

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique



Département de Génie Mécanique

Laboratoire de Génie Mécanique et Développement

## Thèse de Doctorat

pour l'obtention du diplôme de Docteur en Sciences

Spécialité : Génie Mécanique

---

### Problèmes axisymétriques Torsionnel et Thermoélastique d'une Plaque Epaisse reposant sur une Fondation Circulaire

---

Fadila GUERRACHE

Sous la direction de Mr. Belkacem KEBLI, Professeur, ENP, Alger

Présentée et soutenue publiquement le (24/06/2021)

#### Composition du Jury :

Président	Mr. Said RECHAK	Pr	ENP, Alger
Directeur de thèse	Mr. Belkacem KEBLI	Pr	ENP, Alger
Examineur	Mr. Yacine ADJABI	MCA	UMBB, Boumerdès
Examineur	Mr. Arezki KESSI	Pr	USTHB, Alger
Examineur	Mr. Mourad BALISTROU	Pr	UMBB, Boumerdès
Examineur	Mr. Yacine BELKACEMI	MCA	ENP, Alger
Invité	Mr. Messaoud HACHEMI	Pr	UMBB, Boumerdès

**ENP 2021**



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique



Département de Génie Mécanique

Laboratoire de Génie Mécanique et Développement

## Thèse de Doctorat

pour l'obtention du diplôme de Docteur en Sciences

Spécialité : Génie Mécanique

---

### Problèmes axisymétriques Torsionnel et Thermoélastique d'une Plaque Epaisse reposant sur une Fondation Circulaire

---

Fadila GUERRACHE

Sous la direction de Mr. Belkacem KEBLI, Professeur, ENP, Alger

Présentée et soutenue publiquement le (24/06/2021)

#### Composition du Jury :

Président	Mr. Said RECHAK	Pr	ENP, Alger
Directeur de thèse	Mr. Belkacem KEBLI	Pr	ENP, Alger
Examineur	Mr. Yacine ADJABI	MCA	UMBB, Boumerdès
Examineur	Mr. Arezki KESSI	Pr	USTHB, Alger
Examineur	Mr. Mourad BALISTROU	Pr	UMBB, Boumerdès
Examineur	Mr. Yacine BELKACEMI	MCA	ENP, Alger
Invité	Mr. Messaoud HACHEMI	Pr	UMBB, Boumerdès

**ENP 2021**

## *Dédicace*

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières m'ont toujours donné de la force pour persévérer et pour prospérer dans la vie.

**Papa "Amer", Mama "BAOUALI Houria"**, je mets entre vos mains le fruit de longues années d'études. C'est à vous que je dois cette réussite, je suis fière et très heureuse de vous l'offrir. Puisse Dieu, le très haut, vous accorde santé, bonheur et longue vie.

**Fadila**

## *Remerciements*

Premièrement je remercie DIEU, pour m'avoir aidée à réussir dans mes études, particulièrement à la réalisation de cette thèse de Doctorat.

Ce travail n'aurait pas pu être effectué sans l'accord, le soutien et l'aide de plusieurs personnes.

✿ Je tiens à remercier chaleureusement, du fond du cœur : Pr. Belkacem Kebli, le Directeur de cette thèse, pour la disponibilité et la patience dont il a fait preuve durant tout le temps qu'a duré ce travail, et je lui souhaite tout bonheur, santé et prospérité. Merci monsieur

✿ Mes remerciements sont aussi adressés à Dr. Soulimane Berkane de l'Université du Québec, Outaouais, Canada, pour son aide dans la réalisation des résultats de la partie numérique.

✿ Je tiens à remercier tous les enseignants (es) que j'ai eu l'honneur et le plaisir de rencontrer au cours de ma recherche au sein de la Faculté de Technologie de l'Université de Boumerdes. Spécialement Pr. Madjid Hachemi, Directeur du Laboratoire Energétique, Mécanique & Ingénierie (LEMI). Je les remercie pour leurs conseils, leurs encouragements ainsi que pour m'avoir fait bénéficier de leurs compétences scientifiques qui m'ont été d'une aide inestimable pour la réalisation de ces travaux de recherches.

✿ Par ailleurs, je tiens à remercier Pr. Rechak pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury de soutenance. Mais également, j'exprime aussi mes sincères remerciements à Pr. Arezki Kessi, Pr. Mourad Balistrrou, Dr. Yacine Belkacemi et Dr. Yacine Adjabi pour avoir bien voulu accepter d'examiner ce travail. Et enfin à Pr. Messaoud Hachemi pour m'avoir fait l'honneur d'accepter mon invitation à participer à ce jury.

✿ Ainsi qu'à toutes les personnes de l'Ecole Nationale Polytechnique et Université de Boumerdes ayant contribué de près ou de loin à la concrétisation de cette thèse de Doctorat.

**Mes vifs remerciements vont aussi aux membres de ma famille, chers frères et chères sœurs qui m'ont toujours encouragée et soutenue.**

Fadila GUERRACHE

**ملخص:** في بداية هذه الأطروحة نقدم حل تحليلي لمشكلة الالتواء المحوري للوحة مرنة سميكة تتركز جزئياً على قاعدة دائرية بواسطة قرص صلب. بعد ذلك تطرقنا إلى مشكلة التشوه المرنة للوحة للحالة الثانية من الدراسة. لحل هذا النوع من المشاكل تستخدم صيغ وظائف بوسنيك والتحويلات التكاملية لهانكل. هذا يجعل من الممكن تحويل المشاكل من شروط الحدود المزدوجة إلى نظام المعادلات التكاملية المزدوجة. باستخدام صيغة جيجوبوا، نحصل على نظام من المعادلات الجبرية الخطية اللانهائية. في الجزء الأخير من هذه الأطروحة يتم النظر في مشكلة الاتصال الحراري المرن. تتيح الشروط الحدودية المزدوجة إلى ارجاع المشكلة المدروسة إلى نظامين مزدوجين من المعادلات التكاملية المزدوجة. هذه الأخير يتم تخفيضها أيضاً إلى نظام من المعادلات الجبرية الخطية. لوحظ اتفاق جيد بين النتائج التي تم الحصول عليها وتلك المتحصل عليها في البحوث المنشورة في مجلات عالمية محكمة.

**الكلمات الدالة:** مشكلة تناظرية، التواء مرن، تشوه حراري، تحويل تكاملي لهانكل، معادلات تكاملية مزدوجة، نظام معادلات جبرية خطية لانهاية، عامل شدة الإجهاد.

**Abstract:** At the first work, an analytical solution is presented to an axisymmetric torsion problem of an elastic layer partially resting on a clamped circular base by a disc rigid. Then, the problem of elastostatic deformation of the elastic layer is brought up for the second case of study. The method of solving these problems uses the Boussinesq stress functions and the Hankel integral transforms. The doubly mixed boundary value problem is converted to a system of dual integral equations. Using Gegenbauer's formula, we obtain an infinite algebraic system of simultaneous equations. The thermoelastic contact problem is considered in the last part. The doubly mixed boundary value problem is reduced to a pair of systems of dual integral equations. These last are also reduced to a system of linear algebraic equations. A good agreement is observed between the results obtained and those from the literature.

**Keywords:** Axisymmetric problem, Elastic torsion, Thermoelastic deformation, Hankel integral transforms, Dual integral equations, Infinite algebraic system, Stress singularity factors.

**Résumé :** Une solution analytique est présentée, initialement, à un problème de torsion axisymétrique d'une plaque élastique épaisse reposant partiellement sur un support circulaire encastrée par un disque rigide. Ensuite, le problème de déformation élastostatique de la plaque est envisagé dans le second cas d'étude. La méthode de résolution de ces problèmes utilise les fonctions auxiliaires de Boussinesq et la transformation intégrale de Hankel. Ce qui permet de convertir les problèmes aux conditions aux limites doublement mixtes à un système d'équations intégrales duales. A l'aide de la formule de Gegenbauer, nous obtenons un système d'équations algébriques linéaires infinies. Le problème de contact thermoélastique est considéré dans la dernière partie. Les conditions aux limites doublement mixtes permettent de ramener le problème étudié à une paire de systèmes d'équations intégrales duales. Ces dernières sont réduites aussi à un système d'équations algébriques linéaires. Un bon accord est observé entre les résultats obtenus et ceux issus de la littérature.

**Mots-clés :** Problème axisymétrique, Torsion élastique, Déformation thermoélastique, Transformation de Hankel, Equations intégrales duales, Système algébrique infini, Facteur de singularité de contrainte.

# Table des matières

*Remerciements*

*Résumé*

*Liste des figures*

*Liste des tableaux*

*Nomenclature*

**Introduction Générale**.....16

**Chapitre 1 Synthèse Bibliographique**.....21

**Chapitre 2 Eléments sur la Théorie d'Elasticité**.....42

Introduction.....42

2.1 Elasticité.....42

2.1.1 Contrainte.....42

2.1.2 Tenseur des contraintes.....43

2.1.3 Déformation.....44

2.1.4 Modules élastiques.....47

2.1.5 Equation de l'élasticité.....52

2.2 Transfert thermique.....54

2.2.1 Champ de température.....54

2.2.2 Gradient de température.....54

2.2.3 Flux de chaleur.....55

2.2.4 Thermoélasticité.....56

2.2.5 Formulation de la thermoélasticité isotrope linéaire.....56

2.3 Mécanique de la rupture.....57

2.3.1 Modes élémentaires de rupture.....57

Conclusion.....59

**Chapitre 3 Préliminaires Mathématiques**.....61

Introduction.....61

3.1 Equation différentielle de Bessel et sa solution.....61

3.1.1 Equation de Bessel.....62

3.1.2 Formule de récurrence pour les fonctions de Bessel de première espèce.....67

3.1.3 Fonctions de Bessel dont l'indice diffère d'un entier de $\pm \frac{1}{2}$ .....	67
3.2 Polynômes de Chebyshev .....	68
3.2.1 Polynômes de Chebyshev de première et de deuxième espèce .....	68
3.2.2 Formules de récurrence des polynômes de Chebyshev .....	68
3.2.3 Valeurs particulières des polynômes de Chebyshev .....	69
3.3 Fonction de Heaviside .....	69
3.4 Transformation de Hankel .....	70
3.4.1 Généralité .....	70
3.4.2 Transformées de Hankel d'ordre n .....	72
3.5 Méthodes d'intégration numérique .....	74
3.5.1 Méthode des trapèzes .....	74
3.5.2 Méthode de Simpson .....	75
3.6 Résolution d'un système d'équations .....	76
3.6.1 Systèmes linéaires .....	76
Conclusion .....	76
<b>Chapitre 4 Torsion axisymétrique d'une Plaque Epaisse par un Disque Rigide .....</b>	<b>78</b>
Introduction .....	78
4.1 Formulation du problème et de sa solution .....	79
4.2 Expressions analytiques des déplacements et des contraintes .....	85
4.3 Discussion et validation des résultats .....	87
Conclusion .....	99
<b>Chapitre 5 Problème de Contact axisymétrique d'un Milieu Elastique reposant sur une Fondation Circulaire Rigide .....</b>	<b>101</b>
Introduction .....	101
5.1 Formulation du problème et sa résolution .....	102
5.2 Calcul analytique des déplacements et des contraintes .....	108
5.3 Validation et interprétation .....	110
Conclusion .....	123



<b>Chapitre 6 Déformation Thermoélastique par un Poinçon Rigide d'une Plaque</b>	
<b>Épaisse</b> .....	126
Introduction.....	126
6. 1 Formulation des équations de la thermoélasticité.....	127
6.2 Méthodologie de résolution du problème thermoélastique.....	128
6.2.1 Résolution du problème de la conduction thermique.....	130
6.2.2 Résolution du problème thermoélastique.....	136
6.3 Déplacements et contraintes.....	141
Conclusion.....	156
<b>Conclusion Générale et Perspective</b> .....	159
<b>Références Bibliographiques</b> .....	163
<b>Annexes</b> .....	169

# Liste des figures

## Chapitre 1 Synthèse Bibliographique

Figure 1.1 Problème de Reissner et Sagoci, 1944.....	21
Figure 1.2 Problème de Florence, 1961.....	22
Figure 1.3 Problème de Sih et Chen, 1971.....	22
Figure 1.4 Problème de Smelyanska, 1971.....	23
Figure 1.5 Problème de Low, 1972.....	23
Figure 1.6 Problème de Dhawan, 1974.....	24
Figure 1.7 Problème de Tomate et al, 1975.....	24
Figure 1.8 Problème de Singh et Dhaliwal, 1977.....	25
Figure 1.9 Problème de Gazetas, 1981.....	25
Figure 1.10 Problème de Hara et al, 1989.....	26
Figure 1.11 Problème d'Erguven, 1991.....	26
Figure 1.12 Problem de Pak et Saphores, 1991.....	27
Figure 1.13 Problème de Bacci, 1996.....	27
Figure 1.14 Problème de Li et al, 1998.....	27
Figure 1.15 Problème de Matysiak et al, 2011.....	28
Figure 1.16 Problème de Madani et Kebli, 2017.....	28
Figure 1.17 Problème de Madani et Kebli, 2019.....	29
Figure 1.18 Problème de Lebedev et Ufliand, 1958.....	29
Figure 1.19 Problème de Zakorko, 1974.....	30
Figure 1.20 Problème de Dhaliwal et Singh, 1977.....	30
Figure 1.21 Problème de Wood, 1984.....	30
Figure 1.22 Problème de Gecit, 1987.....	31
Figure 1.23 Problème de Gecit, 1988.....	31
Figure 1.24 Problème de Sakamoto et al, 1990.....	32
Figure 1.25 Problème de Hara et al, 1990.....	32
Figure 1.26 Problème de Sakamoto, 2003.....	33
Figure 1.27 Problème de Sakamoto, 2004.....	34
Figure 1.28 Problème de Sakamoto, 2005.....	34
Figure 1.29 Problème de Kebli et Baka, 2019.....	34
Figure 1.30 Problem de Dhaliwal, 1966.....	35
Figure 1.31 Problem de Dhaliwal, 1967.....	35
Figure 1.32 Problem de Mehta et Bose, 1983.....	36

Figure 1.33 Problème de Dhaliwal, 1971.....	36
Figure 1.34 Problème de Wadhawan, 1973.....	37
Figure 1.35 Problème de Negus et al, 1988.....	37
Figure 1.36 Problème de Lemczyk et Yovanovich, 1988.....	38
Figure 1.37 Problème de Lemczyk et Yovanovich, 1988.....	38
Figure 1.38, 39 Problème de Rao, 2004.....	39
Figure 1.40 Problème d’Abed-Halim et Elfalaky, 2005.....	39
Figure 1.41 Problème d’Elfalaky et Abdel-Halim, 2006.....	40
Figure 1.42 Problème de Li et al, 2015.....	40
Figure 1.43 Problème de Kebli et Baka, 2020.....	40

## **Chapitre 2 Eléments sur la Théorie d’Elasticité**

Figure 2.1 Représentation de vecteur contrainte.....	43
Figure 2.2 Représentation des composantes du tenseur des contraintes.....	43
Figure 2.3 Equilibre d’un tétraèdre.....	44
Figure 2.4 Trajectoire d'une particule et affinité tangente.....	45
Figure 2.5 Déformation de deux vecteurs perpendiculaires.....	45
Figure 2.6 Déformation d’AB et AC.....	46
Figure 2.7 Représentation simplifiée d’une machine d’essai de traction.....	48
Figure 2.8 Courbe contrainte – déformation.....	49
Figure 2.9 Essai de traction ou de compression.....	50
Figure 2.10 Modes de fissuration.....	58

## **Chapitre 3 Préliminaires Mathématiques**

Figure 3.1 Graphe de la fonction de Bessel de première espèce.....	65
Figure 3.2 Fonction de Heaviside.....	69
Figure 3.3 Méthode des trapèzes.....	75
Figure 3.4 Méthode de Simpson.....	75

## **Chapitre 4 Torsion axisymétrique d’une Plaque Epaisse par un Disque Rigide**

Figure 4.1 Schéma représentant le problème dans un repère cylindrique.....	80
Figure 4.2 Champ de déplacement $v^*$ pour $b/a=1.5$ en fonction de $z/h$ .....	93
Figure 4.3 Champ de contrainte $\tau_{\theta z}^*$ pour $b/a=1.5$ en fonction de $z/h$ .....	93

Figure 4.4 Variation de $(v^*)_{z=0}$ pour $b/a=1.5$ avec différentes valeurs de $h/a$ .....	94
Figure 4.5 Variation de $(v^*)_{z=0}$ pour $h/a=1.5$ avec différentes valeurs de $b/a$ .....	94
Figure 4.6 Variation de $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ pour $b/a=1.5$ avec différentes valeurs de $h/a$ .....	95
Figure 4.7 Variation de $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$ pour $h/a=1.5$ avec différentes valeurs de $b/a$ .....	95
Figure 4.8 Variation de $M/G\omega_0 a^3$ en fonction de $h/a$ pour une variation de $b/a$ .....	96
Figure 4.9 Variation de $M/G\omega_0 a^3$ en fonction de $b/a$ pour une variation de $h/a$ .....	96
Figure 4.10 Variation du moment de torsion pour $b/a \rightarrow \infty$ en fonction de $\beta = h/a$ .....	97
Figure 4.11 Variation de $M/G\omega_0 a^3$ pour $b/a \rightarrow \infty$ en fonction de $h/a$ .....	97
Figure 4.12 Variation de $S_0, S_h$ pour différentes valeurs de $h/a$ .....	98
Figure 4.13 Variation de $S_0, S_h$ pour différentes valeurs de $b/a$ .....	98

## **Chapitre 5 Problème de Contact axisymétrique d'un Milieu Elastique reposant sur une Fondation Circulaire Rigide**

Figure 5.1 Géométrie du problème.....	103
Figure 5.2 Distribution de $\sigma_z^*$ pour $h/a=1.5$ et $b/a=1.5$ en variation de $z/h$ .....	115
Figure 5.3 Distribution de $w_z^*$ pour $h/a=1.5$ et $b/a=1.5$ en variation de $z/h$ .....	115
Figure 5.4 Variation de $(\sigma_z^*)_{z=0}$ pour $b/a=1.5$ avec différentes valeurs de $h/a$ .....	116
Figure 5.5 Variation de $(\sigma_z^*)_{z=0}$ pour $h/a=1.5$ avec différentes valeurs de $b/a$ .....	116
Figure 5.6 Variation de $(w_z^*)_{z=0}$ pour $b/a=1.5$ avec différentes valeurs de $h/a$ .....	117
Figure 5.7 Variation de $(w_z^*)_{z=0}$ pour $h/a=1.5$ avec différentes valeurs de $b/a$ .....	117
Figure 5.8 Variation de $(\sigma_z^*)_{z=h}$ pour $b/a=1$ en fonction de $h/a$ .....	118
Figure 5.9 Variation de $(\sigma_z^*)_{z=h}$ pour $h/a=1.5$ en fonction de $b/a$ .....	118
Figure 5.10 Variation de $(w_z^*)_{z=h}$ pour $b/a=1$ en fonction de $h/a$ .....	119
Figure 5.11 Variation de $(w_z^*)_{z=h}$ pour $h/a=1.5$ en fonction de $b/a$ .....	119
Figure 5.12 Variation de $P^*$ pour différentes valeurs de $b/a$ .....	120

Figure 5.13 Variation de $P^*$ pour différentes valeurs de $h/a$ .....	120
Figure 5.14 Variation de $S_0$ pour une variation de $b/a$ .....	121
Figure 5.15 Variation de $S_0$ pour une variation de $h/a$ .....	121
Figure 5.16 Variation de $S_h$ pour une variation de $b/a$ .....	122
Figure 5.17 Variation de $S_h$ pour une variation de $h/a$ .....	122

## Chapitre 6 Déformation Thermoélastique par un Poinçon Rigide d'une Plaque Epaisse

Figure 6.1 Distributions de température pour $b/a = 1.5$ en variation de $h/a$ .....	135
Figure 6.2 Distributions de température pour $h/a = 5$ en variation de $b/a$ .....	136
Figure 6.3 Distributions de flux de chaleur pour $b/a = 0.5$ et $h/a=1.5$ .....	136
Figure 6.4 Variation de $(\sigma_\rho^*)_{\rho=0}$ pour $b/a = 0.75$ avec différentes valeurs de $h/a$ .....	146
Figure 6.5 Variation de $(\sigma_\rho^*)_{\rho=0}$ pour $h/a = 1.5$ avec différentes valeurs de $b/a$ .....	146
Figure 6.6 Variation de $(w_\rho^*)_{\rho=0}$ pour $b/a = 0.75$ avec différentes valeurs de $h/a$ .....	147
Figure 6.7 Variation de $(w_\rho^*)_{\rho=0}$ pour $h/a = 1.25$ avec différentes valeurs de $b/a$ .....	147
Figure 6.8 Variation de $(\sigma_\rho^*)_{\rho=\delta}$ pour $b/a=0.75$ avec différentes valeurs de $h/a$ .....	148
Figure 6.9 Variation de $(\sigma_\rho^*)_{\rho=\delta}$ pour $h/a=1.5$ avec différentes valeurs de $b/a$ .....	148
Figure 6.10 Variation de $(w_\rho^*)_{\rho=\delta}$ pour $b/a = 0.75$ avec différentes valeurs de $h/a$ .....	149
Figure 6.11 Variation de $(w_\rho^*)_{\rho=\delta}$ pour $h/a=1.5$ avec différentes valeurs de $b/a$ .....	149
Figure 6.12 Variation de $P^*$ pour $b/a=0.75$ en fonction de $h/a$ .....	150
Figure 6.13 Variation de $P^*$ pour $h/a=0.75$ en fonction de $b/a$ .....	151
Figure 6.14 Variation de $S_0$ pour $h/a = 1.5$ en fonction de $b/a$ .....	152
Figure 6.15 Variation de $S_0$ pour $b/a=0.75$ en fonction de $h/a$ .....	153
Figure 6.16 Variation de $S_h$ pour $b/a=0.75$ en fonction de $h/a$ .....	154
Figure 6.17 Variation de $S_h$ pour $h/a=1.5$ en fonction de $b/a$ .....	155

## Liste des tableaux

### Chapitre 4 Torsion axisymétrique d'une Plaque Epaisse par un Disque Rigide

Tableau 4.1 Valeurs des coefficients $\alpha_n$ et $\beta_n$ ( $h/a=1$ ).....	90
Tableau 4.2 Valeurs des coefficients $\alpha_n$ et $\beta_n$ ( $b/a=1$ ).....	91
Tableau 4.3 Valeurs des coefficients $\alpha_n$ et $\beta_n$ ( $h/a \rightarrow \infty$ ).....	92
Tableau 4.4 Valeurs des coefficients $\alpha_n$ et $\beta_n$ ( $h/a=2$ et $b/a \rightarrow \infty$ ).....	92

### Chapitre 5 Problème de Contact axisymétrique d'un Milieu Elastique reposant sur une Fondation Circulaire Rigide

Tableau 5.1 Valeurs des coefficients $\alpha_n$ et $\beta_n$ ( $h/a=1.5$ ).....	112
Tableau 5.2 Valeurs des coefficients $\alpha_n$ et $\beta_n$ ( $b/a=1.5$ ).....	113
Tableau 5.3 Valeurs des coefficients $\alpha_n$ et $\beta_n$ ( $h/a \rightarrow \infty$ ).....	114

### Chapitre 6 Déformation Thermoélastiques par un Poinçon Rigide d'une Plaque Elastique

Tableau 6.1 Valeurs des coefficients $a'_n$ ( $b/a=0.25$ ).....	134
Tableau 6.2 Valeurs des coefficients $a'_n$ ( $h/a=5$ ).....	135
Tableau 6.3 Paramètres thermiques et élastiques d'acier moyen.....	143
Tableau 6.4 Valeurs des coefficients $\beta'_n$ et $\gamma'_n$ ( $b/a=0.75$ ).....	144
Tableau 6.5 Valeurs des coefficients $\beta'_n$ et $\gamma'_n$ ( $h/a=1.25$ ).....	145

## Nomenclature

$(r, \theta, z)$	- Coordonnées cylindriques
$(u, v, w)$	- Vecteur de déplacement
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	- Contraintes normales
$\tau_{rz}, \tau_{\theta z}, \tau_{r\theta}$	- Contraintes tangentielles
$a, b$	- Rayons
$h$	- Epaisseur
$\nu$	- Coefficient de Poisson
$G$	- Module de cisaillement
$M$	- Moment de torsion
$\omega_0$	- Angle
$P$	- Force
$\varepsilon_0$	- Pénétration
$T$	- Température
$T_0$	- Température de référence
$\alpha$	- Coefficient de dilatation thermique
$\partial T / \partial z$	- Flux de chaleur
$F$	- Transformation de Hankel
$\varphi_0, \varphi_3$	- Fonction auxiliaire de Boussinesq
$T_H$	- Transformée de Hankel de $T$
$\sigma_H$	- Transformée de Hankel de $\sigma_z$

$\tau_H$	- Transformée de Hankel de $\tau_{rz}$
$J_n$	- Fonction de Bessel de première espèce
$T_n$	- Polynôme de Chebyshev de première espèce
$U_n$	- Polynôme de Chebyshev de deuxième espèce
$H$	- Fonction de Heaviside
$si$	- Fonction intégrale sinus
$ci$	- Fonction intégrale cosinus
$S_0, S_h$	- Facteur de singularité de contrainte
$\delta_{nm}$	- Symbole de Kronecker
$n, m$	- Indice
$(\alpha_n, \beta_n), a_n, (\beta'_n, \gamma'_n)$	- Coefficients du système algébrique



## **Introduction Générale**

# Introduction Générale

Un corps solide soumis à l'action des forces intérieures ou extérieures subit des déformations ou des déplacements relatifs. Si les déplacements sont petits, ne dépassent pas une certaine valeur limite, la déformation disparaît en même temps que la force qui lui a donnée naissance. Dans tous les problèmes proposés, nous supposerons que les corps soumis à l'action des forces, sont parfaitement élastiques, c'est-à-dire qu'ils reprennent exactement leur forme primitive dès que les forces en question cessent d'agir.

Le développement de certaines théories d'élasticité à travers le temps est dû essentiellement à quelques phénomènes importants :

- Le progrès qu'a connu le monde de l'expérimentation sur le comportement des corps en déformation.
- Le développement rapide des théories mathématiques qui a permis de passer des principes physiques aux méthodes analytiques puis numériques.

Notre problème suppose, au lieu d'une structure moléculaire des corps élastiques, un milieu élastique qui est homogène et uniformément distribué dans tout son volume, de sorte que le plus petit élément détaché de ce corps possède les mêmes propriétés physiques que le corps lui-même. Pour simplifier le problème, nous supposerons également que le corps est isotrope, c'est-à-dire que ses propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions.

D'après toutes les caractéristiques que contiennent les matériaux, les plus grandes découvertes qui ont contribué beaucoup plus au développement de la théorie de l'élasticité sont :

- La découverte de la loi de Hooke en 1660. Elle traduit la proportionnalité qui existe entre les contraintes et les déformations. C'est la base de toute la théorie de l'élasticité.
- La formulation des équations générales supplémentaires en élasticité par Navier en 1821 qui permettaient de réduire tous les problèmes des petites déformations des corps élastiques en un calcul mathématique.
- En 1822, Cauchy a découvert les plus grandes lignes de la théorie pure de l'élasticité. Il a introduit la notion de contrainte en un point exprimée comme étant une traction par unité de surface.

La théorie de l'élasticité repose donc sur la détermination d'un état de contraintes ou de déformations à l'intérieur d'un corps solide soumis à des forces de volume ou à des forces de surface. La détermination de cet état revenait généralement à la recherche de certaines fonctions représentant les composantes de déplacement. Ces fonctions doivent satisfaire les équations d'équilibre en tout point du corps et aussi satisfaire certaines conditions aux limites de ce corps, ces fonctions s'appellent les fonctions harmoniques. Actuellement, les solutions de la majorité des problèmes rencontrés sont connues et les méthodes numériques découvertes récemment avec le développement de l'outil informatique viennent confirmer ces solutions.

Le contact mécanique est un domaine multidisciplinaire. Il interagit avec la mécanique, le frottement, le comportement des matériaux et la thermique. C'est également un problème multi-échelle allant des effets microscopiques aux phénomènes macroscopiques de dissipation de chaleur ou de déformations structurelles.

Le phénomène de contact est un problème central de la mécanique des solides, car la zone de contact est le lieu principal où les efforts sont concentrés sur un corps déformable et représente le point le plus critique du corps dans toute étude théorique ou expérimentale.

Toutes ces interactions avec les autres disciplines (Mécanique des milieux continus, mécanique des matériaux, interactions entre surfaces, mécanique des fluides, transfert thermique,...), font de la mécanique du contact un thème d'intérêt important pour les chercheurs et les ingénieurs mécaniciens. Les phénomènes liés au problème des contacts mécaniques sont présents dans de nombreuses applications domestiques et industrielles. La nature très complexe des phénomènes liés à l'interaction purement mécanique ou multi-physique entre les solides nécessite toujours une attention particulière dans les domaines de la physique, des mathématiques et de l'informatique.

La thèse est structurée en six chapitres. Une étude bibliographique sur les travaux relatifs ayant une certaine similarité avec notre étude fait l'objet du premier chapitre. Le second chapitre consiste en un support théorique de l'étude où sont définis les cadres conceptuel et théorique de la thèse. La première partie présente quelques rappels sur la théorie de l'élasticité.

Des notions fondamentales sur le transfert thermique ont été développées dans la seconde partie. Le chapitre est clôturé par un aperçu sur la mécanique de la rupture.

Le formalisme mathématique pour l'étude des problèmes proposés a été exposé dans le troisième chapitre. Un rappel mathématique sur les fonctions de Bessel ainsi que les polynômes de Chebyshev et leurs propriétés est décrit dans la première partie du chapitre. Ce qui permet d'introduire la notion de la transformation intégrale de Hankel dans la partie suivante. A la fin du chapitre les méthodes d'intégration numérique ont été établies.

La solution analytique du problème de torsion axisymétrique d'une plaque élastique épaisse reposant partiellement sur un support encastrée circulaire a été présentée dans le quatrième chapitre. La méthode de résolution utilise les fonctions auxiliaires de Boussinesq et de la transformation intégrale de Hankel. Ce qui permet de ramener le problème aux conditions aux limites doublement mixtes à des équations intégrales duales. Un système d'équations algébriques linéaires permettant de calculer les fonctions inconnues du problème s'obtient par la formule d'expansion de Gegenbauer de la fonction de Bessel. Les effets du rayon du disque et celui du support et l'épaisseur de la plaque sur les déplacements, les contraintes ainsi sur les facteurs de singularité de contrainte sont représentés et illustrés graphiquement.

Le cinquième chapitre est consacré à la résolution d'un problème de déformation élastostatique d'un milieu élastique reposant sur une fondation rigide. La méthode de résolution des équations intégrales duales correspondantes est formalisée par la même procédure que précédemment. Les résultats numériques sous forme graphiques ont été obtenus et discutés.

La résolution du problème thermoélastique où l'analyse de l'interface du contact poinçon-plaque élastique sont prises en considération dans le dernier chapitre. Par la méthode de la transformation intégrale de Hankel, le problème des conditions aux limites doublement mixtes est réduit à une paire de systèmes d'équations intégrales duales. Les systèmes d'équations intégrales ont été réduits aussi à un système d'équations algébriques linéaires. Des solutions numériques sont également obtenues clarifiant les effets de différentes grandeurs physiques du problème étudié.

La thèse s'achève par une conclusion générale et perspective qui illustre les principaux résultats obtenus à travers cette étude. Une annexe est jointe à cette thèse pour décrire les principaux calculs analytiques qui nous ont permis d'aboutir aux différents résultats.

## **Problématique et objectif du travail**

Notre travail de recherche s'articule sur l'analyse d'un problème de contact axisymétrique d'une plaque élastique épaisse. Le milieu considéré repose partiellement sur un support circulaire et une fondation rigide, respectivement. Les cas étudiés sont les suivants :

- ☞ Une rotation est appliquée au disque autour de son axe sur la surface supérieure de la plaque épaisse a été considéré à la première étude.
- ☞ Par la suite, une force axiale est exercée sur le poinçon appliqué à la surface  $z = h$  du milieu élastique.
- ☞ Dans le dernier cas, la plaque est supposée être simultanément soumise à des sollicitations mécaniques et thermiques. Un champ thermique uniforme est imposé le long de la zone de contact par l'application d'un poinçon chauffé sur la plaque alors que le reste de la surface est maintenu à une température nulle.

La méthodologie élaborée pour la résolution de ces travaux de recherche étudiant les problèmes de mécanique de contact est articulée autour d'un développement d'une méthode analytique substantielle basée sur la transformée de Hankel. Cette approche consiste à transformer le problème aux conditions aux limites doublement mixtes à un système d'équations intégrales duales. Contrairement à l'approche classique des équations de Fredholm dont l'inconvénient se situe au niveau de l'instabilité du calcul numérique, ces dernières équations sont réduites à un système d'équations algébriques infinies. Les résultats numériques sont obtenus pour diverses valeurs du rayon du disque et celui du poinçon, de la hauteur de la plaque, le rayon du support ainsi que celui de la fondation contrairement aux restrictions de l'approche des équations de Fredholm.

# **Chapitre 1**

## **Synthèse Bibliographique**

# Chapitre 1

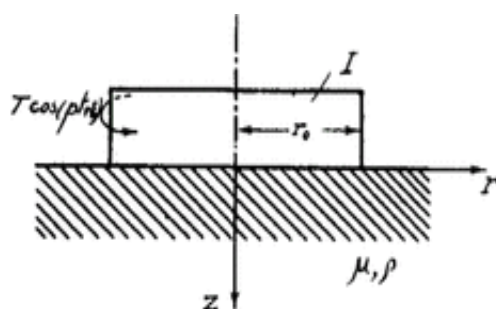
## Synthèse Bibliographique

### 1.1 Historique

L'objectif principal de ce chapitre est une description de l'état de l'art permettant de présenter le cadre général sur les problèmes étudiés. Il se compose de deux parties distinctes :

#### 1.1.1 Les problèmes de l'élasticité dans la littérature

Les problèmes relatifs à la détermination des contraintes et des déplacements, d'un disque rigide subissant une torsion axisymétrique dans un milieu élastique, ont été un sujet d'intérêt considérable pour la mécanique et les mathématiques appliquées. Parmi ces problèmes nous citons : Une solution explicite du problème de frontière mixte obtenue en introduisant de manière appropriée un système de coordonnées cylindriques pour le cas statique de déformation en torsion développé par *Reissner et Sagoci* [1].



*Figure 1.1* Problème de *Reissner et Sagoci*, 1944.

*Florence* [2] dans son étude, s'est intéressé à une solution analytique de la répartition des contraintes, dues à la torsion d'un disque rigide d'une couche élastique épaisse, encastrée à une fondation rigide. Le disque est fixé sur la surface libre de la couche. Dans l'analyse qui relève

de la théorie classique d'élasticité linéaire, le problème est ramené à un système d'équations intégrales duales. La solution du système est évaluée en utilisant la méthode de Cooke.

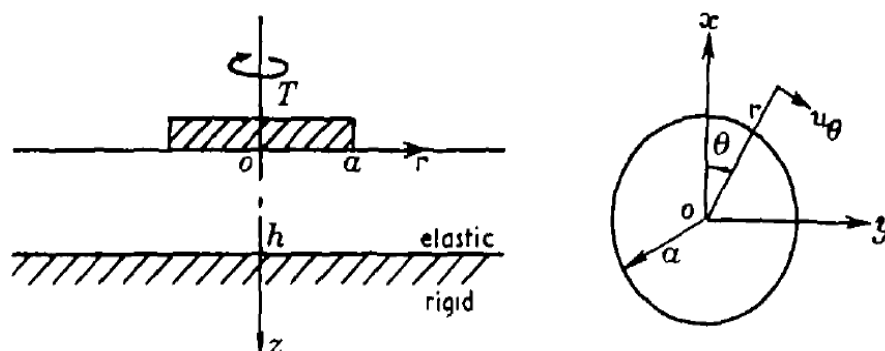


Figure 1.2 Problème de Florence, 1961.

L'effet d'un composite laminaire imparfaitement collé est examiné en termes d'intensité des contraintes de torsion agissant près de la fissure circulaire est considérée par *Sih et Chen* [3], le composite laminaire est modélisé par quatre couches des différents matériaux avec les deux couches extérieures qui ont une hauteur infinie et un décollement se produit à l'interface des deux couches externes. L'analyse est basée sur l'application de la méthode de transformé de Henkel, la solution du système d'équations intégrales duales peut être facilement étendue à un système multicouches. Les équations intégrales duales correspondantes ont été réduites à une équation de Fredholm et résolues numériquement avec la méthode des petits paramètres.

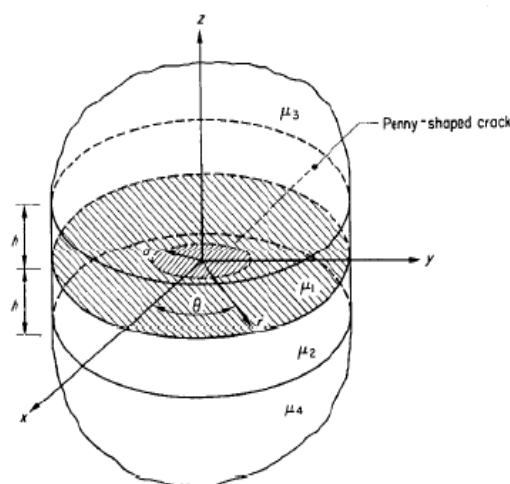


Figure 1.3 Problème de Sih et Chen, 1971.

Une couche élastique composite affaiblie par une fissure circulaire plane soumise à une torsion due à la rotation d'une tige cylindrique rigide est résolue par *Smelyanska* [4].



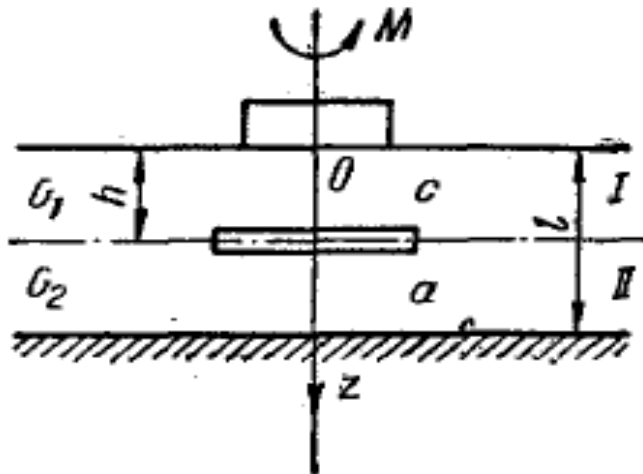


Figure 1.4 Problème de Smelyanska, 1971.

Low [5] a analysé les effets de défauts intégrés dans un demi-espace élastique soumis à des déformations en torsion. En particulier, deux types de défauts sont considérés : une inclusion rigide et une fissure circulaire. Dans chaque cas, le problème est réduit à un système d'équations intégrales de Fredholm.

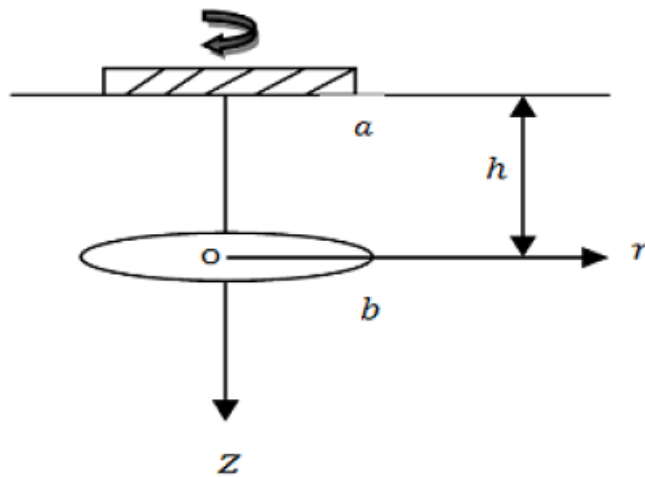


Figure 1.5 Problème de Low, 1972.

Dhawan [6] a développé le problème de torsion d'un demi-espace élastique en présence d'une fissure circulaire dont les lèvres sont supposées non chargées. Le problème est réduit à une équation de Fredholm. L'effet d'un défaut noyé sous la forme d'une fissure circulaire dans un demi-espace élastique soumis à une oscillation de torsion a également été étudié.

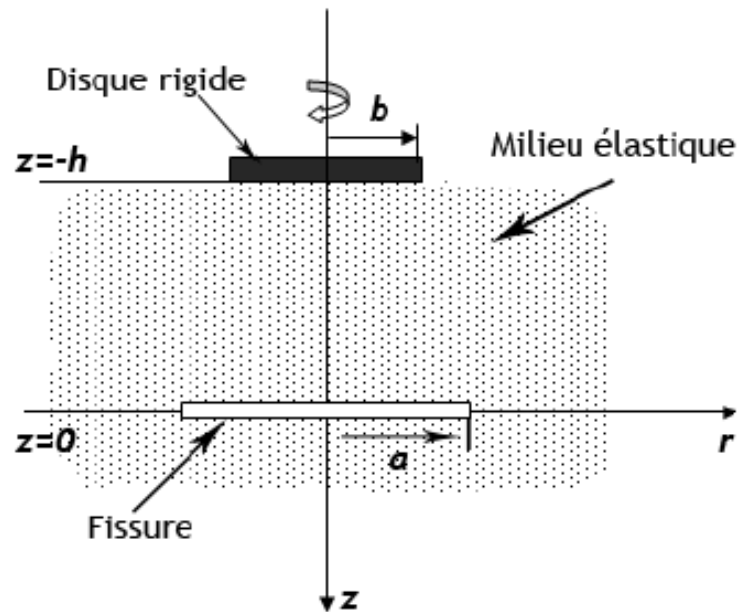


Figure 1.6 Problème de Dhawan, 1974.

Le problème de torsion de deux couches liées par un disque rigide appliquée sur sa surface libre a été mené par *Tomate et al.* [7]. Dans le travail [8], *Singh et Dhaliwal* ont réalisé le problème de la torsion axisymétrique d'une couche élastique par deux disques rigides ayant différents rayons appliqués sur les deux surfaces du couche. Ce problème est réduit à une paire d'équations intégrales de Fredholm qui sont ensuite résolues par la méthode d'itération.

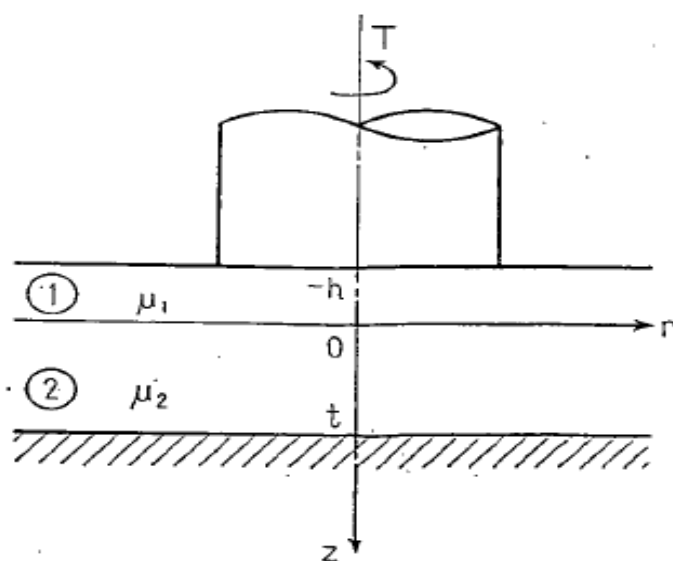
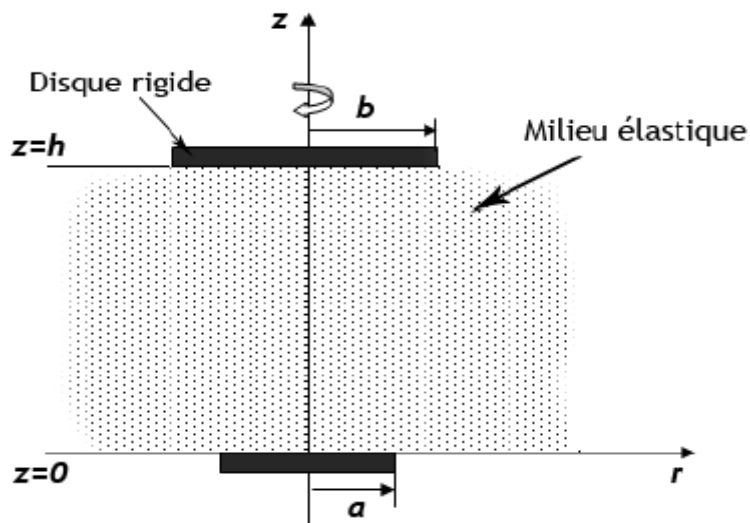
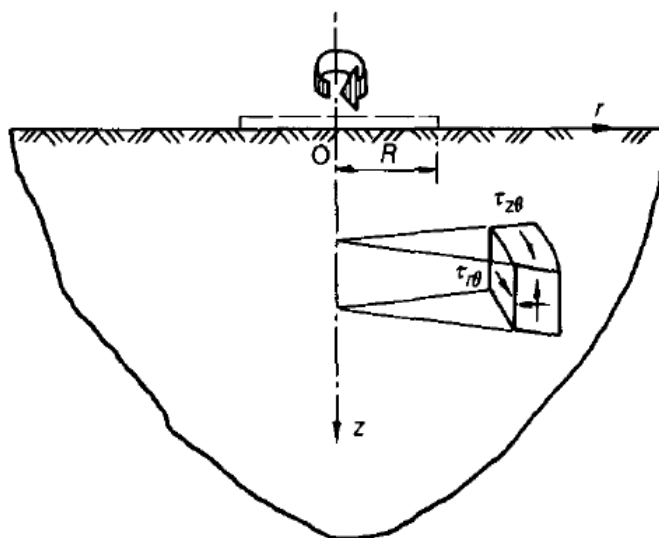


Figure 1.7 Problème de Tomate et al, 1975.



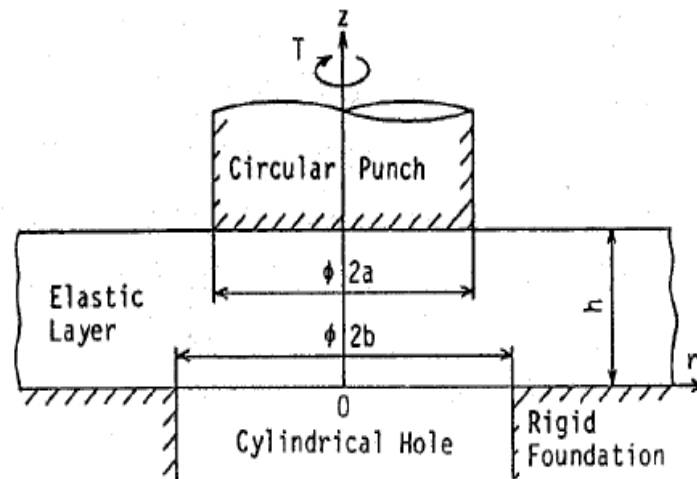
*Figure 1.8* Problème de Singh et Dhaliwal, 1977.

*Gazetas* [9] a étudié l'effet d'inhomogénéité sur la déformation élastique à symétrie axiale apparaissant dans un sol soumis à des tractions à cisaillement en torsion réparties linéairement sur une partie circulaire de la surface. L'inhomogénéité du sol est décrite par un module de cisaillement croissant de manière monotone avec la profondeur. Le problème est formulé en termes de transformées intégrales de Hankel. L'inversion analytique des transformations de Hankel de l'expression résultante apparaissant comme une solution impossible, un schéma d'intégration numérique simple est utilisé pour obtenir la solution complète des distributions de contraintes et de déplacements dans le sol.

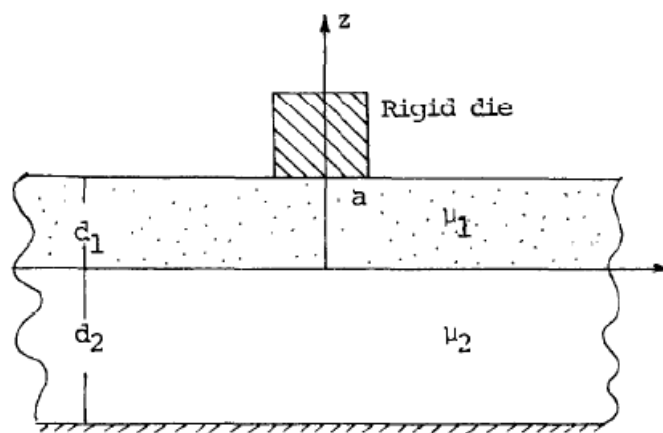


*Figure 1.9* Problème de Gazetas, 1981.

Un problème de torsion axisymétrique d'une couche élastique sur une base rigide ayant un trou circulaire a été traité par *Hara et al.* [10]. Ce problème est réduit à une solution de système d'équations algébriques linéaires infinies. Le problème de la torsion d'un milieu bicouche liées par un disque rigide est développé par *Erguven* [11].



*Figure 1.10* Problème de Hara et al, 1989.



*Figure 1.11* Problème d'Erguven, 1991.

