



École Nationale Polytechnique  
Département d'Automatique



## Projet de Fin d'Étude

*En vue de l'obtention du*

**Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Automatique**

**Commande tolérante aux défauts par  
l'approche multimodèle :  
Application à un quadrirotor**

Présenté par : **Lazeregue Abderraouf**

Soutenu le 23 septembre 2020 devant le jury composé de :

Président	<b>M. Djamel BOUKHETALA</b>	Professeur	ENP
Examineur	<b>M. Rachid ILLOUL</b>	MCA	ENP
Encadreur	<b>M. Hakim ACHOUR</b>	MAA	ENP

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



École Nationale Polytechnique  
Département d'Automatique



## Projet de Fin d'Étude

*En vue de l'obtention du*

**Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Automatique**

**Commande tolérante aux défauts par  
l'approche multimodèle :  
Application à un quadrirotor**

Présenté par : **Lazeregue Abderraouf**

Soutenu le 23 septembre 2020 devant le jury composé de :

Président	<b>M. Djamel BOUKHETALA</b>	Professeur	ENP
Examineur	<b>M. Rachid ILLOUL</b>	MCA	ENP
Encadreur	<b>M. Hakim ACHOUR</b>	MAA	ENP

ENP 2020

الملخص :

الموضوع الرئيسي لهذا المشروع هو تطبيق طرق التحكم الآلي المتسامح مع الأخطاء، وهذا اعتماداً على نتائج تشخيص الأخطاء في المجسات و المشغلات لنظام غير خطي ممثل بنماذج متعددة ضبابية خطية متداخلة و مفعلة بدوال غير خطية. قدمنا بعض النتائج المتعلقة بتحليل هذه الانظمة وكذا ما تعلق بمشكلة استقرارها، تم الحصول على شروط الاستقرار على شكل متراجحات ذات مصفوفات خطية، كما تم تطبيق قوانين تحكم من اجل تحقيق الاستقرار استناداً على مبدأ التحكم الغامض. استخدمنا طرق لإعادة تركيب حالة النظام و تقدير العيوب بفضل استعمال ملاحظ غامض يسمح بتشكيل انظمة مراقبة. ثم أنشأنا نظاماً يسمح بالحد من تأثير هذه العيوب على حالة النظام الاصيلي. طبقنا هذه التقنيات على نموذج لطائرة بدون طيار .

كلمات مفتاحية : تشخيص الأخطاء ، نماذج ضبابية ، متراجحة مصفوفة خطية ، طائرة بدون طيار ، تحكم

#### Abstract :

This work deals with the fault tolerant control of nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy models, We present firstly some results for the analysis of T-S fuzzy models and how to obtain them. We also present the main results concerning the stabilization problem of T-S models by a fuzzy control principle called PDC (Parallel Distributed Compensation). The stability conditions of the T-S fuzzy models are written in linear matrix inequalities (LMIs). We used reconstruction methods of state and faults estimation with PI observer, then an AFTC was developed. The application of those techniques to a quadcopter was presented.

**Key words :** Fault tolerant control, Fault diagnosis, Takagi-Sugeno fuzzy models, linear matrix inequality (LMI), Unknown Input Observers (UIO), quadcopter.

#### Résumé :

Ce projet de fin d'études concerne l'application des techniques de commande tolérante aux défauts, sur la base des résultats de diagnostic des défauts de capteurs et d'actionneurs pour des systèmes non linéaires, décrits avec un multimodèle flou de Takagi-Sugeno, nous nous sommes intéressés à l'analyse de ces systèmes et leur stabilité, dont les conditions étaient obtenues sous forme de LMIs, un régulateur flou était conçu par la méthode PDC pour réaliser la stabilisation. Nous avons utilisé des méthodes pour la reconstitution d'état et l'estimation des défauts basées sur l'observateur PI, ensuite des commande FTC ont été synthétisées. L'application de ces techniques à un quadrirotor était présentée.

**Mot clés :** Commande tolérante aux défaut, Diagnostic de défauts, modèles Takagi-Sugeno, inégalité matricielle linéaire (LMI), observateur a entrée inconnue, quadrirotor.

# Remerciements

*La réalisation de ce mémoire a été possible grâce aux efforts et à la contribution de plusieurs personnes à qui je voudrais exprimer mes sincères remerciements.*

*Je voudrais tout d'abord remercier mon promoteur Monsieur Hakim Achour, professeur à l'École Nationale Polytechnique, pour avoir dirigé ce travail, pour sa patience, sa disponibilité et ses conseils et orientations.*

*Je remercie mes chers enseignants au sein de l'école depuis les sciences fondamentales, et surtout mes enseignants du département d'Automatique pour leurs efforts voués à nous transmettre leur savoir.*

*A la mémoire de  
Ma soeur Meriem  
à Mes très chers parents*

*à mes soeurs  
et ma nièce Oumaima*

*à ma famille  
et mes amis*

# Table des matières

Table des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des abréviations

<b>Introduction générale</b>	<b>11</b>
<b>1 Généralités</b>	<b>14</b>
1.1 Introduction	15
1.2 Approche multimodèle de Takagi-Sugeno	15
1.2.1 Modélisation des système non linéaire	15
1.2.2 Obtention des multimodèles flous de Takagi-Sugeno	16
1.2.3 Stabilité des modèles flous de type T-S	19
1.3 Diagnostic des défauts	20
1.3.1 Notions générales	20
1.3.2 Les étapes de diagnostic des défauts	21
1.3.3 Les notions d'observabilité et d'estimation	22
1.4 Commande tolérante aux défauts	26
1.5 Principe de fonctionnement d'un quadrirotor	27
1.6 Conclusion	29
<b>2 Stabilité et stabilisation des systèmes non linéaires</b>	<b>30</b>
2.1 Introduction	31
2.2 Notion de stabilité	31
2.2.1 Points d'équilibre	31
2.2.2 Stabilité d'un point d'équilibre	32
2.3 Stabilité et stabilisation des multimodèles flous T-S	32
2.3.1 Stabilité d'un modèle flou de Takagi-Sugeno	32
2.3.2 Stabilisation d'un multimodèle T-S	34
2.3.3 Exemple	37
2.4 Poursuite de trajectoire	39
2.4.1 Exemple	40
2.5 Conclusion	41

<b>3</b>	<b>Commande tolérante aux défauts</b>	<b>42</b>
3.1	Introduction . . . . .	43
3.2	Classification des techniques FTC . . . . .	44
3.2.1	Approche passive : PFTC . . . . .	44
3.2.2	Approche active : AFTC . . . . .	45
3.3	Principe et structure de l'approche AFTC . . . . .	46
3.4	Le bloc FDI . . . . .	47
3.4.1	Observateur d'état pour les multimodèles T-S . . . . .	47
3.4.2	Observateur PI . . . . .	50
3.4.3	Diagnostic par observateur PI . . . . .	52
3.4.4	Exemple . . . . .	52
3.5	Le bloc FTC . . . . .	56
3.5.1	Méthodes pour les systèmes linéaires . . . . .	56
3.5.2	Méthodes pour les systèmes non linéaires . . . . .	57
3.5.3	Exemple . . . . .	59
3.6	Conclusion . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Application à un quadrirotor</b>	<b>64</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Modélisation du quadrirotor . . . . .	65
4.2.1	Modèle dynamique non linéaire du quadrirotor . . . . .	65
4.2.2	Représentation T-S . . . . .	69
4.2.3	Commande non linéaire par backstepping . . . . .	73
4.3	Commande à base des modèles flous T-S . . . . .	76
4.3.1	Stabilisation avec la loi de commande PDC . . . . .	76
4.3.2	Poursuite de trajectoire . . . . .	77
4.4	Commande tolérante aux défauts . . . . .	79
4.4.1	Influence des défauts . . . . .	79
4.4.2	FTC dans le cas de stabilisation . . . . .	80
4.4.3	FTC dans le cas de suivi de trajectoire . . . . .	83
4.5	Conclusion . . . . .	83
	<b>Conclusion générale</b>	<b>84</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>86</b>
	<b>Annexes</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Stabilité des systèmes au sens de Lyapunov</b>	<b>90</b>
A.1	stabilité des systèmes linéaires . . . . .	91
A.2	Première méthode de Lyapunov . . . . .	92
A.3	Deuxième méthode de Lyapunov . . . . .	93
A.3.1	Application aux systèmes linéaires LTI . . . . .	94
<b>B</b>	<b>Les inégalités linéaires matricielles LMIs</b>	<b>95</b>
B.1	Définition d'une LMI . . . . .	95
B.2	obtention des LMIs . . . . .	95
B.3	Problèmes classiques LMI . . . . .	96



