
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

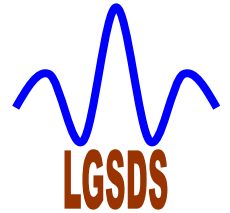
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil

Laboratoire de Génie Sismique & Dynamique
des Structures



Mémoire de Magister

Présenté par :

BENSLAMA Boualem

Ingénieur d'Etat en Génie Civil

Thème :

Etude paramétrique de l'amortissement radiatif d'un sol de
fondation sous l'effet de vibrations harmoniques verticales

Soutenu le 27/ 06 /2012, à 14h.00, à la bibliothèque centrale.

Mr. B. TILIOUINE	Professeur, ENP	Président
Mr. M. HAMMOUTENE	Professeur, ENP	Directeur de Mémoire
Mr. M. BOUABDALLAH	Professeur, ENP	Examineur
Mr. R. ILLOUL	Maitre de conférence, ENP	Examineur

ENP 2012

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Je remercie dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage, la patience et la volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je tiens tout d'abord à remercier le professeur **M. HAMMOUTENE** de l'Ecole Nationale Polytechnique (Alger) pour avoir accepté de m'encadrer et pour m'avoir fourni de judicieux conseils, de part ses expériences et ses connaissances.

Je tiens également à remercier le professeur **B. TILIOUINE** de l'Ecole Nationale Polytechnique (Alger) d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie tous les membres du jury de soutenance qui m'ont fait honneur de participer au jury et être les examinateurs de ce modeste travail.

Je remercie chaleureusement **mes parents** pour l'attention, le soutien et la confiance et la prier qu'ils m'ont donnée au cours de ces longues années. Merci également à mes frères et mes sœurs pour ses encouragements.

Enfin, dans le souci de n'oublier personne, que toutes les personnes qui m'ont aidé et soutenu de près ou de loin, trouvent ici l'expression de ma sincère gratitude.

ملخص:

نموذج هندسي لتقديم أساس ونصف الفضاء تم تقديمه، هذا النموذج هو نموذج axisymmetric يتكون من أساس دائري الشكل، عديمة الكتلة وجسيء جدا بالمقارنة مع جساءة نصف الفضاء، موضوع على نصف فضاء متجانس الخواص، مرن، و حدوده استيعابية.

إثارة توافقية تذبذب هذا الأساس لإنتاج نشر عمودي من موجات SH لدراسة تأثير الشبكة، معامل بواسون، و تخميد المواد على الاستجابة لهذا النظام. الاستجابة تخص الانتقال، السرعة والتسارع لعقد مختلفة للنظام ومريحة لدراسة تأثير التخماد الإشعاعي.

كلمات المفتاح: تفاعل هيكل تربة، دوال الممانعة، أساس دائري، الاهتزازات العمودية، انتشار الموجات، التخماد الإشعاعي.

Résumé:

Un modèle géométrique pour présenter une fondation et un demi-espace a été présenté, ce modèle est un modèle axisymétrique se compose à une fondation de géométrie circulaire, il est sans masse et très rigide par rapport au demi-espace, reposant sur un demi-espace homogène, isotrope et élastique, ses frontières sont absorbantes.

Une excitation harmonique oscille la fondation pour produit une propagation verticale des ondes SH, afin d'étudier l'effet du maillage, de coefficient de Poisson, et de l'amortissement matériel sur la réponse du ce système.

La réponse est concernant le déplacement, la vitesse et l'accélération de différents nœuds du système, commodes pour l'effet de l'atténuation radiative.

Mots clés : Interaction sol-structure, fonctions d'impédance, fondation circulaire, vibration verticale, propagation d'ondes, l'atténuation radiative.

Abstract:

A geometric model to present a foundation and a half-space was presented, this model is an axisymmetric model consists of a geometric circular foundation, it is massless and very rigid compared to the half-space, based on a half-space homogeneous, isotropic and elastic, and its boundaries are absorbing.

Harmonic excitation oscillates the foundation for producing a vertical propagation of SH waves to study the effect of the mesh, Poisson's ratio, and damping material on the response of this system.

The response is about the displacement, velocity and acceleration deferens nodes in the system, convenient for the radiative effect of attenuation.

Keywords: Soil-structure interaction, impedance functions, circular foundation, vertical vibration, wave propagation, radiation attenuation.

Tableau des matières

Résumé	2
Sommaire	3
Liste des figures	6
Liste des tableaux	9
Liste des notations principales	11
Introduction générale	13
Chapitre I : Vibration des massifs de fondation	16
- I.1. Introduction	16
- I.2 Définition générale de l'impédance d'une fondation.	16
- I.3 Impédance d'un oscillateur simple a un degré de liberté.	17
- I.4 Forme générale de l'impédance d'une fondation.	18
- I.5 Impédance de sol de fondation.	19
- I.6 Méthodes de détermination des fonctions d'impédance.	20
- I.6.1 Solution continue (analytiques).	21
- I.6.2 Solutions discrètes (numériques).	21
- I.6.3 Méthode approximatives.	22
- I.7. Conclusions	22
Chapitre II : Notions sur Les ondes et leur propagation dans différents types de sols	23
- II.1. Introduction	23
- II.2 Propagation d'onde dans un milieu élastique isotrope	25
-II.2.1. Equation de propagation	25
- II.2.2. Les solutions des équations de mouvement	26
- II.3. Onde monochromatique plane	27
- II.4. Réflexion et réfraction des ondes planes à une interface	28
- II.5. Propagation d'ondes planes en milieu élastique semi-infini	29
- II.6. Ondes SH dans un milieu semi-infini	30
- II.7. Ondes SH dans une couche d'épaisseur limitée surmontant un semi-espace	31
- II.8. Fonction de transfert	33

- II.9. Précision des modèles discrets	34
- II.10 Conclusion	36
Chapitre III : Amortissement matériel (géométrie)	37
- III.1 Introduction	37
- III.2 Définitions des paramètres caractérisant l'amortissement	37
- III.3. Matériaux à amortissement dépendant de la vitesse de déformation	40
- III.4. Matériau à amortissement indépendant de la vitesse de déformation	42
- III.5. Construction de matrices proportionnelles d'amortissement visqueux	42
- III.5.1. Introduction	42
- III.5.2. L'amortissement de Rayleigh	43
- III.6 Conclusion	47
Chapitre IV : Etude paramétrique en amortissement radiatif	44
- IV.1 Calcul de l'impédance d'une fondation circulaire sur un demi-espace avec un degré de liberté verticale.	44
- IV.1.1 Démonstration de la raideur statique (la formule de Boussinesq).	48
- IV.1.2. Simulation par la méthode des éléments finis	50
- IV.1.2.1. Model en éléments finis	50
- IV.1.2.2. Différentes formes du maillage	51
- IV.1.2.2.1 Première forme du maillage	51
- IV.1.2.2.2. Deuxième forme du maillage	52
- IV.1.2.2.3. Troisième forme du maillage	53
- IV.1.2.2.4. Quatrième forme du maillage	54
- IV.1.2.2.5. Cinquième forme du maillage	55
- IV.1.2.3. Extrapolation linéaire	59
- IV.1.2.3.1. Effet de maillage	59
- IV.1.2.3.2. Effet de profondeur de la couche	61
- IV.1.3. Conclusions	61
- IV.2 Exemple d'application de Précision des modèles discrets	63
- IV.2.1 Modèle	63
- IV.2.2 Résultats	64
- IV.2.3 Conclusion	65
- IV.3. Etude paramétrique en atténuation radiatif (amortissement radiatif)	66

- IV.3.1 Introduction	66
- IV.3.2. Description du modèle	66
- IV.3.3. Différentes formes du maillage	69
- IV.3.4. Les résultats de l'étude paramétrique	73
- IV.3.4.1. Les résultats sans amortissement matériel	73
- IV.3.5. Présentation graphique de quelques résultats	81
- IV.3.5.1. Des résultats sans amortissement	81
- IV.3.6. Conclusions	92
Conclusions générales	94
Les références bibliographiques	96

Liste des figures

Figure I.1 : Réponse d'une fondation à une sollicitation harmonique

Figure I.2 : Système à un degré de liberté

Figure I.3 : Définition des composantes du déplacement

Figure II.1: Onde de volume: a) Onde longitudinale, b) Onde transversale.

Figure II.2: Ondes de surface: a) Onde de Love, b) Onde de Rayleigh.

Figure II.3: contrainte sur un petit élément d'un milieu infini élastique.

Figure II.4 : réflexion et réfraction à une interface.

Figure II.5 : réflexion et réfraction d'une onde SH dans une couche d'épaisseur limitée surmontant un semi-espace.

Figure II.6 : définition d'un point de contrôle.

Figure II.7 : Fonction de transfert-Milieu élastique

Figure II.8: choix de la dimension des éléments.

Figure III.1 : Energie spécifique dissipée en fonction de la contrainte cyclique et du nombre de cycle N (Une courbe marquée 3 correspond à 103 cycle)

Figure III.2: Amortissement des vibrations fibres

Figure III.3: Relation entre le coefficient d'amortissement et la fréquence (pour l'amortissement de Rayleigh).

Figure IV.1: Fondation circulaire rigide sur semi-espace.

Figure IV.2: Model en éléments finis.

Figure IV.3: Première forme du maillage.

Figure IV.4: Deuxième forme du maillage.

Figure IV.5: Troisième forme du maillage.

Figure IV.6: Quatrième forme du maillage.

Figure IV.7: Cinquième forme du maillage.

Figure IV.8: Une présentation graphique des résultats.

Figure IV.9: Le bulb de déplacements, $\nu = 0,25$ la cinquième forme du maillage.

Figure IV.10: Le bulb de contraintes, $\nu = 0,25$ la cinquième forme du maillage.

Figure IV.11 : Influence de maillage ($H/R=2, \nu = 0,25$) : a) grossier (maillage à double), b) régulier, c) fin (demi-maille)

Figure IV.12 : ressorts d'extrapolation statiques.

Figure IV.13: ressorts statiques par rapport profondeur de la couche (valeurs pour $R / H = 0$ sont pour pied lisse; demi-espace Théorie)

Figure IV.14: modèle par éléments finis utilisés dans l'analyse dynamique.

Figure IV.15: Les déplacements horizontaux libres (FHD) l'état sur les limites latérales de FE modèle.

Figure IV.16: Accélérogramme de: el-centro.

Figure IV.17: La fonction d'amplification d'une couche élastique sur un substratum rigide a) sans amortissement matériel, b) avec amortissement matériel.

Figure IV.18: Problème de vibration de fondation.

Figure IV.19 : Model axisymétrique.

Figure IV.20 : le chargement P.

Figure IV.21 : Maillage grossier.

Figure IV.22 : Maillage régulier.

Figure IV.23 : Maillage fin.

Figure IV.24: La variation de déplacement de nœuds sur la surface libre pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,25$, maillage régulier.

Figure IV.25: La variation de déplacement de nœuds sur l'axe de symétrie pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,25$, maillage régulier.

Figure IV.26: La variation de déplacement de nœuds sur la diagonale du model pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,25$, maillage régulier.

Figure IV.27: La variation de déplacement de nœuds sur la surface libre pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$, $\nu = 0,25$, maillage régulier.

Figure IV.28: La variation de déplacement de nœuds sur l'axe de symétrie pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$ $\nu = 0,25$, maillage régulier.

Figure IV.29: La variation de déplacement de nœuds sur la diagonale du model pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$, $\nu = 0,25$, maillage régulier.

Figure IV 30: La distribution des nœuds.

Figure IV 31: Déplacements pour Maillage grossier, $V=0.25$, sans amortissement matériel.

Figure IV 32: Déplacements pour Maillage régulier, $V=0.25$, sans amortissement matériel.

Figure IV 33: Déplacements pour Maillage fin, $V=0.25$, sans amortissement matériel.

Figure IV 34: Déplacements pour les nœuds sur la surface libre, $V=0.25$, sans amortissement matériel.

Figure IV 35: Déplacements pour les nœuds sur l'axe de symétrie, $V=0.25$, sans amortissement matériel.

Figure IV 36: Déplacements pour les nœuds sur l'axe diagonal, $V=0.25$, sans amortissement matériel.

Figure IV 37: Déplacements pour les nœuds sur la surface libre, maillage régulier, sans amortissement matériel.

Figure IV 38: Déplacements pour les nœuds sur l'axe de symétrie, maillage régulier, sans amortissement matériel.

Figure IV 39: Déplacements pour les nœuds sur l'axe diagonal, maillage régulier, sans amortissement matériel.

Figure IV 40: L'énergie pour les nœuds sur la surface libre, $V=0.25$, sans amortissement matériel.

Figure IV 41: L'énergie pour les nœuds sur la surface libre, $V=0.33$, sans amortissement matériel.

Figure IV 42: L'énergie pour les nœuds sur la surface libre, $V=0.49$, sans amortissement matériel.

Figure IV 43: Déplacements pour Maillage régulier, $V=0.25$, avec l'amortissement matériel.

Liste des tableaux

Tableau IV.1: Les données mécaniques et géométriques de modèle.

Tableau IV.2: La rigidité pour différentes formes du maillage.

Tableau IV.3: La rigidité pour différentes valeurs de ν .

Tableau IV.4: Propriétés des matériaux de la couche élastique linéaire.

Tableau IV.5: Comparaison des pulsations propres normalisées.

Tableau IV.6: Les caractéristiques géométriques et mécaniques de modèle.

Tableau IV.7: les valeurs maximales de : dép, vit, acc, pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,25$, maillage grossier.

Tableau IV.8: les valeurs maximales de : dép, vit, acc, pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,25$, maillage régulier.

Tableau IV.9: les valeurs maximales de : dép, vit, acc, d pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,25$, maillage fin.

Tableau IV.10: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,33$, maillage grossier.

Tableau IV.11: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,33$, maillage régulier.

Tableau IV.12: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,33$, maillage fin.

Tableau IV.13: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,499$, maillage grossier.

Tableau IV.14: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,499$, maillage régulier.

Tableau IV.15: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,499$, maillage fin.

Tableau IV.16: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,25$, maillage grossier.

Tableau IV.17: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,25$, maillage régulier.

Tableau IV.18: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,25$, maillage fin.

Tableau IV.19: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,33$, maillage grossier.

Tableau IV.20: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,33$, maillage régulier.

Tableau IV.21: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,33$, maillage fin.

Tableau IV.22: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,499$, maillage grossier.

Tableau IV.23: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,499$, maillage régulier.

Tableau IV.24: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. de pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,499$, maillage fin.

Listes des notations principales

$\underline{\sigma}$: Tenseur des contraintes.

ρ : la masse volumique du milieu.

\underline{X} (U, V, W) : vecteur de déplacement.

γ Le poids volumique.

g L'accélération de pesanteur.

$\underline{\xi}$: Tenseur des déformations.

V_p : La vitesse de propagation des ondes de cisaillement.

V_s : La vitesse de propagation des ondes longitudinales.

a : le rayon de fondation.

σ_z : La contrainte verticale moyenne sous la fondation.

ρ : La masse volumique du semi-espace.

ρ_f : La masse volumique de la fondation.

s : Le tassement de la fondation infiniment rigide.

G, E, ν : Les caractéristiques mécaniques du semi-espace.

G_f, E_f, ν_f : Les caractéristiques mécaniques de la fondation.

ε : L'erreur sur la rigidité.

M_n : La matrice masse.

K_n : La matrice de rigidité.

C_n : La matrice d'amortissement.

Φ_n : La matrice modale.

ε_n : La matrice de coefficients d'amortissement.

ω_n : La matrice de fréquences propres.

a_0 et a_1 : Les deux facteurs de l'amortissement de Rayleigh.

R : Rayon de la fondation.

A : la surface de la fondation.

E : le module de Young.

G : Le module de cisaillement.

I : Le moment d'inertie La rigidité flexionnelle.

γ : Le poids volumique.

α_N et β_N et γ_N : Coefficients de Newmark.

λ : Le coefficient d'amplification dynamique.

ω_D : La pulsation d'amortissement de système.

K_{sv} : La rigidité statique verticale.

l : La largeur.

H : La profondeur.

α_1 : Angle d'incidente.

ω_{1t} : La fréquence fondamentale du sol.

f_{max} : La fréquence maximale de l'excitation.

$h_{\text{élément}}$: La taille d'élément fini.

λ_{onde} : La longueur d'onde de vibration.

Introduction générale

Le comportement d'une structure est grandement influencé par celui du sol sous – jacent sur lequel elle repose. L'analyse de ce comportement s'inscrit dans une approche basée sur l'établissement de modèles simples de comportement dynamique issus de la confrontation du comportement supposé de la structure avec les données recueillis in situ par la méthode du bruit de fond, de l'excitation harmonique ou des chocs. Le choix d'une représentation simplifiée de l'interaction sol – structure, autorisant un calcul analytique des fonctions d'impédance, permet de déterminer, pour chacun des modèles les plus courant de structures, les paramètres adimensionnels essentiels qui gouvernent le phénomène puis d'estimer, selon les valeurs de ces paramètres, la nature et l'importance de l'effet de l'interaction sol – structure sur les caractéristiques vibratoires de la structure.

Le phénomène d'interaction sol – structure a fait l'objet de nombreuses recherches tant dans les domaines analytiques et numérique (Kausel, E., and Roësset, J.M. (1975)) que dans le domaine expérimental. L'essentiel des développements qui régissent ce phénomène se fondent sur la notion d'impédance car, en effet, les équations de couplage avec le sol sont formulées par l'intermédiaire de la condition d'appui souple (impédance) introduite à la base de la fondation avant de passer à l'approche en mode complexe.

Dans le cas d'un séisme, le phénomène d'interaction sol – structure induit trois effets principaux, à savoir : premièrement une amplification de l'excitation sismique induite par la présence du sol, deuxièmement l'apparition d'un champ diffracté qui assure la compatibilité cinématique entre la déformation du sol et les parois rigides de la fondation et troisièmement une interaction de la structure pesante avec le sol.

Le troisième effet induit par le mouvement de la structure pesante est dû au mouvement de corps rigide de la fondation qui se traduit par des forces d'inertie qui sont à l'origine de la déformation de la structure. Cette déformation développe des efforts à la base de la structure repris par le sol de fondation. Contrairement au rocher, le sol est retro – activement déformé par les efforts transmis par la fondation. Ce champ additionnel, propagé dans le sol de fondation, est le champ rayonné par la fondation. Au final, les mouvements de la fondation

différents de ceux résultants de l'interaction cinématique, sont le produit du couplage appelé interaction inertielle, entre le mouvement du sol et ceux de la structure.

Dans le cadre de ce mémoire de Magister, nous mènerons étude paramétrique de l'amortissement radiatif d'un sol de fondation sous l'effet de vibrations harmoniques verticales. Le champ d'ondes rayonné par la fondation, qui joue ici le rôle de source, est analysé durant sa propagation dans le sol, en terme de variations d'amplitudes tant en déplacement, vitesse et accélération. L'information concernant les amplitudes de ces ondes est une information difficile à exploiter, de par la diversité des facteurs d'atténuation des ondes sismiques (atténuation géométrique, atténuation de réflexion et/ou transmission, atténuation anélastique), par conséquent, de par la complexité de son calcul. Nous focalisons notre attention sur le phénomène d'atténuation géométrique des ondes émises par la fondation. En effet, l'énergie transmise par une excitation sismique à une structure fondée dans un milieu parfaitement rigide est dissipée par les non linéarités internes de celle – ci : c'est ce qui traduit l'amortissement structurel pris en compte dans la modélisation par des coefficients d'amortissement modaux. Par contre, dans le cas d'une structure reposant sur un sol ayant une certaine souplesse, il y a comme on l'a dit plus haut, un couplage entre les mouvements de la structure et ceux du sol. Dans ce cas alors, les oscillations de la fondation donnent naissance à un champ d'ondes de volume et de surface qui dans le cas d'un milieu semi infini se propagent indéfiniment et ne restituent donc pas, sous quelque forme que ce soit, l'énergie qu'elles contiennent. Ce phénomène engendre un amortissement des mouvements sous la forme d'une dissipation d'énergie et cela même si le milieu est supposé élastique, linéaire et non dissipatif. Cette perte d'énergie n'étant pas due aux propriétés mécaniques du sol, on parle d'amortissement géométrique ou encore, en référence aux ondes rayonnée par la fondation d'amortissement radiatif. Du fait qu'il réduit l'amplitude et la durée des oscillations, ce phénomène a un effet positif pour la sécurité des structures. Afin de bien expliciter ce phénomène complexe nous considérons dans notre étude le cas simple de la fondation circulaire reposant sur un demi – espace élastique et soumise à une excitation harmonique verticale représentant le mouvement de la structure.

Le premier chapitre est consacré à l'explication du phénomène d'interaction sol – structure avec la mise en relief du concept de fonction d'impédance utilisé pour la quantification de l'atténuation géométrique. Le deuxième chapitre est consacré aux aspects théoriques relatifs à la propagation des ondes dans un milieu hyper – élastique, isotrope et linéaire. Le troisième

chapitre donne des notions sur l'amortissement matériel (amortissement de Raleigh). Le quatrième chapitre est consacré à la présentation de méthode numérique mise en œuvre pour le calcul des déplacements dans les sols sous vibrations des fondations. L'outil numérique utilisé pour l'implémentation des calculs est le code de calcul PLAXIS. Le quatrième chapitre est dédié à l'étude paramétrique du phénomène d'atténuation géométrique des ondes sismiques, dans lequel, nous étudions l'influence des caractéristiques du sol sur le phénomène de déperdition d'énergie induit par l'amortissement radiatif. Afin de mieux apprécier la précision des calculs, Trois formes de maillages sont pris en considération : grossier, régulier et fin. Un dernier chapitre regroupe les principales conclusions et recommandations qui ont pu être extraites de ce travail.

Chapitre I

Vibration des massifs de fondation

I. 1 Introduction :

La machine soit en général la source des sollicitations, et dans le second les sollicitations proviennent directement du sol, les objectifs sont identiques prévoir à partir des sollicitations extérieures les mouvements du massif de fondation, en tenant compte à la fois des caractéristiques de la fondation et de sol support. L'objectif principal de la conception des machines vibrantes est la limitation des amplitudes des sollicitations de tous les modes de vibrations, à un niveau satisfaisant le bon fonctionnement de la machine, et le confort du personnel travaillant dans le milieu environnant immédiat. Dans ce chapitre on exposera les expressions des fonctions d'impédances dynamiques, pour le cas des massifs des fondations rigides soumis à des sollicitations harmoniques.

On note que l'amplitude du déplacement du massif de fondation d'une machine vibrante est limité, dans le cas d'un chargement dynamique il est de l'ordre d'un dixième de millimètre (*Pecker, 1984*), comparé au déplacement limité de quelques centimètres dans le cas d'un chargement statique. Par conséquent, les efforts transmis au sol de fondation sont faibles, et celui-ci n'est pratiquement pas sollicité dans le domaine plastique (pas de déformation permanente).

I.2 Définition générale de l'impédance d'une fondation :

Les fonctions d'impédances sont utilisées pour l'analyse des vibrations des massifs de fondation, et plus généralement pour les problèmes de l'interaction sol-structure.

Considérons une fondation de forme quelconque reposant sur la surface d'un milieu semi-infini et soumise à une sollicitation harmonique $P_0 \exp(i\omega t)$ (figure I.1). Outre la sollicitation appliquée, les forces s'exerçant sur la fondation sont les forces d'inertie et les forces de réaction de sol $R(t)$. Il est en résulte, en régime stationnaire, un déplacement $Z_0 \exp(i\omega t)$ de la fondation. Associons à la fondation réelle une fondation fictive de même caractéristiques géométriques mais de masse nulle. Soit $Z(t)$ son déplacement lorsqu'elle est soumise à la force appliquée $P(t)$. Par définition, on appelle impédance de la fondation le quotient de la force appliquée au déplacement de la fondation sans masse (*Pecker, 1984*) :

$$S(t) = \frac{P(t)}{Z(t)} \quad (\text{I.1a})$$

Il est évident que, les forces d'inertie de la fondation étant nulles, l'impédance est au quotient de la réaction $R(t)$ exercée par le sol sur la fondation au déplacement de celle-ci :

$$S(t) = \frac{R(t)}{Z(t)} \quad (\text{I.1b})$$

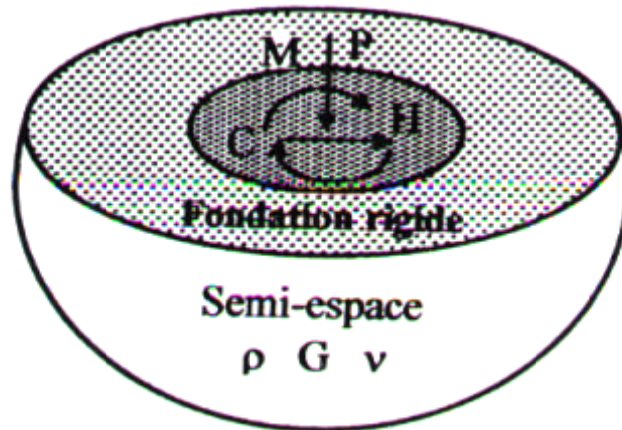


Figure I.1 : Réponse d'une fondation à une sollicitation harmonique

Dans le cas d'une fondation partiellement enterrée, la réaction $R(t)$ se compose des efforts développés sous la base de la fondation et des efforts développés le long des faces latérales en contact avec le sol.

A partir de l'équation (I.1a ou 1b), on peut définir l'impédance d'une fondation pour les modes de translation (horizontale ou verticale), de balancement et de torsion. Notons que l'application d'une force horizontale donnant naissance à la fois à un déplacement horizontal et à une rotation, il existe également une impédance couplée rotation-déplacement horizontale. Celle-ci se définit comme le rapport de la force (ou du moment) appliquée à la rotation (ou au déplacement horizontal) résultant.

I.3 Impédance d'un oscillateur simple a un degré de liberté :

On considère un oscillateur simple à un degré de liberté (figure I.2), constitué d'une masse m , d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de caractéristique c , afin d'illustrer la forme générale des fonctions d'impédance. L'équation d'équilibre dynamique de cet oscillateur soumis à une excitation harmonique $P_0 e^{i\omega t}$ s'écrit :

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = P_0 e^{i\omega t} \quad (\text{I.2})$$

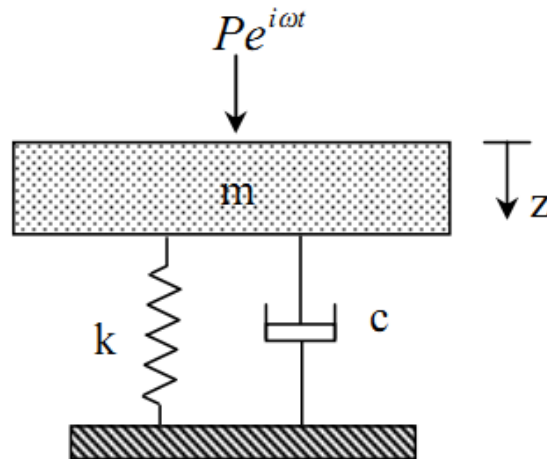


Figure I.2 : Système à un degré de liberté

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$z(t) = \frac{Pe^{i\omega t}}{(k - m\omega^2) + i\omega c} \quad (\text{I.3})$$

A partir de l'équation (I.3), on peut définir l'impédance dynamique de cet oscillateur :

$$S(\omega) = (k - m\omega^2) + i\omega c \quad (\text{I.4})$$

I.4 Forme générale de l'impédance d'une fondation :

Pour la présentation des fonctions d'impédance, on définit la fréquence adimensionnelle :

$$a_0 = \frac{\omega r_0}{c_s} \quad (\text{I.5})$$

Où : ω : Pulsation de l'excitation

r_0 : Dimension caractéristique de la fondation

c_s : Vitesse de propagation des ondes de cisaillement

Par analogie à l'équation (I.4), l'impédance peut s'écrire sous la forme :

$$S(a_0) = K[k(a_0) + ia_0 c(a_0)] \quad (\text{I.6})$$

$k(a_0)$: Partie réelle représentant l'effet de la masse et de l'inertie du sol.

$c(a_0)$: Partie imaginaire représentant l'effet de l'amortissement radiatif résultant de la dissipation d'énergie due à la propagation des ondes loin de la fondation, on l'estimer au quatrième chapitre.

K : Raideur statique de la fondation, que on va voir au quatrième chapitre.

I.5 Impédance de sol de fondation :

Pour un massif de fondation rigide présentant deux plans de symétrie verticaux, les degrés de liberté associés à la translation verticale et à la torsion autour d'un axe vertical sont découplés, par contre les degrés de liberté associés au balancement autour d'un axe horizontal et à la translation horizontale sont couplés. Les équations d'équilibre d'un tel massif sont, en prenant les axes au centre de gravité du massif :

$$m\ddot{z} + R_z(t) = Q_z(t) \quad (\text{I.7a})$$

$$m\ddot{x} + R_x(t) = Q_x(t) \quad (\text{I.7b})$$

$$I_y\ddot{\theta} + R_\theta(t) - R_x(t)z_c = M_y(t) \quad (\text{I.7c})$$

$$I_z\ddot{\theta} + R_\theta(t) = M_z(t) \quad (\text{I.7d})$$

Les deux équations supplémentaires concernant le déplacement suivant y et le balancement autour de x sont obtenues en permutant les indices x et y dans les deuxième et troisième équations de la relation (I.7).

Avec : m : Masse de la fondation ;

$I_z I_z$: Moment d'inertie massique de la fondation par rapport à un axe horizontal passant par le centre de gravité ;

z_c : Distance du centre de gravité G de la fondation à la surface de contact sol-fondation ;

$R(t)$: Réaction du sol au centre de gravité géométrique de la surface de contact ;

Q, M : Sollicitation (force, moment) agissant au centre de gravité de la fondation;

z, x : Déplacement vertical, horizontal du centre de gravité respectivement ;

θ, \varnothing : Rotations autour d'un axe vertical, horizontal passant par le centre de gravité.

Pour des sollicitations harmoniques de pulsations ω , et par analogie avec l'oscillateur simple, l'impédance des réactions à la base de la fondation est définie par :

$$\{R\} = [s]\{u_b\} \quad (I.8)$$

$[s]$: Désigne la matrice d'impédance formé de termes complexes ;

$\{u_b\}$: Vecteur déplacement du centre de gravité de la base de la fondation.

Les équations du mouvement s'écrivent alors sous forme matricielle :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [S]\{u\} = \{Q\} \quad (I.9)$$

Où : $[S]$: Désigne la matrice déduite de la matrice d'impédance.

$[M]$: Matrice de masse.

$\{u\}$: Vecteur déplacement généralisé.

$\{Q\}$: Vecteur des sollicitations généralisées (forces et moments appliqués).

$$S = \begin{pmatrix} S_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_x & S_{x\phi} - S_x S_c & 0 \\ 0 & S_{x\phi} - S_x Z_c & S_\phi - 2S_{x\phi} Z_c + S_x Z_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_\theta \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (I.10)$$

Il est à noter que $[S]$ et $[M]$ sont les matrices de dimension 6x6. Il convient de compléter la relation (I. 10) en ajoutant deux lignes et deux colonnes par permutation des indices x et y.

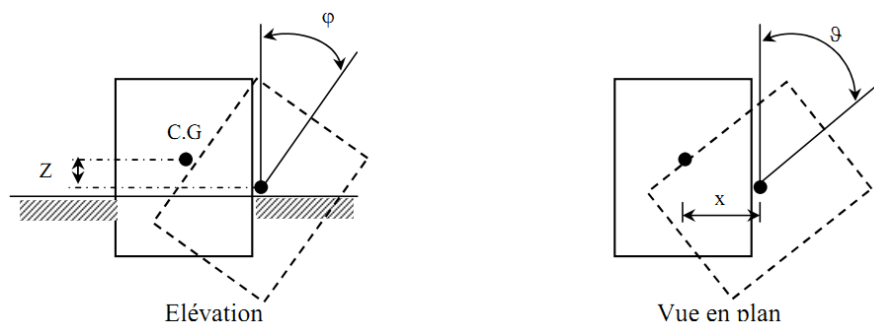


Figure I.3 : Définition des composantes du déplacement

I.6 Méthodes de détermination des fonctions d'impédance :

La méthode de détermination de la fonction d'impédance doit refléter à la fois les caractéristiques de la fondation et du sol support à savoir :

- La forme de la fondation (circulaire, rectangulaire, arbitraire) ;
- Profil de sol (demi-espace homogène, couche de sol surmontant un substratum rocheux, sol stratifié...);
- L'enfoncement de la fondation (superficielle, enterrée, pile...