Le problème élastostatique de la torsion axisymétrique d'un disque rigide noyé dans un demi-espace élastique a été considéré par *Pak et Saphores* [12]. A l'aide des transformations de Hankel, une formulation exacte du problème des conditions limites mixtes est présentée sous la forme d'équations intégrales duales. La solution correspondante est obtenue à partir de la résolution d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce en utilisant la méthode d'itération.

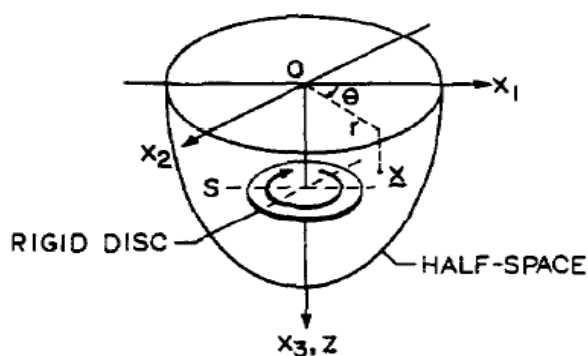


Figure 1.12 Problème de Pak et Saphores, 1991.

Bacci [13] a traité un disque rigide adhère parfaitement à la surface supérieure d'une couche élastique fixée à un support indéformable. Le problème résultant des conditions aux limites mixtes est décrit par une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. Une solution approchée explicitant ce problème est donnée par la méthode quadrature. Le champ de contrainte local pour la torsion de la fissure circulaire dans un matériau graduellement fonctionnel a été discuté par Li et al. [14].

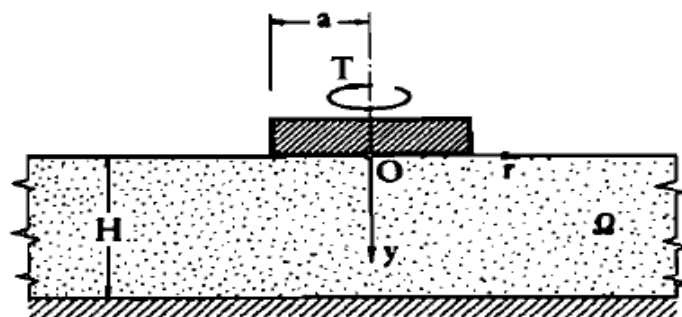


Figure 1.13 Problème de Bacci, 1996.

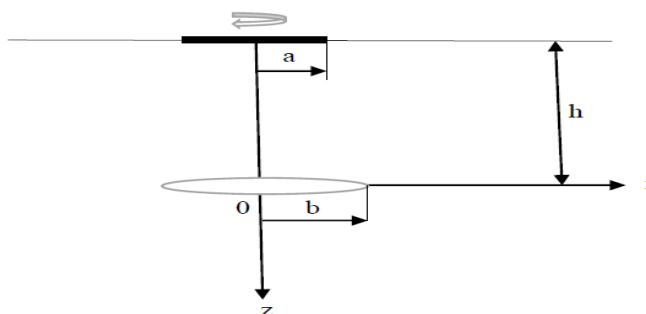
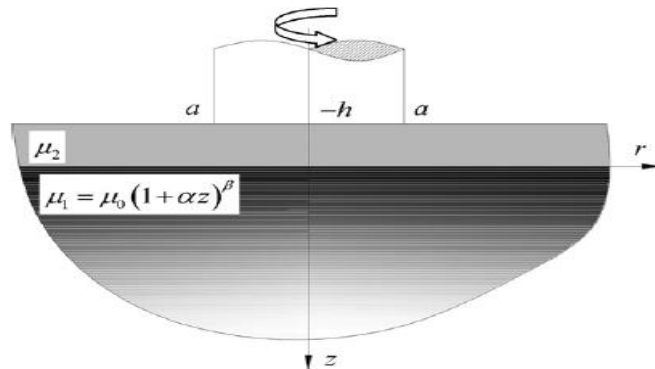


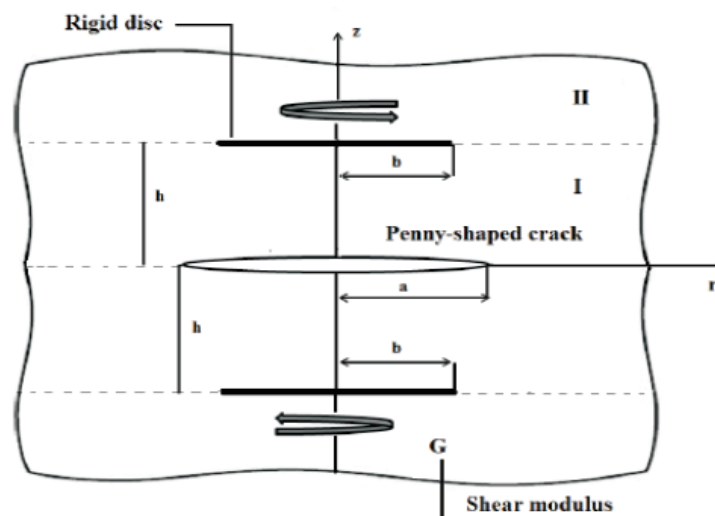
Figure 1.14 Problème de Li et al, 1998.

Le problème de Reissner-Sagoci pour un revêtement homogène sur un demi-espace transversalement isotherme est étudié par *Matysiak et al.* [15]. Le problème correspondant des conditions aux limites mixtes a été réduit à une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. Les auteurs ont utilisés une méthode en quadrature pour sa solution numérique.



**Figure 1.15** Problème de *Matysiak et al.*, 2011.

Le problème de torsion axisymétrique par deux disques rigides circulaires situés symétriquement dans le milieu élastique affaibli par une fissure circulaire à l'intérieur est analysé par *Madani et Kebli* [16]. La solution générale à ce problème est obtenue en utilisant la méthode des transformations de Hankel. Le problème de condition aux limites doublement mixtes est réduit à un système d'équations intégrales duales transformées en équations intégrales de Fredholm de seconde espèce. En utilisant la règle de troncation, le système résultant est converti en un système d'équations algébriques infinies. Ensuite le problème de torsion axisymétrique d'une couche élastique ayant deux fissures interfacées a été traité dans [17].



**Figure 1.16** Problème de *Madani et Kebli*, 2017.

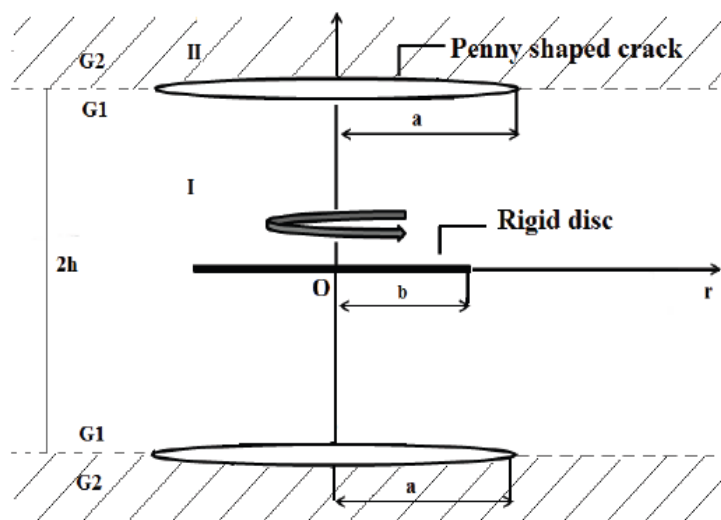


Figure 1.17 Problème de Madani et Kebli, 2019.

On se propose dans la deuxième partie un état de l'art sur les travaux concernant les problèmes de déformations élastiques : *Lebedev* et *Ufliand* [18] ont réalisé le problème de déformation axisymétrique d'une couche élastique ayant une fissure circulaire dans le cas d'un encastrement lisse des frontières. Le problème est alors ramené à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm ayant un noyau continu et symétrique.

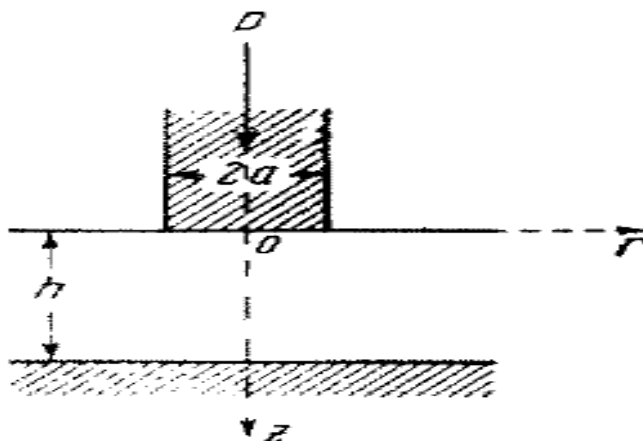


Figure 1.18 Problème de Lebedev et Ufliand, 1958.

La déformation axisymétrique d'une couche élastique ayant une ligne circulaire de séparation des conditions aux limites sur les deux faces a été résolue par *Zakorko* [19]. Les systèmes correspondants d'équations intégrales duales ont été réduits à un système d'équations intégrales de Fredholm de seconde espèce.

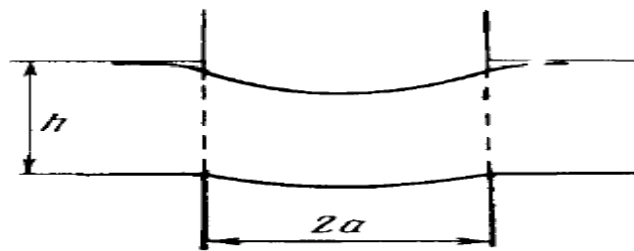


Figure 1.19 Problème de Zakorko, 1974.

Dhaliwal et Singh [20] ont réalisé le problème de contact axisymétrique pour une couche élastique sur une base rigide ayant un trou circulaire. Le problème est réduit à la solution de deux équations intégrales de Fredholm simultanées. Une charge circulaire appliquée sur une couche élastique est développée par Wood [21]. Une solution exacte a été obtenue par la méthode de transformation de Hankel

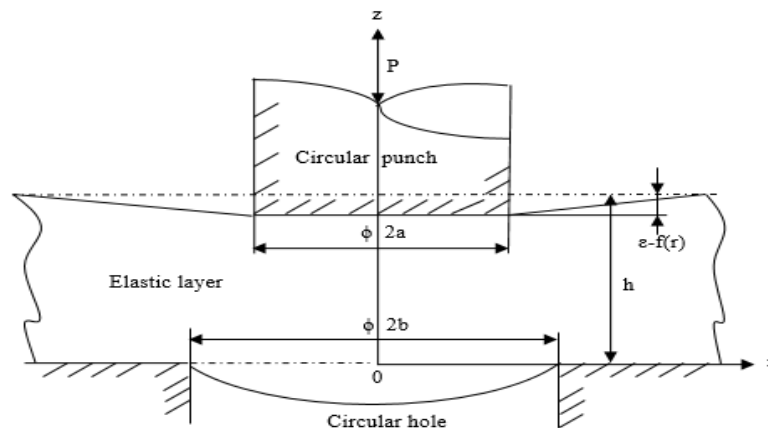


Figure 1.20 Problème de Dhaliwal et Singh, 1977.

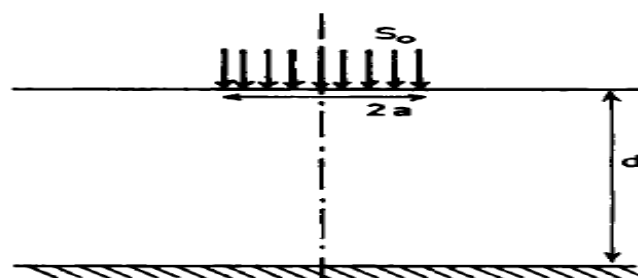


Figure 1.21 Problème de Wood, 1984.



Gecit [22] a formulé des problèmes de traction des plaques épaisses ayant des fissures circulaires interne et extérieure situées aux milieux des domaines élastique. Il a analysé la singularité des contraintes le long de la fissure ainsi que la partie sur laquelle s'exerce la traction. Il a montré qu'elle est du type polaire (singularité  $= -\frac{1}{2}$ ). Dans le second travail [23], l'étude est généralisée au cas ces d'une plaque encastree affaiblie par une fissure circulaire à une distance quelconque de la fondation rigide. La même sur la singularité des contrainte a été constaté.

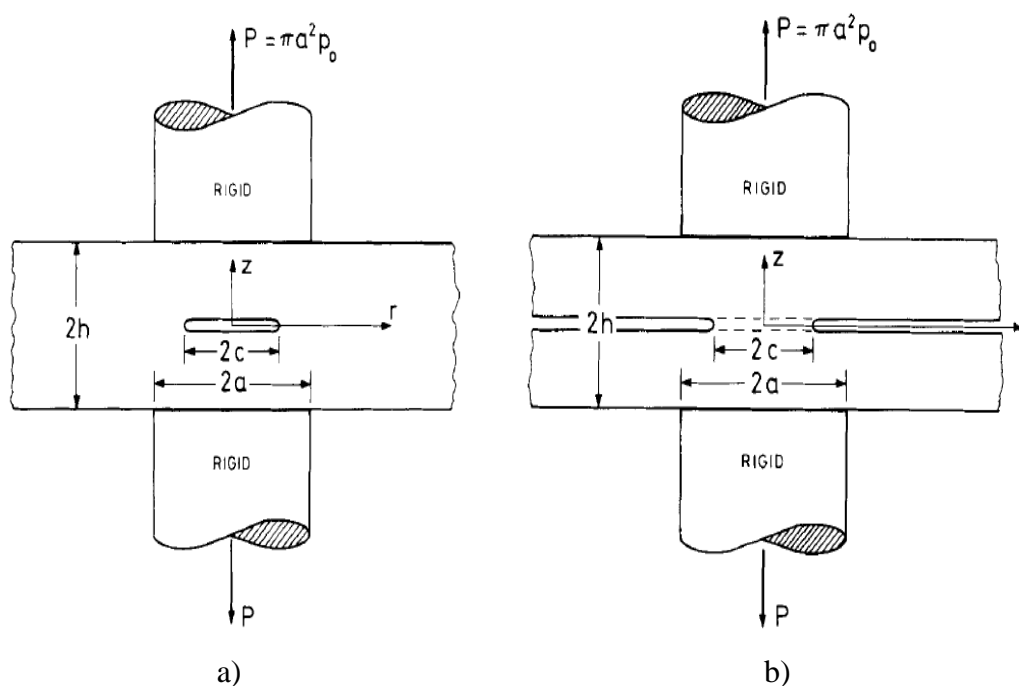


Figure 1.22 Problème de Gecit, 1987.

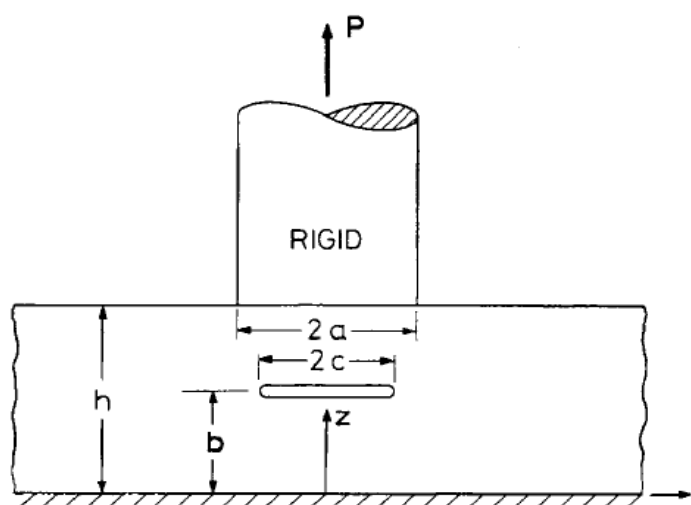
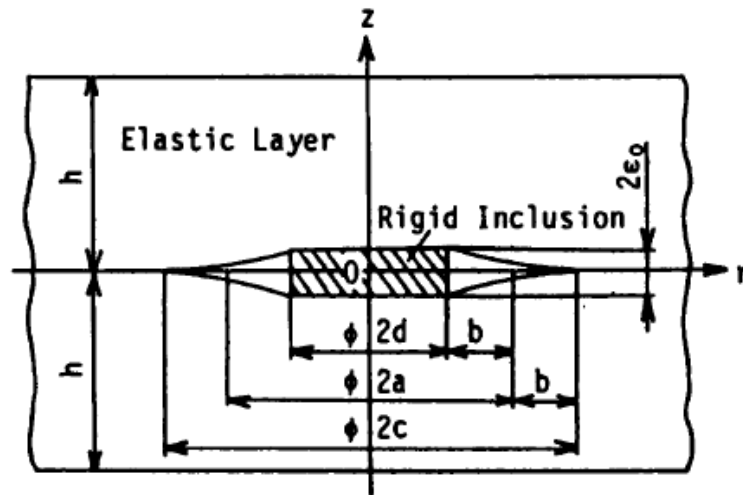


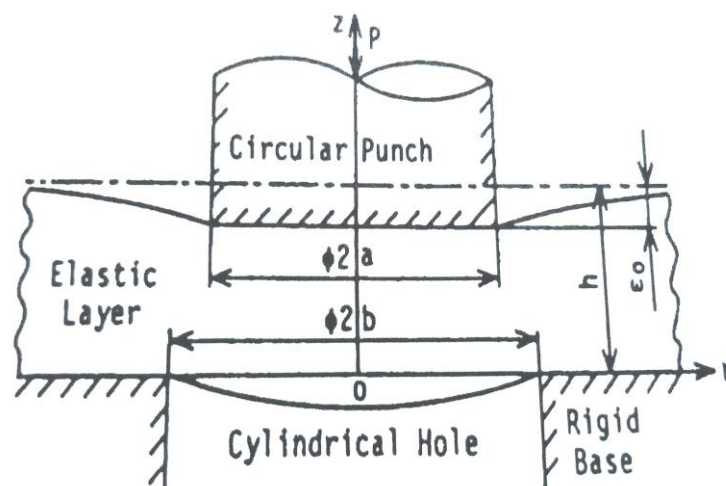
Figure 1.23 Problème de Gecit, 1988.

*Sakamoto et al.* [24] ont examiné l'indentation d'une fissure circulaire par une inclusion rigide en forme de disque dans une couche élastique. Ce problème de condition aux limites mixtes est réduit à une solution de système d'équations algébriques infinies.



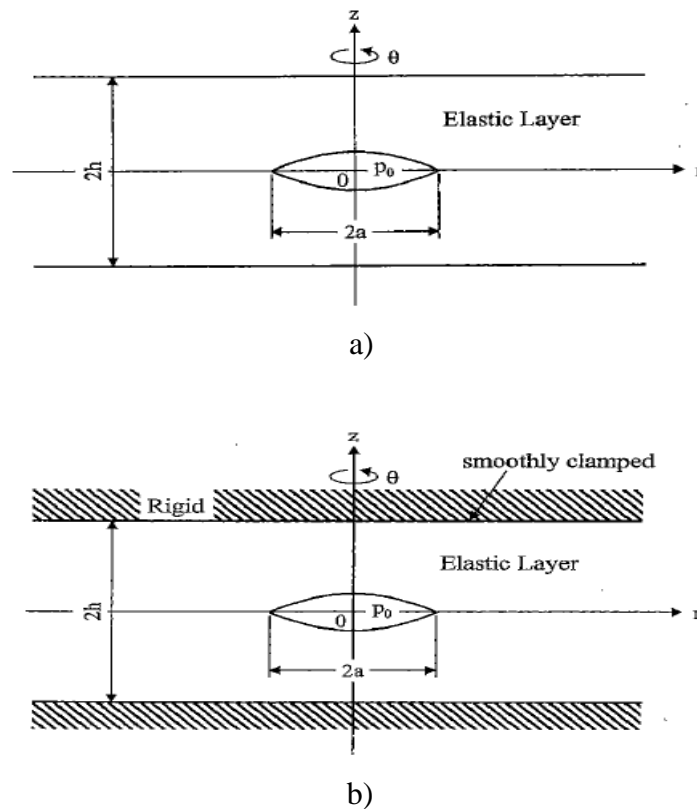
*Figure 1.24* Problème de Sakamoto et al, 1990.

*Hara et al.* [25] ont présenté la solution d'une couche élastique reposant sur une base rigide ayant un trou circulaire dont le rayon est différent de celui du poinçon rigide appliqué sur la surface supérieure du support. Le problème est réduit à la solution d'un système infini d'équations algébriques.



*Figure 1.25* Problème de Hara et al, 1990.

*Sakamoto* [26] a traité le problème axisymétrique d'une couche isotrope et élastique, contenant une fissure circulaire et subissant une pression interne et uniforme. Son étude considère le cas de surfaces libres de charges et le cas où les frontières du milieu élastique sont délimitées par deux plaques rigides et lisses. Ces problèmes aux conditions mixtes sont ramenés à un système des équations intégrales duales. Ces dernières sont réduites à un système d'équations algébriques infinies.



**Figure 1.26** Problème de Sakamoto, 2003.

Une solution analytique est présentée pour le cas d'un problème de contact axisymétrique d'une plaque élastique épaisse soumise à une contrainte de traction uniforme appliquée sur une région circulaire a été proposée par *Sakamoto* et *Koboyashi* [27]. Les équations intégrales duales correspondantes sont obtenues à l'aide des conditions aux limites mixtes du problème. Par le même schéma que précédemment, la résolution de celles-ci se déduit à partir d'un système d'équations algébriques infinies. Dans leur second travail [28], ils se sont intéressés à la résolution du problème de l'action d'un poinçon rigide infini sur une couche élastique reposant sur une base rigide ayant un orifice circulaire. Le problème a été résolu par le même principe que leurs deux travaux antérieurs.

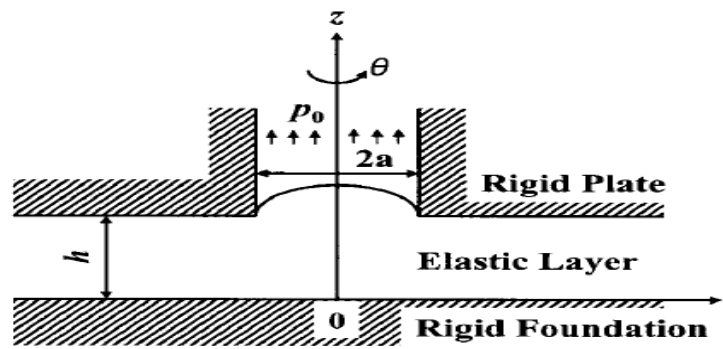


Figure 1.27 Problème de Sakamoto, 2004.

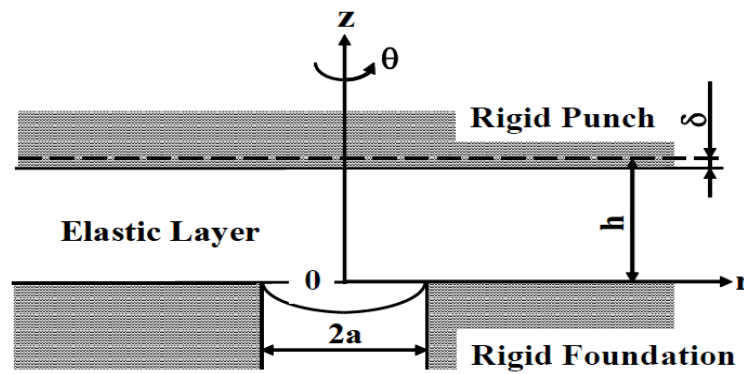


Figure 1.28 Problème de Sakamoto, 2005.

Kebli et Baka [29] ont étudié le problème axisymétrique d'un milieu élastique semi-infini contenant une fissure annulaire subissant une pression uniforme et située sous la surface libre. Les conditions aux limites mixtes permettent de ramener le problème à un système d'équations intégrales triples couplées à l'aide des fonctions auxiliaires de Boussinesq et la transformation intégrale de Hankel, cette dernière est réduite à un système d'équations algébriques linéaires simultanées.

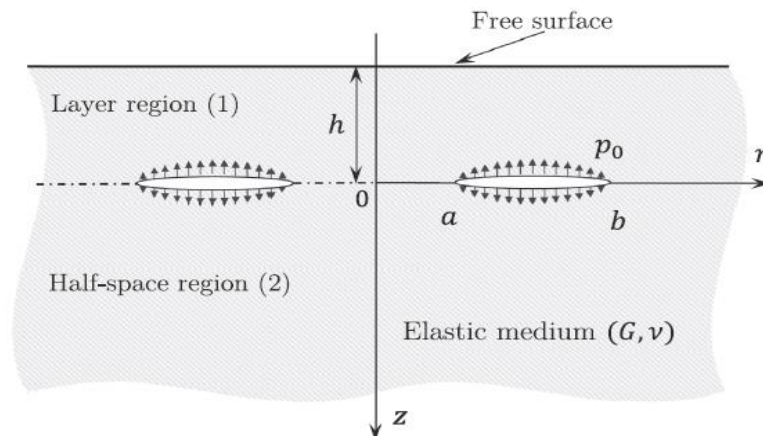


Figure 1.29 Problème de Kebli et Baka, 2019.

### 1.1.2 Littérature sur les problèmes de la thermoélasticité

Les premiers travaux consacrés aux problèmes de conditions aux limites mixtes pour des couches élastiques infinies ont été étudiés par *Dhaliwal*. Le cas où une température est donnée sur une zone circulaire et un gradient de température est réparti sur le reste de la surface, où le côté opposé circulaire est considéré comme un isolant thermique tandis que l'autre face est isolée, a été traité dans l'étude [30]. Dans le deuxième travail [31], les conditions aux limites mixtes étaient prescrites sur les côtés supérieurs de la couche. Ces problèmes donnent lieu à une paire d'équations intégrales duales qui sont réduites aux équations intégrales de Fredholm de seconde espèce. La méthode d'approximation successive pour les grandes valeurs d'épaisseur de couche a été appliquée pour résoudre les équations obtenues.

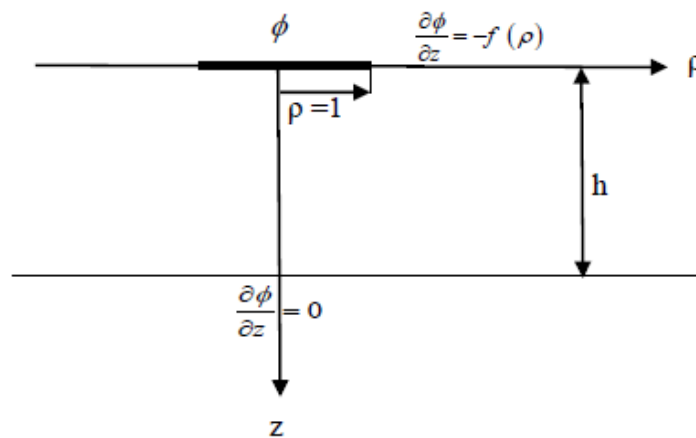


Figure 1.30 Problème de Dhaliwal, 1966.

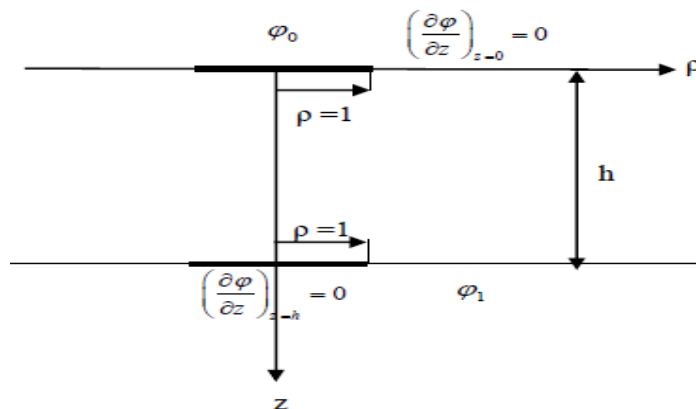
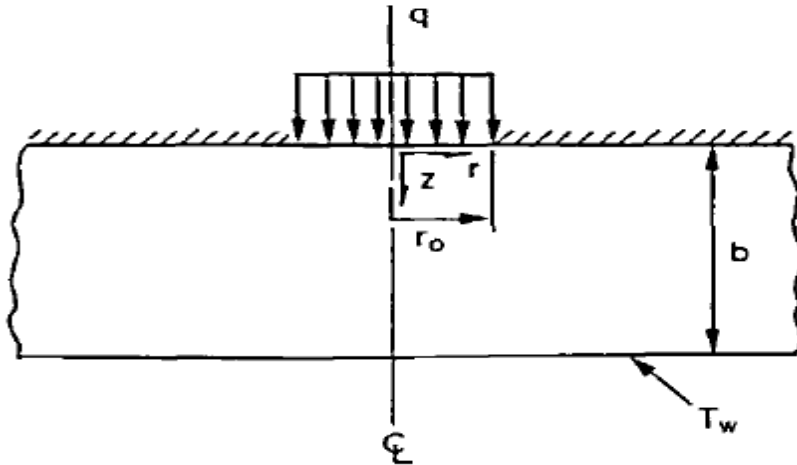


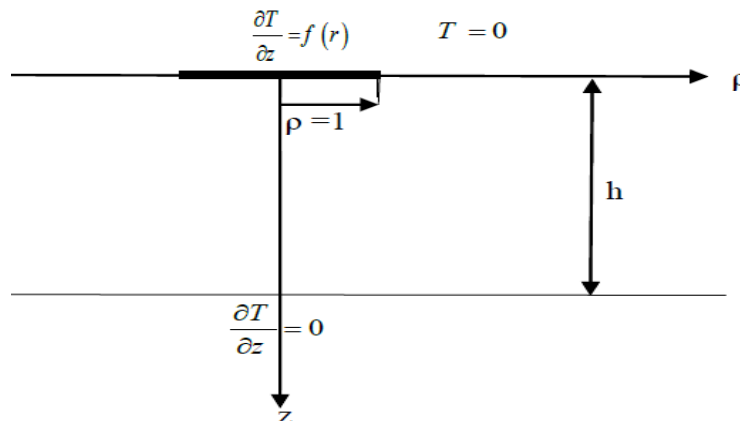
Figure 1.31 Problème de Dhaliwal, 1967.

*Mehta et Bose* [32] ont mis au point une solution exacte pour un problème de déformation d'une couche élastique par une torsion d'un disque chauffé. La solution est donnée très rapidement en termes de séries de puissance convergentes. L'effet de l'épaisseur de la plaque sur la distribution de la température a été étudié.



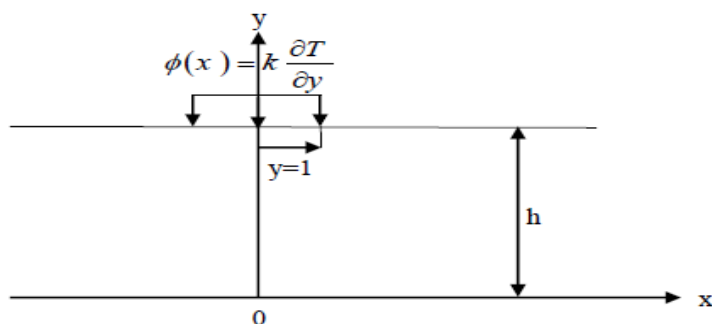
**Figure 1.32** *Problem de Mehta et Bose, 1983.*

Nous relatons dans ce qui suit quelques travaux concernant les problèmes de la déformation thermoélastique. Le travail de *Dhaliwal* [33] propose la détermination de l'état d'équilibre des contraintes thermiques dans une couche élastique. La surface supérieure non chargée de la couche est soumise à un flux thermique le long d'une zone circulaire sans charge alors que le reste est supposée être encastrée lisse. La distribution de la température dans la couche est réduite à la résolution d'un système des équations intégrales duales transformé à une seule équation d'intégrale de Fredholm.



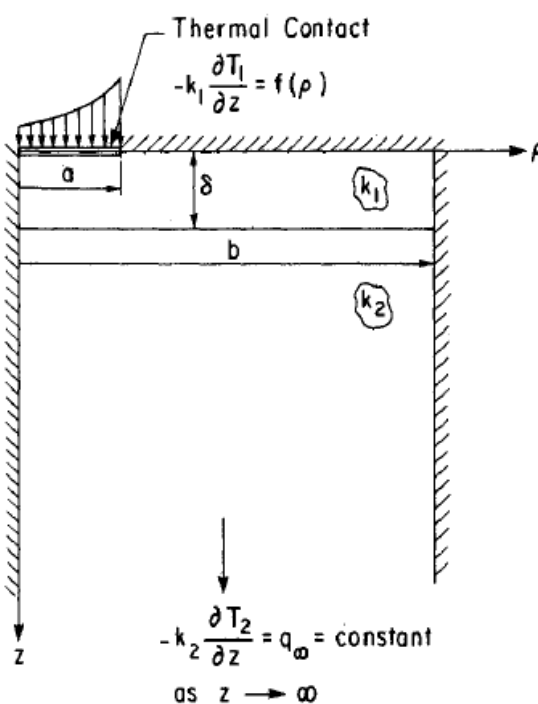
**Figure 1.33** *Problème de Dhaliwal, 1971.*

Un problème similaire a été aussi étudié par *Wadhawan* [34]. Les expressions de la température, des déplacements et des contraintes dans la couche élastique ont été obtenues par l'application de certains opérateurs différentiels en utilisant le théorème de Mittag-Leffler.



**Figure 1.34** Problème de *Wadhawan*, 1973.

L'effet des conditions aux limites pour le problème de résistance à la constriction des contacts circulaires sur des surfaces revêtues a été étudié par *Negus et al.* [35]. Le flux thermique et les conditions aux limites de température ont été spécifiés sur la surface de contact où la couche et le substrat sont en contact parfait. Les solutions sont obtenues avec la méthode de transformation de Hankel en utilisant une technique de superposition linéaire pour le problème de conditions aux limites mixtes créé par un contact isothermique.



**Figure 1.35** Problème de *Negus et al.*, 1988.

Lemczyk et Yovanovich [36] et [37] ont examiné la variation de la résistance à la constriction thermique sur un demi-espace avec des conditions aux limites convectives. Le problème est réduit à une seule équation integro-différentielle en utilisant la méthode de transformation intégrale de Hankel et des relations de transformation Abel et Fourier appropriées. Le système d'équations algébriques infinies obtenu est également analysé.

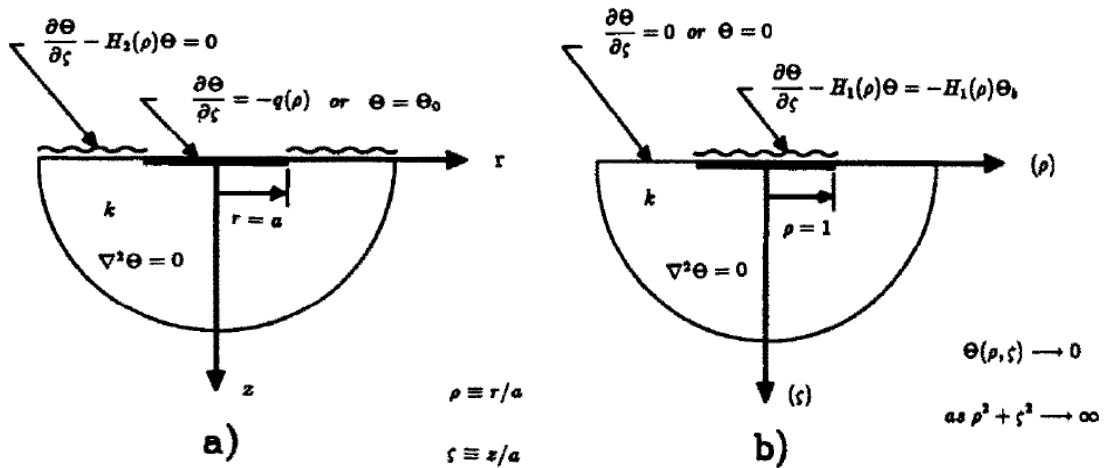


Figure 1.36 Problème I de Lemczyk et Yovanovich, 1988.

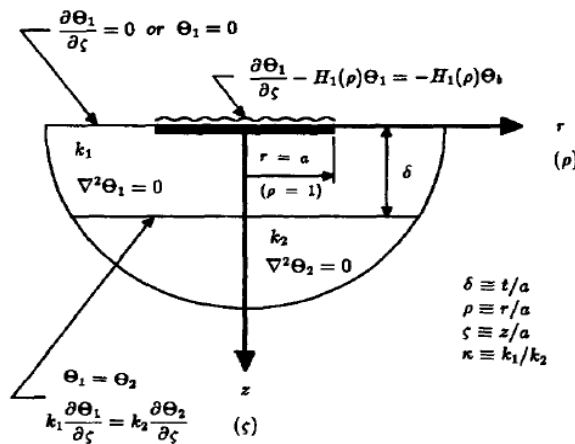


Figure 1.37 Problème II de Lemczyk et Yovanovich, 1988.

Un problème de résistance à la constriction a été considéré par Rao [38] et [39] pour un solide recouvert d'une couche de conductivités thermiques constantes différentes dans le cas d'un contact idéal. Une chaleur est fournie au support composite par un point circulaire tandis que le reste de la surface est isolé. L'équation intégrale de Fredholm obtenue a été réduite à un système d'équations algébriques infinies en utilisant la méthode de la troncation et la méthode de l'expansion en série.



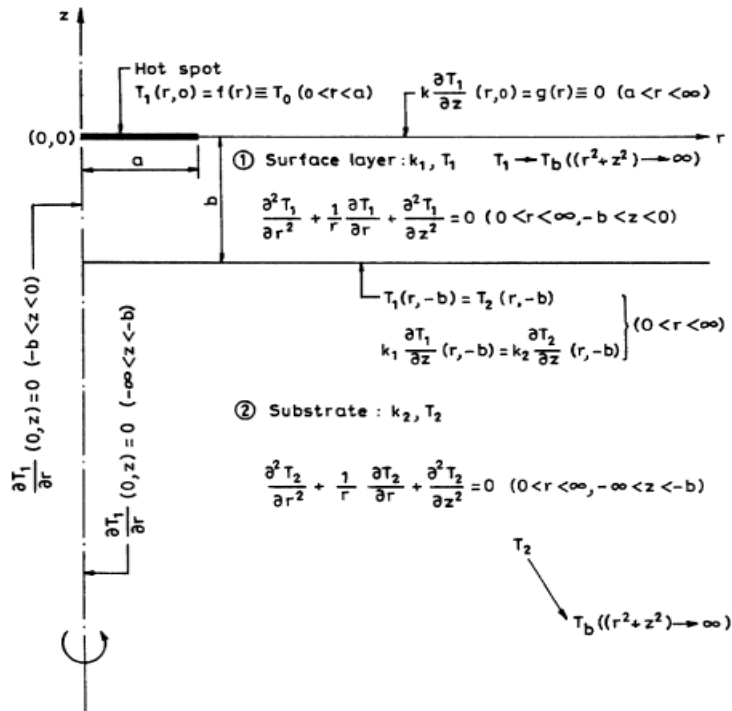


Figure 1.38, 39 Problème I, II de Rao, 2004.

Le problème de déformation thermoélastique d'un solide infini affaibli par une fissure circulaire a été traité par *Abed-Halim* et *Elfalaky* [40]. Le solide homogène et isotrope est soumis à des champs de contraintes et à une température uniforme. Un système de coordonnées cylindriques est utilisé dans lequel la fissure est située sur le plan. En outre, la fissure est soumise à une température prescrite et telle que la répartition des contraintes varient avec la distance radiale. Le problème considéré a été aussi résolu en utilisant la méthode de la transformation de Hankel.

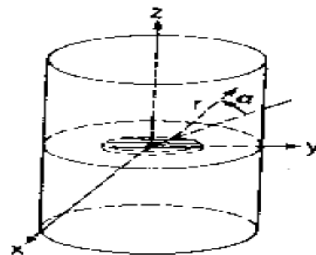


Figure 1.40 Problème d'Abed-Halim et Elfalaky, 2005.

Dans un second travail étudiant le cas bidimensionnel, *Elfalaky* et *Abdel-Halim* [41] ont résolu le problème de déformation thermoélastique du milieu infini en mode I. Le matériau solide est supposé homogène et isotrope alors que la fissure est soumise à des champs thermique et mécanique. La résolution du problème a été effectuée à l'aide de la méthode de la transformation de Fourier.

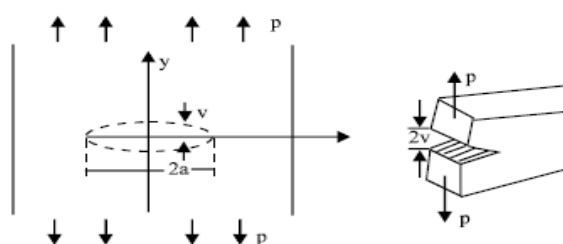


Figure 1.41 Problème d'Elfalaky et Abdel-Halim, 2006.

L'effet de la conduction de la chaleur située à l'intérieur de fissure circulaire dans un milieu élastique sur les facteurs d'intensité de contrainte a été analysé par Li et al. [42]. Les équations aux dérivées partielles du modèle thermoélastique sont résolues par la méthode de la transformation de Hankel. Les conditions aux limites permettent de ramener le problème étudié à un système couplé d'équations intégrales duales. Kebli et Baka [43] ont étudié le problème axisymétrique d'un milieu élastique semi-infini ayant une fissure annulaire est soumise à un champ thermique interne. Le problème a été résolu par le même principe [29].

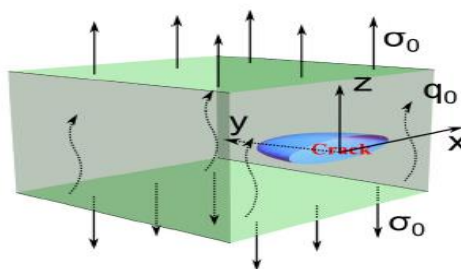


Figure 1.42 Problème de Li et al. 2015.

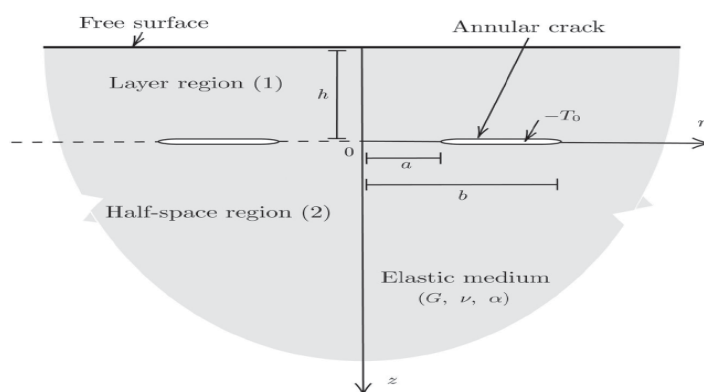


Figure 1.43 Problème de Kebli et Baka, 2020.

## Conclusion

Après avoir mis un œil sur les travaux antérieurs servant toujours de bases aux travaux récents, nous allons présenter des études sur des problèmes dans le domaine de l'utilisation des transformations intégrales, et également ceux couvrant les méthodes des équations intégrales.

## **Chapitre 2**

### **Eléments sur la Théorie d'Elasticité**

# Chapitre 2

## Eléments sur la Théorie d'Elasticité

### Introduction

Un corps ne pouvant résister à la sollicitation appliquée qu'en se déformant, l'analyse de la rigidité des structures en terme de force et d'allongement ne permet pas de distinguer la contribution de la géométrie de celle, intrinsèque, du matériau [44].

Pour ce faire, il faut définir en tout point de la structure un état mécanique local indépendant de sa géométrie. La caractérisation de cet état local en termes de contrainte et de déformation. La relation entre ces grandeurs et leurs dérivées temporelles définit la loi de comportement macroscopique.

### 2.1 Elasticité

L'étude du comportement mécanique des matériaux a pour but de connaître leur réponse à une sollicitation donnée. Les variables mises en jeu dans ce domaine sont :

- Tenseur des contraintes.
- Tenseur des déformations.

#### 2.1.1 Contrainte

Considérons une pièce soumise à un chargement quelconque figure 2.1. Considérons la face ABCD de surface  $dS$ . Sur cette face, il s'exerce un effort  $\overline{df}$ . Le vecteur contrainte  $\overline{C}$  qui s'exerce en M sur la facette ABCD est défini de la façon suivante

$$\overline{C} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\overline{df}}{ds} \quad (2.1)$$

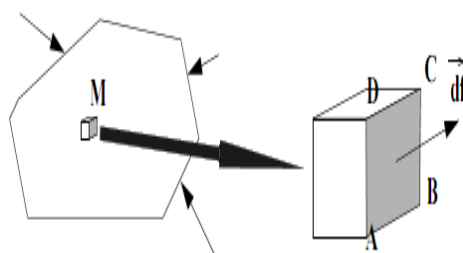


Figure 2.1 Représentation de vecteur contrainte.

### 2.1.2 Tenseur des contraintes

Il est important de pouvoir disposer d'un outil pour caractériser complètement l'état des contraintes existant en un point donné. Cet outil est le tenseur des contraintes.

Considérons une pièce soumise à un chargement complexe et isolons un petit polyèdre comportant  $n$  facettes. Si les contraintes sont connues sur  $(n-1)$  facettes, en écrivant l'équilibre de cet élément, il est facile de déterminer la contrainte existant sur la facette numéro  $n$ . Le polyèdre comportant le moins de facettes est le tétraèdre ( $n=4$ ).

Pour pouvoir déterminer, en un point, la contrainte sur une facette quelconque il suffit donc de connaître les contraintes, en ce point, sur 3 facettes. Pour faciliter les calculs nous considérerons les trois facettes ayant pour normales  $x, y, z$ . Sur ces facettes les composantes des contraintes ont les valeurs indiquées sur la figure 2.2.

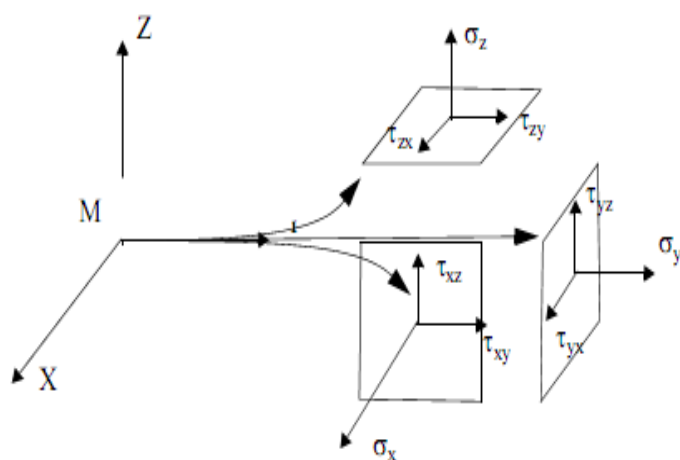
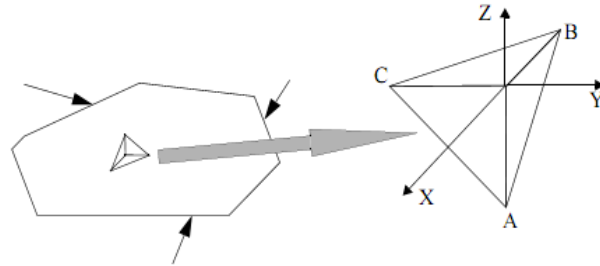


Figure 2.2 Représentation des composantes du tenseur des contraintes.

Pour calculer la contrainte  $\vec{c}(c_x, c_x, c_x)$  relative à la facette ABC qui a pour normale  $\vec{n}(n_x, n_x, n_x)$ , il suffit

- d'isoler le tétraèdre représenté sur la figure 2.3.
- d'écrire l'équilibre.



*Figure 2.3 Equilibre d'un tétraèdre.*

On obtient

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

A partir de l'équation (2.2) on définit le tenseur des contraintes  $[\Sigma]$

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

### 2.1.3 Déformation

Sous l'action d'un chargement, tous les corps subissent un changement de forme, de position et d'orientation entre un état initial avant application de la charge et un état final consécutif à son application. Les déformations caractérisent le changement de forme local en tout point du matériau, indépendamment de sa nature et de ses caractéristiques de résistance [45].

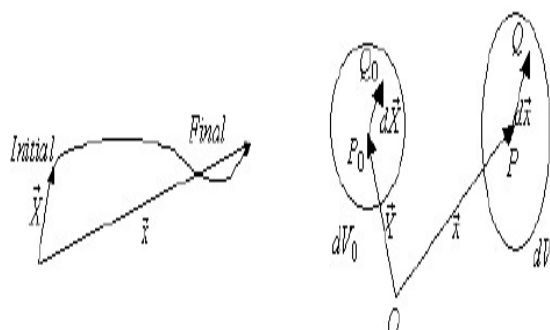
#### 2.1.3.1 Etat local de déformation

La transformation géométrique qui décrit le passage d'un petit élément de matière de l'état initial à l'état final se décompose en translation, rotation et déformation, cette dernière étant

seule responsable du changement de forme du petit élément. Translation et rotation sont des mouvements de corps rigides qui traduisent les changements de position et d'orientation. Du point de vue de l'état final, rotation et déformation ne sont pas commutatives.