# Table des figures

1.1	Le secteur non linéaire global et local . . . . .	17
1.2	Structure d'un modèle flou de type T-S . . . . .	19
1.3	Diagnostic des différents types de défauts . . . . .	21
1.4	Estimation d'état et de l'entrée inconnue avec observateur . . . . .	22
1.5	Banc d'observateurs . . . . .	23
1.6	La structure GOS pour les défauts actionneur . . . . .	24
1.7	La structure GOS pour les défauts capteur . . . . .	24
1.8	La structure DOS pour les défauts actionneur . . . . .	25
1.9	La structure DOS pour les défauts capteur . . . . .	25
1.10	Les mouvements d'un quadrirotor . . . . .	27
2.1	Pendule simple . . . . .	32
2.2	Régulateur flou par la méthode PDC . . . . .	34
2.3	Evolution dans le temps des états du système en boucle ouverte. . . . .	37
2.4	Evolution dans le temps des états du système en boucle fermée avec commande PDC. . . . .	38
2.5	suivi de trajectoire par la méthode PDC . . . . .	40
3.1	classification des différentes méthodes FTC . . . . .	44
3.2	structure AFTC . . . . .	46
3.3	diagnostic des défauts à l'aide d'observateur . . . . .	47
3.4	Observateur à entrées inconnues . . . . .	49
3.5	Evolution dans le temps des états du système en boucle fermée avec leurs estimés . . . . .	54
3.6	Evolution dans le temps des entrées inconnues avec leurs estimées . . . . .	54
3.7	influence de la fréquence sur l'estimation . . . . .	55
3.8	FTC active à base de modèle de référence . . . . .	58
3.9	illustration des résultats pour des défauts de type biais . . . . .	60
3.10	illustration des résultats pour des défauts lentement variables . . . . .	60
3.11	illustration des résultats pour des défauts variants plus rapidement . . . . .	61
3.12	suivi de trajectoire avec défaut lentement variable . . . . .	62
3.13	suivi de trajectoire avec défauts variant plus rapidement . . . . .	62
4.1	Les angles d'Euler . . . . .	66
4.2	les sorties des modèles non linéaires et T-S . . . . .	72
4.3	architecture proposée pour la commande du quadrirotor . . . . .	73

4.4	les sorties des modèles non linéaire et T-S pour la poursuite de trajectoire désirée . . . . .	75
4.5	les erreurs entre le modèle non linéaire et le multimodèle flou en boucle fermée . . . . .	76
4.6	Convergence des états vers l'origine . . . . .	77
4.7	suivi des trajectoires désirées . . . . .	78
4.8	suivi de trajectoire en présence de défauts actionneur . . . . .	79
4.9	suivi de trajectoire en présence de défauts capteur . . . . .	80
4.10	estimation des deux défauts actionneur avec un observateur PI . . . . .	81
4.11	estimation des quatre défauts actionneur avec un observateur PI . . . . .	81
4.12	estimation des quatre défauts actionneur avec deux observateurs PI . . . . .	81
4.13	stabilisation en présence des défauts . . . . .	82
4.14	stabilisation avec commande FTC . . . . .	82
4.15	suivi de trajectoire sans et avec la commande FTC . . . . .	83

# Liste des tableaux

4.1	Paramètres du modèle du quadrirotor utilisé . . . . .	69
4.2	les fonctions d'activation . . . . .	71

# Liste des abréviations

*T – S : Takagi – Sugeno*

*T – S à VPM : Takagi – Sugeno à Variables de Prémises Mesurables*

*T – S à VPNM : Takagi – Sugeno à Variables de Prémises Non Mesurables*

*LTI : Linéaire Invariant dans le Temps*

*LPV : Linéaire à Paramètres Invariants*

*LMI : Inégalité matricielle linéaire (Linear Matrix Inequality)*

*UIO : Observateur à entrées inconnues (Unknown Input Observer)*

*PI : Proportionnel – Intégral*

*PMI : Proportionnel – Multi – Intégral*

# Introduction générale

L'automatique est l'ensemble des théories mathématiques et techniques de raisonnement visant la prise de décision et l'application de cette dernière sur un ensemble d'éléments interconnectés qu'on appelle "système". L'objectif principal de l'automatique est, donc, de déterminer le signal de commande (la décision) qu'il faut appliquer au système pour le ramener à une situation désirée avec des caractéristiques souhaitées appelées performances.

Pendant longtemps, les automaticiens se sont intéressés aux systèmes mécaniques, électromécaniques, et industriels, qui s'appuient de plus en plus sur des techniques de commande avancées dont l'objectif est d'atteindre des niveaux de performances élevés.

La synthèse d'une telle loi de commande nécessite tout d'abord la connaissance du système physique et de son comportement dynamique, cette connaissance requiert une modélisation mathématique en se basant sur les lois fondamentales des disciplines scientifiques concernées décrivant ce comportement, ce qui conduit souvent à une modélisation sous forme d'équations différentielles non linéaires plus ou moins complexe. Lors de cette étape, le défi est de trouver un modèle de connaissance simple qui arrive à représenter fidèlement le système réel, d'où le compromis entre la simplicité du modèle proposé et sa capacité de refléter la réalité. Pour le faire, parfois on considère des approximations et des simplifications, pour avoir des modèles linéaires plus simples et faciles à exploiter, mais ceci risque d'être loin de la réalité, ou d'être seulement un aspect local, puisque l'hypothèse de linéarité ne permet de représenter le système qu'autour d'un point de fonctionnement considéré, la qualité et les performances se dégradent lorsqu'on s'éloigne de ce point. Pour remédier à ce problème, il est impératif de prendre en considération les non-linéarités qui existent, théoriquement, cela permet d'avoir un modèle plus précis par rapport au modèle linéaire, dans l'espoir d'améliorer les performances, mais d'un point de vue mathématique, leur structure est plus complexe, et donc, ils sont plus difficiles à exploiter.

Pour remédier à ces inconvénients, Une approche intéressante a été proposée, qui consiste à prendre en considération les non-linéarités présentées par le système tout en gardant la simplicité du modèle d'un point de vue mathématique, cette représentation est dite multi-modèle, elle repose sur l'utilisation d'un ensemble de sous-modèles de structures simples, chaque sous-modèle décrivant le comportement du système dans une "zone de fonctionnement" particulière. La collection de ces systèmes linéaires permet de représenter le comportement global du système non linéaire, ils sont interconnectés par des fonctions non linéaires appelées fonctions d'activation, chacune définit la contribu-

tion du sous modèle qui lui correspond. La capacité des multi-modèles à représenter ou à approcher le comportement dynamique d'un système réel a été largement reconnue, l'intérêt majeur de ce type d'approche est qu'elle permet d'étendre de nombreux concepts théoriques de l'automatique linéaire au cas des systèmes non linéaires, comme la stabilisation ou la commande par retour d'état.

Souvent, pour effectuer ces tâches de contrôle on a besoin de connaître d'une façon partielle ou totale le vecteur d'état du système, chose qui ne peut pas être toujours accessible ou facile à réaliser pour des raisons techniques et économiques, d'où le besoin d'estimer ce dernier, par un système auxiliaire appelé observateur. Il peut être considéré comme un capteur logiciel, dont la mission est la reconstitution du vecteur d'état dans le but de réaliser des tâches de contrôle, identification et modélisation. Une autre application très importante de l'observation est le diagnostic des défauts qui peuvent apparaître sous forme d'anomalie ou carrément un dysfonctionnement du système. Lorsqu'un défaut est apparaît dans un système, les stratégies de commande peuvent s'avérer très limitées, d'où la nécessité de développer des techniques qui permettent au système d'accomplir sa fonction malgré la présence des fautes.

Dans ce mémoire, on va aborder toutes ces notions, on propose d'exploiter l'approche multimodèle pour la représentation d'un système non linéaire, sa stabilisation, et ensuite, l'élaboration d'une commande tolérante aux défauts, après avoir fait le diagnostic de ces derniers. L'application étant faite sur un véhicule aérien sans pilote de type quadrirotor.

# Organisation

Ce mémoire composé de quatre chapitres, est organisé de la façon suivante :

## Chapitre 1

Il présente les principes généraux de la structure multimodèle, ainsi qu'un bref rappel sur l'analyse de sa stabilité, la stabilisation et la conception d'observateurs pour systèmes T-S sont aussi abordées. Ensuite quelques notions de diagnostic et techniques de commande tolérante aux défauts à base de modèle sont décrites. Enfin, une description rapide des drones de type quadrirotor est présentée.

## Chapitre 2

Le deuxième chapitre est consacré à la stabilisation des systèmes non linéaires, en particulier, les systèmes sous forme multimodèle, en effet il existe des méthodes intéressantes à appliquer qui seront présentées, notamment la méthode de stabilisation par retour d'état dite la méthode PDC.

## Chapitre 3

Dans ce chapitre, on cite à titre de rappel, quelques notions de base du diagnostic des systèmes non linéaires utilisant l'approche multimodèle de Takagi-Sugeno . Les méthodes de détection, de localisation et d'estimation des défauts affectant un système non linéaire sont décrites et se sont basées sur les observateurs PI. Après, on présente la notion de tolérance aux défauts et ses différents techniques. Le résultat de l'estimation des défauts est utilisé, par la suite, pour concevoir le bloc FTC, que grâce à lui, on arrive à compenser les défauts ou reconfigurer la loi de commande de telle manière que les performances soient gardées.

