a_2} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\alpha'} > \frac{1}{\alpha_2} \quad \text{soit} \quad \alpha_2 > \alpha'$$

L'allongement α' du bloc-intersection doit donc vérifier l'inéquation suivante:

$$\alpha' < \alpha_2 .$$

Dans le cas où le bloc-intersection a un allongement latéral, on trouve que son allongement α' doit alors vérifier:

$$\alpha' < \alpha_1$$

Donc les deux blocs rectangulaires ne sont pas nécessairement disjoints.

Théorème:

Le bloc-intersection de deux blocs rectangulaires, premiers, et orphelins, dans le cas où il existe, aura un allongement plus petit que celui du bloc possédant le même sens d'allongement que lui.

Remarques:

- Il ne sera pas intéressant de rechercher les blocs rectangulaires orphelins, puisqu'on sait qu'ils peuvent ne pas être disjoints.

- On peut considérer les blocs carrés comme des blocs rectangulaires d'allongement unité.

De ce fait, l'allongement α du bloc-intersection de deux blocs carrés, orphelins, doit vérifier la double-inéquation suivante :

$$1 < \alpha < 1$$

Il n'existe pas de valeur α qui soit solution du système.

Donc l'intersection est vide : résultat déjà établi précédemment.

III METHODE DE DECOMPOSITION EN BLOCS CARRES.

1. Procédure générale :

Etant donnée une matrice carrée, régulière, de rang N, on commencera par rechercher simultanément les deux blocs carrés I et J-orphelins de rang minimum.

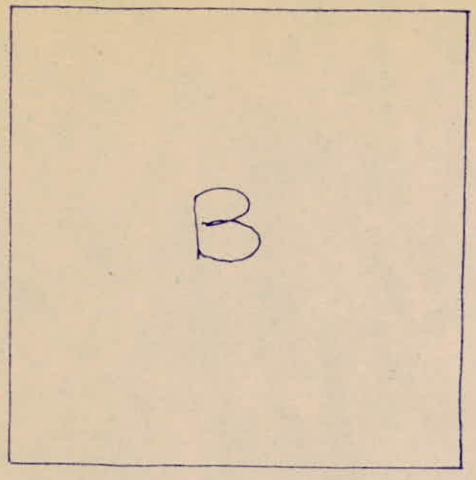
Puis, on formera celui des deux qui possède le plus petit rang.

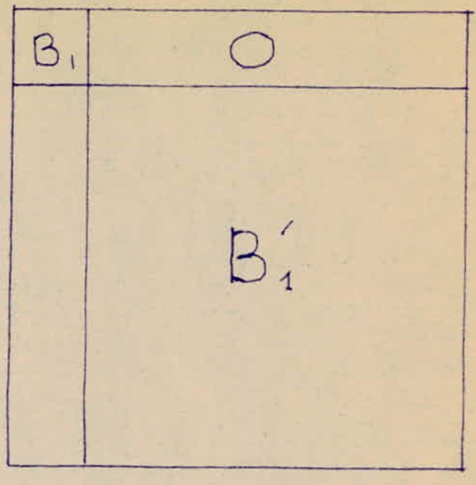
On pourra alors réduire la matrice et poser de nouveau le même problème de recherche d'un bloc carré orphelin, puisqu'on sait que les blocs carrés orphelins formés seront tous disjoints les uns des autres.

Ces blocs formerout au fur et à mesure la diagonale de la matrice à décomposer.

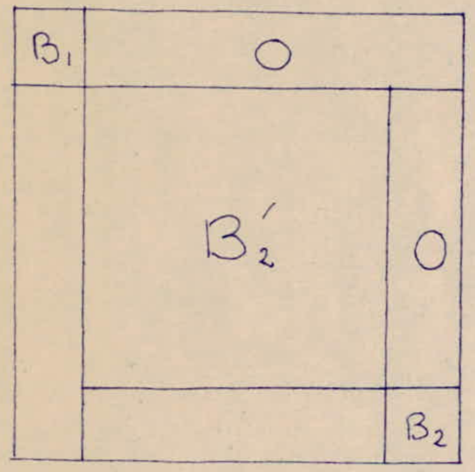
Avant de passer à la méthode de recherche d'un bloc carré orphelin, on va d'abord représenter schématiquement la décomposition d'une matrice en blocs carrés et indiquer l'organigramme général.

SCHEMATISATION DE LA DECOMPOSITION.

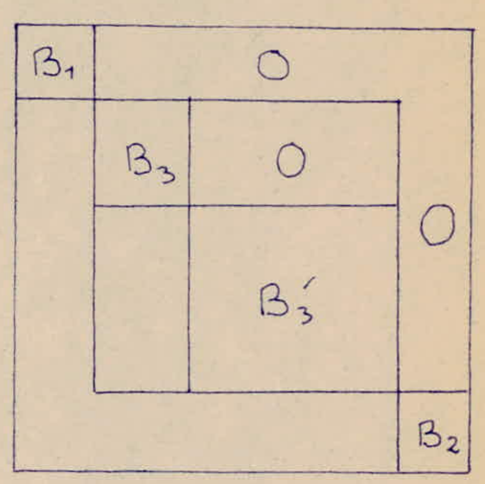




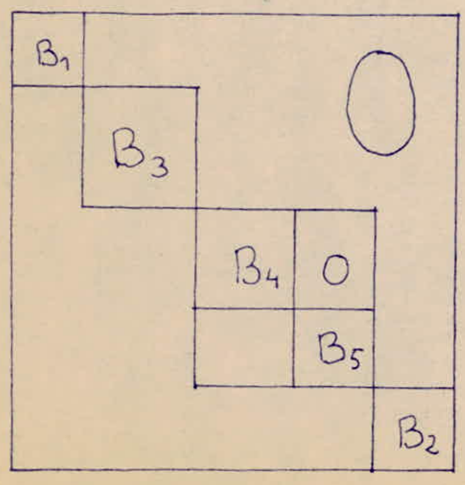
$B \rightarrow B_1$ et B_1'



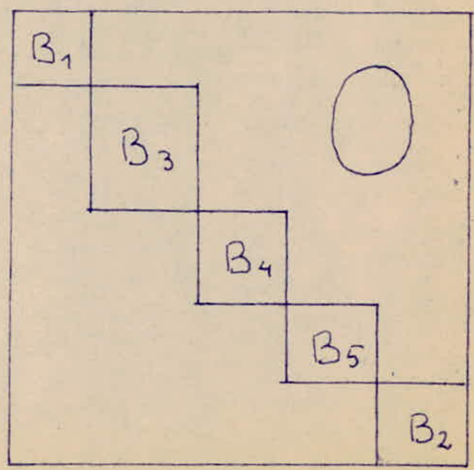
$B_1' \rightarrow B_2$ et B_2'



$B_2' \rightarrow B_3$ et B_3'

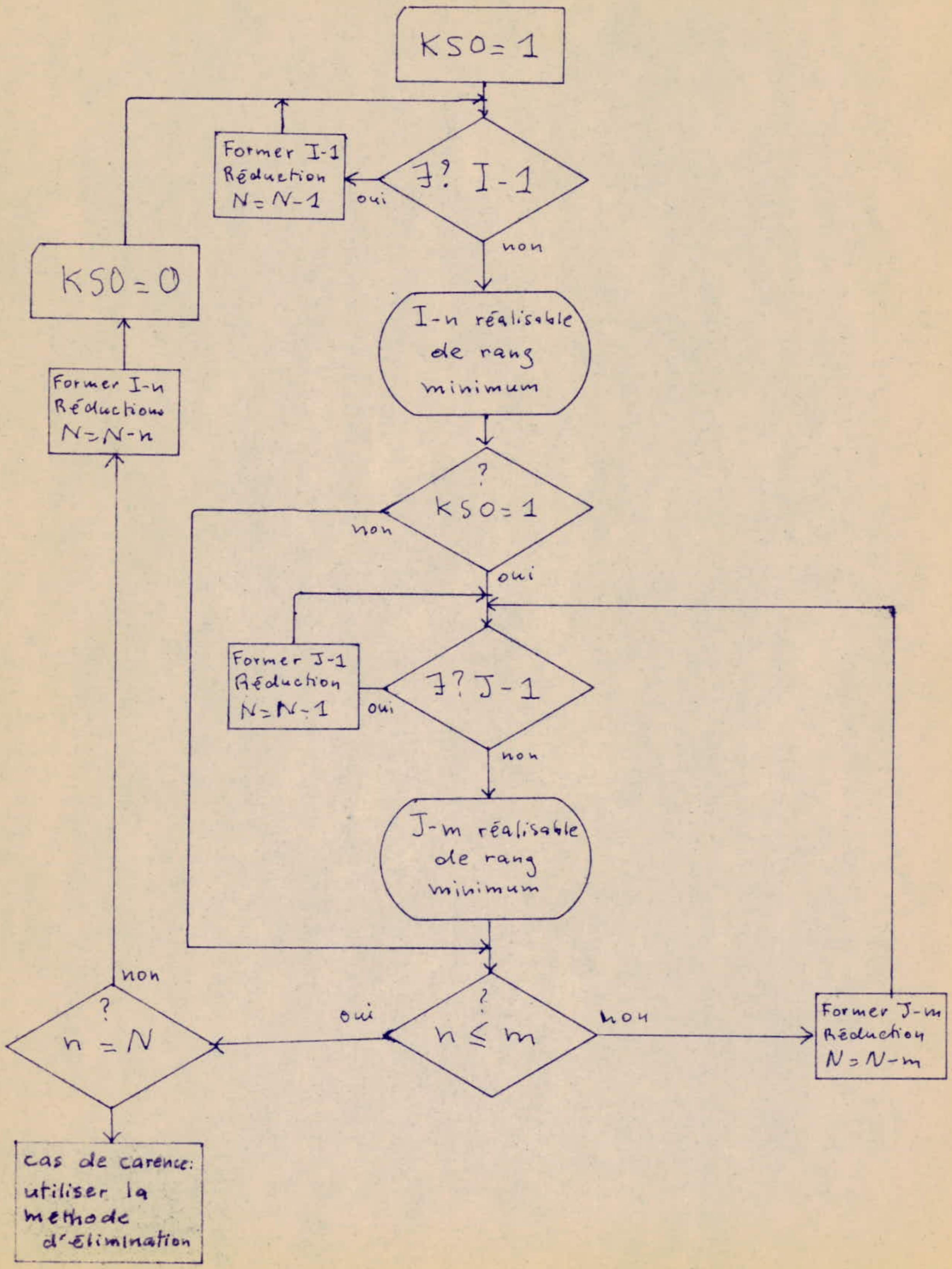


$B_3' \rightarrow B_4$ et B_5



$B \rightarrow B_1, B_2, B_3, B_4$ et B_5

ORGANIGRAMME GENERAL



2. Méthode de recherche d'un bloc carré

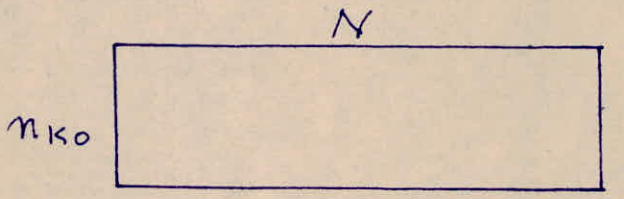
a) I-orphelin:

Etant donnée une matrice carrée $A(I,J)$, régulière et de rang N, il s'agit d'y rechercher un bloc carré I-orphelin de plus faible rang possible.