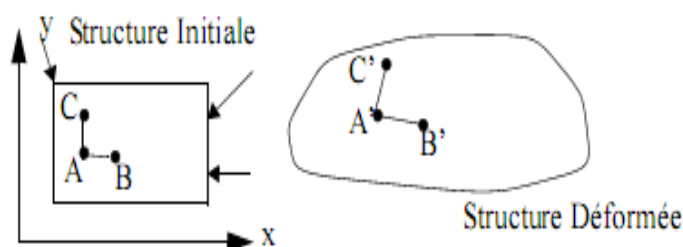
### 2.1.3.2 Petites déformations

La plupart des structures étant constituées de matériaux cristallins peu déformables travaillant en régime élastique, l'approximation des petites déformations est largement suffisante. Elle offre de plus l'avantage du principe de superposition.



*Figure 2.4 Trajectoire d'une particule et affinité tangente.*

Considérons pour simplifier une structure plane qui se déforme dans son plan et représentons sur la structure initiale deux segments perpendiculaires AB et AC ayant pour longueurs respectives dx et dy.



*Figure 2.5 Déformation de deux vecteurs perpendiculaires.*

Sous l'action d'efforts extérieurs cette structure se déforme et les points A, B, C deviennent les points A', B' et C'. Pour caractériser la déformation de la structure au point A, il suffit de

connaître l'allongement des segments AB, AC et la variation de l'angle droit  $\hat{BAC}$ . Si le point A a pour déplacement  $\overline{DA}(u, v, w)$ , le point B a pour déplacement

$$\overline{DB} \left[ u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right] \quad (2.4)$$

et le point C

$$\overline{DC} \left[ u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad w + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right] \quad (2.5)$$

Ramenons le point A' au point A ce qui revient à éliminer la translation.

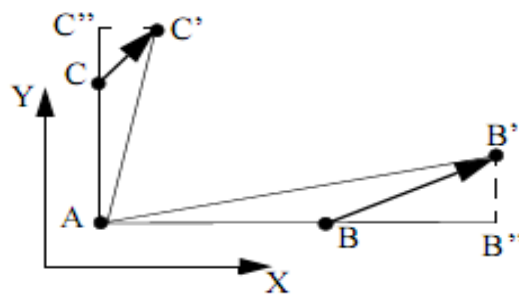


Figure 2.6 Déformation d'AB et AC.

L'allongement relatif d'un vecteur initialement orienté dans la direction x est appelé  $\varepsilon_x$ .

Il vaut par définition

$$\varepsilon_x = \frac{(AB' - AB)}{AB} \quad (2.6)$$

En petites déformations on fait l'hypothèse suivante

$$\varepsilon_x \approx \frac{BB''}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.7)$$

De la même façon on fait l'hypothèse que



$$\varepsilon_y \approx \frac{CC''}{AC} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.8)$$

La variation de l'angle droit est définie par  $2\varepsilon_{xy}$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\pi}{2} - \hat{B'AC'} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.9)$$

On peut alors définir la matrice  $E'$  (2.10) et démontrer assez simplement que c'est un tenseur.  $E'$  est appelé le tenseur des déformations [46]

$$[E'] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

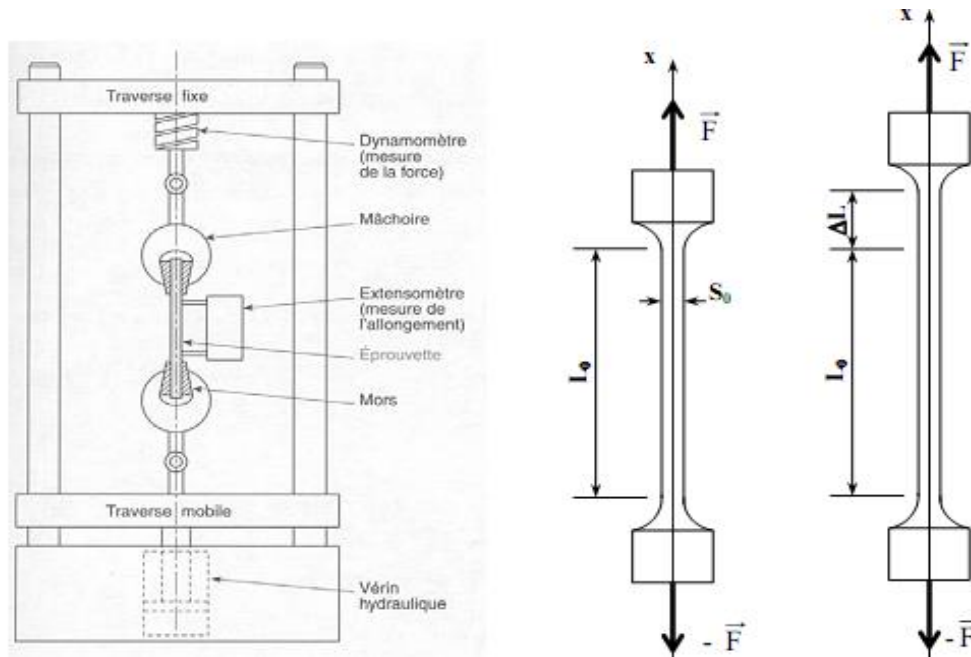
avec

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_x = \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_x = \frac{\partial w}{\partial z}, & \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (2.11)$$

## 2.1.4 Modules élastiques

### 2.1.4.1 Module d'élasticité

Considérons une barre d'acier doux de longueur initiale  $L_0$  et dont la section initiale  $S_0$  est constante sur la longueur  $L_0$ . Soumettons cette barre à une sollicitation de traction en lui appliquant à chaque extrémité un effort  $F$  [47]



**Figure 2.7** Représentation simplifiée d'une machine d'essai de traction.

On peut enregistrer à l'aide de comparateurs l'allongement  $\Delta L$  de l'éprouvette en fonction de l'intensité de l'effort  $F$ .  $\Delta L$  est appelé l'allongement absolu. Pour pouvoir comparer les caractéristiques mécaniques des matériaux, celles-ci doivent être établies indépendamment des sections  $S_0$  et longueurs  $L_0$  des éprouvettes.

Ainsi, on reporte sur un graphique

↳ en abscisse : l'allongement relatif

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (2.12)$$

$\varepsilon$  est sans unité puisque c'est le rapport de deux longueurs, en ordonnée : la contrainte  $\sigma$  est l'effort par unité de surface en  $\text{N/mm}^2$ , ou MPa.

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \quad (2.13)$$

On obtient alors la « courbe contrainte - déformation » du matériau de l'essai qui a l'allure suivante

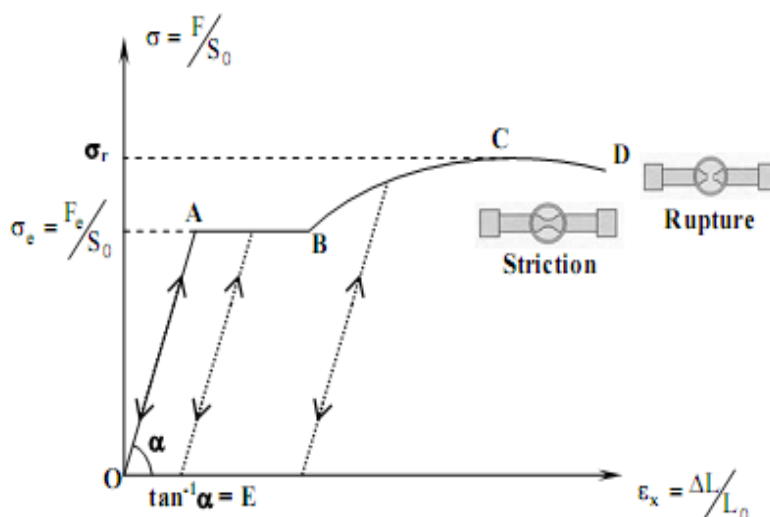


Figure 2.8 Courbe contrainte – déformation.

Analyse de la courbe contrainte - déformation - Loi de Hooke.

↳ *Partie OA* : la déformation est proportionnelle à l'effort exercé (ou que l'allongement relatif est proportionnel à la contrainte). Dans cette zone, si on décharge l'éprouvette, elle revient à sa longueur initiale. On dit que le matériau a dans cette phase, un comportement élastique linéaire.

Ceci se traduit par la loi de Hooke

$$\frac{F}{S} = E \times \frac{\Delta L}{L} \quad (2.14)$$

ou

$$\sigma = E \times \varepsilon \quad (2.15)$$

E est le module d'Young, ou module d'élasticité longitudinal  $E_x$ , du matériau et caractérise la rigidité du matériau, s'exprime en MPa.

↳ Le point A marque la fin de la zone élastique de la courbe. La contrainte correspondante est appelée la limite élasticité.

$$\sigma_e = \frac{F_e}{S} \quad (2.16)$$

↪ *Partie AD* : au-delà du point A, on rentre dans le domaine des grandes déformations, le domaine plastique, où les allongements ne sont plus proportionnels aux efforts. A ce stade, si on décharge l'éprouvette, celle-ci ne retrouve pas sa longueur initiale, on constate un allongement résiduel, c'est-à-dire une déformation permanente.

↪ *Entre A et B* : l'éprouvette s'allonge alors que l'intensité de la charge ne varie pratiquement pas, cette partie de la courbe est appelée " palier plastique ".

↪ *Au-delà de B* : on observe un allongement important pour une faible augmentation de la contrainte. La courbe se relève jusqu'à un maximum C qui correspond à la limite de rupture  $\sigma_r$ . A ce stade, on observe une diminution de la section de la barre dans la zone où va se produire la rupture, c'est le phénomène de striction. Puis la rupture intervient (point D).

#### 2.1.4.2 Coefficient de Poisson

Lors d'un essai de traction ou de compression sur une poutre, celle-ci subit une déformation longitudinale  $\varepsilon_x$  respectivement à un allongement ou un raccourcissement, mais aussi une déformation latérale  $\varepsilon_{\perp}$  perpendiculairement à la direction de l'effort, respectivement une contraction ou une dilatation [48].

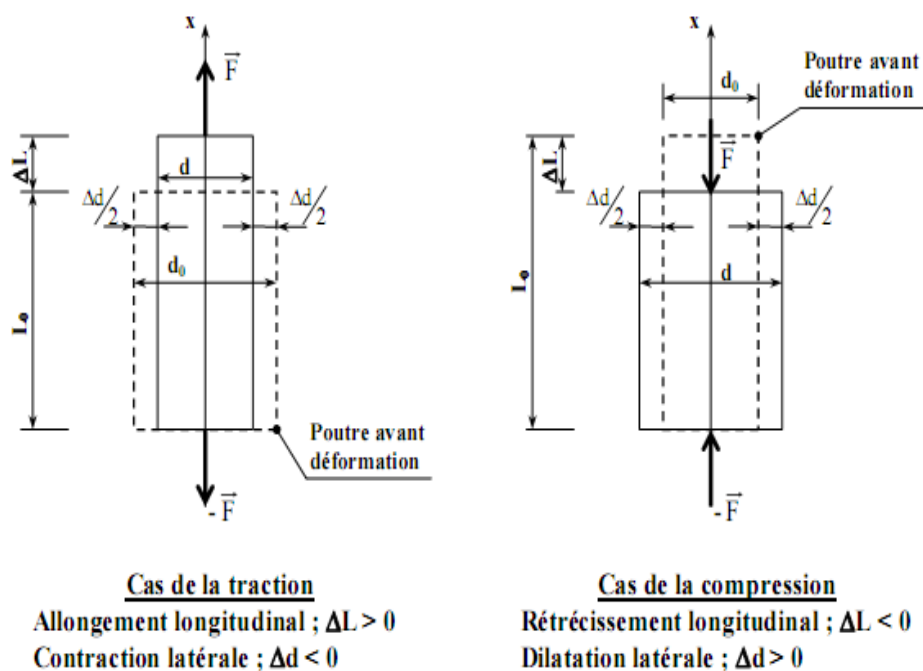


Figure 2.9 Essai de traction ou de compression.

Déformations longitudinale

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (2.17)$$

et transversale

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta d}{d_0} \quad (2.18)$$

Le coefficient de Poisson  $\nu$  est le rapport de ces deux déformations

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_x} \quad (2.19)$$

$\nu$  est compris entre 0.1 et 0.5 (0.3 pour les métaux et 0.15 pour les bétons).

### 2.1.4.3 Module d'élasticité de cisaillement

Pour des matériaux ayant un comportement linéaire il existe par définition une relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. Pour un matériau isotrope on peut montrer qu'il suffit de deux coefficients pour caractériser cette loi qui s'écrit

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \varepsilon_{xy} = \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \varepsilon_{xz} = \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xz} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \varepsilon_{yz} = \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \end{cases} \quad (2.20)$$

$E$  est appelée le module de Young ou module d'élasticité et  $\nu$  le coefficient de Poisson. La relation entre les contraintes de cisaillement et la distorsion angulaire est souvent écrite en utilisant le module de cisaillement  $G$  défini de la façon suivante

$$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \quad (2.21)$$

avec

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.22)$$

## 2.1.5 Equation de l'élasticité

### *Loi de comportement*

Le physicien britannique Thomas Young (1773-1829) avait remarqué que le rapport entre la contrainte de traction appliquée à un matériau et la déformation qui en résulte (un allongement relatif) est constant (figure 2.9), tant que cette déformation reste petite et que la limite d'élasticité du matériau n'est pas atteinte. La loi d'élasticité, formulée par la loi de Hooke est donnée par l'équation (2.15).

Cette loi se généralise à l'étude des structures élastiques. Si  $\sigma_{ij}$  sont les six composantes du tenseur des contraintes et si  $\varepsilon_{ij}$  sont les six composantes du tenseur des déformations, la loi de Hooke se donne ici en notation indicielle par [49]

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.23)$$

$\delta_{ij}$  : Indice de Kronecker.

Avec le module d'Young et le coefficient de Poisson, il existe une autre forme inverse de la loi faisant apparaître les deux coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\nu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(2\nu+3\lambda)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.24)$$

Pour un milieu isotrope, la loi de Hooke nous permet d'obtenir les relations suivantes

- *Relation contrainte – déformation*

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(-1+2\nu)} [(-1+\nu)\varepsilon_r - \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)] \\ \sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(-1+2\nu)} [(-1+\nu)\varepsilon_\theta - \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_z)] \\ \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(-1+2\nu)} [(-1+\nu)\varepsilon_z - \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)] \end{cases} \quad (2.25)$$

▪ *Relation contrainte-déplacement*

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w_z}{\partial z}, & \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \right) \end{cases} \quad (2.26)$$

 ▪ *Relation contraintes tangentielles*

$$\begin{cases} \tau_{r\theta} = G \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\ \tau_{z\theta} = G \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{rz} = G \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (2.27)$$

Les expressions des contraintes sont obtenues en remplaçant les relations déformation-déplacement dans les relations contrainte-déformation.

 ▪ *Contrainte radiale*

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2G}{(2\nu-1)} \left[ (-1+\nu) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2G\nu \frac{u_r}{r} + \frac{2G\nu}{(-1+2\nu)} \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.28)$$

 ▪ *Contrainte orthoradiale*

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{2G}{(2\nu-1)} \left[ (-1+\nu) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \nu \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{u_r}{r} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.29)$$

- *Contrainte normale*

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{2G}{(2\nu-1)} \left[ (-1+\nu) \frac{\partial w_z}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \right] \\ &= \frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \frac{u_r}{r}\end{aligned}\quad (2.30)$$

## 2.2 Transfert thermique

Le transfert thermique entre deux solides en contact est d'un grand intérêt physique et technologique. En effet, dans un matériau non contraint avec des bords libres, la variation de température n'entraîne pas de champ de contraintes dans le massif, au contraire, si les conditions aux limites s'opposent au champ de déplacement, la dilatation provoque la génération de contraintes qui s'ajoutent au champ existant [50].

### 2.2.1 Champ de température

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température [51]

$$T = f(x, y, z, t) \quad (2.31)$$

La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas

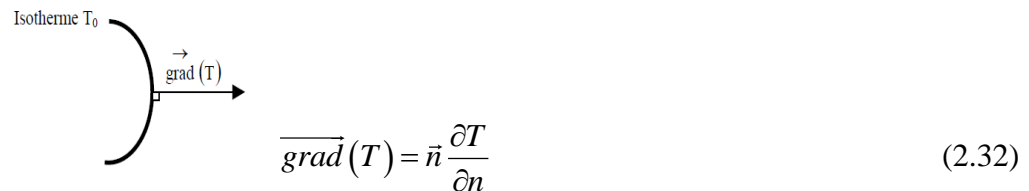
- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou instationnaire.

### 2.2.2 Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est



maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température [52].



$$\overrightarrow{grad}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.32)$$

$\vec{n}$  : Vecteur unitaire de la normale

$\frac{\partial T}{\partial n}$  : Dérivée de la température le long de la normale.

### 2.2.3 Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température par conduction des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur

$$q = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad (2.33)$$

où S est l'aire de la surface. On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \quad (2.34)$$

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température

$$q = -\lambda' \overrightarrow{grad}(T) \quad (2.35)$$

ou sous forme algébrique :

$$\varphi = -\lambda' S \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.36)$$

avec

$\varphi$  : Flux de chaleur transmis par conduction (W)

$\lambda'$  : Conductivité thermique du milieu (W/m.K)

$x$  : Variation d'espace dans la direction du flux (m)

$S$  : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m<sup>2</sup>)

#### 2.2.4 Thermoélasticité

La thermoélasticité fait intervenir une variation de plus par rapport à l'élasticité : la température qui induit le phénomène supplémentaire de dilatation. La dissipation intrinsèque est toujours nulle mais la dissipation thermique, due à la conduction de la chaleur, est différente de zéro. La théorie de la thermoélasticité doit être utilisée pour les matériaux élastiques à chaque fois que les sollicitations comprennent des variations de température. On n'aborde ici que les aspects liés à la loi de comportement elle-même et à la détermination des coefficients caractéristiques en fonction de la température [53].

#### 2.2.5 Formulation de la thermoélasticité isotrope linéaire

Soit  $T_0$  la température de référence d'un élément de volume d'un matériau élastique et  $T$  sa température à un instant postérieur tel que l'écart de température  $\theta = T - T_0$  soit petit par rapport à  $T_0$ . Sous cette condition, les caractéristiques d'élasticité et la masse volumique  $\rho$  peuvent être considérées comme constantes.

La loi thermoélasticité linéaire classique s'obtient en choisissant encore pour potentiel d'état une forme quadratique définie positive des déformations, auxquelles il faut ajouter la variation température. En faisant l'hypothèse d'isotropie des phénomènes de déformation et de dilatation, et pour respecter les écritures classiques on est conduit à poser :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \theta \delta_{ij} \quad (2.37)$$

on peut exprimer les déformations en fonction des contraintes et de la température :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha \theta \delta_{ij} \quad (2.38)$$

ce qui constitue la loi de thermoélasticité linéaire isotrope loi que l'on peut réécrire en introduisant le tenseur de tenseur de Hooke  $E$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^m + \varepsilon_{ij}^\theta = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} + \alpha \theta \delta_{ij} \quad (2.39)$$

somme d'une contribution mécanique et d'une contribution (dilatation si  $\theta > 0$ ) purement thermique. Si l'on considère une variation de température à contrainte nulle, on obtient :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^\theta = \alpha \theta \delta_{ij} \quad (2.40)$$

ce qui définit le coefficient de dilatation isotrope  $\alpha$ .

## 2.3 Mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture a été introduite par Griffith vers 1920, son objectif est de caractériser le comportement à la fissuration des structures à l'aide des paramètres quantifiables au sens de l'ingénieur, notamment le champ de contraintes, la taille de la fissure et la résistance à la fissuration du matériau [54].

Les premiers développements théoriques d'analyse des champs de déplacements, déformations et contraintes au voisinage d'une fissure ont été entrepris par Westergaard vers 1940. L'extension de la discipline a été amorcée par Irwin vers 1960. Depuis cette date, le développement de la mécanique de la rupture s'étend aux problèmes non linéaires matériellement et géométriquement, aux problèmes de bifurcation des fissures en modes mixtes et plus récemment aux composites, aux techniques numériques de résolution et à l'état de l'art relatif au dimensionnement de diverses structures complexes.

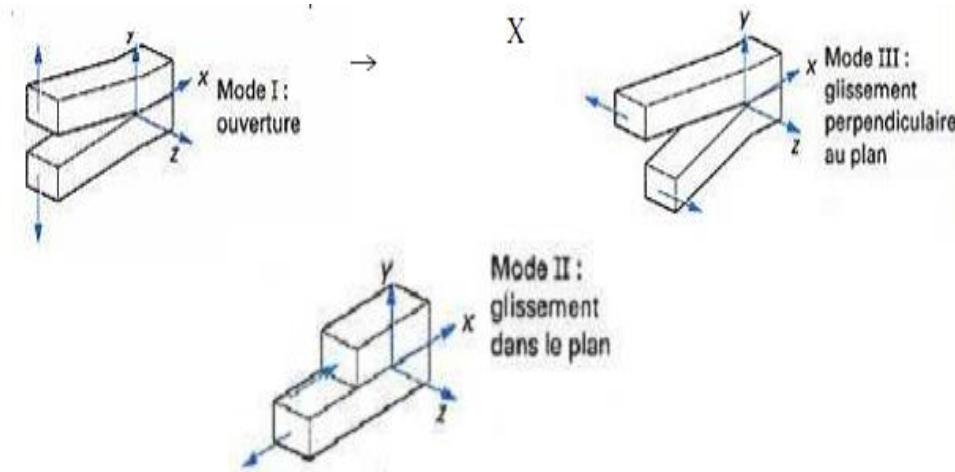
### 2.3.1 Modes élémentaires de rupture

D'un point de vue macroscopique, on peut considérer deux modes principaux de rupture : la rupture plate et la rupture inclinée. La rupture plate correspond à une surface de rupture globalement perpendiculaire à la direction de la contrainte principale maximale. La rupture inclinée dans le sens transversal par rapport à la direction de propagation s'accompagne souvent de grandes déformations. L'examen du faciès de rupture permet bien souvent de détecter, après rupture, le mécanisme de rupture et le type de fissuration produit [55].

On remarque généralement

- Une zone lisse et soyeuse correspondant à la propagation en fatigue,
- Une zone à grains cristallins plus ou moins apparents, correspondant à la fissuration brutale.

On montre que toute fissuration peut être ramenée à l'un des trois modes simples ou à leur superposition. Il existe donc trois modes de fissuration élémentaires [56].



*Figure 2.10 Modes de fissuration.*

En mécanique de la rupture, trois types de sollicitations sont considérés

- Une sollicitation de traction perpendiculaire au plan de la fissure. Ce mode est dit " Mode I " ou mode " d'ouverture ".
- Une sollicitation de cisaillement dans le plan de la fissure dont l'action est perpendiculaire au front de la fissure. On parle de " Mode II " ou mode de "cisaillement".
- Une sollicitation de cisaillement parallèle au plan de la fissure dont l'action est parallèle au front de la fissure. Il s'agit du " Mode III " ou de " torsion "

Lors du chargement d'une pièce fissurée, on distingue deux phases :

- La phase d'ouverture pendant laquelle, la fissure immobile s'ouvre, les lèvres s'écartant sans changement géométrique de la surface S. Cette phase se poursuit jusqu'à un chargement critique autorisant la fissure à se propager en s'agrandissant. A ce chargement critique correspond la condition d'amorçage.
- La phase de propagation au-delà du chargement critique d'amorçage, la fissure s'agrandit (avance) soit dans le plan tangent à S soit dans d'autres directions (branchement), c'est la phase de propagation qui pourra être contrôlée (propagation

dite stable) ou non (propagation dite instable conduisant à la rupture brutale ou catastrophique).

Le facteur d'intensité de contrainte du mode I est défini par [57]

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, 0, 0) \quad (2.41)$$

En cas de compression, il ne peut être négatif car cela signifierait que les lèvres se pénètrent et il faut alors tenir compte du contact entre les lèvres. Les facteurs d'intensité de contrainte du mode II, III sont donnés comme

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(r, 0, 0) \quad (2.42)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yz}(r, 0, 0) \quad (2.43)$$

Dans les problèmes de déformation axisymétrique, on utilise le système de coordonnées cylindriques. Dans le cas de l'inclusion d'un disque rigide d'épaisseur négligeable dans un demi-espace élastique, l'expression du facteur d'intensité de contrainte en mode III a été donnée par Rahman [58]. Alors, l'expression est exprimée par

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 1} \sqrt{2\pi r(1-r)} \tau_{\theta z}(r, 0) \quad (2.44)$$

## Conclusion

Ce chapitre est consacré à des brefs rappels sur les notions élémentaires de l'élasticité dans le but de bien définir le cadre de l'étude du phénomène de déformation traité dans ce travail. Les mécanismes de contact entre les solides élastiques, disant mécanique de contact, est une partie importante dans divers domaines pratiques. Elle se développe activement grâce à la mécanique des milieux continus. L'élasticité est la théorie du milieu continu représentant la réponse mécanique des divers matériaux. Nous faisons appel à cette théorie qui permet de modéliser des problèmes concrets, ceux-ci décrivent en particulier la déformation d'une plaque épaisse ainsi que les contraintes internes qu'il subit. Un fois le modèle mathématique établi, il pourra être résolu par une méthode analytique ou numérique choisie.

**Chapitre 3**  
**Préliminaires Mathématiques**

# Chapitre 3

## Préliminaires Mathématiques

### Introduction

Les mathématiques employées par le physicien sont tournées autour de la résolution d'équations différentielles, du calcul d'intégrales, de l'algèbre linéaire... Chaque fois que cela est possible on recherche une solution analytique, c'est à dire une ou plusieurs expressions mathématiques où un ensemble de variables et de constantes qui expriment la solution du problème recherché [59].

### 3.1 Equation différentielle de Bessel et sa solution

En analyse mathématiques, les fonctions de Bessel découvertes par le mathématicien suisse Daniel Bernoulli, portent le nom du mathématicien allemand Friedrich Bessel. Bessel a développé l'analyse de ces fonctions en 1817 dans le cadre de ses études du mouvement des planètes induites par l'interaction gravitationnelle, généralisant les découvertes antérieures de Bernoulli.

Les fonctions de Bessel jouent un rôle important en physique mathématique. Elles possèdent certaines analogies avec les fonctions trigonométriques, comme leur caractère oscillant. Les fonctions de Bessel sont aussi connues sous le nom de fonctions cylindriques ou d'harmoniques cylindriques, parce qu'elles font partie des solutions de l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques. Ces fonctions sont présentées dans toutes les bibliothèques mathématiques de programmation, dans les logiciels de calcul symbolique comme Maple et Matlab [60].

### 3.1.1 Equation de Bessel

L'équation de Bessel d'ordre  $n$  s'écrit

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - n^2)y = 0, \quad n \text{ est une constante réelle} \quad (3.1)$$

Elle est du type de Fuchs avec :  $p(z) = \frac{1}{z}$ ,  $q(z) = 1 - \frac{n^2}{z^2}$

les fonctions  $zp(z)$  et  $z^2p(z)$  étant holomorphes à l'origine.

En cherchant une solution de la forme

$$y(z) = z^r + c_1 z^{r+1} + \dots + c_p z^{r+p} + \dots \quad (3.2)$$

il apparaît que l'équation déterminante s'écrit

$$F(r) = r(r-1) + r - n^2 = r^2 - n^2 = 0 \quad (3.3)$$

Elle admet les racines :  $r_1 = +n, r_2 = -n$

Divers cas peuvent se présenter

- *Supposons  $n$  non entier*

Il existe manifestement deux solutions de la forme

$$y_{\pm}(z) = z^{\pm n} + c_1 z^{\pm n+1} + \dots + c_p z^{\pm n+p} + \dots \quad (3.4)$$

Dans ces conditions

$$y'_{\pm}(z) = \pm n z^{\pm n-1} + c_1 (\pm n + 1) z^{\pm n} + \dots + c_p (\pm n + p) z^{\pm n+p-1} + \dots$$

$$y''_{\pm}(z) = \pm n (\pm n - 1) z^{\pm n-2} + c_1 (\pm n + 1) (\pm n) z^{\pm n-1} + \dots + c_p (\pm n + p) (\pm n + p - 1) z^{\pm n+p-2} + \dots$$

En portant dans (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} z^2 \left[ \pm n (\pm n - 1) z^{\pm n-2} + c_1 (\pm n + 1) (\pm n) z^{\pm n-1} + \dots + c_p (\pm n + p) (\pm n + p - 1) z^{\pm n+p-2} + \dots \right] \\ + z \left[ \pm n z^{\pm n-1} + c_1 (\pm n + 1) z^{\pm n} + \dots + c_p (\pm n + p) z^{\pm n+p-1} + \dots \right] \\ + (z^2 - n^2) \left[ z^{\pm n} + c_2 z^{\pm n+1} + \dots + c_p z^{\pm n+p-1} + \dots \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

il en résulte

$$c_1 (1 \pm 2n) = 0 \quad (3.6)$$



et la relation entre coefficients

$$c_p [(\pm n + p)^2 - n^2] = p(p \pm 2n)c_p = -c_{p-2} \quad (3.7)$$

-  $2n$  est non entier

Dans cette hypothèse  $1 \pm 2n$  est non nul, donc  $C_1 = 0$ , et par suite tous les coefficients d'indice impair seront nuls. Par contre, les coefficients d'indice pair ont pour valeurs

$$C_2 = -\frac{1}{2(2 \pm 2n)} = -\frac{1}{2^2(1 \pm n)}, C_4 = -\frac{1}{4(4 \pm 2n)} C_2 = \frac{1}{2^4 2!(1 \pm n)(2 \pm n)}, C_{2p} = (-1)^p \frac{1}{2^{2p} p!(1 \pm n)(2 \pm n) \dots (p \pm n)} \quad (3.8)$$

Il en résulte les deux solutions

$$y_{+n}(z) = z^n \left[ 1 - \frac{z^2}{2^2 \cdot 1!(n+1)} + \frac{z^4}{2^4 \cdot 2!(n+1)(n+2)} + \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n+1)(n+2) \dots (n+p)} + \dots \right] \quad (3.9)$$

$$y_{-n}(z) = z^{-n} \left[ 1 + \frac{z^2}{2^2 \cdot 1!(n-1)} + \frac{z^4}{2^4 \cdot 2!(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n-1)(n-2) \dots (n-p)} + \dots \right] \quad (3.10)$$

et les développements qui y figurent convergent pour tout  $z$ .

▪ *Supposons  $n$  entier ou nul*

Si  $n$  est un entier positif ou nul, il existe manifestement une solution de la forme

$$y_n(z) = z^n + C_1 z^{n+1} + C_2 z^{n+2} + \dots + C_p z^{n+p} + \dots \quad (3.11)$$

correspondant à la plus grande des racines,  $r_2 = +n$ , de l'équation déterminante ; il s'écrit

$$y_n(z) = z^n \left[ 1 - \frac{z^2}{2^2 1!(n+1)} + \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n+1)(n+2) \dots (n+p)} + \dots \right] \quad (3.12)$$

analogue à la première des solutions données en (3.9) et (3.10). Cherchons maintenant la solution qui correspond à la racine  $r_1 = -n_1$ ,  $n$  étant un entier positif. Elle est de la forme

$$y_{-n}(z) = z^{-n} + C_1 z^{-n+1} + \dots + C_p z^{-n+p} + \dots \quad (3.13)$$

Et l'on a

$$C_1(1 - 2n) = 0$$

.....

$$p(p - 2n)C_p = -C_{p-2}$$

Etudions les coefficients d'indice impair. Comme  $2n$  est un entier pair,  $1-2n$  est non nul, donc  $C_1 = 0$  ; il s'en suit que tous les coefficients d'indice impair sont nuls.

Examinons le cas des coefficients d'indice pair. Nous avons

$$2^2(1 - n)C_2 + 1 = 0$$

$$4.2(2 - n)C_4 + C_2 = 0$$

.....

$$2k 2(k - n)C_{2k} + C_{2k-2} = 0$$

.....

Comme  $n$  est un entier positif, nous pourrions calculer  $C_2, C_4, \dots, C_{2k-2}$ , mais pour  $k = n$ , il viendra  $0.C_{2k} + C_{2k-2} = 0$ , avec  $C_{2k-2} \neq 0$ , ce qui conduit à une impossibilité ( la condition auxiliaire n'est pas satisfaite). En définitive, la méthode ne permet pas de trouver une solution de l'équation de Bessel pour  $r_2 = -n$  ( $n$  entier positif).

Il résulte de cette discussion que l'équation de Bessel admet les deux solutions particulières

$$y_{+n}(z) = z^n \left[ 1 - \frac{z^2}{2^2 \cdot 1!(n+1)} + \dots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n+1)\dots(n+p)} + \dots \right] \quad (3.14)$$

$$y_{-n}(z) = z^{-n} \left[ 1 + \frac{z^2}{2^2 \cdot 1!(n-1)} + \dots + \frac{z^{2p}}{2^{2p} p!(n-1)\dots(n-p)} + \dots \right] \quad (3.15)$$

où les développements convergent pour tout  $z$ , mais il est à noter que la seconde,  $y_{-n}(z)$  ne convient pas pour  $n$  entier positif.

### **Fonction de Bessel**

Envisageons la solution (3.14) et multiplions-la par le coefficient  $\frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$ .  $\Gamma(n)$  étant la fonction eulérienne de seconde espèce, nous obtenons la fonction

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} y_{+n}(z) = & \left( \frac{z}{2} \right)^n \left[ \frac{1}{\Gamma(n+1)} - \left( \frac{z}{2} \right)^2 \frac{1}{1!(n+1)\Gamma(n+1)} + \dots \right. \\ & \left. + (-1)^p \left( \frac{z}{2} \right)^{2p} \frac{1}{p!(n+1)\dots(n+p)\Gamma(n+1)} + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

dite fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ , que l'on représente par la notation  $J_n(x)$ ; ainsi

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p! \Gamma(n+p+1)} \quad (3.17)$$

or

$$J_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p}}{p! \Gamma(n+p+1)} \quad (3.18)$$

Si  $n=0$ , devient

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^2} - \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \quad (3.19)$$

La figure 3.1 représente le graphe de  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  et de  $J_2(x)$ .

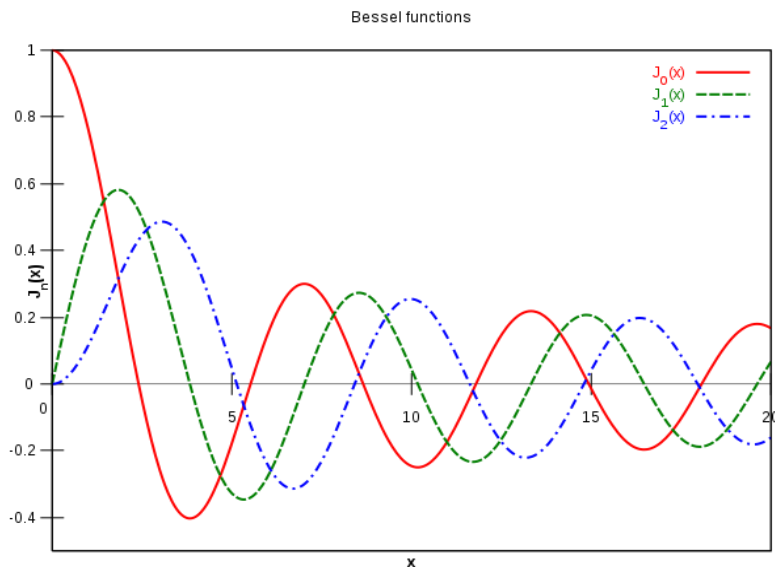


Figure 3.1 Graphe de la fonction de Bessel de première espèce.

Si  $n$  est un demi-entier impair,  $J_n(x)$  peut être exprimé sous la forme de termes en sinus et cosinus.

Soit maintenant la solution (3.15), en la multipliant par  $\frac{2^n}{\Gamma(1-n)}$ , on obtient

$$\frac{2^n y_{-n}(z)}{\Gamma(1-n)} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-n)} - \left(\frac{z}{2}\right)^2 \frac{1}{1! \Gamma(2-n)} + \dots + (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p! \Gamma(p-n+1)} + \dots \right] \quad (3.20)$$

Cette fonction est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $(-n)$

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p! \Gamma(p-n+1)} \quad (3.21)$$

Notons que cette solution se déduit (3.17) en remplaçant  $n$  en  $(-n)$ , mais que pour  $n$  entier positif, nous n'avons pu l'obtenir en tant que solution de l'équation de Bessel développée en série de puissances de  $z$ . Ceci peut d'ailleurs se justifier en remarquant que pour  $n$  entier positif, les fonctions  $J_n(z)$  et  $J_{-n}(z)$  ne sont pas indépendantes ; d'une façon plus précise on a, dans cette hypothèse

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \quad (3.22)$$

ainsi que nous allons l'établir, soit

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{1}{p! \Gamma(p-n+1)} \quad (3.23)$$

avec  $n$  entier positif.

Nous avons pour  $p < n - 1$

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{p=n}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma(p-n+1)} \quad (3.24)$$

Posons  $p - n = k$  entier positif, nous obtenons

$$\begin{aligned} J_{-n}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+2k} \frac{(-1)^{n+k}}{k! \Gamma(n+k+1)} \\ &= (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \\ &= (-1)^n J_n(z) \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.1.2 Formule de récurrence pour les fonctions de Bessel de première espèce

Nous allons établir la relation

$$\frac{d}{dz} \left[ z^{n+1} J_{n+1}(z) \right] = z^{n+1} J_n(z) \quad (3.26)$$

De l'expression générale de  $J_{n+1}(z)$ , on tire

$$z^{n+1} J_{n+1}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2n+2+2p}}{2^{n+1+2p} p!(n+p+2)} \quad (3.27)$$

et il en résulte

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[ z^{n+1} J_{n+1}(z) \right] &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2(n+p+1)z^{2n+1+2p}}{2^{n+1+2p} p!(n+p+2)} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2n+1+2p}}{2^{n+2p} p!(n+p+1)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

De la même manière, on établit la relation

$$\frac{d}{dz} \left[ z^{-n} J_n(z) \right] = -z^{-n} J_{n+1}(z) \quad (3.29)$$

### 3.1.3 Fonctions de Bessel dont l'indice diffère d'un entier de $\pm \frac{1}{2}$

Posons  $n = p \pm \frac{1}{2}$ , où  $p$  est un entier, nous allons montrer que les fonctions de Bessel dont l'indice est de cette forme se relie aux fonctions trigonométriques. Considérons la fonction

$$J_{1/2}(z) = \left( \frac{z}{2} \right)^{1/2} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2z^{2p}}{(2p+1)! p!} \quad (3.30)$$

soit

$$J_{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \quad (3.31)$$

Envisageons maintenant la fonction  $J_{-1/2}(z)$

$$\begin{aligned} z^{1/2} J_{-1/2}(z) &= \frac{d}{dz} \left( z^{1/2} J_{1/2}(z) \right) \\ &= \frac{d}{dz} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin z \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos z \end{aligned} \quad (3.32)$$

ainsi

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos z \quad (3.33)$$

### 3.2 Polynômes de Chebyshev

En mathématiques, un polynôme de Chebyshev est un terme de l'une des deux suites de polynômes orthogonaux particulières reliées à la formule de Moivre. Les polynômes de Chebyshev sont nommés ainsi en l'honneur du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Tchebychev. Il existe deux suites de polynômes de Chebyshev, l'une nommée polynômes de Chebyshev de première espèce et notée  $T_n(x)$  et l'autre nommée polynômes de Chebyshev de seconde espèce et notée  $U_n(x)$  (dans les deux cas, l'entier naturel  $n$  correspond au degré).

#### 3.2.1 Polynômes de Chebyshev de première et de deuxième espèce

Les polynômes de Chebyshev de première espèce  $T_n(x)$  sont des polynômes en  $x$  de degré  $n$  définis par [61]

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad (3.34)$$

Les polynômes de Chebyshev de deuxième espèce  $U_n(x)$  sont des polynômes en  $x$  de degré  $n$  définis par

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.35)$$

#### 3.2.2 Formules de récurrence des polynômes de Chebyshev

$$a. \quad T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad (3.36)$$

b.  $U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$

c.  $T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$

d.  $(1-x^2)U_{n-1}(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x)$

### 3.2.3 Valeurs particulières des polynômes de Chebyshev

a.  $T_n(1) = 1$  (3.37)

b.  $T_n(-1) = (-1)^n$

c.  $T_{2n}(0) = (-1)^n$

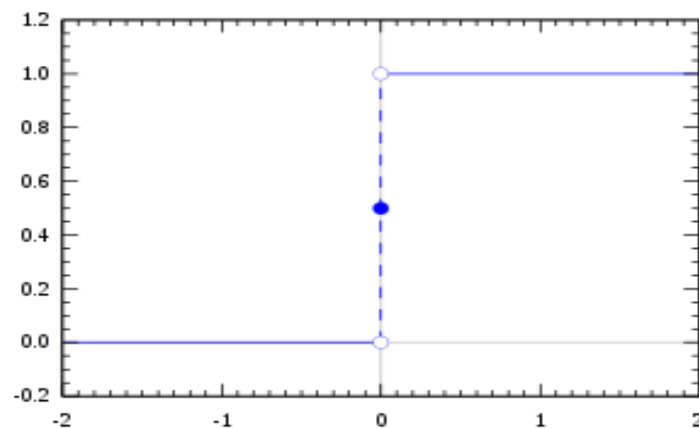
d.  $T_{2n+1}(0) = 0$

e.  $U_{2n+1}(0) = 0$

f.  $U_{2n}(0) = (-1)^n$

### 3.3 Fonction de Heaviside

La fonction de Heaviside  $H(x)$ , également appelée fonction unité est une fonction discontinue dont la valeur est zéro pour les arguments négatifs  $x < 0$  et un pour les arguments positifs  $x > 0$ , comme illustré. Cette fonction est couramment utilisée dans la théorie des mathématiques telle que le traitement du signal pour représenter un signal qui s'active à une heure précise et reste activé indéfiniment.



*Figure 3.2* Fonction de Heaviside.

### 3.4 Transformation de Hankel

La transformée de Hankel est une transformation intégrale, qui a été développée par le mathématicien Hermann Hankel, elle est aussi connue par la transformée de Fourier-Bessel car cette transformation se base sur la transformation bidimensionnelle de Fourier [56].

#### 3.4.1 Généralité

Cette transformation s'obtient de la transformation de Fourier bidimensionnelle suivante

$$G(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i(\sigma x + \tau y)} dx dy \quad (3.38)$$

dont l'inverse est

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma, \tau) e^{i(\sigma x + \tau y)} d\sigma d\tau \quad (3.39)$$

Utilisons le passage aux coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (3.40)$$

et

$$\begin{cases} \sigma = \rho \cos \theta \\ \tau = \rho \sin \theta \end{cases} \quad (3.41)$$

Les expressions précédentes (3.38) et (3.39), s'écrivent sous cette forme

$$G_*(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} g_*(r, \varphi) e^{-ir\rho \cos(\varphi - \theta)} d\varphi \quad (3.42)$$

alors que

$$g_*(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} G_*(\rho, \theta) e^{ir\rho \cos(\varphi - \theta)} d\theta \quad (3.43)$$

a. supposons maintenant que

$$g_*(r, \varphi) = e^{-in\varphi} g(r) \quad (3.44)$$



Posons dans la relation (3.42),  $\varphi - \theta = \frac{\pi}{2} + t$ , en tenant compte en suite de la représentation intégrale de

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\rho(z \sin(\theta) - n\theta)} d\theta \quad (3.45)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta \quad (3.46)$$

on trouve

$$\begin{aligned} G_*(\rho, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r dr \int_{-\theta - \frac{\pi}{2}}^{2\pi - \theta - \frac{\pi}{2}} g(r) e^{-in\varphi} e^{ir\rho \sin t} dt \\ &= e^{-in\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \int_0^{\infty} r g(r) J_n(r\rho) dr \end{aligned} \quad (3.47)$$

Donc

$$G_n(\rho) = \int_0^{\infty} r g(r) J_n(r\rho) dr \quad (3.48)$$

Si

$$G_n(\rho) = G_*(\rho, \theta) e^{in\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (3.49)$$

b. la relation (3.42), s'écrit alors comme suit

$$g(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_n(\rho) \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{i(n(\varphi - \theta - \frac{\pi}{2})) + r\rho \cos(\varphi - \theta)} d\theta \quad (3.50)$$

Effectuons ensuite le même changement de variable précédent, on aura

$$g(r) = \int_0^{\infty} \rho G_n(\rho) J_n(r\rho) d\rho \quad (3.51)$$

On appelle transformée de Hankel d'ordre n de la fonction  $g(r)$ , la fonction  $G_n(\rho)$  donnée par

$$G_n(\rho) = \int_0^{\infty} r g(r) J_n(r\rho) dr \quad (3.52)$$

la fonction  $g(r)$  s'obtient de  $G_n(\rho)$  à l'aide de la transformée inverse donnée par

$$g(r) = \int_0^{\infty} \rho G_n(\rho) J_n(r\rho) d\rho \quad (3.53)$$

### 3.4.2 Transformées de Hankel d'ordre n

a)  $g'(r)$

b)  $g''(r) + \frac{g'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} g(r)$

Rappelons tout d'abord quelques formules de la fonction  $J_n$

i.  $\frac{\partial}{\partial r} J_n(r\rho) = \rho J_{n-1}(r\rho) - \frac{n}{r} J_n(r\rho)$  (3.54)

ii.  $J_n(r\rho) = \frac{r\rho}{2n} [J_{n-1}(r\rho) + J_{n+1}(r\rho)]$  (3.55)

iii.  $(n^2 - z^2) J_n(z) = z \frac{d}{dz} [z J_n'(z)]$  (3.56)

Par suit on trouve

a) transformée de  $g'(r)$

Calculons par l'intégration par partie l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{\infty} r g(r) J_n(r\rho) \quad (3.57)$$

soit

$$U = r J_n(r\rho) \Rightarrow dU = -(n-1) J_n(r\rho) + r \rho J_{n-1}(r\rho)$$

$$dV = g'(r) \Rightarrow V = g(r) \quad (3.58)$$

$$I = (n-1) \int_0^{\infty} g(r) J_n(r\rho) dr - \rho \int_0^{\infty} r g(r) J_{n-1}(r\rho) dr \quad (3.59)$$

or

$$\int_0^{\infty} g(r) J_n(r\rho) dr = \frac{\rho}{2n} \left[ \int_0^{\infty} \tau g(r) J_{n-1}(r\rho) dr + \int_0^{\infty} r g(r) J_{n+1}(r\rho) dr \right] \quad (3.60)$$

Finalement la transformée d'ordre n de  $g'(r)$  est

$$g'(r) = \frac{\rho}{2n} [(n-1)G_{n+1}(\rho) - (n+1)G_{n-1}(\rho)] \quad (3.61)$$

b) Transformée de  $g''(r) + \frac{g'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} g(r)$

Calculons par l'intégrale par partie l'intégrale suivante

$$(II) = \int_0^{\infty} r g''(r) J_n(r\rho) dr \quad (3.62)$$

$$(II) = - \int_0^{\infty} g'(r) \frac{d}{dr} [r J_n(r\rho)] \quad (3.63)$$

$$r J_n(r\rho) \rightarrow \frac{d}{dr} [r J_n(r\rho)]$$

$$g''(r) \rightarrow g'(r)$$

ce qui donne en suite

$$\int_0^{\infty} r \left[ g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) \right] J_n(r\rho) dr = -\rho \int_0^{\infty} r g'(r) J_n'(r\rho) dr \quad (3.64)$$

à l'aide d'une intégrale par partie on trouve, la dernière expression s'écrit comme suit

$$II = \rho \int_0^{\infty} g(r) \frac{d}{dr} [r \rho J_n'(r\rho)] dr \quad (3.65)$$

On utilisant la propriété (ii) on trouve

$$II = \rho \int_0^{\infty} g(r) \frac{d}{\rho dr} [r \rho J'_n(r \rho)] dr \Rightarrow \int_0^{\infty} g(r) \frac{(n^2 - r^2 \rho^2)}{r} J_n(r \rho) dr \quad (3.66)$$

Finalement la transformée de  $g''(r) + \frac{g'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} g(r)$  est

$$\int_0^{\infty} r \left[ g''(r) + \frac{g'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} g(r) \right] J_n(r \rho) dr = -\rho^2 G_n(\rho) \quad (3.67)$$

### 3.5 Méthodes d'intégration numérique

L'intégration numérique est d'une manière générale un calcul numérique pour déterminer, le mieux possible, une valeur approchée de l'intégrale au sens de Riemann [62].

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (3.68)$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels. En effet le nombre de fonctions dont on connaît leur primitive est en fait très faible. Par ailleurs la connaissance d'une primitive  $f$  ne suffit pas lorsque l'on ne sait pas calculer les valeurs de  $f$ .

Par exemple, on sait que  $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ ; mais connaît-on explicitement  $\ln 2$ ? Il est donc

intéressant concernant  $\int_a^b f(x) dx$

- sur le plan pratique, de pouvoir obtenir une approximation lorsque les primitives de  $f$  ne sont pas calculables.
- sur le plan théorique, de connaître des méthodes permettant d'obtenir des encadrements d'amplitudes aussi petits que souhaités.

#### 3.5.1 Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à approximer la fonction entre deux abscisses successives par une droite, ce qui donne :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) + O(h^3 f'') \quad (3.69)$$

Le terme d'erreur indique la qualité de l'évaluation de l'intégration et dépend de manière cubique du pas d'intégration ;  $f''$  se réfère à un point situé à l'intérieur de l'intervalle. Pour que cette méthode converge rapidement, il est nécessaire de choisir un pas  $h$  inférieur à  $f''$ .