## Chapitre 4

Dans ce chapitre nous faisons des applications sur un quadrirotor donné par son modèle non linéaire qu'on va le mettre sous forme d'un multimodèle flou de type T-S, la méthode de stabilisation abordée dans le chapitre 2 et les techniques de commande tolérante aux défauts présentées dans le chapitre 3 seront également appliquées et leurs résultats seront présentés.

Enfin, une conclusion générale, suivie de la bibliographie et des annexes terminent ce manuscrit.

# Chapitre 1

## Généralités

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1.2</b>	<b>Approche multimodèle de Takagi-Sugeno</b>	<b>15</b>
1.2.1	Modélisation des système non linéaire	15
1.2.2	Obtention des multimodèles flous de Takagi-Sugeno	16
1.2.3	Stabilité des modèles flous de type T-S	19
<b>1.3</b>	<b>Diagnostic des défauts</b>	<b>20</b>
1.3.1	Notions générales	20
1.3.2	Les étapes de diagnostic des défauts	21
1.3.3	Les notions d'observabilité et d'estimation	22
<b>1.4</b>	<b>Commande tolérante aux défauts</b>	<b>26</b>
<b>1.5</b>	<b>Principe de fonctionnement d'un quadrirotor</b>	<b>27</b>
<b>1.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>29</b>

---



## 1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, on présente les notions fondamentales rencontrées le long de ce mémoire et utilisées pour effectuer ce travail. On commence par la modélisation des systèmes non linéaires, et les difficultés confrontées lors de la manipulation de telles structures, et on passe vers la représentation multimodèle avec les différentes techniques utilisées pour l'obtenir, ainsi que l'analyse de la stabilité des systèmes donnés sous cette forme.

Ensuite, on définit les défauts et on présente leurs types, et les étapes suivies pour faire le diagnostic, on parlera également sur l'observation et la reconstitution des états, toujours avec l'approche multimodèle. La partie suivante est dédiée à la commande tolérante aux défaut, le sujet principal de ce mémoire, des notions générales seront présentées. La dernière partie est consacré à la présentation d'un système non linéaire complexe, qui est un drone de type quadrirotor.

## 1.2 Approche multimodèle de Takagi-Sugeno

### 1.2.1 Modélisation des système non linéaire

Chaque système peut être représenté sous différentes formes, cette étape de modélisation est une étape fondamentale dans le cadre de la commande automatique. En effet, un modèle devrait représenter le mieux possible le fonctionnement dynamique d'un processus, mais généralement, il est une représentation imparfaite et incomplète de la réalité, soit par manque de connaissance, soit du fait des simplifications.

Par définition une modélisation est une transition entre l'objet réel qui est le procédé ou le système et l'objet mathématique qui est le modèle, qu'on espère qu'elle permette la description et la prédiction du comportement du système. Parmi les formes les plus utilisées, on trouve la représentation d'état.

Un système continu peut s'écrire sous une forme d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.1)$$

avec :  $x(t)$  : est le vecteur d'état,  $u(t)$  : le vecteur des entrées,  $y(t)$  : le vecteur des sorties.

Il est à noter que lorsqu'il s'agit d'un système non linéaire, le modèle devient plus complexe et difficile à exploiter, car les travaux effectués sur ce type de système traitent des cas spécifiques comme les systèmes bilinéaires, les systèmes linéaires à paramètres variables (LPV), donc ils n'ont pas un cadre général comme c'est le cas pour les systèmes linéaires. Une tendance qui peut être utile est d'utiliser des modèles linéaires invariants dans le temps (LTI). Cette approximation offre la possibilité d'étudier un système non linéaire en le représentant par un seul modèle tangent autour d'un point d'équilibre. L'inconvénient d'une telle approche est son aspect uniquement local, le modèle linéaire n'est qu'une description locale du comportement du système.

Une approche globale et intéressante qui concerne en particulier les systèmes non linéaires affines en commande a été élaborée, en effet, l'équation d'état d'un système affine en commande est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t)) \cdot u(t) \\ y(t) = g(x(t)) \end{cases} \quad (1.2)$$

Cette approche, dite approche multimodèle, consiste à utiliser l'interpolation des modèles locaux à l'aide de fonctions d'activation normalisées ce qui permet de modéliser le système global non linéaire.

### 1.2.2 Obtention des multimodèles flous de Takagi-Sugeno

Depuis son apparition, la logique floue a connu un grand succès, dans la modélisation et la commande des systèmes non linéaires. On trouve dans la littérature deux catégories des modèles flous, ceux de Mamdani, et le modèle flou de Takagi-Sugeno, ce dernier est plus utilisé parce qu'il est plus adapté pour la commande, en effet, dans la partie conséquence, le modèle de Mamdani donne des sous ensembles flous, tandis que la partie conséquence du type T-S est un système linéaire. C'est cette approche de Takagi-Sugeno qui sera adopté dans ce mémoire.

Cette approche repose sur le fameux principe " Diviser pour régner ", elle consiste à décomposer le comportement dynamique en plusieurs domaines de fonctionnement, dont chacun est caractérisé par un sous-modèle linéaire. Il existe plusieurs manières pour le faire :

- **Par Identification** : En exploitant un fichier entrées-sorties et utilisant les techniques d'optimisation , on fait l'identification des paramètres du modèle autour des points de fonctionnement locaux, cette méthode est recommandée lorsqu'il s'agit d'un système difficile à modéliser analytiquement, et le problème d'identification du système se réduit à un problème d'identification des paramètres des sous-modèles locaux.

- **Par linéarisation** : Contrairement à la première méthode, on dispose d'un modèle analytique du processus physique, l'approche consiste à faire une linéarisation autour de différents points de fonctionnement choisis, le nombre de ces points est le nombre des modèles locaux à obtenir, il dépend de la précision souhaitée et de la complexité du modèle non linéaire.
- **Par l'approche par secteur non linéaire** : Elle se base sur une transformation polytopique convexe des fonctions scalaires origines des non linéarités, et consiste à trouver un secteur dans lequel la fonction non linéaire est comprise, le secteur peut être global ou local comme c'est montré dans la figure 1.1. Si  $n$  est le nombre de non linéarités présentes, alors on obtient  $r = 2^n$  sous-modèles.

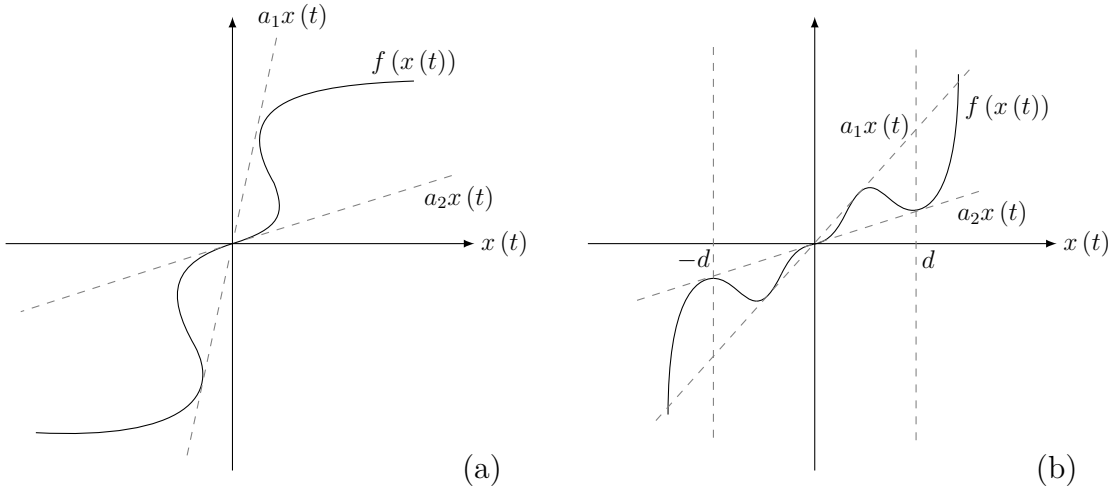


FIGURE 1.1 – (a) Secteur non linéaire global, (b) Secteur non linéaire local

En effet, cette approche se base sur le lemme suivant :

**Lemme 1** (Morère,2001). [3] Soit  $f(x)$  une fonction :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bornée, alors, il existe toujours deux fonctions  $\omega_1(x)$  et  $\omega_2(x)$  et deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  telles que :

$$\begin{cases} f(x) = \alpha\omega_1(x) + \beta\omega_2(x) \\ \omega_1(x) + \omega_2(x) = 1, \omega_1(x) \geq 0, \omega_2(x) \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Pour vérifier ce lemme, il suffit de considérer l'hypothèse que  $f(x)$  soit bornée,  $\beta \leq f(x) \leq \alpha$  et de poser :

$$\omega_1(x) = \frac{f(x) - \beta}{\alpha - \beta} \text{ et } \omega_2(x) = \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - \beta}$$

avec :  $\alpha = \max(f(x))$  et  $\beta = \min(f(x))$

On note que cette dernière approche permet de donner une représentation exacte et non pas juste une approximation comme les deux autres, elle permet également de réduire le nombre des sous-modèles à obtenir par rapport à l'approche par linéarisation. Cette approche est donc considérée le long de ce mémoire.