Actuellement, différentes procédures sont employées pour la détermination des impédances de fondation. Il est donc important de connaître limitations et les avantages de chacune d'entre elles, pour choisir la mieux adaptée au problème posé. Selon la classification de (*Gazetas (1983)*), on peut distinguer :

I.6.1 Solution continue (analytiques)

Ces solutions sont obtenues à partir des résolutions analytiques équations de l'élastodynamique. Selon la façon dont est traitée la condition aux limites à l'interface sol-fondation, on peut distinguer les solutions entièrement analytiques et solutions semi-analytiques (*pecker 1984*).

Les solutions analytiques ne peuvent être obtenues qu'en simplifiant la condition de contact, les contraintes de cisaillement sont supposées nulles à l'interface, pour les mouvements de translation verticale et de balancement autour d'un axe horizontal, les contraintes normales sont supposées nulles pour le mouvement de translation horizontale. Les solutions de ce type ont été obtenues pour les fondations circulaires, filantes, rectangulaires, et sur des sols stratifiés. Les solutions semi-analytiques constituent un compromis entre les solutions numériques et analytiques. Elles sont obtenues par discrétisation de la surface de contact. L'avantage principal de ces méthodes, est de prendre correctement en compte l'aspect tridimensionnel du problème, mais dès que la stratification devient trop importante, ou bien pour les fondations enterrées, ces méthodes deviennent moins efficaces.

I.6.2 Solutions discrètes (numériques) :

La plupart des solutions sont obtenues par la méthode des éléments finis (MEF), pour résoudre les problèmes complexes qui ne peuvent pas être résolus par des formulations analytiques. L'ensemble sol-fondation est modélisé par un maillage d'éléments finis. La difficulté principale pour la mise en œuvre des solutions numériques réside dans la simulation

des conditions aux limites. Pour éviter la réflexion d'ondes heurtant les bords du modèle, des frontières absorbantes sont associées à ces limites, simulant de façon exacte la présence au-delà de la frontière d'un milieu infini.

Ces méthodes sont bien adaptées au traitement des problèmes plans ou axisymétriques. Aucune limitation n'existe concernant les hétérogénéités du sol, ou de l'enfoncement de la fondation. Les problèmes tridimensionnels par contre mal appréhendés. La méthode des équations intégrales aux frontières (MEIF) récemment développée, bénéficie de la puissance des approches analytique et numérique (*Gazetas, 1991a*). Cette méthode transforme les équations de l'élastodynamique en relations d'intégrales entre le vecteur déplacement et vecteur contrainte. Elle nécessite la discrétisation des frontières du domaine étudié en éléments finis. Les conditions de radiation des ondes à l'infini sont incluses dans la formulation de manière inhérente.

I.6.3 Méthodes approximatives :

Ces méthodes sont basées sur des techniques simples, qui simplifient l'interprétation physique du problème, et qui donnent des résultats satisfaisants. Elles peuvent donner des solutions pour des situations très compliquées, qu'on ne peut pas résoudre d'une manière exacte (*Meek et Veletsos 1974*).

I.7 Conclusion :

Ce chapitre est consacré à l'explication du phénomène d'interaction sol – structure avec la mise en relief du concept de fonction d'impédance utilisé pour la quantification de l'atténuation géométrique

Chapitre II

Notions sur les ondes et leur propagation dans différents types de sols

II.1. Introduction :

L'énergie libérée lors d'un séisme se transmet en partie par la vibration du sol à partir du foyer. Les vibrations se propagent dans toutes les directions sous forme d'ondes sismiques de divers types. Compte tenu de l'hétérogénéité du milieu de propagation, elles engendrent à la surface du sol un mouvement complexe.

Du point de vue mathématique, une onde est une solution des équations de l'élastodynamique dont la dépendance vis-à-vis du temps t ne fait intervenir qu'une fonction $f(t \pm x/c)$, x étant une coordonnée d'espace (distance à un plan pour une onde plane, distance à un point pour une onde sphérique) et c une vitesse de propagation. On démontre dans la théorie de l'élasticité que dans un matériau homogène et isotrope, il y a deux types d'ondes de volume, c'est-à-dire des ondes pouvant se propager dans la masse (*Belkheiri Nassira, (2010)*) :

- Les ondes longitudinales ou ondes P :

Les ondes P produisent des compressions et dilatations alternées dans le sens de la propagation, avec changement de volume.

- Les ondes transversales ou ondes S :

Les ondes S produisent une distorsion perpendiculaire à la direction de propagation, sans changement de volume.

Les vitesses de propagation de ses ondes jouent un rôle très important en dynamique des sols. Elles dépendent des constantes élastique du milieu (coefficient λ et G de lamé, module d'Young E et coefficient de poisson ν). Elles sont données par les formules suivantes :

$$V_p = \sqrt{\frac{(\lambda + 2G)}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1 - G)E}{(1 + G)(1 - 2G)\rho}}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = V_s = \sqrt{\frac{E}{2(1 + G)\rho}}$$

Outre les ondes de volume, les équations de l'élasticité dynamique admettent d'autres solutions à caractère ondulatoire, il s'agit des ondes de surface, qui peuvent se manifester au voisinage des surfaces de discontinuité (surface libre ou interface entre des couches de matériaux différents); en génie parasismique, les deux types d'ondes de surface les plus notables sont les ondes de Love et de Rayleigh.

➤ L'onde de Love :

Il s'agit d'une onde transversale (mouvement des particules perpendiculaire à la direction de propagation), comme l'onde de volume s mais à la différence de celle-ci, son amplitude n'est perceptible que près de la surface et s'atténue vite en profondeur. Elle ne peut exister que dans des milieux non homogènes et à un caractère dispersif, c'est-à-dire que sa vitesse de propagation dépend de sa fréquence.

➤ L'onde de Rayleigh :

L'onde de Rayleigh est une sorte houle, dans laquelle les particules ont deux composantes de mouvement, l'une verticale et l'autre horizontale (parallèle à la direction de propagation), dont la combinaison produit une trajectoire elliptique; comme pour l'onde de Love, l'amplitude du mouvement décroît en profondeur et la rapidité de cette décroissance est d'autant plus grande que la longueur d'onde est petite. L'onde de Rayleigh existe dans un milieu homogène, où sa vitesse de propagation est un peu inférieure à la vitesse des ondes S (elle varie de $0,874V_s$ pour $\nu = 0$ à $0,955V_s$ pour $\nu = 0,5$); elle est dispersive dans les milieux non homogènes.

Dans les calculs, les ondes sismiques de volume ou de surface sont représentées par des expressions sinusoïdales (ce qui permet par superposition, de produire une onde de forme quelconque) (*Belkheiri Nassira, (2010)*).

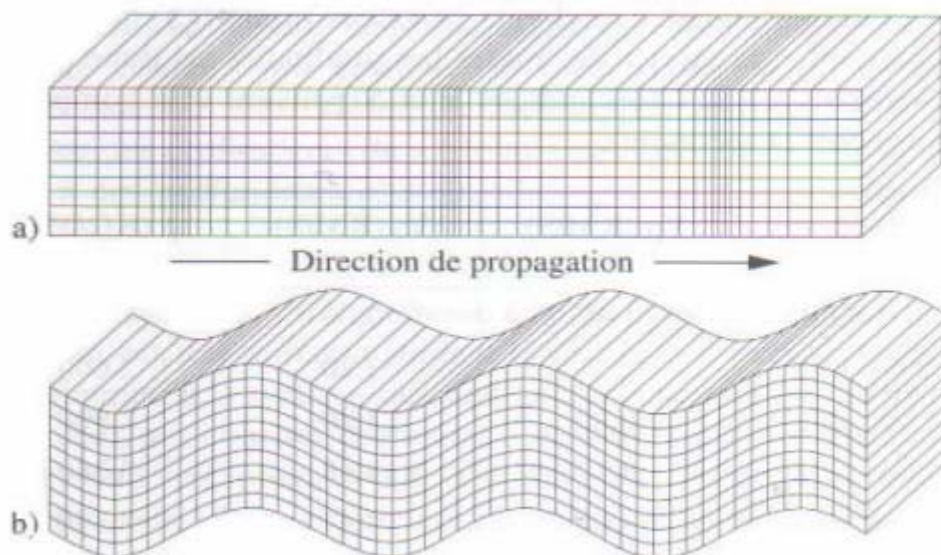


Figure II.1: Onde de volume: a) Onde longitudinale, b) Onde transversale.

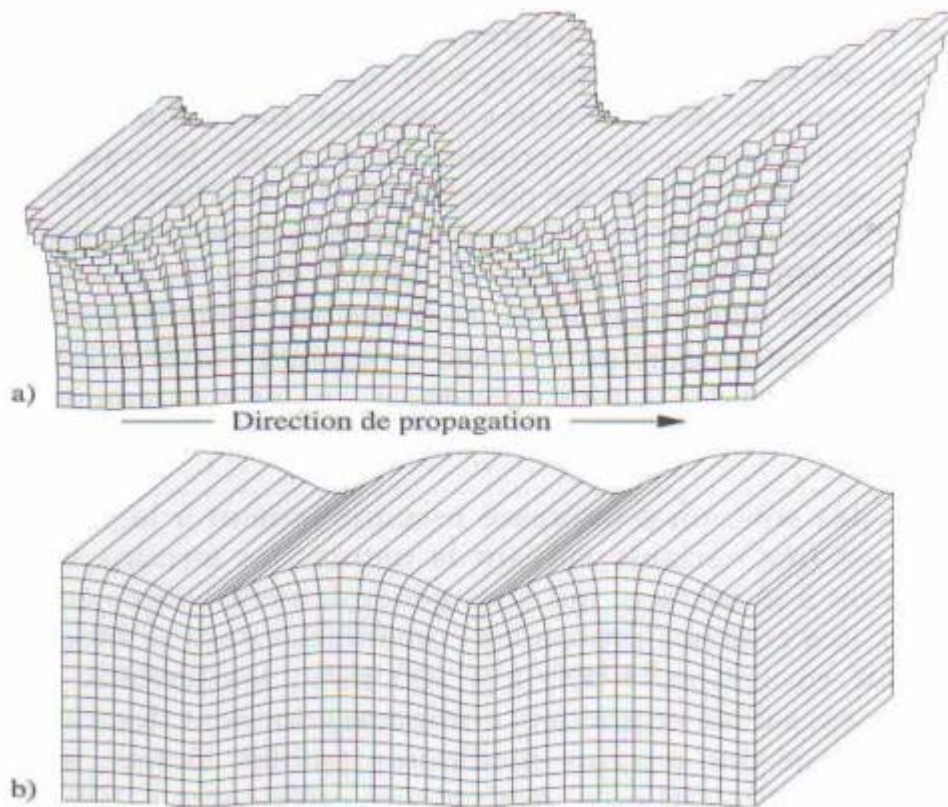


Figure II.2: Ondes de surface: a) Onde de Love, b) Onde de Rayleigh.

II.2. Propagation d'onde dans un milieu élastique isotrope :

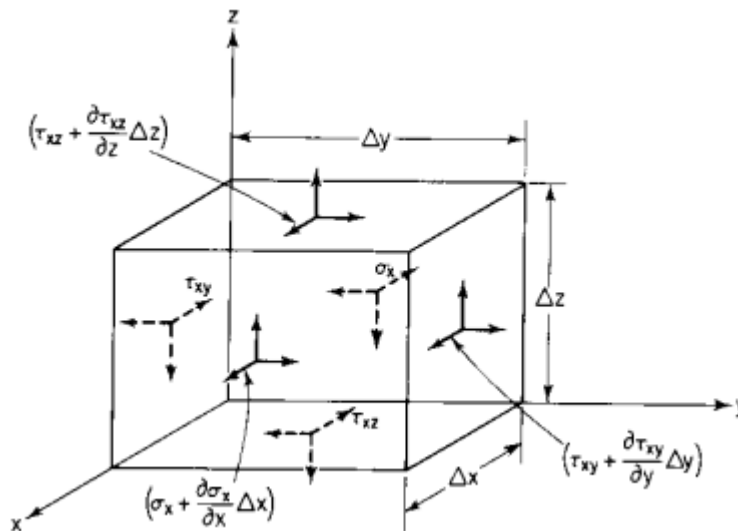


Figure II.3: contrainte sur un petit élément d'un milieu infini élastique

II.2.1. Equation de propagation :

L'équation indéfinie de l'équilibre s'écrit :

$$\operatorname{div} \underline{\sigma} = \rho \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial t^2} \quad (\text{II.1})$$

Dans le cas d'un matériau isotrope, la loi de comportement ne fait intervenir que deux paramètres. En choisissant les coefficients de Lamé, λ et G , cette loi a pour expression :

$$\underline{\sigma} = \lambda(\operatorname{trace} \underline{\varepsilon}) \underline{I} + 2G \underline{\varepsilon} \quad (\text{II.2})$$

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portant (II.1) dans (II.2), l'équation aux dérivées partielles ayant pour inconnue le déplacement \underline{X} s'écrit :

$$(\lambda + G) \operatorname{grad} (\operatorname{div} \underline{X}) + G \Delta \underline{X} - \rho \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial t^2} = 0$$

$$\rho \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial t^2} = (\lambda + G) \operatorname{grad} (\operatorname{div} (\underline{X})) + G \Delta \underline{X} \quad (\text{II.3})$$

(Richard, F. E., Woods, R. D. ET Hall, J. R., (1970))

$$\text{Avec : } \Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

II.2.2. Les solutions des équations de mouvement :

Deux solutions qui peuvent être trouvées, une décrit la propagation d'onde de changement de volume pur « onde irrotationnelle » et l'autre décrit la propagation d'onde de rotation pure (Pecker, A., 1984):

-pour la première solution d'un mouvement irrotationnel \underline{X}_1 dérivant d'un potentiel scalaire ϕ :

$$\underline{X}_1 = \operatorname{grad} \phi \quad (\text{II.4})$$

-pour la deuxième solution d'un mouvement rotationnel \underline{X}_2 dérivant d'un potentiel vecteur $\underline{\Omega}$:

$$\underline{X}_2 = \operatorname{Rot} \underline{\Omega} \quad (\text{II.5})$$

$$\text{Avec } \operatorname{div} \underline{\Omega} = 0$$

On a :

$$V_p = \sqrt{\frac{(\lambda+2G)}{\rho}} \quad (\text{II.6})$$

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (\text{II.7})$$

L'équation du mouvement peut alors être découpée en deux équations aux dérivées partielles satisfaites par \varnothing et $\underline{\Omega}$

$$\frac{\partial^2 \varnothing}{\partial t^2} = V_p^2 \nabla^2 \varnothing \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\Omega}}{\partial t^2} = V_s^2 \nabla^2 \underline{\Omega} \quad (\text{II.9})$$

II.3. Onde monochromatique plane :

Pour une onde monochromatique stationnaire, de pulsation ω , une solution générale des équations (II.8) et (II.9) est donnée par :

$$\varnothing = A \exp \left[\frac{i\omega}{V_p} (V_p t - l_x X - l_y Y - l_z Z) \right] \quad (\text{II.10})$$

$$\underline{\Omega} = \underline{B} \exp \left[\frac{i\omega}{V_s} (V_s t - l_x X - l_y Y - l_z Z) \right] \quad (\text{II.11})$$

Avec $\|\underline{l}\| = 1$, $\underline{B} = 0$, $i^2 = -1$

Avec

Dans le cas où elles sont toutes réelles, les composantes du vecteur \underline{l} représente les cosinus directeurs de la direction de propagation des ondes. A un instant donné t_0 , \varnothing est constant sur tout plan normal à \underline{l} , l'équation $V_p t_0 - l_x X - l_y Y - l_z Z = \text{constant}$, et varie sinusoïdalement le long de la direction \underline{l} . En tout point de l'espace, \varnothing est périodique, de période $2\pi/\omega$.

Ces ondes sont des ondes de volume, longitudinales ou transversales, dont les vitesses de propagation sont respectivement V_p et V_s . Les ondes longitudinales, ou ondes P, sont des ondes de dilatation alors que les ondes transversales, ou ondes S, sont des ondes de cisaillement correspondant à un mouvement sans variation de volume puisque $\text{div } \underline{X}_2 = \text{div } \underline{\text{rot}} \underline{\Omega} = 0$. Ces ondes de volume sont les seules à exister dans un milieu infini. Les solutions (II.10) et (II.11) restent valables si l'une des trois composantes de \underline{l} est imaginaire. L'interprétation physique de \underline{l} est alors différente. Supposons par exemple l_x et l_y réels et l_z imaginaire pur ; les

solutions représentées alors des ondes se propageant dans le plan (X, Y) dont l'amplitude décroît (ou croît suivant le signe de l_z) exponentiellement suivant OZ. Ces ondes sont appelées ondes de surface généralisées ; les ondes de Love généralisées correspondent au cas où seules des déformations de cisaillement se produisent ; les ondes de Rayleigh généralisées correspondent au cas où les déformations de cisaillement sont accompagnées de déformations volumiques (Pecker, A., 1984). L'existence d'ondes de surface généralisées dépend des conditions aux limites du problème, surface libre, surfacette de discontinuités des caractéristiques mécaniques du milieu ...elles ne peuvent exister dans un milieu infini homogène.

A partir des solutions (II.10) et (II.11) et des relations (II.4) et (II.5) on obtient les composantes du déplacement, posant :

$$f_p = \exp \left[\frac{i\omega}{V_p} (V_p t - l_x X - l_y Y - l_z Z) \right] \quad (\text{II.12})$$

Et f_s l'expression correspondante en remplaçant V_p par V_s , ces composantes ont pour expression :

-ondes longitudinales :

$$\underline{X}_1 = -\frac{i\omega A}{V_p} V_p \underline{1} = A_p f_p \underline{1} \quad (\text{II.13})$$

-ondes transversales :

$$\underline{X}_2 = +\frac{i\omega}{V_s} f_s \underline{B} \otimes \underline{1} \quad (\text{II.14})$$

\otimes : Le produit vectoriel.

II.4. Réflexion et réfraction des ondes planes à une interface :

Lorsqu'une onde heurte une surface discontinuité des caractéristiques mécaniques séparant deux milieux, il se produit des phénomènes de réflexion ou de réfraction semblable à ceux rencontrés en optique. De plus, il se produit des changements de modes, une onde incidente donnant en général naissance à des ondes longitudinales et à des ondes de cisaillement, éventuellement à des ondes de surface. Les lois de réflexion, ou lois de Snell, permettent de déterminer les angles des directions de propagation des ondes réfléchies et réfractées (II.4)

$$\frac{V_{p1}}{\sin \alpha} = \frac{V_{s1}}{\sin \beta} = \frac{V_{p2}}{\sin \alpha'} = \frac{V_{s2}}{\sin \beta'} = C \quad (\text{II.15})$$

Où C est la vitesse apparente de propagation suivant la direction de la surface de séparation ; $V_{p1}V_{s1}$ (resp. $V_{p2}V_{s2}$), les vitesses de propagation des ondes longitudinales et transversales du milieu 1 (resp. milieu 2) et $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ les angles des directions de propagation avec la surface de séparation des milieux.

Les conditions de continuité, de la contrainte et du déplacement, fournissent les équations nécessaires à la détermination des amplitudes des ondes, réfléchies et réfractées, en fonction de l'amplitude de l'onde incidente.

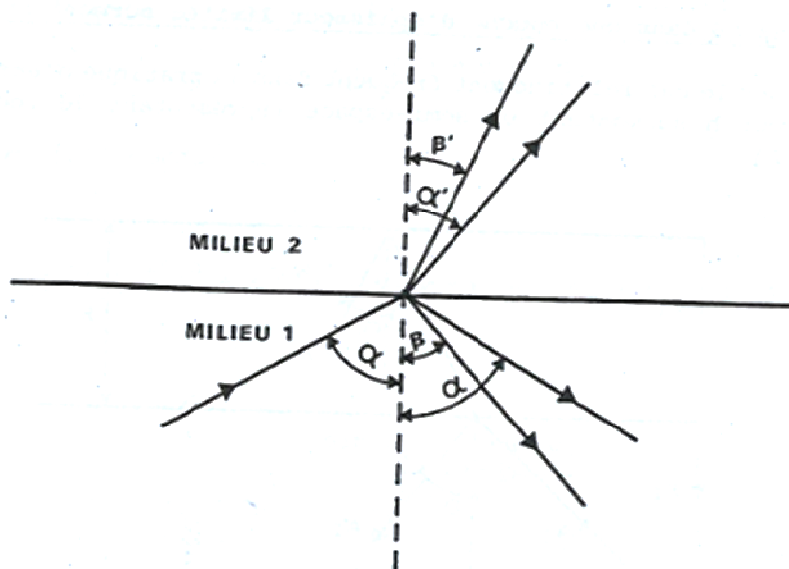


Figure II.4 : réflexion et réfraction à une interface

II.5. Propagation d'ondes planes en milieu élastique semi-infini :

Le problème de la propagation d'ondes sismiques depuis une source est un problème essentiellement tridimensionnel. En considérons la source comme constituée d'une ligne (faille) et en se plaçant à une certaine distance de celle-ci, le problème devient bidimensionnel ; toutes les ondes se propageant parallèlement à un plan (XOZ) et le mouvement est indépendant de la coordonnée Y . la solution générale pour une onde stationnaire plane s'écrit alors ($l_y = 0$) :

$$\left. \begin{aligned} U_x &= A_p f_p l_x + A_{sv} f_s l_z \\ U_y &= A_{sh} f_s \\ U_z &= A_p f_p l_x - A_{sv} f_s l_z \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.16})$$

Si l_x et l_z sont réels, inférieur à 1, ils représentent les cosinus directeurs ($l_x = \sin \alpha$, $l_y = \cos \alpha$) de la direction de propagation. Les expressions de f_p et f_s sont obtenues à partir de l'équation (II.12) avec $l_y = 0$.

Les équations (II.16) montrent que, dans le cas d'ondes planes, le déplacement suivant OY est découplé des déplacements suivant OX et OZ. Il ne résulte que de la propagation d'ondes SH alors que les déplacements suivant OX et OZ sont fonctions des ondes P et SV. Les deux problèmes peuvent être étudiés séparément.

Si la direction de propagation est vertical, parallèle à l'axe OZ ($l_x = 1$), le problème devient unidimensionnel ; chacune des composantes du mouvement est découplée des autres :

$$\left. \begin{aligned} U_x &= A_{sv} f_s \\ U_x &= A_{sh} f_s \\ U_z &= A_p f_p \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.17})$$

Les expressions de f_p et f_s sont obtenues à partir de l'équation (II.12) Avec $l_x = l_y = l_z = 1$.

L'étude de la de la propagation d'ondes SH va nous permettre de définir les paramètres intervenant dans la réponse d'un profil de sol à une onde sismique. On envisagera également le cas d'onde de Rayleigh généralisées ($l_x = 0$, l_y réel, l_z imaginaire).

II.6. Ondes SH dans un milieu semi-infini :

Le déplacement horizontal d'une onde SH incidente est donné par l'équation (II.16) :

$$U_{Yi} = A_{sh} \exp \left[\frac{i\omega}{V_s} (V_s t - X \sin \alpha + Z \cos \alpha) \right] \quad (\text{II.18})$$

Dans le cas où la propagation se fait dans le sens des Z négatifs en formant un angle α avec l'axe OZ.

En heurtant la surface libre ($z=0$), l'onde SH incidente donne naissance à une onde SH réfractée formant un angle α avec la direction OZ (loi de snell) et se propageant dans le sens des z positifs. Le déplacement U_{Yr} associé à cette onde est :

$$U_{Yr(\text{réfractée})} = A'_{sh} \exp \left[\frac{i\omega}{V_s} (V_s t - X \sin \alpha - Z \cos \alpha) \right] \quad (\text{II.19})$$

La condition de nullité de la contrainte à la surface libre $\sigma_{yz} = 0$ s'écrit :

$$\frac{\partial U_y}{\partial z}(0) = 0 \quad (\text{II.20})$$

L'amplitude de l'onde incidente est égale à l'amplitude de l'onde réfléchie. En tout point du milieu le déplacement est la somme des déplacements dus à l'onde incidente et à l'onde réfléchie, soit en combinant les équations (II.18) à (II.20) :

$$U_y = 2A_{sh} \cos \left[\frac{\omega}{V_s} Z \cos \alpha \right] \exp \left[\frac{i\omega}{V_s} (V_s t - X \sin \alpha) \right] \quad (\text{II.21})$$

II.7. Ondes SH dans une couche d'épaisseur limitée surmontant un semi-espace :

Considérons le cas relativement fréquent dans la pratique d'une couche homogène d'épaisseur h surmontant un semi-espace représentant le rocher sous-jacent :

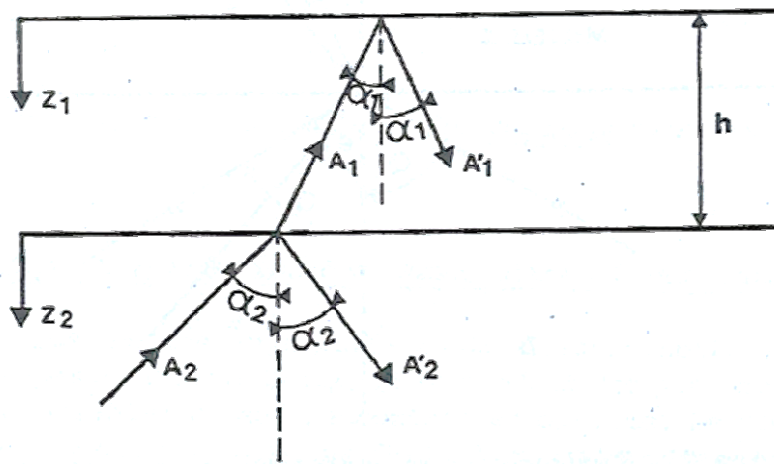


Figure II.5 : réflexion et réfraction d'une onde SH dans une couche d'épaisseur limitée surmontant un semi-espace

Désignant par l'indice 1 les paramètres relatifs à la couche de sol et par l'indice 2 ceux relatifs au demi-espace, par A (resp A') les amplitudes des ondes se propageant dans le sens des $z < 0$ (resp. $z > 0$) Et en prenant des repères liés à chaque milieu ($z=0$ représentant le toit de la couche). Le déplacement horizontal dans chaque couche s'écrit (Équations II.18 et II.19) :

$$U_n = [A_n \exp(ip_n z_n) + A'_n \exp(-ip_n z_n)] f_n(x, t) \quad n= 1,2 \quad (\text{II.22})$$

$$\text{Avec :} \quad p_n = \frac{\omega \cos \alpha_n}{V_{sn}}$$

$$f_n(x, t) = \exp \left[\frac{i\omega}{V_{sn}} (V_{sn} t - X \sin \alpha_n) \right] \quad n= 1,2.$$

La condition de surface libre conduit (équation II.20) donne : $A_1 = A'_1$

Les conditions de compatibilité à l'interface de deux milieux, qui doivent être vérifiées pour tous x et t , s'écrivent :

$$U_1(h) = U_2(0) \quad (\text{II.23})$$

$$\sigma_{yz1}(h) = \sigma_{yz2}(0) \quad (\text{II.24})$$

La relation (II.23) conduit à

$$A_1 = (e^{ip_1 h} + e^{-ip_1 h}) f_1(x, t) = (A_2 + A'_2) f_2(x, t) \quad (\text{II.25})$$

$$\text{On a :} \quad \frac{\sin \alpha_1}{V_{s1}} = \frac{\sin \alpha_2}{V_{s2}} \text{ la loi de Snell} \quad (\text{II.26})$$

$$\text{Donc :} \quad A_1 = (e^{ip_1 h} + e^{-ip_1 h}) = (A_2 + A'_2) \quad (\text{II.27})$$

La relation (II.24) s'écrit :

$$G_1 \frac{\partial U_1}{\partial z}(h) = G_2 \frac{\partial U_2}{\partial z}(0) \quad (\text{II.28})$$

$$\text{Soit :} \quad A_1 G_1 p_1 (e^{ip_1 h} - e^{-ip_1 h}) = A_2 G_2 (A_2 - A'_2) \quad (\text{II.29})$$

En posant

$$\frac{p_1 G_1}{\rho_2 G_2} = \sqrt{\frac{\rho_1 G_1 \cos \alpha_1}{\rho_2 G_2 \cos \alpha_2}} = q \quad (\text{II.30})$$

Les relations (II.27) et (II.29) permettent de déterminer les amplitudes A_2 et A'_2 en fonction de A_1

$$A_2 = \frac{1}{2} A_1 [(1 + q)e^{ip_1 h} + (1 - q)e^{-ip_1 h}] \quad (\text{II.31})$$

$$A'_2 = \frac{1}{2} A_1 [(1 - q)e^{ip_1 h} + (1 + q)e^{-ip_1 h}] \quad (\text{II.32})$$

Le rapport q de l'équation (II.30) est appelé le rapport d'admittance entre la couche de sol et semi-espace, son inverse est le rapport d'impédance.

II.8. Fonction de transfert :

On appelle fonction de transfert la fonction reliant l'amplitude du déplacement à la surface de la couche de sol (point A de la figure II.6) à l'amplitude du déplacement à l'interface (point B). Soit $T_{1,2}$ cette fonction. Il est également possible de définir une fonction de transfert entre les amplitudes des déplacements des points A et B' situé sur un affleurement hypothétique du demi-espace. Soit $T_{1,2}^*$ cette fonction. D'après les relations (II.22), (II.31) et (II.32) :

$$T_{1,2}(\omega) = \frac{2A_1}{A_2 + A_2'} = \frac{1}{\cos(p_1 h)} \quad (\text{II.33})$$

$$T_{1,2}^*(\omega) = \frac{2A_1}{2A_2} = \frac{1}{\cos(p_1 h) + i q \sin(p_1 h)} \quad (\text{II.34})$$

$$\text{Soit : } \| T_{1,2}^*(\omega) \| = [\cos^2(p_1 h) + q^2 \sin^2(p_1 h)]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{II.35})$$

La fonction $T(\omega)$ ne dépend pas des propriétés du semi-espace sous-jacent. Elle correspond à l'hypothèse d'une assise infiniment rigide où le déplacement est imposé (table vibrante). Cette fonction devient infinie pour les valeurs :

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{V_{s1}}{h \cos \alpha_1} \quad (\text{II.26}).$$

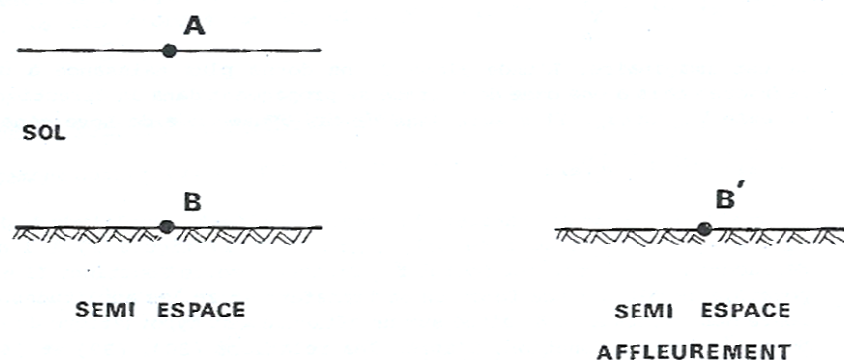


Figure II.6 : définition d'un point de contrôle

L'effet du demi-espace est absorber l'énergie transportée par l'onde réfléchie A_2' . Ce phénomène est appelé amortissement radiatif. Cet amortissement est essentiellement différent de l'amortissement matériel rencontré dans l'étude du comportement des sols; ce dernier est

lié au comportement du matériau par opposition au premier qui résulte de la propagation d'ondes à l'infini. Il est important de noter que l'amortissement radiatif existe même dans un matériau élastique linéaire qui ne présente pas d'amortissement matériel. Lorsque le contraste entre les caractéristiques du demi-espace et des couches sus-jacentes augmente ($q \rightarrow 0$), l'onde réfléchie provenant de la couche de sol est moins absorbée dans le demi-espace; à la limite elle est totalement réfléchie sur cette frontière et l'énergie qu'elle transporte est prisonnière dans la couche de sol; c'est le cas par exemple d'une table vibrante. Ceci contribue à augmenter la réponse dans la couche de sol.