La méthode consiste à extraire, en premier lieu, les lignes les plus creuses.

Soient $K(I)$ le nombre d'éléments non nuls de la ligne I, et K_0 la valeur minimale prise par $K(I)$ pour I variant de 1 à N.

On considère les lignes à K_0 éléments non nuls; elles sont au nombre de n_{K_0} et forment un bloc de dimensions n_{K_0} et N, avec $n_{K_0} \leq N$.



$B(n_{K_0}, N)$

Condition nécessaire d'existence d'un bloc carré I-orphelin.

Si I-r existe, alors on a:

$$r \leq n_{K_0}$$

$$\text{et} \quad r \geq \inf K(I) = K_0$$

$$\text{donc: } K_0 \leq r \leq n_{K_0}$$

$$\text{soit } K_0 \leq n_{K_0}.$$

On peut donc affirmer qu'il ne sera possible de trouver un bloc carré I-orphelin, qu'à la seule condition:

$$K_0 \leq n_{K_0}$$

Dans le cas où $K_0 > n_{K_0}$, on extrait en plus les lignes à (K_0+1) éléments non nuls.

Méthode de recherche de I-r.

Une fois donc que la condition $K_0 \leq n_{K_0}$ sera vérifiée, on commencera par éliminer les sous-colonnes vides du bloc $B(n_{K_0}, N)$ extrait.

Puis, on recherchera les sous-colonnes à un seul élément non nul; s'il en existe une, c'est qu'on a un bloc carré J-orphelin de rang 1, et on sait qu'il est disjoint du bloc I-r cherché. On pourra donc supprimer la ligne et la colonne de J-1.

De proche en proche, on aboutira alors nécessairement à l'un des deux cas suivants:

α) - soit on aura tout supprimé, donc il n'existe pas de bloc I-r dans $B(n_{K_0}, N)$; il faudra alors extraire en plus les lignes à (K_0+1) éléments non nuls et refaire le même travail de recherche.

β) - soit on aura formé un bloc de dimensions

n'_{K_0} et m_{K_0} : $B'(n'_{K_0}, m_{K_0})$ avec $n'_{K_0} \leq m_{K_0} \leq N$ dans lequel il n'y aura plus de bloc J-1.

Il faudra donc y rechercher les blocs carrés J-orphelins de rang supérieur à 1, pour cela on appliquera, au bloc $B'(n'_{K_0}, m_{K_0})$, la méthode de recherche d'un bloc carré J-orphelin.

De proche en proche, on aura :

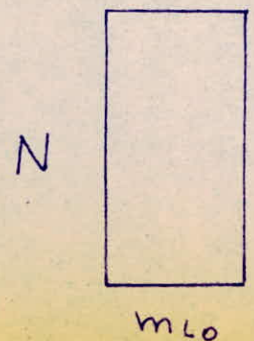
- soit tout supprimé ;
- soit formé un bloc carré orphelin premier ou décomposable en blocs diagonaux premiers. (voir paragraphe 4 du même chapitre).
- soit formé un bloc rectangulaire I-orphelin.

b) J-orphelin.

La même méthode sera employée en utilisant cette fois-ci les colonnes les plus creuses de la matrice et qui contiennent au plus L_0 éléments non nuls.

L_0 est la valeur minimale prise par $L(J)$ pour J variant de 1 à N ; $L(J)$ étant le nombre d'éléments non nuls de la colonne J.

Le bloc extrait est $B(N, m_{L_0})$ avec $m_{L_0} \leq N$.



La condition nécessaire d'existence d'un bloc carré J-orphelin est:

$$L_0 \leq m_{L_0}.$$

Une fois donc que cette condition est vérifiée, on commencera par éliminer les sous-lignes vides; puis on recherchera celles à un seul élément non nul, s'il en existe une, c'est qu'on un bloc I-1, on pourra donc supprimer la ligne et la colonne de I-1.

De proche en proche, on aboutira à l'un des deux cas suivants:

α) - soit on aura tout éliminé.

β) - soit on aura formé un bloc $B'(n_{L_0}, m'_{L_0})$ avec $m'_{L_0} \leq n_{L_0} \leq N$.

Il faudra alors rechercher les blocs I-orphelins de rang supérieur à 1 par la méthode décrite précédemment et finalement on aura là aussi:

- soit tout supprimé.
- soit formé un bloc carré J-orphelin premier ou décomposable en blocs diagonaux premiers. (voir paragraphe 4 du même chapitre).
- soit formé un bloc rectangulaire J-orphelin.

On est donc en présence d'un problème dit "à tiroirs", puisque pour avoir un bloc carré I-orphelin, il faut trouver un bloc carré J-orphelin et vice-versa.

Le bloc carré, premier et orphelin s'obtiendra ainsi par réductions successives du bloc extrait.

(Voir organigrammes généraux pages 36 et 37).

3. Cas de carence de la méthode de décomposition.

Il se produira lorsqu'en recherchant un bloc carré J-orphelin (I-orphelin), pour réduire le bloc carré I-orphelin (J-orphelin) déja trouvé, on a affaire au même bloc.

On aura alors en utilisant les notations du paragraphe précédent:

$$m_{L_0} = m_{K_0}$$

ou:

$$n_{L_0} = n_{K_0}.$$

Le bloc, en question, ne pourra donc être réduit par la méthode de décomposition.

Dans ce cas particuliers, on appliquera au bloc la méthode d'élimination, qui sera étudiée page 27.

Donnons un exemple de ce cas de carence:

-exemple :

	A	B	C	D	E	F
a	X	X				
b		X	X			
c	X	X	X			
d			X	X	X	
e				X	X	X
f				X		X

On a un bloc B(6) décomposable en deux blocs B(3) premiers et orphelins.

On applique la méthode de décomposition, décrite précédemment, au bloc B (6):

On commence donc par rechercher un bloc carré I-orphelin, de rang le plus faible possible.

Pour cela, on extrait les lignes les plus creuses, elles sont à 2 éléments, et forment le bloc suivant:

	A	B	C	D	F
a	X	X			
b		X	X		
f				X	X

On a un élément J-orphelin (f, F), il est donc disjoint du bloc I-r cherché. On peut alors supprimé la ligne f et la sous-colonne F.

Le bloc extrait se réduit donc à :

	A	B	C
a	X	X	
b		X	X

De nouveau, on supprime la ligne b et la sous-colonne c. On s'aperçoit alors qu'on ne peut former aucun bloc I-r.

Il faut donc extraire en plus les lignes à 3 éléments : on a alors B(6).

La recherche d'un bloc J-orphelin, carré, de rang minimum, nous conduit à extraire d'abord les colonnes à 2 éléments qui forment le bloc suivant :

	A	E	F
a	X		
c	X		
d		X	
e		X	X
f			X

On a un élément J-orphelin (a, A), il est donc disjoint du bloc J-r cherché, on peut alors éliminer la ligne a et la colonne A.

Puis, de nouveau, on supprime la ligne d et la colonne E.

On ne peut donc former aucun bloc J-orphelin, carré.

Il faut donc extraire en plus les colonnes à 3 éléments: on a alors B(6).

On n'a pas réussi à décomposer le bloc B(6) alors qu'on sait qu'il est décomposable en 2 blocs B(3) orphelins.

Il faudra alors utiliser, dans ce cas, la méthode suivante:

Méthode d'élimination.

Elle consiste à faire l'hypothèse que le bloc (I,J) n'est pas premier ; il est donc décomposable en 2 autres blocs (I_1, J_1) et (I_2, J_2) carrés, premiers et orphelins.

$$\begin{array}{ll} & \overbrace{\begin{array}{cc} \quad J_1 \quad & \quad J_2 \quad \end{array}}^{J} \\ I\left\{\begin{array}{l} I_1 \\ \\ I_2 \end{array}\right. & \begin{array}{|c|c|} \hline (I_1,J_1) & 0 \\ \hline & (I_2,J_2) \\ \hline \end{array} \end{array}$$

On considère une colonne à 2 éléments non nuls, constituant un doublet-colonne.

Ce doublet appartient nécessairement à l'un des 2 blocs orphelins, puisqu'on sait que toutes les colonnes d'un bloc premier sont au moins à 2 éléments.

On supposera donc que le doublet appartient à l'un des 2 blocs orphelins ; on pourra donc réduire le bloc (I,J), par élimination de la colonne et des 2 lignes du doublet, pour y rechercher l'autre bloc orphelin.

Si on ne trouve pas, dans les 2 cas, l'autre bloc orphelin, alors on pourra affirmer que le bloc (I,J) est premier.

Le même raisonnement est valable, si l'on avait utilisé un doublet-ligne.

Généralisation de la méthode d'élimination.

Etant donné un bloc carré (I,J), on cherche à savoir s'il est premier.

On fait l'hypothèse qu'il est décomposable en 2 autres blocs carrés, premiers et orphelins.

On considère, parmi toutes les lignes et colonnes de la matrice, la moins creuse. Celle-ci est formée par K éléments constituant un K-uplet-ligne ou un K-uplet-colonne.

Il s'agit alors de faire toutes les hypothèses possibles quant à l'appartenance de ce K-uplet à l'un des 2 blocs orphelins, en considérant que toutes les lignes et colonnes de ces 2 blocs sont au moins à 2 éléments, et de rechercher à chaque fois, dans le bloc (I, J) réduit, l'autre bloc orphelin.

Si, pour chacun de ces tests, on n'arrive pas à avoir l'autre bloc orphelin, alors on pourra affirmer que le bloc (I, J) est premier.

Il est intéressant de déterminer le nombre maximum de tests à faire, en fonction de K.

Pour l'un des 2 blocs orphelins, il faudra qu'il contienne les K éléments, et on aura alors un seul cas possible d'appartenance du K-uplet.

Pour l'autre bloc, il faudra qu'il comprenne au moins 2 éléments du K-uplet, le nombre possible d'hypothèses sera donc :

$$p = \sum_{l=2}^{l=K} C_K^l = 2^K - K - 1$$

Le nombre maximum d'hypothèses sera donc :

$$n = 2^K - K .$$

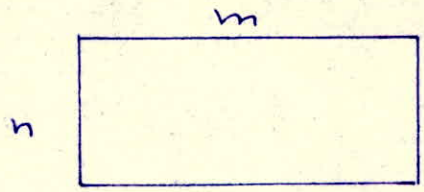
4- Remarque sur la méthode de décomposition.

La premiére démarche de la méthode de recherche d'un bloc carré I-orphelin, consiste à extraire toutes les lignes à k_o éléments non nuls, ces dernières sont au nombre de n_{k_o}.

Il convient donc de s'intéresser à ce que l'on pourrait obtenir de ces lignes, si la condition d'existence d'un bloc carré I-orphelin ($k_o \leq n k_o$) était vérifiée.