Soit le modèle non linéaire (1.2) affine en commande, ce système peut être décrit par un ensemble de règles floues **Si-Alors**.

la  $i^{\text{ème}}$  règle s'écrit :

$$\mathbf{Si} (z_1(t) \text{ est } F_{1_i}) \text{ et } (z_2(t) \text{ est } F_{2_i}) \text{ et } \dots \text{ et } (z_p(t) \text{ est } F_{p_i})$$

$$\mathbf{Alors} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases}$$

avec :  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $r$  est le nombre de règles floues,  $z_i(t)$  sont les variables de prémisses,  $F_{j_i}$  sont les sous ensembles flous.

On attribue à chaque règle, un poids  $\omega_i$  tel que

$$\omega_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_{j_i}(z_j(t)) \quad (1.4)$$

On pose :

$$\mu_i = \frac{\omega_i(z(t))}{\sum_{j=1}^r \omega_j(z(t))}$$

Alors, après défuzzification, le modèle flou T-S s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

les fonctions non linéaires  $\mu_i$  sont appelées les fonctions d'activation, elles sont normalisées et vérifient la propriété de somme convexe 1.6.

$$\forall t, \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1 \quad (1.6)$$

La structure floue de type Takagi-Sugeno est illustrée par le schéma suivant :

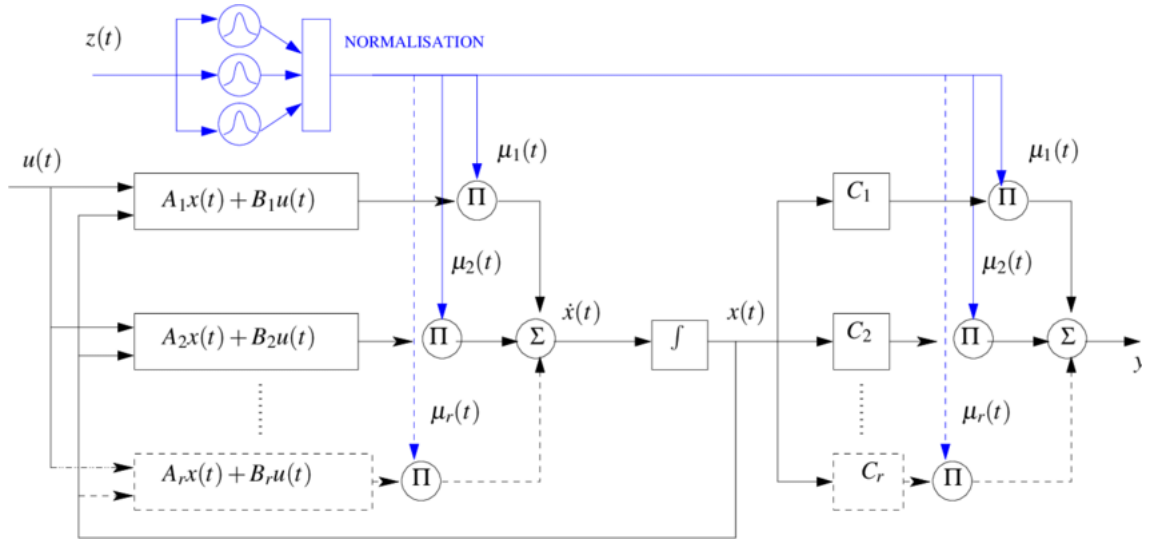


FIGURE 1.2 – Structure d'un modèle flou de type T-S

### 1.2.3 Stabilité des modèles flous de type T-S

Le concept de stabilité est un concept fondamental dans l'analyse des systèmes dynamiques, il connaît un intérêt exceptionnel vu son importance, plusieurs méthodes de traitement et d'analyse ont été apparues pour étudier la stabilité. Parmi les plus fameuses on a les méthodes de LYAPUNOV, notamment sa deuxième méthode basée sur une observation d'une réalité physique et traitant les systèmes non linéaires d'une façon générale. On s'intéresse, dans cette partie, à l'étude de la stabilité des systèmes flous de type T-S.

Soit le multimodèle de Takagi-Sugeno non commandé *i.e* :  $u = 0$  défini par son équation d'état :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) A_i x(t) \quad (1.7)$$

Il a été démontré que les conditions suffisantes pour que le système 1.7 soit stable sont données par le théorème 1

**Théorème 1** (K. Tanaka M. Sugeno, 1992). [1] : *Le multimodèle T-S continu 1.7 est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique  $P > 0$  telle que les LMI suivantes soient vérifiées :*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (1.8)$$

Ce théorème donne juste des conditions suffisantes et non pas nécessaires, dans le cas d'un système instable, il est nécessaire de le ramener vers l'équilibre en synthétisant des lois de commande stabilisantes. Il existe des méthodes intéressantes pour faire la stabilisation des systèmes non linéaires, en particulier, ceux qui sont représentés par l'approche multimodèle T-S, ce point concernant la stabilisation sera détaillé dans le chapitre suivant.

## 1.3 Diagnostic des défauts

### 1.3.1 Notions générales

Un défaut est un terme général qui englobe toute action ou cause ou évènement qui affecte le système et provoque une déviation non souhaitée de ces caractéristiques par rapport à leurs valeurs nominales, il peut conduire à un fonctionnement en mode dégradé avec moins de performances ou carrément vers l'instabilité et le dysfonctionnement.

Les défauts sont classés selon différents critères dont le plus répandu est leur localisation physique dans le système, selon ce critère, on distingue trois sources de défauts :

- **Les défauts actionneur** : affectent la partie opérative et engendrent une perte totale ( comme le blocage d'un actionneur) ou partiel ( perte de puissance, fuite) de la commande, c'est à dire le signal d'entrée est détérioré.
- **Les défauts capteur** : on parle d'un défaut capteur lorsque la valeur mesurée ne correspond pas à la valeur réelle, ça se manifeste soit par une perte totale du signal de mesure qui sert à récupérer l'information à cause d'un blocage ou dysfonctionnement du capteur par exemple, soit par une perte partielle de l'information sous forme d'un biais ou d'une dérive.
- **Les défauts système** : Ils proviennent du procédé lui même, un défaut de ce type est celui qui affecte le système hors les capteurs ou les actionneurs, il est caractérisé par des changement dans les paramètres du système, ce qui influence sur son comportement dynamique.

Un autre critère selon lequel on peut classer les défauts, c'est par rapport à leurs effets sur les systèmes et la manière avec laquelle ils agissent sur les signaux, selon ce critère on trouve deux types : les défauts additifs et les défauts multiplicatifs, généralement, les défauts capteur et actionneur sont considérés comme des défauts additifs, tandis que les défauts systèmes sont modélisés par des défauts multiplicatifs qui causent des changement dans les paramètres et la dynamique du système, cependant, il est plus aisé de manipuler les défauts additifs, c'est pour ça qu'on essaye parfois de transformer les défauts multiplicatifs en des uns additifs plus adaptés au diagnostic.

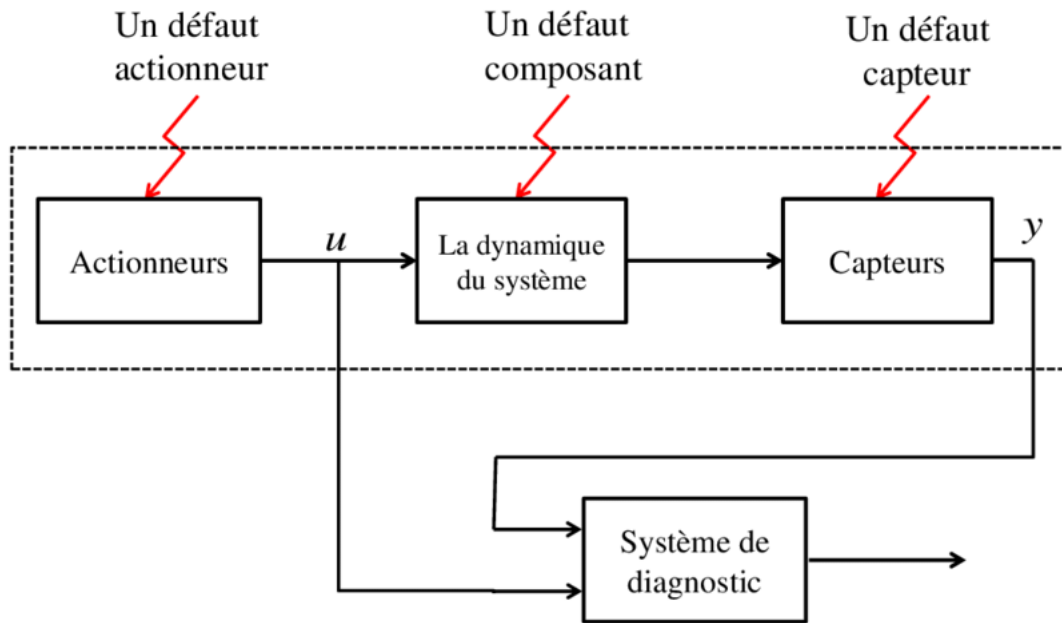


FIGURE 1.3 – Diagnostic des différents types de défauts

### 1.3.2 Les étapes de diagnostic des défauts

L'apparition de n'importe quel défaut pendant le fonctionnement d'un système dynamique peut causer de graves conséquences, ça nécessite alors un traitement spécial pour la surveillance et le diagnostic, dans le but est de détecter, localiser et estimer ce défaut, ces trois étapes constituent la procédure de diagnostic :

- **La détection** : c'est la première étape, elle consiste à déterminer l'existence ou non du défaut, on arrive à faire la détection grâce aux symptômes de défaillances présentés par le système en défaut, avec cette étape, on génère des signaux porteurs de symptômes et indiquant les anomalies qui existent, ils sont appelés les résidus.
- **La localisation** : dans le cas de détection de défaut et de confirmation de son existence, on essaye de le localiser, c'est à dire, préciser exactement la partie du système affectée par ce défaut.
- **L'estimation** : on achève la procédure de diagnostic avec cette étape, qui aide à connaître le signal défaut en estimant son amplitude et son évolution dans le temps.