Un exemple de fonction de transfert $T(\omega), T(\omega)^*$ est donné sur la figure (7) dans le cas d'une couche de sol élastique de 20 m d'épaisseur ($V_s = 200 \text{ m/s}, \rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$) surmontant un demi-espace $V_s = 1500 \text{ m/s}, \rho = 2400 \text{ Kg/m}^3$). L'angle d'incidence est pris nul.

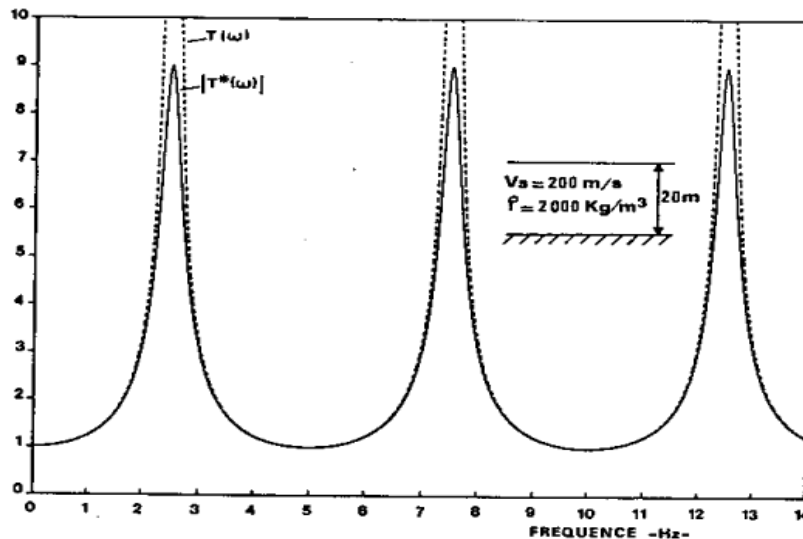


Figure II.7 : Fonction de transfert-Milieu élastique

II.9. Précision des modèles discrets :

L'utilisation de modèles discrets pour représenter le profil de sol pose la question de la finesse de la discrétisation. Plus celle-ci est grande, meilleure est la précision ; par contre le temps de résolution croît également. Divers auteurs (*LYSMER et al, 1975 ; ROSSETE, 1977*) ont proposé des règles permettant de fixer la dimension maximale des éléments. Si f_{max} est la fréquence maximale que l'on désire représenter avec le model, la longueur d'onde associée à f_{max} est :

$$\lambda_{onde} = \frac{V_s}{f_{max}} \quad (\text{II.27})$$

Le déplacement à l'intérieur d'un élément du modèle variant linéairement, le déplacement associé à cette longueur d'onde sera correctement approché si au moins 3 à 4 points de discrétisation sont retenus pour une demi-longueur d'onde (figure II.8).

Cette condition conduit à une taille d'éléments :

$$h_{\text{élément}} \leq \frac{V_s}{(6 \text{ à } 8)f_{\text{max}}} \quad (\text{II.28}).$$

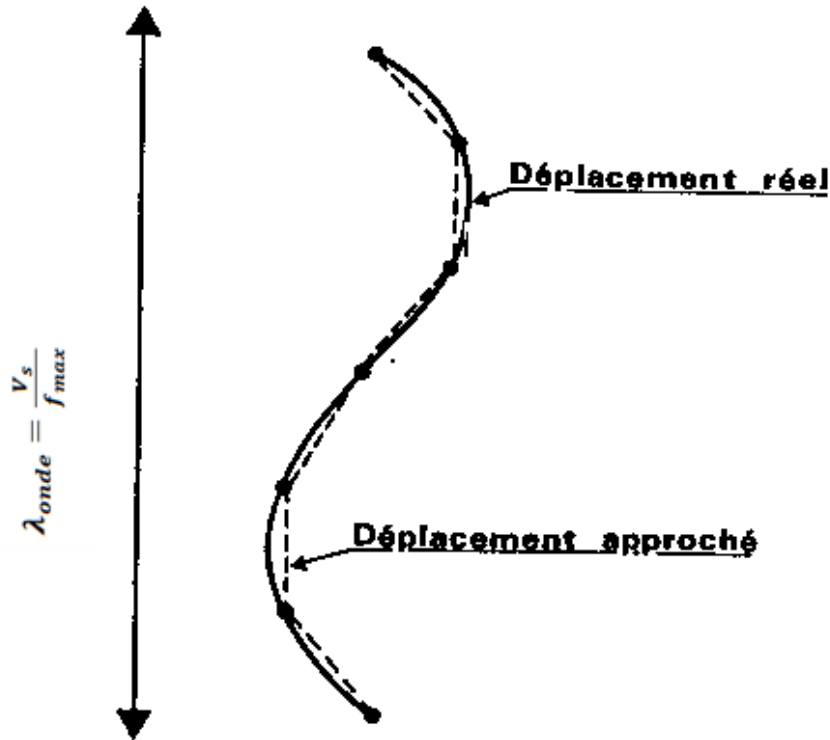


Figure II.8: choix de la dimension des éléments

Pour juger de la validité de la formule (II.28), les pulsations propres théoriques d'une couche de sol (équation (II.26)), (Pecker, A. (1984)), d'épaisseur H , à celles données par un modèle élément finis comportant chacun 16 éléments. Si $\omega_{1t} = \frac{\pi V_s}{2H}$

L'application de la formule (II.28) montre que la fréquence maximale transmise par le modèle est :

$$f_{\text{max}} = \frac{16}{(6 \text{ à } 8)} \frac{V_s}{H} \quad (\text{II.29})$$

Soit :

$$\omega_{\text{max}} = (8 \text{ à } 10)\omega_{1t} \quad (\text{II.30})$$

II .10. Conclusion :

Le deuxième chapitre est consacré aux aspects théoriques relatifs à la propagation des ondes dans un milieu hyper – élastique, isotrope et linéaire.

Chapitre III

Amortissement matériel (géométrique)

III.1 Introduction :

L'apparition d'une boucle d'hystérésis au cours d'un cycle fermé de chargement met en évidence une dissipation d'énergie dans le matériau. Le terme amortissement matériel est utilisé pour décrire le phénomène physique de conversion l'énergie cinétique et d'énergie potentielle (énergie de déformation) en chaleur. L'amortissement est une grandeur fondamentale dans l'étude des phénomènes vibratoires en particulier au voisinage de la résonance. C'est lui qui permet un système physique, mis en vibration à une fréquence égale à sa fréquence de résonance, de maintenir une amplitude de déplacement limitée.

Parmi les matériaux présentant de l'amortissement, on peut distinguer ceux pour lesquels :

- l'énergie dissipée dépend de la vitesse de déformation. C'est en particulier le cas des matériaux viscoélastiques linéaire. Certains matériaux comme les polymères exhibent ce type de comportement à amortissement visqueux. Ce n'est pas le cas des sols pour lesquels l'expérience montre que l'énergie dissipée est essentiellement indépendante de la vitesse de déformation.
- l'énergie dissipée ne dépend pas de la vitesse de déformation. L'amortissement est quelquefois dit hystérétique, ces matériaux sont caractérisés par des non-linéarités importantes à fort niveau de déformation. L'amortissement est attribué à des déformations plastiques au niveau des cristaux ou des grains constituant la structure. La plupart des métaux et des Bois appartiennent à cette catégorie.

III.2 Définitions des paramètres caractérisant l'amortissement :

Deux grandeurs peuvent être utilisées pour caractériser l'amortissement d'un matériau:

- l'énergie dissipée par cycle dans l'élément
- le rapport de cette énergie à une énergie élastique de référence.

L'énergie dissipée par cycle peut s'exprimer soit à l'aide de l'énergie totale D_0 (N-m/cycle) dissipée par le spécimen dans un cycle de sollicitation, soit à l'aide de l'énergie spécifique D

(N -m/m³/cycle) dissipée par unité de volume en un point du matériau. D₀ est la grandeur directement mesurable dans l'expérience mais D est la grandeur fondamentale du point de vue du comportement. On a la relation évidente entre ces deux grandeurs :

$$D_0 = \iiint D(x, y, z) d_x d_y d_z \quad (III.1)$$

Pour un échantillon dans lequel le champ de contraintes est uniforme:

$$D_0 = DV \quad (III.2)$$

Où V est le volume de l'échantillon.

Amplitude de la contrainte cyclique (Mpa)

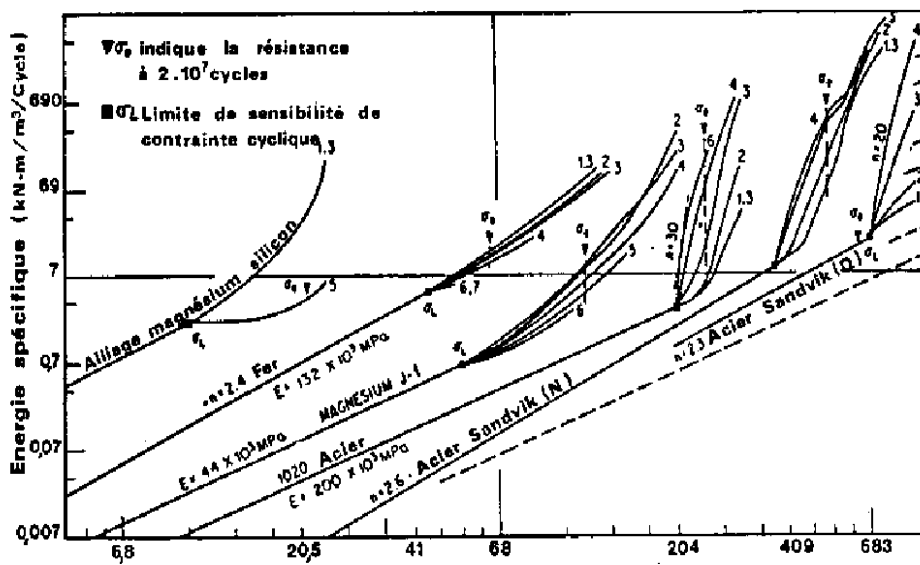


Figure III.1 : Energie spécifique dissipée en fonction de la contrainte cyclique et du nombre de cycle N (Une courbe marquée 3 correspond à 103 cycle)

L'expérience montre que pour beaucoup de matériaux, il n'existe pas de relation simple entre l'énergie spécifique dissipée D et la valeur de la contrainte cyclique σ_d . Cependant, pour des seuils de contrainte n'excédant pas 70 % de la limite de résistance sous chargement cyclique du matériau σ_e , on a une relation de la forme :

$$D = J \left[\frac{\sigma_d}{\sigma_e} \right]^n \quad (III.3)$$

La figure (III.1) [GOODMAN, 1976] met en évidence une telle relation avec une valeur de n comprise entre 2.0 et 3.0.

Dans la pratique, on préfère exprimer l'amortissement matériel à l'aide d'une grandeur

adimensionnelle obtenue en normant l'énergie dissipée par une énergie élastique de référence. Cependant, en raison de la complexité des mécanismes gouvernant l'amortissement matériel, l'utilisation d'un pourcentage d'amortissement ne produit pas tous les avantages qu'on pourrait attendre d'une grandeur adimensionnelle [GOODMAN, 1976] • Une des raisons de l'utilisation de telles grandeurs réside dans leur appréhension directe par certains essais. C'est en particulier le cas du décrement logarithmique δ . Par définition, le décrement logarithmique δ est le logarithme du rapport de deux amplitudes consécutives d'un échantillon oscillant librement (figure III.2).

$$\delta = \text{Ln} \frac{X_{n+1}}{X_n} \quad (\text{III.4})$$

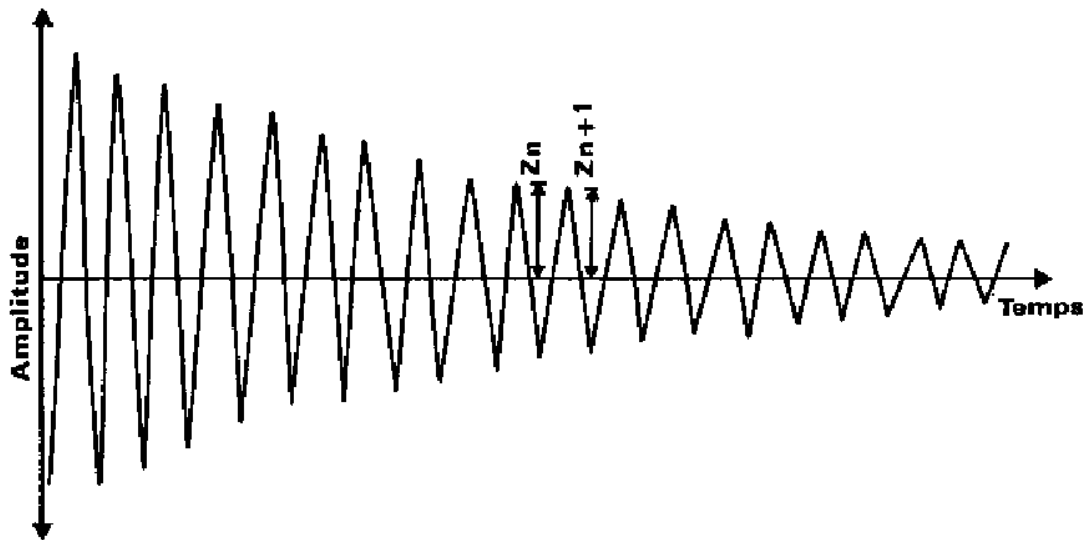


Figure III.2: Amortissement des vibrations libres

D'autres coefficients permettent de définir de façon adimensionnelle l'amortissement matériel (LAZAN, 1968) parmi ceux-ci on distingue.

- le coefficient de perte, noté η , qui est par définition égal, au rapport de l'énergie dissipée D au cours d'un cycle à 2π fois l'énergie élastique emmagasinée.

$$\eta = \frac{D}{2\pi W} \quad (\text{III.5})$$

W est l'aire du triangle en grise:

$$W = \frac{1}{2} G y_m^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau_m^2}{G} \quad (\text{III.6})$$

D'où :

$$\eta = \frac{DG}{\pi\tau_m^2} = \frac{D}{\pi G y_m^2} \quad (\text{III.7})$$

la capacité d'amortissement spécifique η , égale au rapport de l'énergie dissipée l'énergie élastique emmagasinée.

$$X = \frac{D}{W} \quad (\text{III.8})$$

- le déphasage ϕ qui représente l'angle formé par les vecteurs représentant la contrainte (la force) et la déformation (le déplacement) lors d'un mouvement sinusoïdal,
- le facteur de qualité Q qui mesure l'atténuation de l'amplitude d'ondes se propageant dans un milieu du fait de l'absorption d'énergie par - amortissement matériel. Cette atténuation est à distinguer de celle résultant de la dispersion le long du front d'onde, appelée amortissement géométrique.
- Tous les paramètres de finis précédemment sont liés par les relations:

$$\eta = \frac{\delta}{\pi} = \frac{X}{2\pi} = \tan\phi = \frac{1}{Q} \quad (\text{III.9})$$

III.3. Matériaux à amortissement dépendant de la vitesse de déformation:

Les matériaux de ce type ont une loi de comportement décrite par une fonctionnelle faisant intervenir le tenseur des contraintes $\underline{\sigma}$, le tenseur des déformations $\underline{\epsilon}$ et leurs dérivées par rapport au temps $\dot{\underline{\epsilon}}$ et $\dot{\underline{\sigma}}$. Cette fonctionnelle peut ne pas être linéaire mais, en pratique, la plupart des modèles sont basés sur la théorie de la visco-élasticité linéaire qui a fait l'objet de développements très complets (MANDEL, 1966 ; SALENÇON, 1983). Sous excitation harmonique, on rend compte du comportement du matériau en introduisant des modules complexes de la forme :

$$G^* = G_1(\omega) + iG_2(\omega) \quad (\text{III.10})$$

Où G_1 et G_2 dépendent de ω , pulsation de la force excitatrice.

L'expression ci-dessus, écrite pour le module de cisaillement, est également valable pour le module d'Young, le module de compressibilité volumétrique correspondant à d'autres

sollicitations. Elle traduit le fait que sous sollicitation harmonique, la contrainte peut être décomposée en une composante en phase avec la déformation ($G_1(w)$) et une autre déphasée de 90° ($G_2(w)$). Pour cette sollicitation la boucle d'hystérésis formée est elliptique. On montre aisément que pour un cycle d'amplitude maximale y_m l'énergie spécifique dissipée vaut;

$$D = \pi G_2(w) y_m^2 \quad (\text{III.11})$$

G_2 dépendant de la pulsation w , donc de la vitesse de déformation, l'énergie spécifique dissipée est fonction de cette vitesse de déformation.

En rapprochant cette équation de la relation (III.3), on constate que pour les matériaux à amortissement dépendant de la vitesse de déformation, $n = 2$. Le déphasage ϕ est donné par :

$$\tan \phi = \frac{G_2(w)}{G_1(w)} \quad (\text{III.12})$$

Du point de vue rhéologique, un matériau visco-élastique linéaire peut être représenté par un ressort et un amortisseur placés en série (modèle de Maxwell) ou en parallèle (modèle de Kelvin.-Voigt). Dans ce cas $G_2(w)$ est égal à $C.w$ où C est la caractéristique de l'amortisseur et, $G_1(w)$ à G , la caractéristique du ressort. Une façon commode de caractériser l'amortissement d'un tel modèle est d'introduire la notion de pourcentage d'amortissement critique, souvent utilisée en dynamique des structures. Par définition le pourcentage d'amortissement critique vaut.

$$\beta = \frac{c}{c_c} = \frac{c p}{2G_1} \quad (\text{III.13})$$

Où p est la pulsation propre du modèle.

D'après l'équation (III.11) et les relations (III.9), en se plaçant à la résonance,

C'est-à-dire d'une situation où la fréquence d'excitation $w/2\pi$ est égale à la fréquence propre du modèle $p/2\pi$, on a la relation:

$$\beta = \frac{D}{4\pi W} = \frac{\eta}{2} \quad (\text{III.14})$$

La dépendance du pourcentage d'amortissement critique sur la vitesse de déformation n'apparaît plus explicitement. Elle est en fait implicite dans la valeur de D . La relation (III.14) est la relation fondamentale qui sert de base au développement de modèles visco-élastiques

linéaires équivalents caractérisé par un pourcentage d'amortissement critique β directement relié au coefficient de perte η du matériau. La nature de l'amortissement visqueux ou autre, n'est plus précisée. Il est représenté par un amortissement linéaire visqueux équivalent. On verra que cette approche est très utilisée pour rendre compte de façon simple du comportement des cols sous chargement cyclique.

III.4. Matériau a amortissement indépendant de la vitesse de déformation :

Les matériaux de ce type ont une loi de comportement dans laquelle le temps n'intervient pas. Sous chargement cyclique les boucles d'hystérésis présentent des extrémités pointues et, si l'effort appliqué redevient nul, il subsiste dans le matériau une déformation permanente.

L'énergie dissipée au cours d'un cycle prend la forme donnée par la relation (III.3) avec une valeur de n comprise entre 2 et 3 [GOODMAN, 1976]. Elle peut également s'exprimer à l'aide du coefficient de perte défini par la relation (III.5). D'un point de vue rhéologique le matériau peut être représenté par un assemblage de ressorts et de frotteurs (frottement de Coulomb) placés soit en série, soit en parallèle.

III.5. Construction de matrices proportionnelles d'amortissement visqueux :

III.5.1. Introduction :

Amortissement d'un système vibrant est un paramètre très compliqué, et il est particulièrement vrai pour les vibrations de fondation reposant sur le sol. Amortissement des fondations vibrantes se compose de deux parties, à savoir, l'amortissement matériel et l'amortissement radiatif. Amortissement matériel est dû à l'effet d'hystérésis sur l'amortissement des matériaux et l'amortissement radiatif est dû à la dissipation d'énergie dans le milieu du sol sans bornes. L'amortissement matériel de sol varie entre 1 et 10% de l'amortissement critique, selon le type de matériau, tandis que l'amortissement radiatif dépend de plusieurs facteurs, et sa valeur peut être aussi élevée que 50% de l'amortissement critique. L'amortissement radiatif pour une vibration verticale d'une fondation reposant sur un demi-espace homogène peut être approximativement estimé que $0,425\sqrt{B_z}$ où B_z est le rapport de masse modifiée est égale $\left[\frac{1-\nu}{4}\right] \left(\frac{W}{\gamma r^3}\right)$, où W étant le poids de la fondation (dans notre cas W est nul) et γ étant poids unitaire du sol. Cette méthode donne des lignes directrices sur l'amortissement radiatif, mais souvent il donne des résultats trompeurs, en particulier pour des valeurs faibles de B_z (inférieur de 1,5) (D. K. Baidya; G. Muralikrishna; and P. K. Pradhan (2006)).

III.5.2. L'amortissement de Rayleigh :

Il n'y a généralement pas besoin d'exprimer l'amortissement d'un système typique PDDL visqueuse atténués par des moyens de la matrice d'amortissement parce qu'elle est représentée plus facilement en termes de les coefficients amortissements modaux ε_n ($n = 1; 2; \dots; N$). Cependant, dans au moins deux situations d'analyse dynamique de la réponse n'est pas obtenue par la superposition des réponses modales découplées, de sorte que l'amortissement ne peut être exprimée par les rapports d'amortissement - au lieu d'une matrice d'amortissement explicite est nécessaire. Ces deux situations sont les suivantes: (1) des réponses non linéaires, pour lesquels les formes de mode ne sont pas fixes mais évoluent avec les changements de la rigidité, et (2) l'analyse d'un système d'amortissement linéaire ayant non proportionnels (*Ray W, Clough and Joseph Penzien, (1995)*). Dans ces deux circonstances, le moyen le plus efficace pour déterminer la matrice d'amortissement requis est d'abord d'évaluer un ou plusieurs matrices proportionnelles d'amortissement. En effectuant une analyse non linéaire, il convient de définir la matrice d'amortissement proportionnelle pour l'état initial du système élastique (avant déformations non-linéaires ont eu lieu) et à supposer que cette propriété reste constante d'amortissement au cours de la réponse même si la rigidité peut être changeante et causant les pertes d'énergie par hystérésis en plus des pertes d'amortissement visqueux. Dans les cas où l'amortissement est considéré comme non proportionnel, une matrice appropriée d'amortissement peut être construit par assemblage d'un ensemble de dérivés convenablement proportionnelles matrices d'amortissement, comme expliqué plus loin dans cette section. Ainsi, pour ces deux situations, il est nécessaire d'être en mesure de tirer appropriées proportionnelles matrices d'amortissement.

Clairement le plus simple pour formuler une matrice d'amortissement proportionnel est de rendre proportionnel à la masse soit ou la matrice de rigidité que les formes de mode non amortis sont orthogonaux par rapport à chacune d'elles. Ainsi, la matrice d'amortissement pourrait être donnée par (*Ray W, Clough and Joseph Penzien, (1995)*):

$$c = a_0 m \omega_n = a_1 k \quad (\text{III.15})$$

Dans lequel les constantes de proportionnalité (a_0) et (a_1) ont des unités de (sec^{-1}) et Sec, respectivement. C'est ce qu'on appelle la masse et de l'amortissement proportionnel rigidité proportionnelles, et le comportement d'amortissement qui leur sont associés peuvent être reconnus par l'évaluation de la valeur d'amortissement modal généralisé pour chacune:

$$C_n = \Phi_n^T c \Phi_n = a_0 \Phi_n^T m \Phi_n \text{ ou } a_1 \Phi_n^T k \Phi_n \quad (\text{III.16})$$

Avec les conditions d'orthogonalité sont :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_m^T m \Phi_n &= 0 \\ \Phi_m^T k \Phi_n &= 0 \\ \Phi_m^T c \Phi_n &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } m \neq n$$

$$\text{On a: } \varepsilon_n = \frac{c_n}{2\omega_n M_n}$$

Donc :

$$2\omega_n M_n \varepsilon_n = a_0 M_n \text{ ou } a_1 K_n \text{ (où } K_n = \omega_n^2 M_n \text{)}$$

D'où

$$\varepsilon_n = \frac{a_0}{2\omega_n} \text{ ou } \varepsilon_n = \frac{a_1 \omega_n}{2} \quad (\text{III.17})$$

Ces expressions pour montrer que masse d'amortissement proportionnelles, le facteur d'amortissement est inversement proportionnel à la fréquence tandis que pour d'amortissements proportionnels rigidité il est directement proportionnel à la fréquence. À cet égard, il est important de noter que la réponse dynamique générale comprendra des contributions de tous les modes de N même si seulement un nombre limité de modes sont incluses dans les équations découplées du mouvement. Ainsi, aucun de ces types de matrice d'amortissement n'est adapté pour une utilisation avec un système PDDL dans lequel les fréquences des modes importants couvrent un large éventail parce que les amplitudes relatives des différents modes seront gravement faussées par les taux d'amortissement inapproprié.

Un résultat d'amélioration grossières si l'amortissement est supposé être proportionnelle à une combinaison de la matrice masse et la matrice de rigidité, telle qu'indiquée par la somme des deux expressions alternatives représentées par l'équation(II.15):

$$c = a_0 m + a_1 k \quad (\text{III.18})$$

C'est ce qu'on appelle l'amortissement de Rayleigh, d'après Lord Rayleigh, qui, le premier a suggéré son utilisation. Par analogie avec le développement dans les équations. (III.15) à (II.17), il est évident que de l'amortissement de Rayleigh conduit à la relation suivante entre le taux d'amortissement et la fréquence :

$$\varepsilon_n = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1 \omega_n}{2} \quad (\text{III.19})$$

Les relations entre les taux d'amortissement et la fréquence exprimée par les équations. (III.17) et (III.19) sont représentés graphiquement sur la Fig. (III.14)

Maintenant il est évident que les deux facteurs de l'amortissement de Rayleigh, a_0 et a_1 , peut être évaluée par la solution d'une paire d'équations simultanées, si les taux d'amortissement ε_m et ε_n associé à deux fréquences spécifiques (modes) ω_m, ω_n sont connue (*Ray W, Clough and Joseph Penzien, (1995)*).

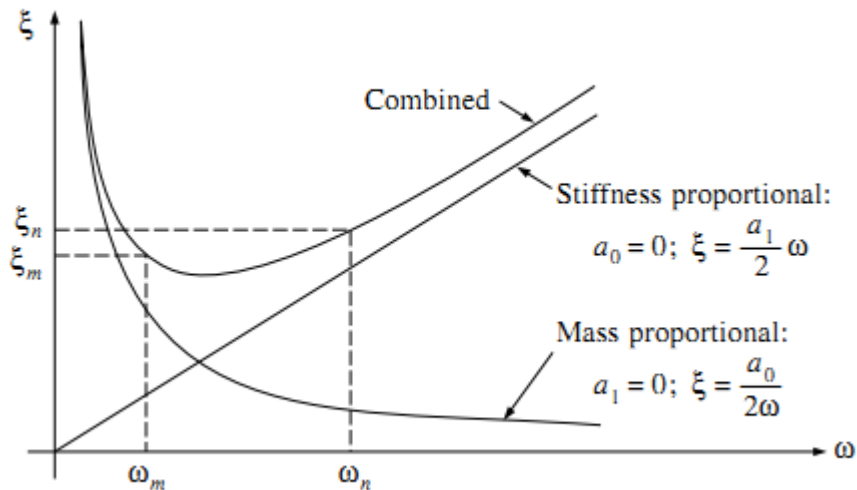


Figure III.3: Relation entre le coefficient d'amortissement et la fréquence (pour l'amortissement de Rayleigh)

Rédaction équation. (III.19) pour chacun de ces deux cas et exprimant les deux équations sous forme matricielle conduit à :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_m & \omega_m \\ 1/\omega_n & \omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \quad (III.20)$$

et les facteurs résultant de la solution simultanée sont :

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = 2 \frac{\omega_m \omega_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \begin{bmatrix} \omega_n & -\omega_m \\ -1/\omega_n & 1/\omega_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix} \quad (III.21)$$

Lorsque ces facteurs ont été évalués, la matrice d'amortissement proportionnelle qui donne les valeurs requises de coefficient d'amortissement à des fréquences spécifiques est donnée par l'expression de l'amortissement de Rayleigh, l'équation. (III.19), comme le montre la figure (III.3).

Parce que des informations détaillées sur la variation du coefficient d'amortissement avec la fréquence est rarement disponible, il est généralement supposé que le ratio d'amortissement s'applique aux mêmes fréquences de contrôle les deux, c'est à dire, $\varepsilon_m = \varepsilon_n \equiv \varepsilon$. Dans ce cas, les facteurs de proportionnalité sont donnés par une version simplifiée de l'équation. (III.21):

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{2\varepsilon}{\omega_m + \omega_n} \begin{bmatrix} \omega_m \omega_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (III.22)$$

En appliquant cette procédure d'amortissement proportionnel dérivation matrice dans la pratique, il est recommandé que ω_m généralement être considérée comme la fréquence

fondamentale du système PDDL et que ω_n être placé parmi les plus hautes fréquences des modes qui contribuent de manière significative à la réponse dynamique (*Ray W, Clough and Joseph Penzien, (1995)*). La dérivation sorte que le rapport désiré d'amortissement est obtenu pour ces deux modes (c.-à, $\varepsilon_1 = \varepsilon_n = \varepsilon$), puis, comme le montre la figure (III.3), les modes avec des fréquences comprises entre ces deux fréquences spécifiées auront des valeurs légèrement inférieures de facteur d'amortissement, tandis que tous les modes avec des fréquences supérieures à ω_n aura taux d'amortissement qui augmente au-dessus ε_n de façon monotone avec la fréquence. Le résultat final de cette situation est que les réponses des modes très haute fréquence sont efficacement éliminées par leurs hauts taux d'amortissement.

Dans la mise en œuvre numérique des problèmes dynamiques, la formulation de l'intégration du temps constitue un facteur important pour la stabilité et la précision du processus de calcul. L'intégration explicite et implicite sont deux couramment utilisés schémas d'intégration temporelle. Dans Plaxis, le type de schéma de temps d'intégration implicite de Newmark est mis en œuvre. Avec cette méthode, le déplacement et la vitesse à l'instant $t + \Delta t$ sont exprimées respectivement par:

$$u^{t+\Delta t} = u^t + \dot{u}^t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha_N \right) \ddot{u}^t + \alpha_N \ddot{u}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2$$

$$\dot{u}^{t+\Delta t} = \dot{u}^t + [(1 - \beta_N) \ddot{u}^t + \beta_N \ddot{u}^{t+\Delta t}] \Delta t$$

Pour déterminer les paramètres α_N et β_N , différentes suggestions sont proposées (*Barrios et al (2005), (Ciro Visone)*):

- a) $\alpha_N = 1/6$ et $\beta_N = 1/2$, qui conduisent à une approximation linéaire d'accélération (régime stable conditionnellement);
- b) $\alpha_N = 1/4$ et $\beta_N = 1/2$, qui conduisent à une accélération moyenne constante (régime inconditionnellement stable);
- c) $\alpha_N = 1/12$ et $\beta_N = 1/2$, la méthode renard Goodwin, qui est l'ordre quatrième précis (régime conditionnellement stable);

Afin de maintenir un régime de second ordre précis et à introduire la dissipation numérique, une modification du régime initial de Newmark a été proposé par Hilber et al (Ciro Visone), l'introduction d'un nouveau paramètre γ_N , qui est un paramètre de dissipation numérique. Le système d'origine Newmark devient lay_N -méthode ou Newmark HHT modification. Lay_N -

méthode conduit à un régime de temps d'intégration inconditionnellement stable et les nouveaux paramètres de Newmark sont exprimés en fonction de γ_N paramètre, en fonction de:

$$\alpha_N = \frac{(1 + \gamma_N)^2}{4} \text{ et } \beta_N = \frac{1}{2} + \gamma_N$$

Où la valeur de γ_N appartient à l'intervalle $[0, 1/3]$. En supposant $\gamma_N = 0$ les méthodes modifiées de Newmark coïncide avec la méthode originale de Newmark avec une accélération moyenne constante. En outre, afin d'obtenir une solution stable, la condition suivante doit s'appliquer dans le Code Plaxis:

$$\alpha_N \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \beta_N \right)^2$$

Le réglage standard de Plaxis est le schéma de Newmark amorti avec $\alpha_N = 0,3025$ et $\beta_N = 0,6$, qui correspond à $\gamma = 0,1$.