A noter que cette formule devient exacte quand la fonction est un polynôme de degré 1 sur l'intervalle  $[x_1, x_2]$ . Sur l'intervalle  $[a, b]$ , on a

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^{N-1} f_i + \frac{h}{2}(f_0 + f_N) + O\left(\frac{(b-a)^3}{N^2} f''\right) \quad (3.70)$$

où, on a utilisé que  $h = \frac{(b-a)}{N}$

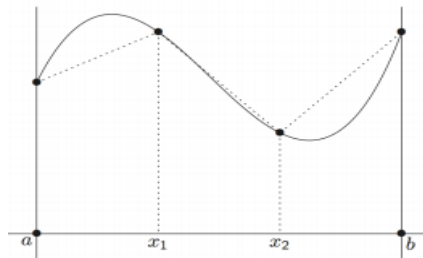


Figure 3.3 Méthode des trapèzes.

### 3.5.2 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à remplacer la fonction par un polynôme de degré 2 sur un intervalle constitué de trois abscisses consécutives

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx = h \left( \frac{1}{3} f_i + \frac{4}{3} f_{i+1} + \frac{1}{3} f_{i+2} \right) + O(h^5 f^{(4)}) \quad (3.71)$$

Il se trouve que cette formule est exacte jusqu'à des polynômes de degré 3 ce qui implique que l'erreur dépende de h à la puissance 5. On peut aussi déterminer la formule à 4 points qui est aussi exacte pour les polynômes de degré 3. Cette formule s'appelle aussi Simpson 3/8 à cause des coefficients du développement

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} f(x) dx = h \left( \frac{3}{8} f_i + \frac{9}{8} f_{i+1} + \frac{9}{8} f_{i+2} + \frac{3}{8} f_{i+3} \right) + O(h^5 f^{(4)}) \quad (3.72)$$

Sur un intervalle complet, en choisissant N pair, la méthode de Simpson donne une estimation de l'intégrale sur l'intervalle  $[a, b]$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left( f_0 + f_N + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (2f_{2i-1} + f_{2i}) \right) + O\left(\frac{1}{N^4}\right) \quad (3.73)$$

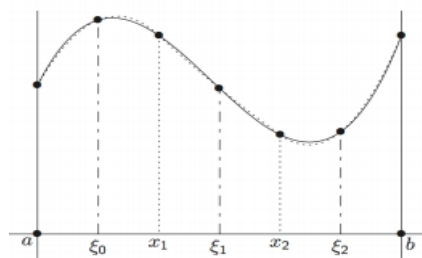


Figure 3.4 Méthode de Simpson.

### 3.6 Résolution d'un système d'équations

Ce problème, également classique en traitement numérique, généralise le problème d'un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues. On distingue deux grandes classes de problèmes : les systèmes linéaires, relativement simples d'un point de vue purement algorithmique, et les systèmes non linéaires, beaucoup plus délicats à traiter [63].

#### 3.6.1 Systèmes linéaires

Les systèmes linéaires sont relativement simples d'un point de vue mathématique, précisément en raison de la linéarité des équations. On peut mettre en œuvre deux types de méthodes numériques :

- les méthodes directes, qui consistent à manipuler directement les équations pour les résoudre.
- les méthodes itératives, qui consistent à obtenir la solution par convergence d'un processus itératif.

### Conclusion

L'étude des problèmes aux conditions aux limites nécessite la connaissance de l'outil mathématique qui va nous permettre à l'aide des fonctions spéciales et des équations intégrales de simplifier la solution du problème. La résolution des problèmes mécaniques passe par des intégrales délicates à calculer. Pour se faire, on utilise des méthodes efficaces appelées méthodes d'intégration numérique. La connaissance de ces méthodes est donc un préalable pour choisir la manière de résoudre ces problèmes le plus efficacement possible. Les fonctions de Bessel sont très classiques en analyse et interviennent très fréquemment dans la résolution d'équations aux dérivées partielles, notamment en thermique et en élasticité. La méthode de la transformation de Hankel a été appliquée pour la résolution de ces équations aux dérivées partielles du système d'équilibre élastique et thermoélastiques en coordonnées cylindriques pour les problèmes de contact proposés dans cette étude.

## **Chapitre 4**

### **Torsion axisymétrique d'une Plaque Epaisse par un Disque Rigide**

# Chapitre 4

## Torsion axisymétrique d'une Plaque Epaisse par un Disque Rigide

### Introduction

La théorie de la torsion des corps élastiques et les méthodes de résolution des problèmes de torsion constituent l'un des vastes domaines de la théorie mathématique de l'élasticité. La signification théorique et appliquée des problèmes de torsion de contact réside dans le fait qu'ils généralisent et développent, d'une part, les problèmes classiques de contact de la théorie de l'élasticité. D'autre part, ils sont directement liés à d'importants problèmes techniques pratiques au transfert de charges d'éléments minces à des corps déformables massifs, souvent rencontrés dans la construction de machines, en particulier dans la construction d'aéronefs, dans la mécanique des corps en croissance, dans la mesure technologique, en mécanique des composites et dans d'autres domaines de la mécanique appliquée.

Une solution analytique d'un problème de la torsion axisymétrique d'une plaque élastique épaisse reposant partiellement sur un support circulaire encastrée par un disque rigide a été étudiée. Nous déterminons la solution du problème de contact élastique à l'aide de la méthode de transformation intégrale de Hankel, utilisant les fonctions auxiliaires de Boussinesq. L'idée de résolution de ce problème est basée sur le travail récent de *Hara et al.* [10] et *Sakamoto* [24], [26]-[28]. Les effets de rayon du disque et celui que du support et l'épaisseur de la plaque sur les contraintes, les déplacements, le moment de torsion ainsi que sur les facteurs de singularité de contrainte sont discutés. Une application numérique est également considérée avec quelques résultats et conclusion.



## 4.1 Formulation du problème et de sa solution

### 4.1.1 Hypothèses

Nous supposons que la plaque étudiée d'épaisseur, homogène, isotrope et linéairement élastique. D'une part, on formule l'hypothèse que toutes les composantes du tenseur contrainte et du vecteur déplacement s'annulent à l'infini. D'autre part, le rapport de l'épaisseur de la plaque et le rayon du disque n'est pas extrêmement faible.

### 4.1.2 Position du problème

On étudie le problème de déformation axisymétrique d'une plaque élastique d'épaisseur  $h$ , due à la torsion d'un disque rigide de rayon  $a$ . La plaque repose partiellement sur un support circulaire encastrée de rayon  $b$ . Une torsion d'angle  $\omega_0$  est appliquée au disque autour de son axe vertical, cf. figure 4.1.

Le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  est choisi comme système de référence. Le module de cisaillement du milieu élastique est noté par  $G$  où  $(u, v, w)$  désigne le vecteur de déplacement alors que  $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta})$  le tenseur de contrainte. Les conditions aux limites doublement mixtes de la plaque peuvent être décrites comme suit

- sur le support

$$v(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq b \quad (4.1)$$

$$\tau_{\theta z}(r, 0) = 0, \quad r > b \quad (4.2)$$

- sur la surface supérieure

$$v(r, h) = \omega_0 r, \quad 0 \leq r \leq a \quad (4.3)$$

$$\tau_{\theta z}(r, h) = 0, \quad r > a \quad (4.4)$$

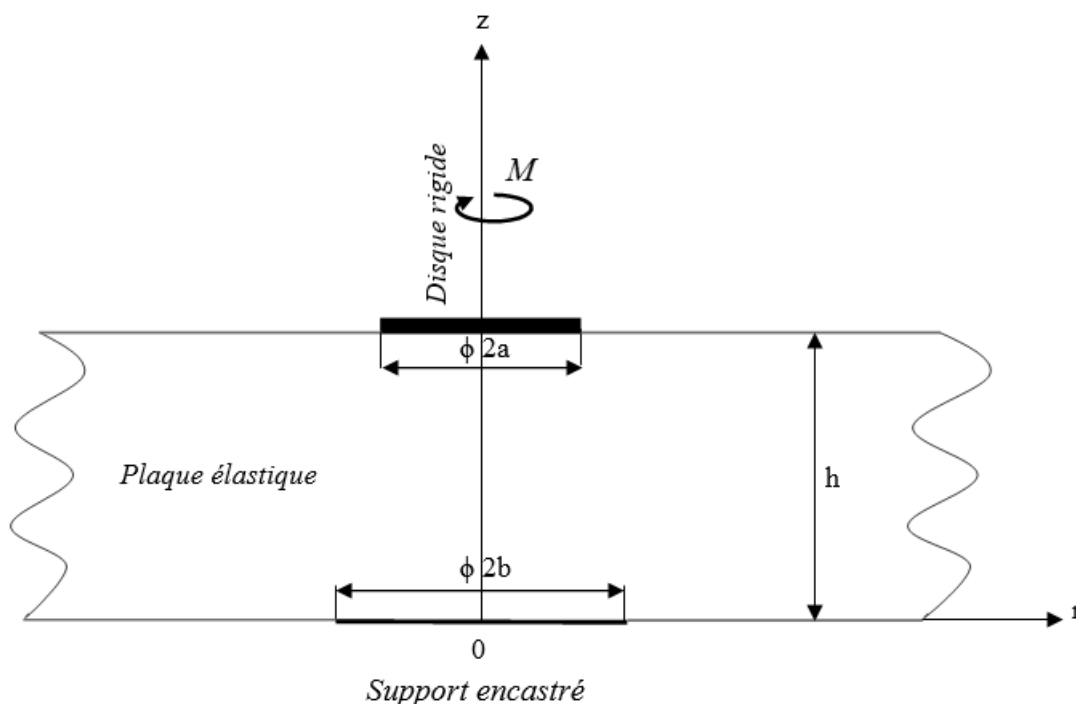


Figure 4.1 Schéma représentant le problème dans un repère cylindrique.

#### 4.1.3 Méthode de résolution du problème aux limites

En général, le vecteur de déplacement a trois composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  représentant des projections sur les trois directions principales. Elles correspondent aux déplacements radiaux suivant la direction  $r$ , angulaire de direction  $\theta$  et axiale suivant la verticale  $z$ , respectivement. Chaque composante est fonction des trois variables  $r$ ,  $\theta$  et  $z$

$$u = u(r, \theta, z)$$

$$v = v(r, \theta, z)$$

$$w = w(r, \theta, z)$$

Pour ce type de problème de torsion axisymétrique, les composantes du déplacement  $u$  et  $w$  sont nulles, ce qui ramène l'équation d'équilibre en fonction de  $v = v(r, z)$  seulement. Dans ce cas l'équation d'équilibre en déplacement sera donnée par l'Annexe 1.1

$$\frac{\partial^2 v(r, z)}{\partial r^2} + \frac{\partial v(r, z)}{r \partial r} - \frac{v(r, z)}{r^2} + \frac{\partial^2 v(r, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (4.5)$$

D'autre part, nous avons les composantes de contraintes données par Hooke s'expriment en fonction du déplacement angulaire par les relations suivantes

$$\begin{cases} \tau_{\theta z}(r, z) = G \frac{\partial v(r, z)}{\partial z} \\ \tau_{\theta r}(r, z) = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v(r, z)}{r} \right) \\ \sigma_r(r, z) = \sigma_\theta(r, z) = \sigma_z(r, z) = \tau_{rz}(r, z) = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

La transformation intégrale de Hankel d'ordre n [64] est définie par

$$F(\lambda) = \int_0^\infty r f(r) J_n(\lambda r) dr \quad (4.7)$$

où  $J_n$  représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n. La fonction originale peut être calculée par la transformation inverse

$$f(r) = \int_0^\infty \lambda F(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda \quad (4.8)$$

Une solution générale de l'équation d'équilibre de problème de torsion axisymétrique étudié (4.5) peut être représentée par la fonction de contrainte harmonique de Boussinesq  $\varphi_3(r, z)$  qui vérifie [10]

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_3(r, z) = 0 \\ \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{cases} \quad (4.9)$$

La fonction auxiliaire  $\varphi_3(r, z)$  est définie par

$$\varphi_3(r, z) = \int_0^\infty [A(\lambda) \sinh \lambda z + B(\lambda) \cosh \lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (4.10)$$

avec  $A(\lambda)$  et  $B(\lambda)$  sont des fonctions inconnues d'intégrations à déterminer par les conditions aux limites du problème proposé. La résolution du système d'équilibre (4.5) nous permet d'exprimer le déplacement angulaire en fonction de  $\varphi_3(r, z)$

$$2Gv(r, z) = -\frac{\partial \varphi_3(r, z)}{\partial r} \quad (4.11)$$

En remplaçant ce déplacement dans les expressions des contraintes de cisaillement (4.6), on aura

$$\begin{cases} \tau_{\theta z}(r, z) = -\frac{\partial^2 \varphi_3(r, z)}{2\partial r \partial z} \\ \tau_{\theta r}(r, z) = \frac{\partial^2 \varphi_3(r, z)}{2\partial z^2} + \frac{\partial \varphi_3(r, z)}{r \partial r} \end{cases} \quad (4.12)$$

En substituant l'expression (4.10) dans les équations (4.11) et (4.12), nous tirons les résultats de la composante de déplacement angulaire et des contraintes de cisaillement

$$2Gv(r, z) = -\int_0^{\infty} \lambda [A(\lambda) \sinh \lambda z + B(\lambda) \cosh \lambda z] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4.13)$$

$$2\tau_{\theta z}(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda^2 [A(\lambda) \cosh \lambda z + B(\lambda) \sinh \lambda z] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4.14)$$

$$2\tau_{\theta r}(r, z) = -\int_0^{\infty} \lambda^2 [A(\lambda) \sinh \lambda z + B(\lambda) \cosh \lambda z] J_2(\lambda r) d\lambda \quad (4.15)$$

Une contribution importante est apportée à la résolution du problème de l'équation intégrale [65]. En utilisant les équations (4.13)-(4.15), les conditions aux limites (4.2) et (4.3) conduisent au système suivant d'équations intégrales duales

$$2Gv(r, h) = \int_0^{\infty} \lambda [A(\lambda) \sinh \lambda h + B(\lambda) \cosh \lambda h] J_1(\lambda r) d\lambda = 2G\omega_0 r, \quad 0 \leq r \leq a \quad (4.16)$$

$$2Gv(r, 0) = \int_0^{\infty} \lambda B(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \quad 0 \leq r \leq b \quad (4.17)$$

$$2\tau_{\theta z}(r, h) = \int_0^{\infty} \lambda^2 [A(\lambda) \cosh \lambda h + B(\lambda) \sinh \lambda h] J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a \quad (4.18)$$

$$2\tau_{\theta z}(r, 0) = \int_0^{\infty} \lambda^2 A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > b \quad (4.19)$$

En tenant compte de la formule intégrale pour les fonctions de Bessel ([66], Eq 6. 522. 11)

$$\int_0^{\infty} \lambda M_n(\lambda x) J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} \frac{2}{\pi r} \frac{T_{2n+1}(r/x)}{\sqrt{x^2 - r^2}}, & r < x \\ 0, & r > x \end{cases} \quad (4.20)$$

avec  $T_{2n+1}$  est le polynôme de Chebyshev de premier espèce.

$$M_n(\lambda x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda x}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda x}{2}\right) \right] \quad (4.21)$$

A l'aide d'une intégration par partie (Annexe 1.2), ce qui pose

$$\int_0^{\infty} \lambda M_n(\lambda x) J_1(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \frac{T_{2n+1}(r/x)}{\sqrt{x^2 - r^2}}, & r < x \\ 0, & r > x \end{cases} \quad (4.22)$$

Afin de satisfaire les équations homogènes (4.18) et (4.19), on peut définir

$$\begin{cases} \lambda \omega_* [A(\lambda) \cosh \lambda h + B(\lambda) \sinh \lambda h] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_n(\lambda a) \\ \lambda \omega_* A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n M_n(\lambda b) \end{cases} \quad (4.23)$$

où

$$\omega_* = -\frac{1}{G \omega_0 a^2} \quad (4.24)$$

La résolution de ce système de deux équations donne

$$\lambda \omega_* B(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \alpha_n \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda a) - \beta_n \coth \lambda h M_n(\lambda b) \right] \quad (4.25)$$

Maintenant, si nous substituons (4.25) dans les équations (4.16) et (4.17), nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \alpha_n \coth \lambda h M_n(\lambda a) - \beta_n \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda b) \right] J_1(\lambda r) d\lambda = -\frac{2r}{a^2}, \quad 0 \leq r \leq a \quad (4.26)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \alpha_n \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda a) - \beta_n \coth \lambda h M_n(\lambda b) \right] J_1(\lambda r) d\lambda = 0, \quad 0 \leq r \leq b \quad (4.27)$$

où

$$-rJ_1(\lambda r) = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda x) \cos(m\phi_x), \quad (\phi_x = \arcsin(r/x), \quad x = a; b, \quad r < x) \quad (4.28)$$

avec

$$X_m(\lambda x) = \frac{\partial J_m^2}{\partial \lambda} \left( \frac{\lambda x}{2} \right) \quad (4.29)$$

$\delta_{0m}$  désigne le symbole de Kronecker (on dit aussi le delta de Kronecker), défini par

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Substituons l'expression (4.28) dans les équations (4.26) et (4.27), cela donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \alpha_n \coth \lambda h M_n(\lambda a) - \beta_n \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda b) \right] (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda a) \cos(2m\phi_a) d\lambda = 1 - \cos(2\phi_a) \quad (4.30)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \alpha_n \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda a) - \beta_n \coth \lambda h M_n(\lambda b) \right] (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda b) \cos(2m\phi_b) d\lambda = 0 \quad (4.31)$$

Remarquons que le système  $\cos(m\phi)$  est linéairement indépendant, en égalant les coefficients de  $\cos(2m\phi_{a,b})$  pour les deux côtés d'équations (4.30) et (4.31), nous obtenons le système infini d'équations algébriques suivant pour la détermination de  $\alpha_n$  et  $\beta_n$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \alpha_n \coth \lambda h M_n(\lambda a) - \beta_n \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda b) \right] X_m(\lambda a) d\lambda = \delta_{0m} - \frac{\delta_{1m}}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \alpha_n \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda a) - \beta_n \coth \lambda h M_n(\lambda b) \right] X_m(\lambda b) d\lambda = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

Qui peut être écrit également sous forme matricielle

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n A_{nm} - \beta_n B_{nm}] = \delta_{0m} - \frac{\delta_{1m}}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n C_{nm} - \beta_n D_{nm}] = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

telle que

$$A_{nm} = \int_0^{\infty} \coth \lambda h M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda \quad (4.34)$$

$$B_{nm} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda b) X_m(\lambda a) d\lambda$$

$$C_{nm} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda a) X_m(\lambda b) d\lambda$$

$$D_{nm} = \int_0^{\infty} \coth \lambda h M_n(\lambda b) X_m(\lambda b) d\lambda$$

## 4.2 Expressions analytiques des déplacements et des contraintes

Les composantes du déplacement angulaire sur la surface inférieure de la plaque peuvent être exprimées comme suit

$$v^*(r, 0) = \frac{v(r, 0)}{a\omega_0} = -\frac{a}{2} H(r-b) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \alpha_n \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda a) - \beta_n \coth \lambda h M_n(\lambda b) \right] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4.35)$$

Sur la surface de contact, les composantes du déplacement peuvent être calculées

$$v^*(r, h) = \frac{v(r, h)}{a\omega_0} = \frac{r}{a} H(a-r) - \frac{a}{2} H(r-a) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \alpha_n \coth \lambda h M_n(\lambda a) - \beta_n \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda b) \right] J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4.36)$$

où H désigne la fonction de pas unitaire de Heaviside, défini par  $H(x-r) = \begin{cases} 1, & r < x \\ 0, & r > x \end{cases}$

En tenant compte de la formule intégrale (4.22) permet de déduire que les contraintes de cisaillement, à la fois sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, sont données ci-dessous en séries de fonctions appropriées

$$\tau_{\theta z}^*(r, 0) = \omega_* \tau_{\theta z}(r, 0) = -\frac{1}{\pi} H(b-r) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{T_{2n+1}(r/b)}{\sqrt{b^2 - r^2}} \quad (4.37)$$

$$\tau_{\theta z}^*(r, h) = \omega_* \tau_{\theta z}(r, h) = -\frac{1}{\pi} H(a-r) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{T_{2n+1}(r/a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (4.38)$$

D'après les travaux [6], [8] et [10]. Le moment de torsion requis pour faire tourner le disque appliqué sur la surface supérieur de la plaque peut être représenté par la formule

$$M = 2\pi \int_0^a \tau_{\theta z}(r, h) r^2 dr \quad (4.39)$$

où  $(\tau_{\theta z})_{z=h}$  est donnée par l'équation (4.38) en utilisant cette dernière, l'expression de moment de torsion devient

$$M = -\frac{2}{\omega_*} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^a \frac{T_{2n+1}(r/a)}{\sqrt{(a^2 - r^2)}} r^2 dr \quad (4.40)$$

en effectuant deux changement de variable  $x = r/a$  et  $x_1 = \arccos(x)$ , nous trouvons l'intégrale suivante

$$\frac{M}{G \omega_0 a^4} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[(2n+1)x_1] \cos^2(x_1) dx_1 \quad (4.41)$$

Pour résoudre cette intégrale nous utilisons la formule ([66], Eq 2. 538), cela pour  $p = 2$  et  $a = 2n + 1$  (voir Annexe 1.3)

$$\int \cos(ax) \cos^p(x) dx = \frac{1}{p+a} \left\{ \cos^p(x) \sin(ax) + p \int \cos^{p-1}(x) \cos((a-1)x) dx \right\} \quad (4.42)$$

Cette dernière formule nous permet de déduire le moment de torsion nécessaire pour faire maintenir la rotation du disque  $\omega_0$

$$M = 4G \omega_0 a^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \alpha_n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \quad (4.43)$$

Les facteurs de singularité de contrainte correspondant au mode III du problème étudié peuvent être donnés selon les formules [10]



Cas  $z = 0$ , le facteur de singularité de contrainte est calculé par

$$S_0 = \lim_{r \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi(b-r)} \frac{\tau_{\theta z}(r,0)}{G\omega_0} \quad (4.44)$$

Le facteur  $S_h$ , s'obtient

$$S_h = \lim_{r \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi(a-r)} \frac{\tau_{\theta z}(r,h)}{G\omega_0} \quad (4.45)$$

Après substituant de l'équation (4.37) dans l'équation (4.44), l'expression de facteur de singularité de contrainte donnée en termes des coefficients  $\beta_n$  obtient comme suit

$$S_0 = \frac{b}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \quad (4.46)$$

De la même manière décrite précédemment, on établit l'expression analytique de facteur de singularité de contrainte sur la surface supérieure de la plaque, qui se simplifie en

$$S_h = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \quad (4.47)$$

### 4.3 Discussion et validation des résultats

#### *Cas du demi-espace*

Pour un cas particulier du problème où l'épaisseur de la plaque est infiniment grande, l'équation donnée par (4.32) devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda = \delta_{0m} - \frac{\delta_{1m}}{2}, \quad (m=0,1,\dots) \quad (4.48)$$

A partir de l'équation (4.48) nous pouvons obtenir  $\alpha_0 = \frac{4}{a}$ ,  $\alpha_n = 0$ , ( $n \geq 1$ ). De plus, les expressions analytiques de déplacement, des contraintes et du moment de torsion sont données par :

$$\frac{(v)_{z=h}}{a\omega_0} = \frac{r}{a} - \frac{2}{\pi} H(r-a) \left[ \frac{r}{a} \cos^{-1} \frac{r}{a} + \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r} \right] \quad (4.49)$$

$$\frac{(\tau_{\theta z})_{z=h}}{G\omega_0} = \frac{4r}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} H(a-r)$$

$$\frac{(\tau_{\theta r})_{z=h}}{G\omega_0} = -\frac{4a^3}{\pi r^2 \sqrt{r^2 - a^2}} H(r-a)$$

$$\frac{M}{G\omega_0 a^3} = \frac{16}{3}$$

Les équations données par (4.49) sont celles données par le problème de la torsion d'un demi-espace élastique par un disque rigide [12]. Les résultats obtenus sont prescrits numériquement dans le tableau 4.3, elles sont graphiquement illustrées sur les figures 4.8 et 4.9

### *Cas de problème de Florence*

Le problème traité par *Florence* [2] est un cas particulier de notre étude et peut être résolu dans le cas où le rayon du support est infiniment grand. Les résultats obtenus sont vérifiés et montrés sur le tableau 4.4 et la figure 4.11.

### *Résultats numériques*

Pour déterminer les coefficients inconnus  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ , nous devons évaluer les intégrales infinies du système (4.32). En séparant les termes obtenus par intégration numérique et ceux par une application des développements asymptotiques des fonctions de Bessel [10], [24] et [26]-[28]. Il est clair que pour les grandes valeurs de  $\lambda$ , nous obtenons  $\coth \lambda h \rightarrow 1$  et  $\frac{1}{\sinh \lambda h} \rightarrow 0$ . Cela nous permet d'écrire

$$A_{nm} \approx \int_0^{\lambda_0} \coth \lambda h M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda + \int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda \quad (4.50)$$

$$B_{nm} \approx \int_0^{\lambda_0} \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda b) X_m(\lambda a) d\lambda$$

$$C_{nm} \approx \int_0^{\lambda_0} \frac{1}{\sinh \lambda h} M_n(\lambda a) X_m(\lambda b) d\lambda$$

$$D_{nm} \approx \int_0^{\lambda_0} \coth \lambda h M_n(\lambda b) X_m(\lambda b) d\lambda + \int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda b) X_m(\lambda b) d\lambda$$

Les premières intégrales du côté droite des expressions ci-dessus sont évaluées numériquement à l'aide de la formule de Simpson. Ici, nous choisissons 1000 sous-intervalles et  $\lambda_0 = 1500$  et le second est remplacé par l'intégrale de l'équivalent de fonction. Ensuite, nous évaluons asymptotiquement le terme intégrale  $\int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda x) X_m(\lambda x) d\lambda$  avec  $x = a, b$  (les étapes des calculs de ce terme sont détaillées dans l'Annexe 1.4). Quant à la grande valeur de  $\lambda$ , nous avons

$$J_\nu(\lambda x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda x}} \left[ \cos\left(\lambda x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{4\nu^2 - 1}{8\lambda x} \sin\left(\lambda x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (4.51)$$

où

$$X_m\left(\frac{\lambda x}{2}\right) \approx \frac{2}{\pi \lambda x} \left[ 1 + (-1)^m \sin(\lambda x) \right] \quad (4.52)$$

Il vient que

$$M_n(\lambda x) \approx \frac{2}{\pi \lambda x} \sin(\lambda x) \quad (4.53)$$

La fonction  $M_n(\lambda x) X_m(\lambda x)$  peut être asymptotiquement calculée comme suit

$$M_n(\lambda x) X_m(\lambda x) \rightarrow \frac{4}{(\pi \lambda x)^2} \left[ \sin(\lambda x) + \frac{(-1)^m}{2} (1 - \cos(2\lambda x)) \right] \quad (4.54)$$

Donc

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda x) X_m(\lambda x) d\lambda \approx -\frac{4}{\pi^2 x^2} \left\{ \frac{\sin \lambda_0 x}{\lambda_0} - xci(\lambda_0 x) - \frac{(-1)^m}{2} \left[ \frac{1 - \cos 2\lambda_0 x}{\lambda_0} - 2xsi(2\lambda_0 x) \right] \right\} \quad (4.55)$$

On note,  $si(x)$  est la fonction intégrale sinus

$$si(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \quad (4.56)$$

et,  $ci(x)$  est la fonction intégrale cosinus

$$ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos \xi}{\xi} d\xi \quad (4.57)$$

Les résultats de calcul numérique des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  du système algébrique sont mentionnés dans les tableaux 4.1-4.4 avec différentes valeurs de l'épaisseur de la plaque et de rayon du disque ainsi que celui du support.

**Tableau 4.1** Valeurs des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  ( $h/a=1$ ).

n	b/a=0.5	b/a=1	b/a=1.5
$\alpha_n$			
0	3.739611017953796	3.983788899757462	4.172067903177652
1	0.007953367469361	-0.056260500481093	-0.055859698704046
2	0.006142138541829	0.007944861070421	0.003277751091580
3	-0.001383963487921	-0.000057591486065	0.000057176309999
4	0.000086926681302	-0.000182303527505	-0.000129000315475
5	0.000111526581392	0.000140535686355	0.000143549111475
6	-0.000156306134004	-0.000165570916663	-0.000173991179636
7	0.000137662682455	0.000146411921175	0.000153399746710
8	-0.000208501521969	-0.000221320067071	-0.000231754455384
9	0.000109065714806	0.000117192869601	0.000122745667823
$\beta_n$			
0	0.694558542611535	1.128889430215339	1.189557456551056
1	-0.048356555962049	-0.338727521884290	-0.817546523415613
2	0.000719945930218	0.029664248400491	0.204180579779440
3	0.000016562704126	0.000678220790190	-0.017851315642931
4	-0.000000851174826	-0.000363002573279	-0.004381568529923
5	-0.000008264945399	0.000050187962416	0.001649822836933
6	-0.000011700614137	-0.000043196952790	-0.000127730381337
7	-0.000032522537498	0.000042790425714	-0.000057990711221
8	-0.000052623746738	-0.000059836672665	0.000020435943586
9	-0.000101577590032	0.000038558000572	-0.000009672824829

**Tableau 4.2** Valeurs des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  ( $b/a=1$ ).

n	h/a=0.7	h/a=1	h/a=1.5
$\alpha_n$			
0	4.170033382782129	3.983788899757462	3.950183204524812
1	-0.212832588510739	-0.056260500481093	-0.006590598710702
2	0.025738241321176	0.007944861070421	0.000969978084557
3	0.001702889430108	-0.000057591486065	0.000049411164114
4	-0.000452062863889	-0.000182303527505	-0.000126213922232
5	0.000091219012651	0.000140535686355	0.000136362204521
6	-0.000166391798562	-0.000165570916663	-0.000164807531420
7	0.000155482765676	0.000146411921175	0.000144990450539
8	-0.000230395062599	-0.000221320067071	-0.000219844561831
9	0.000124966919117	0.000117192869601	0.000115403489395
$\beta_n$			
0	1.895863774517311	1.128889430215339	0.541813542818172
1	-0.684440732310698	-0.338727521884290	-0.115525955216694
2	0.040394254408903	0.029664248400491	0.009707885327886
3	0.009627421603626	0.000678220790190	-0.000367394955728
4	-0.000888507158191	-0.000363002573279	-0.000025305369857
5	-0.000158078097548	0.000050187962416	0.000020876338087
6	-0.000056572072881	-0.000043196952790	-0.000022513856425
7	0.000078093408042	0.000042790425714	0.000020496765178
8	-0.000099187351701	-0.000059836672665	-0.000029139819080
9	0.000066021665867	0.000038558000572	0.000017757790383

Le problème traité de torsion d'un demi-espace élastique par un disque rigide [12] dans notre cas, où l'épaisseur de la plaque est infiniment grande. Les résultats de Florence [2] où on fait tendre le rayon du support vers l'infini apparaissent dans notre étude, cela nous permet d'obtenir les tableaux des coefficients donnés ci-dessous, respectivement

**Tableau 4.3**

Valeurs des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$

( $h/a \rightarrow \infty$ ).

n	$\alpha_n$
0	3.943638872732461
1	0.002694533965913
2	-0.000152751183762
3	0.000107950815758
4	-0.000126236171898
5	0.000135931710572
6	-0.000164535666511
7	0.000144700338121
8	-0.000219558348177
9	0.000115060148000
$\beta_n (10^{-6})$	
0	0.005456878103825
1	-0.014846961065098
2	0.029711734090734
3	-0.031573804154084
4	0.056723557241741
5	-0.046962754343598
6	0.082742719325882
7	-0.067199019594041
8	0.096912234170243
9	-0.115520253799589

**Tableau 4.4**

Valeurs des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$

( $h/a=2$  et  $b/a \rightarrow \infty$ ).

n	$\alpha_n$
0	3.999997992791846
1	0.000061598423155
2	-0.000087455362930
3	0.000108167777386
4	-0.000128018135665
5	0.000137877319537
6	-0.000166881799914
7	0.000146782730313
8	-0.000222671264024
9	0.000116752007792
$\beta_n (10^{-6})$	
0	0.350287408318305
1	-0.000006503405484
2	0.000089393103665
3	-0.000061046583542
4	-0.000003876527967
5	-0.000470600174289
6	-0.000806790373148
7	-0.002083069207280
8	-0.003500326973150
9	-0.006398628018515

Le comportement des déplacements angulaires et la répartition des contraintes de cisaillement adimensionnelles pour différentes valeurs des distances axiale  $z$  à travers le milieu élastique est illustrée graphiquement sur les figure 4.2 et 4.3. Nous remarquons que les déplacements augmentent au fur à mesure qu'on s'approche du niveau de l'axe verticale, jusqu'à atteindre le maximum à  $r/a=1$  puis diminuent en dehors de la bande du disque avec l'augmentation de  $r/a$ . La même remarque est aussi valable pour la contrainte de cisaillement, elle augmente avec le rapport  $z/h$ . Il est important de signaler que le comportement discontinu de la contrainte de cisaillement au bord du disque, est déjà constaté par *Pak* [12] et *Bacci* [13].

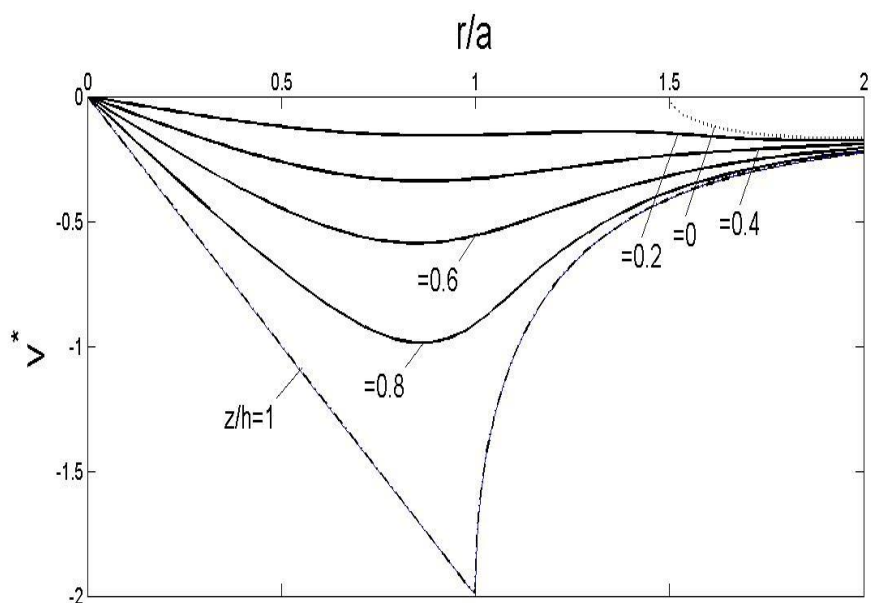


Figure 4.2 Champ de déplacement  $v^*$  pour  $b/a=1.5$  en fonction de  $z/h$ .

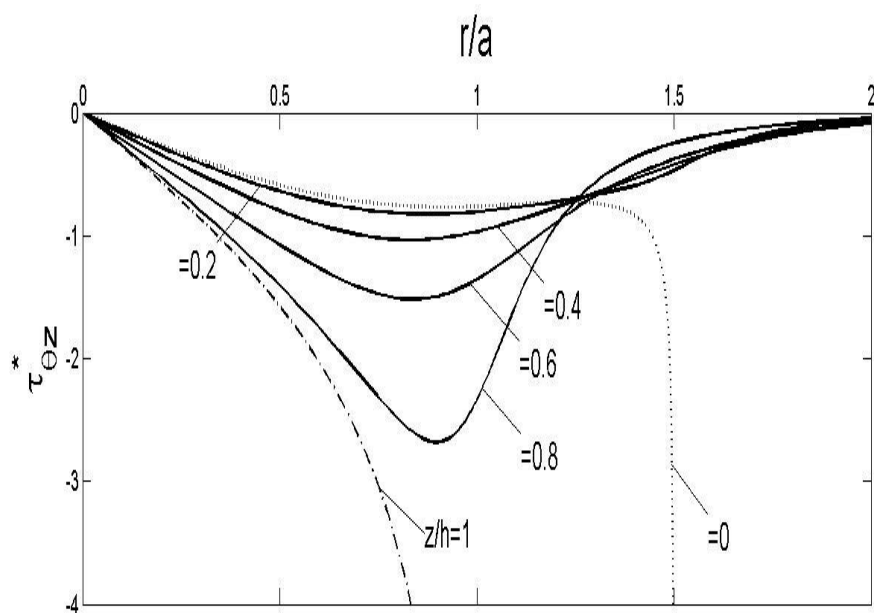
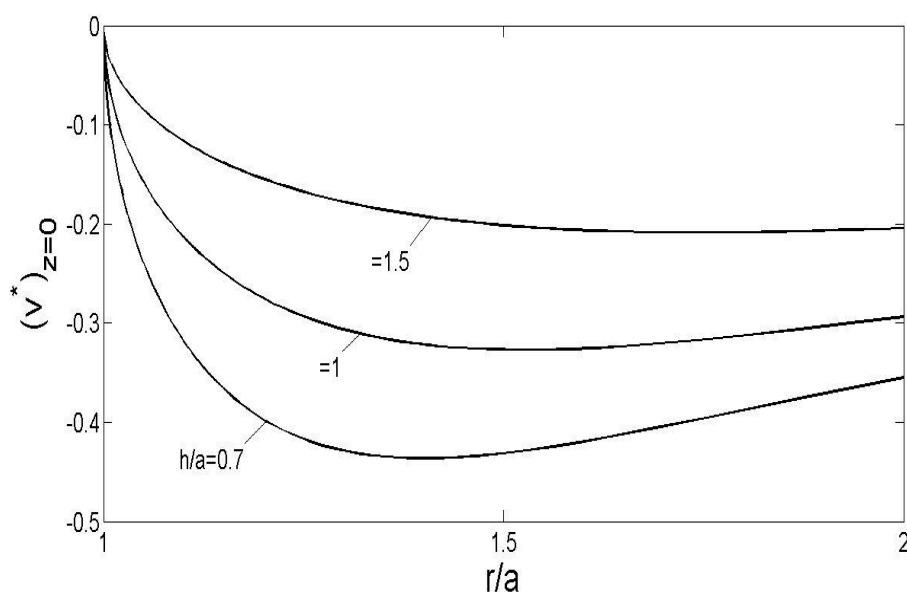
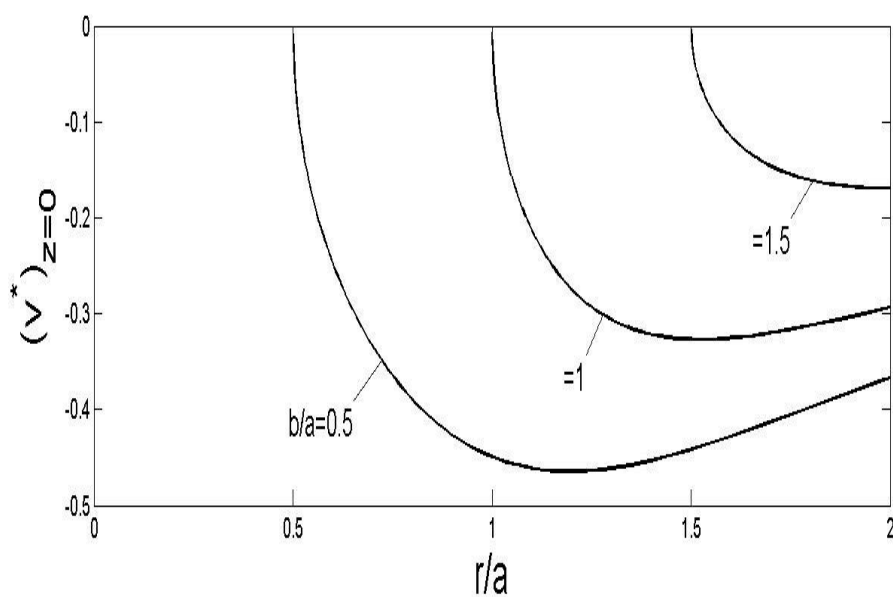


Figure 4.3 Champ de contrainte  $\tau_{\theta z}^*$  pour  $b/a=1.5$  en fonction de  $z/h$ .

Les figures 4.4 et 4.5 montrent la distribution du déplacement angulaire adimensionnel dans le plan  $z = 0$  pour  $h/a$  et  $b/a$ , respectivement. Elle diminue avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et de rayon du support.



**Figure 4.4** Variation de  $(v^*)_{z=0}$  pour  $b/a=1.5$  avec différentes valeurs de  $h/a$ .



**Figure 4.5** Variation de  $(v^*)_{z=0}$  pour  $h/a=1.5$  avec différentes valeurs de  $b/a$ .

La répartition de la contrainte de cisaillement adimensionnelle  $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$  au niveau du support est donnée à la figure 4.6 avec différentes valeurs de  $h/a$ . Il est à noter que les valeurs diminuent avec la diminution de l'épaisseur de la plaque. Même remarque pour les variations de la contrainte de cisaillement en fonction du rayon du support comme sont illustrées à la figure 4.7.



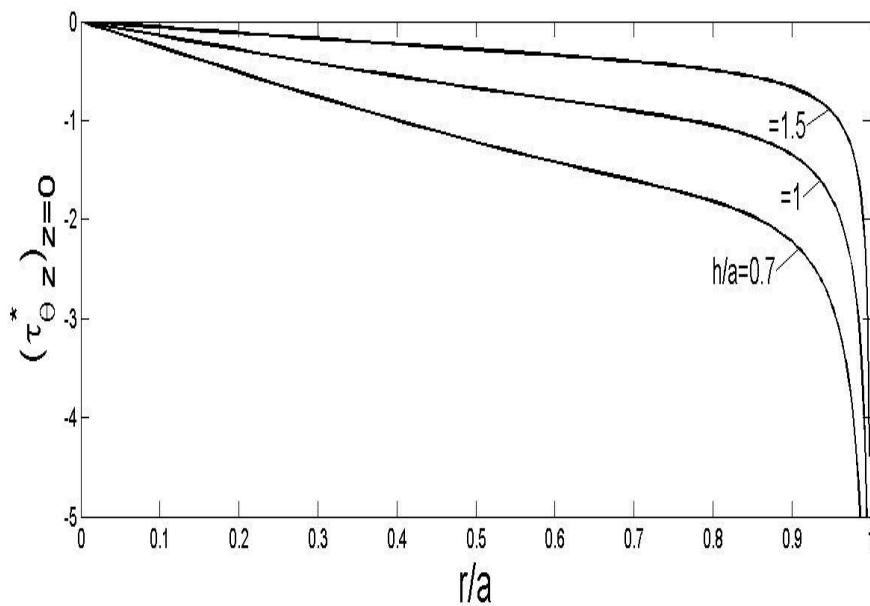


Figure 4.6 Variation de  $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$  pour  $b/a=1.5$  avec différentes valeurs de  $h/a$ .

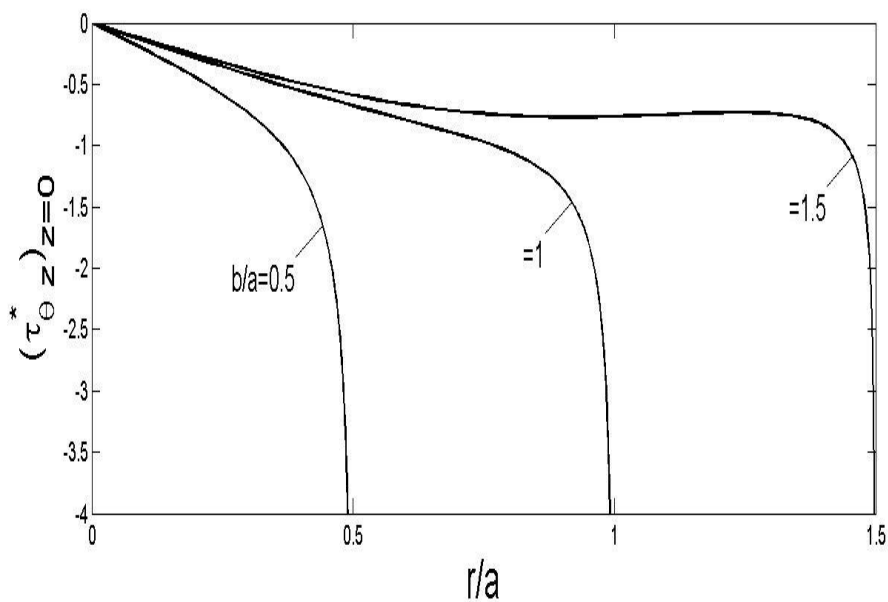


Figure 4.7 Variation de  $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$  pour  $h/a=1.5$  avec différentes valeurs de  $b/a$ .

Les variations du moment de torsion appliqué au disque en fonction de l'épaisseur de plaque et le support sont mentionnées sur les figures 4.8 et 4.9. La ligne représentant le cas particulier d'un demi-espace élastique [12] est également mentionnée sur ces figures. La courbe de la figure 4.11 montre un bon accord avec ceux obtenus en figure 4.10 par Florence [2] ( $a$  rayon du disque,  $h$  épaisseur de la couche élastique,  $\mu$  module de cisaillement,  $\alpha$  rotation du disque et  $T$  moment de torsion) où le moment de torsion diminue avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque élastique.

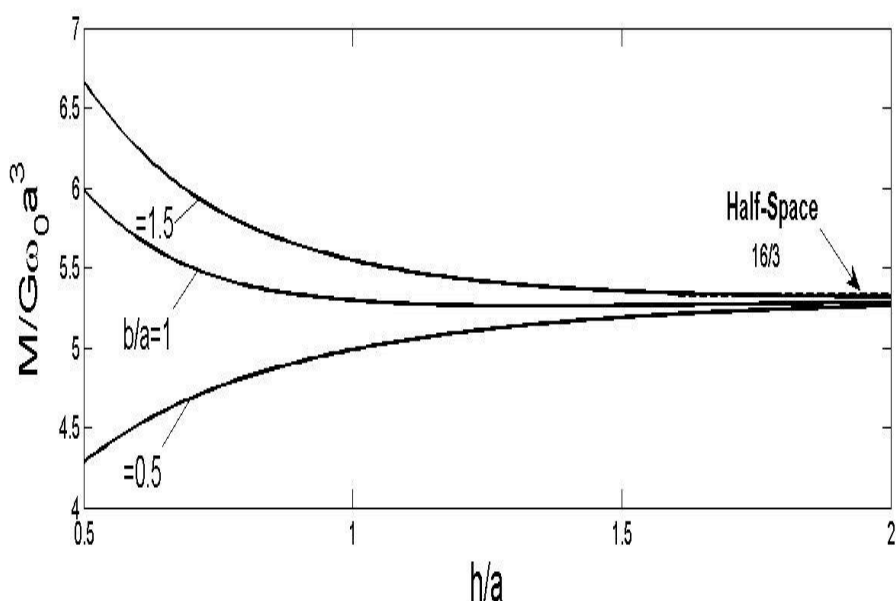


Figure 4.8 Variation de  $M / G \omega_0 a^3$  en fonction de  $h/a$  pour une variation de  $b/a$ .

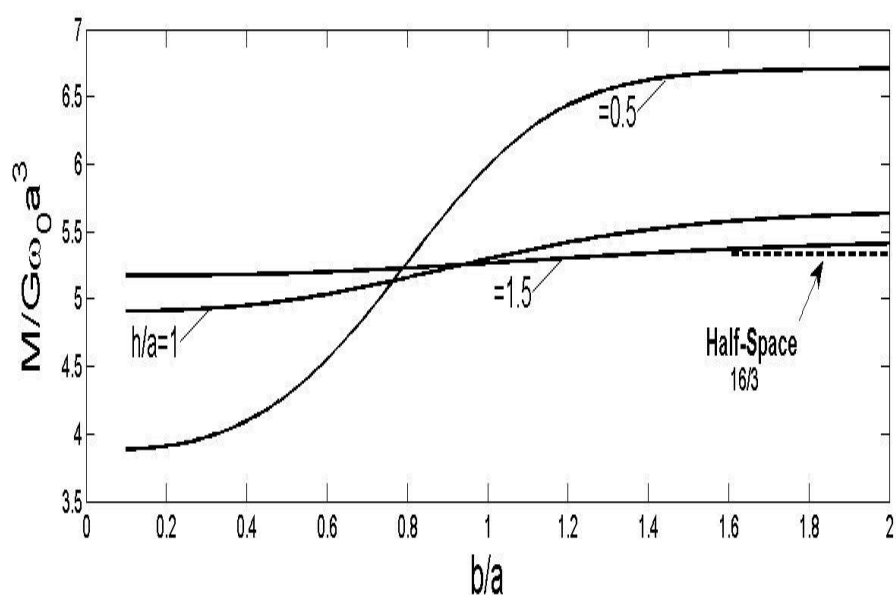


Figure 4.9 Variation de  $M / G \omega_0 a^3$  en fonction de  $b/a$  pour une variation de  $h/a$ .