Principalement, il y a deux grandes classes de méthodes de diagnostic : avec et sans modèle mathématique, la première classe suppose la non disponibilité d'un modèle analytique du système, plusieurs méthodes et techniques sont utilisées, comme la redondance matérielle qui consiste à multiplier les instruments et les composants, dans le cas des capteurs par exemple, pour faire la détection, il faut au moins deux capteurs, la localisation n'est faite qu'avec trois ou plus, cette méthode est utilisée surtout dans les systèmes critiques comme les systèmes nucléaires et les systèmes aérospatiaux. Une autre approche sans modèle se base sur le raisonnement logique pour construire un arbre de défaillance et un arbre de décision. On trouve ainsi, des méthodes basées signal qui s'appuient sur l'analyse des données entrées-sorties.

La deuxième classe contient les méthodes basées modèle, elles reposent sur le principe de redondance analytique de l'information. On trouve plusieurs approches exploitant ce principe, telles que l'estimation paramétrique, l'espace de parité ou encore les méthodes à base d'observateurs d'état ou de sortie. Cette dernière est la plus étudiée et connue, et c'est à laquelle qu'on s'intéresse dans notre travail. On parle d'observateurs surtout dans le cas déterministe, dans le cas stochastique on parle plutôt de filtre.

### 1.3.3 Les notions d'observabilité et d'estimation

L'estimation du défaut est le résultat final de son diagnostic, comme cité dans la partie précédente, de nombreuses méthodes ont été conçues, on s'intéresse dans ce mémoire, à la méthode à base d'observateur.

En effet, parfois les états du système ne sont pas tous accessibles à la mesure pour différentes raisons économiques et techniques, d'où la nécessité de leur estimation, en utilisant un capteur logiciel qu'on appelle : observateur, ceci se fait, soit pour la surveillance et la supervision, soit pour la commande.

Dans le cadre de diagnostic, on considère un système dynamique qui subit des défauts ou autres entrées dites inconnues, l'idée est d'essayer d'estimer et l'état du système, ainsi que l'entrée inconnue, autrement dit, on veut faire ce qu'on appelle la reconstruction d'état à partir des grandeurs données comme les entrées et les sorties. Ceci peut être illustré par le schéma suivant :

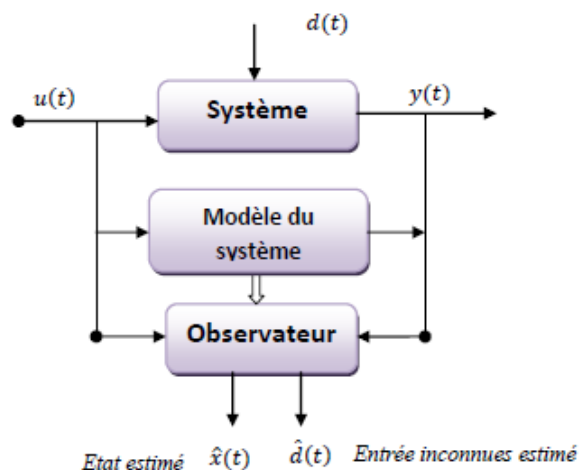


FIGURE 1.4 – Estimation d'état et de l'entrée inconnue avec observateur



Parmi les premiers outils développés dans ce contexte, on trouve l'observateur de Luenberger dans le cas déterministe et le filtre de Kalman dans le cas stochastique. Plusieurs techniques pour le calcul des gains d'observateur sont proposées, on cite à titre d'exemple les observateurs adaptatifs, les observateurs à mode glissant et les observateurs à entrées inconnues qui ont connu beaucoup d'intérêt, notamment les observateurs PI et PMI, qui permettent l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues.

Le diagnostic à base d'observateur à entrées inconnues consiste à effectuer l'estimation en se basant sur un modèle de bon fonctionnement du système, l'erreur d'estimation entre les valeurs estimées et les valeurs mesurées indique une éventuelle défaillance, des résidus sont générés à partir de cette erreur, on dit qu'un défaut a été détecté lorsque le résidu est loin d'être nul, un seul observateur est suffisant pour effectuer cette détection, en outre, sa localisation nécessite plus qu'un observateur, on parle de banc d'observateurs 1.5 qui génèrent tous ensemble des différents résidus, qui seront analysés à l'aide d'une certaine logique de décision, permettant la détermination de la partie du système affectée par le défaut en question, sa localisation est donc, un résultat direct de cette analyse.

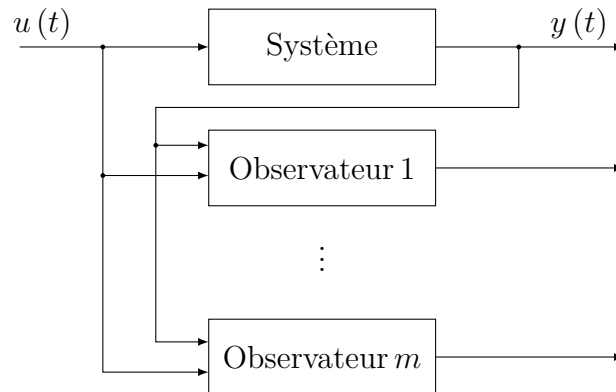


FIGURE 1.5 – Banc d'observateurs.

Cependant, il existe différentes architectures pour la construction d'un banc d'observateurs : l'architecture GOS (Generalized Observer Scheme), et l'architecture DOS (Dedicated Observer Scheme) qui sont montrés sur les figures 1.6, 1.7, 1.8 et 1.9 suivantes.

Lorsqu'il s'agit d'un banc d'observateurs pour les défauts actionneur avec la structure GOS, le  $i^{\text{ème}}$  observateur est piloté par toutes les sorties et toutes les entrées sauf la  $i^{\text{ème}}$  entrée.

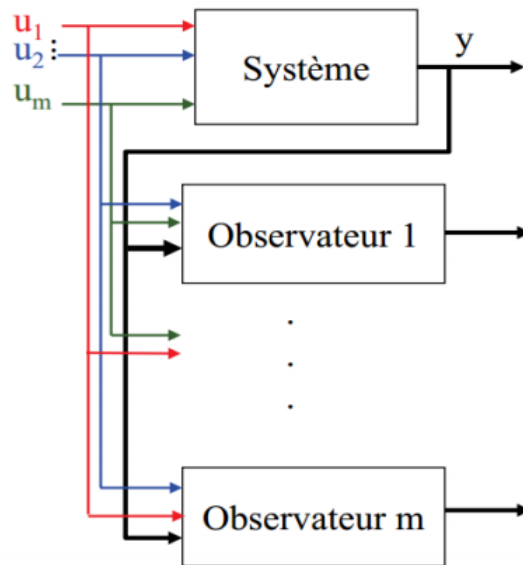


FIGURE 1.6 – La structure GOS pour les défauts actionneur

Tandis que lorsqu'il s'agit d'un banc d'observateurs avec la structure GOS, mais cette fois ci pour les défauts capteur le  $i^{\text{ème}}$  observateur est piloté par toutes les entrées et toutes les sorties sauf la  $i^{\text{ème}}$  sortie.

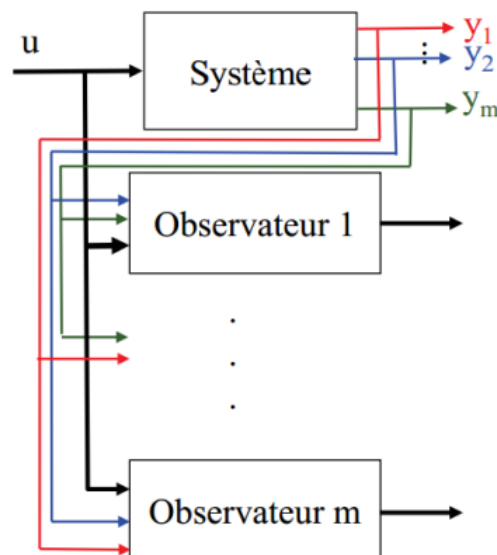


FIGURE 1.7 – La structure GOS pour les défauts capteur

Dans un banc d'observateurs dédié pour les défauts actionneur avec la structure DOS, le  $i^{\text{ème}}$  observateur est piloté par les sorties et uniquement la  $i^{\text{ème}}$  entrée.