III.6 Conclusion :

Notions sur l'amortissement matériel a été présentés dans ce chapitre.

Chapitre IV

ETUDE PARAMETRIQUE DE L'AMORTISSEMENT RADIATIF

Au niveau de l'interface sol – fondation, la vibration d'une fondation donne naissance à une vibration, qui peut être représentée en général par une somme de fonctions harmoniques et qui se propage sous forme d'ondes de volume ou de surface. L'étude de la propagation radiative de ces ondes nécessite la modélisation de l'interface sol – fondation en tenant compte de la géométrie de la fondation de même que cela nécessite la modélisation des interfaces sol – sol des différentes couches rencontrées. Dans le présent, en utilisant un cas simple dont la solution analytique existe, notre objectif est d'une part, de mettre en place une procédure de calcul numérique applicable par la suite à des cas plus complexes et d'autre part d'étudier l'effet des paramètres physiques du sol sur le phénomène de radiation des ondes dans le cas du sol non dissipatif et celui du sol dissipatif.

IV.1 Calcul l'impédance d'une fondation circulaire sur un demi-espace élastique avec un degré de liberté verticale :

A titre illustratif, nous présentons les aspects mathématiques qui sous tendent les notions de raideur (cas statique) et d'amortissement radiatif (cas dynamique) dans l'expression d'une fonction d'impédance. Cette présentation servira dans un travail ultérieur à l'étude des effets des paramètres physiques sur la fonction d'impédance. Nous faisons une analyse de la variation de la raideur statique pour cinq différents en maillages éléments. Une comparaison entre les résultats analytiques et numériques est présentée, puis nous étudions les effets du maillage et des propriétés physiques du sol sur la valeur de la raideur statique. Par la suite, notre attention se focalisera uniquement sur la partie imaginaire de cette fonction en l'étudiant à travers l'analyse de la radiation des ondes dans un demi - espace élastique (représentant le sol) sous l'effet du mouvement en translation vertical d'une fondation circulaire soumise à une vibration harmonique.

IV.1. Raideur statique (la formule de Boussinesq):

Une classe importante de problèmes est formé par les problèmes d'un demi-espace ($Z > 0$), délimitée par le plan $z = 0$, chargé par contraintes verticales normales sur la surface uniquement, voir la figure (IV.1), ce qui est appelé la classe des problèmes de Boussinesq,

d'après le scientifique français qui a publié plusieurs solutions de ces problèmes en 1885 (Arnold Verruijt, (1994)).

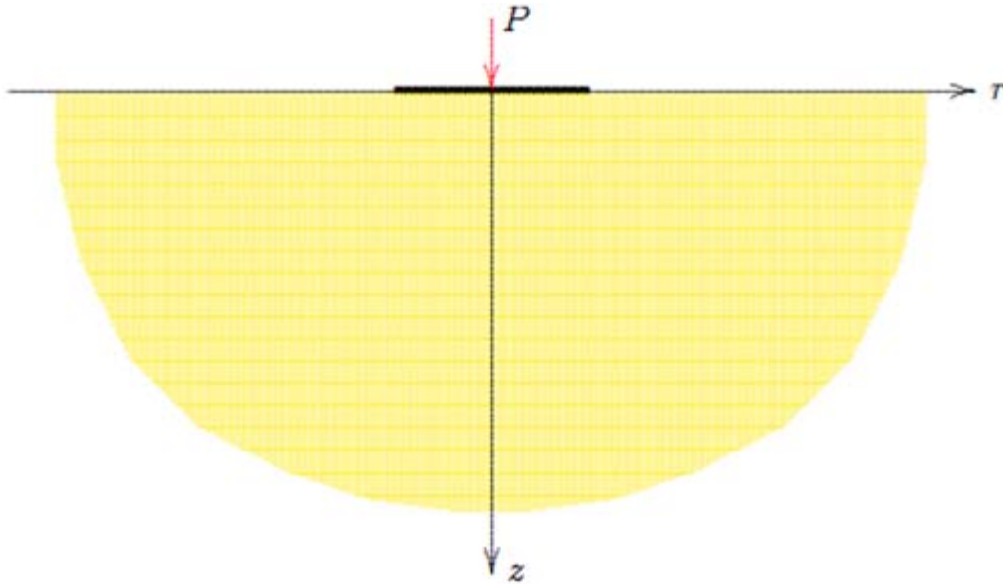


Figure IV.1: Fondation circulaire rigide sur semi-espace

$$s = \frac{\pi}{2} \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_z a \text{ (Jean Costet, guySanglerat, (1981))}$$

$$\text{Théoriquement } \sigma_{z=0} = \frac{p}{\pi a^2} \Rightarrow p = \pi a^2 \sigma_{z=0}$$

$$\text{Par définition : } K_{\text{statique}} = \frac{p}{s}$$

Donc :

$$s = \frac{\pi}{2} \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_z a$$

$$s = \frac{\pi}{2} \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_z a \frac{a}{a} \Rightarrow s = p \frac{1-\nu^2}{2Ea}$$

Et $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ pour un sol homogène et isotrope

$$s = p \frac{(1-\nu)(1+\nu)}{2Ea} = p(1-\nu) \frac{(1+\nu)}{4G(1+\nu)a}$$

$s = p(1 - \nu) \frac{1}{4Ga} \Rightarrow \frac{p}{s} = \frac{4Ga}{(1-\nu)} = K_{statique}$. (R, W, Bell, G, T, Houlsby & H, J, Burd, pour une fondation lisse (1992); Sieffert, J. G. and Cevaer, F. (1993)).

IV.1.2. Simulation par la méthode des éléments finis du comportement statique du système fondation - sol:

Pour l'analyse de la raideur statique du sol et de ses variations en fonction des propriétés du sol et ce pour cinq (05) différents types de maillage, nous avons utilisé le logiciel SAP 2000. Nous comparons les solutions analytiques et numériques de la raideur statique.

IV.1.2.1. Présentation du Modèle en éléments finis:

La modélisation a été faite par logiciel SAP 2000.14, On a un modèle axisymétrique, On prend un modèle de $10 \cdot R$ de largeur et de $25 \cdot R$ de profondeur ($(10 \cdot R / 25 \cdot R)$ est un rapport très important il faut le respecter si est un travail d'analyse dynamique avec l'objectif d'éviter le problème de réflexion des ondes de vibrations si on n'utilise pas des frontières absorbantes), donc il prend 100 ft de largeur (suivant OX) et 250 ft de profondeur (suivant OZ), Et 360° d'orientation sur OZ, les conditions aux limites sont $u_x = u_y = 0$, u_z est libre (R, W, Bell, G, T, Houlsby & H, J, Burd (1992)) voir la figure (IV.2) :

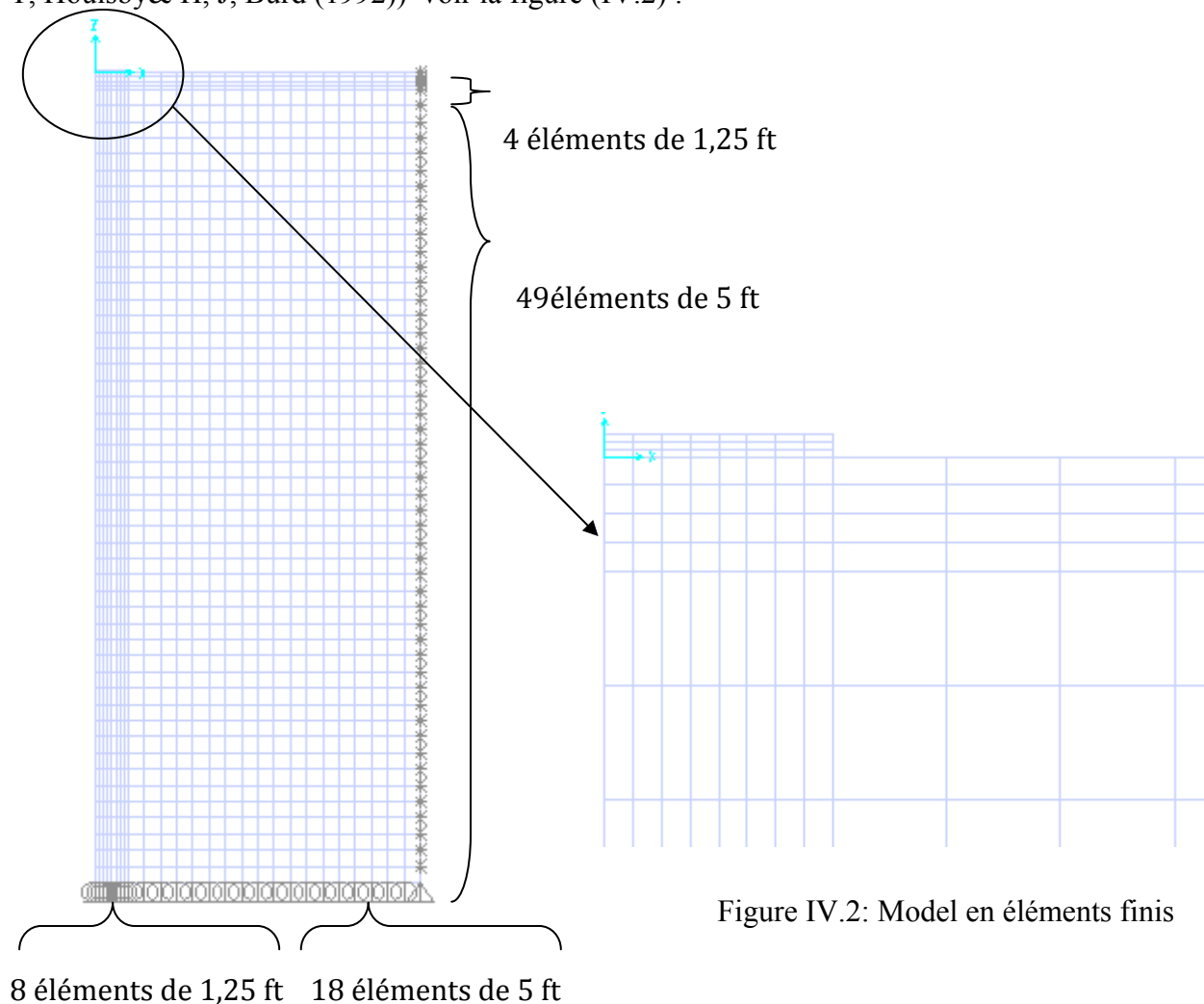


Figure IV.2: Model en éléments finis

On a les données :

Les caractéristiques	p (kip)	ρ (kg)	E $(\frac{kip}{ft^2})$	ν	G $(\frac{kip}{ft^2})$	ρ_f (kg)	a (ft)	E_f $(\frac{kip}{ft^2})$	ν_f	G_f $(\frac{kip}{ft^2})$
Les valeurs	1	2000	2000	0,25	800	0	10	$E \cdot 10^6$	0,25	$G \cdot 10^6$

Tableau IV.1 : Les données mécaniques et géométriques de modèle

$$\sigma_{z=0} = 0,00318 \frac{kip}{ft^2}$$

$$K_{statique} = \frac{4Ga}{(1-\nu)} = 42666,67 \frac{kip}{ft}$$

IV.1.2.2. Différentes formes du maillage :

IV.1.2.2.1. Première forme du maillage :

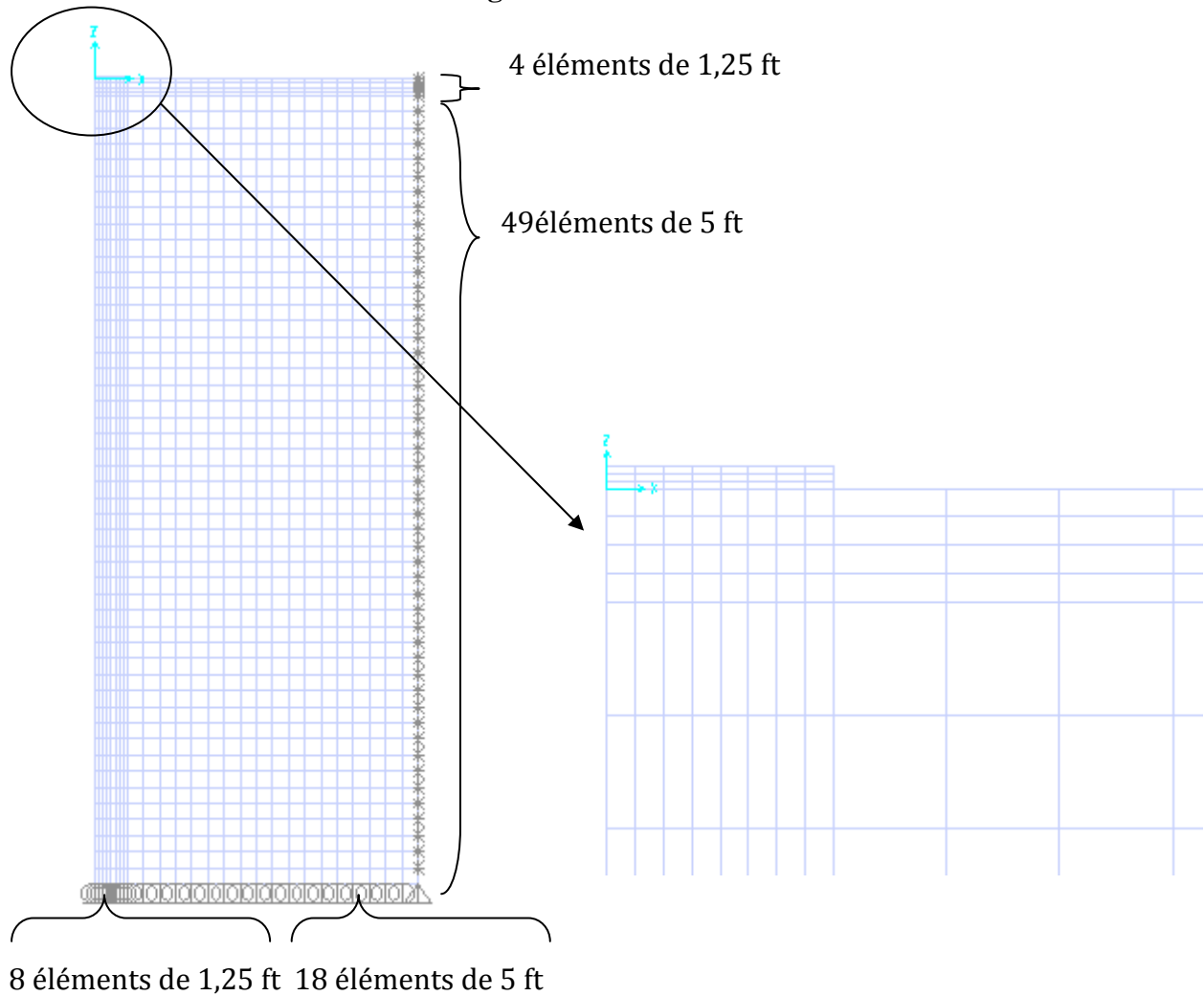


Figure IV.3: La première forme du maillage

IV.1.2.2.2. Deuxième forme du maillage :

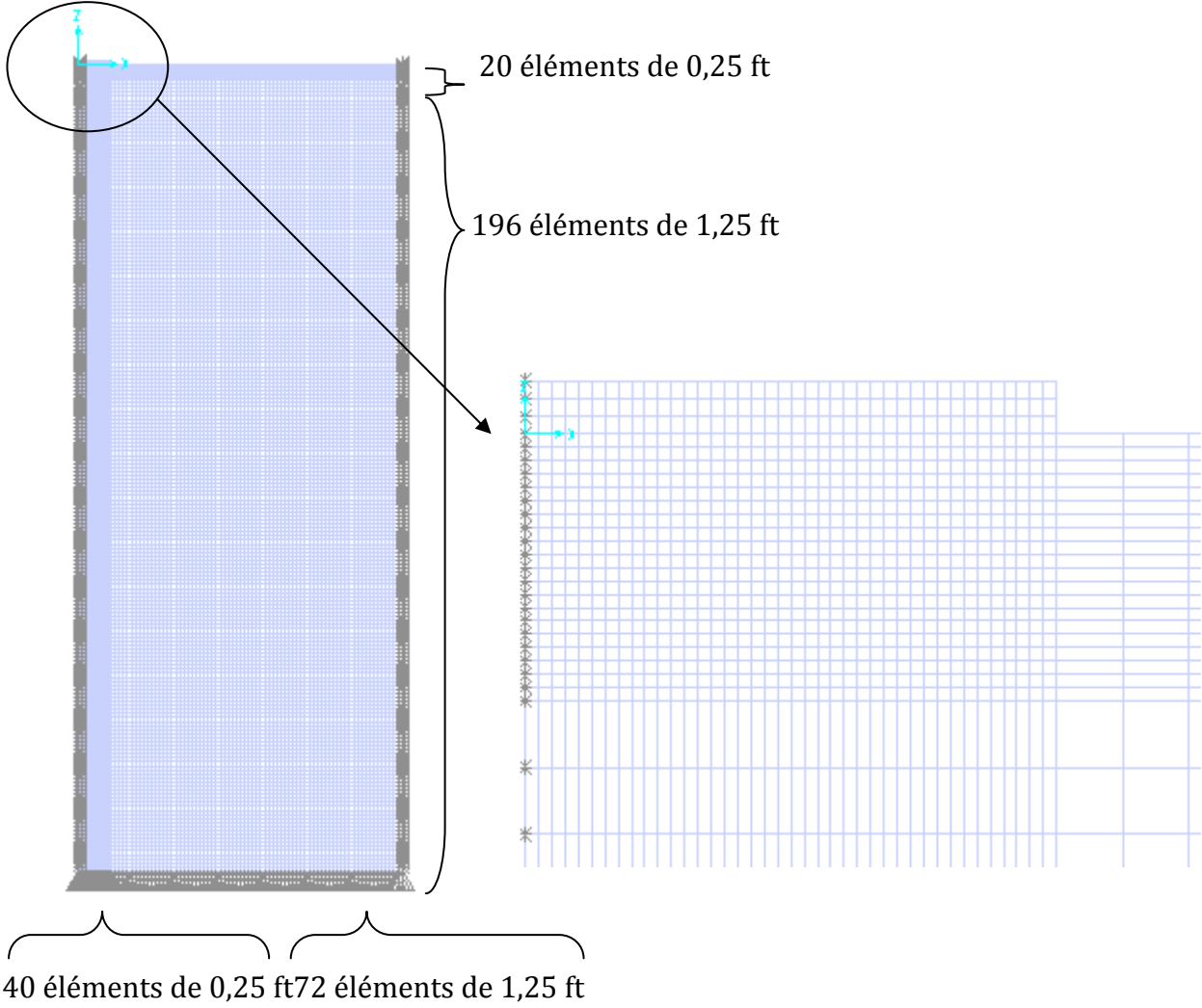


Figure IV.4: La deuxième forme du maillage

IV.1.2.2.3. Troisième forme du maillage :

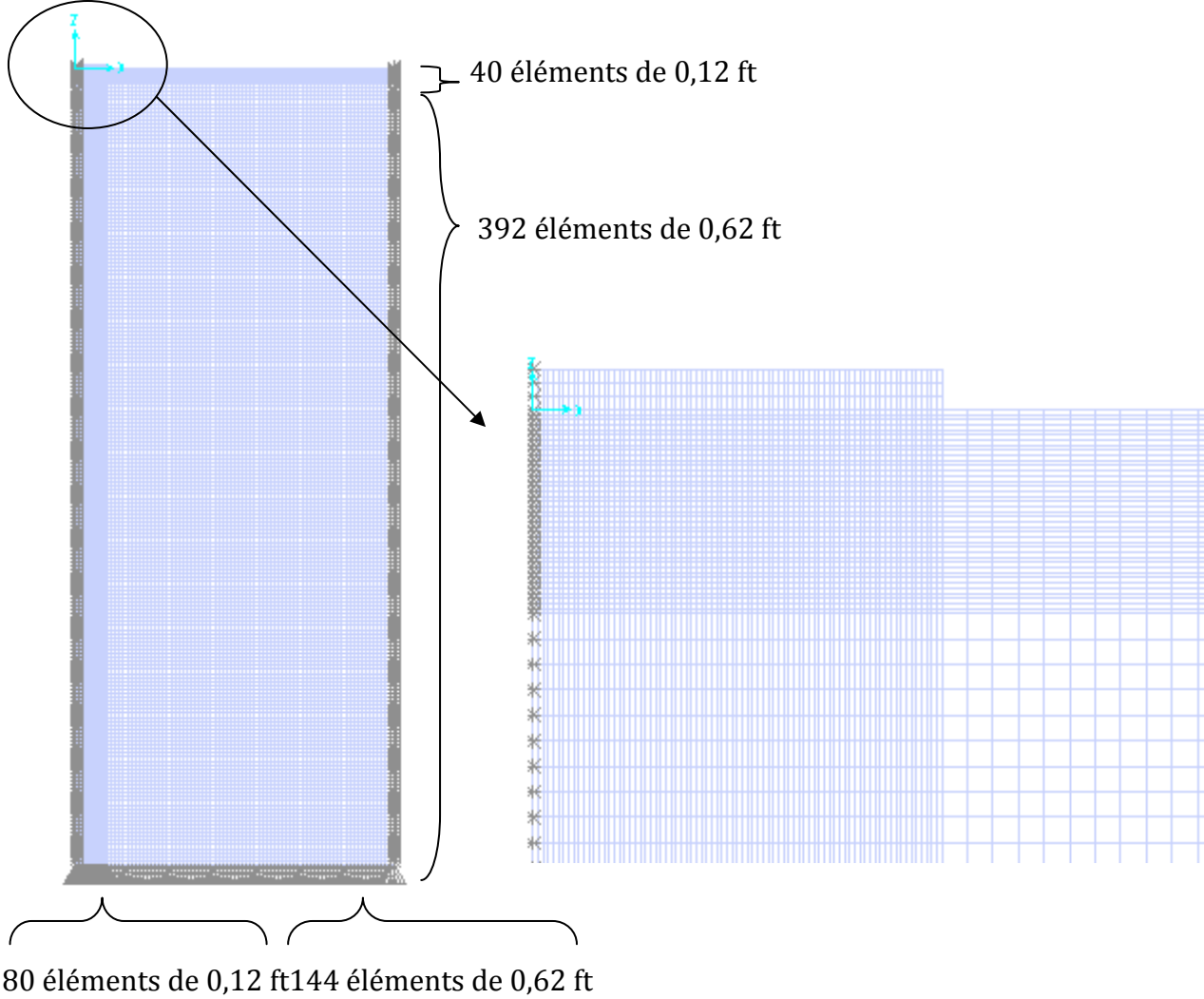


Figure IV.5:La troisième forme du maillage

IV.1.2.2.4. Quatrième forme du maillage :

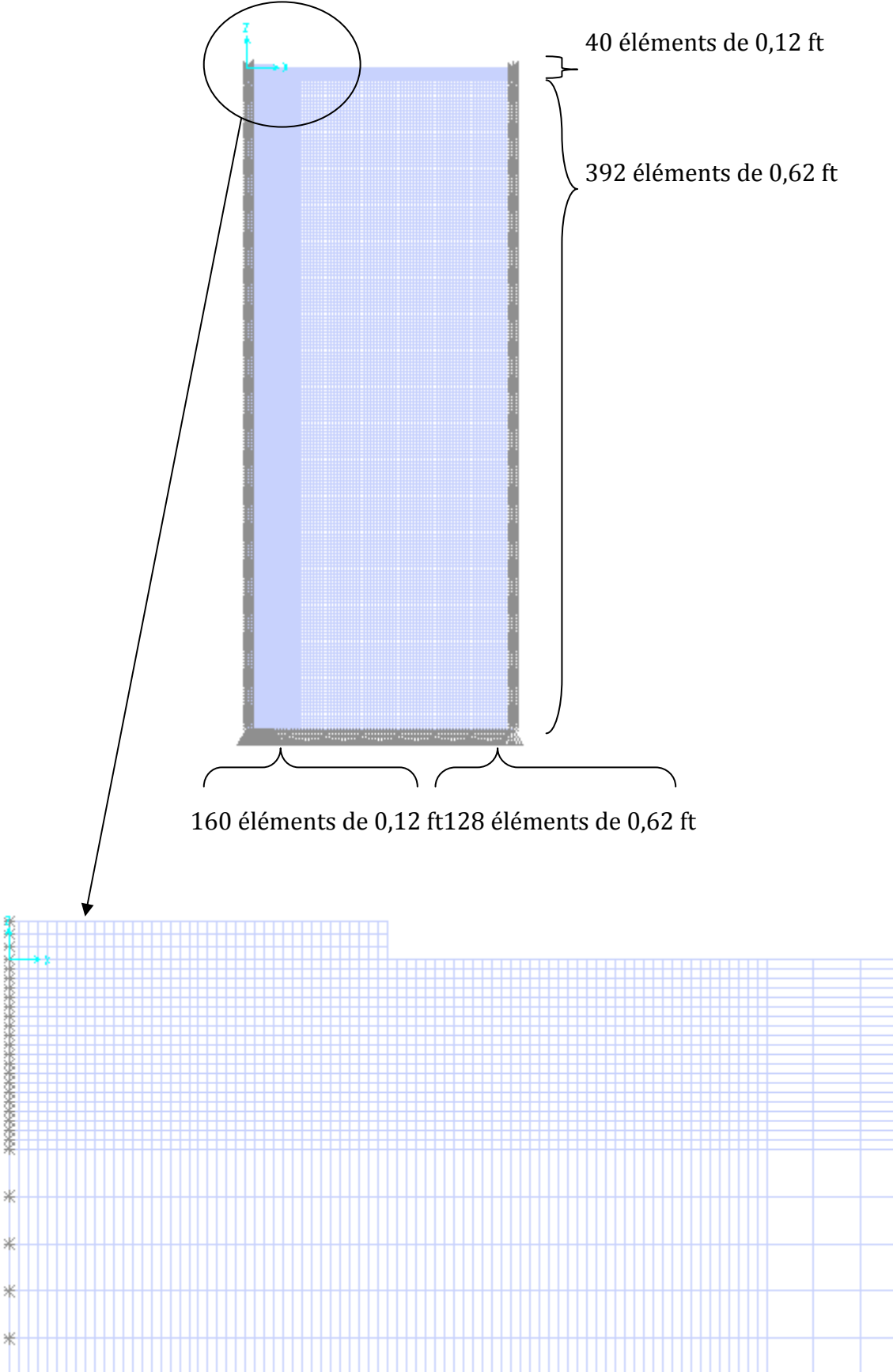


Figure IV.6:La quatrième forme du maillage

IV.1.2.2.5. Cinquième forme du maillage :

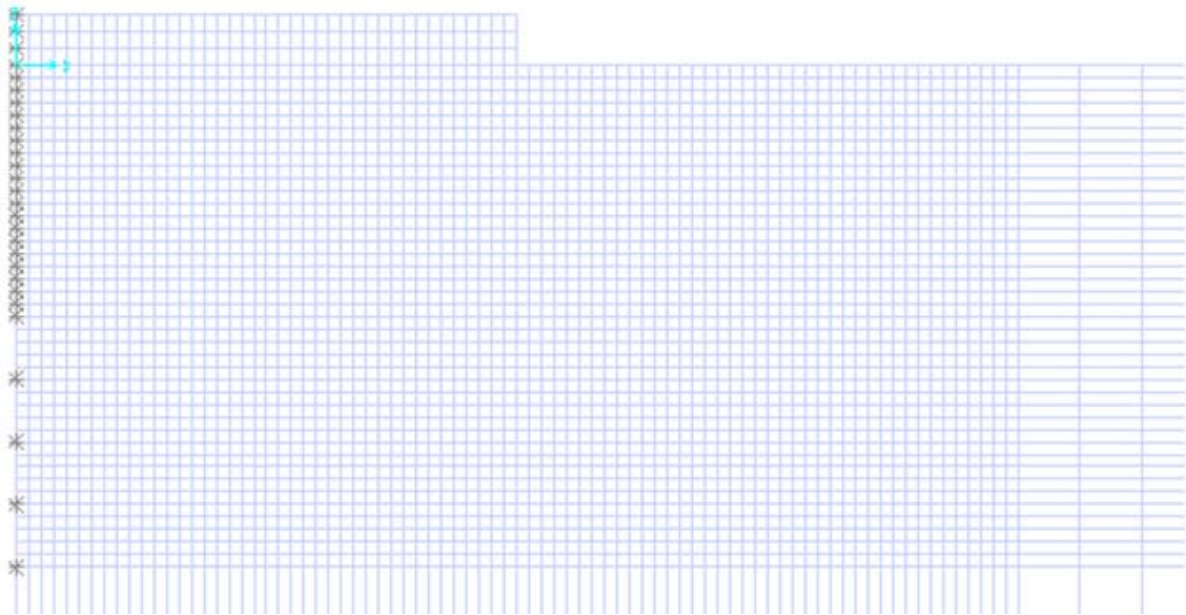
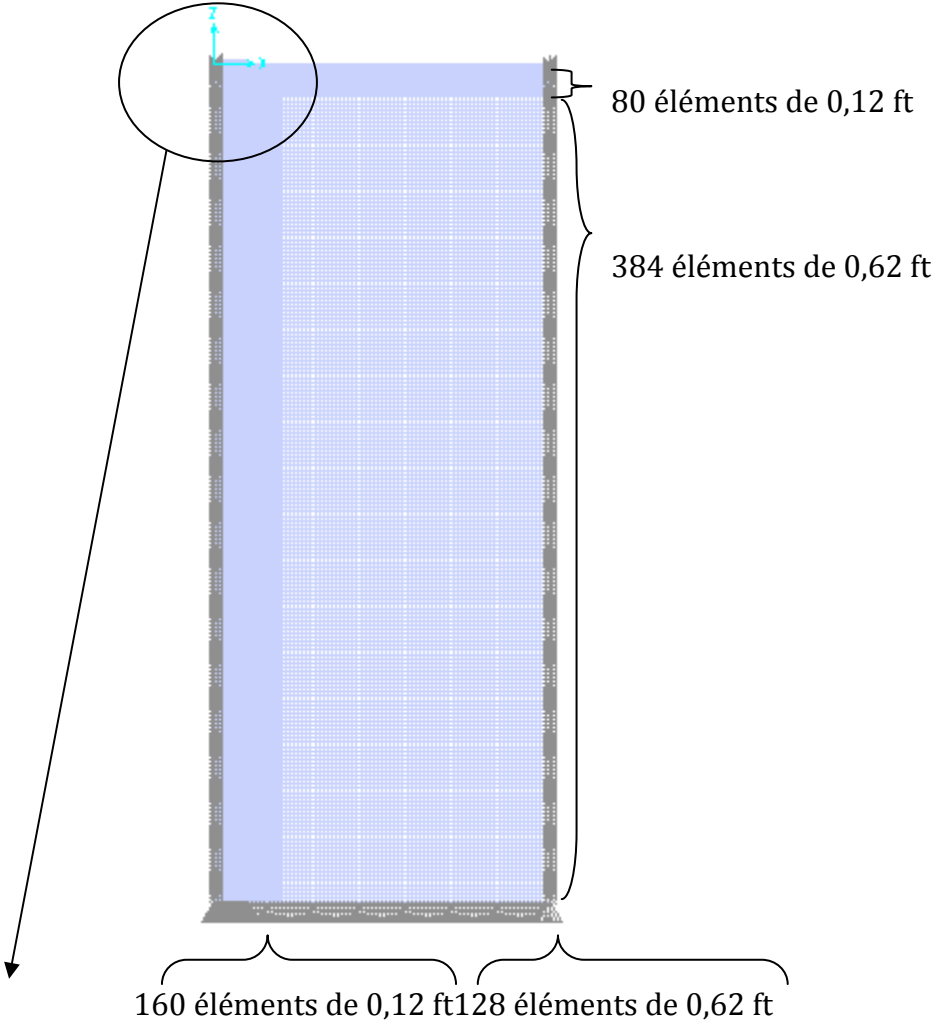


Figure IV.7: La cinquième forme du maillage

Les résultats :

	ν	$\frac{4Ga}{(1-\nu)} \left(\frac{kip}{ft}\right)$	$U_z(ft)$	$K_{stati} = \frac{1}{U_z}$	$\varepsilon(\%)$
La 1 ^{er} forme du maillage	0,25	42666,67	$1,7547 \cdot 10^{-5}$	56989,80	+33,57
La 2 ^{ème} forme du maillage	0,25	42666,67	$2,2225 \cdot 10^{-5}$	44994,37	+05,45
La 3 ^{ème} forme du maillage	0,25	42666,67	$2,2422 \cdot 10^{-5}$	44599,05	+04,53
La 4 ^{ème} forme du maillage	0,25	42666,67	$2,2536 \cdot 10^{-5}$	44373,45	+04,00
La 5 ^{ème} forme du maillage	0,25	42666,67	$2,2539 \cdot 10^{-5}$	44367,54	+03,99

Tableau IV.2 : La rigidité pour déférent formes du maillage.