Aprés avoir réduit la matrice extraite en supprimant les sous-colonnes vides, et les lignes et colonnes des éléments J-orphelins, on aura:

- soit tout éliminé.
- soit formé un bloc de dimensions m et n, avec $m \geq n$.



Le nombre total d'éléments non nuls contenus dans ce bloc est : $n k_o$.

Le nombre moyen d'éléments par colonne est donc:

$$\bar{k} = \frac{n k_o}{m}$$

$$\bar{k} \leq k \quad \text{puisque: } \frac{n}{m} \leq 1$$

Deux possibilités sont alors à envisager:

- <u>On n'a pas le même nombre d'éléments par colonne:</u>

On a alors affaire à un bloc rectangulaire et on sait qu'il contient des colonnes avec moins de k_0 éléments puisque: $\bar{k} \leq k_0$.

On pourra alors dans ce cas appliquer la méthode de recherche d'un bloc J-orphelin, en utilisant les colonnes les plus creuses. Ce qui va nous conduire soit à tout éliminer, soit à aboutir au cas suivant:

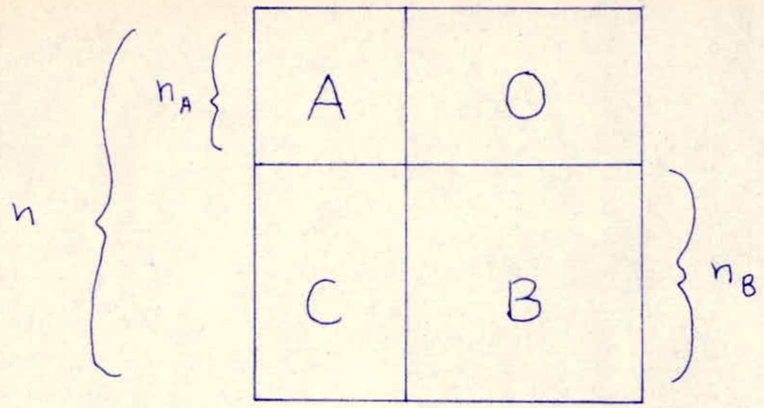
- <u>Chacune des m colonnes comporte k_0 éléments non nuls.</u>

On a donc affaire à un bloc carré homogène, de rang n et de niveau k_0.

Ce bloc sera nécessairement:

- soit premier
- soit décomposable en blocs diagonaux premiers.

En effet, supposons qu'il ne soit pas premier. Donc, il est décomposable en un bloc A carré, premier, I-orphelin et de rang n_A, et en deux autres blocs B et C, B étant carré, J-orphelin et de rang n_B.



N_B et N_C étant les nombres d'éléments non nuls contenus respectivement dans les blocs B et C, on a:

$$N_B + N_C = n_B \cdot K_0$$

Le bloc B comporte n_B colonnes à K_0 éléments, donc:

$$N_B = n_B \cdot K_0$$

On en déduit que:

$$N_C = 0 \qquad \text{et} \qquad C = \emptyset$$

Le bloc initial se décompose donc en deux blocs carrés diagonaux : A et B.

A étant premier

B étant, à son tour, soit premier

soit décomposable en blocs diagonaux premiers.

Si le bloc initial n'est pas premier, on arrivera donc, de proche en proche, à le décomposer en blocs diagonaux premiers.

Il s'agit donc d'indiquer la méthode de décomposition.

5_ Méthode de décomposition d'un bloc carré en blocs carrés diagonaux et premiers.

Soit un bloc carré $B(r)$, on désire savoir s'il est décomposable en blocs carrés diagonaux premiers ou non.

Supposons que $B(r)$ se décompose en 2 blocs diagonaux B_1 et B_2 carrés.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline B_1 & 0 \\ \hline 0 & B_2 \\ \hline\end{array}$$

Les lignes et les colonnes de B_1 sont disjointes de celles de B_2, on pourra donc isoler B_1 en marquant chacune de ses lignes et colonnes.

Exemple:

Soit à décomposer le bloc suivant:

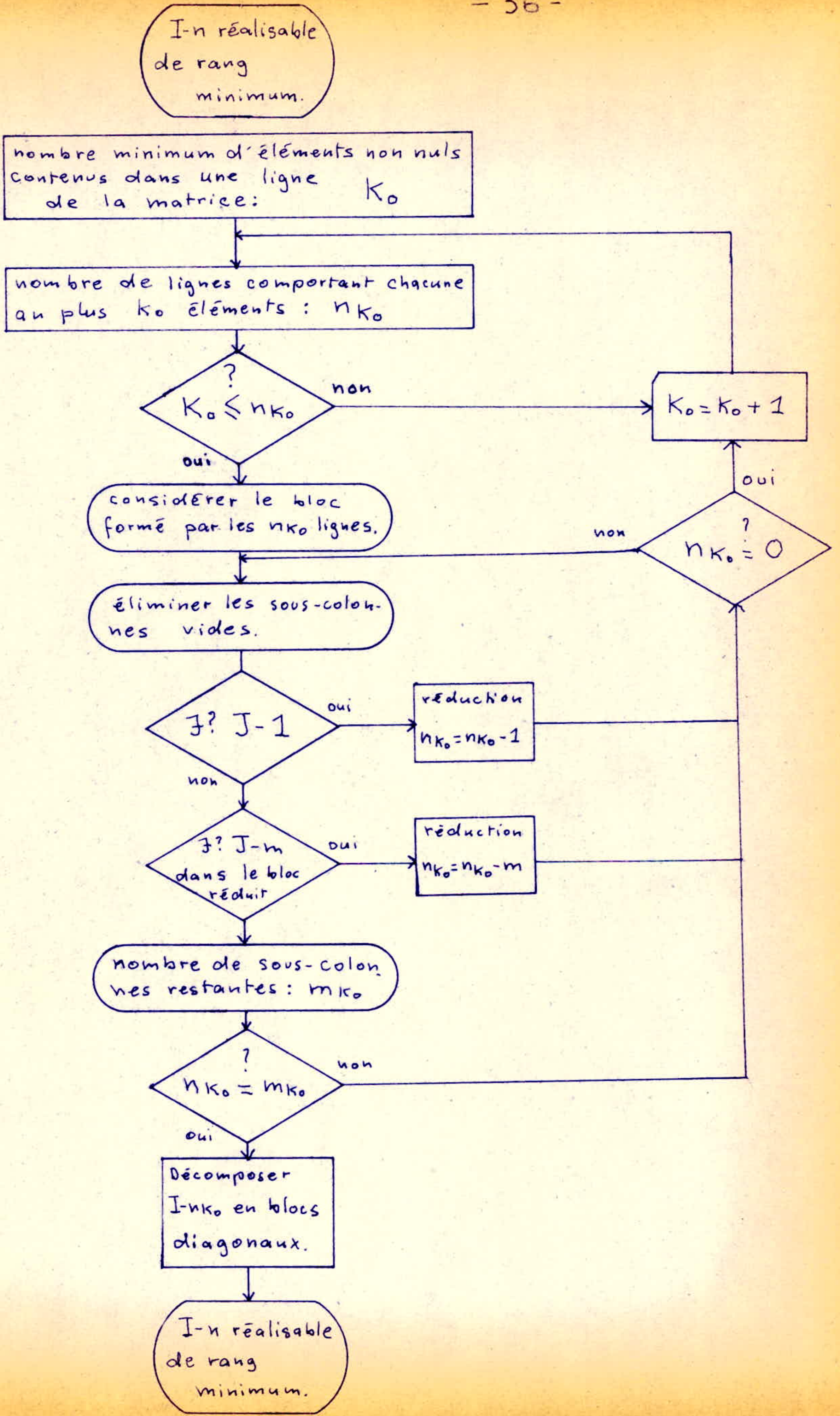
	A	B	C	D	E
a	X		X		
b		X		X	
c			X		X
d		X		X	
e	X		X		X

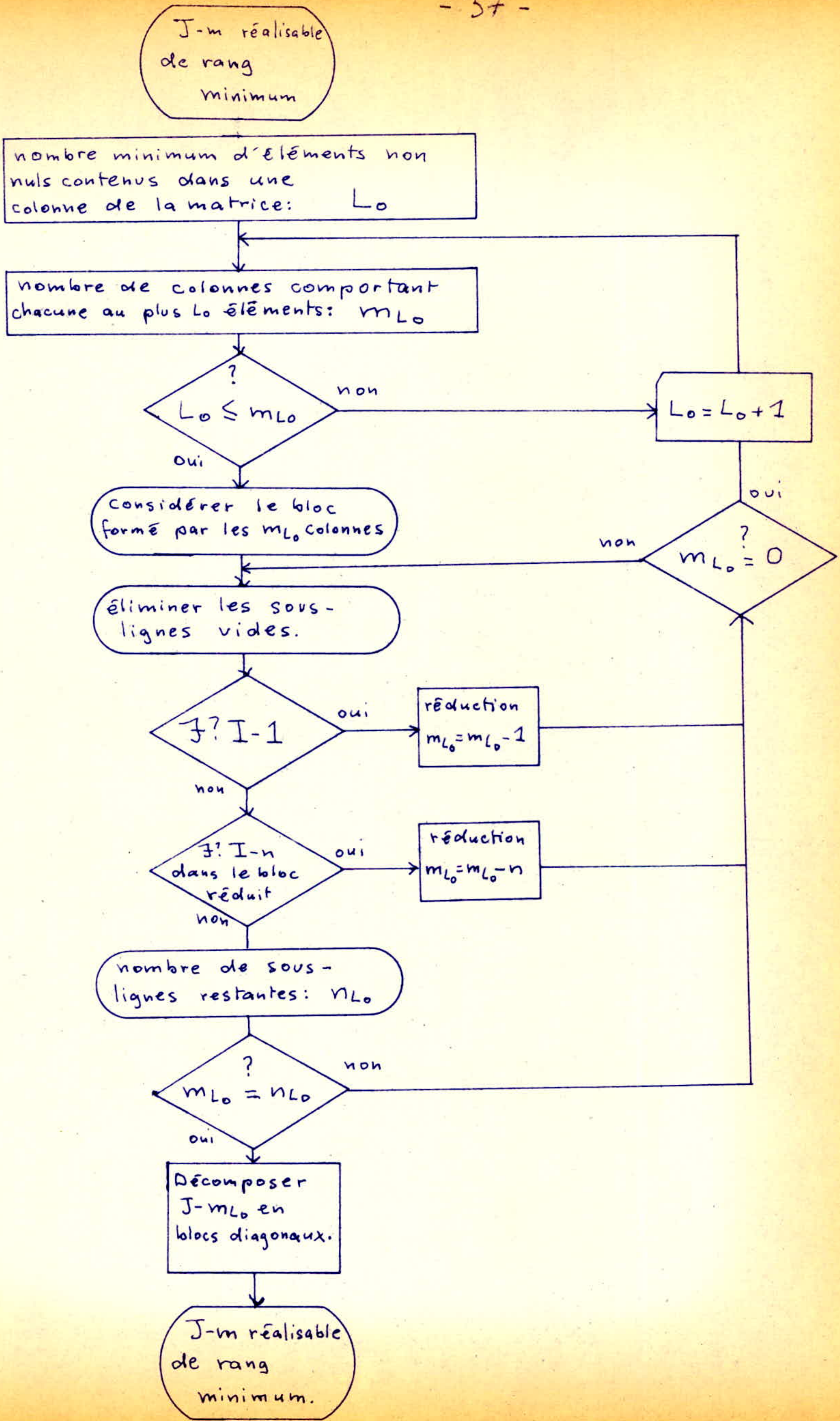
En partant de la 1ère ligne a, on arrive à marquer les lignes c, e et les colonnes A, C, E. On forme ainsi un bloc carré de rang 3, et un autre de rang 2.