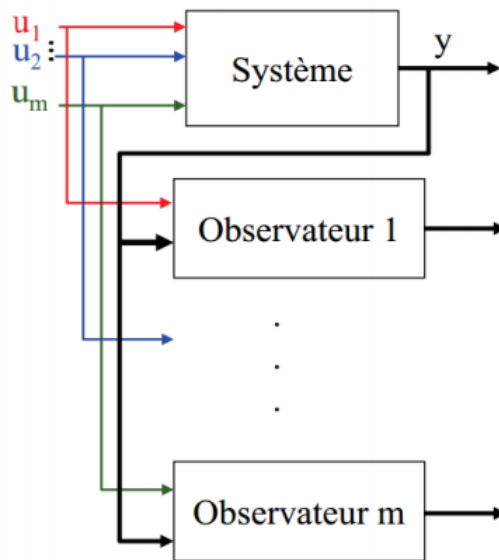


FIGURE 1.8 – La structure DOS pour les défauts actionneur

pour banc d'observateurs avec la structure DOS qui est dirigé pour le diagnostic des défauts capteur le  $i^{\text{ème}}$  observateur est piloté par les entrées et uniquement la  $i^{\text{ème}}$  sortie.

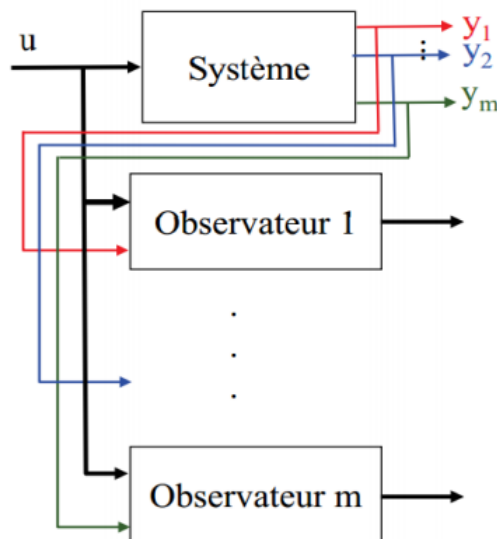


FIGURE 1.9 – La structure DOS pour les défauts capteur

Ces observateurs sont développés pour concevoir des générateurs de résidus, qui servent à détecter la présence de changements significatifs afin de fournir une détection fiable, et sont couplés à une certaine logique de décision qui constitue un module d'évaluation des résidus dans le but est de localiser les défauts. En effet, la plupart du temps, les valeurs des résidus sont, à chaque instant, comparées à des seuils. Quand la valeur du résidu est en dessous du seuil, une valeur booléenne de 0 est attribuée, et on attribue la valeur booléenne 1 si la valeur du résidu a dépassé le seuil fixé. L'ensemble de ces valeurs booléennes forme un vecteur binaire appelé signature de défaut. On construit, alors, une table qu'on appelle la table de signature théorique, telle que la colonne  $j$  correspond au défaut  $f_j$  et la ligne  $i$  correspond au résidu  $r_i$ . L'interprétation de cette table permet la localisation des défauts correspondants.

Cette combinaison de génération et d'évaluation de résidus constitue un bloc de détection et d'isolation des défauts (FDI).

Il est important de noter que la conception d'un observateur dans le cas des systèmes représentés par des multimodèles nécessite la vérification de la condition d'observabilité, en outre, il faut que chaque sous modèle soit localement observable, c'est à dire que  $\forall i$  la matrice d'observabilité associée au couple  $(A_i, C_i)$  est à rang plein. Dans ce mémoire nous avons travaillé avec des observateurs à entrées inconnues de type PI.

## 1.4 Commande tolérante aux défauts

Les techniques de commande conventionnelles ne considère pas l'éventuelle occurrence de pannes et défauts pouvant affecter le système. Cependant, l'apparition d'un défaut peut conduire à des mauvaises performances ou causer l'instabilité du système. Dans des situations réelles, cela peut provoquer des dégât matériels et parfois, il y a même des risques sur la sécurité des individus.

Pour confronter ce problème, plusieurs tentatives et outils sont développés mais ça reste limité juste pour la surveillance en boucle ouverte sans agir sur la commande, dans d'autre cas, la redondance matérielle disponible dans le système peut être également limitée. D'autres approches qui semblent intéressantes proposent d'intégrer la partie commande et agir sur la loi de commande de telle manière que le système accomplit sa mission le plus normalement possible malgré la présence des défauts. Cette tâche s'appelle la tolérance aux défauts.

La tolérance aux défauts est l'aptitude d'un système à accomplir sa fonction malgré la présence ou l'occurrence de fautes, qu'il s'agisse de dégradations physiques du matériel, de défauts logiciels, d'attaques malveillantes, d'erreurs d'interaction homme machine. Elle apparait comme un moyen de garantir une sureté de fonctionnement. Plusieurs stratégies sont développées pour compenser ou annuler l'effet des défauts ainsi garantir le bon fonctionnement du processus, et . Essentiellement, deux catégories des commandes FTC existent : commandes passive et active.

Cette notion de tolérance est le sujet principal de ce mémoire, quelques concepts associés et développements nécessaires ainsi que certaines techniques seront détaillés dans le troisième chapitre de ce manuscrit.

## 1.5 Principe de fonctionnement d'un quadrirotor

Le quadrirotor est un véhicule aérien sans pilote (UAV : Unmanned Aerial Vehicle), ayant six degrés de liberté DDL et comportant quatre rotors qui assurent sa portance, ils sont placés aux extrémités d'une croix sur un châssis de forme "X" ou "+", chaque couple d'hélices trouvant dans des extrémités opposés tournent dans le même sens, les deux autres tournent dans le sens inverse, pour éviter à l'appareil de tourner sur lui-même et pouvoir le diriger. Six mouvements sont possibles, trois en rotation et trois en translation, en variant les vitesses de rotation des quatre moteurs, on peut les réaliser, la figure 1.10 montre les différents mouvements d'un quadrirotor.

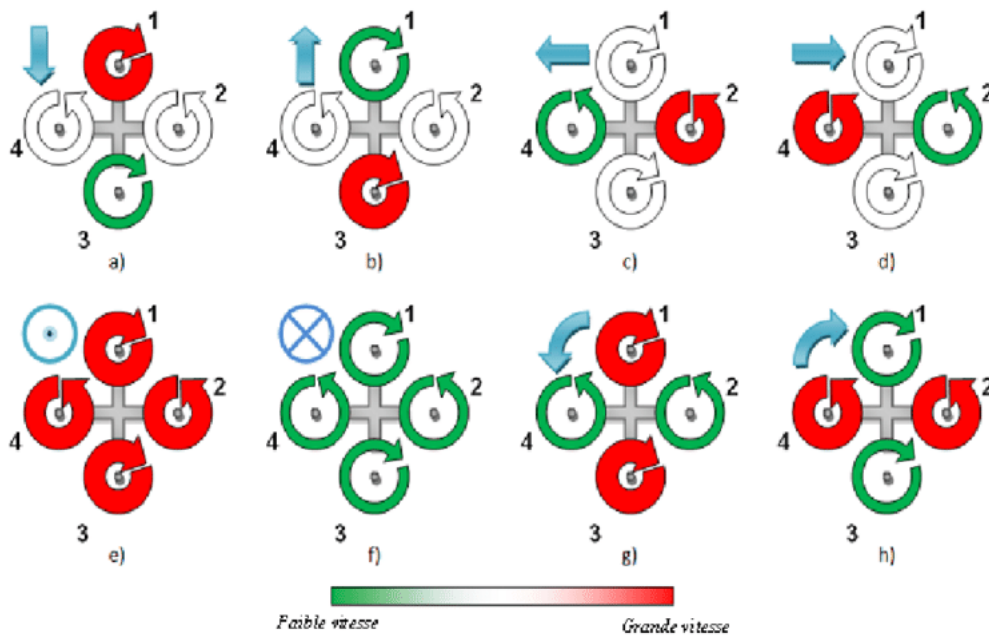


FIGURE 1.10 – Les mouvements d'un quadrirotor

### Description des mouvements d'un quadrirotor

La variation astucieuse de la puissance des moteurs offre la possibilité de réaliser les mouvements cités ci-dessus, le quadrirotor incline vers la direction du rotor le plus lent, les mouvements sont couplés, ce qui veut dire que la variation de vitesse d'un rotor provoque un mouvement en au moins trois degrés de liberté, ce couplage explique la possibilité de commander les six grandeurs avec uniquement quatre actionneurs. En effet, on peut faire monter ou descendre le véhicule (le mouvement de gaz), le pencher sur l'axe horizontale vers l'avant/l'arrière (roulis) ou droite/gauche (tangage), ou bien, le tourner sur lui-même autour de son axe central vertical (lacet)

On peut décrire tous ces mouvements comme suit :