Pour La cinquième forme du maillage on a :

	$\frac{4Ga}{(1-\nu)} \left(\frac{kip}{ft}\right)$	$U_z(ft)$	$K_{stati} = \frac{1}{2,1 \cdot 10^{-5}}$	$\varepsilon(\%)$
$\nu = 0,33$	44888,34	$2,1 \cdot 10^{-5}$	47619,05	+6,08
$\nu = 0,49$	53262,39	$1,6 \cdot 10^{-5}$	62500	+17,34

Tableau IV.3 : La rigidité pour déférent valeurs de ν .

La solution analytique ($\frac{p}{U_z} = \frac{4Ga}{(1-\nu)}$) est tracée sur la non-dimensionnelle forme ($\frac{p}{GaU_z} = \frac{4}{(1-\nu)}$) par rapport au coefficient du Poisson de la figure (IV.8) et comparés avec les résultats numériques à valeurs discrètes de ν , les résultats numériques par rapport à même, avec l'erreur étant dans la gamme (+3,99%) à (+17,34%) pour $\nu = 0,25$ à $\nu = 0,49$ (R, W, Bell, G, T, Hously& H, J, Burd (1992)).

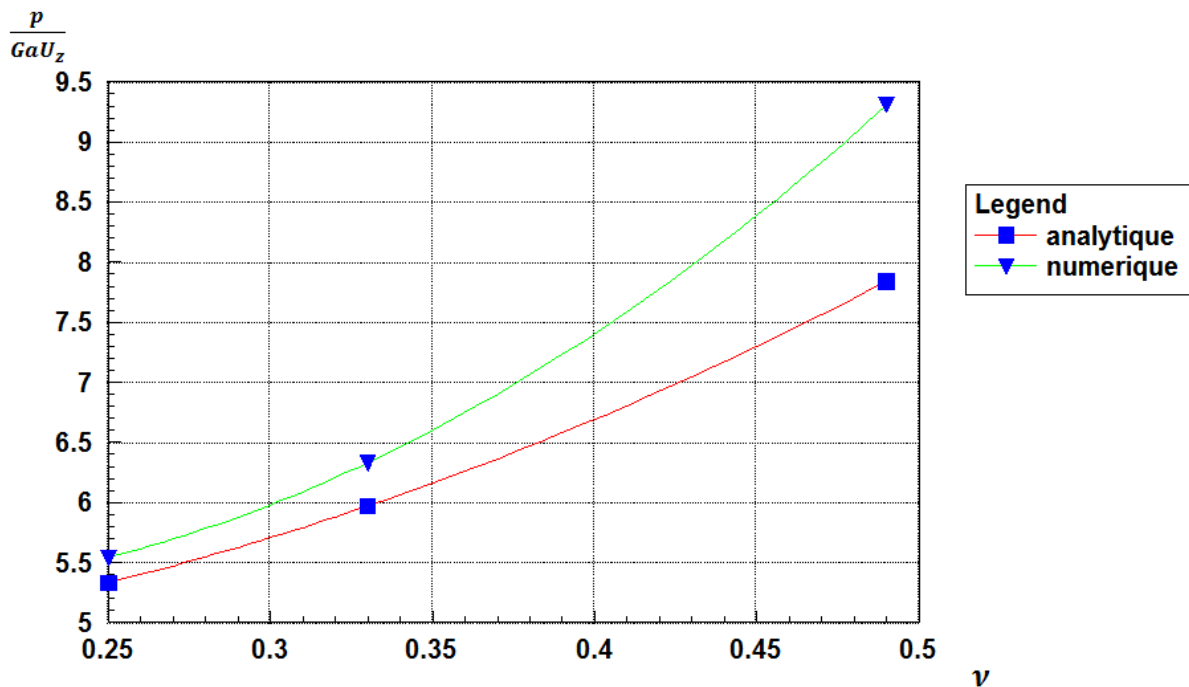


Figure IV.8 : Une présentation graphique des résultats

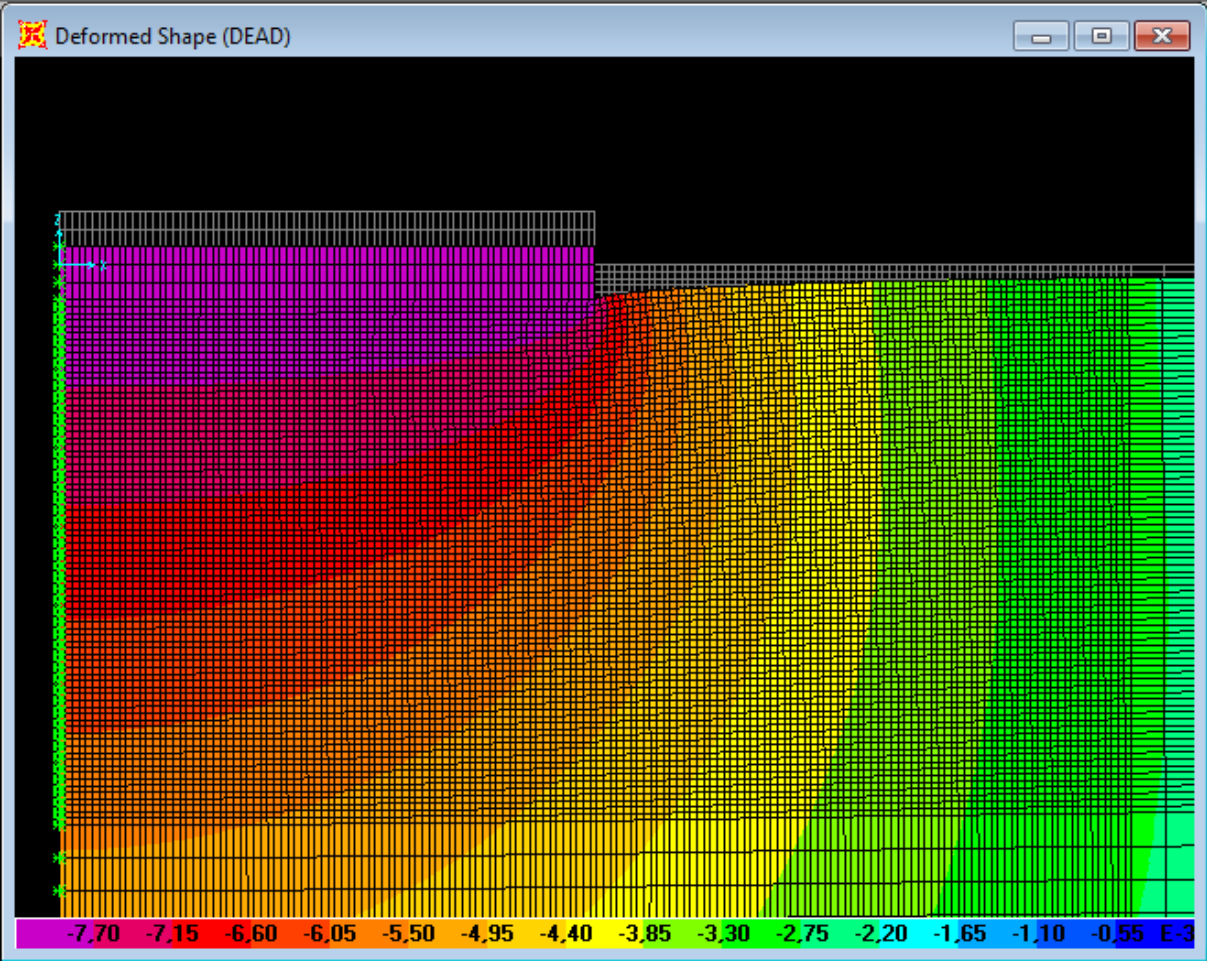


Figure IV.9: Le bulb de déplacements, $\nu = 0,25$ la cinquième forme du maillage

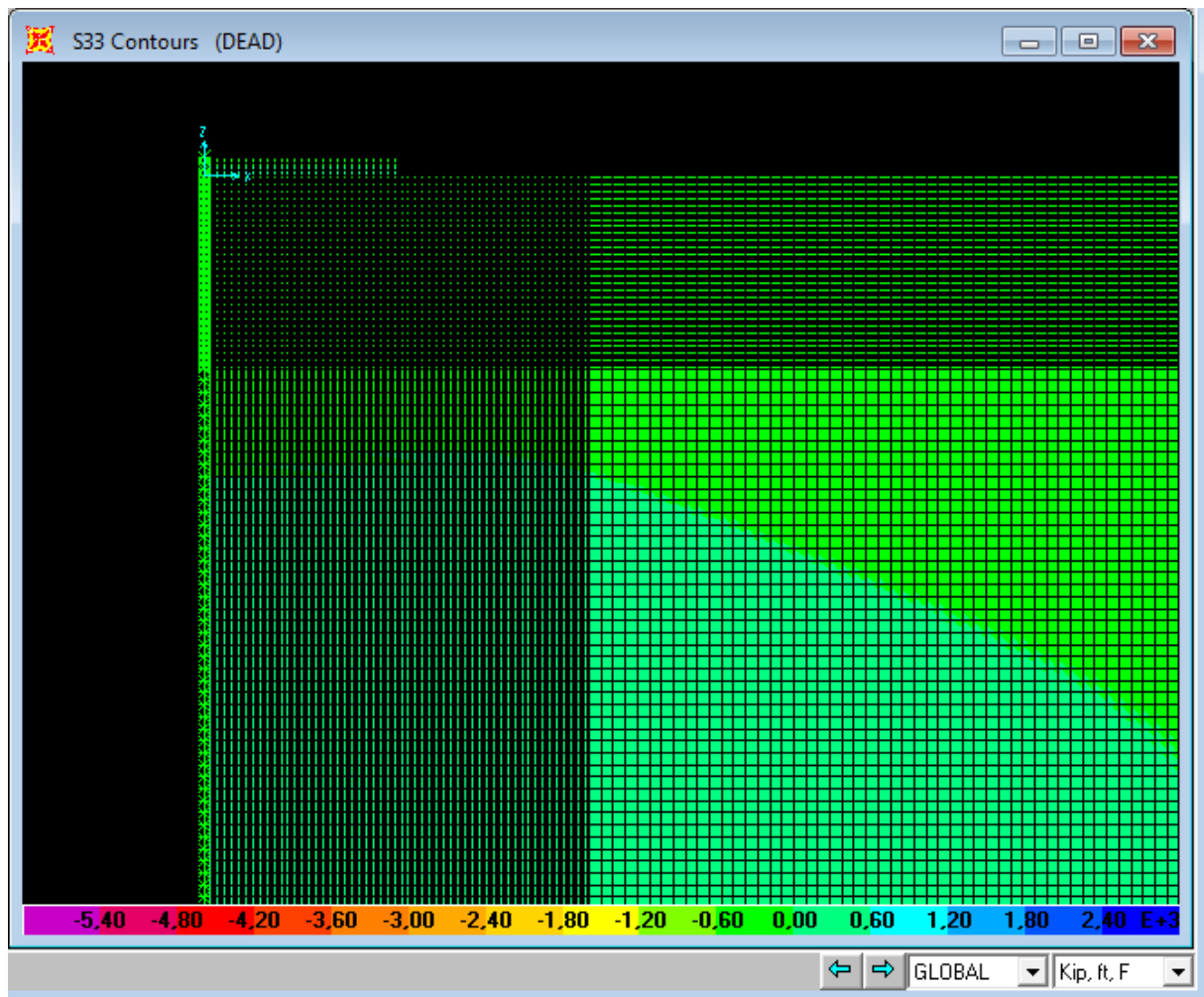


Figure IV.10: Le bulb de contraintes, $\nu = 0,25$ la cinquième forme du maillage

Remarque :

Depuis la figure (IV.7) on note que :

$$80 \text{ éléments} * 0,125 \text{ ft} = 10 \text{ ft} = R, \text{ donc } 0,125 = R/80$$

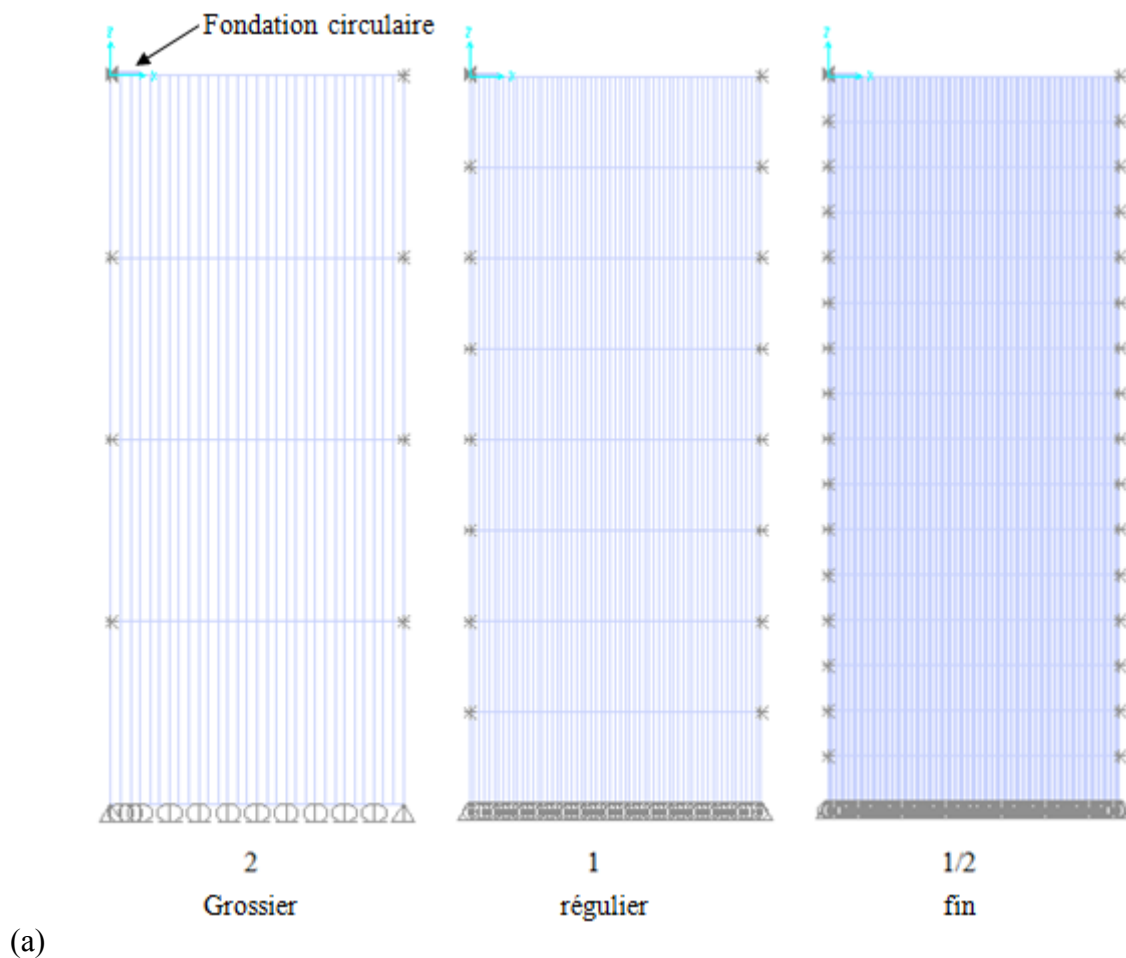
$$160 \text{ éléments} * 0,125 \text{ ft} = 20 \text{ ft} = 2 * R$$

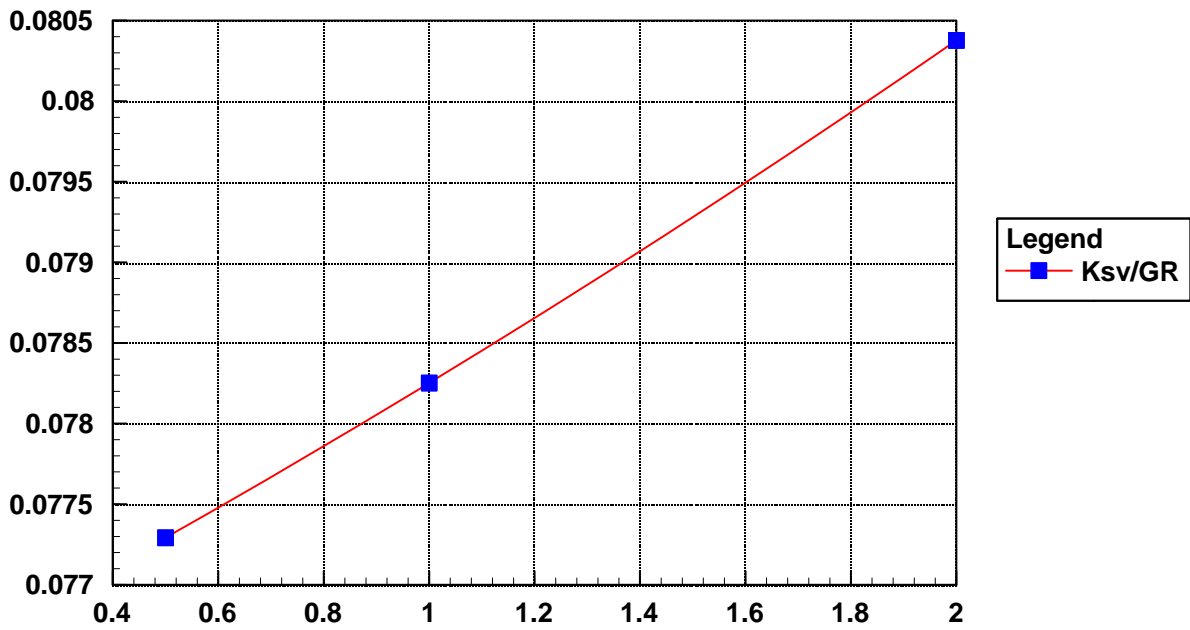
$$128 \text{ éléments} * 0,625 \text{ ft} = 80 \text{ ft} = 8 * R, \text{ et } 0,625 \text{ ft} = 8 * R / 128 = 5 * R / 80 = 5 * 0,125 \text{ ft}.$$

IV.1.2.3. Extrapolation linéaire :

IV.1.2.3.1. effet de maillage :

Il est nécessaire d'étudier l'effet de la taille des mailles et la possibilité d'utiliser des éléments plus allongés à une certaine profondeur pour le genre de problèmes à l'examen (*Kausel, E., and Roësset, J.M. (1975)*). Pour évaluer la convergence de la solution éléments finis avec la diminution de taille de l'élément, trois mailles (grossière, régulière, et fin) (a). Les raideurs statiques, K_{sv} sont tracées dans la figure (b) en fonction de la taille d'élément typique.





(b) fin (1/2) régulier(1) grossier(2)

Figure IV.11 : Influence de maillage ($H/R=2$, $\nu = 0,25$) : a) grossier (maillage à double), b) régulier, c) fin (demi-maille)

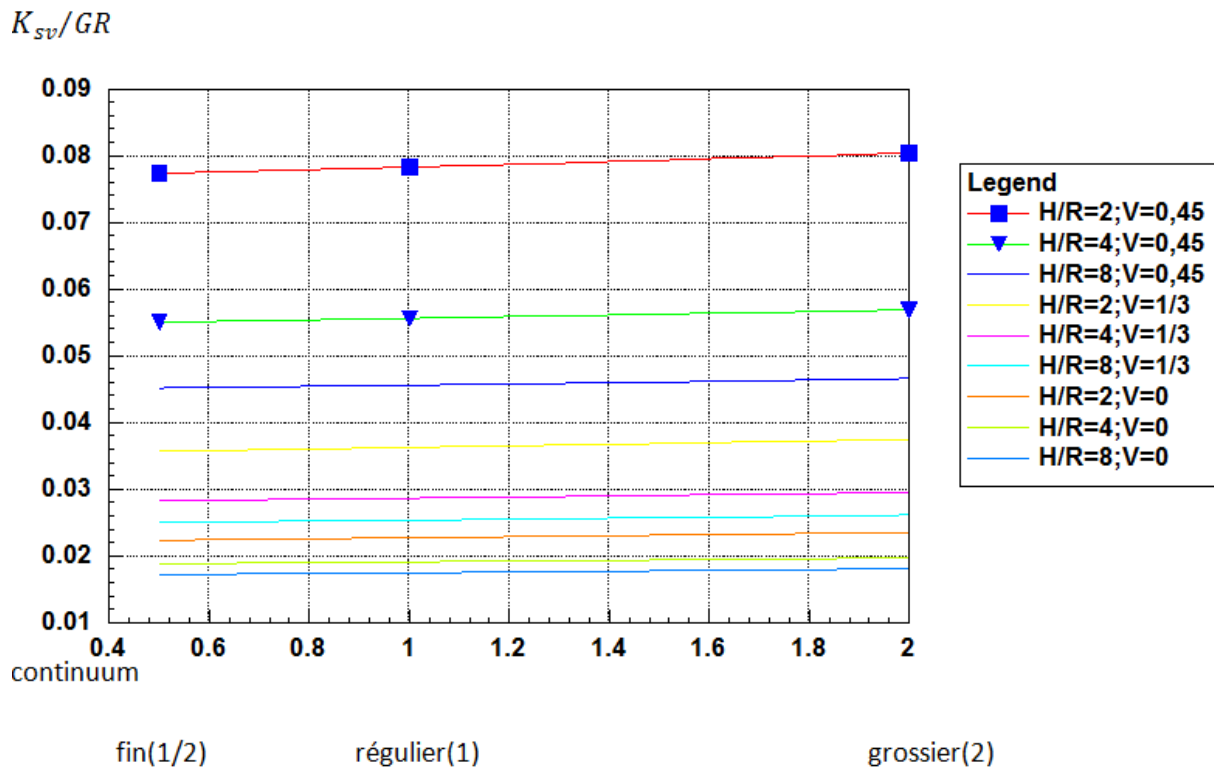


Figure IV.12 : ressorts d'extrapolation statiques.

IV.1.2.3.2. effet de profondeur de la couche :

Pour une dimension de plaque, la profondeur de la couche, H , affecte la rigidité globale du système et, par conséquent, la valeur de la rigidité statique (*Kausel, E., and Roësset, J.M. (1975)*). Pour évaluer cet affect, a été appliquée pour des différentes profondeurs de couches et coefficient de Poisson pour déterminer la solution continuum statique (Figure IV.13). Les valeurs résultantes ont été tracées en fonction de la proportion profondeur, R / H , en utilisant le théorique demi-espace des valeurs pour $R / H = 0$ (Figure IV.13) dans la gamme des R / H étudiés, les points sont très approximativement sur des lignes droites (Figure IV.13); en outre, ces lignes sont presque parallèles, ce qui suggère que les effets de la profondeur de la couche et le coefficient de Poisson sont pratiquement découplés.

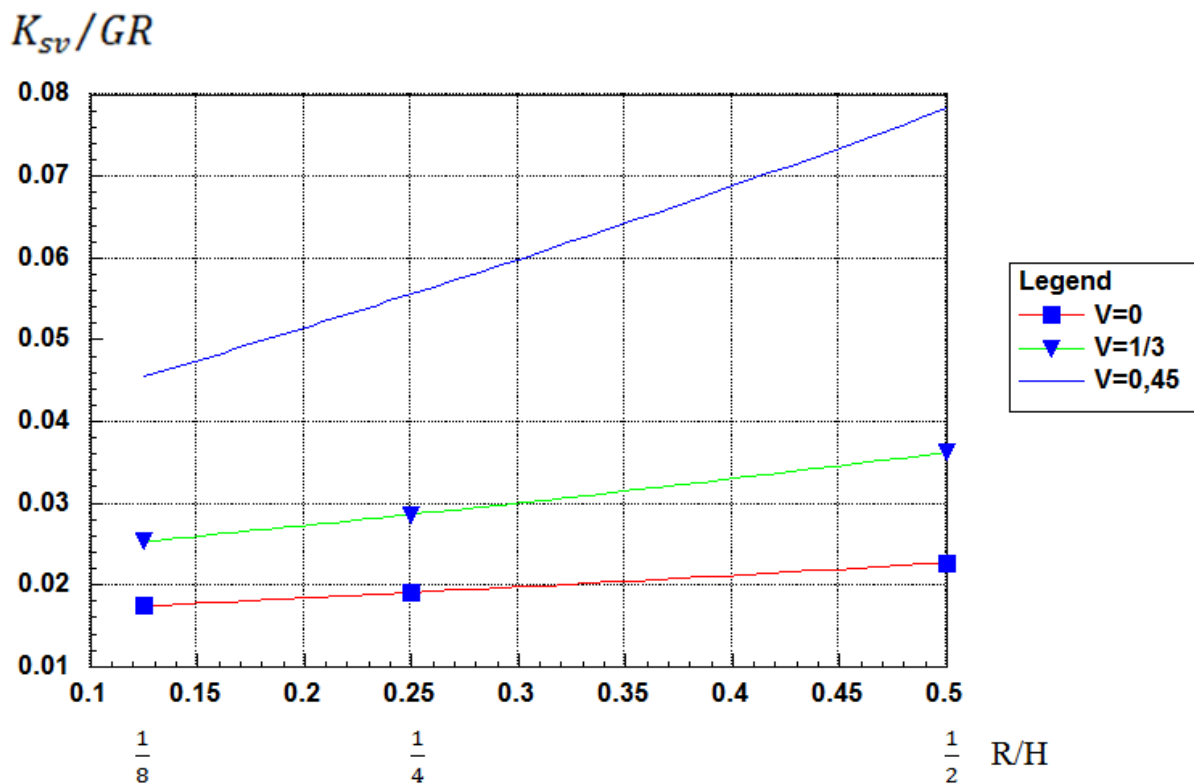


Figure IV.13: ressorts statiques par rapport profondeur de la couche (valeurs pour $R / H = 0$ sont pour pied lisse; demi-espace Théorie)

IV.1.3. Conclusions :

Une simulation par la méthode des éléments finis de la rigidité statique (problème de boussinesq) d'un demi-espace homogène, isotrope et élastique, pour estimer les effets de coefficient de Poisson et la forme du maillage sur la valeur de la rigidité statique a été fait, et on a ressortir les conclusions suivantes :

-Les figures (IV.3) jusqu'à (IV.7), montrent que tous jours le raffinement est faite où le chargement est appliquée et où zone de discontinuité de chargement (les contraintes) c'est-à-dire entre la fondation et la surface libre, pour la solution élément fini va converge rapidement, ça exprimer l'effet du maillage. Les figures (IV.4) et (IV.3) montrent que l'erreur sur la rigidité est diminuée, le calcul correspond au figure (IV.7) montre que ce maillage est le bon par rapport à les autres.

-Si on raffine le maillage horizontalement à 160 éléments à une distance de $2 \cdot R$ et à 128 éléments à la distance $8 \cdot R$ qui reste, et on le raffiner verticalement à 80 éléments à une distance de R et à 384 éléments à la distance $24 \cdot R$ qui reste, on obtient erreur inférieure de 5% avec $\nu = 0,25$, mais si le coefficient de Poisson augmente linéairement, et le déplacement va déminé donc l'erreur va augmente linéairement aussi et ça qui exprime l'incompressibilité de demi-espace (*Suhol Bu, (1998)*), est un effet de coefficient de Poisson aussi sur la réponse.

-La solution éléments finis donne la convergence avec la diminution de taille de l'élément.

-Cela donne à penser que lorsque on utilise une expansion linéaire de l'élément fini, une extrapolation linéaire peut fournir des valeurs améliorées pour les raideurs statiques à partir des résultats obtenus à partir d'un grossier et un maillage régulier (*Kausel, E., and Roësset, J.M. (1975)*).

-Les valeurs résultantes ont été tracées en fonction de la proportion profondeur, R / H , en utilisant le théorique demi-espace des valeurs pour $R / H = 0$ (Figure IV.13) Dans la gamme des R / H étudiés, les points sont très approximativement sur des lignes droites (Figure IV.13); en outre, ces lignes sont presque parallèles, ce qui suggère que les effets de la profondeur de la couche et le coefficient de Poisson sont pratiquement découplés (*Kausel, E., and Roësset, J.M. (1975)*).

-Si le coefficient de poisson ν augmente, le déplacement diminue à cause de l'augmentation de la rigidité statique de demi-espace, par exemple pour la cinquième forme du maillage, pour $\nu = 0,25$ le déplacement $U_z = 2,2539 \cdot 10^{-5} \text{ ft}$, et pour $\nu = 0,33$ le déplacement $U_z = 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ ft}$, et pour $\nu = 0,25$ le déplacement $U_z = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ ft}$.

IV.2 Précision des modèles discrets dans le cas d'une analyse dynamique :

Avant d'aborder notre étude dynamique, il est très utile de quantifier la précision d'un modèle en éléments finis vis-à-vis de sa capacité à restituer la réalité les valeurs des amplitudes dynamiques des oscillations caractérisant le mouvement du sol. Une étude du dimensionnement de la taille du maillage en éléments finis en fonction des caractéristiques vibratoires d'un sol surmontant un demi – espace élastique est en premier lieu mener afin de fixer les critères de choix du maillage.

IV.2.1 Présentation du modèle:

Le modèle d'éléments finis est présenté sur la figure (IV.14) pour le cas d'une couche visco-élastique homogène qui se trouve sur un substratum rigide. Il est constitué par une forme rectangulaire large domaine de 80 m et 16 m de haut et de deux autres domaines latéraux similaires, afin de placer assez loin des limites latérales (largeur totale de 240 m), avec un maillage régulière. Ce qui devrait aider à minimiser l'influence des limites sur les résultats obtenus. Dans les mailles utilisées dans l'analyse actuelle, le type de base de l'élément est l'élément à 15 nœuds triangulaire. Les dimensions d'un triangle peuvent être commandées par taille de l'élément locale. En subdivisant la couche homogène en des sous-couches d'une épaisseur déterminée. "Average element size" (AES) qui représente une longueur moyenne de la partie des éléments utilisés, dans cet exemple $AEZ= 1,75m$

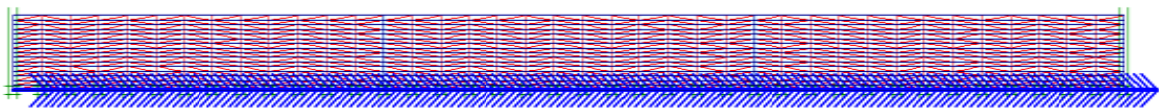


Figure IV.14: modèle par éléments finis utilisés dans l'analyse dynamique.

Propriétés physiques				paramètres de rigidité					
γ	profondeur	Coéf d'Amortissement de Rayleigh, Pour $\varepsilon = 5\%$		E	ν	G	E_{oed}	V_s	V_p
kN/m^3	m	α_0	α_1	kN/m^2		kN/m^2	kN/m^2	m/s	m/s
141	16	2,661647	0,000704	$4,889 \cdot 10^5$	0,25	$1,88 \cdot 10^5$	$6,581 \cdot 10^5$	361,5	676,3

Tableau IV.4: Propriétés des matériaux de la couche élastique linéaire.