	A	C	E	B	D
a	X	X			
c		X	X		
e	X	X	X		
b				X	X
d				X	X

En conclusion de ce chapitre, on indiquera ci-aprés les organigrammes généraux de la méthode de recherche d'un bloc carré orphelin de plus faible rang possible:

p.36 : I-n réalisable de rang minimum
p.37 : J-m réalisable de rang minimum.


I-n réalisable de rang minimum.
nombre minimum d'éléments non nuls contenus dans une ligne de la matrice: K₀
nombre de lignes comportant chacune au plus k₀ éléments : n_{k₀}
? K₀ ≤ n_{K₀}
non
oui
K₀ = K₀ + 1
considérer le bloc formé par les n_{k₀} lignes.
oui
non
? n_{K₀} = 0
éliminer les sous-colonnes vides.
∃? J-1
oui
réduction n_{K₀} = n_{K₀} - 1
non
∃? J-m dans le bloc réduit
oui
réduction n_{K₀} = n_{K₀} - m
nombre de sous-colonnes restantes : m_{K₀}
? n_{K₀} = m_{K₀}
non
oui
Décomposer I-n_{K₀} en blocs diagonaux.
I-n réalisable de rang minimum.


J-m réalisable de rang minimum
nombre minimum d'éléments non nuls contenus dans une colonne de la matrice: L_o
nombre de colonnes comportant chacune au plus L_o éléments: m_{L_o}
$L_o \leq m_{L_o}$?
non
oui
$L_o = L_o + 1$
considérer le bloc formé par les m_{L_o} colonnes
oui
$m_{L_o} = 0$?
non
éliminer les sous-lignes vides.
∃? I-1
oui
non
réduction $m_{L_o} = m_{L_o} - 1$
∃? I-n dans le bloc réduit
oui
non
réduction $m_{L_o} = m_{L_o} - n$
nombre de sous-lignes restantes: n_{L_o}
$m_{L_o} = n_{L_o}$?
non
oui
Décomposer J-m_{L_o} en blocs diagonaux.
J-m réalisable de rang minimum.

IV Conclusions générales.

1 - Les structures réalisables.

Les méthodes qui ont été établies, nous permettent de mettre en évidence les structures suivantes, quand elles existent :

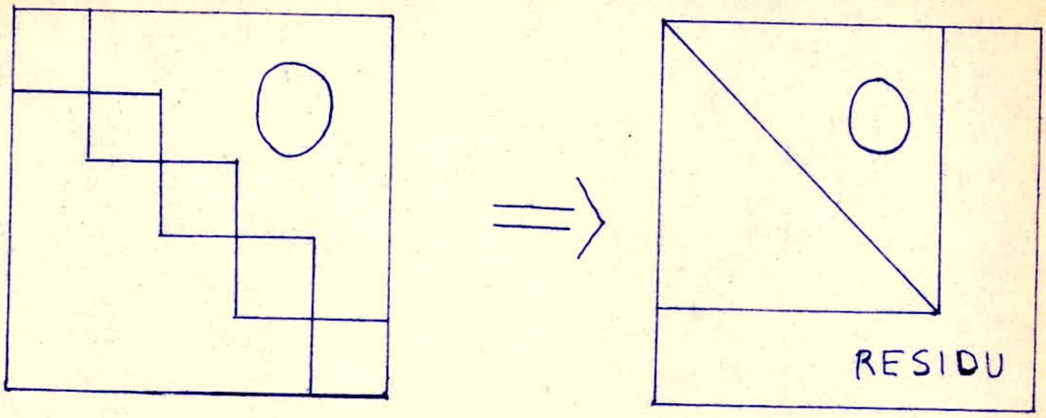
- la structure triangulaire avec blocs élémentaires;
- " " " matriciels;
- " diagonale " élémentaires;
- " " " matriciels.

2 - Les structures avec résidu.

Une méthode éventuelle consisterait à extraire les lignes et les colonnes les moins creuses, qui formeraient donc le résidu, et à appliquer ensuite à la matrice ainsi réduite la méthode de décomposition. Il s'agit alors de minimiser le résidu, et ce ne sont pas nécessairement les lignes et les colonnes les moins creuses qui donnent le plus petit résidu.

remarque: on peut passer immédiatement de la structure triangulaire avec blocs matriciels, à la structure triangulaire avec blocs élémentaires, plus un résidu qui sera constitué par les lignes et les

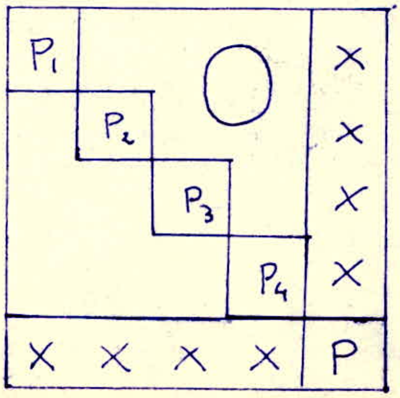
colonnes provenant de la réduction des blocs.
Il est à noter que le résidu, ainsi obtenu, n'est pas le plus petit.



3- Motivation.

Pour la réinversion d'une matrice par un pivot matriciel carré dont la structure est triangulaire ou diagonale, sans résidu, on prendra les pivots successifs constitués par les blocs de la diagonale.

Si on a une structure avec résidu, on inversera d'abord la partie non résiduelle, puis la partie restante autour du pivot P.



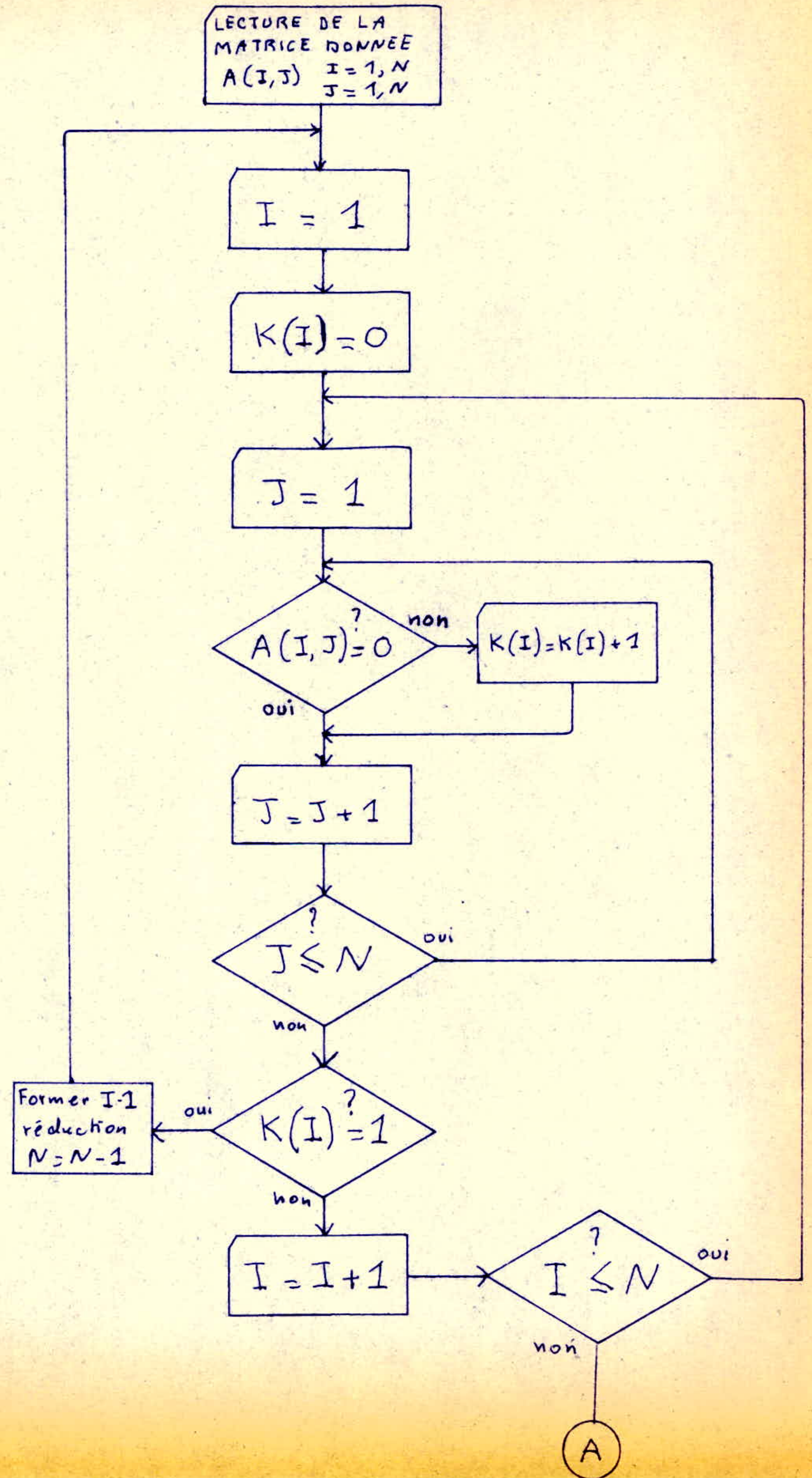
4_ Organigrammes.

On indiquera, ci-aprés, les organigrammes de la méthode de recherche d'un bloc carré orphelin.