- **Mouvement vertical** :  $(z)$  : c'est le déplacement suivant l'axe  $z$ , qui porte la force de poussée opposée en direction à la force de pesanteur, lorsque la force de poussée est supérieure au poids du véhicule le mouvement est ascendant, le mouvement descendant a lieu quand celle ci est inférieure au poids.
- **Transitions horizontales** :  $(x, y)$  : elles sont définies dans le plan  $xy$ , lorsqu'une translation est effectuée avec le maintien d'une hauteur constante on parle d'un vol en palier.
- **Mouvement de roulis** :  $(\phi)$  : c'est une rotation autour de l'axe  $x$ , réalisée par l'application d'un couple autour de cet axe, ce couple est le résultat de la différence de forces entre les deux actionneurs concernés par ce mouvement qui sont les rotors droit et gauche. Cette rotation est couplée avec un mouvement de translation selon l'axe  $y$ .
- **Mouvement de tangage** :  $(\theta)$  : c'est une rotation autour de l'axe  $y$ , réalisée par l'application d'un couple autour de cet axe, ce couple est le résultat de la différence de poussées entre les deux rotors avant et arrière. Cette rotation est couplée avec un mouvement de translation selon l'axe  $x$ .
- **Mouvement de lacet** :  $(\psi)$  : l'application d'un couple autour de l'axe  $z$  permet de l'obtenir, et ceci par la contribution des quatre rotors qui tournent dans des sens contraires deux à deux comme expliqué auparavant, de telle sorte que l'augmentation de la force dans une paire (deux rotors opposés l'un face à l'autre) soit égale à la diminution dans l'autre paire.

D'après cette description, il est clair que la dynamique du quadrirotor est fortement couplée, son analyse montre l'existence de non linéarités, la modélisation du système sur lequel l'application est faite est présentée dans le chapitre 4, ainsi, une représentation multimodèle T-S sera proposée.

## 1.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré pour présenter les notions générales nécessaires pour la réalisation de ce projet. Dans un premier temps, nous avons introduit la modélisation des systèmes non linéaires, ensuite on a montré brièvement comment obtenir un multimodèle avec différentes manières, une attention particulière a été portée au modèle flou de Takagi-Sugeno, la question de stabilité des ce genre de modèles était aussi abordée. Nous avons donné des notions générales sur les défauts et les méthodes de diagnostic à base d'observateurs de ces derniers suivi par une brève présentation de la commande tolérante aux défauts qui sera détaillée dans le chapitre 3 . Enfin, la dernière partie du chapitre a été destinée à la description du principe de fonctionnement d'un quadrirotor.

# Chapitre 2

## Stabilité et stabilisation des systèmes non linéaires

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Notion de stabilité</b>	<b>31</b>
2.2.1	Points d'équilibre	31
2.2.2	Stabilité d'un point d'équilibre	32
<b>2.3</b>	<b>Stabilité et stabilisation des multimodèles flous T-S</b>	<b>32</b>
2.3.1	Stabilité d'un modèle flou de Takagi-Sugeno	32
2.3.2	Stabilisation d'un multimodèle T-S	34
2.3.3	Exemple	37
<b>2.4</b>	<b>Poursuite de trajectoire</b>	<b>39</b>
2.4.1	Exemple	40
<b>2.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>41</b>

---



## 2.1 Introduction

Ce chapitre sera dédié pour l'étude et l'analyse de stabilité des systèmes non linéaires d'une façon générale, ensuite, on va donner certaines conditions nécessaires de la stabilité des systèmes flous T-S sous formes des inégalités matricielles linéaires, les théorèmes servant à obtenir ces conditions sont généralement basés sur les travaux de LYAPUNOV, dans un second temps, nous allons considérer le cas où les multimodèles de Takagi-Sugeno sont instables, on a besoin alors de les stabiliser, un exemple simple sera donné juste après pour l'illustration et l'application, on termine ce deuxième chapitre par une conclusion.

## 2.2 Notion de stabilité

La question de stabilité des systèmes dynamiques est fondamentale dans le domaine de l'automatique, les premières formulations rigoureuses du problème général de la stabilité datent depuis quelque temps et sont issues du domaine de la mécanique dont le but était de caractériser les équilibres d'un solide. Il s'agissait de décrire ceci avec la façon suivante : on parle de stabilité si, après avoir écarté faiblement un système de sa position d'équilibre, il prend une position un peu différente ou il rejoint sa position d'origine, dans ce cas, on dit qu'il est asymptotiquement stable.

Un apport majeur était ajouté après les travaux de LYAPUNOV, deux méthodes sont largement connues, la première concerne juste une approximation des petits mouvements et se base sur les propriétés du modèle linéarisé tangent, elle permet de conclure localement sur la stabilité au voisinage d'un point de fonctionnement, la seconde méthode proposée par Lyapunov dite "méthode directe" est plus générale, c'est pour ça qu'elle est la plus répandue et utilisée notamment pour les systèmes non linéaires. Ces concepts seront présentés d'une manière plus formelle dans les parties suivantes.

### 2.2.1 Points d'équilibre

Comme indiqué dans le premier chapitre, tout système continu peut être décrit par des équations ou des fonctions, on considère le système :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.1}$$

Un point  $x_0$  est dit point d'équilibre s'il annule l'équation 2.1, les solutions de l'équation 2.2 sont les points d'équilibre du système, ils sont appelés aussi les points fixes.

$$f(x_0, u_0) = 0 \tag{2.2}$$

Dans le cas d'un système linéaire, l'équation 2.2 possède une solution unique, par contre les systèmes non linéaires peuvent avoir plusieurs points d'équilibre, un exemple très utilisé est celui du pendule simple de la figure 2.1, ce système possède deux points d'équilibre  $\theta_0 = 0$  et  $\theta_0 = \pi$  qui sont de nature différente comme on va montrer dans la section suivante.

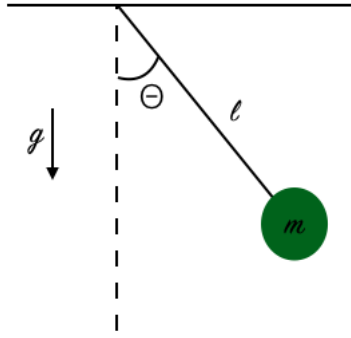


FIGURE 2.1 – Pendule simple

### 2.2.2 Stabilité d'un point d'équilibre

la notion de stabilité, à vrai dire, concerne les points d'équilibre, dans l'exemple du pendule simple 2.1, les deux points d'équilibre sont de nature différente, en effet, le point  $\theta_0 = 0$  est stable, tandis que le point  $\theta_0 = \pi$  est instable. Plusieurs formulations et travaux sont effectués pour décrire d'une façon mathématique formelle cette notion, souvent, on se base sur la deuxième méthode de Lyapunov, pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires.

Cette méthode repose sur une réalité physique, l'interprétation suivante est souvent trouvée dans la littérature : si l'énergie d'un système est dissipée dans le temps d'une façon continue, alors, il tend vers un point d'équilibre. l'idée était alors de chercher une fonction candidate ayant une forme énergétique qui vérifie les conditions de stabilité. Deux grandes familles des fonctions candidates de LYAPUNOV, les fonctions quadratiques et les fonctions non quadratiques, nous nous intéressons à la première famille avec la forme suivante :  $V(x(t)) = x(t) P x^T(t)$ ,  $P > 0$

## 2.3 Stabilité et stabilisation des multimodèles flous T-S

### 2.3.1 Stabilité d'un modèle flou de Takagi-Sugeno

L'approche sur laquelle on se base pour établir et étudier la stabilité au sens du Lyapunov de ce type de systèmes repose sur les fonctions candidates quadratiques, il s'agit de trouver une matrice symétrique définie positive telles que certaines conditions garantissent la stabilité, chose qui semble intéressante et facile à mettre en œuvre d'un point de vue pratique.

Soit le système flou T-S suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.3)$$

avec :

$$\mu_i(z(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) = 1 \quad (2.4)$$

En boucle ouverte, le système libre non contrôlé est donné par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))A_i x(t) \quad (2.5)$$

D'après le théorème 1, le multimodèle 2.5 est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P$  vérifiant pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$  les inégalités matricielles linéaires suivantes :

$$P > 0, \quad A_i^T P + P A_i < 0 \quad (2.6)$$

*Démonstration.* Considérons la fonction candidate quadratique de Lyapunov suivante :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \quad (2.7)$$

En dérivant par rapport au temps on obtient :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) \quad (2.8)$$

La stabilité du système est garantie si la condition suivante est vérifiée :

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \quad (2.9)$$

Sachant que  $\dot{x}(t)$  est donné par l'équation d'état 2.5, et en exploitant la relation 2.8 donnant l'expression de  $\dot{V}(x(t))$ , la condition 2.9 devient :

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t) \left[ \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) (A_i^T P + P A_i) \right] x(t) < 0 \quad (2.10)$$

d'où les conditions suffisantes données par les LMI 2.6.  $\square$

### 2.3.2 Stabilisation d'un multimodèle T-S

Dans le cas d'un système instable, il s'avère nécessaire de le stabiliser en synthétisant une loi de commande floue permettant ceci, les conditions de cette synthèse s'obtiennent d'une façon similaire à celles obtenues pour l'analyse des systèmes stables, en remplaçant les matrices de représentation d'état du système en boucle ouverte par celles du système en boucle fermée, comme le cas des méthodes de stabilisation par retour d'état et retour de sortie.