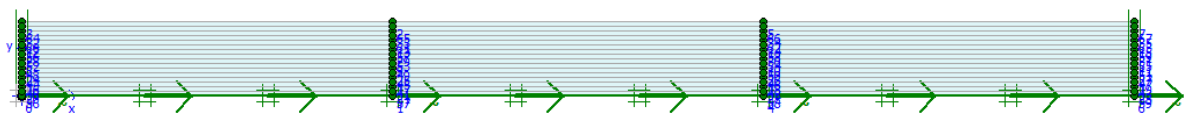


Figure IV.15: Les déplacements horizontaux libres (FHD) l'état sur les limites latérales de FE modèle.

Signal d'entrée:

En calcul numérique, le chargement sisme a été souvent imposé comme une accélération du temps historique à la base du modèle. Ici, le signal d'entrée choisi pour les analyses numériques est l'enregistrement de l'accéléromètre el-centro (18 Mai 1940), la durée est de 53,46 s et l'accélération de pic 210.10cm/s².

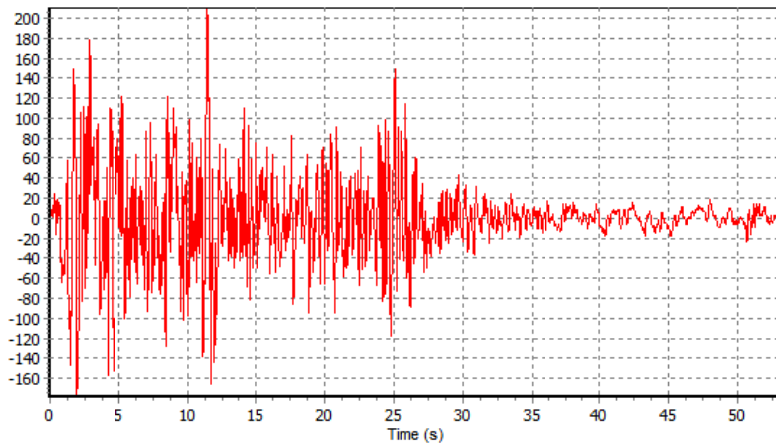


Figure IV.16: Accélérogramme de: el-centro.

$i^{ème}$ mode	Valeur théorique (ω_{it}/ω_{1t})	Modèle élément finis (ω_i/ω_{1t})
1	1	1.028
2	3	2.984

Tableau IV.5: Comparaison des pulsations propres normalisées

IV.2.2 Résultats :

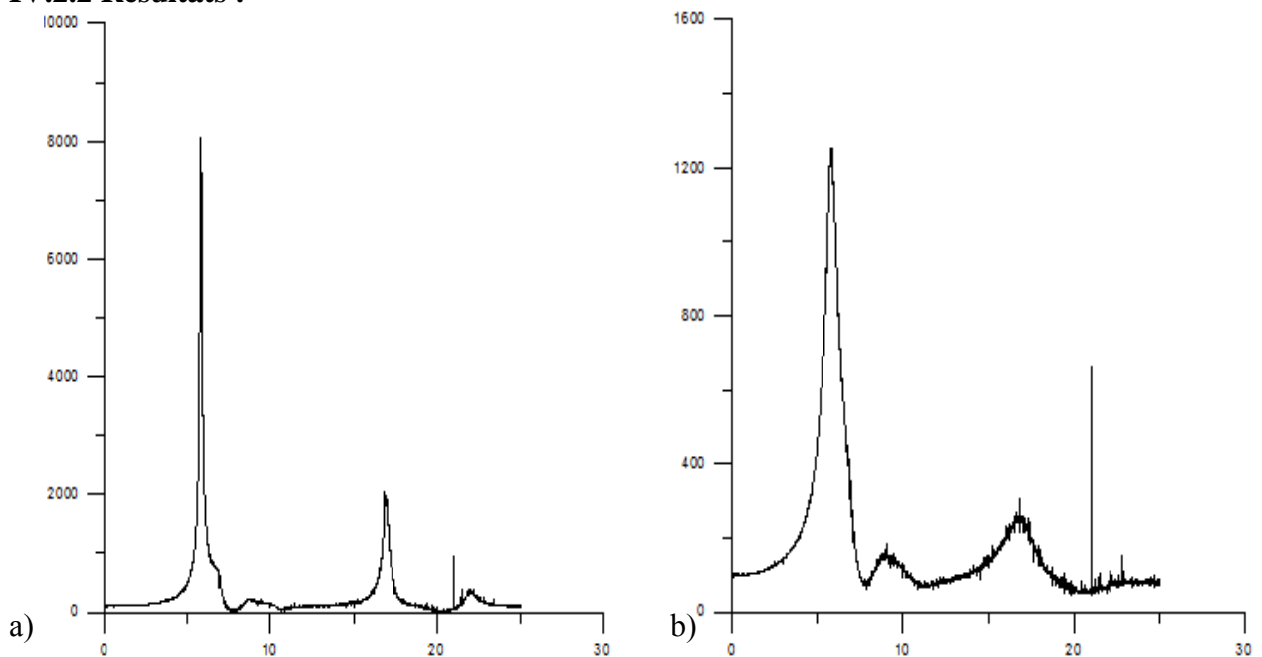


Figure IV.17: La fonction d'amplification d'une couche élastique sur un substratum rigide a) sans amortissement matériel, b) avec amortissement matériel.

IV.2.3 Conclusion :

L'utilisation des analyses dynamiques pour calculer la réponse sismique d'un système géotechnique dépend de la caractérisation du site et des connaissances avancées numériques. Il est nécessaire d'avoir une bonne calibration du modèle numérique avant de procéder à une analyse dynamique pour tout type de problème 2-d. Certains paramètres (raideur équivalente, d'amortissement numérique et matérielle, etc) peuvent être choisis en comparant la réponse dynamique du modèle de propagation des ondes de cisaillement dans la direction verticale avec des solutions théoriques. Dans ce travail, un exemple de procédure pour calibrer les paramètres du modèle éléments finis a été présenté afin de contrôler les fréquences du système, car en effet, l'amortissement matériel est souvent modélisé par la formulation de Rayleigh (utilisation des modes propres de vibration du sol).

L'examen traité au ce chapitre montre que l'erreur entre la valeur théorique et la valeur calculée est inférieur à 5% pour les deux premiers fréquences propres. La solution numérique est comparée à la solution analytique donnée par la relation « $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{V_{s1}}{h \cos \alpha_1}$ », où n représente le mode de vibration du sol.

L'utilisation des éléments finis de taille $h_{\text{élément}} \leq \frac{V_s}{(6 \text{ à } 8) f_{\text{max}}}$ donne des bons résultats avec la solution théorique.

IV.3. Etude paramétrique en atténuation radiatif (amortissement radiatif)

Nous avons en main tous les éléments nécessaires pour mener à bien notre étude paramétrique des effets de la taille du maillage et des caractéristiques physiques du sol sur l'amortissement radiatif (géométrique) des ondes émises par la fondation. Nous considérerons le cas du sol non dissipatif en premier lieu et par la suite, nous quantifierons la part de l'amortissement matériel par rapport à l'amortissement géométrique en refaisant notre analyse pour le cas du sol dissipatif.

IV.3.1 Introduction :

La méthode proposée a été appliquée au problème de vibration de fondation défini dans la figure ci dessous. Le système est axisymétrique (problème de déformations planes (*Kausel, E., Roëssset, J.M. and Waas, G. (1975)*)) autour d'un axe vertical et se compose de la pose légère, parfaitement rigide, sans friction, circulaire se reposant sur demi-espace élastique homogène (pour un sol demi-espace élastique, l'énergie dissipée par un amortissement hystérétique $W_d = 0$ donc pour un sol demi-espace élastique on a seulement un comportement linéaire (*Zhang, Jian and Tang, Yuchuan (2007)*). La pose est excitée par une force harmonique verticale à l'axe de la symétrie. Ce problème a l'avantage qu'une solution indépendante est disponible voir (*Lysmer, J, and Richerd, F. E, Jr. (1966)*). Différentes méthodes existent pour appliquer une frontière absorbante (*Ross m, (2004)*). Dans Plaxis, visqueux limites d'adsorbant peut être introduit, qui sont basés sur la méthode décrite par (*Lysmer J., kuhlmeerr.l. (1969)*).

Une série d'études paramétriques a été entreprise, recherche l'influence de la grosseur de maille d'élément fini dans l'exactitude numérique de la solution, et l'effet en rigidités dynamiques de l'atténuation interne de sol. Et le coefficient de Poisson (*Kausel, E., and Roëssset, J.M. (1975)*), sur l'atténuation radiative.

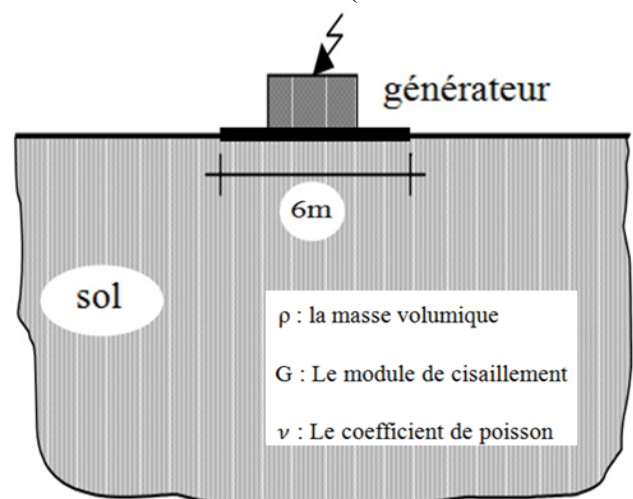


Figure IV.18: Problème de vibration de fondation

IV.3.2. Description du modèle en éléments finis :

La solution des problèmes dynamiques exige en principe une bonne compréhension du comportement des sols sous tous les types de charges statiques. Pourtant, les champs statiques et dynamiques évolué d'abord en parallèle et séparément. Il est intéressant de noter que tandis que la contrepartie traditionnelle statique considéré comme toujours de grandes déformations et a procédé à l'utilisation de paramètres quelque peu arbitraires pour caractériser le sol sur des bases empiriques, avec le développement de modèles mécanistes simplifiées à des fins de conception et de la croyance que les sols sont trop compliqués à traiter eux aussi élastiques (ou même inélastique) des matériaux, la dynamique des sols considérés comme de petites déformations et un comportement élastique linéaire et a commencé à partir des stades très précoces avec des solutions théoriques basés sur la théorie de l'élasticité (ou en plus à la mode termes modernes Elasto-dynamique) basée sur la solution de problème dynamique Boussinesq obtenu par Lamb en 1904. (*Jose M. Roesset, (2009)*)

La source vibrante est un générateur fondée sur une semelle en béton, elle est rigide sans masse lisse pour des petites erreurs (*Kausel, E., Roësset, J.M. and Waas, G. (1975)*), de 0,2 m d'épaisseur et 3 m de diamètre, la figure (IV.18), différentes méthodes existent pour appliquer une frontière absorbante (*Ross m, (2004)*). Dans Plaxis, visqueux limites d'adsorbant peut être introduit, qui sont basés sur la méthode décrite par (*lysmer et kuhlmeier (1969)*). Oscillations provoquées par le générateur sont transmis à travers la semelle dans le sous-sol. Ces oscillations sont simulées en tant que charge uniforme harmonique, avec une fréquence de 10 Hz et une amplitude de 10 Kn/m².

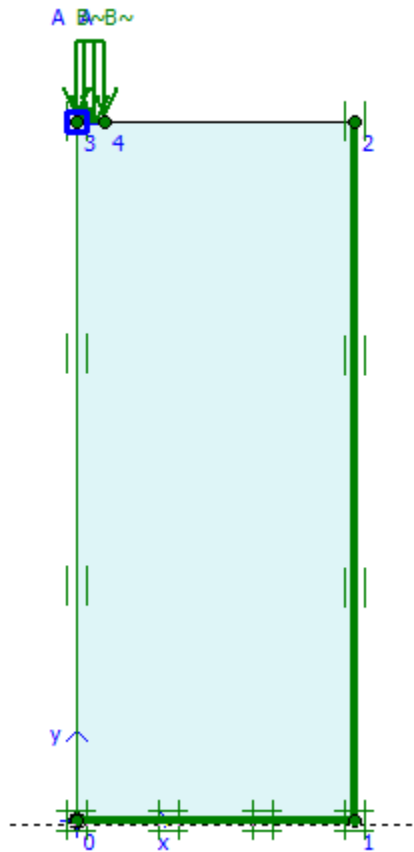


Figure IV.19 : Modèle axisymétrique

Il prend :

fondation				
R(m)	E A(kn)	E I(knm ²)	$\gamma(kn/m^3)$	Interface
3	$7,6 \cdot 10^{11}$	$2,4 \cdot 10^{12}$	0	rigide

(a)

demi-espace							
l(m)	h(m)	$\gamma(kn/m^3)$	$\rho(kg/m^3)$	E(kn/m ²)	ν	G(kn/m ²)	Matériel model
30	75	20	2041	$5 \cdot 10^4$	0,25	$2 \cdot 10^4$	linéaire élastique

(b)

Tableau IV.6 : Les caractéristiques géométriques et mécaniques de modèle.

La fondation est chargée par un chargement harmonique (sinusoïdale) P ses caractérisations sont :

$$P = P_0 e^{\omega_{ch} t} \quad \text{Avec : } \begin{cases} P_0 = \sigma_y * \pi * R^2 \text{ avec } \sigma_y = 10 \text{ kn/m}^2 \Rightarrow P_0 = 282,6 \text{ kn} \\ \omega_{ch} = 2 * \pi f_{ch} \text{ avec } f_{ch} = 10 \text{ Hz} \Rightarrow \omega_{ch} = 62,8 \text{ rad/s} \end{cases}$$

Au bas de fréquences modérées, par exemple en dessous de 10 Hz, les effets dynamiques vont de négligeable à modéré, et peut probablement être ignoré. Cependant, d'observer que ce seuil de fréquence descendant en parallèle avec le rapport de la vitesse réelle à la vitesse des ondes de cisaillement nominale c.-à-d V_s/\tilde{V}_s . Au-dessus de ce seuil, les effets dynamiques devient très importante et les schémas de contraintes sont évidentes qui s'écartent sensiblement de la statique. Cet effet est particulièrement important pour la conception des fondations de la machine (Winfried Schepers, Stavros Savidis, Eduardo Kausel (2010)).

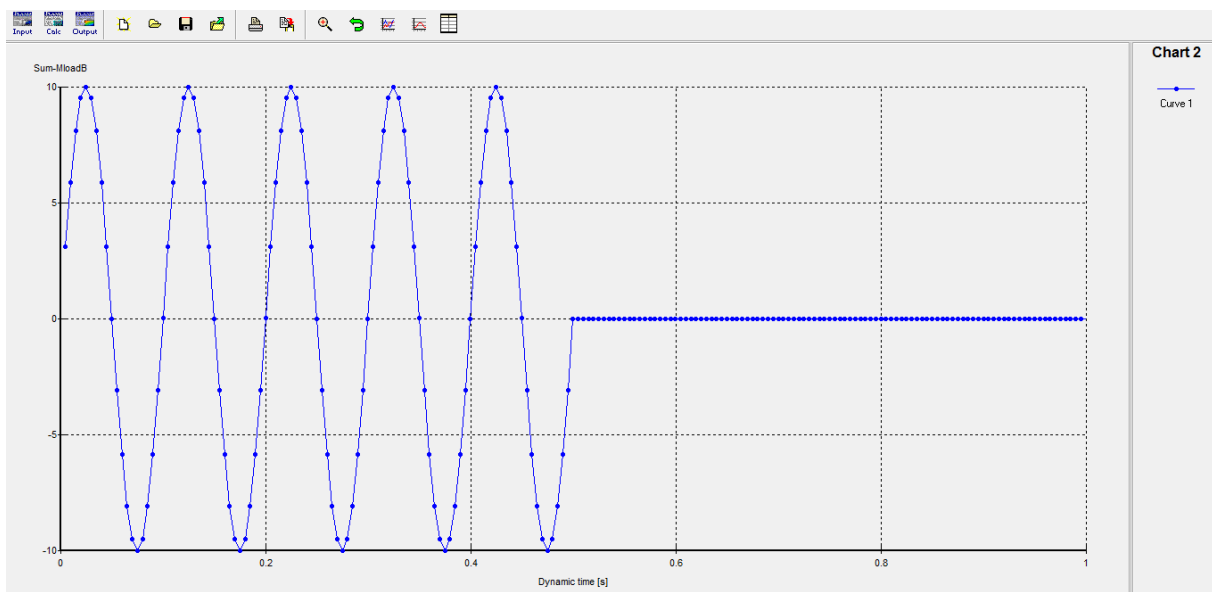


Figure IV.20 : le chargement P

On a prend un taux d'analyse dynamique $T=1\text{sec}$, 0.5sec pour les vibrations forcés (la duré de vibrations forcés) et 0.5sec pour prendre les vibrations libres en considération

$$\text{On a: } \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{V_{s1}}{h \cos \alpha_1}$$

$$\text{Donc } V_{s1} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 98,99 \text{ m/s}$$

$\alpha_1 = 0^\circ$ Par ce qu'on a la vibration verticale

On va prendre : $m = 1$ alors $n = 2$ donc $\omega_m = \omega_1$ et $\omega_n = \omega_2$

Depuis la relation de ω_n on a trouve $\begin{cases} \omega_1 = 2,07 \text{ rad/sec} \\ \omega_2 = 6,22 \text{ rad/sec} \end{cases}$

Donc : a_0 et a_1 sont calculées à partir l'équation (II.38) pour $\varepsilon = 5\%$: $\begin{cases} a_0 = 0,155 \\ a_1 = 0,012 \end{cases}$

IV.3.3. Présentation des différentes formes du maillage :

On considère trois dimensions d'éléments finis pour définir les trois maillages considérés dans cette étude dynamique. Les nœuds considéré pour l'analyse des effets de la radiation des ondes sont au nombre de 10, soit un point de référence noté A et trois différents points suivant la direction horizontale (surface libre), suivant une diagonale à 45° partant du point A et enfin trois autre points suivant la verticale issue du point A. le maillage grossier est obtenu à partir du maillage régulier en multipliant les dimensions des éléments finis par deux et à l'inverse, le maillage fin est obtenu en divisant par deux les dimensions des éléments finis.

Pour la première forme du maillage, à savoir le maillage grossier, les coordonnées des points d'observation pour les déplacements, vitesses et accélérations sont les suivantes :

A(0. 75); B(3. 75); C(15,27. 75); D(30. 75); E(0. 72,65); F(0. 37,61); G(0. 0); H(2,9. 72,74); I(15,07. 34,91); J (30. 0)

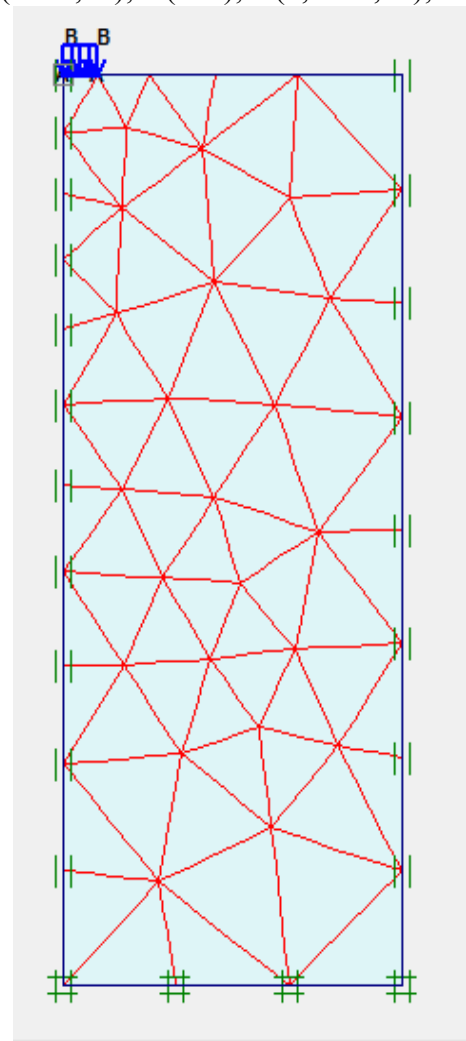


Figure IV.21 : Maillage grossier

Pour passer d'un maillage grossier à un maillage régulier on divise la taille de l'élément fini par deux et de même pour passer du maillage régulière au maillage fin.

Pour la deuxième forme du maillage dit maillage régulier :

A(0, 75); B(3, 75); C(14,73, 75); D(30, 75); E(0, 72,03); F(0, 37,34), G(0, 0); H(2,78, 73,77);
I(14,97, 37,73); J(30, 0).

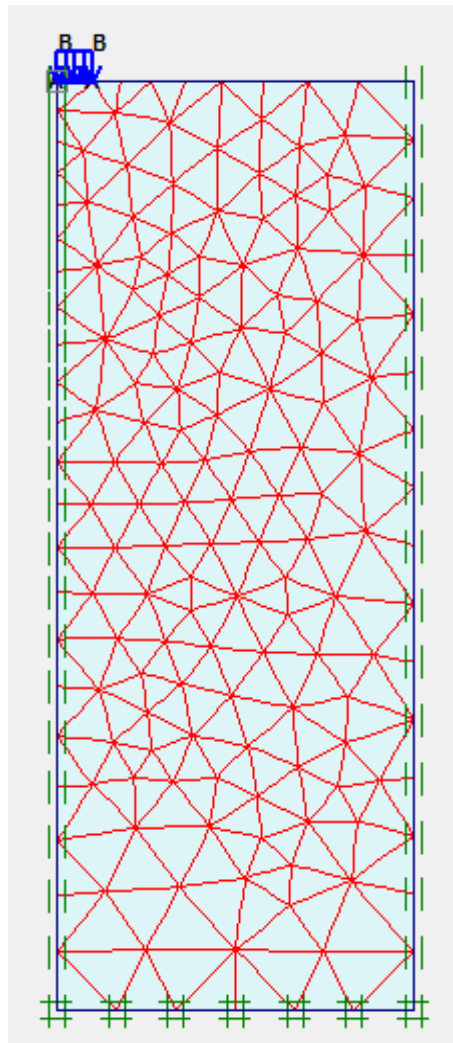


Figure IV.22 : Maillage régulier

Pour la troisième forme du maillage dit maillage fin

A (0, 75); B(3, 75); C(15,18, 75); D(30, 75); E(0, 72,04); F(0, 37,41); G(0, 0); H(2,75, 73,7);
I(15,24, 37,58); J(30, 0).

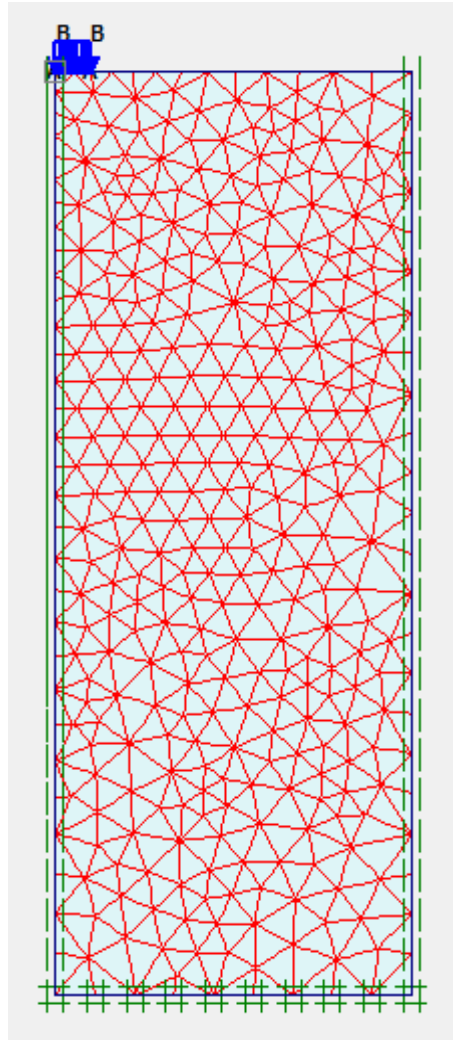


Figure IV.23 : Maillage fin

IV.3.4. Les résultats de l'étude paramétrique :

IV.3.4.1. Les résultats sans amortissement matériel:

On prend $a_0 = a_1 = 0$ ($a_0 = a_1 = 0$ (type visqueux))

Pour : $\nu = 0,25$.

Maillage grossier :

Tableau IV.7 : Valeurs maximales du déplacement, de la vitesse et de l'accélération, pour :
 $a_0 = a_1 = 0, \nu = 0,25$, maillage grossier

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	1,08E-03	7,44E-02	8,31E+00
	Nœud B	2,71E-04	1,49E-02	1,73E+00
	Nœud C	8,16E-05	4,62E-03	2,90E-01
	Nœud D	5,20E-05	3,06E-03	1,89E-01
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	1,21E-03	7,08E-02	4,64E+00
	Nœud F	2,93E-04	1,85E-02	1,24E+00
	Nœud G	8,93E-05	4,67E-03	2,94E-01
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	2,96E-04	1,56E-02	1,01E+00
	Nœud I	2,22E-05	1,19E-03	8,27E-02
	Nœud J	1,91E-06	2,31E-04	1,20E-02

Maillage régulier

Tableau IV.8 : les valeurs maximales de : déplacement, vitesse, accélération, pour :
 $a_0 = a_1 = 0, \nu = 0,25$, maillage régulier

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	9,68E-04	6,83E-02	5,50E+00
	Nœud B	2,57E-04	1,32E-02	1,67E+00
	Nœud C	8,38E-05	3,94E-03	2,75E-01
	Nœud D	6,56E-05	4,05E-03	2,61E-01
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	8,19E-04	5,94E-02	3,76E+00
	Nœud F	6,77E-05	3,42E-03	4,14E-01
	Nœud G	6,60E-05	4,10E-03	2,67E-01
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	3,00E-04	1,36E-02	8,92E-01
	Nœud I	1,55E-05	1,05E-03	5,63E-02
	Nœud J	3,54E-06	3,71E-04	2,32E-02

Maillage fin

Tableau IV.9 : Valeurs maximales du déplacement, de la vitesse et de l'accélération pour :
 $a_0 = a_1 = 0, \nu = 0,25$, maillage fin

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	1,11E-03	7,09E-02	4,39E+00
	Nœud B	2,78E-04	1,49E-02	1,13E+00
	Nœud C	1,08E-04	5,52E-03	3,77E-01
	Nœud D	9,41E-05	5,95E-03	3,75E-01
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	7,79E-04	4,94E-02	3,69E+00
	Nœud F	3,83E-05	2,47E-03	1,72E-01
	Nœud G	3,68E-05	2,64E-03	1,79E-01
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	3,11E-04	1,92E-02	5,46E-06
	Nœud I	1,35E-05	9,78E-04	5,05E-04
	Nœud J	5,46E-06	6,89E-02	3,15E-02

Pour : $\nu = 0,33$.

Maillage grossier :

Tableau IV.10: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = a_1 = 0, \nu = 0,33$, maillage grossier

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	1,02E-03	7,52E-02	6,65E+00
	Nœud B	2,78E-04	1,47E-02	1,49E+00
	Nœud C	6,85E-05	3,60E-03	2,35E-01
	Nœud D	5,19E-05	3,19E-03	1,92E-01
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	1,16E-03	6,94E-02	4,68E+00
	Nœud F	1,87E-04	1,06E-02	6,77E-01
	Nœud G	6,52E-05	3,68E-03	2,02E-01
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	2,92E-04	1,28E-02	8,17E-01
	Nœud I	3,04E-05	1,76E-03	1,15E-01
	Nœud J	4,64E-06	2,90E-04	1,69E-02

Maillage régulier :

Tableau IV.11: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,33$, maillage régulier

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	9,65E-04	6,63E-02	5,49E+00
	Nœud B	2,59E-04	1,27E-02	1,49E+00
	Nœud C	6,16E-05	3,27E-03	2,28E-01
	Nœud D	5,74E-05	3,51E-03	2,25E-01
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	8,31E-04	5,97E-02	3,28E+00
	Nœud F	9,86E-05	5,13E-03	3,03E-01
	Nœud G	5,51E-05	3,51E-03	1,93E-01
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	3,05E-04	1,28E-02	7,88E-01
	Nœud I	2,02E-05	1,39E-03	8,91E-02
	Nœud J	2,56E-06	2,76E-04	1,72E-02

Maillage fin :

Tableau IV.12: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,33$, maillage fin

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	1,06E-03	6,71E-02	4,51E+00
	Nœud B	2,59E-04	1,41E-02	1,02E+00
	Nœud C	8,68E-05	4,62E-03	2,88E-01
	Nœud D	8,52E-05	5,37E-03	3,39E-01
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	7,81E-04	5,01E-02	3,50E+00
	Nœud F	1,04E-04	6,95E-03	5,44E-01
	Nœud G	3,27E-05	2,16E-03	1,13E-01
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	3,01E-04	1,80E-02	1,15E+00
	Nœud I	2,54E-05	1,76E-03	1,05E-01
	Nœud J	3,76E-06	3,40E-04	2,24E-02

Pour : $\nu = 0,499$.

Maillage grossier :

Tableau IV.13: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,499$,
maillage grossier

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	1,04E-03	7,11E-02	5,01E+00
	Nœud B	2,71E-04	1,41E-02	7,80E-01
	Nœud C	6,33E-05	4,13E-03	2,77E-01
	Nœud D	4,72E-05	1,96E-03	1,04E-01
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	1,21E-03	7,49E-02	4,48E+00
	Nœud F	8,48E-05	7,92E-03	4,73E-01
	Nœud G	7,97E-05	4,69E-03	2,94E-01
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	2,64E-04	9,88E-03	5,91E-01
	Nœud I	2,37E-05	1,41E-03	7,06E-02
	Nœud J	1,29E-06	8,99E-05	5,29E-03

Maillage régulier :

Tableau IV.14: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,499$,
maillage régulier

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	9,97E-04	6,68E-02	4,56E+00
	Nœud B	2,96E-04	1,27E-02	1,01E+00
	Nœud C	6,06E-05	3,42E-03	2,20E-01
	Nœud D	4,60E-05	2,59E-03	1,72E-01
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	7,71E-04	5,41E-02	3,12E+00
	Nœud F	1,66E-04	9,48E-03	6,11E-01
	Nœud G	5,13E-06	4,70E-04	4,15E-02
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	3,30E-04	1,17E-02	6,87E-01
	Nœud I	2,07E-05	1,23E-03	7,98E-02
	Nœud J	8,46E-07	5,59E-05	3,16E-03

Maillage fin :

Tableau IV.15: les valeurs maximales des : déplacement, vitesse, accélération pour :
 $a_0 = a_1 = 0, \nu = 0,499$, maillage fin

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	1,00E-03	6,34E-02	4,66E+00
	Nœud B	2,48E-04	1,50E-02	9,77E-01
	Nœud C	8,30E-05	5,01E-03	3,21E-01
	Nœud D	7,01E-05	4,17E-03	2,62E-01
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	7,61E-04	4,82E-02	4,08E+00
	Nœud F	1,77E-04	1,03E-02	6,34E-01
	Nœud G	3,96E-06	3,89E-04	7,31E-02
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	3,00E-04	1,66E-02	1,06E+00
	Nœud I	3,03E-05	1,84E-03	1,12E-01
	Nœud J	8,58E-07	5,99E-05	3,20E-03

IV.3.4.2. Cas de l'amortissement matériel :

On prend $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$ (type visqueux)

Pour : $\nu = 0,25$.