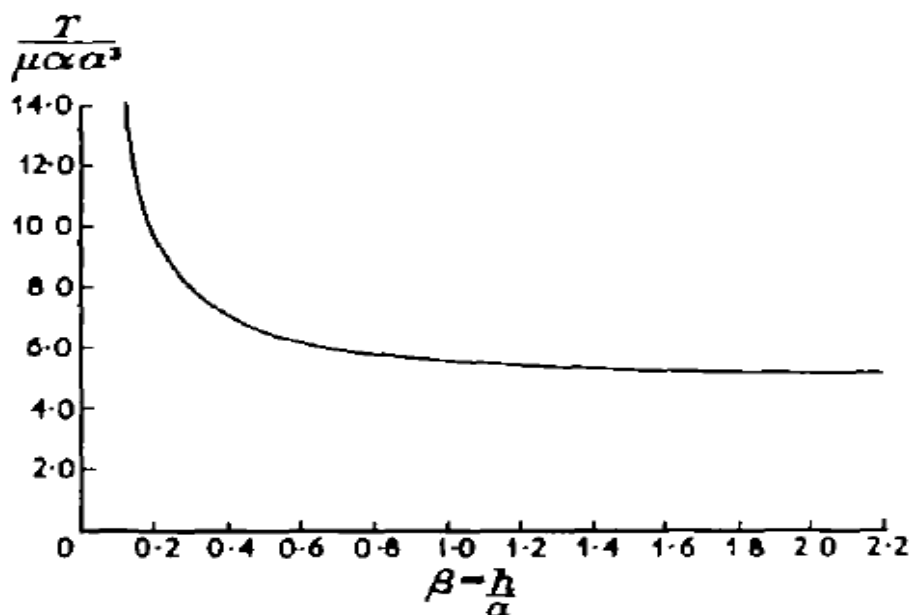


Figure 4.10 Variation du moment de torsion pour  $b/a \rightarrow \infty$  en fonction de  $\beta = h/a$ .

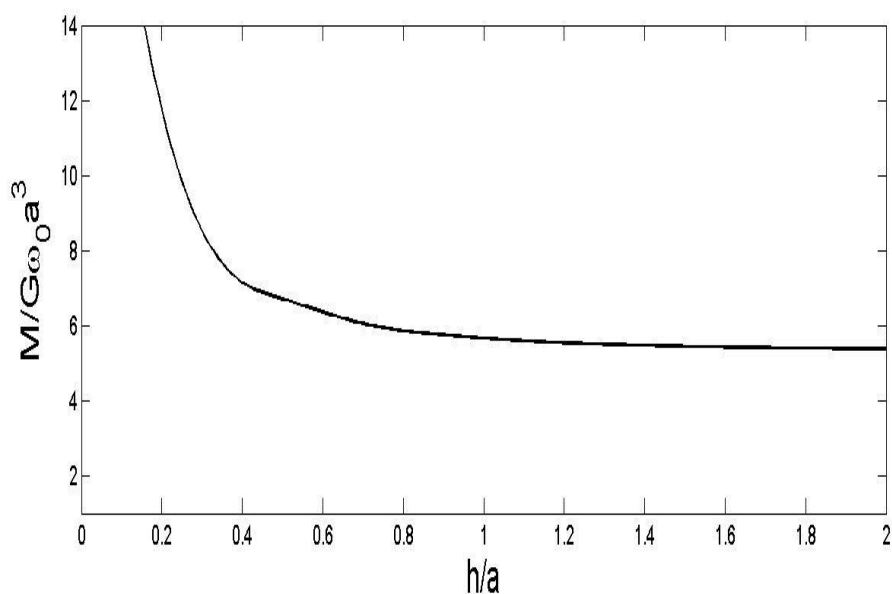


Figure 4.11 Variation de  $M / G \omega_0 a^3$  pour  $b/a \rightarrow \infty$  en fonction de  $h/a$ .

La variation des facteurs de singularité de contrainte correspondant au problème étudié est illustrée graphiquement aux figures 4.12 et 4.13. Il est clair que l'effet de l'épaisseur de la plaque et du rayon du support sur la distribution des facteurs de singularité de contrainte  $S_0$  et  $S_h$ .

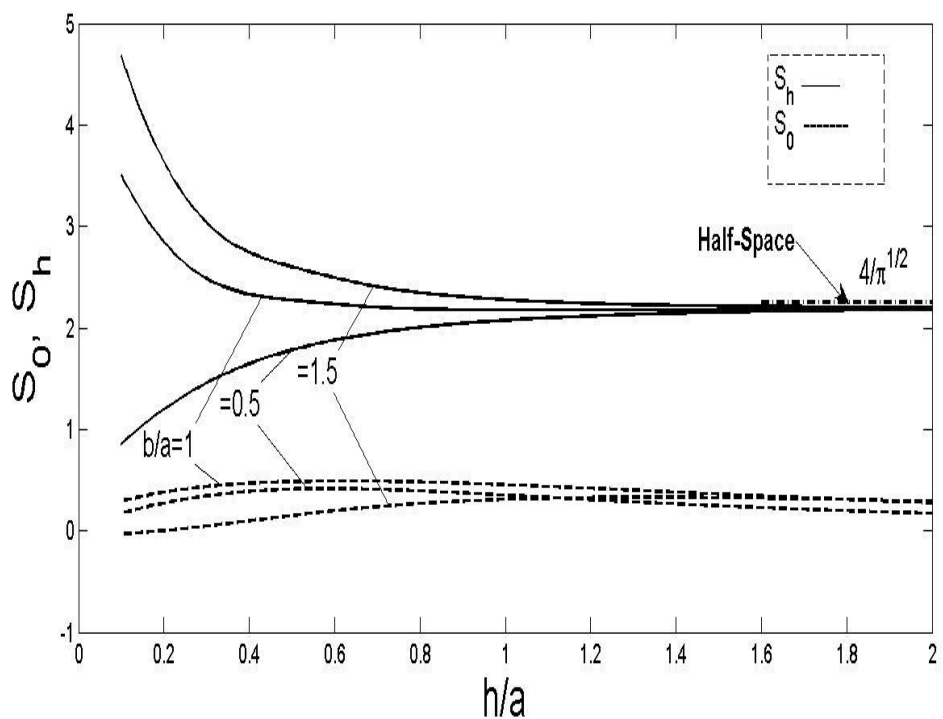


Figure 4.12 Variation de  $S_0, S_h$  pour différentes valeurs de  $h/a$ .

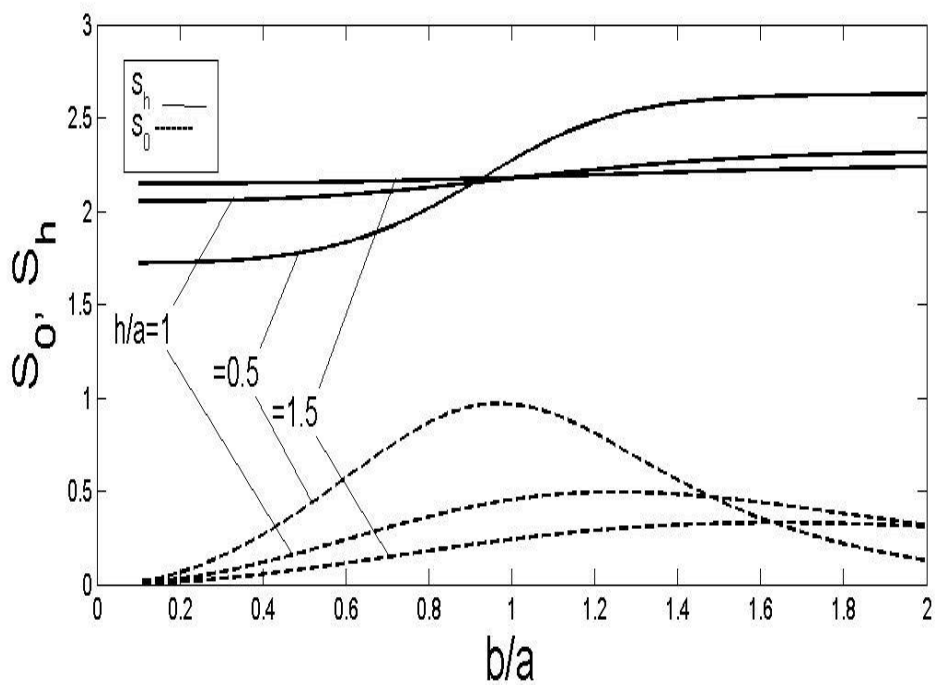


Figure 4.13 Variation de  $S_0, S_h$  pour différentes valeurs de  $b/a$ .

## Conclusion

Ce travail a permis d'apporter une contribution importante à l'étude d'un problème de déformation torsionnel axisymétrique d'une plaque épaisse. L'évolution élastique de la plaque a été décrite par des équations mécaniques (équilibre, lois de comportement) en vérifiant les conditions aux limites du problème. Les résultats les plus importantes sur ce problème se présentent comme suit :

- Un système algébrique infini a été résolu avec différentes valeurs de l'épaisseur de la plaque et de rayon du disque ainsi que celui du support par la méthode de la troncation.
- Les résultats numériques ont révélé les effets de ces grandeurs sur les contraintes, les déplacements, le moment de torsion ainsi que sur les facteurs de singularité de contrainte.
- La distribution des déplacements angulaires et de la contrainte de cisaillement adimensionnelle avec différentes valeurs du plan  $z/h$  est représentée graphiquement.
- La distribution de  $(v^*)_{z=0}$  diminue avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et le rayon du support.
- La distribution de contrainte de cisaillement adimensionnel  $(\tau_{\theta z}^*)_{z=0}$  est donnée avec différentes valeurs de  $h/a$ . Il est à noter que les valeurs décroissent avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque et le rayon du support.
- Les variations du moment de torsion adimensionnel  $M$  appliqué au disque et les facteurs de singularité de contrainte  $S_0, S_h$  avec l'épaisseur de la plaque et le support sont mentionnées graphiquement, où l'effet de l'épaisseur de la plaque et le rayon du support sur les valeur de  $M, S_0$  et  $S_h$  est montré.
- Les résultats graphiques illustrent l'influence du rayon du disque et celui du support et de l'épaisseur de la plaque sur les déplacements, les contraintes ainsi que sur les facteurs de singularité de contrainte.
- Des résultats numériques sont présentés sous forme de tableaux et figures pour valider les resultats obtenus de l'exemple étudié. Un bon accord est observé avec les résultats du même problème trouvé en littérature, en l'occurrence l'étude de *Florence* [2], *Pak* [12] et de *Bacci* [13].

## **Chapitre 5**

**Problème de Contact axisymétrique d'un Milieu Elastique  
reposant sur une Fondation Circulaire Rigide**

## Chapitre 5

### Problème de Contact axisymétrique d'un Milieu Elastique reposant sur une Fondation Circulaire Rigide

#### Introduction

La maîtrise du contact mécanique est très importante pour la bonne résolution de nombreux problèmes tels que le formage (forgeage, estampage, poinçonnage, ...), la simulation de l'usure (engrenages, pneu-route, ...) ainsi que pour tout système comprenant plusieurs pièces dans un contexte mécanique ou multi-physique. Ces problèmes sont importants pour de nombreux secteurs industriels, tels que les produits manufacturés, l'industrie automobile, l'aéronautique, l'industrie nucléaire et militaire. Tous ces domaines témoignent du besoin croissant d'outils puissants et robustes pour modéliser et simuler numériquement le phénomène du contact mécanique.

Dans le présent travail, un problème de contact axisymétrique d'une plaque élastique épaisse reposant partiellement sur une fondation circulaire rigide a été résolu. Une procédure analytique de la solution se base sur les cas de l'élastostatique traités par *Hara et al.* [25] et *Sakamoto* [26]-[28]. L'approche appliquée est basée sur la même méthode analytique utilisée dans le chapitre précédent. Dans l'application numérique, nous donnons quelques conclusions sur l'effet de rayon du poinçon et celui de la fondation ainsi l'épaisseur de la plaque sur la distribution des contraintes, des déplacements, la force axiale enfin les facteurs de singularité de contrainte.

## 5.1 Formulation du problème et sa résolution

### 5.1.1 Hypothèses

En plus des hypothèses posées précédemment, nous supposons que la force axiale exercée sur le poinçon est parallèle à l'axe de révolution de la plaque élastique. Le contact entre le poinçon et le milieu élastique est supposé être sans frottement. La transformation de Hankel a été également utilisée.

### 5.1.2 Description du problème

Dans ce deuxième cas, nous considérons l'étude du problème élastostatique, cf. figure 5.1. Le coefficient de Poisson et la profondeur de pénétration de la force axiale  $P$  du poinçon dans la plaque sont notés par  $\nu$  et  $\varepsilon_0$ , respectivement. Les conditions aux limites doublement mixtes du problème sont

- sur la fondation

$$\sigma_z(r, 0) = 0, \quad r > b \quad (5.1)$$

$$w(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq b \quad (5.2)$$

- sur la surface de contact

$$\sigma_z(r, h) = 0, \quad r > a \quad (5.3)$$

$$w(r, h) = -\varepsilon_0, \quad 0 \leq r \leq a \quad (5.4)$$

- et

$$\tau_{rz}(r, 0) = \tau_{rz}(r, h) = 0, \quad r \geq 0 \quad (5.5)$$



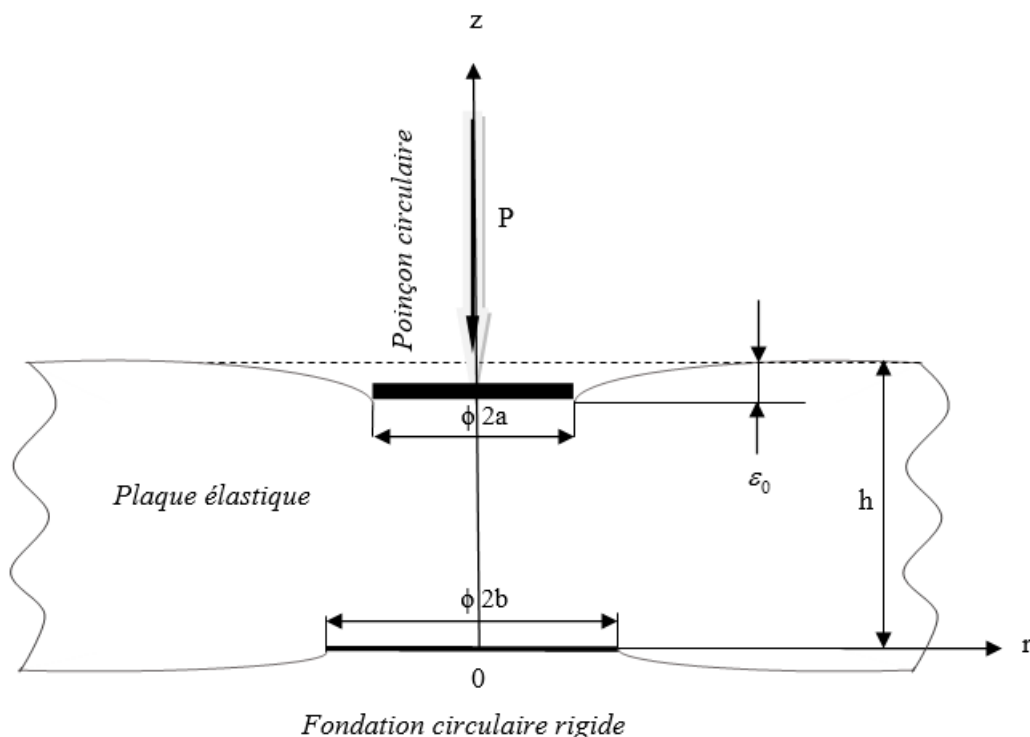


Figure 5.1 Géométrie du problème.

### 5.1.3 Solution aux limites du résolution

Nous signalons que dans le cas de milieu considéré, les composantes angulaires du vecteur de déplacement  $v$  sont nulles. En outre, les composantes  $u$  et  $w$  sont indépendantes de l'angle polaire  $\theta$ , ce qui ramène le système des équations d'équilibre axisymétrique non torsion comme suit

$$(1 + \chi) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + (-1 + \chi) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0 \quad (5.6)$$

$$(-1 + \chi) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right] + (1 + \chi) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} + \frac{\partial u}{r \partial z} \right] = 0 \quad (5.7)$$

La résolution de ce système d'équilibre s'obtient à l'aide de deux fonctions de contrainte harmonique de Boussinesq  $\varphi_0(r, z)$  et  $\varphi_3(r, z)$  qui satisfont les équations suivantes [25]-[28]

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_0(r, z) = \nabla^2 \varphi_3(r, z) = 0 \\ \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{cases} \quad (5.8)$$

Les déplacements et contraintes dans un milieu élastique non torsionnel sont exprimés par les fonctions de Boussinesq  $\varphi_0(r, z)$  et  $\varphi_3(r, z)$

$$2Gu(r, z) = \frac{\partial \varphi_0(r, z)}{\partial r} + z \frac{\partial \varphi_3(r, z)}{\partial r}, \quad v(r, z) = 0 \quad (5.9)$$

$$2Gw(r, z) = \frac{\partial \varphi_0(r, z)}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3(r, z)}{\partial z} - \chi \varphi_3(r, z) \quad (5.10)$$

où  $\chi = 3 - 4\nu$ . En portant ces déplacements dans les expressions des contraintes normales données par Hooke, on obtient

$$\sigma_r(r, z) = \frac{\partial^2 \varphi_0(r, z)}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_3(r, z)}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \varphi_3(r, z)}{\partial z} \quad (5.11)$$

$$\sigma_\theta(r, z) = \frac{\partial \varphi_0(r, z)}{r \partial r} + z \frac{\partial \varphi_3(r, z)}{r \partial r} - 2\nu \frac{\partial \varphi_3(r, z)}{\partial z} \quad (5.12)$$

$$\sigma_z(r, z) = \frac{\partial^2 \varphi_0(r, z)}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_3(r, z)}{\partial z^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \varphi_3(r, z)}{\partial z} \quad (5.13)$$

Les contraintes de cisaillement s'écrivent

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial \varphi_0(r, z)}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3(r, z)}{\partial z} - (1 - 2\nu) \varphi_3(r, z) \right], \quad \tau_{r\theta}(r, z) = \tau_{\theta z}(r, z) = 0 \quad (5.14)$$

On peut mettre les fonctions  $\varphi_0(r, z)$  et  $\varphi_3(r, z)$  sous les formes suivantes, en effet

$$\varphi_0(r, z) = \int_0^\infty [A(\lambda) \sinh \lambda z + B(\lambda) \cosh \lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (5.15)$$

$$\varphi_3(r, z) = \int_0^\infty [C(\lambda) \sinh \lambda z + D(\lambda) \cosh \lambda z] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (5.16)$$

$A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$  et  $D(\lambda)$  sont des fonctions inconnues de  $\lambda$ . En utilisant les équations (5.9)-(5.16) et la condition au limite (5.5), nous pouvons écrire l'expression

$$\lambda A(\lambda) = (1 - 2\nu) D(\lambda) \quad (5.17)$$

Ainsi, la fonction  $B(\lambda)$  est donnée par

$$B(\lambda) = (1 - 2\nu - \lambda h \coth \lambda h)C(\lambda) - \lambda h D(\lambda) \quad (5.18)$$

En substituant  $A$  et  $B$  dans les fonctions de Boussinesq  $\varphi_0(r, z)$  et  $\varphi_3(r, z)$ . Ces dernières, en les remplaçant dans les expressions des relations précédentes (5.10)-(5.14), on aura

Les composantes du déplacement

$$\begin{aligned} 2Gw_z(r, z) = & - \int_0^{\infty} \left\{ \left[ (2(1-\nu) + \lambda h \coth \lambda h) \sinh \lambda z - \lambda z \cosh \lambda z \right] C(\lambda) \right. \\ & \left. + \left[ (2(1-\nu) \cosh \lambda z - (\lambda z - \lambda h) \sinh \lambda z) D(\lambda) \right] J_0(\lambda r) \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (5.19)$$

Puis, en effectuant la somme des contraintes normales principales (5.11) et (5.12), on aura

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) + \sigma_\theta(r, z) = & - \int_0^{\infty} \left\{ \left[ (1 + 2\nu - \lambda h \coth \lambda h) \cosh \lambda z + \lambda z \sinh \lambda z \right] C(\lambda) \right. \\ & \left. + \left[ ((1 + 2\nu) \sinh \lambda z + (\lambda z - \lambda h) \cosh \lambda z) D(\lambda) \right] \lambda J_0(\lambda r) \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (5.20)$$

La soustraction des contraintes normales principales, permet l'obtention l'expression

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) - \sigma_\theta(r, z) = & - \int_0^{\infty} \left\{ \left[ (1 - 2\nu - \lambda h \coth \lambda h) \cosh \lambda z + \lambda z \sinh \lambda z \right] C(\lambda) \right. \\ & \left. + \left[ ((1 - 2\nu) \sinh \lambda z + (\lambda z - \lambda h) \cosh \lambda z) D(\lambda) \right] \lambda J_2(\lambda r) \right\} d\lambda \end{aligned} \quad (5.21)$$

D'où, la contrainte axiale devient

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) = & - \int_0^{\infty} \left\{ \left[ (1 + \lambda h \coth \lambda h) \cosh \lambda z - \lambda z \sinh \lambda z \right] C(\lambda) \right. \\ & \left. + \left[ \sinh \lambda z + (\lambda z - \lambda h) \cosh \lambda z \right] D(\lambda) \right\} \lambda J_0(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \quad (5.22)$$

Enfin, l'expression de contrainte tangentielle (5.14) se met comme suit

$$\tau_{rz}(r, z) = - \int_0^{\infty} \left\{ \left[ \lambda z \cosh \lambda z - \lambda z \coth \lambda h \sinh \lambda z \right] C(\lambda) + (\lambda z - \lambda h) \sinh \lambda z D(\lambda) \right\} \lambda J_1(\lambda r) d\lambda \quad (5.23)$$

L'utilisation des équations (5.19)-(5.23) et les conditions aux limites (5.1) et (5.4), nous permettent de déduire les équations intégrales duales

$$\sigma_z(r, 0) = - \int_0^{\infty} \left[ 1 + \lambda h \coth \lambda h C(\lambda) + \lambda h D(\lambda) \right] \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > b \quad (5.24)$$

$$w(r, 0) = - \frac{1-\nu}{G} \int_0^{\infty} D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r \leq b \quad (5.25)$$

$$\sigma_z(r, h) = - \int_0^{\infty} \left[ \left( \cosh \lambda h + \frac{\lambda h}{\sinh \lambda h} \right) C(\lambda) + \sinh \lambda h D(\lambda) \right] \lambda J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a \quad (5.26)$$

$$w(r, h) = - \frac{1-\nu}{G} \int_0^{\infty} \left[ \sinh \lambda h C(\lambda) + \cosh \lambda h D(\lambda) \right] J_0(\lambda r) d\lambda = -\varepsilon_0, \quad r \leq a \quad (5.27)$$

Une contribution importante est apportée à la résolution des problèmes d'équation intégrale similaires [65]. Pour la présente étude, nous suivons la méthode développée par *Sakamoto* [26]-[28]. Pour satisfaire les deux dernières équations homogènes de (5.24) et (5.26), nous pouvons définir

$$\eta \left[ \left( \cosh \lambda h + \frac{\lambda h}{\sinh \lambda h} \right) C(\lambda) + \sinh \lambda h D(\lambda) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_n(\lambda a) \quad (5.28)$$

$$\eta \left[ (1 + \lambda h \coth \lambda h) C(\lambda) + \lambda h D(\lambda) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n M_n(\lambda b) \quad (5.29)$$

avec

$$\eta = \frac{1-\nu}{G \varepsilon_0} \quad (5.30)$$

La résolution de deux équations (5.28) et (5.29), donne la détermination de  $C(\lambda)$  et  $D(\lambda)$

$$\eta C(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda h) \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 2\lambda h e^{\lambda h} (e^{2\lambda h} - 1) \alpha_n M_n(\lambda a) - (e^{2\lambda h} - 1)^2 \beta_n M_n(\lambda b) \right] \quad (5.31)$$

$$\eta D(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda h) \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -2e^{\lambda h} ((\lambda h + 1)e^{2\lambda h} + \lambda h - 1) \alpha_n M_n(\lambda a) + (e^{4\lambda h} + 4\lambda h e^{2\lambda h} - 1) \beta_n M_n(\lambda b) \right] \quad (5.32)$$

où

$$\Delta(\lambda h) = -e^{2\lambda h} \left[ e^{2\lambda h} - 2(2(\lambda h)^2 + 1) \right] - 1 \quad (5.33)$$

Maintenant, si nous substituons les expressions de  $C(\lambda)$  et  $D(\lambda)$ , données dans (5.31) et (5.32) dans les deux premières équations de (5.25) et (5.27), nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \alpha_n M_n(\lambda a) f_1(\lambda) + \beta_n M_n(\lambda b) f_2(\lambda) \right] J_0(\lambda r) d\lambda = -1 \quad (5.34)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \alpha_n M_n(\lambda a) f_2(\lambda) + \beta_n M_n(\lambda b) f_1(\lambda) \right] J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (5.35)$$

telles que les fonctions  $f_1(\lambda)$  et  $f_2(\lambda)$  sont données par

$$f_1(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda h) (e^{4\lambda h} + 4\lambda h e^{2\lambda h} - 1) \quad (5.36)$$

$$f_2(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda h) \left[ -2e^{\lambda h} + ((\lambda h + 1)e^{2\lambda h} + (\lambda h - 1)) \right]$$

En utilisant la formule de Gegenbauer ([66], Eq 8. 531. 1)

$$J_0(\lambda r) = \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) X_m(\lambda x) \cos m\phi_x, \quad (r = x \sin(\phi_x/2), \quad x = a; b) \quad (5.37)$$

nous obtenons le système infini d'équations algébriques pour déterminer de  $\alpha_n$  et  $\beta_n$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \alpha_n M_n(\lambda a) f_1(\lambda) + \beta_n M_n(\lambda b) f_2(\lambda) \right] X_m(\lambda a) d\lambda = -\delta_{0m} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \alpha_n M_n(\lambda a) f_2(\lambda) + \beta_n M_n(\lambda b) f_1(\lambda) \right] X_m(\lambda b) d\lambda = 0 \end{cases} \quad (5.38)$$

Nous pouvons écrire le système d'équation (5.38) sous la forme

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n A_{nm} + \beta_n B_{nm}] = -\delta_{0m} \\ \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n C_{nm} + \beta_n D_{nm}] = 0 \end{cases} \quad (5.39)$$

soient

$$A_{nm} = \int_0^{\infty} f_1(\lambda) M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda \quad (5.40)$$

$$B_{nm} = \int_0^{\infty} f_2(\lambda) M_n(\lambda b) X_m(\lambda a) d\lambda$$

$$C_{nm} = \int_0^{\infty} f_2(\lambda) M_n(\lambda a) X_m(\lambda b) d\lambda$$

$$D_{nm} = \int_0^{\infty} f_1(\lambda) M_n(\lambda b) X_m(\lambda b) d\lambda$$

## 5.2 Calcul analytique des déplacements et des contraintes

Les formes générales des expressions des déplacements s'exercent sur les surfaces de la plaque peuvent être exprimées comme suit

Sur la surface inférieure

$$w_z^*(r, 0) = \frac{w(r, 0)}{\varepsilon_0} = -H(r-b) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\alpha_n M_n(\lambda a) f_2(\lambda) + \beta_n M_n(\lambda b) f_1(\lambda)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (5.41)$$

Sur le plan  $z = h$

$$w_z^*(r, h) = \frac{w(r, h)}{\varepsilon_0} = -H(a-r) + H(r-a) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\alpha_n M_n(\lambda a) f_1(\lambda) + \beta_n M_n(\lambda b) f_2(\lambda)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (5.42)$$

Utilisation de la formule intégrale pour les fonctions de Bessel : ([66], Eq 6. 522. 11). La contrainte normale sur la surface  $z = 0$  peut être exprimée en séries de fonctions appropriées comme suit

$$\sigma_z^*(r, 0) = \eta \sigma_z(r, 0) = -\frac{2}{\pi} H(b-r) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{T_{2n+1}(r/b)}{r\sqrt{b^2-r^2}} \quad (5.43)$$

alors que sur  $z = h$ , on obtient

$$\sigma_z^*(r, h) = \eta \sigma_z(r, h) = -\frac{2}{\pi} H(a-r) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{T_{2n+1}(r/a)}{r\sqrt{a^2-r^2}} \quad (5.44)$$

La force axiale  $P$  qui produit la pénétration  $\varepsilon_0$  est donnée par la condition d'équilibre statique [22], [23] et [25]

$$P = -2\pi \int_0^a \sigma_z(r, h) r dr \quad (5.45)$$

où  $(\sigma_z)_{z=h}$  est donnée par la formule (5.44) en utilisant cette dernière (le calcul d'intégrale est montré clairement dans l'Annexe 2.1), l'expression de  $P$  devient

$$P = \frac{4}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \alpha_n \quad (5.46)$$

Les facteurs de singularité de contrainte correspondant au problème étudié peuvent être calculés selon les formules suivantes [25]

Le facteur de singularité de contrainte  $S_0$  est donné par

$$S_0 = \lim_{r \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi(b-r)} \eta \sigma_z(r, 0) \quad (5.47)$$

sur la face supérieure  $z = h$

$$S_h = \lim_{r \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi(a-r)} \eta \sigma_z(r, h) \quad (5.48)$$

D'où, substitution des équations (5.43) et (5.44) dans l'équation (5.47) et (5.48) (voir Annexe 2.2). Nous obtenons l'expression simple des facteurs de singularité de contrainte donnée en termes des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  comme suit

$$S_0 = \frac{2}{b\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \quad (5.49)$$

$$S_h = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \quad (5.50)$$

### 5.3 Validation et interprétation

#### *Cas du demi-espace*

Pour un cas de particularité du problème où l'épaisseur de la plaque est infiniment grande, les intégrales infinies du système (5.38), devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda = \delta_{0m}, \quad (m=0,1,\dots) \quad (5.51)$$

A partir de l'équation (5.51) nous pouvons obtenir  $\alpha_0 = a$ ,  $\alpha_n = 0$ , ( $n \geq 1$ ). De plus, les expressions analytiques de contrainte, de déplacement et de la force axiale sont données par

$$\frac{(w_z)_{z=h}}{\varepsilon_0} = -H(a-r) - \left(\frac{2}{\pi}\right) H(r-a) \sin^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) \quad (5.52)$$

$$\eta(\sigma_z)_{z=h} = -\left(\frac{2}{\pi}\right) \frac{H(a-r)}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$\eta \frac{P}{(4a)} = 1$$

Les équations données par (5.52) sont celles données par le problème d'un demi-espace élastique par un poinçon rigide circulaire [19]. Le résultat numériquement obtenue est reporté sur le tableau 5.3.



### ***Résultats numériques***

Pour déterminer les coefficients inconnus et discutés dans la partie précédente, nous devons évaluer les intégrales infinies des équations du système (5.38). En séparant les termes obtenus par intégration numérique et ceux par une application des développements asymptotiques des fonctions de Bessel. Il est clair que pour de grandes valeurs de  $\lambda$ , cela nous permet d'écrire

$$\int_0^{\infty} f_1(\lambda) M_n(\lambda x) X_m(\lambda x) d\lambda = \int_0^{\lambda_0} f_1(\lambda) M_n(\lambda x) X_m(\lambda x) d\lambda - \int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda x) X_m(\lambda x) d\lambda \quad (5.53)$$

$$\int_0^{\infty} f_2(\lambda) M_n(\lambda x) X_m(\lambda x) d\lambda = \int_0^{\lambda_0} f_2(\lambda) M_n(\lambda x) X_m(\lambda x) d\lambda \quad (5.54)$$

Les premières intégrales du côté droit des expressions ci-dessus sont évaluées numériquement par la règle de Simpson, tandis que la seconde est remplacée par l'intégrale de la fonction équivalente [25], [26]-[28]. Les coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont indiqués dans les tableaux 5.1 et 5.2 suivant l'épaisseur de la plaque élastique et de rayon du poinçon et celui de la fondation.

*Tableau 5.1 Valeurs des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  ( $h/a=1.5$ ).*

n	b/a=0.5	b/a=1	b/a=1.5
$\alpha_n$			
0	0.559686534802502	1.281311717811767	1.644374747440548
1	-0.185395060778207	-0.203638231658882	-0.102050296340474
2	0.029552956378661	0.014286773708200	0.003647691155375
3	-0.003018696960819	0.000239948419853	0.000094166506271
4	0.000208910491890	-0.000105729434747	-0.000001512460679
5	-0.000006932641063	0.000004387723409	-0.000002837293623
6	-0.000002042929074	-0.000003152691474	-0.000004723300180
7	-0.000002352058641	-0.000006872410117	-0.000009595974541
8	-0.000004683009179	-0.000012603386507	-0.000017762314415
9	-0.000003098017624	-0.000008388267814	-0.000011826332774
$\beta_n$			
0	0.619456189051369	1.277824098584786	1.381502620649796
1	-0.011314548473684	-0.207500728123057	-0.813951036152699
2	0.000182590062900	0.014236787062389	0.138492107445660
3	0.000000754790856	0.000252829347999	-0.004749530147052
4	-0.000002379929250	-0.000106730796414	-0.002723247263488
5	-0.000006330790601	0.000004417291304	0.000618631151190
6	-0.000014372442618	-0.000003127411009	-0.000046861951699
7	-0.000029369934242	-0.000006828792265	-0.000007854765221
8	-0.000054618999189	-0.000012521155141	-0.000000079816219
9	-0.000036425537745	-0.000008333309575	-0.000001852011178

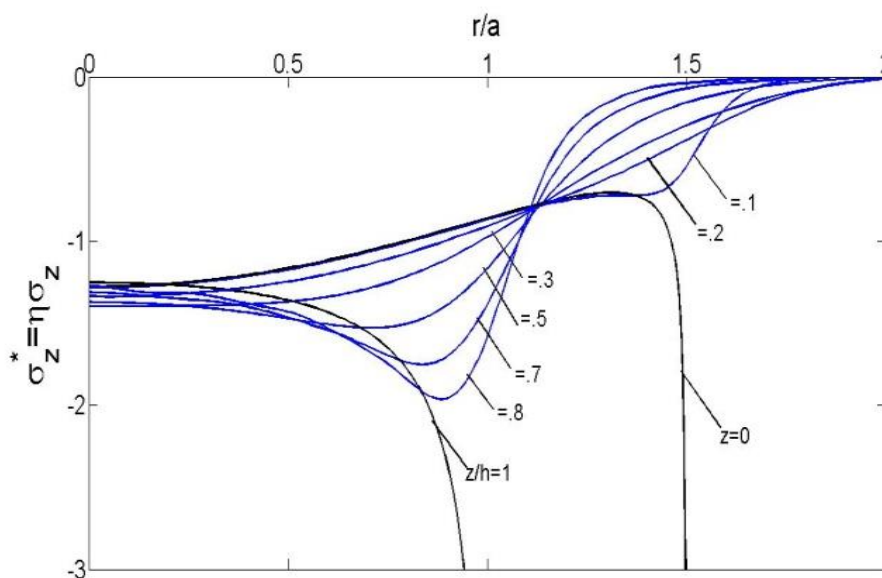
*Tableau 5.2 Valeurs des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  ( $b/a=1.5$ ).*

n	h/a=0.7	h/a=1	h/a=1.5
$\alpha_n$			
0	2.659907562693490	2.102315861316422	1.644374747440548
1	-0.465369868613824	-0.216242333748549	-0.102050296340474
2	0.038559658922877	0.016086130678807	0.003647691155375
3	0.002026576675632	-0.000132119321970	0.000094166506271
4	-0.000315036921171	-0.000019167988751	-0.000001512460679
5	0.000002557413666	-0.000001442108547	-0.000002837293623
6	-0.000006181312092	-0.000006000199801	-0.000004723300180
7	-0.000014169878542	-0.000011832796019	-0.000009595974541
8	-0.000025796885320	-0.000021886145107	-0.000017762314415
9	-0.000017166183937	-0.000014570262368	-0.000011826332774
$\beta_n$			
0	1.854716535735087	1.575388298969770	1.381502620649796
1	-2.681194107187618	-1.647132725784705	-0.813951036152699
2	0.557344928416927	0.315793975338493	0.138492107445660
3	0.182944146592442	0.035197211736266	-0.004749530147052
4	-0.107398009461012	-0.028323713330607	-0.002723247263488
5	-0.002997896836750	0.003707279724757	0.000618631151190
6	0.0024612211552625	0.001043983655695	-0.000046861951699
7	-0.002089912667773	-0.000466865123625	-0.000007854765221
8	-0.001178413993801	0.000035591438942	-0.000000079816219
9	0.000559177760934	0.000026707047819	-0.000001852011178

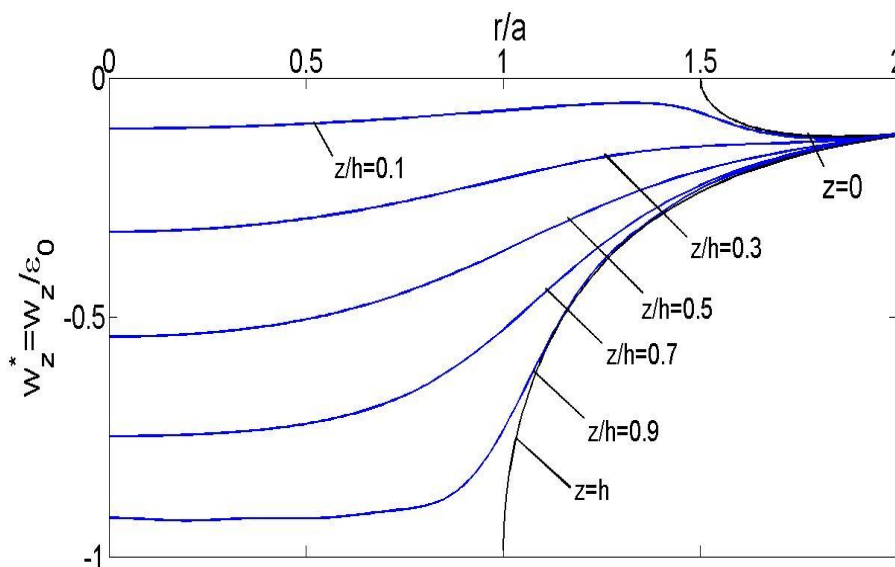
**Tableau 5.3** Valeurs des coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  ( $h/a \rightarrow \infty$ ).

n	$\alpha_n$
0	0.446784632432545
1	0.001286709150845
2	0.000000168546852
3	-0.000000083814045
4	-0.000000224286205
5	-0.000000607525219
6	-0.000001364667937
7	-0.000002770263208
8	-0.000005130957151
9	-0.000003417607607
$\beta_n$	
0	0.064914824047724
1	-0.000000875455139
2	0.000003080888970
3	-0.000004372962748
4	-0.000025226074469
5	-0.000078838809570
6	-0.000184332233138
7	-0.000376398165697
8	-0.000689661252253
9	-0.000456466033877

La distribution des contraintes et des déplacements adimensionnels avec différentes valeurs du plan  $z/h$  est illustrée graphiquement sur les figures 5.2 et 5.3.

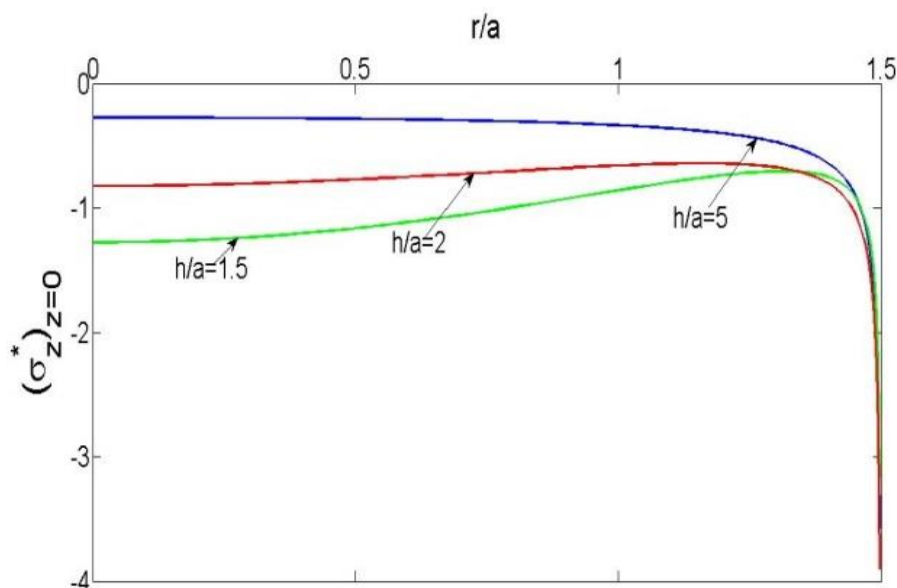


**Figure 5.2** Distribution de  $\sigma_z^*$  pour  $h/a=1.5$  et  $b/a=1.5$  en variation de  $z/h$ .

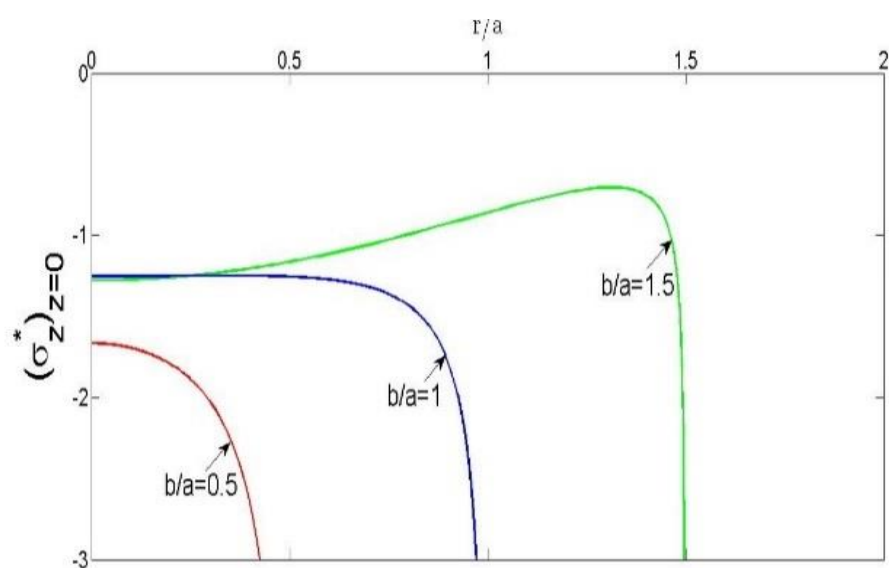


**Figure 5.3** Distribution de  $w_z^*$  pour  $h/a=1.5$  et  $b/a=1.5$  en variation de  $z/h$ .

Les figures 5.4 et 5.5 montrent la variation de la distribution de la contrainte normale adimensionnelle pour  $h/a$  et  $b/a$ , respectivement. Les valeurs maximales de la contrainte ont eu lieu au centre de la fondation. La contrainte a une valeur infinie si  $r/a = b/a$ . Elle diminue avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et du rayon de la fondation.



**Figure 5.4** Variation de  $(\sigma_z^*)_{z=0}$  pour  $b/a=1.5$  avec différentes valeurs de  $h/a$ .



**Figure 5.5** Variation de  $(\sigma_z^*)_{z=0}$  pour  $h/a=1.5$  avec différentes valeurs de  $b/a$ .

La distribution du déplacement axial adimensionnel au bord de la fondation est donnée à la figure 5.6 avec différentes valeurs de  $h/a$ . Il est à noter que les valeurs diminuent avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque et du rayon de la fondation. Graphiquement, ils sont illustrés à la figure 5.7.

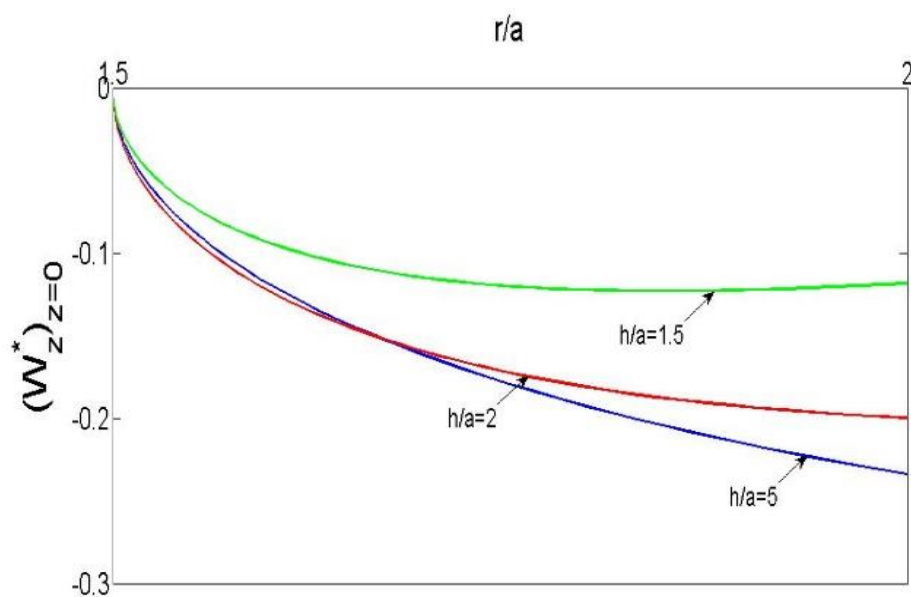


Figure 5.6 Variation de  $(w_z^*)_{z=0}$  pour  $b/a=1.5$  avec différentes valeurs de  $h/a$ .

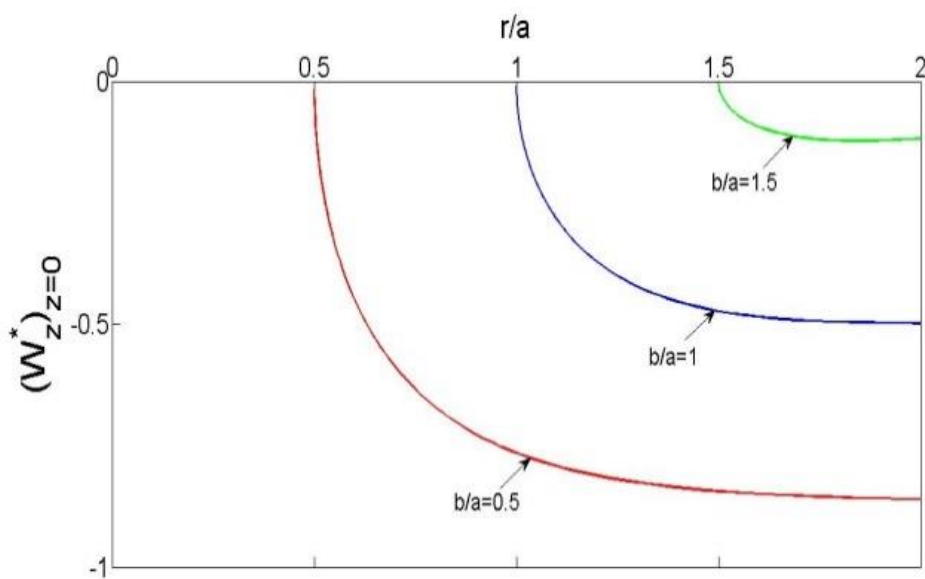


Figure 5.7 Variation de  $(w_z^*)_{z=0}$  pour  $h/a=1.5$  avec différentes valeurs de  $b/a$ .

Les contraintes normales adimensionnelles sur la surface supérieure sont montrées sur les figures 5.8 et 5.9 pour différentes valeurs de  $h/a$  et  $b/a$ , respectivement. La distribution atteint ses valeurs maximales au centre du poinçon. Elle diminue avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et l'augmentation du rayon de la fondation.

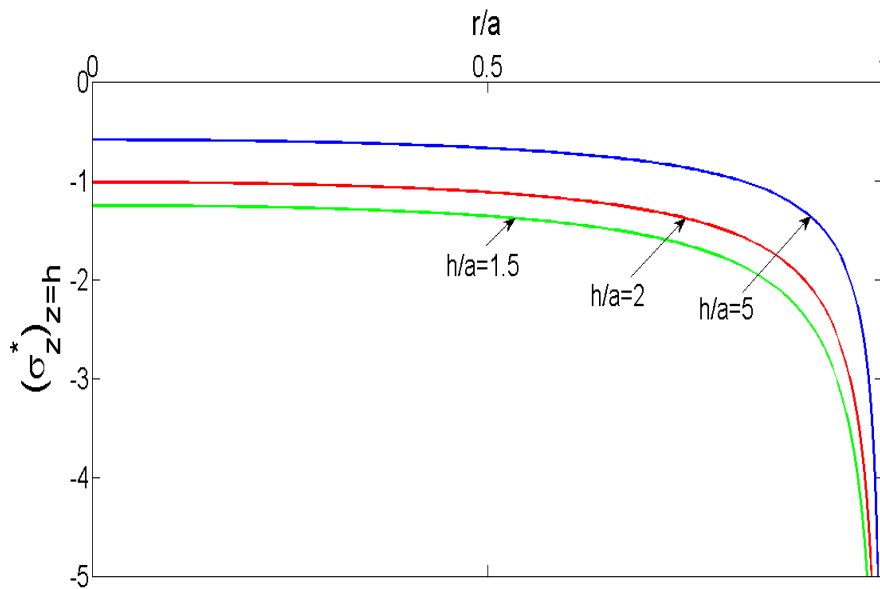


Figure 5.8 Variation de  $(\sigma_z^*)_{z=h}$  pour  $b/a=1.5$  en fonction de  $h/a$ .