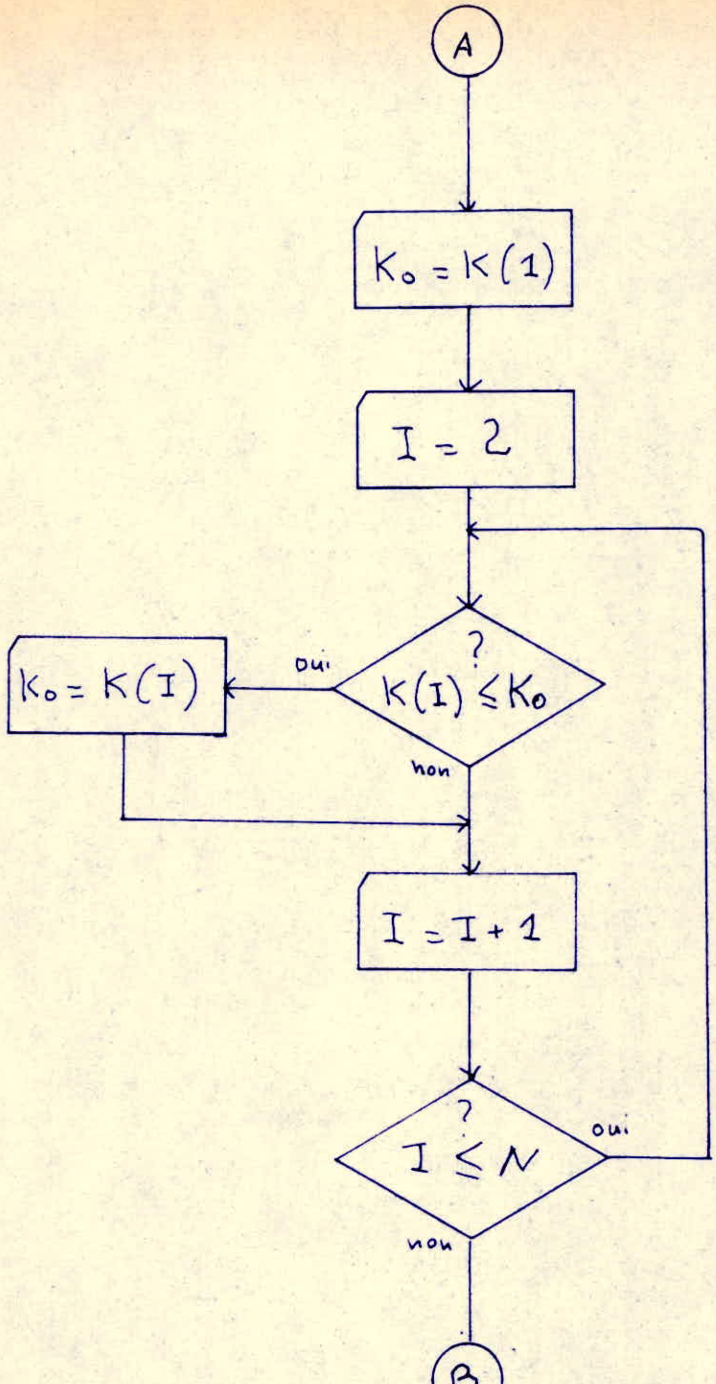
On se limitera à la recherche des blocs carrés orphelins de rang 1, pour réduire les blocs extraits.

Les organigrammes seront commentés à la page 53.

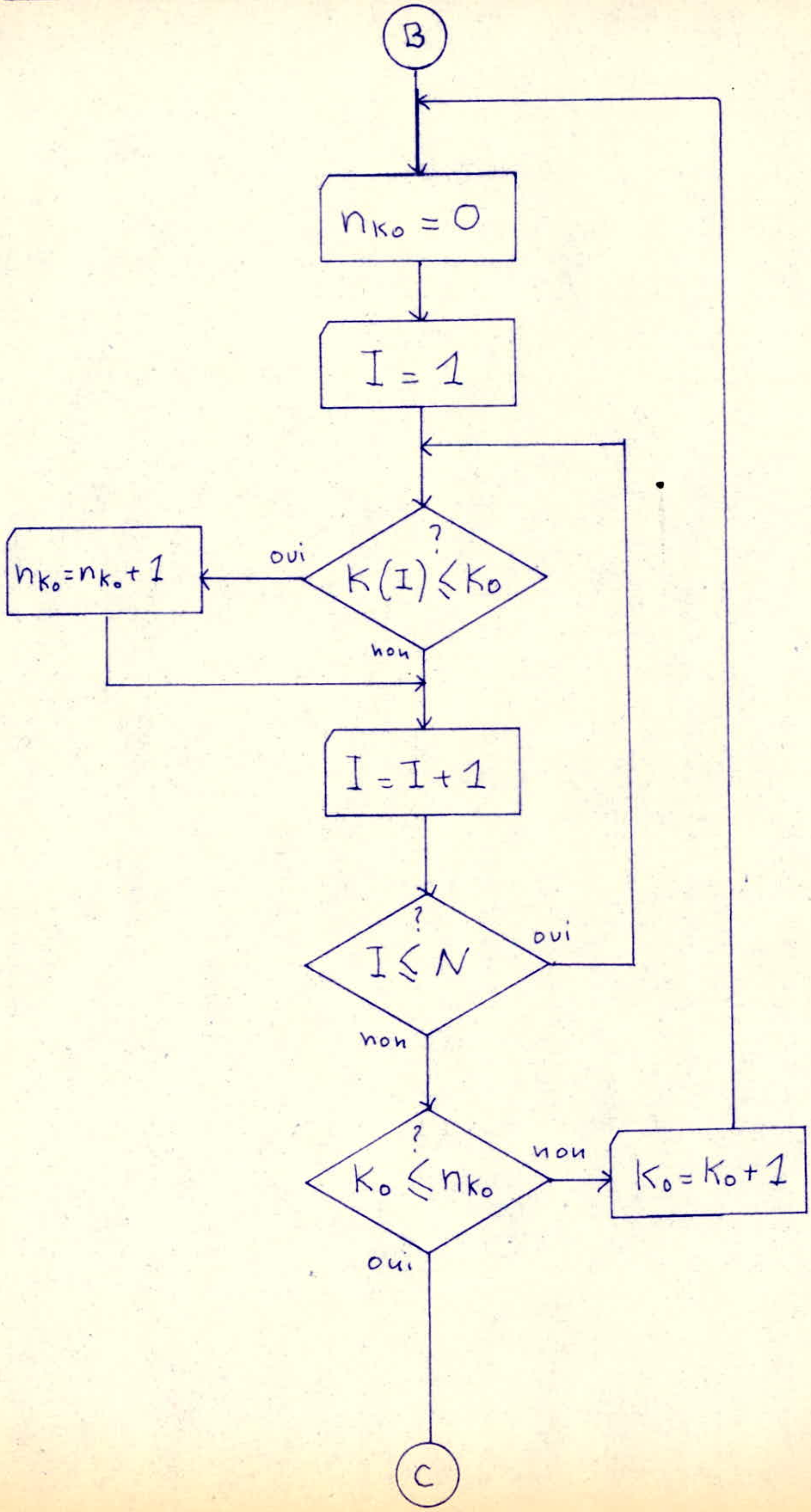
1) DETERMINATION DU VECTEUR-COLONNE K(I) ET RECHERCHE DE I-1.



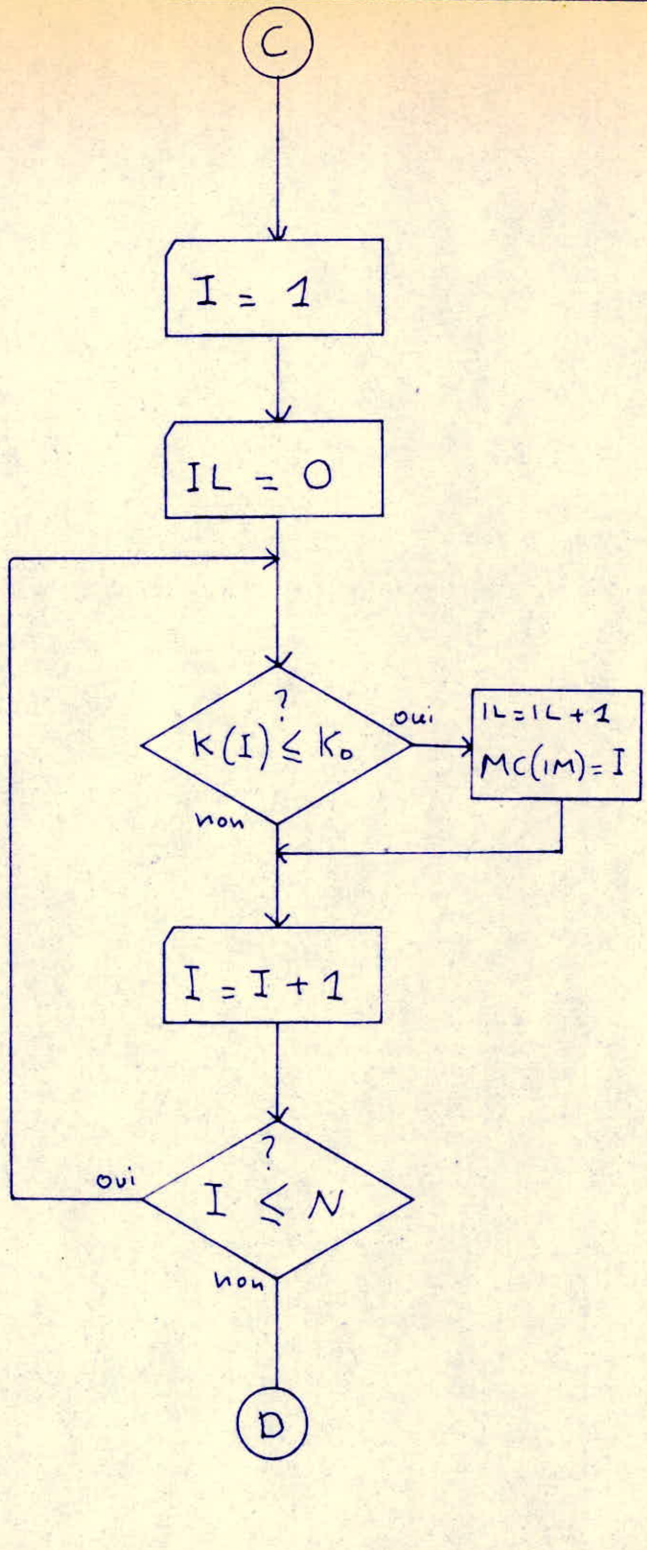
2) RECHERCHE DU MINIMUM DE K(I)