Maillage grossier :

Tableau IV.16: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,25$, maillage grossier

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	5,54E-04	3,54E-02	2,17E+00
	Nœud B	1,93E-04	1,34E-02	7,53E-01
	Nœud C	1,32E-05	3,29E-04	1,55E-02
	Nœud D	7,03E-06	1,52E-04	3,54E-03
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	3,80E-04	2,41E-02	1,49E+00
	Nœud F	3,33E-06	8,56E-05	2,23E-03
	Nœud G	5,04E-09	2,14E-05	2,23E-04
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	1,49E-04	9,59E-03	5,20E-01
	Nœud I	1,09E-06	4,07E-05	8,41E-04
	Nœud J	5,90E-24	1,59E-05	1,55E-04

Maillage régulier :

Tableau IV.17: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,25$, maillage régulier

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	5,32E-04	3,49E-02	2,05E+00
	Nœud B	1,77E-04	1,32E-02	7,16E-01
	Nœud C	1,59E-05	4,24E-04	2,14E-02
	Nœud D	7,08E-06	1,59E-04	3,77E-03
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	3,15E-04	2,03E-02	1,19E+00
	Nœud F	2,42E-06	8,69E-05	2,61E-03
	Nœud G	8,64E-15	1,90E-05	1,92E-04
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	1,95E-04	1,33E-02	6,99E-01
	Nœud I	1,14E-06	5,06E-05	1,40E-03
	Nœud J	1,14E-06	1,62E-05	1,68E-04

Maillage fin :

Tableau IV.18: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,25$, maillage fin

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	5,57E-04	3,64E-02	2,20E+00
	Nœud B	2,08E-04	1,48E-02	8,14E-01
	Nœud C	1,52E-05	4,34E-04	2,32E-02
	Nœud D	6,92E-06	1,59E-04	3,91E-03
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	3,15E-04	2,04E-02	1,22E+00
	Nœud F	2,24E-06	8,04E-05	8,04E-05
	Nœud G	8,99E-17	1,75E-05	1,78E-04
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	2,10E-04	1,43E-02	7,94E-01
	Nœud I	1,11E-06	4,93E-05	1,40E-03
	Nœud J	0,00E+00	1,61E-05	1,72E-04

$\nu = 0,33$.

Maillage grossier :

Tableau IV.19: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,33$, maillage grossier

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	5,20E-04	3,32E-02	2,04E+00
	Nœud B	1,80E-04	1,25E-02	7,02E-01
	Nœud C	1,23E-05	3,01E-04	1,14E-02
	Nœud D	7,00E-06	1,42E-04	3,31E-03
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	3,73E-04	2,35E-02	1,46E+00
	Nœud F	1,83E-06	5,68E-05	1,99E-03
	Nœud G	5,20E-09	1,45E-05	2,13E-04
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	1,41E-04	9,05E-03	4,86E-01
	Nœud I	1,01E-06	3,57E-05	8,90E-04
	Nœud J	3,29E-24	1,34E-05	1,39E-04

Maillage régulier :

Tableau IV.20: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,33$, maillage régulier

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	1,66E-04	3,30E-02	1,94E+00
	Nœud B	1,66E-04	1,24E-02	6,69E-01
	Nœud C	1,49E-05	3,92E-04	1,62E-02
	Nœud D	7,08E-06	1,49E-04	3,45E-03
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	3,07E-04	1,97E-02	1,15E+00
	Nœud F	1,48E-06	5,95E-05	2,62E-03
	Nœud G	1,23E-14	1,46E-05	1,93E-04
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	1,85E-04	1,26E-02	6,61E-01
	Nœud I	1,01E-06	4,68E-05	1,51E-03
	Nœud J	1,34E-33	1,36E-05	1,52E-04

Maillage fin :

Tableau IV.21: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,33$, maillage fin

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	5,26E-04	3,44E-02	2,08E+00
	Nœud B	1,95E-04	1,38E-02	7,57E-01
	Nœud C	1,42E-05	4,00E-04	1,78E-02
	Nœud D	6,92E-06	1,49E-04	3,60E-03
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	3,07E-04	1,99E-02	1,18E+00
	Nœud F	1,41E-06	5,55E-05	2,59E-03
	Nœud G	1,81E-16	1,38E-05	1,61E-04
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	1,99E-04	1,36E-02	7,49E-01
	Nœud I	9,82E-07	4,60E-05	1,53E-03
	Nœud J	0,00E+00	1,36E-05	1,56E-04

$\nu = 0,499$.

Maillage grossier :

Tableau IV.22: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,499$, maillage grossier

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	4,49E-04	2,80E-02	1,74E+00
	Nœud B	1,57E-04	1,06E-02	5,95E-01
	Nœud C	9,19E-06	4,23E-04	2,08E-02
	Nœud D	5,76E-06	9,82E-05	2,55E-03
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	3,49E-04	2,11E-02	1,32E+00
	Nœud F	3,64E-06	5,89E-05	1,56E-03
	Nœud G	1,81E-07	4,59E-06	2,52E-04
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	1,26E-04	7,48E-03	3,90E-01
	Nœud I	8,79E-07	2,31E-05	6,06E-04
	Nœud J	2,94E-17	2,40E-06	1,27E-04

Maillage régulier :

Tableau IV.23: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,499$, maillage régulier

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	4,55E-04	2,98E-02	1,75E+00
	Nœud B	1,50E-04	1,07E-02	5,74E-01
	Nœud C	1,33E-05	3,39E-04	1,26E-02
	Nœud D	6,85E-06	1,27E-04	3,71E-03
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	3,71E-03	1,80E-02	1,04E+00
	Nœud F	1,33E-06	5,46E-05	2,57E-03
	Nœud G	5,37E-14	9,08E-06	2,54E-04
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	1,67E-04	1,11E-02	5,81E-01
	Nœud I	9,47E-07	3,40E-05	1,64E-03
	Nœud J	1,79E-25	6,83E-06	1,38E-04

Maillage fin :

Tableau IV.24: les valeurs maximales des : dép, vit, acc. de pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$,
 $\nu = 0,499$, maillage fin

résultats		Déplacement (m)	Vitesse (m/s)	Accélération (m/s ²)
Les nœuds de la surface libre	Nœud A	4,52E-04	2,92E-02	1,77E+00
	Nœud B	1,72E-04	1,15E-02	6,32E-01
	Nœud C	1,05E-05	5,04E-04	2,36E-02
	Nœud D	5,77E-06	1,06E-04	2,52E-03
Les nœuds de l'axe de la symétrie	Nœud E	2,78E-04	1,73E-02	1,02E+00
	Nœud F	3,29E-06	4,78E-05	1,41E-03
	Nœud G	6,88E-08	3,66E-06	2,11E-04
Les nœuds de la diagonale	Nœud H	1,79E-04	1,15E-02	6,23E-01
	Nœud I	8,24E-07	2,54E-05	9,53E-04
	Nœud J	0,00E+00	2,81E-06	1,61E-04

IV.3.5. Résultats obtenus pour les déplacements :

IV.3.5.1. Sans amortissement:

On prend $a_0 = a_1 = 0$ ($a_0 = a_1 = 0$ C'est-à-dire sans amortissement géométrique (type visqueux))

Pour : $\nu = 0,25$,

Maillage régulier

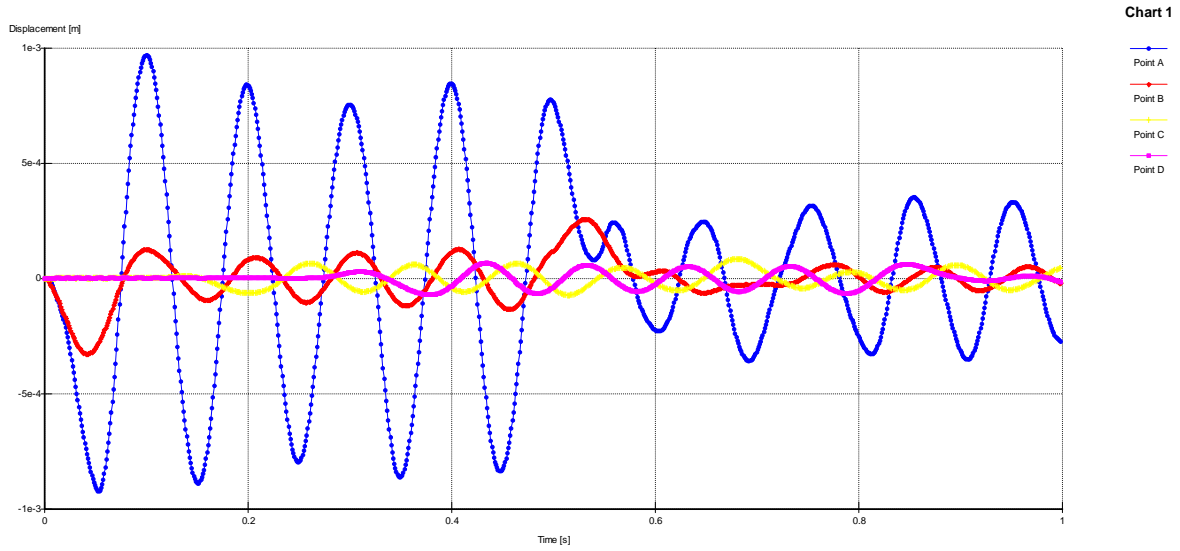


Figure IV.24: La variation de déplacement de nœuds sur la surface libre pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,25$, maillage régulier

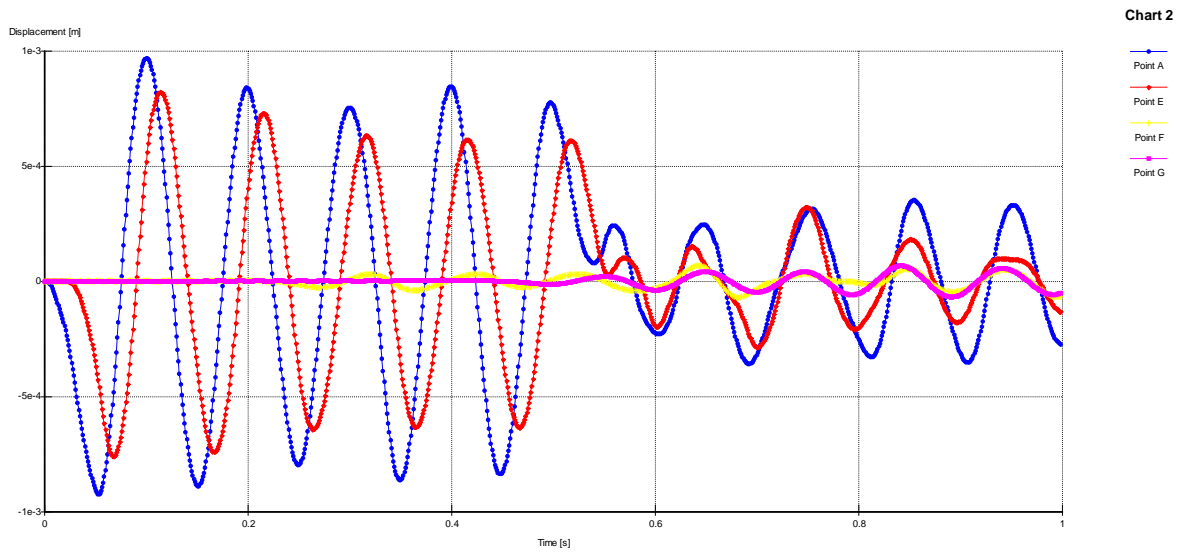


Figure IV.25: La variation de déplacement de nœuds sur l'axe de symétrie pour : $a_0 = a_1 = 0$, $\nu = 0,25$, maillage régulier

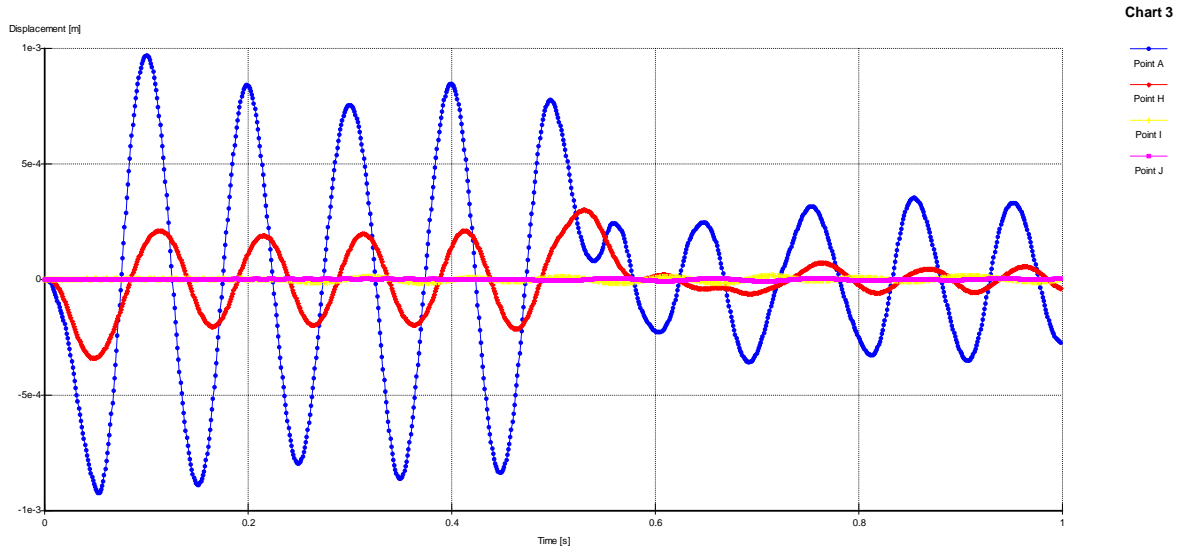


Figure IV.26: La variation de déplacement de nœuds sur la diagonale du model pour : $a_0 = a_1 = 0, \nu = 0,25$, maillage régulier

IV.3.5.2. Avec amortissement :

On prend $a_0 = 0,155 . a_1 = 0,012$ (C'est-à-dire avec l'amortissement géométrique (type visqueux))

Pour: $\nu = 0,25, Le$

Maillage régulier :

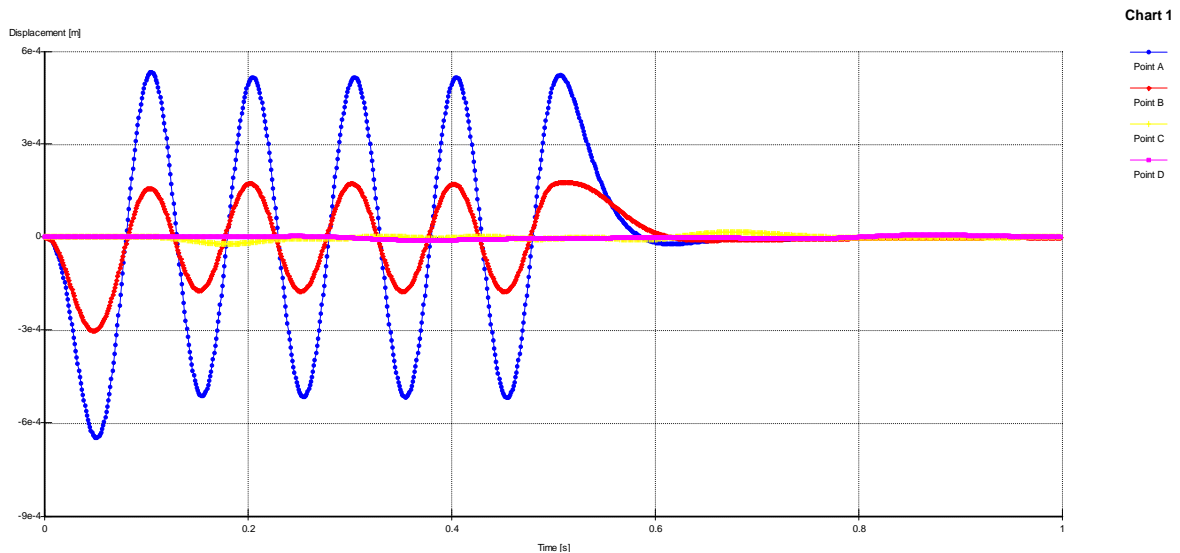


Figure IV.27: La variation de déplacement de nœuds sur la surface libre pour : $a_0 = 0,155 . a_1 = 0,012, \nu = 0,25$, maillage régulier

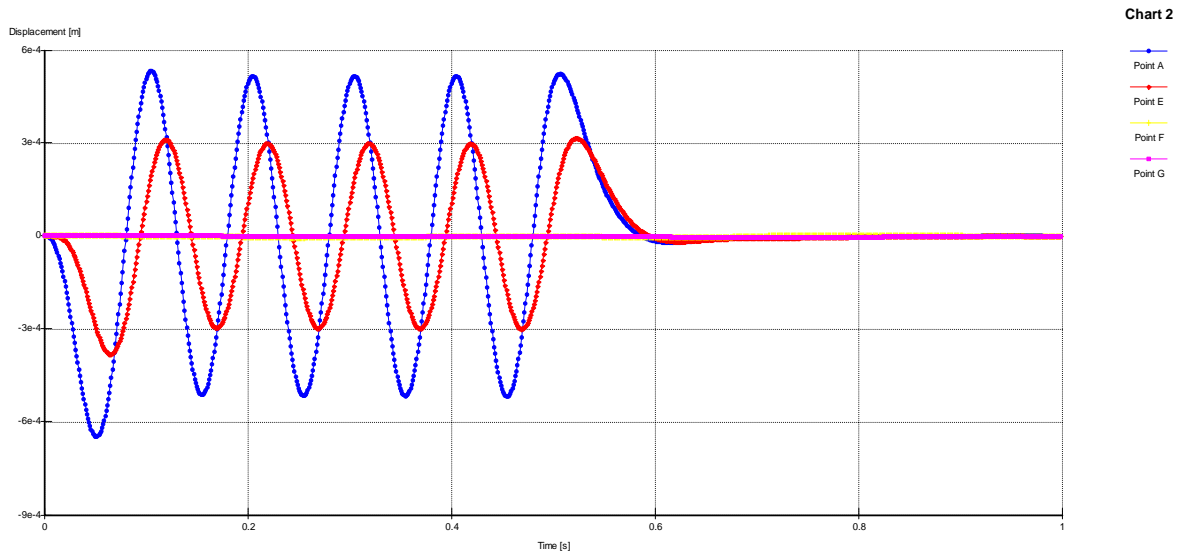


Figure IV.28: La variation de déplacement de nœuds sur l'axe de symétrie pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$, $\nu = 0,25$, maillage régulier

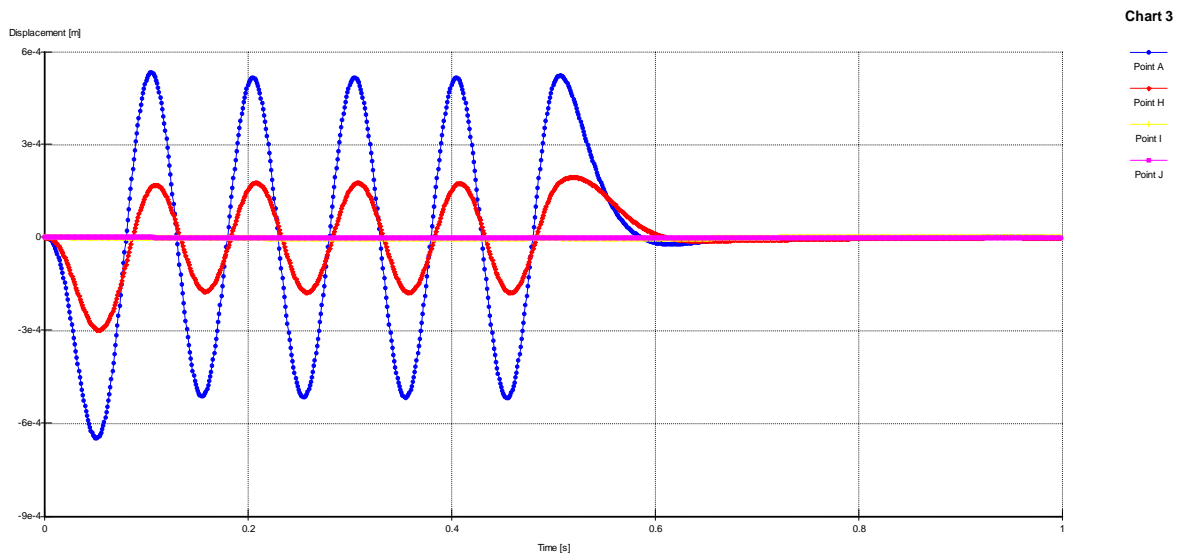


Figure IV.29: La variation de déplacement de nœuds sur la diagonale du model pour : $a_0 = 0,155$. $a_1 = 0,012$, $\nu = 0,25$, maillage régulier

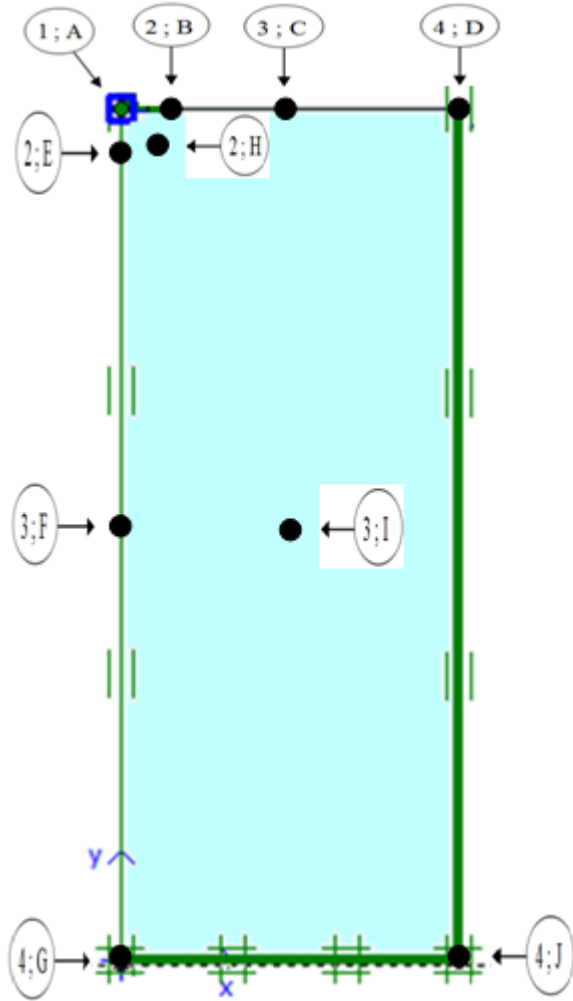


Figure IV 30: La distribution des nœuds

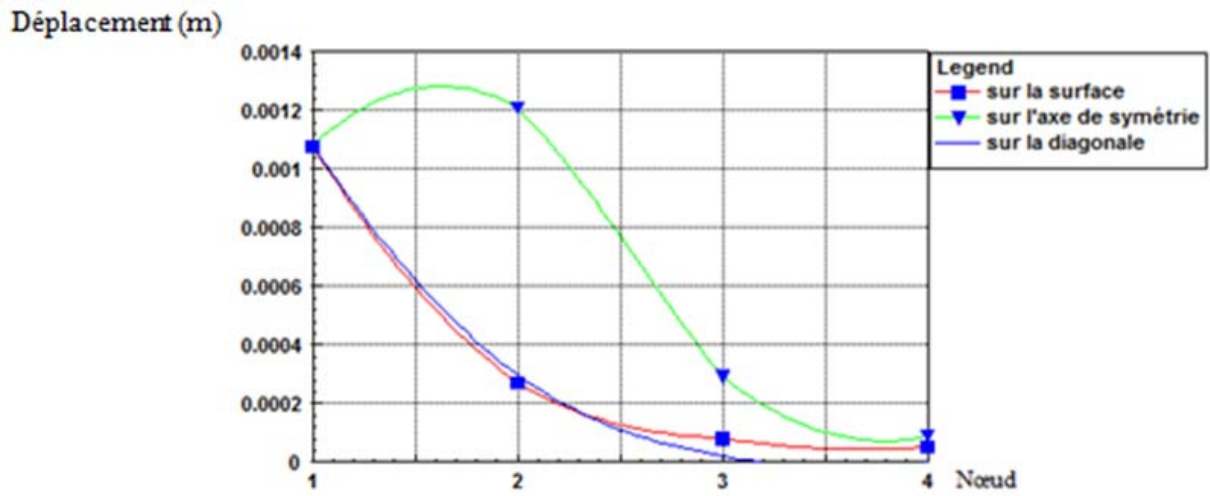


Figure IV 31: Déplacements pour Maillage grossier, $V=0.25$, sans amortissement matériel

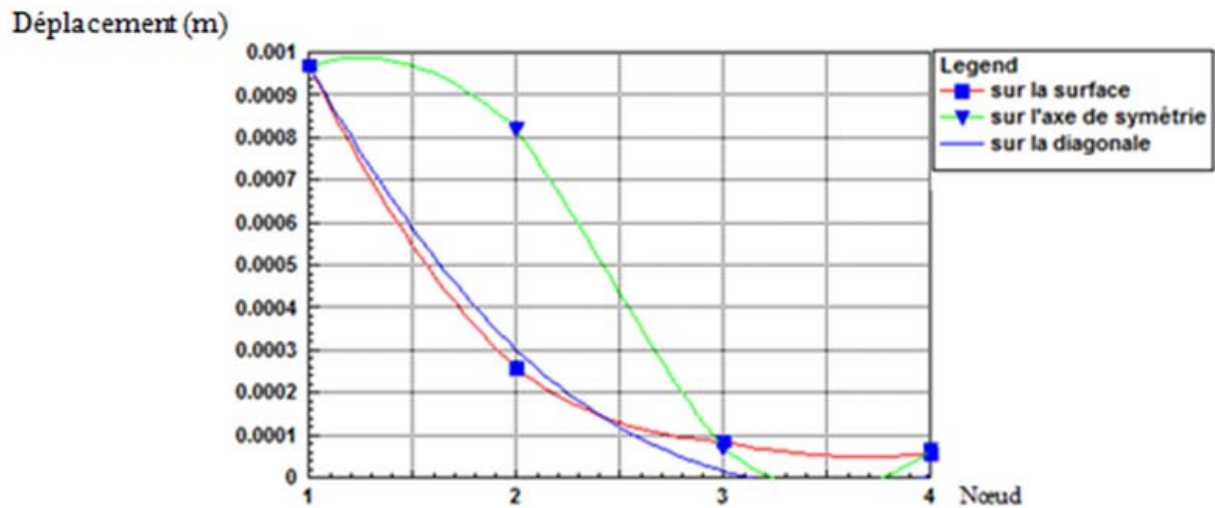


Figure IV 32: Déplacements pour Maillage régulier, $V=0.25$, sans amortissement matériel

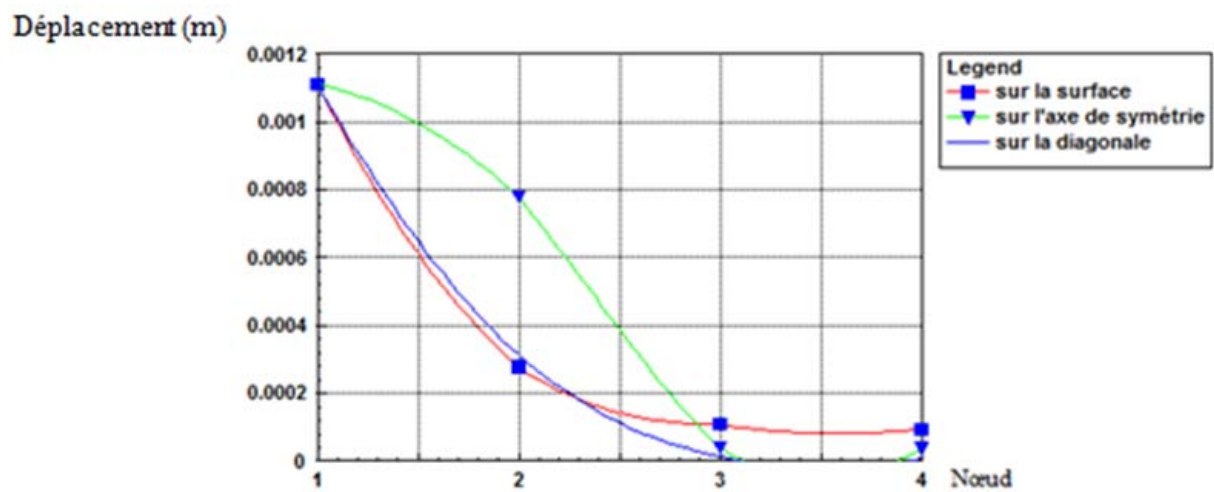


Figure IV 33: Déplacements pour Maillage fin, $V=0.25$, sans amortissement matériel

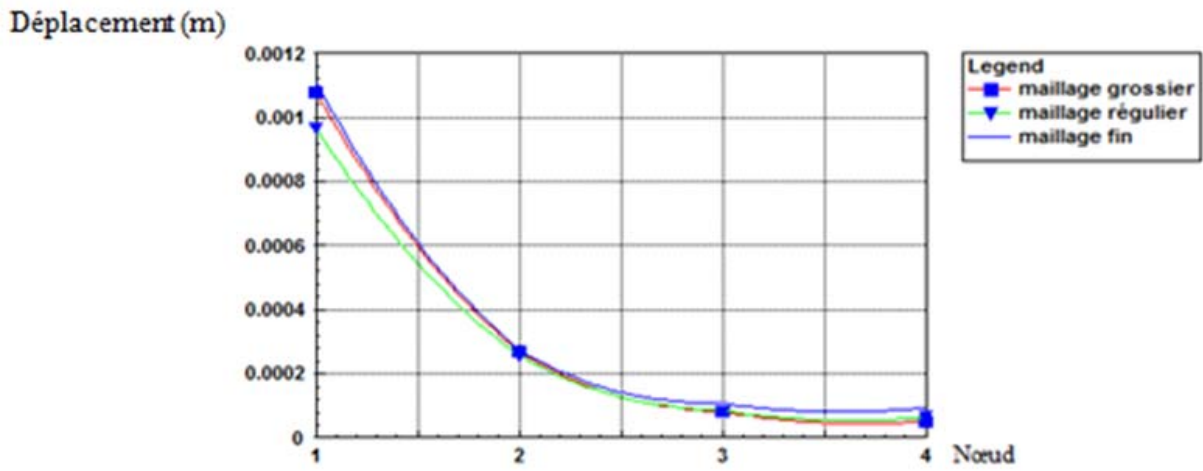


Figure IV 34: Déplacements pour les nœuds sur la surface libre, $V=0.25$, sans amortissement matériel

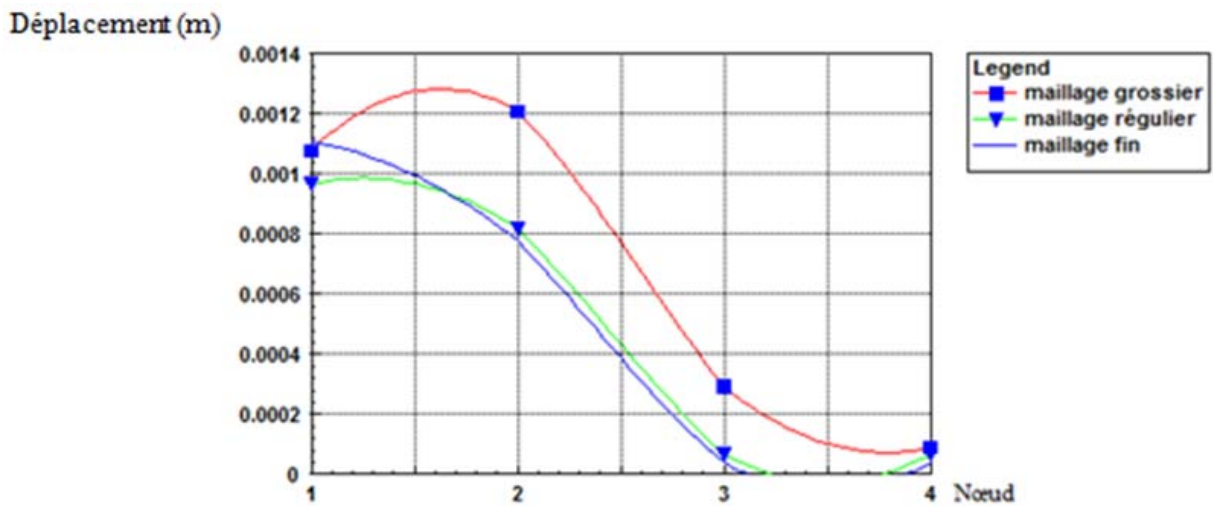


Figure IV 35: Déplacements pour les nœuds sur l'axe de symétrie, $V=0.25$, sans amortissement matériel