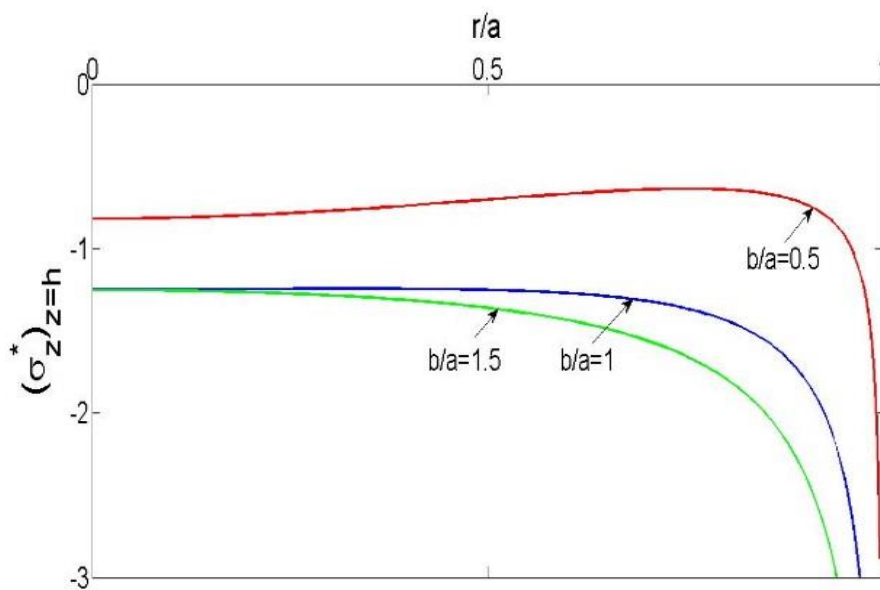


Figure 5.9 Variation de  $(\sigma_z^*)_{z=h}$  pour  $h/a=1.5$  en fonction de  $b/a$ .

La distribution du déplacement adimensionnel pour la surface supérieure est observée aux figures 5.10 et 5.11 avec  $h/a$ ,  $b/a$ . Il augmente avec l'épaisseur de la plaque et diminue avec la diminution du rayon de la fondation.



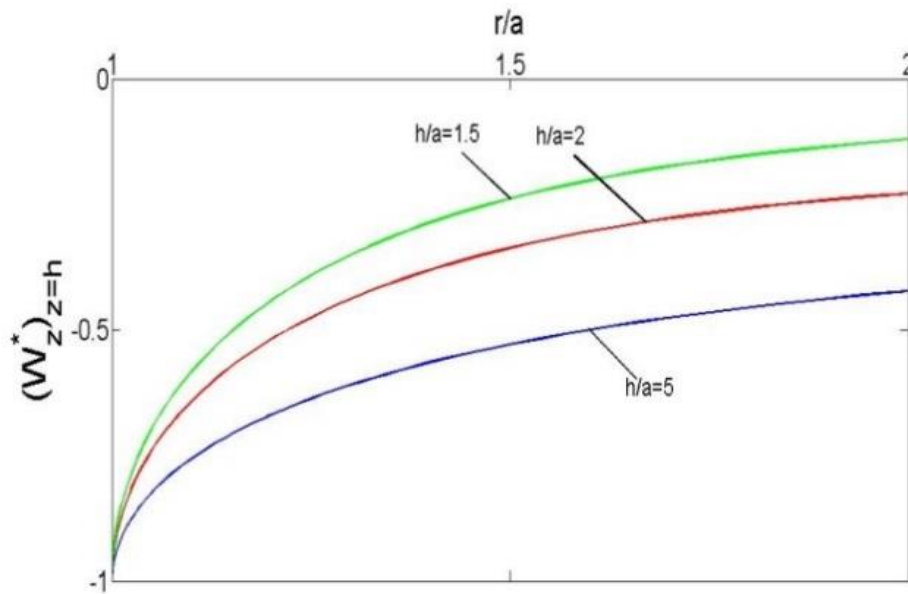


Figure 5.10 Variation de  $(w_z^*)_{z=h}$  pour  $b/a=1$  en fonction de  $h/a$ .

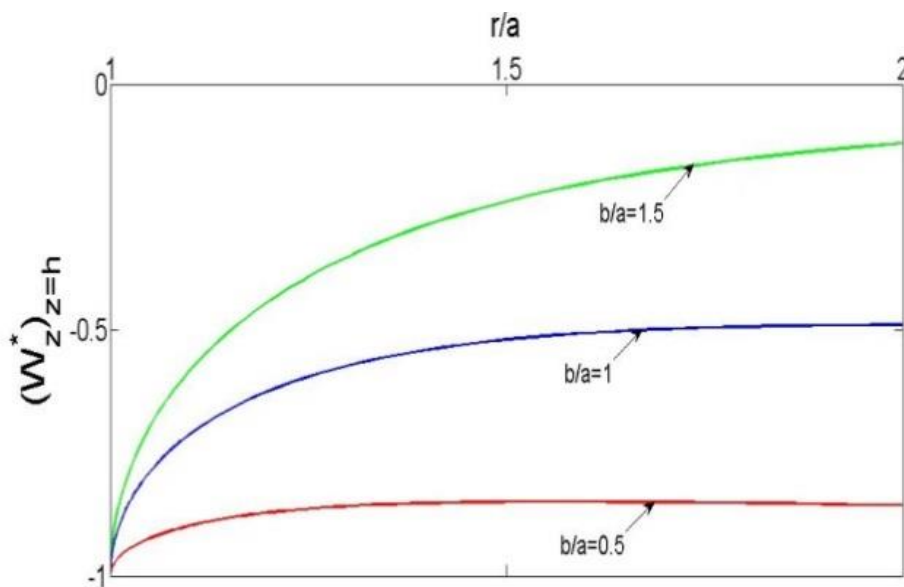
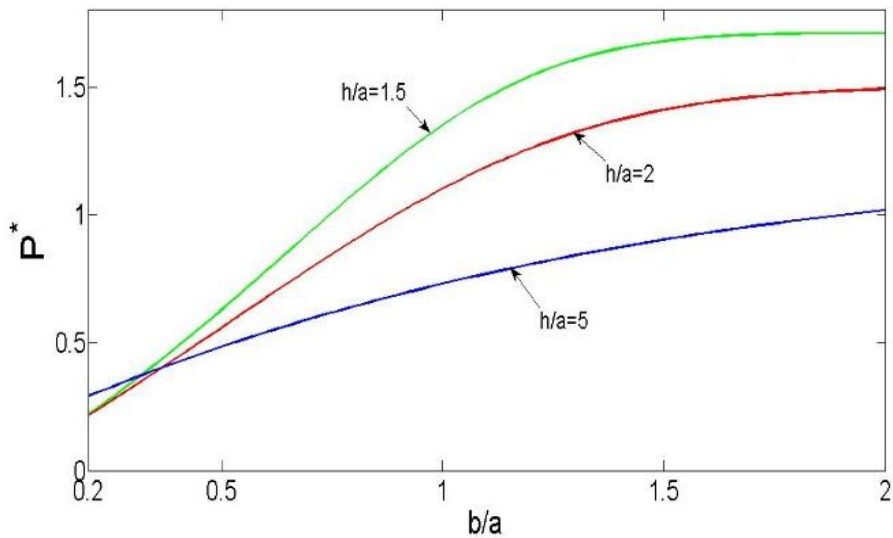
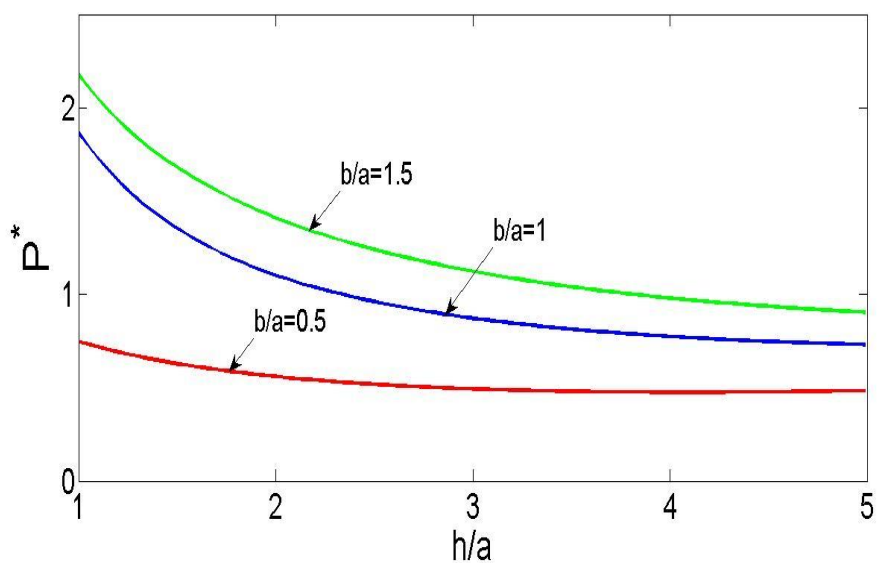


Figure 5.11 Variation de  $(w_z^*)_{z=h}$  pour  $h/a=1.5$  en fonction de  $b/a$ .

Les variations de la force axiale  $P^* = \frac{\eta P}{4}$  appliquée au poinçon en fonction de l'épaisseur de la plaque et le rayon de la fondation sont mentionnées dans les figures 5.12 et 5.13. La grandeur de la force  $P^*$  augmente avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et l'augmentation du rayon de la fondation.



**Figure 5.12** Variation de  $P^*$  pour différentes valeurs de  $b/a$ .



**Figure 5.13** Variation de  $P^*$  pour différentes valeurs de  $h/a$ .

La variation des facteurs de singularité de contrainte est illustrée graphiquement aux figures 5.14-5.17. Les facteurs  $S_0$  et  $S_h$  donnent une grande valeur lorsque l'épaisseur de la plaque diminue. On remarque que la valeur  $S_0$  augmente avec le rayon de la fondation, on obtient le comportement opposé pour le cas  $S_h$ .

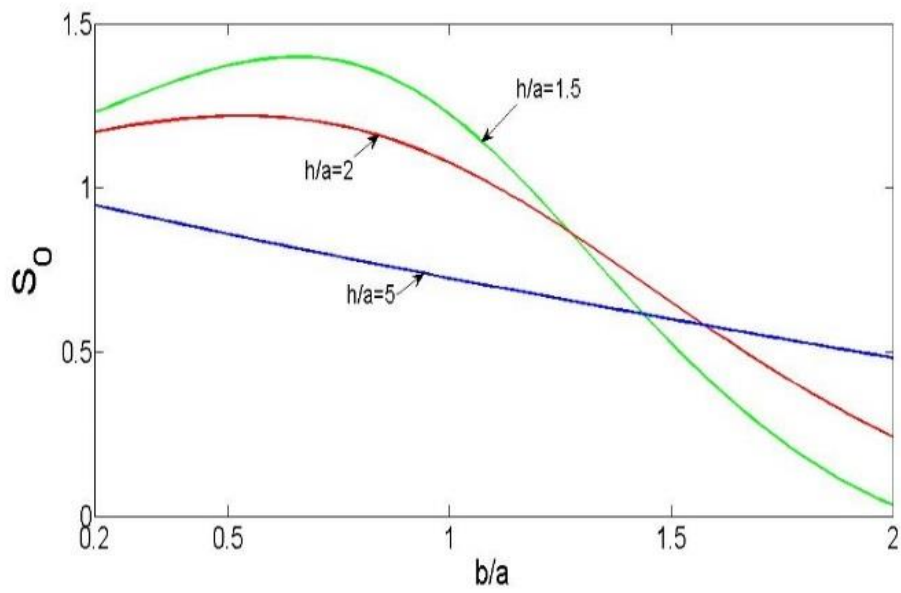


Figure 5.14 Variation de  $S_0$  pour une variation de  $b/a$ .

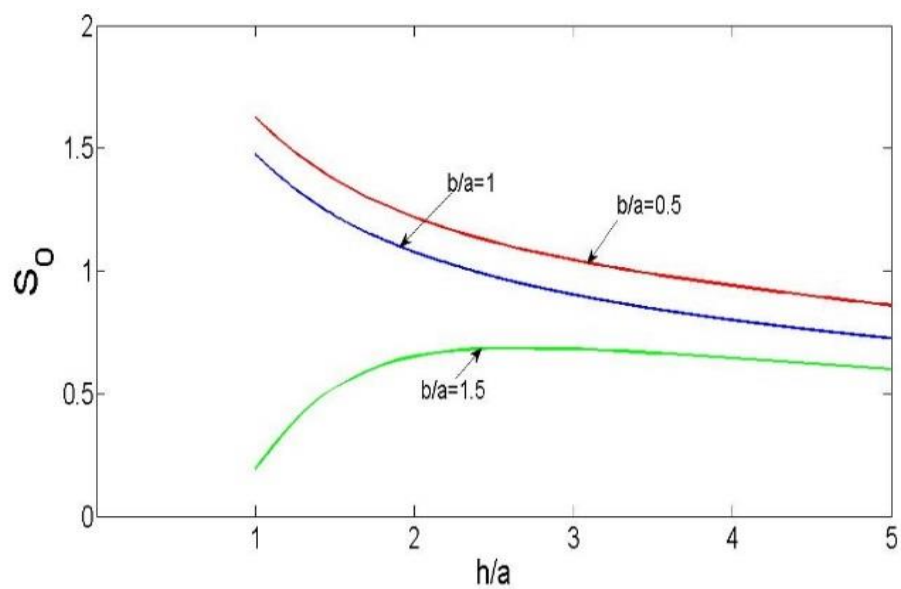
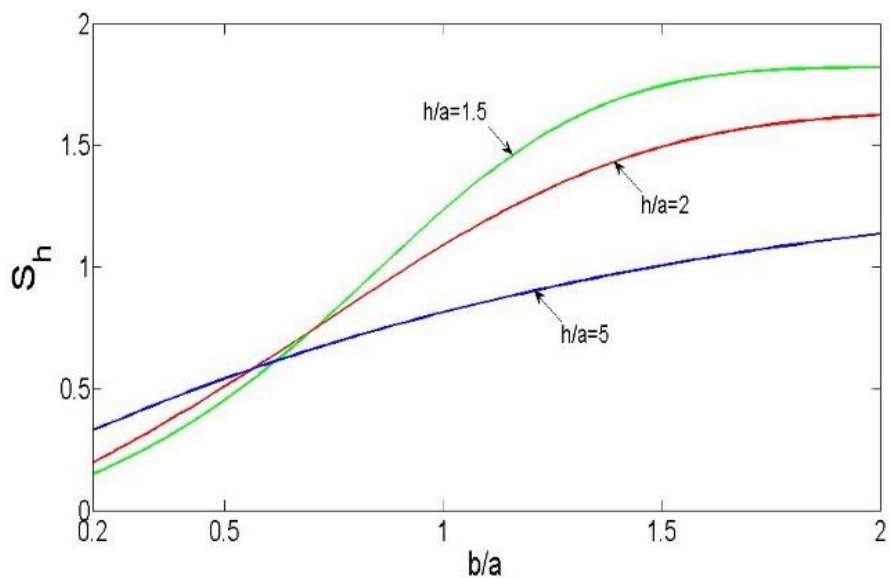
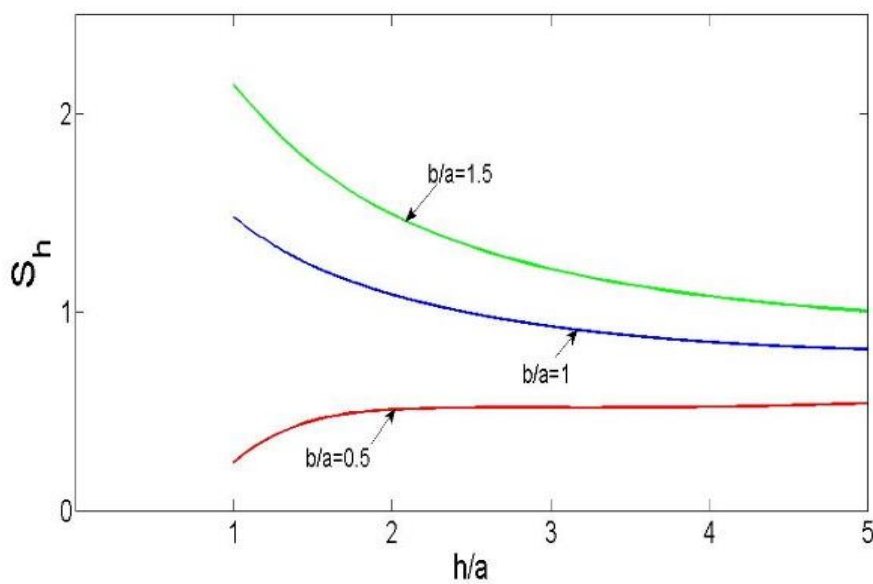


Figure 5.15 Variation de  $S_0$  pour une variation de  $h/a$ .



**Figure 5.16** Variation de  $S_h$  pour une variation de  $b/a$ .



**Figure 5.17** Variation de  $S_h$  pour une variation de  $h/a$ .

## Conclusion

Cette étude, analyse le problème de contact axisymétrique d'un poinçon rigide d'une plaque élastique épaisse reposant partiellement sur une fondation circulaire rigide. Elle nous amène à quelques conclusions que nous allons structurer de la façon suivante

Les résultats numériques se résument comme suit :

- Un système algébrique infini a été résolu avec différentes valeurs de l'épaisseur de la plaque et de rayon du poinçon et de la fondation par la méthode de la troncation.
- Les résultats numériques ont permis d'analyser l'effet de quelques paramètres, tels que l'épaisseur de la plaque, le rayon du poinçon et celui de la fondation sur les déplacements, les contraintes, la force axiale ainsi sur que les facteurs de singularité de contrainte.

L'analyse des graphiques obtenus nous montre que :

- La contrainte normale adimensionnelle pour  $h/a$  et  $b/a$  prend ses valeurs maximales au centre de la fondation. Cette contrainte atteint une valeur infinie par  $r/a=b/a$ . Elle diminue avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et du rayon de la fondation.
- La distribution du déplacement adimensionnel au bord de la fondation pour différentes valeurs de  $h/a$ , diminué avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et l'augmentation du rayon de la fondation.
- La contrainte normale adimensionnelle à la surface supérieure pour différentes valeurs de  $h/a$  et  $b/a$ , respectivement, obtient ses valeurs maximales au centre du poinçon. Elle diminue avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et l'augmentation du rayon de la fondation. Un comportement opposé est observé pour la distribution du déplacement adimensionnel au bord du poinçon.
- Il est à constater les effets de l'épaisseur de la plaque et le rayon de la fondation suite à l'action de la force axiale. La valeur de la force  $P^*$  augmente avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et l'augmentation de rayon de la fondation.
- Les facteurs de singularité de contrainte correspondant au problème étudié sont illustrés graphiquement. Les facteurs  $S_0$  et  $S_h$  augmentent lorsque l'épaisseur de la

plaque décroît. On remarque que la valeur  $S_0$  augmente avec le rayon de la fondation, on obtient le comportement opposé pour le cas  $S_h$ .

- Les résultats graphiques illustrent les effets de l'épaisseur de la plaque et de rayon de poinçon et celui de la fondation sur la force axiale appliquée et les facteurs de contrainte singulière.
- Nos résultats sont validés avec un travail déjà publié, le cas de demi-espace par un poinçon rigide circulaire traité par *Zakorko* [19] qui nous permet de confirmer l'exactitude de notre résolution du problème.

## **Chapitre 6**

### **Déformation Thermoélastique par un Poinçon Rigide d'une Plaque Epaisse**

## Chapitre 6

# Déformation Thermoélastique par un Poinçon Rigide d'une Plaque Epaisse

### Introduction

Pendant les dernières années, nous assistons à un développement important de la science de la thermoélasticité. Ce développement est dû aux demandes que présente la technique à la science. Il est stimulé par l'essor que prend l'aérotechnique, et par le développement réalisé dans le domaine de la construction des machines, de la technologie chimique et nucléaire. C'est surtout la théorie classique des contraintes thermiques qui a été développée au cours de la première décennie après la deuxième guerre mondiale et plus particulièrement, les problèmes des parcours thermiques non stationnaires. La théorie des contraintes thermiques base sur les énoncés fondamentaux de la théorie classique d'élasticité et sur la présomption de l'indépendance du champ de température de celui de déformation.

Dans notre étude, un problème thermoélastique d'une plaque épaisse a été décrit. Une procédure analytique de solution est utilisée suivant l'analogie de résolution du problème de déformation élastostatique traité par *Hara et al.* [25] et *Sakamoto* [26]-[28]. L'étude de ce type de problème se ramène à la fois à un problème thermique (calcul du champ de température dans la plaque) et un problème mécanique (détermination des contraintes et des déplacements dans la plaque). Ce qui permet d'obtenir deux problèmes couplés. Afin de pouvoir connaître l'influence du champ thermique (en quantité) sur le côté mécanique (contrainte).



## 6.1. Formulation des équations de la thermoélasticité

### 6.1.1 Hypothèses

On s'intéresse au problème de déformation thermoélastique sous l'effet de la température et subissant des contraintes mécaniques d'une plaque élastique épaisse. Cette plaque se déforme par l'application sur la face supérieure d'un poinçon circulaire rigide et chauffé. On suppose que le contact entre les deux faces est lisse. Nous faisons l'hypothèse que le champ thermique stationnaire imposé à la surface limite de la plaque en l'absence de source de chaleur. Nous utilisons pour cela la méthode de résolution basée sur la transformée de Hankel.

### 6.1.2 Conditions limites du problème

Nous gardons le même schéma de calcul que le précédent, cf. figure 5.1. Nous supposons maintenant que la plaque se déforme sous l'effet du chargement thermique du poinçon chauffé à une température uniforme et constante  $T_0$  et dont la pénétration est égale  $\varepsilon_0$ . Le coefficient de dilatation thermique linéaire du milieu élastique est noté par  $\alpha$ . Les conditions aux limites doublement mixtes imposées sont données

- sur la fondation

$$\sigma_z(r, 0) = 0, \quad r > b \quad (6.1)$$

$$w(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq b \quad (6.2)$$

$$T(r, 0) = 0, \quad r > b \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial T(r, 0)}{\partial z} = 0, \quad r < b \quad (6.4)$$

- sur la surface de contact

$$\sigma_z(r, h) = 0, \quad r > a \quad (6.5)$$

$$w(r, h) = -\varepsilon_0, \quad 0 \leq r \leq a \quad (6.6)$$

$$T(r, h) = \begin{cases} T_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (6.7)$$

- et

$$\tau_{rz}(r, 0) = \tau_{rz}(r, h) = 0, \quad r \geq 0 \quad (6.8)$$

## 6.2 Méthodologie de résolution du problème thermoélastique

Le problème thermoélastique contient deux problèmes, un problème thermique et un problème mécanique. Le problème se ramène à la recherche de solution de problème couplé. Un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  est utilisé dans cette étude, le système des équations d'équilibre thermoélastique en déplacement est déterminé par l'Annexe 3.1 [67]

$$(1 + \chi) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + (-1 + \chi) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 4(1 + \nu) \alpha \frac{\partial T}{\partial r} \quad (6.9)$$

$$(-1 + \chi) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right] + (1 + \chi) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} + \frac{\partial u}{r \partial z} \right] = 4(1 + \nu) \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \quad (6.10)$$

Si le processus est stationnaire sans source de chaleur. Autrement dit si la température ne dépend pas du temps, mais uniquement des coordonnées des points du corps, alors la distribution de la température coïncide avec la solution de l'équation de Laplace. En coordonnées cylindriques cette dernière s'écrit

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{r \partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (6.11)$$

Les composants  $\sigma_z$  et  $\tau_{rz}$  du tenseur des contraintes associées avec le champ de déplacement  $(u, 0, w)$  pour un milieu élastique isotrope à effet thermique sont donnés par les relations suivantes [42], [67]

$$\sigma_z(r, z) = \frac{2G}{(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - (1+\nu) \alpha T \right] \quad (6.12)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = G \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (6.13)$$

Comme d'habitude, pour traiter ce type de problème considéré, nous utilisons la transformation de Hankel d'ordre 0 et 1 sur les équations (6.9) et (6.10), respectivement.

Notons l'intégrale par

$$\int_0^{\infty} r u(r, z) J_1(\lambda r) dr = U(\lambda, z) \quad (6.14)$$

On trouve

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z^2} J_1(\lambda r) dr = U''(\lambda, z) \quad (6.15)$$

$$\int_0^{\infty} r \left[ \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial r^2} + \frac{\partial u(r, z)}{r \partial r} - \frac{u(r, z)}{r^2} \right] J_1(\lambda r) dr = -\lambda^2 U(\lambda, z) \quad (6.16)$$

et

$$\int_0^{\infty} r \left[ \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z \partial r} \right] J_1(\lambda r) dr = \lambda U'(\lambda, z) \quad (6.17)$$

De même, posons

$$\int_0^{\infty} r w(r, z) J_0(\lambda r) dr = W(\lambda, z) \quad (6.18)$$

Il vient que

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial^2 w(r, z)}{\partial z^2} J_0(\lambda r) dr = W''(\lambda, z) \quad (6.19)$$

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial w(r, z)}{\partial r \partial z} J_0(\lambda r) dr = -\lambda W'(\lambda, z) \quad (6.20)$$

et

$$\int_0^{\infty} r \left[ \frac{\partial^2 w(r, z)}{\partial r^2} + \frac{\partial w(r, z)}{r \partial r} \right] J_0(\lambda r) dr = -\lambda^2 W(\lambda, z) \quad (6.21)$$

Si

$$\int_0^{\infty} r t(r, z) J_0(\lambda r) dr = T_H(\lambda, z) \quad (6.22)$$

alors on trouve

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial t(r, z)}{\partial r} J_1(\lambda r) dr = -\lambda T_H(\lambda, z) \quad (6.23)$$

$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial t(r, z)}{\partial z} J_0(\lambda r) dr = T_H'(\lambda, z) \quad (6.24)$$

On obtient après avoir substitué les dérivées partielles (6.14)-(6.24) dans le système d'équilibre thermoélastique (6.9)-(6.11), le système différentiel ordinaire suivant

$$-\lambda^2(1+\chi)U + (-1+\chi)U'' - 2\lambda W' = -4(1+\nu)\alpha\lambda T_H \quad (6.25)$$

$$2\lambda U' - \lambda^2(-1+\chi)W + (1+\chi)W'' = 4(1+\nu)\alpha\lambda T_H' \quad (6.26)$$

$$T_H'' - \lambda^2 T_H = 0 \quad (6.27)$$

### 6.2.1 Résolution du problème de la conduction thermique

Nous déterminons dans un premier temps la distribution de température dans la plaque à l'état fondamental qui nous conduit par la suite au calcul d'états de thermoélasticité. La solution d'équation (6.11) s'exprime par la formule suivant

$$T_H(\lambda, z) = A(\lambda)e^{-\lambda z} + B(\lambda)e^{\lambda z} \quad (6.28)$$

$A(\lambda)$  et  $B(\lambda)$  sont des fonctions de paramètre  $\lambda$  à être déterminées à partir des conditions aux limites du champ de température, nous obtenons

$$T_H(\lambda, h) = T_0 \int_0^a r H(a-r) J_0(\lambda r) dr = \frac{aT_0}{\lambda} J_1(\lambda a) \quad (6.29)$$

En prenant en compte de la relation (6.29), on obtient de (6.28)

$$B(\lambda) = \left( -A(\lambda)e^{-\lambda h} + \frac{aT_0}{\lambda} J_1(\lambda a) \right) e^{-\lambda h} \quad (6.30)$$

En substituant  $B$  dans l'équation (6.28), nous trouvons que

$$T_H(\lambda, z) = A(\lambda) \left( e^{-\lambda z} - e^{-\lambda(2h-z)} \right) + \frac{aT_0 e^{\lambda(-h+z)}}{\lambda} J_1(\lambda a) \quad (6.31)$$

Ce qui donne, la répartition du champ thermique dans la zone de contact est

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda \left[ A(\lambda) \left( e^{-\lambda z} - e^{-\lambda(2h-z)} \right) + \frac{aT_0 e^{\lambda(-h+z)}}{\lambda} J_1(\lambda) \right] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (6.32)$$

La vérification des conditions aux limites doublement mixtes conduites à des équations intégrales duales

$$\int_0^{\infty} \lambda \phi(\lambda) q(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 2aT_0 \int_0^{\infty} \lambda \frac{e^{-\lambda h}}{(1-e^{-2\lambda h})} J_1(\lambda a) J_0(\lambda r) d\lambda, \quad r < b \quad (6.33)$$

$$\int_0^{\infty} \phi(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > b \quad (6.34)$$

où

$$\phi(\lambda) = \lambda A(\lambda) (1 - e^{-2\lambda h}) + aT_0 e^{-\lambda h} J_1(\lambda a) \quad (6.35)$$

$$q(\lambda) = \frac{1 + e^{-2\lambda h}}{1 - e^{-2\lambda h}} \quad (6.36)$$

Dans ce qui suit, on utilise la formule intégrale pour les fonctions de Bessel ([66], Eq 6.522. 11)

$$\int_0^{\infty} N_n(\lambda b) J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} \frac{4}{\pi b r} U_{2n+2}\left(\frac{r}{b}\right), & r < b \\ 0, & r > b \end{cases} \quad (6.37)$$

$U_{2n+2}$  définie le polynôme de Chebyshev de deuxième espèce, avec

$$N_n(\lambda b) = \lambda \left[ J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda b}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda b}{2}\right) - J_{n+\frac{3}{2}}\left(\frac{\lambda b}{2}\right) J_{-(n+\frac{3}{2})}\left(\frac{\lambda b}{2}\right) \right] \quad (6.38)$$

Par suite, on cherche la solution des équations intégrales duales comme suit

$$\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n N_n(\lambda b) \quad (6.39)$$

Les coefficients  $\alpha_n$  inconnus sont à déterminer. Alors la seconde équation (6.34) est automatiquement satisfaite. Utilisons ensuite la formule de Gegenbauer (5.37). En substituant l'équation (6.39) dans l'équation (6.33), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos m\phi \int_0^{\infty} \lambda q(\lambda) N_n(\lambda b) X_m(\lambda b) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos m\phi \int_0^{\infty} \lambda \frac{e^{-\lambda h}}{(1 - e^{-2\lambda h})} X_m(\lambda b) J_1(\lambda a) d\lambda \quad (6.40)$$

avec

$$a_n = \frac{\alpha_n}{2aT_0} \quad (6.41)$$

Les coefficients du terme trigonométrique des deux du côté de l'équation (6.40) sont égaux. Nous obtenons alors le système infini des équations simultanées pour déterminer les coefficients  $a_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} q(\lambda) N_n(\lambda b) Y_m(\lambda b) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda h}}{(1-e^{-2\lambda h})} Y_m(\lambda b) J_1(\lambda a) d\lambda \quad (6.42)$$

où

$$Y_m(\lambda) = \lambda [X_m(\lambda) - X_{m+2}(\lambda)] \quad (6.43)$$

Ce système infini peut être écrit sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A_{mn} = G_{1m} \quad (6.44)$$

avec

$$A_{mn} = \int_0^{\infty} q(\lambda) Y_m(\lambda b) N_n(\lambda b) d\lambda \quad (6.45)$$

$$G_{1m} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda h}}{(1-e^{-2\lambda h})} Y_m(\lambda b) J_1(\lambda a) d\lambda \quad (6.46)$$

Nous écrivons le système (6.44) sous forme adimensionnel, ce qui nous permet de faciliter leur simplification et de généraliser les résultats. En posant les changements de variables suivants

$$t = \lambda a, \delta' = \frac{h}{a} \text{ et } \eta' = \frac{b}{a} \quad (6.47)$$

ensuite

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n A'_{mn} = G'_{1m} \quad (6.48)$$

Posons

$$a'_n = \frac{\alpha_n}{2T_0} \quad (6.49)$$

$$A'_{mn} = \int_0^{\infty} q'(t) N_n(\eta't) Y_m(\eta't) dt \quad (6.50)$$

et

$$q'(\lambda) = \frac{1+e^{-2\delta't}}{1-e^{-2\delta't}} \quad (6.51)$$

$$G'_{1m} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\delta't}}{(1-e^{-2\delta't})} Y_m(\eta't) J_1(t) dt \quad (6.52)$$

Pour la relation de température (6.32), nous posant les changements de variable ci-dessous

$$\zeta = \frac{r}{a}, \rho = \frac{z}{a} \quad (6.53)$$

ensuite, il peut être calculé comme suit

$$\frac{T(\zeta, \rho)}{T_0} = 2 \int_0^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a'_n N_n(\eta't) (e^{-\rho t} - e^{t(\rho-2\delta')}) + (e^{t(\rho-\delta')} - e^{-t(\rho+\delta')}) J_1(t) \right] \frac{J_0(\zeta t)}{(1-e^{-2\delta' t})} dt \quad (6.54)$$

La présence d'un champ thermique le long de la surface de contact a tendance à faire propager le champ thermique par conduction. Nous pouvons écrire l'expression définissant la distribution du flux

$$\frac{\partial T(\zeta, \rho)}{T_0 \partial \rho} = -2 \int_0^{\infty} t \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a'_n N_n(\eta't) (e^{-\rho t} + e^{t(\rho-2\delta')}) - (e^{t(\rho-\delta')} + e^{-t(\rho+\delta')}) J_1(t) \right] \frac{J_0(\zeta t)}{(1-e^{-2\delta' t})} dt \quad (6.55)$$

### A. Résultats numériques et discussion

Nous résolvons le système infini de l'équation algébrique (6.48) pour déterminer les coefficients inconnus  $a'_n$ . Dans ce but, remarquons que pour une valeur suffisamment grande de  $t$ , les intégrales infinies de l'équation (6.48) peuvent être décomposées comme suit

$$A'_{mn} = \int_0^{t_0} q'(t) N_n(\eta't) Y_m(\eta't) dt + A''_{mn} \quad (6.56)$$

$A''_{mn}$  est représenté par

$$A''_{mn} = \int_{t_0}^{\infty} q'(t) N_n(\eta't) Y_m(\eta't) dt \quad (6.57)$$

L'équation (6.56) est calculée comme suit : La première intégrale du côté droit de l'équation (6.56) est évaluée numériquement par la règle de Simpson. Ici, nous choisissons 1000 sous-intervalles et  $t_0 = 1500$ , alors que dans la seconde intégrale on remplace la fonction par la forme approximative des fonctions de Bessel. Ensuite, la fonction  $q'(t)$  dans l'équation (6.57) peut être remplacée par (-1) et  $N_n(\eta't) Y_m(\eta't)$  peut être calculé asymptotiquement, tandis que

$$X_m(\eta't) - X_{m+2}(\eta't) \approx -\frac{16(-1)^m (1+m)}{\pi(\eta't)^2} \cos(\eta't) \quad (6.58)$$

$$N_n(\eta't) \approx -\frac{8(1+n)}{\pi\eta't^2} \cos(\eta't) \quad (6.59)$$

Ensuite, en tenant compte de l'équivalent  $N_n(\eta't)Y_m(\eta't)$  donné par

$$N_n(\eta't)Y_m(\eta't) \rightarrow \frac{128(-1)^m(1+m)(1+n)\cos^2(\eta't)}{\pi^2(\eta't)^4} \quad (6.60)$$

Puis, en substituant l'équation (6.60) dans la dernière intégrale de l'équation (6.56), on obtient

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} N_n(\eta't)Y_m(\eta't)dt_0 = \frac{128(-1)^m(1+m)(1+n)}{\pi^2(\eta't)^3} \times \left\{ \frac{\cos^2(\lambda_0\eta't)}{\lambda_0(\eta't)} + si(2\lambda_0\eta't) \right\} \quad (6.61)$$

Les coefficients  $a'_n$  sont indiqués dans les tableaux 6.1 et 6.2 en fonction de l'épaisseur de la plaque et le rayon du poinçon et celui que de la fondation.

**Tableau 6.1** Valeurs des coefficients  $a'_n$  ( $b/a=0.25$ ).

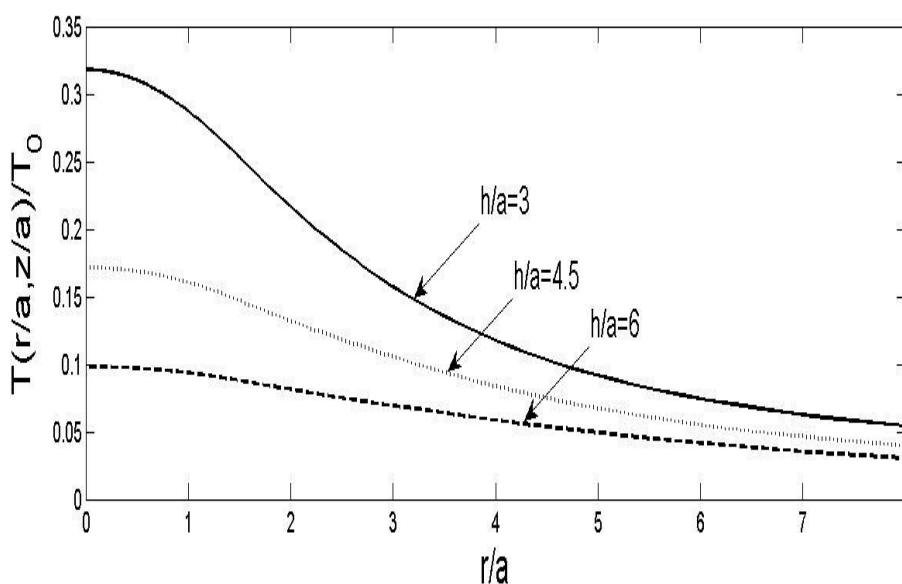
$a'_n$			
n	h/a=0.5	h/a=3	h/a=5
0	0.036301204340747	0.002718452344962	0.001017687554760
1	-0.020453148297745	-0.001535629203246	-0.000574883746459
2	-0.004281230437599	-0.000318569931178	-0.000119260135626
3	-0.001528896564065	-0.000114116169693	-0.000042720728610
4	-0.000516153699553	-0.000038523271577	-0.000014421639969
5	-0.000021856254145	-0.000001608519258	-0.000000602160626
6	0.000247783831548	0.000018533417827	0.000006938216259
7	0.000386976541540	0.000028931432125	0.000010830838362
8	0.000421975222645	0.000031544119954	0.000011808928988
9	0.000341498340370	0.000025526870240	0.000009556297172



**Tableau 6.2** Valeurs des coefficients  $a'_n$  ( $h/a=5$ ).

$a'_n$			
n	b/a=0.25	b/a=1	b/a=2
0	0.001017687554760	0.015833767913739	0.056814813499988
1	-0.000574883746459	-0.008742171864567	-0.031278566249732
2	-0.000119260135626	-0.001728828877968	-0.006184507635662
3	-0.000042720728610	-0.000568608140977	-0.002015322813640
4	-0.000014421639969	-0.000157393856213	-0.000545035596517
5	-0.000000602160626	0.000027964875905	0.000113105960128
6	0.000006938216259	0.000117211220151	0.000425753811882
7	0.000010830838362	0.000154516394661	0.000552276169754
8	0.000011808928988	0.000155831010956	0.000551086506536
9	0.000009556297172	0.000121006661581	0.000423931636700

Les figures 6.1 et 6.2 montrent la variation de la distribution radiale de la température dans le plan  $z/a=0.25$  pour différentes valeurs de  $h/a$  et  $b/a$ , respectivement. D'après les graphes, la distribution de la température a une valeur maximale au centre du poinçon. Elle augmente aussi avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et l'augmentation de rayon de la fondation. Sur la figure 5.3 la variation du flux dans le plan  $z/a=0$  devient infinie au bord de la fondation. Il diminue à différentes distances.



**Figure 6.1** Distributions de température pour  $b/a=1.5$  en fonction de  $h/a$ .

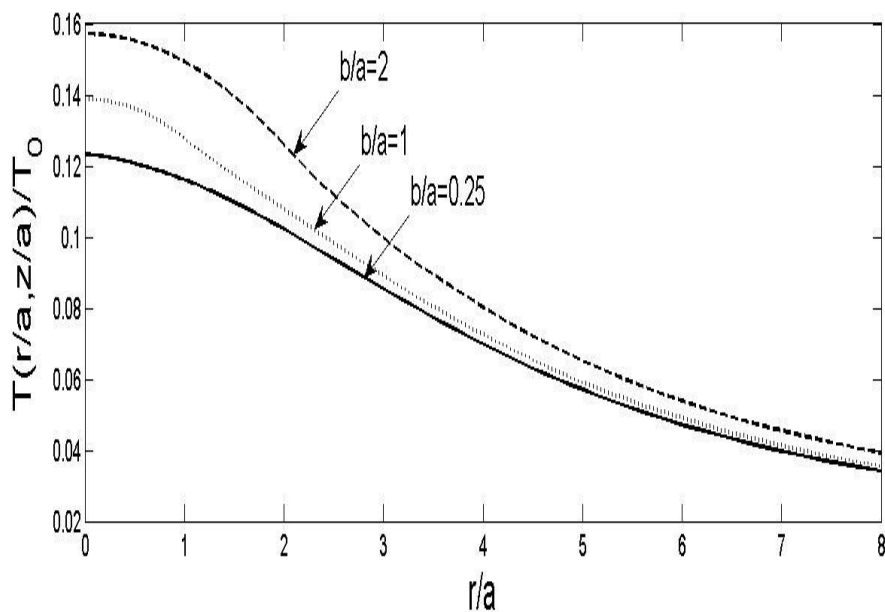


Figure 6.2 Distributions de température pour  $h/a=5$  en fonction de  $b/a$ .

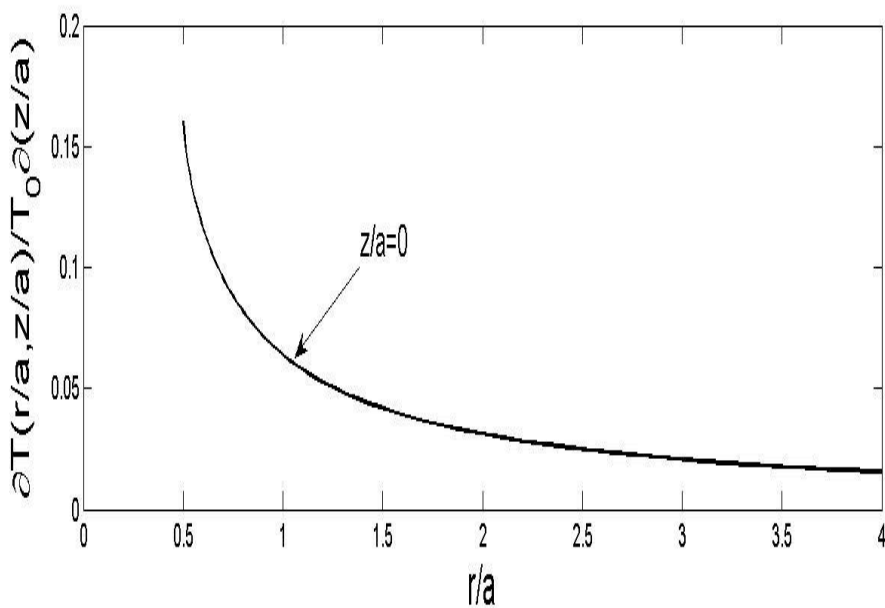


Figure 6.3 Distributions de flux de chaleur pour  $b/a=0.5$  et  $h/a=1.5$

### 6.2.2 Résolution du problème thermoélastique

Examinons l'état de déformation axisymétrique d'une plaque épaisse élastique dû à un champ mécanique et thermique. La solution du problème thermoélastique correspondant aux des équations (6.25) et (6.26) s'obtient sous la forme

$$U = U_h + U_p, \quad W = W_h + W_p$$

$U_h, W_h$  sont la solution générale d'équations l'homogène des équations (6.25) et (6.26), alors que  $U_p, W_p$  sont les solutions particulières des équations non homogènes (voir l'Annexe 3.2). Elles sont données par

$$U_h(\lambda, z) = \left[ C_0(\lambda) + C_1(\lambda) \left( z - \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{-\lambda z} + \left[ C_2(\lambda) + C_3(\lambda) \left( z + \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{\lambda z} \quad (6.62)$$

$$W_h(\lambda, z) = \left[ C_0(\lambda) + C_1(\lambda) z \right] e^{-\lambda z} - \left[ C_2(\lambda) + C_3(\lambda) z \right] e^{\lambda z} \quad (6.63)$$

et

$$U_p(\lambda, z) = 0 \quad (6.64)$$

$$W_p(\lambda, z) = 2(1+\nu) \frac{\alpha}{\lambda} \left[ B(\lambda) \left( e^{\lambda z} + e^{\lambda(2h-z)} \right) - \frac{T_0 a J_1(\lambda a)}{\lambda} e^{\lambda(h-z)} \right] \quad (6.65)$$

La solution finale des équations d'équilibre thermoélastique (6.25) et (6.26) est alors du type

$$U(\lambda, Z) = \left[ C_0(\lambda) + C_1(\lambda) \left( z - \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{-\lambda z} - \left[ C_2(\lambda) + C_3(\lambda) \left( z + \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{\lambda z} \quad (6.66)$$

$$W(\lambda, z) = \left[ C_0(\lambda) + C_1(\lambda) z + \frac{2(1+\nu)\alpha}{\lambda} \left( B(\lambda) e^{\lambda h} - \frac{a T_0 J_1(\lambda a)}{\lambda} \right) e^{\lambda z} \right] e^{-\lambda z} + \left[ C_2(\lambda) + C_3(\lambda) z + \frac{2(1+\nu)\alpha}{\lambda} B(\lambda) \right] e^{\lambda z} \quad (6.67)$$

Les fonctions inconnues  $C_0(\lambda), C_1(\lambda), C_2(\lambda)$  et  $C_3(\lambda)$  doivent être déterminées à partir de condition au limite mixte (6.8). Remarquons que

$$C_0(\lambda) = \frac{e^{\lambda h}}{\lambda^2 h} \left\{ 2\lambda C_2(\lambda) (-1 + e^{-\lambda h}) - C_3(\lambda) \left[ (2(1-\nu)(\lambda h - 2(1-\nu)) + h\lambda^2) e^{-\lambda h} + 2(2(1-\nu) + \lambda h) \right] + 2(1+\nu)\alpha A(\lambda) \left[ (1 + \lambda h) e^{-\lambda h} + (1-\nu) e^{\lambda h} \right] \right\} \quad (6.68)$$

et

$$C_1(\lambda) = \frac{e^{\lambda h}}{\lambda h} \left\{ C_2(\lambda) \left[ \lambda(-1 + e^{-\lambda h}) - e^{\lambda h} (\lambda(-1+h) - 2(-1+\nu)) \right] - C_3(\lambda) \left[ (2(1+\nu)(-1 + e^{-\lambda h}) - h\lambda) \right] + (1+\nu)\alpha A(\lambda) \left[ (2+\nu) e^{\lambda h} - e^{-\lambda h} \right] \right\} \quad (6.69)$$

En substituant ces fonctions dans les équations (6.66) et (6.67), la solution de l'équation devient

$$U(\lambda, z) = \frac{1}{2\lambda h} \left\{ \left[ 2C_2(\lambda)(-1+2\nu) + 2C_3(\lambda)((h-z)) \right] ((h-z)(2(-1+\nu) - \lambda^2) - 2(-1+\nu)(-1+2\nu)) + \frac{1}{\lambda} \left[ -2\lambda C_2(\lambda) + 2(2(-1+\nu) - \lambda h)C_3(\lambda) + 2(1+\nu)\alpha A(\lambda) \right] (1-2\nu + \lambda z) \right\} \quad (6.70)$$

$$W(\lambda, z) = \frac{1}{2\lambda^2 h} \left\{ \left[ C_2(\lambda)(1-\nu) - 2C_3(\lambda)(\lambda(h-z))(2\nu(1-\nu) + \lambda) - 2(1+\nu)\alpha A(\lambda)(1-\nu-z) \right] e^{-\lambda z} + 2\lambda h \left[ \lambda C_2(\lambda) + C_3(\lambda)(\lambda + \lambda z) + 2(1+\nu)\alpha A(\lambda) \right] e^{\lambda z} + (2(1-\nu) + \lambda z) \left[ 2(-\lambda C_2(\lambda) - C_3(\lambda)(2(1-\nu) - \lambda h)) + 2(1+\nu)\alpha A(\lambda) \right] e^{\lambda(2h-z)} \right\} \quad (6.71)$$

Appliquons ensuite la transformée de Hankel d'ordre 0 à l'équation (6.12) et de l'ordre 1 à (6.13), se qui permet d'écrire

$$\sigma_H(\lambda, z) = \int_0^\infty r \sigma_z(r, z) J_0(\lambda r) dr \quad (6.72)$$

$$\tau_H(\lambda, z) = \int_0^\infty r \tau_{rz}(r, z) J_1(\lambda r) dr \quad (6.73)$$