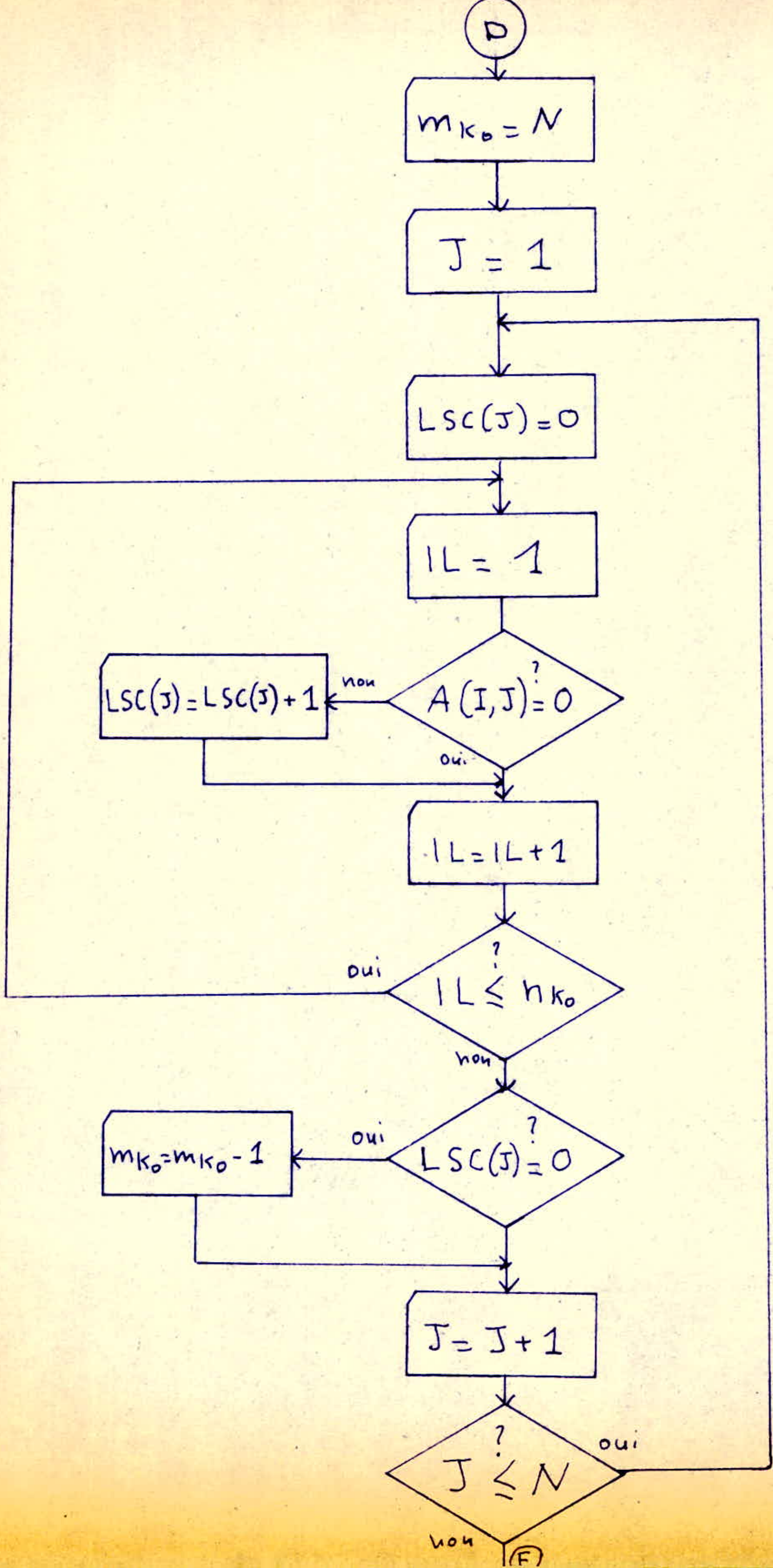
3) VERIFICATION DE LA CONDITION D'EXISTENCE D'UN BLOC CARRE I-ORPHELIN



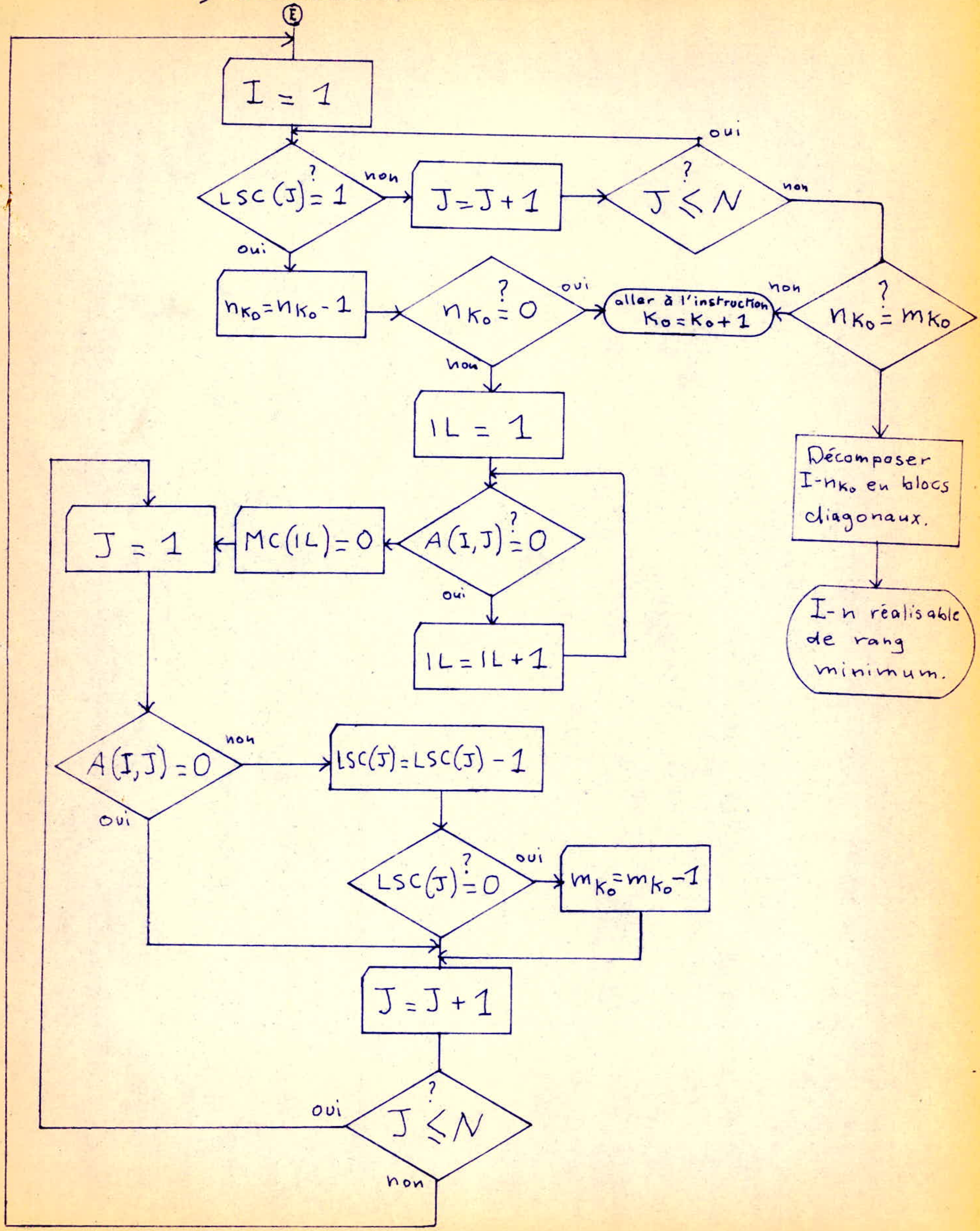
4) DETERMINATION DU VECTEUR-COLONNE MC(IM)



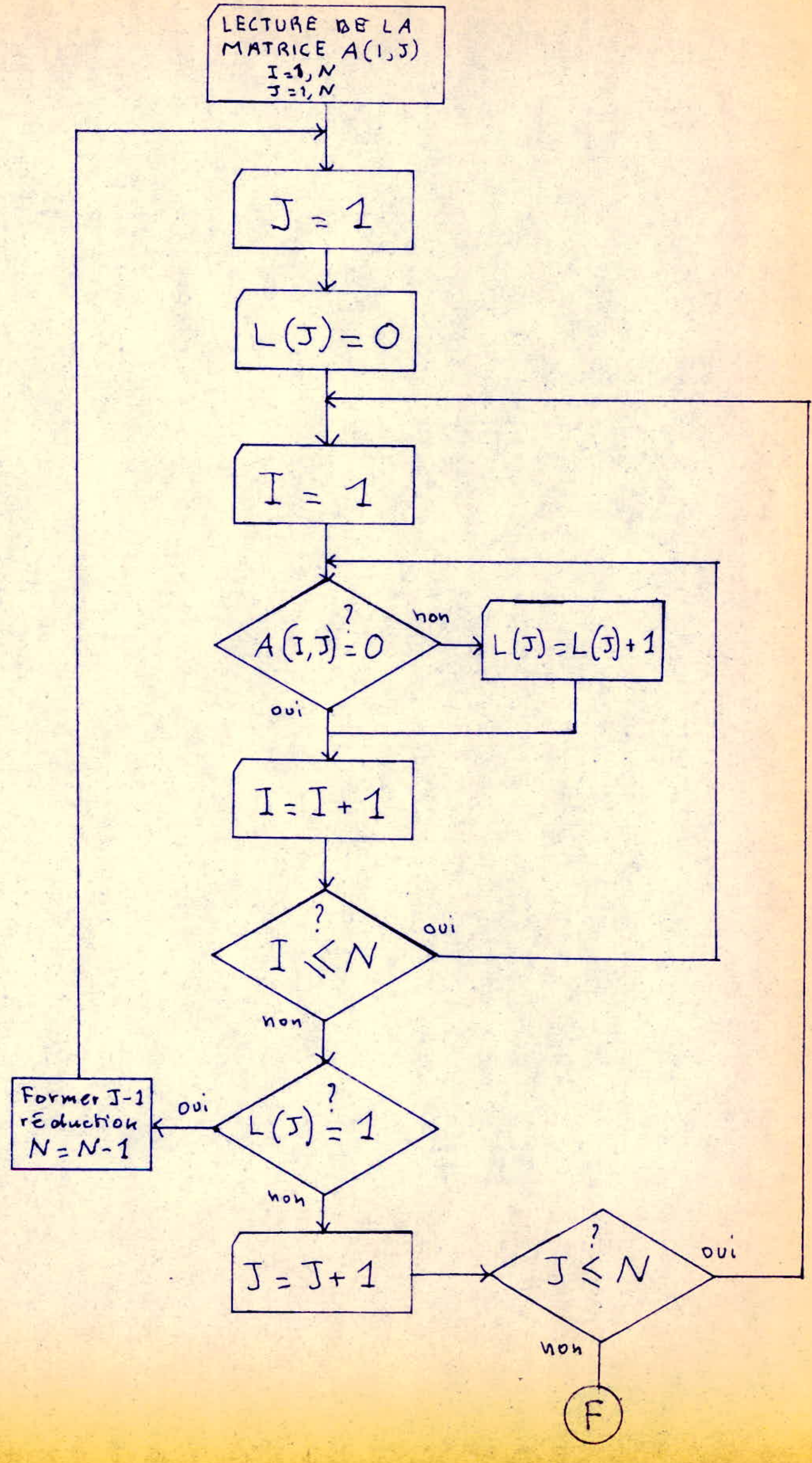
5) DETERMINATION DU VECTEUR-LIGNE LSC(J) ET DU NOMBRE DE S/COL. NON VIDES.