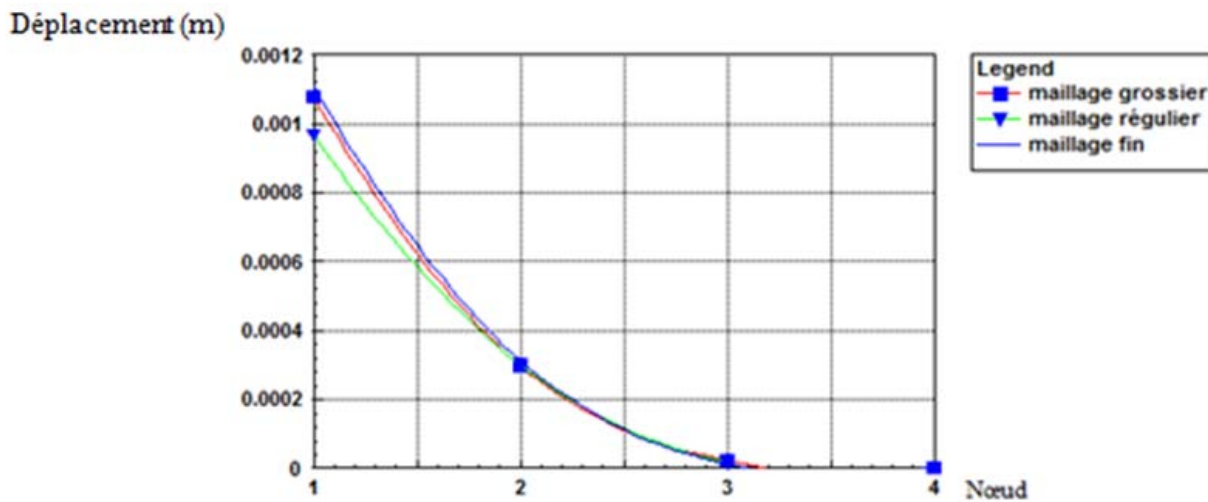


Figure IV 36: Déplacements pour les nœuds sur l'axe diagonal, $V=0.25$, sans amortissement matériel

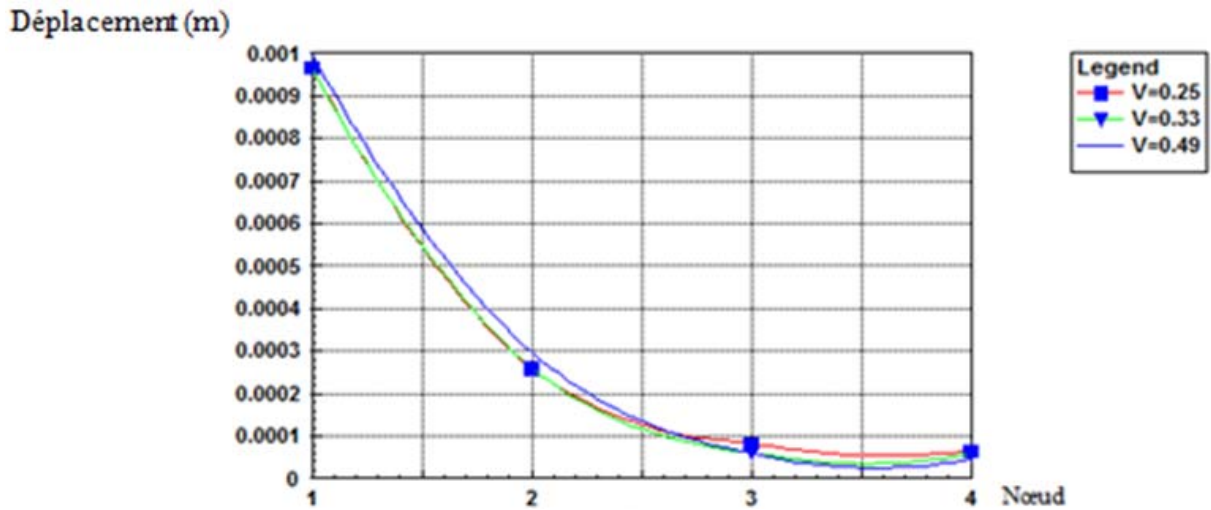


Figure IV 37: Déplacements pour les nœuds sur la surface libre, maillage régulier, sans amortissement matériel

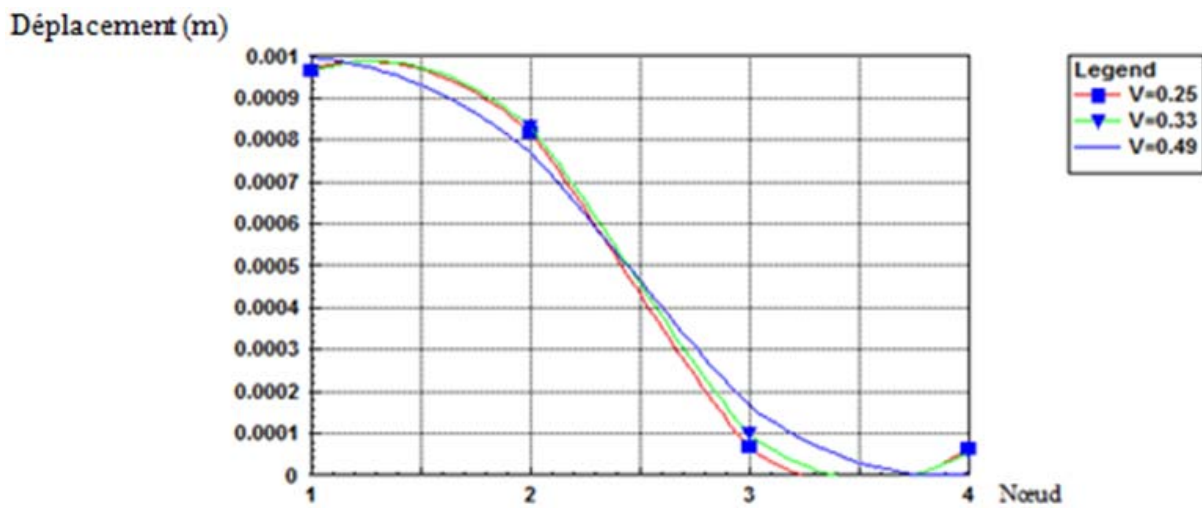


Figure IV 38: Déplacements pour les nœuds sur l'axe de symétrie, maillage régulier, sans amortissement matériel

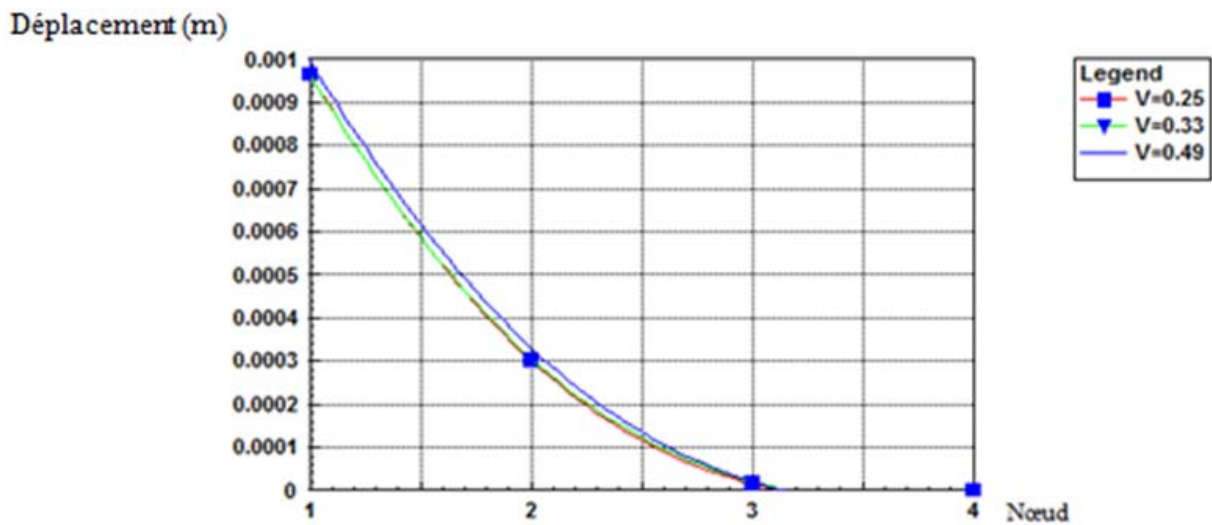


Figure IV 39: Déplacements pour les nœuds sur l'axe diagonal, maillage régulier, sans amortissement matériel

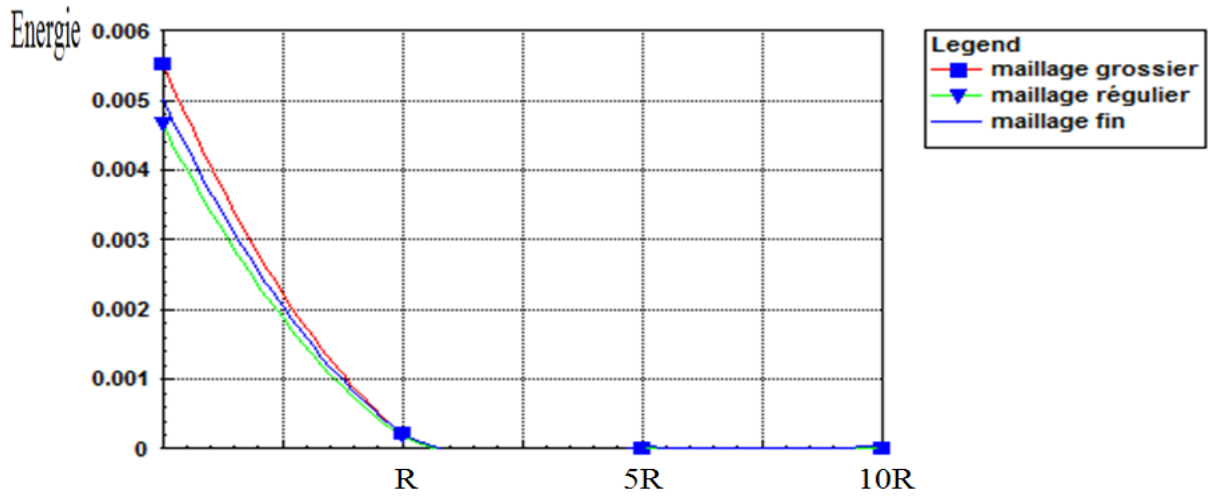


Figure IV 40: L'énergie pour les nœuds sur la surface libre, $V=0.25$, sans amortissement matériel

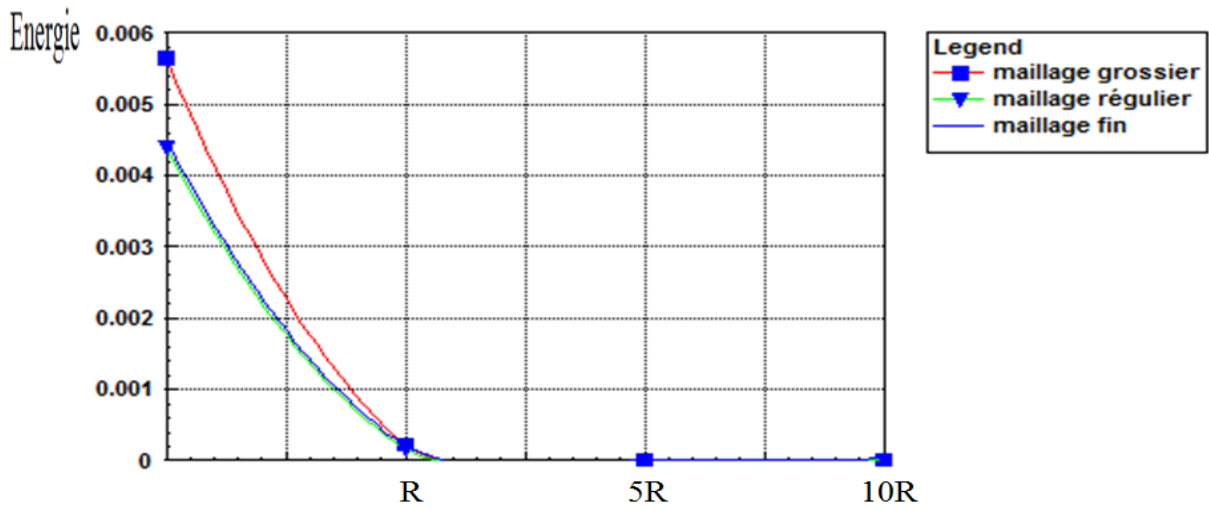


Figure IV 41: L'énergie pour les nœuds sur la surface libre, $V=0.33$, sans amortissement matériel

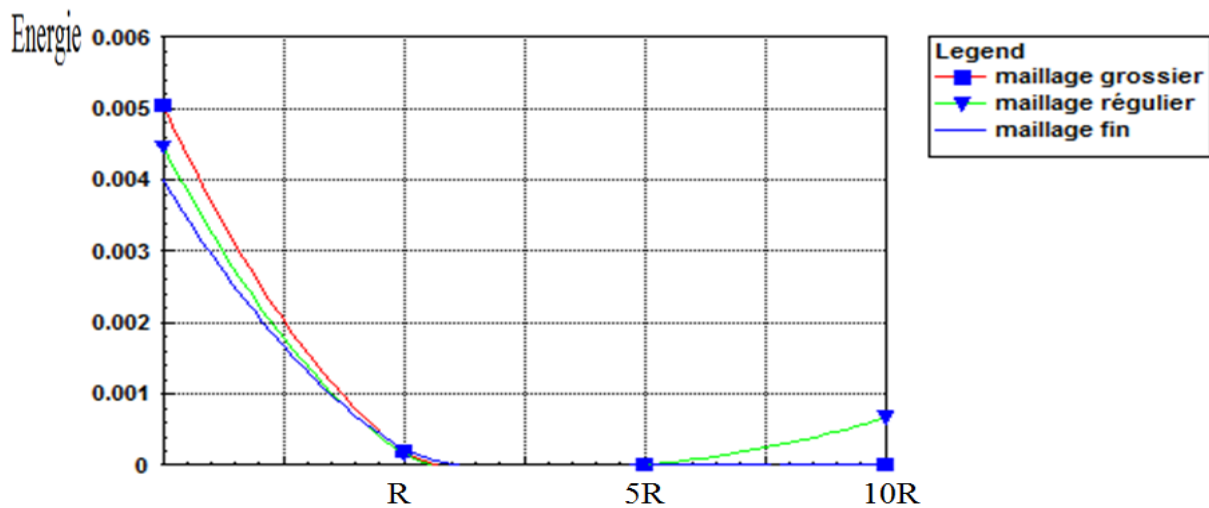


Figure IV 42: L'énergie pour les nœuds sur la surface libre, $V=0.49$, sans amortissement matériel

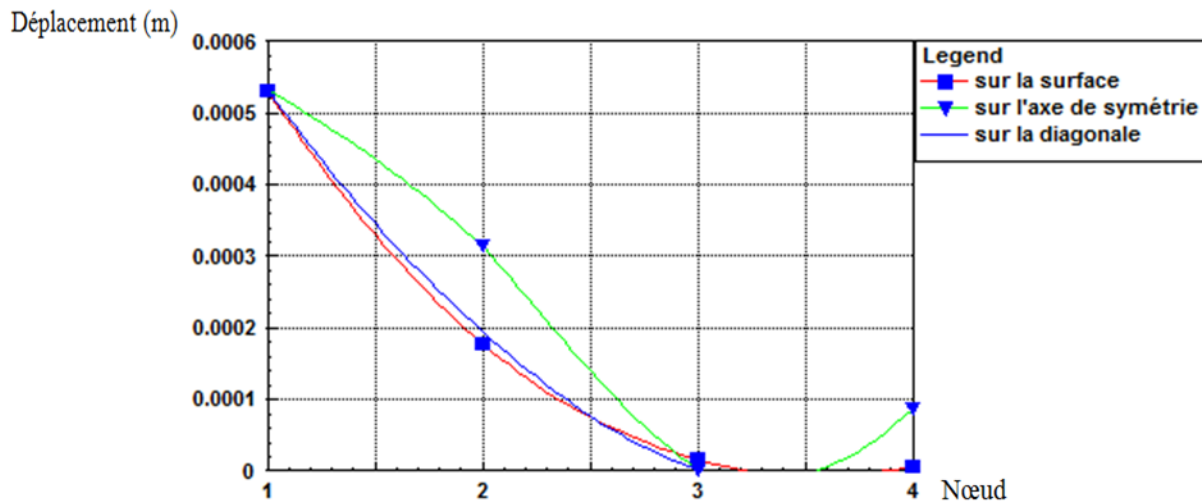


Figure IV 43: Déplacements pour Maillage régulier, $V=0.25$, avec l'amortissement matériel

IV.3.6. Conclusions :

Dans un premier temps, nous avons mené une étude sur les variations de la rigidité statique en fonction de la taille du maillage et des paramètres physiques et géométrique du sol. Il en ressort que la valeur de la raideur statique augmente de manière très franche avec l'accroissement des valeurs de ν : c'est – à – dire en allant des sols les plus souples au sol les plus raides. D'autre part, la taille du maillage raffine ces valeurs. En effet, un maillage de plus en plus fin conduit à des valeurs de raideur pouvant aller du simple au double. Pour des sols de grandes hauteurs les valeurs de la rigidité statique sont plus grandes. Cette augmentation de la rigidité est plus prononcée dans le cas de sols rigides ($\nu = 0.45$) que dans le cas de sols flexibles. Pour une rigidité donnée, les grandes hauteurs de sol conduisent à des valeurs moindres de la rigidité statique.

Avant de mener notre étude dans le domaine dynamique, nous avons considéré comme critère de dimensionnement de la taille de notre maillage que la dimension de celle – ci devait être au moins égale au $1/6^e$ de la dimension de la plus petite des longueurs d'ondes à analyser dans le problème dynamique. Cela a permis de dimensionner le maillage dit régulier de notre étude.

L'analyse dynamique a conduit aux résultats suivants :

-l'effet d'amortissement radiatif de demi-espace est dépendant de l'amortissement matériel (*Yongqiang Zhang, Yong Lu, Lizhong Wang (2007)*), et il est plus évident si on compare les variances des valeurs maximales de dép, vit, et l'accél, entre un nœud et le nœud adjacent aux tableaux (IV.8) à (IV.16) à une coté avec celles aux tableaux (IV.17) à (IV.25) à une autre coté.

-Il est évident aux figures (IV.27) à (IV.29), que l'amortissement matériel remet les valeurs des pics de déplacement pour chaque un nœud, il les remet égaux.

-Il est évident et dans toutes les figures (IV.24) à (IV.29) que le déphasage au réponse entre le nœud A et le nœud B (sur la surface libre) est plus petit par rapport à celle entre le nœud A et le nœud H (sur la diagonale) et ce dernière lui aussi est plus petit par rapport à celle entre le nœud A et le nœud E (sur l'axe de symétrie), ça veut dire que la propagation des ondes de vibrations est plus vite sur la surface libre puis sur la diagonale puis sur l'axe de symétrie respectivement, pour n'importe type du maillage et n'importe valeur de coefficient de Poisson, malgré on a un demi-espace homogène et isotrope.

-Le raffinement du maillage à une étude dynamique, il ne prend pas même effet quand on a une étude statique comme on a vu à l'étude statique de la troisième chapitre, et ça est plus évident si on vu les valeurs de déplacement pour le nœud A au tableau (IV.7) est égale $1,08E-03m$ pour un gros maillage, et au tableau (IV.8) est égale $9,68E-04m$ pour un maillage régulière, et au tableau (IV.9) est égale $1,11E-03m$ pour un maillage fin, mais au cas statique le raffinement donne une augmentation de déplacement, Donc l'effet du maillage pendant un chargement dynamique n'est pas le même qu'on a un chargement statique.

Effet du maillage :

L'effet du maillage n'apparaît pas très clairement sur les nœuds considérés à la surface libre. Par contre pour le rayonnement suivant l'axe à 45° (points I, J et H) et l'axe de symétrie (points E, F, et G) on remarque que les amplitudes des déplacements ainsi que les valeurs des vitesses et des accélérations décroissent en allant du maillage grossier au maillage fin. Cette constatation est valable quelque soit la valeur du coefficient de Poisson.

De même, lorsqu'on analyse les résultats obtenus pour le sol dissipatif c.-à-d. caractérisé par un amortissement matériel, on peut tirer les mêmes conclusions des résultats obtenus, sauf que les variations sont relativement plus faibles.

Effet du coefficient de Poisson :

Nous considérerons dans cette analyse le maillage régulier. L'effet dissipatif de la radiation est plus important lorsqu'on passe de $\nu = 0.25$ à 0.5 . En effet, à titre illustratif les déformations passe de la valeur $9.68 \cdot 10^{-4} m$ à $3.54 \cdot 10^{-6} m$ suivant le rayon diagonal (à 45°) pour $\nu = 0.25$ alors qu'il passe de $9.97 \cdot 10^{-4} m$ à $8.46 \cdot 10^{-7} m$ pour $\nu = 0.5$. Les mêmes conclusions peuvent être formulées pour les vitesses et les accélérations.

Les valeurs relatives des déplacements sont plus faibles et les tendances sont identiques. L'effet d'amortissement est comme attendu plus important du fait de la présence de

l'amortissement matériel. Les valeurs des déplacements, vitesses et accélérations ont tendance à diminuer avec les valeurs grandissantes ν .

Effet de l'amortissement matériel :

L'effet d'amortissement est très nettement mis en relief au vu des valeurs nettement plus petites pour les déplacements, les vitesses et les accélérations obtenues pour le sol en présence d'amortissement matériel. Néanmoins, la présence de l'amortissement matériel a tend à augmenter l'importance l'effet de l'amortissement radiatif. En effet, dans le cas du maillage régulier et pour $\nu = 0.25$, le rapport des amplitudes au point référence A et ceux des points les plus éloignés D suivant l'horizontale et J suivant la diagonale sont respectivement 0.06 et 0.003 pour le sol sans amortissement alors qu'ils deviennent égaux à 0.01 et 0.001 pour le sol avec amortissement matériel. Des conclusions similaires peuvent être déduites pour les vitesses et les accélérations.

Conclusions générales

Nous avons, dans le cadre de ce mémoire de Magister, étudié l'effet de l'importance de l'amortissement radiatif qui est l'un des effets induit par le phénomène d'interaction sol – structure. L'analyse de l'amortissement radiatif est très important dans la mesure où il influe de manière conséquente sur le comportement des structures sus – jacentes en s'additionnant à l'amplification des amplitudes des ondes sismique par le sol et à l'effet de la compatibilité cinématique entre le mouvement du sol et de la fondation.

Nous avons mené étude paramétrique de l'amortissement radiatif d'un sol de fondation sous l'effet de vibrations harmoniques verticales aux fins d'apprécier les effets du champ d'ondes rayonné par la fondation, qui joue ici le rôle de source, et analyser son comportement durant sa propagation dans le sol, en terme de variations d'amplitudes tant en déplacement, vitesse et accélération. Nous avons essayé d'avoir plus d'informations sur les variations des amplitudes de ces ondes en vue de leur exploitation future en tenant compte de la diversité des facteurs d'atténuation des ondes sismiques (atténuation géométrique, atténuation de réflexion et/ou transmission, atténuation anélastique), en vue de réduire la complexité du calcul d'interaction sol - structure. Notre attention s'est focalisée sur le phénomène d'atténuation géométrique des ondes émises par la fondation dans le sens où l'énergie transmise par une structure reposant sur un sol ayant une certaine souplesse produit un couplage entre les mouvements de la structure et ceux du sol et il a été intéressant de voir comment que dans ce cas alors, le champ d'ondes de volume et de surface, auquel les oscillations de la fondation ont donné naissance, se propage à l'infini et comment que l'énergie qu'il contient est restitué. Afin de bien expliciter ce phénomène complexe nous avons considéré dans notre étude le cas simple de la fondation circulaire reposant sur un demi – espace élastique et soumise à une excitation harmonique verticale représentant le mouvement de la structure.

Le concept de fonction d'impédance a été utilisé pour la quantification de l'atténuation géométrique. La méthode numérique des éléments finis a été mise en œuvre pour le calcul des déplacements dans les sols sous vibrations des fondations. Nous avons utilisé le code de calcul PLAXIS comme outil numérique utilisé pour l'implémentation des calculs. L'étude paramétrique du phénomène d'atténuation géométrique des ondes sismiques nous a permis

d'analyser l'influence des caractéristiques du sol sur le phénomène de déperdition d'énergie induit par l'amortissement radiatif. La précision des calculs a été analysée à travers l'élaboration de trois formes de maillages sont pris en considération : grossier, régulier et fin.

L'effet du maillage se traduit par des amplitudes de déplacements, vitesses et accélérations relativement plus basses quand on passe du maillage grossier au maillage fin et ce quelque soit la valeur du coefficient de Poisson. L'effet dissipatif de la radiation est plus important pour les valeurs grandissantes du coefficient de Poisson et ce en terme de déplacements, vitesses et accélérations. L'effet d'amortissement est très nettement mis en relief au vu des valeurs nettement plus petites pour les déplacements, les vitesses et les accélérations obtenues pour le sol en présence d'amortissement matériel. Néanmoins, la présence de l'amortissement matériel a tend à augmenter l'importance l'effet de l'amortissement radiatif.

Ce mémoire de Magister nous a permis d'avoir un aperçu sur l'effet de certaines caractéristiques mécaniques du sol sur l'effet dissipatif de la radiation des ondes sismiques produites par les forces transmises au sol par le mouvement de corps rigide de la fondation. Des conclusions intéressantes à l'adresse des bureaux d'études ont pu être formulées.

Ce mémoire de Magister est un travail préliminaire dans lequel les outils numériques ont été développés en vue d'une utilisation future pour l'analyse des impédances induites par les différents modes de vibration des fondations (translation horizontal, balancement et rotation).

Des recommandations pour travaux futures:

Pour des études perspectives que peu être comme suite pour allonger ou améliorer cette mémoire nous citons :

- Extension l'étude pour divers type de sol, une couche de sol surmontant un demi-espace, une couche de sol surmontant rochet, un sol stratifier, substratum.
- Considération la fréquence d'excitation comme paramètre effectuer sur la réponse comme les autres (la fonction d'impédance).
- Extension l'étude pour divers types des ondes de mouvement, les ondes de volume(p) et de surface (SV).
- Considération les formes de fondation, rectangulaire, arbitraire.
- Améliorer les résultats obtenus par l'utilisation des autres types de frontières « Standard Earthquake Boundaries ».

Les références bibliographiques:

- Alaa, Chateaneuf, (2005):“comprendre les éléments finis, structures, principes, formulations et exercices corrigés, institut français de mécanique avancée, Ellipses.
- Arnold Verruijt, (1994):“Elastostatic of Half-Space”, Delft University of technology.
- Belkheiri Nassira, (2010):”Analyse de la sensibilité du spectre de réponse aux effets du site”, mémoire de magistère à L’Ecole Nationale polytechnique Alger.
- Ciro Visone, Ph.D. student ():”Remarks on site response analysis by using Plaxis dynamic module”, Department of Geotechnical Engineering, University of Naples Federico ii, Naples, Italy.
- D. K. Baidya; G. Muralikrishna; and P. K. Pradhan (2006):” Investigation of Foundation Vibrations Resting on a Layered Soil System”, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering © ASCE Vol. 132, No. 1, ISSN 1090 0241/2006/1-116–123/\$25.00.
- Dynamics manual of plaxis V8.
- Edward L, Wilson:” A method of analysis for the evaluation of foundation-structure interaction”, University, Berkeley.
- Jean Costet, guy Sanglerat, (1981):“ cours pratique de mécanique des sols 1 “plasticité et calcul des tassements, troisième édition, Dunod, paris.
- Jose M. Roësset, (2009):” Some Applications of Soil Dynamics”, document for Texas A&M University.
- H,G, Poulos and E,G, davis.(1991):“ elastic solutions for soil and rock mechanics” the university of Sydney
- George, Gazetas. (1983):” Analysis of machine foundation vibrations: state of the art”, journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1983, Vol. 2, No.1
- Gazetas, G., 1991a, “Foundations Vibrations in Foundations Engineering Handbook”, 2ndEdition, Edited by H-Y-Fang, Chapter 15, pp 553-593, (New York Van Nostrand Reinhold).
- G, Waas. H, R, Ritggs and H, Werkle (1985): ”Displacement solutions for dynamic loads in transversely-isotropic stratified media”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol, 13, 173-193.

- Kausel, E., and Roësset, J.M. (1975): "Dynamic Stiffness of Circular Foundations", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, EM6 (December), 771-785.
- Kausel, E., Roësset, J.M. and Waas, G. (1975): "Dynamic Analysis of Footings on Layered Media", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, EM5 (Oct.), 679-693.
- Lysmer J., kuhlmeier r.l. (1969):" finite dynamic model for infinite media", ASCE, Journal of engineering and mechanical division, pp. 859-877
- Lysmer, J, and Richerd, F. E, Jr. (1966):" dynamic response of footing to vertical loading," journal of the soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 92. No. SM1, proc. Paper 4592, January, pp. 65-91.
- Lysmer, J., Udaka, T., Tsai, C-F., and Seed, H. B. (1975):"Flush a computer Program for Approximate 3-Analysis of Soil-Structure Interaction Problems", Report No. EERC 75-30, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
- Meek, J. W. and Veletsos, A. S., 1974, " Simple Models for Foundations in Lateral and Rocking Motion", Proc.5th World congress on Earthquake Engineering, Rome, Vol.2, 2610-2613.
- Naohito, Hori. (1984):"Dynamic Response of Rigid Foundation of Arbitrary Shape on Two-Layered Elastic Medium" Transations of the Kokushikan Univ, Dept, of engineering, No, 18.
- Pecker, A., (1984):"Dynamique Des Sols", Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- R, W, Bell, G, T, Houlsby & H, J, Burd (1992):" finite element analysis of axisymmetric footings subjected to combined loads", Computer Methods and Advances in geomechanics, Beer, Booker & Carter (Eds), Balkema, Rotterdam. ISBN 90 6191 189 3.
- RayW, Clough and Joseph Penzien, (1995):" Dynamics of structures" third edition, University Ave. Berkeley, CA 94704 USA.
- Richerd, F. E, Jr.Whitman, R, V, (1966):" Footing Vibrations-Comparison of Test Results with Theory", the University of Michigan Industry program of the College of Engineering.
- Richard, F. E., Woods, R. D. ET Hall, J. R., (1970):" Vibrations of Soils and Foundations", Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

- Ross m., (2004):" modeling methods for silent Boundaries in infinite media", asen 5519-006: fluid-structure interaction, University of Colorado at Boulder.
- Scientific manual "Plaxis version 8.2".
- Sieffert, J. G. and Cevaer, F, (1993):"Hand Book of Impedance Functions, Surface Foundations", Ouest Edition Presses Académiques.
- Suhol Bu, (1998):"Impedance functions of square foundations embedded in an incompressible half-space", journal of Engineering Analysis with Boundary Elements, Volume 22, Issue 1, July , Pages 1–11.
- Tiliouine, B., (2000):"Dynamique des structures", Tome 1 : Aspect Vibratoires, GECOTEC, Algérie.
- Winfried Schepers, Stavros Savidis, Eduardo Kausel (2010):" Dynamic stresses in an elastic half-space", Soil Dynamics and Earthquake Engineering 30, 833–843.
- Y.Q. Zhang, Y.Lu, L.Z. Wang (2008):" Investigation of vertical vibrations of rigid disk on saturated poroelastic stratum under high-frequency excitation", International Journal of Engineering Science 46, 202–210.
- Yongqiang Zhang, Yong Lu, Lizhong Wang (2007):"Vertical vibrations of rigid circular disks underground-transmitted high-frequency waves", Journal of Sound and Vibration 304, 272–283.