La transformé de contrainte normale et de cisaillement a été donnée en terme de  $U$ ,  $W$  et  $T_H$  par les expressions

$$\sigma_H(\lambda, z) = \frac{2G}{1-2\nu} \left[ (1-\nu)W' + \nu\lambda U - (1+\nu)\alpha T_H \right] \quad (6.74)$$

$$\tau_H(\lambda, z) = G(U' - \lambda W) \quad (6.75)$$

Les trois équations (6.31), (6.70) et (6.71) donnent alors

$$\begin{aligned} \sigma_H(\lambda, z) = & \frac{2G}{1-2\nu} \left\{ \left[ C_2(\lambda) \left( (-1+\nu)(1+\lambda h) \frac{e^{2\lambda h}}{h} - \left( \frac{1}{2} + \lambda(1-\nu)(-h+z) \right) \right) \right] \right. \\ & + C_3(\lambda) \left( 2(1-\nu)(1-2\nu) \left( \frac{1}{\lambda} + (1+\lambda h)e^{2\lambda h} \right) + \lambda h e^{2\lambda h} + 4(1-\nu^2)(-h+z) \right) \\ & \left. + (1+\nu)\alpha T_0 \left( \frac{1}{1+e^{-2\lambda h}} \left( -\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_n(\lambda a) + \frac{b}{\lambda} J_1(\lambda b) e^{-\lambda h} \right) \right) \right\} \\ & \times \left( -\frac{1-2\nu}{2\lambda} (h + 2(1+\nu) - 2h(1-\nu)e^{2\lambda h} + (h + 2(1+\nu))) - \frac{1}{\lambda} ((1-2\nu)(-1 + \lambda(h-z))) e^{-2\lambda h} \right) \\ & + \frac{b}{\lambda} J_1(\lambda) e^{-\lambda h} \left( (-1+2\nu)(1+\nu(-h+\nu)) + \frac{1+\lambda h}{h} + 2\lambda\nu(-h+\nu) \right) + \frac{1-2\nu}{h} (h+z) \Big] e^{-\lambda z} \\ & - \left[ \frac{2(1+\nu)\alpha T_0}{\lambda^2} h b J_1(\lambda) \right] e^{\lambda z} - \left[ C_2(\lambda)\lambda h(-1+h) + C_3(\lambda)h(-1+4\nu(1-\nu)) + \lambda z(1-\nu) \right] e^{\lambda h} \Big\} \quad (6.76) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_H(\lambda, z) = & -\frac{G}{h} \left\{ \left[ 2(\lambda C_2(\lambda) - 2C_3(\lambda)(1-\nu)) + 2(1+\nu)\alpha A(\lambda) \right] (-h+z) e^{-\lambda z} \right. \\ & + 2h \left[ \lambda C_2(\lambda) + C_3(\lambda)(\lambda z - 2(1-\nu)) - (1+\nu)\alpha A(\lambda) \right] e^{\lambda z} \\ & \left. + z \left[ -2\lambda C_2(\lambda) + 2C_3(\lambda)(-\lambda h - 2(1-\nu)) + 2(1+\nu)\alpha A(\lambda) \right] e^{-\lambda(-2h+z)} \right\} \quad (6.77) \end{aligned}$$

Conformément aux transformations inverses de Hankel, on a

$$\sigma_z(r, z) = \int_0^\infty \lambda \sigma_H(\lambda, z) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (6.78)$$

$$w(r, z) = \int_0^\infty \lambda W(\lambda, z) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (6.79)$$

Les contraintes et les déplacements sur les limites de la plaque sont donnés par les équations intégrales duales suivants

$$(\sigma_z)_{z=0} = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \lambda \left[ C_2(\lambda) g_{11}(\lambda) + C_3(\lambda) g_{12}(\lambda) - g_{13}(\lambda) \right] J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > b \quad (6.80)$$

$$(w_z)_{z=0} = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \lambda \left[ C_2(\lambda) g_{21}(\lambda) + C_3(\lambda) g_{22}(\lambda) + g_{23}(\lambda) \right] J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad 0 \leq r \leq b \quad (6.81)$$

$$(\sigma_z)_{z=h} = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \lambda \left[ C_2(\lambda) g_{41}(\lambda) + C_3(\lambda) g_{42}(\lambda) + g_{43}(\lambda) \right] J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a \quad (6.82)$$

$$\frac{(w_z)_{z=h}}{\varepsilon_0} = -1 \Rightarrow \int_0^\infty \lambda \left[ C_2(\lambda) g_{31}(\lambda) + C_3(\lambda) g_{32}(\lambda) \right] J_0(\lambda r) d\lambda = G_{2m}, \quad 0 \leq r \leq a \quad (6.83)$$

Remarquons de la formule intégrale (4.20) que les équations homogènes (6.80) et (6.82) sont satisfaites de manière identique en posant

$$\begin{cases} C_2(\lambda) g_{11}(\lambda) + C_3(\lambda) g_{12}(\lambda) - g_{13}(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \beta_n M_n(\lambda b) \\ C_2(\lambda) g_{41}(\lambda) + C_3(\lambda) g_{42}(\lambda) + g_{43}(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \gamma_n M_n(\lambda a) \end{cases} \quad (6.84)$$

Nous trouvons que

$$\begin{aligned} C_2(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda) \left[ \sum_{n=0}^\infty (-\beta_n M_n(\lambda b) g_{42}(\lambda) + \gamma_n M_n(\lambda a) g_{12}(\lambda)) - \right. \\ \left. g_{12}(\lambda) g_{43}(\lambda) - g_{13}(\lambda) g_{42}(\lambda) \right] \quad (6.85) \end{aligned}$$

$$C_3(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda) g_{21}(\lambda) \left[ \left( \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n M_n(\lambda b) + g_{13}(\lambda) \right) \frac{g_{41}(\lambda)}{g_{11}(\lambda)} - \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n M_n(\lambda a) + g_{43}(\lambda) \right] \quad (6.86)$$

avec

$$\Delta(\lambda) = g_{12}(\lambda) g_{41}(\lambda) - g_{11}(\lambda) g_{42}(\lambda) \quad (6.87)$$

En substituant ces fonctions  $C_2$  et  $C_3$  dans les équations (6.81) et (6.83), on obtient

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\beta_n M_n(\lambda b) L_1(\lambda) + \gamma_n M_n(\lambda a) L_2(\lambda)] J_0(\lambda r) d\lambda = G_{3m}, & 0 \leq r \leq b \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\beta_n M_n(\lambda b) L_3(\lambda) + \gamma_n M_n(\lambda a) L_4(\lambda)] J_0(\lambda r) d\lambda = G_{4m}, & 0 \leq r \leq a \end{cases} \quad (6.88)$$

Nous utilisons la formule de Gegenbauer (5.37) dans (6.88), nous obtenons

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\beta_n M_n(\lambda b) L_1(\lambda) + \gamma_n M_n(\lambda a) L_2(\lambda)] X_m(\lambda b) d\lambda = G_{5m}, & 0 \leq r \leq b \\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\beta_n M_n(\lambda b) L_3(\lambda) + \gamma_n M_n(\lambda a) L_4(\lambda)] X_m(\lambda a) d\lambda = G_{6m}, & 0 \leq r \leq a \end{cases} \quad (6.89)$$

On obtient le système infini d'équations algébriques suivant pour obtenir les coefficients  $\beta_n$  et  $\gamma_n$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [\beta_n B_{nm} + \gamma_n C_{nm}] = G_{5m} \delta_{0m} \\ \sum_{n=0}^{\infty} [\beta_n D_{nm} + \gamma_n E_{nm}] = G_{6m} \delta_{0m} \end{cases} \quad (6.90)$$

telle que

$$B_{nm} = \int_0^{\infty} L_1(\lambda) M_n(\lambda b) X_m(\lambda b) d\lambda \quad (6.91)$$

$$C_{nm} = \int_0^{\infty} L_2(\lambda) M_n(\lambda a) X_m(\lambda b) d\lambda$$

$$D_{nm} = \int_0^{\infty} L_3(\lambda) M_n(\lambda b) X_m(\lambda a) d\lambda$$

$$E_{nm} = \int_0^{\infty} L_4(\lambda) M_n(\lambda a) X_m(\lambda a) d\lambda$$

En portant les variables adimensionnelles définies précédemment dans le système infini des équations algébriques (6.90)

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [\beta'_n B'_{nm} + \gamma'_n C'_{nm}] = G'_{5m} \delta_{0m} \\ \sum_{n=0}^{\infty} [\beta'_n D'_{nm} + \gamma'_n E'_{nm}] = G'_{6m} \delta_{0m} \end{cases} \quad (6.92)$$

Soient

$$\beta'_n = \frac{\beta_n}{a} \quad (6.93)$$

$$\gamma'_n = \frac{\gamma_n}{a} \quad (6.94)$$

et

$$B'_{nm} = \int_0^{\infty} L'_1(t) M_n(\eta t) X_m(\eta t) dt \quad (6.95)$$

$$C'_{nm} = \int_0^{\infty} L'_2(t) M_n(t) X_m(\eta t) dt$$

$$D'_{nm} = \int_0^{\infty} L'_3(t) M_n(\eta t) X_m(t) dt$$

$$E'_{nm} = \int_0^{\infty} L'_4(t) M_n(t) X_m(t) dt$$

### 6.3 Déplacements et contraintes

Les composantes du déplacement sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque peuvent être calculées comme suit

$$(w_z^*)_{z=0} = \frac{(w_z)_{z=0}}{\varepsilon_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\beta_n M_n(\lambda b) L_1(\lambda) + \gamma_n M_n(\lambda a) L_2(\lambda)] J_0(\lambda b) d\lambda - G_{3m} \quad (6.96)$$

$$(w_z^*)_{z=h} = \frac{(w_z)_{z=h}}{\varepsilon_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\beta_n M_n(\lambda b) L_3(\lambda) + \gamma_n M_n(\lambda a) L_4(\lambda)] J_0(\lambda b) d\lambda - G_{4m} \quad (6.97)$$

La contrainte normale sur la surface supérieure peut être exprimée par

$$(\sigma_z^*)_{z=0} = \frac{(\sigma_z)_{z=0}}{\varepsilon_0} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{T_{2n+1}(r/b)}{r \sqrt{b^2 - r^2}} \quad (6.98)$$

alors que sur  $z = h$ , on obtient

$$\left(\sigma_z^*\right)_{z=h} = \frac{\left(\sigma_z\right)_{z=h}}{\varepsilon_0} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \frac{T_{2n+1}(r/a)}{r\sqrt{a^2-r^2}} \quad (6.99)$$

L'équilibre mécanique thermoélastique à l'interface du contact se traduit par l'équation d'équilibre statique de la force axiale du poinçon [22], [23] et [25]

$$P = -2\pi \int_0^a \left(\sigma_z\right)_{z=h} r dr \quad (6.100)$$

On écrit, après avoir substitué  $\left(\sigma_z\right)_{z=h}$  par son expression et effectuer l'intégration en raisonnant de la même manière décrite dans l'Annexe 2.1

$$P = -4\varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \gamma_n \quad (6.101)$$

Les facteurs de singularité de contrainte du problème étudié peuvent être exprimés comme suit

Le facteur de singularité de contrainte  $S_0$  sur la surface plane est donné par

$$S_0 = \lim_{r \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi(b-r)} \left(\sigma_z^*\right)_{z=0} \quad (6.102)$$

Le facteur  $S_h$  s'obtient

$$S_h = \lim_{r \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi(a-r)} \left(\sigma_z^*\right)_{z=h} \quad (6.103)$$

D'où, substitution des équations (6.98) et (6.99) dans équations (6.102), (6.103). Nous obtenons l'expression simple des facteurs de singularité de contrainte donnée en termes des coefficients  $\beta_n'$  et  $\gamma_n'$

$$S_0 = \frac{2}{\eta' \sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n' \quad (6.104)$$

$$S_h = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n' \quad (6.105)$$



**B. Résultats numériques et discussions**

Nous résolvons le système infini de l'équation algébrique (6.92) pour déterminer les coefficients inconnus  $\beta'_n$  et  $\gamma'_n$  en remplaçant les intégrales (6.95) par

$$B'_{mm} \approx \int_0^{t_0} L'_1(\delta t) M_n(\eta t) X_m(\eta t) dt + \int_{t_0}^{\infty} M_n(\eta t) X_m(\eta t) dt \tag{6.106}$$

$$C'_{mm} \approx \int_0^{\infty} L'_2(\delta t) M_n(t) X_m(\eta t) dt$$

$$D'_{mm} \approx \int_0^{\infty} L'_3(\delta t) M_n(\eta t) X_m(t) dt$$

$$E'_{mm} \approx \int_0^{t_0} L'_4(t) M_n(t) X_m(\eta t) dt + \int_{t_0}^{\infty} M_n(t) X_m(t) dt$$

Le premier terme du côté droit de l'équation (6.106) est intégré numériquement à l'aide de la règle de Simpson. Ici, nous choisissons 1000 sous-intervalles et  $t_0 = 1500$ . Le second terme est intégré en utilisant la forme approximative des fonctions de Bessel.

Le choix des matériaux pour une application industrielle donnée exige une connaissance et une maîtrise de ses caractéristiques mécaniques. A ce stade, la caractérisation mécanique des matériaux repose sur l'étude de son comportement vis-à-vis les sollicitations extérieures qui engendrent des contraintes et des déformations. Nous avons choisi comme application un milieu en acier dont les paramètres sont indiqués dans le tableau 6.3. Les coefficients  $\beta'_n$  et  $\gamma'_n$  sont présentés dans les tableaux 6.4 et 6.5 avec différentes valeurs de l'épaisseur de la plaque et des rayons a et b.

**Tableau 6.3 Paramètres thermiques et élastiques d'acier moyen.**

Temperature (T, °C)	Coefficient de dilatation thermique ( $\alpha$ , K <sup>-1</sup> )	Coefficient de Poisson ( $\nu$ )
100	18.8x10 <sup>-6</sup>	0.29

**Tableau 6.4** Valeurs des coefficients  $\beta'_n$  et  $\gamma'_n$  ( $b/a=0.75$ ).

h/a=0.75		
n	$\beta'_n$	$\gamma'_n$
0	0.037063906323658	0.019588180160849
1	-0.049186362118059	-0.021122729190494
2	0.014005932182722	0.003799932721199
3	-0.000921252780973	-0.000722124317185
4	0.000217822572496	-0.000225587133000
5	0.000104048373888	-0.000129184115299
6	0.000091012514144	-0.000114178946520
7	0.000080598766410	-0.000046097698105
8	0.000067903981412	-0.000055491857328
9	0.000047736467711	0.000000630440299

h/a=1		
n	$\beta'_n$	$\gamma'_n$
0	0.045364049531263	0.022565770573150
1	-0.042990237267195	-0.014755288555510
2	0.004672496413822	-0.002005426282923
3	-0.000401933474951	-0.001302986863204
4	-0.000042044101045	-0.000839069755529
5	0.000137480440466	-0.000406889047939
6	0.000223299398252	-0.000336483735700
7	0.000254957691014	-0.000138335497595
8	0.000242823222587	-0.000156550725376
9	0.000182609042888	-0.000001362455372

h/a=1.25		
n	$\beta'_n$	$\gamma'_n$
0	-0.016640424709399	-0.001300588087711
1	-0.015966485330693	-0.001422192925306
2	0.019912931290127	0.001912951387677
3	-0.000407696772340	0.000003423421174
4	0.000609981363588	0.000170537389376
5	-0.000046594450001	0.000071675210362
6	-0.000288234692434	0.000059398101645
7	-0.000390574704145	0.000024530927899
8	-0.000395266378638	0.000027345467725
9	-0.000305969403527	0.000000386708857

**Tableau 6.5** Valeurs des coefficients  $\beta'_n$  et  $\gamma'_n$  ( $h/a=1.25$ ).

b/a=0.5		
n	$\beta'_n$	$\gamma'_n$
0	-0.014860403570175	-0.001788792054877
1	0.007798887911232	0.000402854905408
2	0.001912041704800	0.000777891728993
3	0.000511212249070	0.000082990403248
4	0.000147998786974	0.000098249324534
5	-0.000029331923887	0.000050645427679
6	-0.000113624048535	0.000036533087666
7	-0.000148079358976	0.000019591022413
8	-0.000148208706544	0.000015787688326
9	-0.000114310619160	0.000004227381694

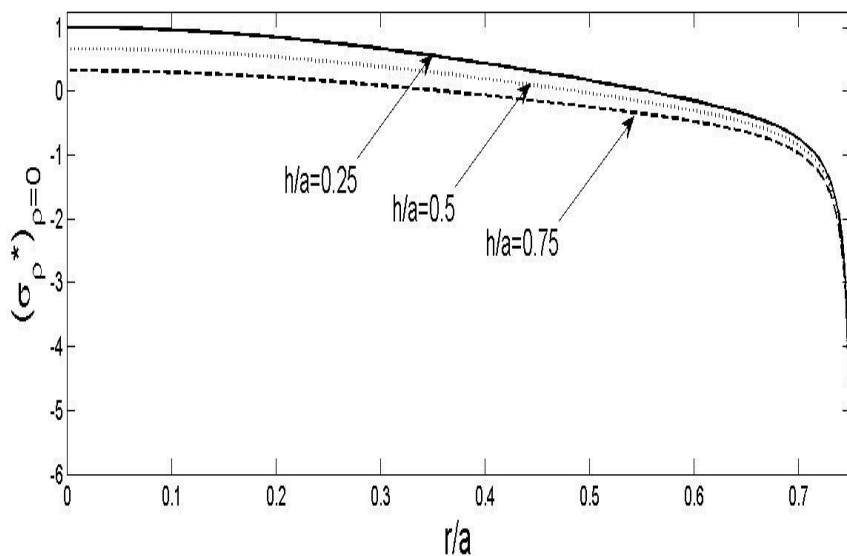
  

b/a=0.75		
n	$\beta'_n$	$\gamma'_n$
0	-0.016640424709399	-0.001300588087711
1	-0.015966485330693	-0.001422192925306
2	0.019912931290127	0.001912951387677
3	-0.000407696772340	0.000003423421174
4	0.000609981363588	0.000170537389376
5	-0.000046594450001	0.000071675210362
6	-0.000288234692434	0.000059398101645
7	-0.000390574704145	0.000024530927899
8	-0.000395266378638	0.000027345467725
9	-0.000305969403527	0.000000386708857

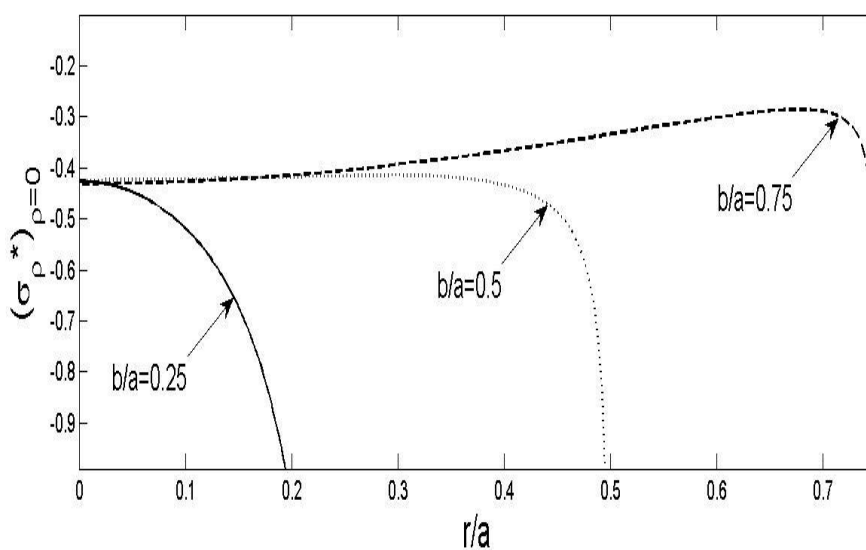
  

b/a=1		
n	$\beta'_n$	$\gamma'_n$
0	-0.023605662338271	0.006587218140131
1	-0.073818764065537	-0.007207988112731
2	0.075230786150529	0.000917152879540
3	-0.009843668855371	0.000022116365662
4	0.002421516314454	-0.000035634470479
5	-0.000254285212655	-0.000015270475110
6	-0.000717611458449	-0.000024500325864
7	-0.000950907186823	-0.000004441384152
8	-0.000953250812152	-0.000014040435172
9	-0.000734375936788	0.000005200083905

Les figures 6.4 et 6.5 montrent la variation de la contrainte normale adimensionnelle avec des valeurs différentes pour  $h/a$  et  $b/a$ , respectivement. La distribution de la contrainte atteint des valeurs maximales au centre de la fondation. La contrainte a une valeur infinie pour  $r/a=b/a$ . Elle diminue avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque et la diminution de rayon de la fondation.

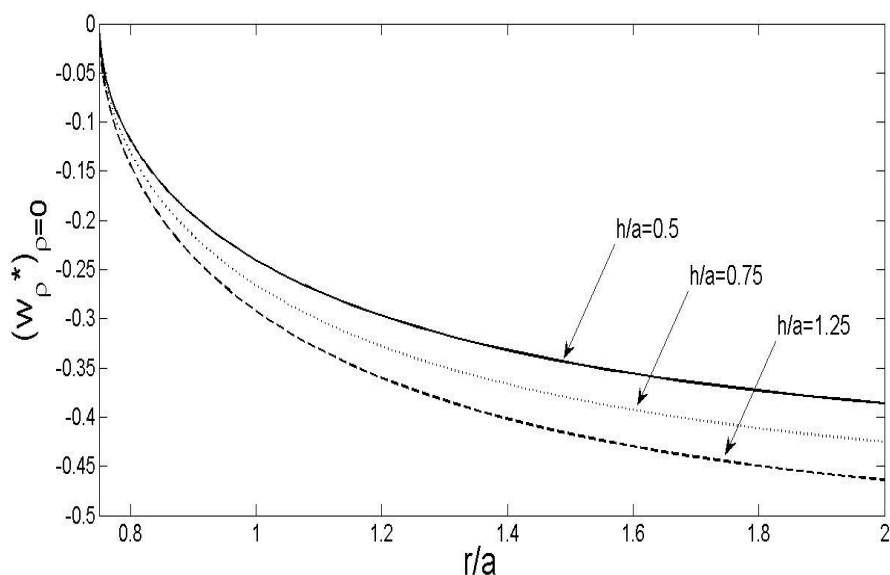


**Figure 6.4** Variation de  $(\sigma_{\rho}^*)_{\rho=0}$  pour  $b/a=0.75$  avec différentes valeurs de  $h/a$ .

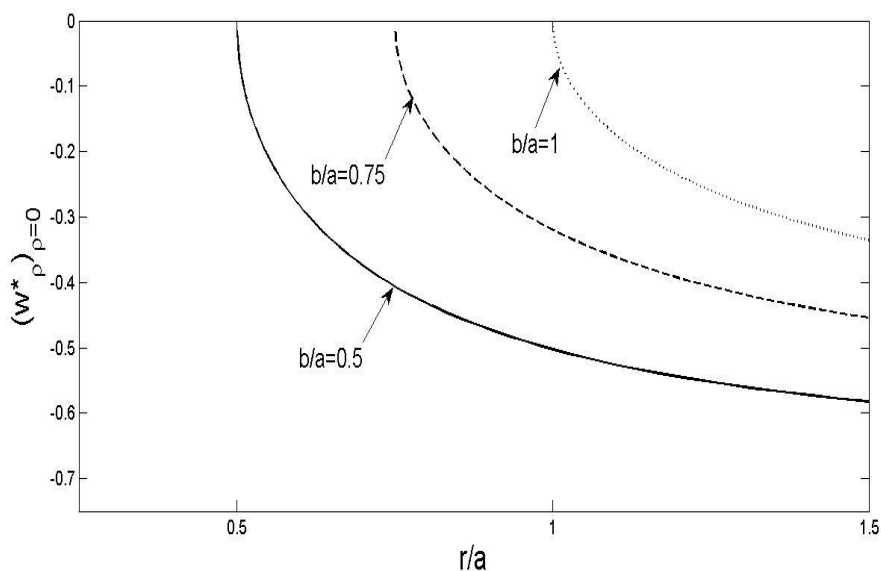


**Figure 6.5** Variation de  $(\sigma_{\rho}^*)_{\rho=0}$  pour  $h/a=1.5$  avec différentes valeurs de  $b/a$ .

La répartition du déplacement axial adimensionnel au bord de la fondation est donnée à la figure 6.6 avec différentes valeurs de  $h/a$ . Les valeurs diminuent avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque et la diminution du rayon de la fondation. Graphiquement, ils sont illustrés à la figure 6.7



**Figure 6.6** Variation de  $(w_p^*)_{\rho=0}$  pour  $b/a=0.75$  avec différentes valeurs de  $h/a$ .



**Figure 6.7** Variation de  $(w_p^*)_{\rho=0}$  pour  $h/a=1.25$  avec différentes valeurs de  $b/a$ .

La figure 6.8 et 6.9 montrent les contraintes normales adimensionnelles sur la surface supérieure. Il est indiqué pour différentes valeurs pour  $h/a$  et  $b/a$ , respectivement. La distribution atteint ses valeurs maximales au centre du poinçon. Il diminue avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque et du rayon de la fondation.

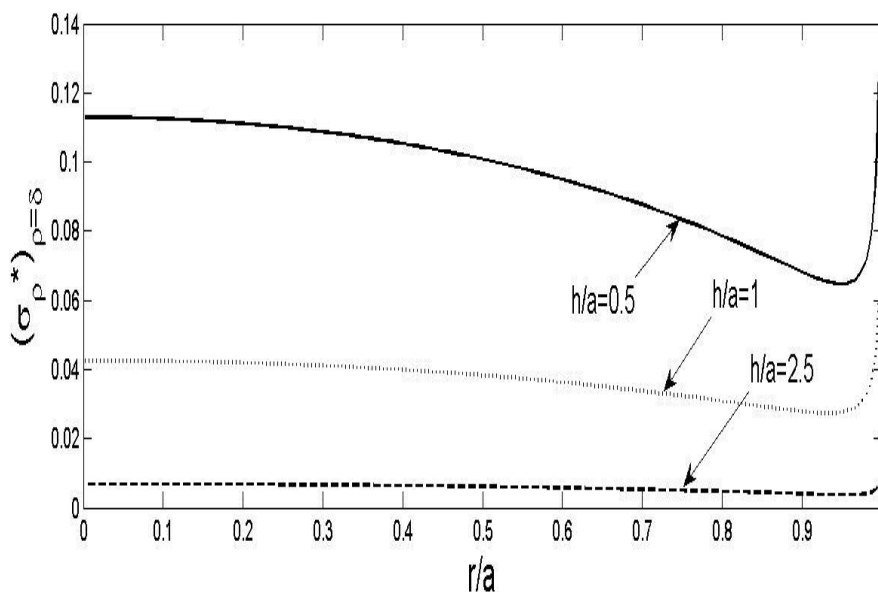


Figure 6.8 Variation de  $(\sigma_\rho^*)_{\rho=\delta}$  pour  $b/a=0.75$  avec différentes valeurs de  $h/a$ .

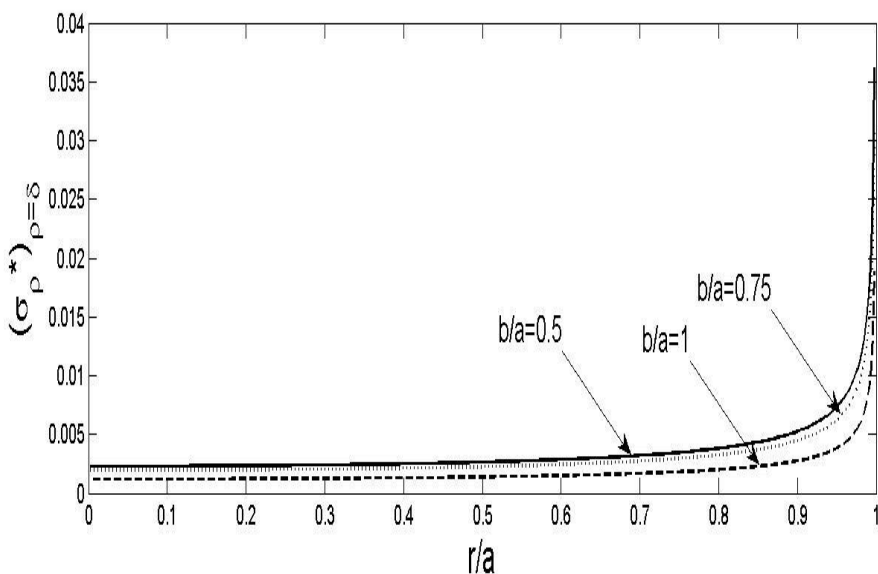


Figure 6.9 Variation de  $(\sigma_\rho^*)_{\rho=\delta}$  pour  $h/a=1.5$  avec différentes valeurs de  $b/a$ .

La distribution du déplacement adimensionnel au bord du poinçon est montrée aux figures 6.10 et 6.11 avec  $h/a$ ,  $b/a$ . Il augmente avec l'épaisseur de la plaque et diminue avec la diminution du rayon de la fondation.

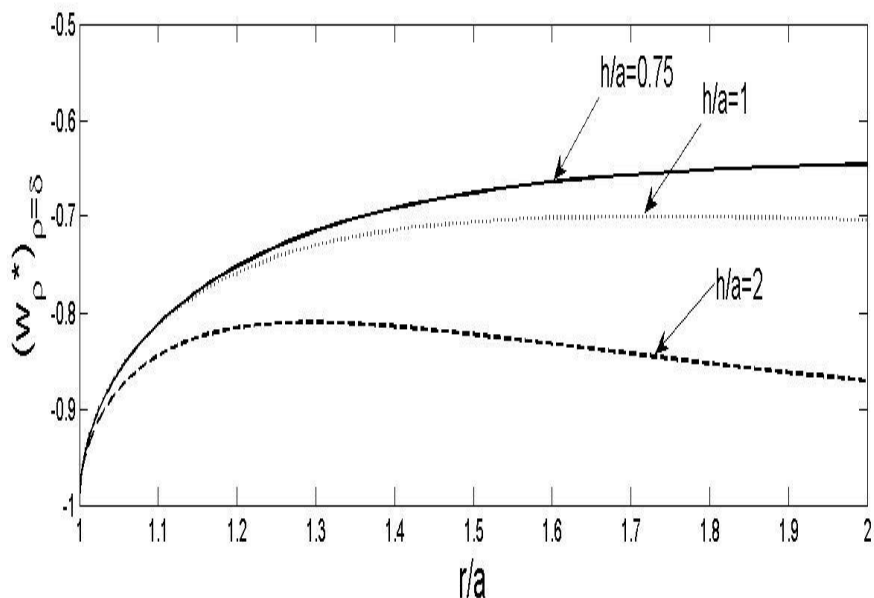


Figure 6.10 Variation de  $(w_p^*)_{\rho=\delta}$  pour  $b/a=0.75$  avec différentes valeurs de  $h/a$ .

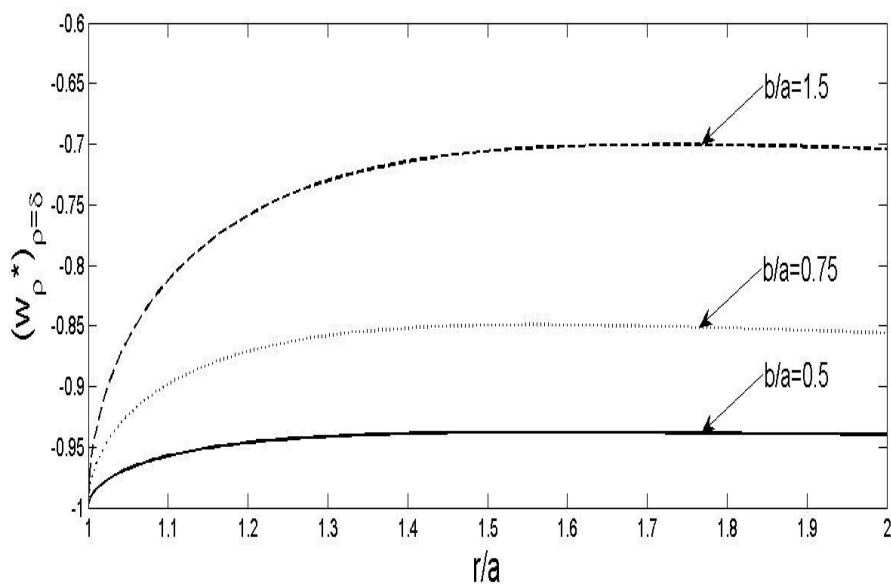
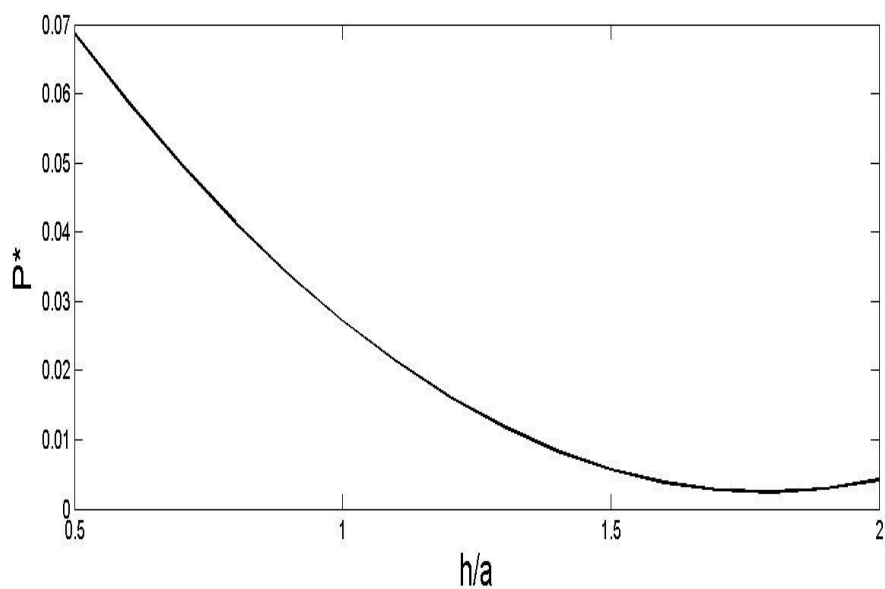
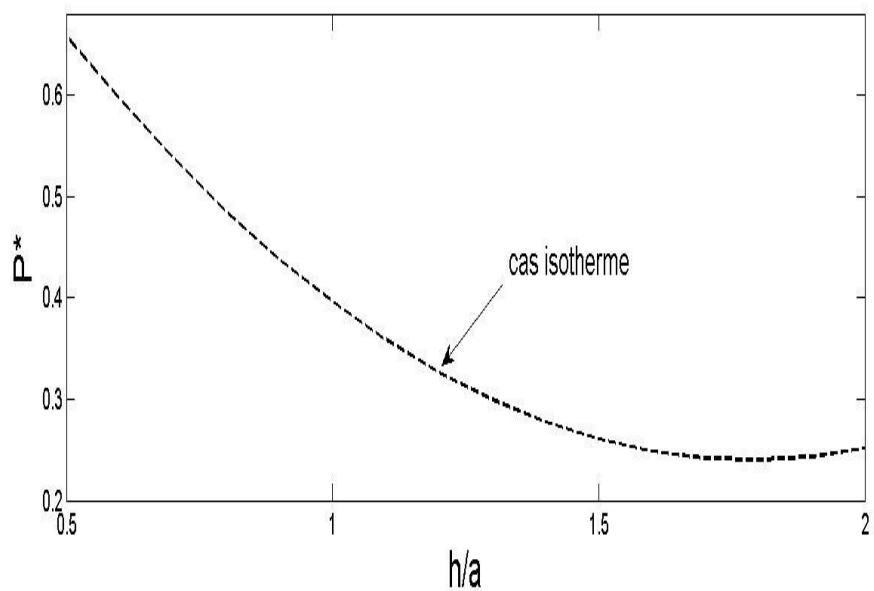


Figure 6.11 Variation de  $(w_p^*)_{\rho=\delta}$  pour  $h/a=1.5$  avec différentes valeurs de  $b/a$ .

La variation de la force axiale  $P^* = \frac{P}{4\varepsilon_0}$  appliquée au poinçon avec l'épaisseur de plaque et la fondation est mentionnée sur les figures 6.12 et 6.13. Il est à remarquer que la grandeur de la force  $P^*$  change avec l'épaisseur de la plaque et le rayon de la fondation.



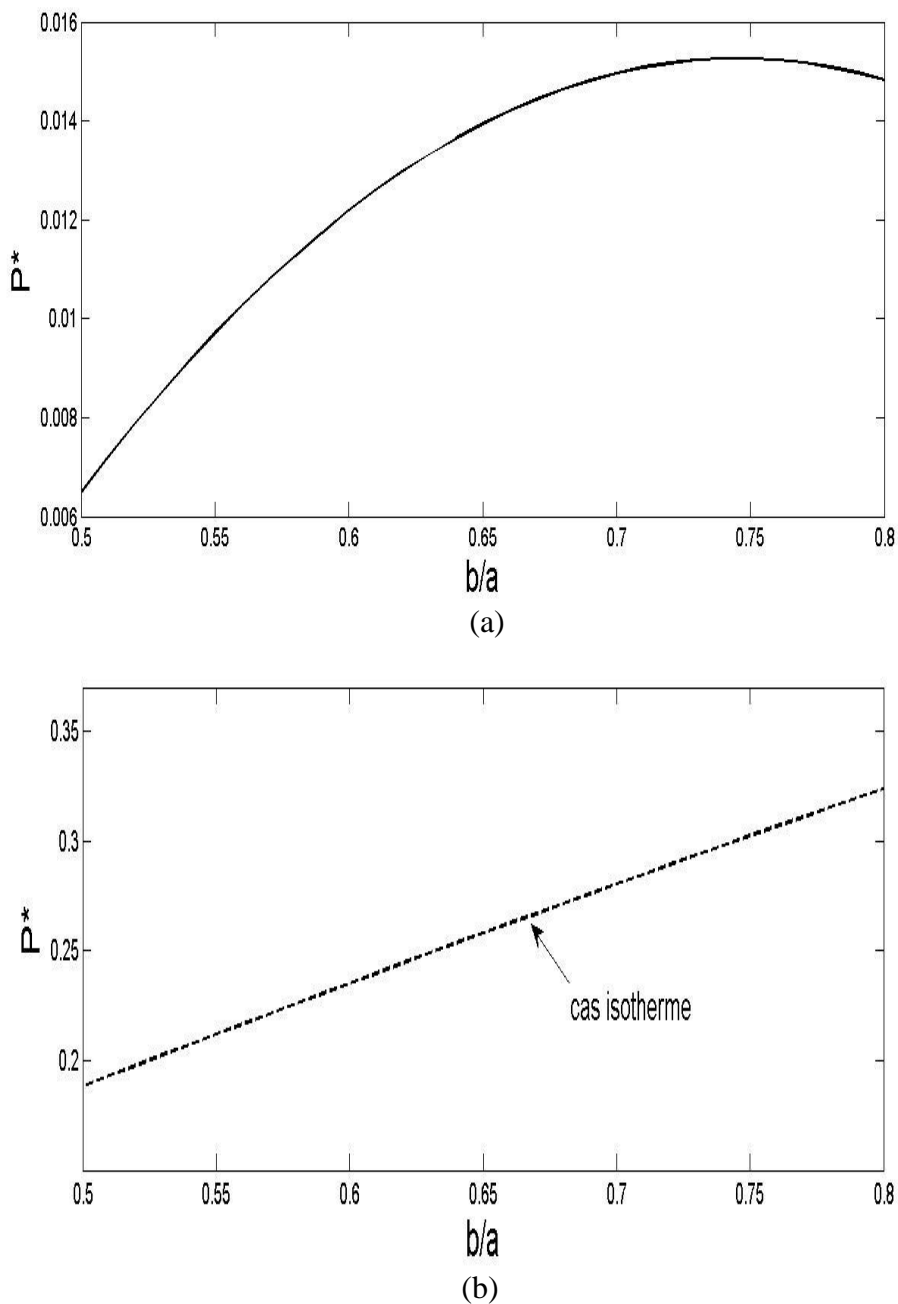
(a)



(b)

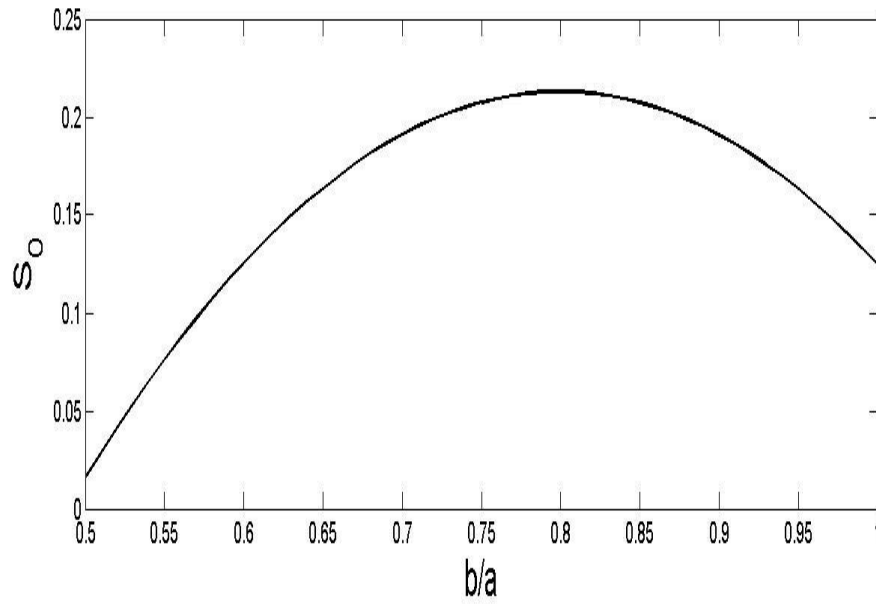
**Figure 6.12** Variation de  $P^*$  pour  $b/a=0.75$  en fonction de  $h/a$ .



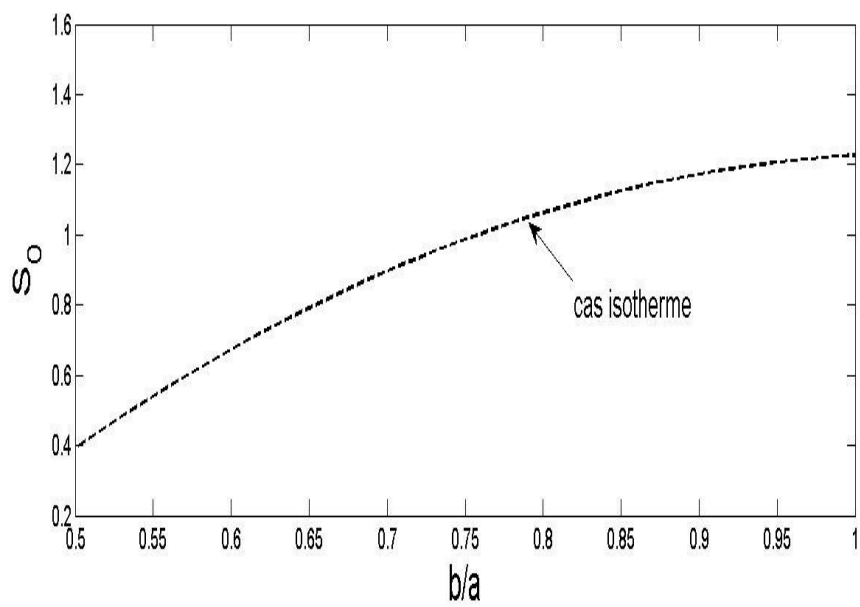


**Figure 6.13** Variation de  $P^*$  pour  $h/a=0.75$  en fonction de  $b/a$ .

Les figures 6.14-6.17 illustrent graphiquement la variation des facteurs de singularité de contrainte correspondant au problème étudié. Les grandeurs de  $S_0$  et  $S_h$  donnent une grande valeur avec une diminution de l'épaisseur de la plaque et une augmentation avec le rayon de la fondation. Les graphes obtenus sont validés avec le cas d'absence du flux de chaleur, il s'agit de cas isotherme et cela montre une bonne compatibilité avec ceux obtenus pour le problème de déformation élastostatique étudié précédemment.

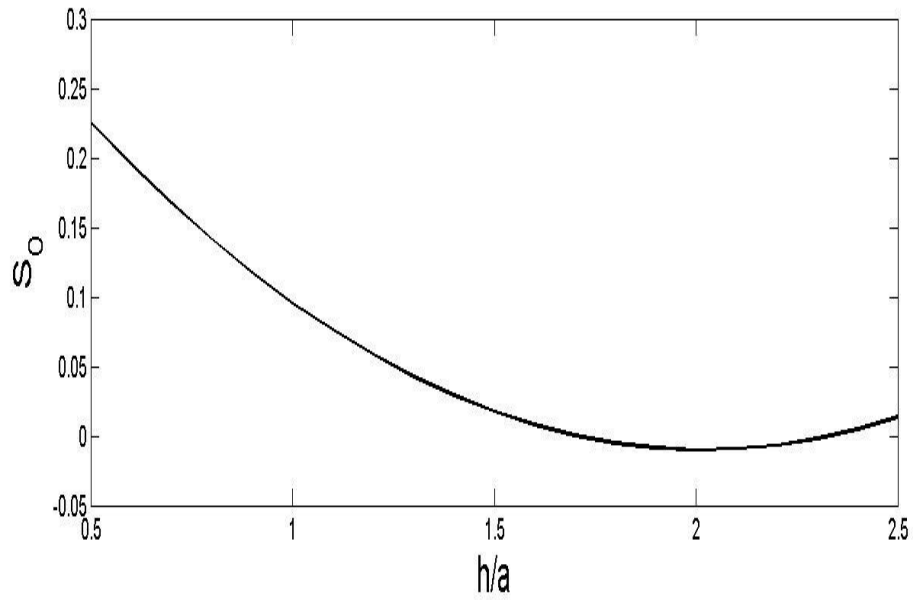


(a)

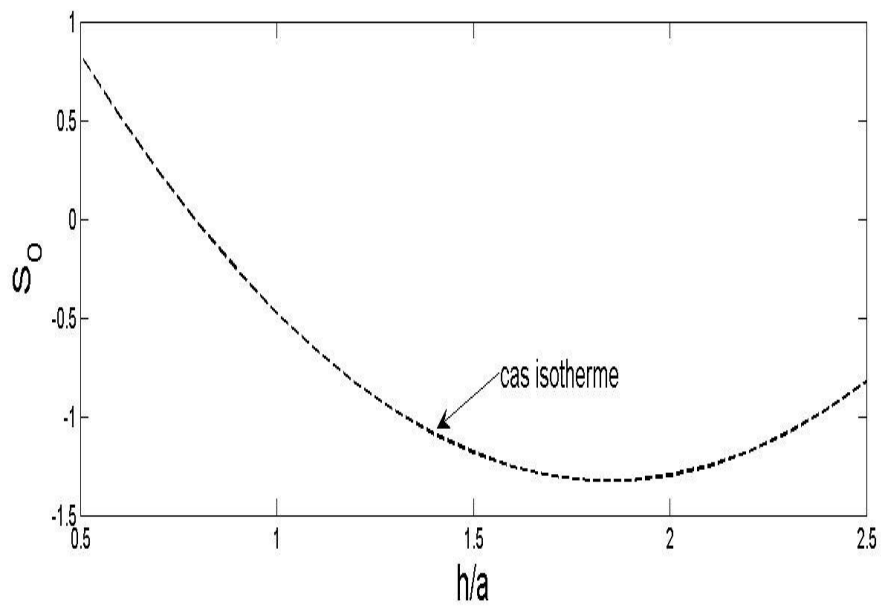


(b)

**Figure 6.14** Variation de  $S_0$  pour  $h/a=1.5$  en fonction de  $b/a$ .

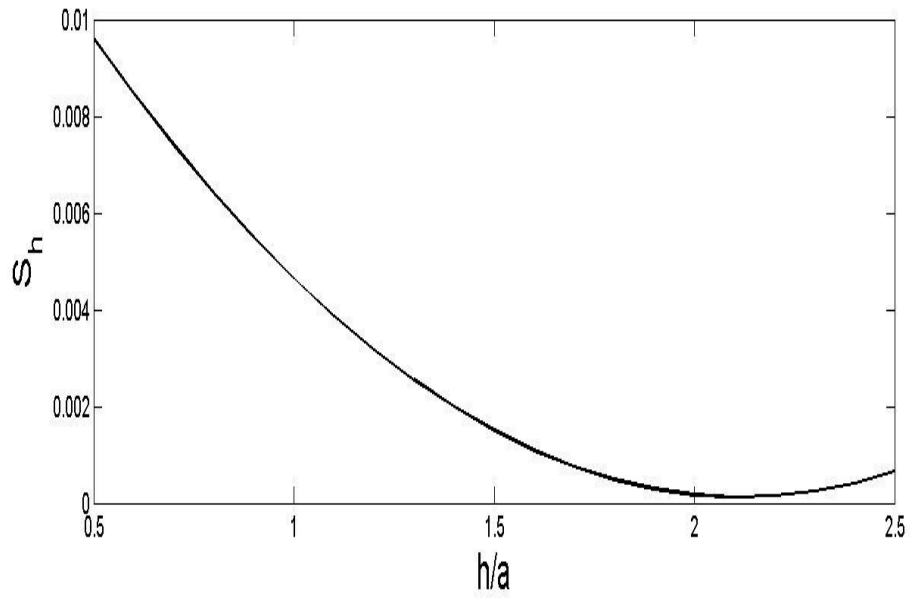


(a)

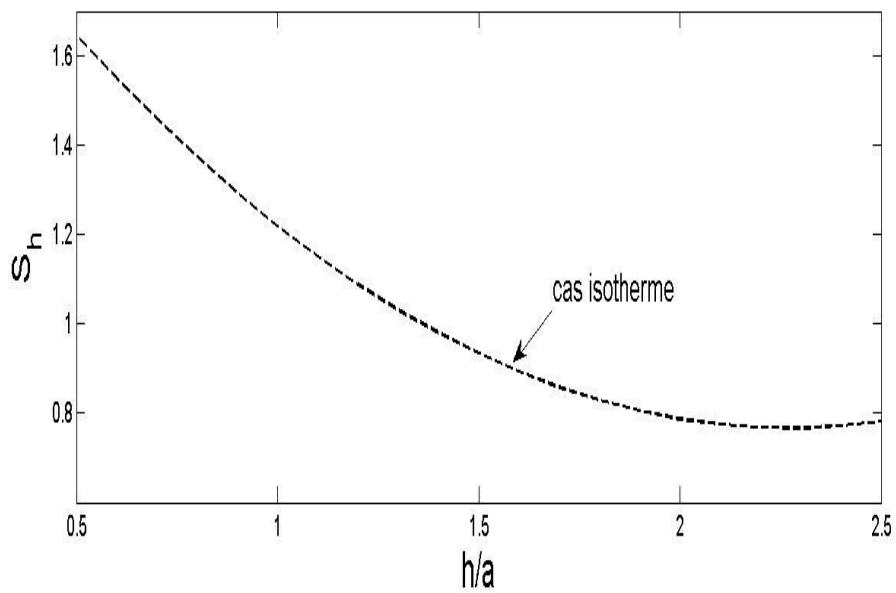


(b)

**Figure 6.15** Variation de  $S_0$  pour  $b/a=0.75$  en fonction de  $h/a$ .

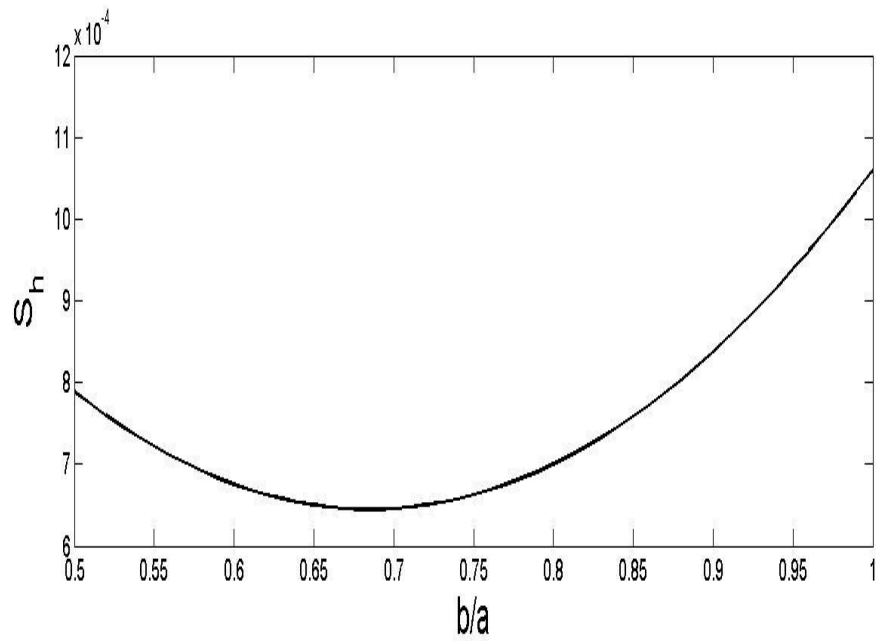


(a)

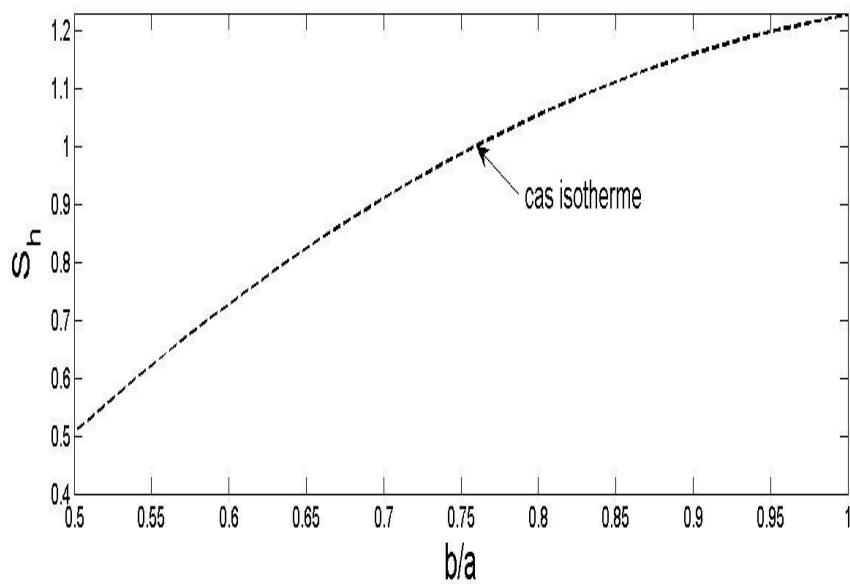


(b)

**Figure 6.16** Variation de  $S_h$  pour  $b/a=0.75$  en fonction de  $h/a$ .



(a)



(b)

Figure 6.17 Variation de  $S_n$  avec  $h/a=1.5$  en fonction de  $b/a$ .