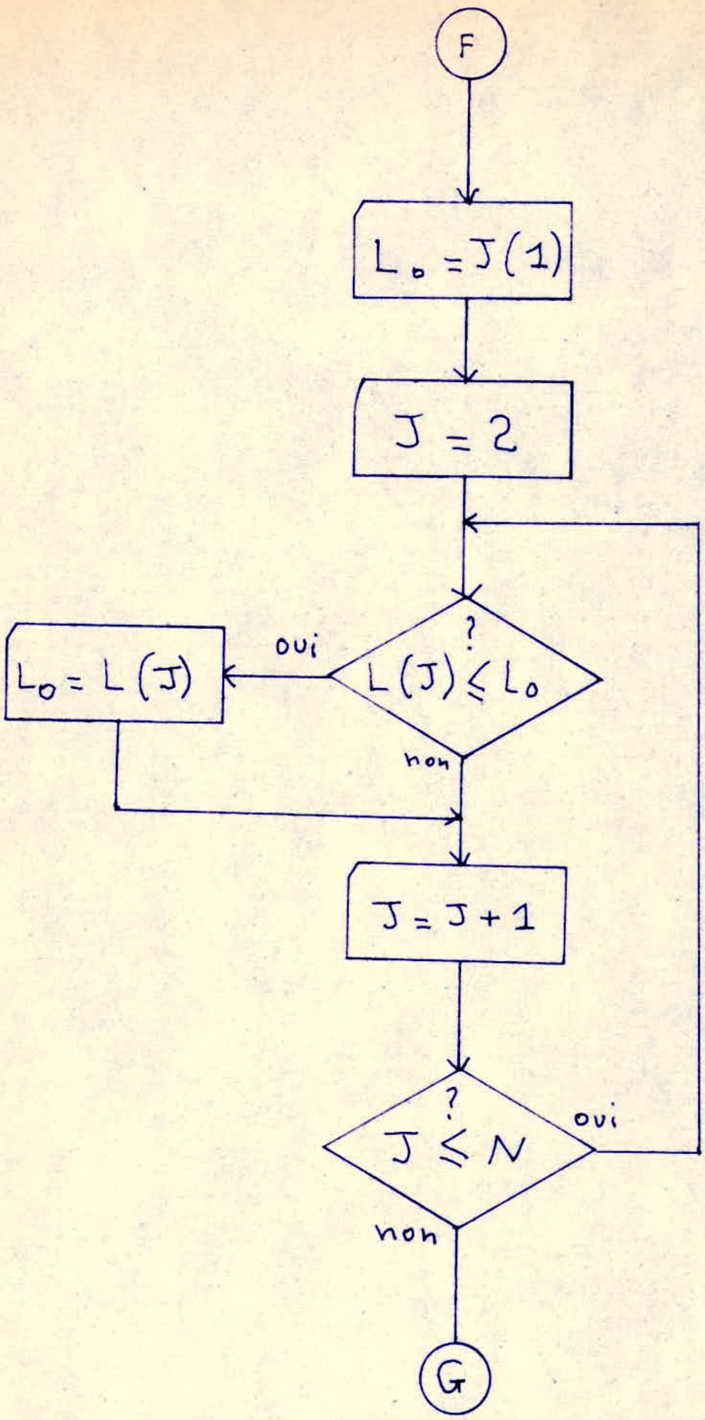
6) RECHERCHE D'UN BLOC CARRE I-ORPHELIN



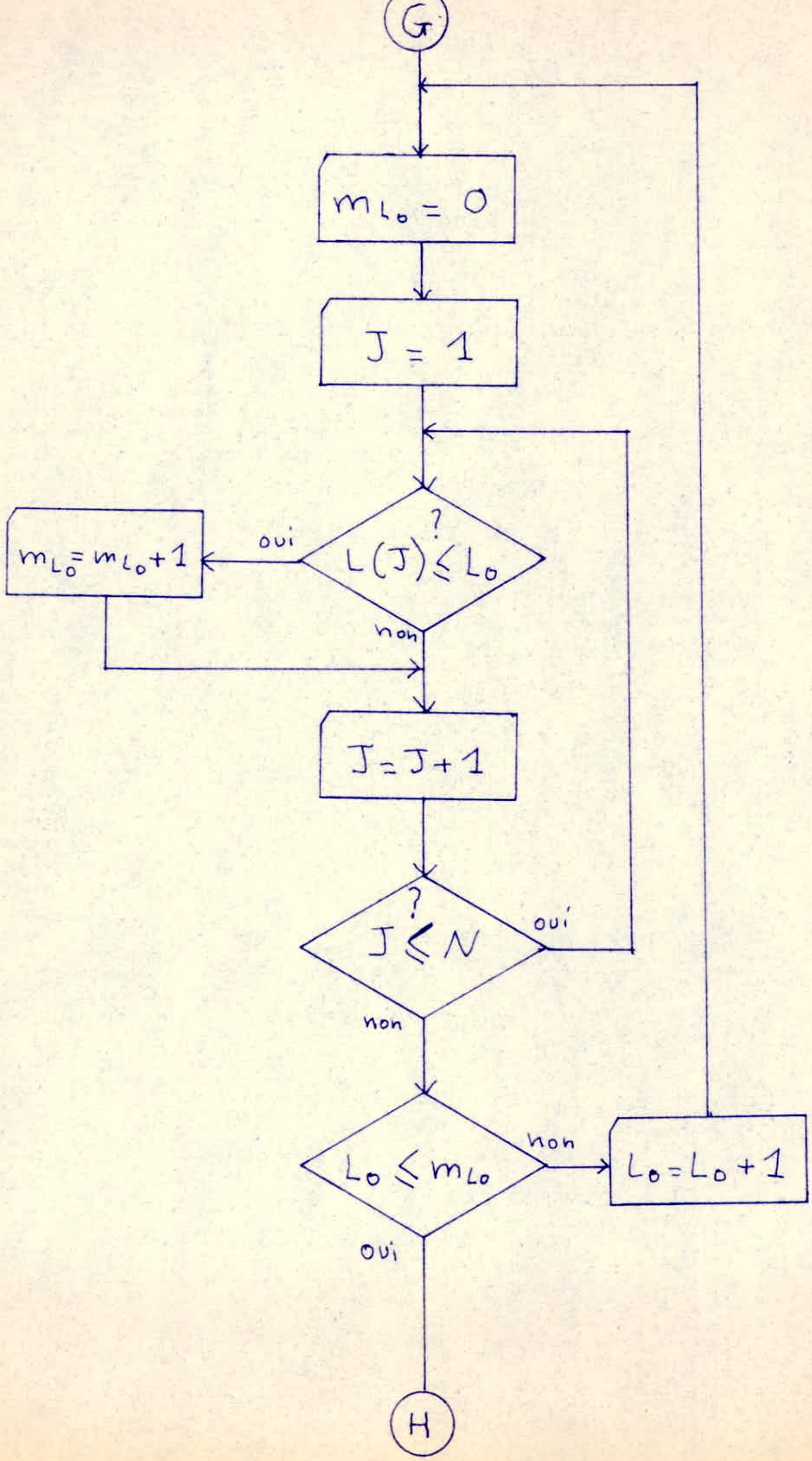
1) DETERMINATION DU VECTEUR-LIGNE L(J) ET RECHERCHE DE J-1



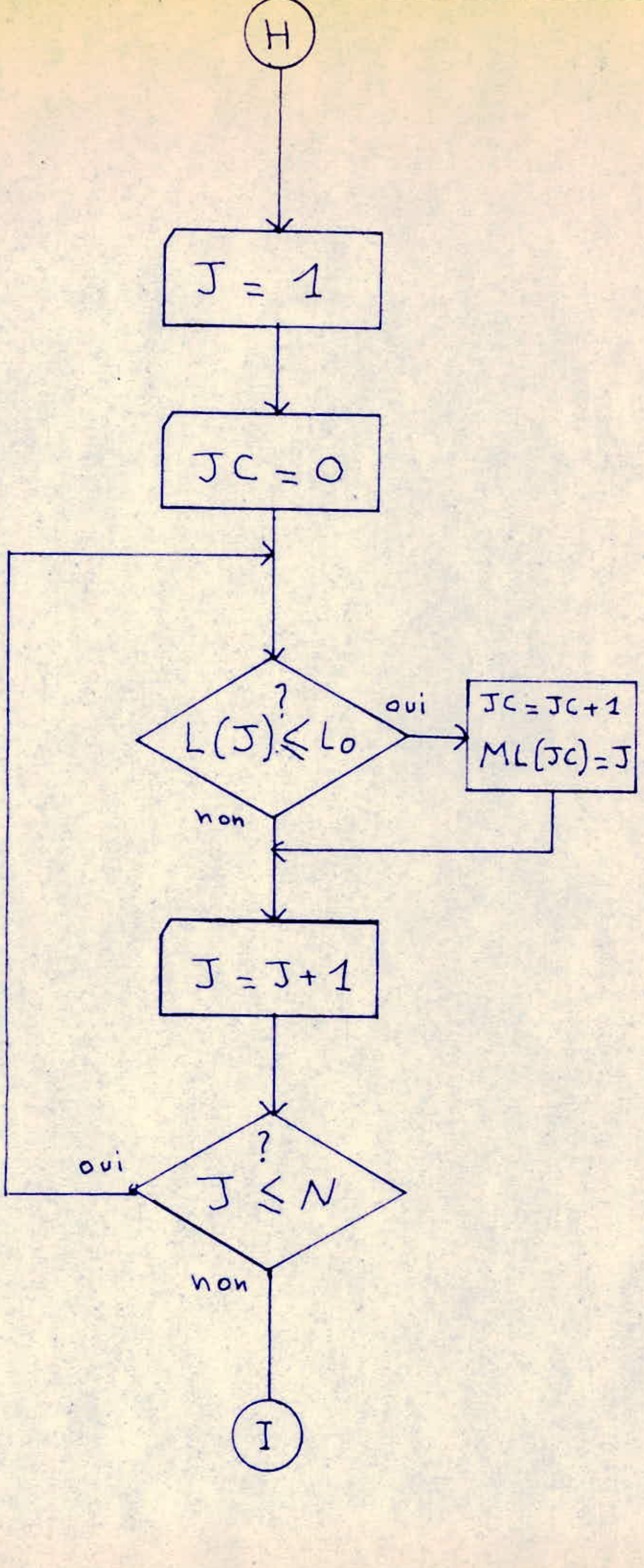
2) RECHERCHE DU MINIMUM DE L(J)