## Conclusion

La solution du problème thermoélastique axisymétrique à l'interface du contact poinçon-plaque élastique est étudiée. Les résultats numériques de ce travail sont récapitulés comme suit

- La solution analytique a été obtenue en utilisant les coefficients de deux systèmes thermiques et thermoélastiques. Les systèmes algébriques ont été résolus avec différentes valeurs des paramètres du problème par la méthode de la troncation.
- Les effets de l'épaisseur de la plaque et du rayon du poinçon et celui de la fondation sur la température, le déplacement, la contrainte, la force axiale ainsi sur les facteurs de singularité de contrainte sont montrés.

L'analyse des graphiques obtenus est résumée comme suit

- La distribution de la température atteint ses valeurs maximales au centre du poinçon. Elle augmente avec la diminution de l'épaisseur de la plaque et l'augmentation du rayon de la fondation. On remarque qu'il devient infini au bord de la fondation où il diminue à différentes distances de celui-ci. La variation du flux dans le plan  $z/a=0$  devient infinie au voisinage de la fondation.
- La variation de la contrainte normale adimensionnelle  $(\sigma_{\rho}^*)_{\rho=0}$  pour  $h/b$  et  $a/b$ , obtient ses valeurs maximales au centre de la fondation. La contrainte a une valeur infinie pour  $r/a = b/a$ . Elle diminue lorsque l'épaisseur de la plaque augmente et que le rayon de la fondation diminue.
- Il est à noter que la distribution du déplacement adimensionnel  $(w_{\rho}^*)_{\rho=\delta}$  au bord de la fondation avec différentes valeurs de  $h/a$ , diminue avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque et la diminution du rayon de la fondation.
- La contrainte normale adimensionnelle dans le plan  $z = h/a$  obtient ses valeurs maximales au centre du poinçon. Il diminue avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque et du rayon de la fondation. Un comportement opposé est observé pour la distribution adimensionnelle du déplacement au bord du poinçon.

- La variation de la force axiale en fonction de l'épaisseur de la plaque et le rayon de la fondation est mentionnée également.
- La distribution des facteurs de singularité de contrainte du problème est illustrée graphiquement. Les facteurs de singularité de contrainte  $S_0$  et  $S_h$ , donnent une valeur maximale avec une diminution de l'épaisseur de la plaque et une augmentation avec le rayon de la fondation.
- Le résultat graphique illustre les effets de l'épaisseur de la plaque et du rayon de poinçon ainsi que celui de la fondation sur la force axiale et les facteurs de singularité de contrainte. Les graphes obtenus sont validés avec le cas isotherme et cela montre un bon accord avec ceux obtenus dans le chapitre précédent.

## **Conclusion Générale**



## Conclusion Générale

Cette thèse recense un certain nombre de résultats correspondants aux problèmes aux conditions aux limites auxquels sont ramenés les problèmes de contact étudiés. Les solutions des problèmes axisymétriques torsionnel et thermoélastique d'une plaque élastique épaisse reposant partiellement sur une fondation circulaire rigide ont été résolues à l'aide d'une méthode analytique basée sur la transformation intégrale de Hankel. Les travaux de recherche inclus dans cette thèse, nous ont permis d'effectuer une série de publication d'articles.

Le principe de la transformation intégrale est de travailler non plus dans l'espace réel, mais dans l'espace transformé en diminuant le nombre d'inconnues. Les inconnues sont projetées sur une base orthogonale de l'espace fonctionnel et la résolution est conduite sur l'équation transformée. Cette opération a pour but de dériver ou de diminuer le nombre de variables transformées de Hankel.

Un problème mécanique admettant une solution analytique, le choix d'une méthode de résolution doit être guidé par l'intuition qui incite à faire des hypothèses sur la forme des déplacements ou des contraintes, comme toute solution doit satisfaire les conditions aux limites du problème.

Les problèmes de contact, impliquant des corps déformables, est l'un des problèmes de base de la théorie de l'élasticité et la thermique. En effet, la concentration des efforts, la fatigue du matériau se produisent souvent dans la zone de contact entre éléments de construction. C'est pourquoi la zone de contact est classée zone critique.

Nous avons analysé, en premier lieu, le problème de déformation élastique d'une plaque épaisse reposant partiellement sur un support circulaire encastrée, la déformation de la plaque est due à une torsion exercée sur disque rigide. Cette recherche a permis de déterminer la solution du problème de contact élastique à l'aide de la méthode de transformation intégrale de Hankel, utilisant les fonctions auxiliaires de Boussinesq. Le problème des conditions aux limites doublement mixtes est réduit à un système d'équations intégrales duales. La solution obtenue est calculée à partir d'un système infini d'équations algébriques moyennant la formule de développement de Gegenbauer de la fonction de Bessel.

En deuxième lieu, nous avons donné une solution analytique du problème de déformation élastostatique de la plaque élastique reposant partiellement sur une fondation circulaire rigide sur laquelle est appliquée une force axiale. Par la même procédure de raisonnement que précédemment, la résolution de système d'équations intégrales duales se réduit à un système algébrique infini.

La thermoélasticité nous permet d'examiner plus profondément le mécanisme de la déformation et les procédés thermiques se produisant dans le milieu considéré. La détermination des contraintes de contact tenant compte des champs de températures sont importantes pour l'étude de la résistance et le choix correct des matériaux des pièces de machines et des éléments de construction dans leur zone d'interaction.

Afin de traiter le comportement thermoélastique par l'application de méthode utilisée, la solution de modèle de déformation thermoélastique par un poinçon de cette plaque a été déterminée. La solution analytique pour le champ axisymétrique dû à un champ thermique stationnaire et à un chargement mécanique est présentée séparément, puis regroupés pour donner le problème thermoélastique. Le problème formulé en termes d'équations intégrales satisfaisant les conditions aux limites doublement mixtes des champs élastiques et thermiques sont réduits à deux systèmes couplés d'équations intégrales duales. L'étape de la transformation consiste dans l'utilisation de la formule de Gegenbauer, ces dernières équations se transforment à des systèmes d'équations algébriques linéaires infinies, ce qui a permis de calculer les

grandeurs physiques du problème, à savoir la température, les contraintes et les déplacements dans le milieu élastique.

Les grandeurs physiques des problèmes résolus ont été évaluées et données explicitement en fonction des coefficients qui ont été déterminés de la résolution du système d'équations algébriques du problème par la méthode de la troncation. Les effets significatifs de quelques paramètres, tels que le rayon du disque, du poinçon, du support et celui que de la fondation ainsi l'épaisseur de la plaque, sur les contraintes, les déplacements et sur le champ thermique sont obtenus et interprétés. D'autres solutions de problèmes de contacts axisymétriques rencontrés dans en littérature sont également trouvées comme cas particuliers de notre présente étude.

La méthode analytique développée dans les problèmes étudiés décrit le phénomène de mécanique du contact axisymétrique dans les deux cas : élastique et thermoélastique. La procédure de calcul numérique est maintenue pour répandre à toutes les solutions d'équations intégrales ne change pas avec la nature du problème qu'il soit élastique, thermique ou thermoélastique. Le formalisme proposé permet de retrouver les expressions décrivant les contraintes, les déplacements et ainsi que les facteurs de singularité de contrainte pour les différents modes de sollicitation. Ce qui caractérise d'une manière substantielle la méthode de l'étude proposée dans cette thèse.

### **Perspective du travail réalisé**

La méthode de résolution des problèmes proposés dans cette thèse est d'une grande utilité théorique et pratique puisqu'elle réduit directement les équations intégrales correspondantes à des systèmes algébriques. Nous envisageons d'étudier autres problèmes de déformation thermoélastique aux conditions limites doublement mixtes. Ces problèmes peuvent être aussi traités pour un matériau transversalement isotrope dans les cas statique et dynamique. A titre d'indication, l'un des problèmes à résoudre par la méthode utilisée et le suivant '*Déformation Thermoélastique par un Poinçon Rigide d'une Plaque Epaisse Reposant sur un Appui ayant un Orifice Annulaire*'.

## **Références Bibliographiques**

## Références Bibliographiques

- [1] Reissner E., Sagoci H.F., 1944, Forced torsion oscillation of a half-space-I, *Journal of Applied Physics*, 15: 652-654.
- [2] Florence A.L., 1961, Two contact problems for an elastic layer, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 14: 453-459.
- [3] Sih G.C., Chen E.P., 1971, Torsion of a laminar composite de bonded over a penny-shaped area, *Journal of the Franklin Institute*, 293:251-261.
- [4] Smelyanskaya L.M., Tokar A.S., 1971, Strength of a composite elastic layer weakened by a plane circular crack, *Soviet Applied Mechanics*, 7: 1119-1125.
- [5] Low R.D., 1972, On the torsion of elastic half-space with embedded penny-shaped flaws, *Journal of Applied Mechanics*, 72: 786-790.
- [6] Dhawan G.K., 1974, On the torsion of elastic half-space with penny shaped-crack, *Defence Science Journal*, 24:15-22.
- [7] Tamate O., Saito T., 1975, On the twisting of two elastic layers bonded to a rigid foundation, *Translations of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 341: 33-40 .
- [8] Singh B.M., Dhaliwal R.S., 1977, Torsion of a elastic layer by two circular dies, *International Journal of Engineering Science*, 15:171-175.
- [9] Gazetas G., 1981, Torsional displacements and stresses in non-homogeneous soil, *Geotechnique*, 31:487-496.
- [10] Hara T., Akiyama T., Shibuya T., Koizumi T., 1989, An Axisymmetric torsion problem of an elastic layer on a rigid foundation with a cylindrical hole, *Translations of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 55: 1339-1346 .
- [11] Erguven M.E., 1991, Torsion of two bonded layers by a rigid disc, *Meccanica*, 26: 117-123.
- [12] Pak R.Y.S., Saphores J.D.M., 1991, Torsion of a rigid disc in a half-space, *International Journal of Engineering Science*, 29:1-12 .
- [13] Bacci A., Bennati S., 1996, An approximate explicit solution for the local torsion of an elastic layer, *Mechanics of Structures and Machines*, 24: 21-38.

- [14] Li C., Zou Z., 1998, Local stress field for torsion of penny-shaped crack in a functionally graded material, *International Journal of Fracture*, 91:17-22.
- [15] Matysiak S.J., Kulchytsky-Zyhailo R., Perkowski D.M., 2011, Reissner-Sagoci problem for a homogeneous coating on a functionally graded half-space, *Mechanics Research Communications*, 38: 320-325.
- [16] Madani F., Kebli B., 2017, Axisymmetric torsion of an internally cracked elastic medium by two embedded rigid discs, *Mechanics and Mechanical Engineering*, 21: 363-377.
- [17] Madani F., Kebli B., 2019, Axisymmetric torsion of an elastic layer sandwiched between two elastic half-spaces with two interfaced cracks, *Studia Geotechnica et Mechanica*, 41: 57-66.
- [18] Lebedev N.N., Ufliand Ia.S., 1958, Axisymmetric contact problem for an elastic layer, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 22: 422-450.
- [19] Zakorko N.V., 1974, The axisymmetric strain of an elastic layer with a circular line of separation of the boundary conditions on both faces, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 38: 113-121.
- [20] Dhaliwal R.S., Singh B. M., 1977, Axisymmetric contact problem for an elastic layer on a rigid foundation with a cylindrical hole, *International Journal of Engineering Science*, 15: 421-428.
- [21] Wood D.M., 1984, Circular load on elastic layer, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 8: 503-509.
- [22] Gecit M R., 1987, Analysis of tensile test for a cracked adhesive layer pulled by rigid cylinders, *International Journal of Fracture*, 32: 241-256.
- [23] Gecit M R., 1988, Axisymmetric pull-off test for a cracked adhesive layer, *Journal of Adhesion Science and Technology*, 2: 349-362.
- [24] Sakamoto M., Hara T., Shibuya T., Koizumi T., 1990, Indentation of a penny-shaped crack by a disc-shaped rigid inclusion in an elastic layer, *JSME International Journal*, 33: 425-430.
- [25] Hara T., Akiyama T., Shibuya T., Koizumi T., 1990, An axisymmetric contact problem of an elastic layer on a rigid base with a cylindrical hole, *JSME International Journal*, 33: 461-467.
- [26] Sakamoto M., 2003, An elastic layer with a penny-shaped crack subjected to internal pressure, *JSME International Journal Series A*, 46: 10-14.

- [27] Sakamoto M., Kobayashi K., 2004, The axisymmetric contact problem of an elastic layer subjected to a tensile stress applied over a circular region, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, 53: 27-36.
- [28] Sakamoto S., Kobayashi K., 2005, Axisymmetric indentation of an elastic layer on a rigid foundation with a circular hole, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 49: 279-286.
- [29] Kebli B., Baka Z., 2019, Annular crack in an elastic half-space. *International Journal of Engineering Science*, 134: 117-147.
- [30] Dhaliwal R.S., 1966, Mixed boundary value problem of heat conduction for infinite slab, *Applied Scientific Research*, 16: 226-240.
- [31] Dhaliwal R.S., 1967, An axisymmetric mixed boundary value problem for a thick slab, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 15:98-106.
- [32] Mehta B.R.C., Bose T.K., 1983, Temperature distribution in a large circular plate heated by a disk heat source, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 26: 1093-1095.
- [33] Dhaliwal R.S., 1971, The steady-state thermoelastic mixed boundary-value problem for the elastic layer, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 7: 295-302.
- [34] Wadhawan M.C., 1973, Steady state thermal stresses in an elastic layer, *Pure and Applied Geophysics*, 104: 513-522.
- [35] Negus K.J., Yovanovich M., Thompson J.C., 1988, Constriction resistance of circular contacts on coated surfaces: Effect of boundary conditions, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2: 158-164.
- [36] Lemczyk T.F., Yovanovich M.M., 1988, Thermal constriction resistance with convective boundary conditions-1 half-space contacts, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 31: 1861-1872.
- [37] Lemczyk T.F., Yovanovich M.M., 1988, Thermal constriction resistance with convective boundary conditions-2 half-space contacts, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 31: 1873-1988.
- [38] Rao T.V., 2004, Effect of surface layers on the constriction resistance of an isothermal spot. Part I: Reduction to an integral equation and numerical results, *Heat and Mass Transfer*, 40: 439-453.
- [39] Rao T.V., 2004, Effect of surface layers on the constriction resistance of an isothermal spot. Part II: Analytical results for thick layers, *Heat and Mass Transfer*, 40: 455-466.

- [40] Abdel-Halim A.A., Elfalaky A., 2005, An internal penny-shaped crack problem in an infinite thermoelastic solid, *Journal of Applied Sciences Research*, 1: 325-334.
- [41] Elfalaky A., Abdel-Halim A.A., 2006, Mode I crack problem for an infinite space in thermoelasticity, *Journal of Applied Sciences Research*, 6: 598-606.
- [42] Li X.F., Lee K.Y., 2015, Effect of heat conduction of penny-shaped crack interior on thermal stress intensity factors, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 91: 127-134.
- [43] Kebli B., Baka Z., 2020, Annular crack in a thermoelastic half-space. *Journal of Thermal Stresses*. 43, 1379-1414.
- [44] Bui H.D., 1993, *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*, Eyrolles, Paris, 229.
- [45] Wielgosz C., 1999, *Résistance des matériaux*, Ellipses, Edition Marketing SA, Paris, 312.
- [46] François D., Pineau A., Zaoui A., 1992, *Elasticité et plasticité*, Hermès, Paris, 505.
- [47] Quéré Y., 1988, *Physique des matériaux*, Ellipses, Copyright, 463.
- [48] Timoshenko S., 1972, *Résistance des matériaux*, Dunod, Paris, 417.
- [49] Timoshenko S., Goodier J.N., 1951, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York, 506.
- [50] Seghir K., 2010, *Etude du problème de la thermoélasticité dans un corps à symétrie axiale*, Thèse de Doctorat, Université de Batna, Département de Génie Mécanique, Alger, 93.
- [51] Sacadura J.F., 1980, *Initiation aux transferts thermiques*, Paris, 445.
- [52] Sacadura J.F., 2009, *Initiation aux transferts thermiques*, Editions TEC&DOC, Rue Lavoisier, Paris, 439.
- [53] Lemaitre J., Chaboche J.L., 1996, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 541.
- [54] Shixiang M.A., 2005, *Propagation de fissure en mode mixte dans un milieu élastique*, Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal, Département de Génie Mécanique, Clermont II, 317.
- [55] Recho N., 1995, *Rupture par fissuration des structures*, Hermès, Paris, 349.
- [56] Guerrache F., 2011, *Problème de déformation thermoélastique d'une plaque épaisse fissurée*, Mémoire de Magister, Ecole Nationale Polytechnique, Ecole Doctorale : Mécanique et Ingénierie des Systèmes, Département de Génie Mécanique, Alger, 91.
- [57] Labbes R., 1980, *Introduction à la mécanique de la rupture*, Pluralis, Dunod, Paris.



- [58] Rahman M., 1995, A note on the polynomial solution of a class of dual integral equations arising in mixed boundary value problems of elasticity, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 46:107-121.
- [59] Spiegel M.R., 1980, *Analyse de Fourier*, ISBN, Paris, 195.
- [60] Parodi M., 1966, *Mathématiques appliquées à l'art de l'ingénieur*, Société d'édition d'Enseignement Supérieur Sorbonne, Paris, 4 : 379.
- [61] Nikiforov A., Ouvarov V., 1983, *Fonctions spéciales de la physique mathématique*, Editions MIR, Moscou, 388.
- [62] Viot P., 2003, *Méthodes d'analyse numérique, Cours du DEA, Modélisation Dynamique et Statistique des Systèmes Complexes*, 108.
- [63] Rappaz J., Picasso M., 1983, *Introduction à l'analyse numérique*, Edition Preses Polytechniques et Universitaires Romandes, Metis Lyon Tech , 478.
- [64] Hayek S.I., 2001, *Advanced mathematical methods in science and engineering*, Marcel Dekker, New York, 737.
- [65] Duffy D.G., 2008, *Mixed boundary value problems*, Boca Raton, Chapman Hall/CRC. 457.
- [66] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M., 2007, *Table of integrals- series and products*, Academic Press, N. Y, 1221.
- [67] Hetnarski R.B., Eslami M.R., 2009, *Thermal stresses-advanced theory and applications*, Springer, Dordrecht, 553.

# **Annexes**

# Annexes

## Annexe 1

### 1.1 L'équation d'équilibre de problème de torsion

Le domaine de déformation élastique est décrit par la loi de comportement élastique linéaire de Hooke en utilisant l'hypothèse d'isotropie élastique qui est généralement bien vérifiée pour les matériaux métalliques. En négligeant les forces volumiques agissant sur le milieu élastique, les équations d'équilibre en déplacements dans le cas de la déformation axisymétrique s'écrivent

$$2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u\right) - (3-4\nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r}\right) + (1-2\nu)\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \theta}\right) + (3-4\nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + 2(1-\nu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + (1-2\nu)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial z}\right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (1-2\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Pour le type de problème de torsion axisymétrique, les composantes du déplacement  $u$  et  $w$  sont nulles, ce qui ramène l'équation d'équilibre en fonction de  $v$ . Dans ce cas, le système des équations d'équilibre (A.1)-(A.3) se simplifie et s'obtient par

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{A.4})$$

### 1.2 Calcul d'intégration

En effet

$$\lambda J_1(\lambda r) \rightarrow \lambda r J_0(\lambda r)$$
$$M_n(\lambda x) \rightarrow J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda x}{2}\right) J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\lambda x}{2}\right) \quad (\text{A.5})$$

alors

$$M_n(\lambda x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda x}{2}\right) J_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{\lambda x}{2}\right) \right] \quad (\text{A.6})$$

En tenant compte de la formule intégrale pour les fonctions de Bessel : ([66], Eq 6. 522. 11) et à l'aide d'une intégration par partie précédente, ce qui permet d'écrire

$$\int_0^{\infty} \lambda M_n(\lambda x) J_1(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} -\frac{2 T_{2n+1}(r/x)}{\pi \sqrt{x^2 - r^2}}, & r < x \\ 0, & r > x \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

### 1.3 Sinus et cosinus d'angles multiples

En tenant compte de la formule intégrale ([66], Eq 2. 538)

$$\int \cos(ax) \cos^p(x) dx = \frac{1}{p+a} \left\{ \cos^p(x) \sin(ax) + p \int \cos^{p-1}(x) \cos((a-1)x) dx \right\} \quad (\text{A.8})$$

Pour  $p = 2$  et  $a = 2n + 1$ , le terme  $\cos^p(x) \sin(ax)$  s'annule lorsque  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , tandis que le deuxième coté sera calculé après avoir utilisé la formule trigonométrique

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \quad (\text{A.9})$$

Alors la solution de cette intégrale sera

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)x) \cos^2(x) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \quad (\text{A.10})$$

### 1.4 Expression asymptotique de terme $\int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda x) X_m(\lambda x) d\lambda$

Expression asymptotique de  $M_n(\lambda x) X_m(\lambda x)$  en tenant compte de l'équivalent à l'infini de fonction de Bessel

On a

$$X_m(\lambda x) = J_m^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right) \quad (\text{A.11})$$

si

$$J_m\left(\frac{\lambda x}{2}\right) = \left(\frac{2}{\pi \lambda x / 2}\right)^{1/2} \left[ \cos\left(\left(\frac{\lambda x}{2}\right) - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{A.12})$$

donc

$$J_m^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right) = \left(\frac{2}{\pi \lambda x / 2}\right) \left[ \cos^2\left(\left(\frac{\lambda x}{2}\right) - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{A.13})$$

Alors on trouve

$$J_m^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right) = \left(\frac{2}{\pi \lambda x}\right) [1 + \sin(\lambda x - n\pi)] \quad (\text{A.14})$$

Il vient que

$$J_m^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{2}{\pi \lambda x}\right) [1 + (-1)^m \sin(\lambda x)] \quad (\text{A.15})$$

D'autre part

$$M_n(\lambda x) = J_{n+1/2}\left(\frac{\lambda x}{2}\right) J_{-(n+1/2)}\left(\frac{\lambda x}{2}\right) \quad (\text{A.16})$$

On suit les mêmes étapes que précédemment. On obtient l'expression asymptotique de  $M_n(\lambda x)$  suivante

$$M_n(\lambda x) \rightarrow \frac{2}{\pi \lambda x} \sin(\lambda x) \quad (\text{A.17})$$

Le produit de la fonction  $M_n(\lambda x)X_m(\lambda x)$  peut être asymptotiquement calculé comme suit

$$M_n(\lambda x)X_m(\lambda x) \rightarrow \frac{4}{(\pi \lambda x)^2} \left[ \sin(\lambda x) + \frac{(-1)^m}{2} (1 - \cos(2\lambda x)) \right] \quad (\text{A.18})$$

Intégration  $\int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda x)X_m(\lambda x)d\lambda$  par l'introduction des fonctions de cosinus et sinus

respectivement. Enfin, la formule approximative est obtenue

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} M_n(\lambda x) X_m(\lambda x) d\lambda \approx -\frac{4}{\pi^2 x^2} \left\{ \frac{\sin \lambda_0 x}{\lambda_0} - xci(\lambda_0 x) - \frac{(-1)^m}{2} \left[ \frac{1 - \cos 2\lambda_0 x}{\lambda_0} - 2xsi(2\lambda_0 x) \right] \right\} \quad (\text{A.19})$$

## Annexe 2

### 2.1 Expression de la force axiale

Pour établir l'expression de la force axiale de poinçon  $P$  qui s'exprime par la formule suivant

$$P = -2\pi \int_0^a (\sigma_z)_{z=h} r dr \quad (\text{A.20})$$

On utilise l'exprime de contrainte suivant

$$(\sigma_z)_{z=h} = \begin{cases} 0, & r > a \\ -\frac{2}{\pi} H(a-r) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{T_{2n+1}(r/a)}{r\sqrt{a^2-r^2}}, & r < a \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

En tenant compte du fait que

$$T_{2n+1}(r/a) = \cos[(2n+1)\text{arc cos}(r/a)] \quad (\text{A.22})$$

En injectant  $T_{2n+1}(r/a)$  dans l'équation (A.21), nous trouvons

$$I = \int_0^a \frac{\cos[(2n+1)\text{arc cos}(t^2/a^2)]}{\sqrt{1-(t^2/a^2)}} \frac{dt}{a} \quad (\text{A.23})$$

Ensuite, effectuant le changement de variable pour le calcul de cette intégrale comme suit

$$t = \frac{r}{a} \Rightarrow dt = \frac{dr}{a} \begin{cases} r = 0, & t = 0 \\ r = a, & t = 1 \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

On aura

$$I = \int_0^1 \frac{\cos[(2n+1)\text{arc cost}]}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (\text{A.25})$$

Choisissons le changement de variable suivant

$$x = \text{arc cost} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \begin{cases} t = 0, & x = \frac{\pi}{2} \\ t = 1, & x = 0 \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

En introduisant ces nouvelles variables dans l'intégrale (A.25) et on intègre le résultat selon la variable  $x$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ ; on trouve

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos[(2n+1)x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos[(2n+1)x] dx \\ &= \left[ \frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin[(2n+1)\pi/2]}{(2n+1)} \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Finalement, nous ramenons l'expression de la force axiale de poinçon  $P$  à la forme simple

$$P = \frac{4}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \alpha_n \quad (\text{A.28})$$

## 2.2 Facteurs de singularité de contrainte du problème de l'élastostatique

En effet

$$S_0 = \lim_{r \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi(b-r)} \eta (\sigma_z)_{z=0} \quad (\text{A.29})$$

On porte l'expression de  $(\sigma_z)_{z=0}$  dans l'équation (A.29), on aura

$$S_0 = \lim_{r \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi(b-r)} \left[ \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{T_{2n+1}(r/b)}{r \sqrt{(b+r)(b-r)}} \right] \quad (\text{A.30})$$

Il en résulte de ce calcul que l'équation (A.30) devient

$$S_0 = \lim_{r \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi} \left[ \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{T_{2n+1}(r/b)}{r \sqrt{(b+r)}} \right] \quad (\text{A.31})$$

Après simplification

$$S_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left[ \frac{T_{2n+1}(1)}{b} \right] \quad (\text{A.32})$$

Finalement, l'expression de facteur de singularité de contrainte prend la forme

$$S_0 = \frac{2}{b\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \quad (\text{A.33})$$

De la même manière, on établit la relation

$$S_h = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \quad (\text{A.34})$$

### Annexe 3

#### 3.1 Système d'équilibre du problème thermoélastique

Pour établir le système d'équilibre du problème thermoélastique, on utilise les trois systèmes d'équations suivants

- ✓ L'équation de la loi de comportement

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} - \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha T \delta_{ij} \quad (\text{A.35})$$

- ✓ L'équation de cinématique (l'équation de Navier)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{A.36})$$

- ✓ L'équation d'équilibre

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (\text{A.37})$$

En injectant la loi de comportement et les équations de déformations dans les équations d'équilibres, on calcule la divergence du tenseur des contraintes.

On a successivement

$$\sigma_{ij,j} = \lambda (u_{k,k} \delta_{ij})_{,j} + G u_{i,jj} + G u_{j,ij} - \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha T \delta_{ij} \quad (\text{A.38})$$

Dans le membre de droite de cette dernière relation, le premier terme en facteur de  $\lambda$  n'est autre que le gradient de la divergence (comme le dernier en facteur de  $G$ ). Le second terme en fonction de  $G$  est le Laplace vectoriel.



On a donc

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} = (\lambda + G) \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u}) + G \overrightarrow{\Delta} \vec{u} - \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha T \delta_{ij} \quad (\text{A.39})$$

en tenant compte du fait que

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{u} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u}) - \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{u} \quad (\text{A.40})$$

on obtient l'équation de Navier

$$(\lambda + 2G) \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{u}) - G \overrightarrow{\operatorname{rot}} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{u} - \frac{E}{(1-2\nu)} \alpha T \delta_{ij} = 0 \quad (\text{A.41})$$

Ce sont les équations en déplacements auxquelles il faut ajouter les conditions aux limites (sur ces déplacements ou sur les contraintes)

$$(\lambda + 2G) \left[ u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{1}{r^2} u \right] - (\lambda + 3G) \frac{1}{r^2} v_{,\theta} + (\lambda + G) \left( \frac{1}{r} v_{r\theta} + w_{,zr} \right) + G \left( \frac{1}{r^2} u_{,\theta\theta} + u_{,zz} \right) = E \frac{\alpha}{(1-2\nu)} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{A.42})$$

$$(\lambda + G) \frac{1}{r} (u_{,\theta\theta} + w_{,zz}) + (\lambda + 3G) \frac{1}{r^2} u_{,\theta} + (\lambda + 2G) \frac{1}{r^2} v_{,\theta\theta} + G \left( v_{,rr} + \frac{1}{r} v_{,r} - \frac{1}{r^2} v + v_{,zz} \right) = E \frac{\alpha}{(1-2\nu)} \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (\text{A.43})$$

$$(\lambda + G) \left( u_{,rz} + \frac{1}{r} u_{,z} + \frac{1}{r} v_{,\theta r} \right) + (\lambda + 2G) w_{,zz} + G \left( w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta} \right) = E \frac{\alpha}{(1-2\nu)} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{A.44})$$

Dans un milieu bidimensionnel, le système des équations d'équilibre dans le cas axisymétrique devient

$$(\lambda + 2G) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + (\lambda + G) \frac{\partial w}{\partial z} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = E \frac{\alpha}{(1-2\nu)} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{A.45})$$

$$(\lambda + G) \left( \frac{\partial u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = E \frac{\alpha}{(1-2\nu)} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{A.46})$$

En divisant les deux équations (A.45) et (A.46) par  $(\lambda + G)$  on aura

$$2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + (1-2\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial r \partial z} = 2(1+\nu) \alpha \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{A.47})$$

$$(1-2\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) = 2(1+\nu) \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{A.48})$$

avec,  $\chi = 3 - 4\nu$

Finalement, le système des équations d'équilibre thermoélastique s'écrit

$$(1 + \chi) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right] + (-1 + \chi) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 4(1 + \nu) \alpha \frac{\partial T}{\partial r} \quad (\text{A.49})$$

$$(-1 + \chi) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + (1 + \chi) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} + \frac{\partial u}{r \partial z} \right] = 4(1 + \nu) \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{A.50})$$

### 3.2 Résolution de système d'équilibre thermoélastique du problème

$$-\lambda^2 (1 + \chi) U + (-1 + \chi) U'' - 2\lambda W' = -4(1 + \nu) \alpha \lambda T \quad (\text{A.51})$$

$$2\lambda U' - \lambda^2 (-1 + \chi) W + (1 + \chi) W'' = 4(1 + \nu) \alpha \lambda T' \quad (\text{A.52})$$

A. On cherche la solution homogène des équations (A.51) et (A.52) en utilisant les étapes suivantes

En dérivant l'équation (A.52), on aura

$$2\lambda U'' - \lambda^2 (-1 + \chi) W' + (1 + \chi) W''' = 0 \quad (\text{A.53})$$

La dérivée seconde de l'équation (A.52) donne

$$2\lambda^3 \frac{(1 + \chi)}{(-1 + \chi)} U + \lambda^2 \left[ \frac{4}{(-1 + \chi)} - (-1 + \chi) \right] W' + (1 + \chi) W''' = 0 \quad (\text{A.54})$$

On obtient la dérivée de l'équation (A.54)

$$2\lambda^3 \frac{(1 + \chi)}{(-1 + \chi)} U' + \lambda^2 \left[ \frac{4}{(-1 + \chi)} - (-1 + \chi) \right] W'' + (1 + \chi) W^{IV} = 0 \quad (\text{A.55})$$

En éliminant l'expression de  $U'$  d'équation (A.55) on aura

$$\lambda^2 \frac{(1 + \chi)}{(-1 + \chi)} \left[ \lambda^2 (-1 + \chi) W - (1 + \chi) W'' \right] + \lambda^2 \left[ \frac{4}{(-1 + \chi)} - (-1 + \chi) \right] W'' + (1 + \chi) W^{IV} = 0 \quad (\text{A.56})$$

On remarque que l'équation (A.56) s'écrit sous la forme

$$W^{IV} - 2\lambda^2 W'' + \lambda^4 W = 0 \quad (\text{A.57})$$

L'équation (A.55) s'obtient de l'équation caractéristique  $p^4 - 2\lambda^2 W'' + \lambda^4 W = 0$ . Cette équation admet deux solutions doubles ainsi

$$W_h(\lambda, z) = \left[ (C_0(\lambda) + C_1(\lambda)z) \right] e^{-\lambda z} + \left[ (C_2(\lambda) + C_3(\lambda)z) \right] e^{\lambda z} \quad (\text{A.58})$$

Les dérivées de la fonction  $W$  sont

$$W' = (-\lambda C_1 + C_2 - \lambda C_2 z) e^{-\lambda z} + (\lambda C_3 + C_4 + \lambda C_4 z) e^{\lambda z} \quad (\text{A.59})$$

$$W'' = (\lambda^2 C_1 - 2\lambda C_2 + \lambda^2 C_2 z) e^{-\lambda z} + (\lambda^2 C_3 + 2\lambda C_4 + \lambda^2 C_4 z) e^{\lambda z} \quad (\text{A.60})$$

$$W''' = (-\lambda^3 C_1 + 3\lambda^2 C_2 - \lambda^3 C_2 z) e^{-\lambda z} + (\lambda^3 C_3 + 3\lambda^2 C_4 + \lambda^3 C_4 z) e^{\lambda z} \quad (\text{A.61})$$

En injectant les expressions  $W$  et  $W''$  dans (A.54), on trouve la valeur  $U_h$

$$U_h(\lambda, z) = \left[ C_0(\lambda) + C_1(\lambda) \left( z - \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{-\lambda z} + \left[ C_2(\lambda) + C_3(\lambda) \left( z + \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{\lambda z} \quad (\text{A.62})$$

Finalement, la solution homogène du système d'équilibre thermoélastique est donnée

$$U_h(\lambda, z) = \left[ C_0(\lambda) + C_1(\lambda) \left( z - \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{-\lambda z} + \left[ C_2(\lambda) + C_3(\lambda) \left( z + \frac{\chi}{\lambda} \right) \right] e^{\lambda z} \quad (\text{A.63})$$

$$W_h(\lambda, z) = \left[ (C_0(\lambda) + C_1(\lambda) z) \right] e^{-\lambda z} + \left[ (C_2(\lambda) + C_3(\lambda) z) \right] e^{\lambda z} \quad (\text{A.64})$$

### B. Cherchons la solution particulière du système d'équilibre thermoélastique

On suit les mêmes étapes que précédemment. On obtient la solution particulière du système d'équilibre thermoélastique suivante

$$U_p(\lambda, z) = 0 \quad (\text{A.65})$$

$$W_p(\lambda, z) = -2(1+\nu) \frac{\alpha}{\lambda} \left[ A(\lambda) e^{-\lambda z} - B(\lambda) e^{\lambda z} \right] \quad (\text{A.66})$$

### 3.3 Fonctions $g_{ij}(\lambda)$

Les fonctions  $g_{ij}(\lambda)$  du système d'équations intégrales duales (6.80)-(6.83) sont données

$$g_{11}(\lambda) = 2\nu + (1-2\nu)(2\lambda h + e^{2\lambda h}) \quad (\text{A.67})$$

$$g_{12}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left[ (1-2\nu)(2(1-\nu)(-1 + e^{2\lambda h}) + \lambda h e^{2\lambda h}) + \lambda h (3-2\nu(5-4\nu)) - \lambda \right]$$

$$g_{13}(\lambda) = -\alpha T_0 (1+\nu)(1-2\nu) \int_0^\infty \left\{ \frac{b}{\lambda} J_1(\lambda b) (-1 + 2\lambda h + e^{2\lambda h}) e^{-\lambda h} - \sum_{n=0}^\infty a_n M_n(\lambda a) [-1 + (1-2\lambda h) e^{-2\lambda h}] \right\} \frac{J_0(\lambda r) d\lambda}{\lambda (1 + e^{-2\lambda h})}$$

$$g_{21}(\lambda) = \frac{-1 + e^{2\lambda h}}{h}$$

$$g_{22}(\lambda) = 1 + e^{2\lambda h} + \frac{2(1-\nu)(-1 + e^{2\lambda h})}{\lambda h}$$

$$g_{23}(\lambda) = \frac{\alpha T_0}{h}(1+\nu) \int_0^\infty \left\{ \frac{b(-1 + e^{2\lambda h})e^{-\lambda h}}{\lambda} J_1(\lambda b) - \sum_{n=0}^\infty a_n M_n(\lambda a) \left( \frac{(2(1-\nu) + \lambda h)e^{-2\lambda h} + \lambda h}{2(1-\nu)} - 1 \right) \right\} \frac{J_0(\lambda r) d\lambda}{\lambda(1 + e^{-2\lambda h})}$$

$$g_{41}(\lambda) = (1-2\nu) \left[ -e^{-\lambda h} + (1+2\lambda h)e^{\lambda h} \right]$$

$$g_{42}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left[ \left( (1-2\nu)(1+\lambda h)(2(1-\nu) + \lambda h) + 2(-1+\nu(3-\nu))e^{-\lambda h} + \lambda h(\lambda h(1-2\nu) + 4\nu(-1+\nu) + 1) \right) e^{\lambda h} \right]$$

$$g_{43}(\lambda) = \alpha T_0(1+\nu)(1-2\nu) \int_0^\infty \left\{ \frac{b}{\lambda} J_1(\lambda b) (-e^{-\lambda h} + (1+2\lambda h)e^{\lambda h}) - \sum_{n=0}^\infty a_n M_n(\lambda a) (-1 - 2\lambda h + e^{-2\lambda h}) \right\} \frac{J_0(\lambda r) d\lambda}{\lambda(1 + e^{-2\lambda h})e^{\lambda h}}$$

$$g_{31}(\lambda) = \frac{2(1-\nu)(1 - e^{2\lambda h})}{h} e^{-\lambda h}$$

$$g_{32}(\lambda) = \frac{1}{\lambda h} \left[ 4(-1+\nu)^2 e^{-\lambda h} + \left( (\lambda h)^2 - (2(1-\nu) + \lambda h)^2 \right) e^{\lambda h} \right]$$

$$G_{2m} = -\frac{2\alpha T_0}{h}(1+\nu) \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{bJ_1(\lambda b)}{\lambda} \left[ \frac{2(1-\nu)e^{-2\lambda h} - (2(1-\nu) - \lambda h)}{2} + \frac{((1-\nu) - \lambda h)e^{-2\lambda h} - (1-\nu)e^{-4\lambda h}}{(1 + e^{-2\lambda h})} \right] \right\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

Les fonctions  $L_i(\lambda)$  données dans le système d'équations (6.88) sont exprimées

$$L_1(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda) \left[ g_{22}(\lambda)g_{41}(\lambda) - g_{21}(\lambda)g_{42}(\lambda) \right] \tag{A.68}$$

$$L_2(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda) \left[ g_{12}(\lambda)g_{21}(\lambda) - g_{11}(\lambda)g_{22}(\lambda) \right]$$

$$L_3(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda) \left[ g_{32}(\lambda)g_{41}(\lambda) - g_{31}(\lambda)g_{42}(\lambda) \right]$$

$$L_4(\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda) \left[ g_{31}(\lambda)g_{12}(\lambda) - g_{32}(\lambda)g_{11}(\lambda) \right]$$

$$G_{3m} = \int_0^{\infty} \Delta^{-1}(\lambda) \left\{ g_{12}(\lambda) [g_{21}(\lambda)g_{43}(\lambda) + g_{13}(\lambda)g_{42}(\lambda)] - g_{22}(\lambda)L_5(\lambda) - g_{23}(\lambda) \right\} J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$G_{4m} = \int_0^{\infty} \Delta^{-1}(\lambda) \left\{ g_{31}(\lambda) [g_{12}(\lambda)g_{43}(\lambda) + g_{13}(\lambda)g_{42}(\lambda)] - g_{32}(\lambda)L_5(\lambda) \right\} J_0(\lambda r) d\lambda + G_{2m}$$

$$L_5(\lambda) = \left\{ g_{11}(\lambda)g_{43}(\lambda) + g_{13}(\lambda)g_{41}(\lambda) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n(\lambda a) \frac{((1-\nu) - \lambda h)e^{-\lambda h} - (1-\nu)e^{-3\lambda h}}{(1+e^{-2\lambda h})} \right\} J_0(\lambda r) d\lambda - 1$$

Les fonctions du système (6.89) sont définies

$$G_{5m} = \int_0^{\infty} \Delta^{-1}(\lambda) \left\{ g_{12}(\lambda) [g_{21}(\lambda)g_{43}(\lambda) + g_{13}(\lambda)g_{42}(\lambda)] - g_{22}(\lambda)L'_5(\lambda) - g_{23}(\lambda) \right\} X_m(\lambda a) d\lambda \quad (A.69)$$

$$L'_5(\lambda) = \left\{ g_{11}(\lambda)g_{43}(\lambda) + g_{13}(\lambda)g_{41}(\lambda) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n(\lambda a) \frac{((1-\nu) - \lambda h)e^{-\lambda h} - (1-\nu)e^{-3\lambda h}}{(1+e^{-2\lambda h})} \right\} X_m(\lambda a) d\lambda - 1$$

$$G_{6m} = \int_0^{\infty} \Delta^{-1}(\lambda) \left\{ g_{31}(\lambda) [g_{12}(\lambda)g_{43}(\lambda) + g_{13}(\lambda)g_{42}(\lambda)] - g_{32}(\lambda)L''_5(\lambda) \right\} X_m(\lambda b) d\lambda + G'_{2m}$$

$$L''_5(\lambda) = \left\{ g_{11}(\lambda)g_{43}(\lambda) + g_{13}(\lambda)g_{41}(\lambda) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n(\lambda a) \frac{((1-\nu) - \lambda h)e^{-\lambda h} - (1-\nu)e^{-3\lambda h}}{(1+e^{-2\lambda h})} \right\} X_m(\lambda b) d\lambda - 1$$

$$G'_{2m} = -\frac{2\alpha T_0}{h}(1+\nu) \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{bJ_1(\lambda b)}{\lambda} \left[ \frac{2(1-\nu)e^{-2\lambda h} - (2(1-\nu) - \lambda h)}{2} + \frac{((1-\nu) - \lambda h)e^{-2\lambda h} - (1-\nu)e^{-4\lambda h}}{(1+e^{-2\lambda h})} \right] \right\} X_m(\lambda b) d\lambda$$

$$G'_{5m} = \int_0^{\infty} \Delta^{-1}(t) \left\{ g_{12}(t) [g_{21}(t)g_{43}(t) + g_{13}(t)g_{42}(t)] - g_{22}(t)L'_5(t) - g_{23}(t) \right\} X_m(\eta t) dt \quad (A.70)$$

$$L'_5(t) = \left\{ g_{11}(t)g_{43}(t) + g_{13}(t)g_{41}(t) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n(\eta t) \frac{((1-\nu) - \delta t)e^{-\delta t} - (1-\nu)e^{-3\delta t}}{(1+e^{-2\delta t})} \right\} X_m(\eta t) dt - 1$$

$$G'_{6m} = \int_0^{\infty} \Delta^{-1}(t) \left\{ g_{31}(t) [g_{12}(t)g_{43}(t) + g_{13}(t)g_{42}(t)] - g_{32}(t)L''_5(t) \right\} X_m(t) dt + G''_{2m}$$

$$L''_5(t) = \left\{ g_{11}(t)g_{43}(t) + g_{13}(t)g_{41}(t) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n(\eta t) \frac{((1-\nu) - \lambda h)e^{-\delta t} - (1-\nu)e^{-3\delta t}}{(1+e^{-2\delta t})} \right\} X_m(t) dt - 1$$

$$G''_{2m} = -\frac{2\alpha T_0}{\delta}(1+\nu) \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2(1-\nu)e^{-2\delta t} - (2(1-\nu) - \delta t)}{2} + \frac{((1-\nu) - \delta t)e^{-2\delta t} - (1-\nu)e^{-4\delta t}}{(1+e^{-2\delta t})} \right\} \frac{J_1(t)}{t^2} X_m(t) dt$$