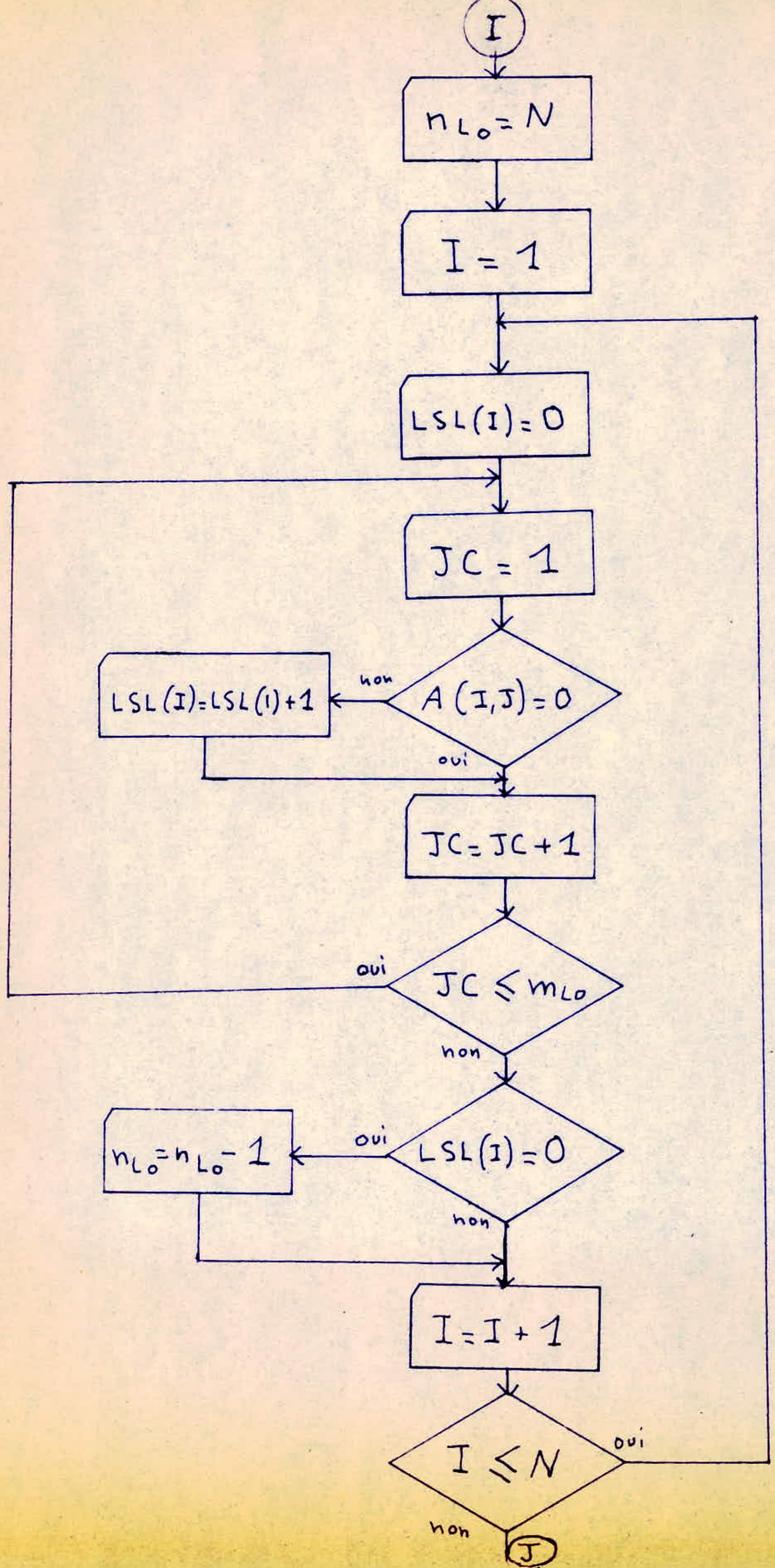
3) VERIFICATION DE LA CONDITION D'EXISTENCE D'UN BLOC CARRE J-ORPHELIN



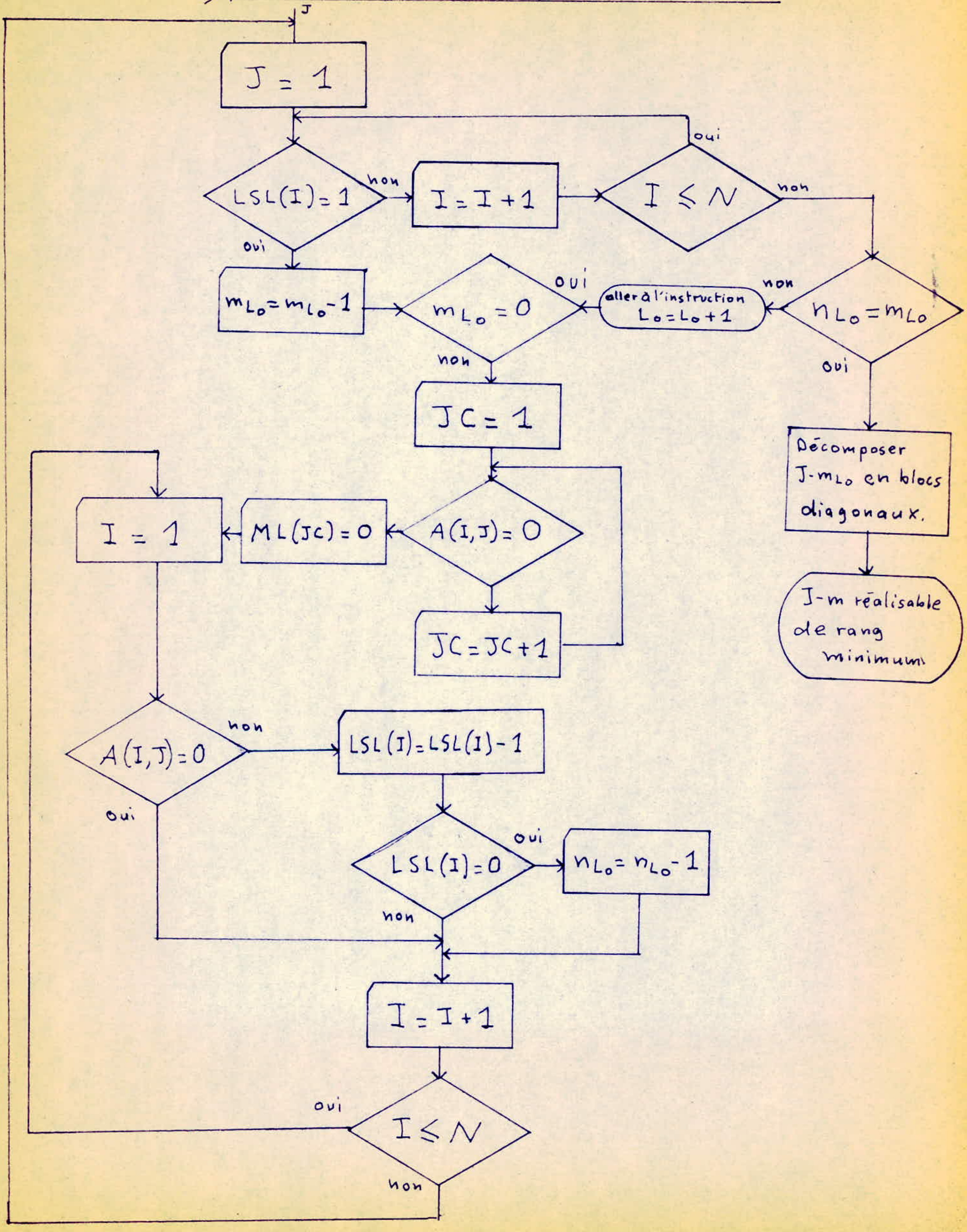
4) DETERMINATION DU VECTEUR-LIGNE ML(JC)



5) DETERMINATION DU VECTEUR-COLONNE LSL(I) ET DU NOMBRE DE S/LIGNES NON VIDES.



6) RECHERCHE D'UN BLOC CARRE J-ORPHELIN.



COMMENTAIRE.

I - Recherche d'un bloc carré I-orphelin.

1) Détermination du vecteur-colonne K(I) et recherche de I-1.

La matrice donnée A(I,J) est carrée et de rang N. Il s'agit de construire un vecteur-colonne K(I), de dimension N, K(I) étant le nombre d'éléments non nuls de la ligne I de la matrice.

Si K(I) = 1, on pourra alors former un bloc carré I-orphelin, de rang 1, et réduire ainsi la matrice.

2) Recherche du minimum de K(I).

On appellera K_o la plus petite valeur prise par K(I) pour I variant de 1 à N.

3) Vérification de la condition d'existence d'un bloc carré I-orphelin.

Cette condition est : $K_o \leq nK_o$

nK_o étant le nombre de lignes comportant chacune au plus K_o éléments non nuls.

Si cette condition n'est pas vérifiée, il faudra alors considérer en plus les lignes à (K_o+1) éléments.

4) Détermination du vecteur-colonne $MC(IM)$.

Ce vecteur-colonne sert à marquer les n_{K_0} lignes les plus creuses de la matrice.

La relation: $K(I) \leq K_0$ est vérifiée par chacune de ces lignes.

5) Détermination du vecteur-ligne $LSC(J)$ et du nombre de sous-colonnes non vides.

Le vecteur-ligne $LSC(J)$ nous donne le nombre d'éléments non nuls par sous-colonne J de la matrice formée par les n_{K_0} lignes marquées.

Le nombre de sous-colonnes non vides, m_{K_0}, est donné par le nombre des valeurs différentes de 0 de $LSC(J)$, pour J variant de 1 à N.

6) Recherche d'un bloc carré I-orphelin.

On recherche dans le bloc (n_{K_0}, m_{K_0}) les blocs carrés I-orphelins de rang 1 afin de pouvoir procéder à des réductions.

Si on n'a pas formé un bloc carré I-orphelin, il faudra alors considérer en plus les lignes à (K_0+1) éléments.

II Recherche d'un bloc carré J-orphelin.

1) Détermination du vecteur-ligne L(J) et recherche de J-1.

Il s'agit de construire un vecteur-ligne L(J), de dimension N, L(J) étant le nombre d'éléments non nuls de la colonne J de la matrice.

Si $L(J) = 1$, on pourra alors former un bloc carré J-orphelin, de rang 1, et réduire ainsi la matrice.

2) Recherche du minimum de L(J).

On appellera Lo, la plus petite valeur prise par L(J) pour J variant de 1 à N.

3) Vérification de la condition d'existence d'un bloc carré J-orphelin.

Cette condition est: $Lo \leq m_{Lo}$.

m_{Lo} étant le nombre de colonnes comportant chacune au plus Lo éléments non nuls.

Si la condition n'est pas vérifiée, il faudra alors considérer en plus les colonnes à $(Lo+1)$ éléments.

4) Détermination du vecteur-ligne ML(JC).

Ce vecteur-ligne sert à marquer les m_{Lo} colonnes, les plus creuses de la matrice, et pour lesquelles, la condition : $L(J) \leq L_o$ est vérifiée.

5) Détermination du vecteur-colonne LSL(I) et du nombre de sous-lignes non vides.

Le vecteur-colonne LSL(I) nous donne le nombre d'éléments non nuls par sous-ligne (J) de la matrice formée par les m_{L_o} colonnes marquées.

Le nombre de sous-lignes non vides est n_{L_o}.

6) Recherche d'un bloc carré J-orphelin.

On recherche dans le bloc (n_{L_o}, m_{L_o}) des blocs carrés J-orphelins de rang 1 afin de pouvoir procéder à des réductions.

Si on n'a pas formé un bloc carré J-orphelin, il faudra alors considérer, en plus, les colonnes à $(L_o + 1)$ éléments.

TABLE DES MATIERES

I. Les structures des matrices.

1. Introduction 1
2. Les différentes structures 1

II. Les blocs.

1. blocs orphelins 4
2. blocs carrés 5
3. blocs rectangulaires 11

III. Méthode de décomposition en blocs carrés.

1. Procédure générale 16
2. Méthode de recherche d'un bloc carré orphelin 19
3. Cas de carence 24
4. remarque sur la méthode 30
5. méthode de décomposition en blocs diagonaux 33

IV. Conclusions générales.

1. les structures réalisables 38
2. les structures avec résidu 38
3. motivation 39
4. organigrammes 40