Un avantage puissant est offert par la représentation multimodèle est le fait de pouvoir élargir et utiliser les méthodes de l'automatique linéaire pour la synthèse des lois de commande pour les systèmes non linéaires, ce qui est très intéressant.

#### Stabilisation par retour d'état

C'est la méthode la plus répandue pour assurer la stabilité des multimodèles bouclés, dont la commande est de type compensation parallèle distribuée (PDC, Parallel Distributed Compensation), elle consiste à créer un régulateur par retour d'état pour chaque sous modèle local, ensuite, par interpolation similaire de celle des modèles LTI locaux, la loi de commande globale est obtenue, elle est non linéaire dans la plupart des cas. La figure 2.2 illustre le principe de cette compensation.

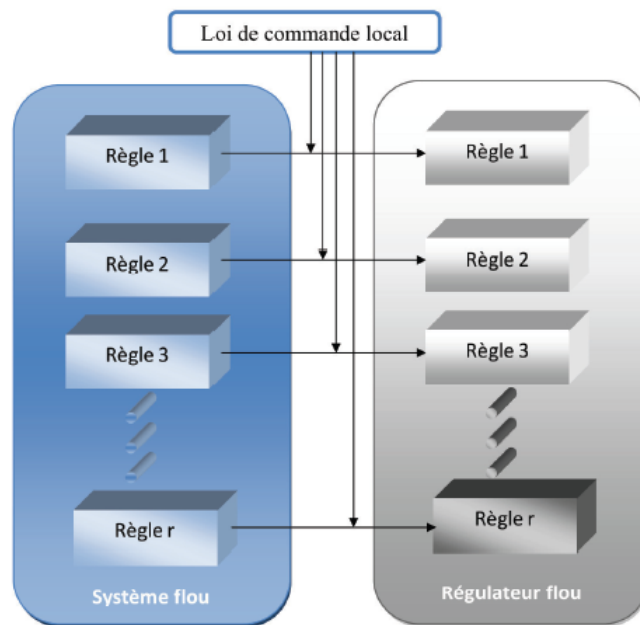


FIGURE 2.2 – Régulateur flou par la méthode PDC

Les règles floues sont les mêmes que celles du système flou T-S, avec les mêmes fonctions d'activation  $\mu_i$ , la commande  $u$  s'écrit avec la forme suivante :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) K_i x(t) \quad (2.11)$$

Soit le multimodèle flou T-S donné par l'équation 2.3, et supposé localement commandable, *i.e* les paires  $(A_i, B_i)$  vérifient la condition de commandabilité  $\forall i$ . Si on remplace  $u$  par son expression 2.11, alors on aura :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad (2.12)$$

Donc, le multimodèle flou T-S 2.3 peut s'écrit en boucle fermée lorsque la méthode PDC est appliquée comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) G_{ij} x(t) \quad (2.13)$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad (2.14)$$

Suivant la même approche que dans la section précédente, on choisit la fonction candidate de Lyapunov 2.7 :  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$

Pour que la stabilité soit assurée, il faut que l'inégalité 2.9 soit vérifiée, ce qui conduit aux LMI suivantes donné par le théorème 2 :

**Théorème 2** (K. Tanaka , 2001 ). [2] : *Le multimodèle flou de type T-S continu 2.13 est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P > 0$  telle que les inégalités suivantes soient vérifiées :*

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0, i = 1, \dots, r$$

$$\left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left( \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \leq 0, i < j \leq r \quad (2.15)$$

Notons que ces conditions sont suffisantes et non nécessaires, et par suite elles sont conservatives, la vérification de la stabilité de tous les modèles locaux suffit pour assurer la stabilité globale du système, or ce n'est pas nécessaire car une somme peut être négative malgré la présence de certains termes positifs. Les LMI précédentes exigent que tous les termes soient positifs, lorsque le nombre des règles est très grand, il s'avère difficile de trouver la matrice P commune<sup>1</sup>, cependant, il existe des théorèmes qui proposent des conditions relâchées en autorisant à certains termes d'être positifs tout en gardant la somme négative, ce qui offre à l'algorithme la possibilité de rechercher dans un domaine plus large, ces relaxations peuvent servir à améliorer les performances.

---

1. Parfois ça pose des problèmes de faisabilité au niveaux des algorithmes lors de la résolution des LMI

Le but maintenant est de calculer les gains  $K_i$ , une manière intéressante consiste à considérer un changement de variable permettant de transformer les conditions 2.15 en un problème d'inégalités matricielles linéaires LMI, en effet, on pose  $X = P^{-1}$  et  $K_i = M_i P^{-1}$ , on obtient alors les LMI suivantes :

$$\begin{cases} A_i X + X A_i^T - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0, i = 1, \dots, r \\ A_i X + X A_i^T + A_j X + X A_j^T - B_i M_j - M_j^T B_i^T - B_j M_i - M_i^T B_j^T < 0, i < j \leq r \end{cases} \quad (2.16)$$

La résolution de ces LMI permet de déterminer simultanément la matrice  $P = X^{-1}$  et les gains  $K_i = M_i X$ , avec  $i = 1, \dots, r$ .

### Stabilisation par retour d'état reconstruit

Parfois les états du système ne sont pas tous accessibles à la mesure, on fait appel donc, aux techniques de synthèse de commande à base d'observateurs, ou de multiobservateurs dans le cas des multimodèles, la structure de la loi de commande correspondante est donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) K_i \hat{x}(t) \quad (2.17)$$

Ou  $\hat{x}$  est le vecteur d'état estimé. Les LMI obtenues servent à préciser des conditions suffisantes pour garantir la stabilité, on a besoin de calculer dans ce cas les gain  $K_i$  des régulateurs flous, et les gains  $L_i$  des observateurs, souvent on cherche à exploiter le principe de séparation pour le calcul des différents gains.

### Stabilisation par retour de sortie

Pour la même raison, parfois on dispose pas de la totalité du vecteur d'état, on a juste les grandeurs de sortie qui construit le vecteur  $y$ , cette approche considère le cas ou la commande dépend seulement de la sortie mesurée, une loi de commande proposée par retour de sortie peut avoir la forme suivante :

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) F_i y(t) \quad (2.18)$$

De même, le système flou T-S 2.3 aura la même forme décrite par la relation 2.13, mais avec :

$$G_{ij} = A_i + B_i F_j C \quad (2.19)$$

L'objectif reste le même, on cherche toujours à déterminer les gains appropriés qui arrivent à stabiliser le système.

### 2.3.3 Exemple

Dans cette section, on va traiter un exemple pour appliquer la méthode PDC visant la synthèse d'une loi de commande stabilisante par retour d'état 2.11.

Soit le système non linéaire représenté par un multimodèle flou de type Takgi-Sugeno et défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y = Cx \end{cases}$$

tels que :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Le vecteur initial  $x_0$  à  $t = 0$  est donné par :

$$x_0 = [3 \quad 4 \quad 1]^T$$

Les fonctions d'activation  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2$  sont données par :

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \frac{1 - \tanh(x_1)}{2} \\ \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que ce système est instable en boucle ouverte, la figure 2.3 le montre :

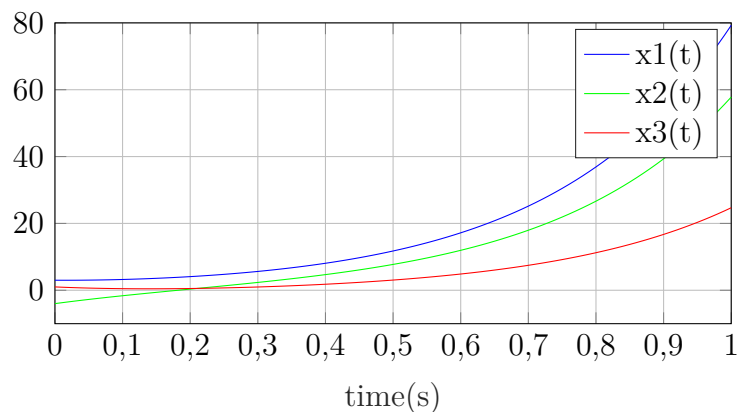


FIGURE 2.3 – Evolution dans le temps des états du système en boucle ouverte.

Avant d'appliquer la méthode PDC au système, on vérifie tout d'abord qu'il est bien commandable, effectivement, les matrices de commandabilité qui correspondent aux couples  $(A_1, B_1)$  et  $(A_2, B_2)$  sont à rang plein ( $rang = n = 3$ ). La résolution des LMI 2.16 donne, t les résultats suivants :

$$P = \begin{bmatrix} 0.0572 & 0.0132 & -0.01 \\ 0.0132 & 0.0082 & -0.0004 \\ -0.01 & -0.0004 & 0.0076 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [4.7472 \quad 0.9055 \quad 1.0249], \quad K_2 = [5.7185 \quad 0.7939 \quad -0.0241]$$

La figure 2.4 illustre le résultat, on constate que la stabilisation est bien établie.

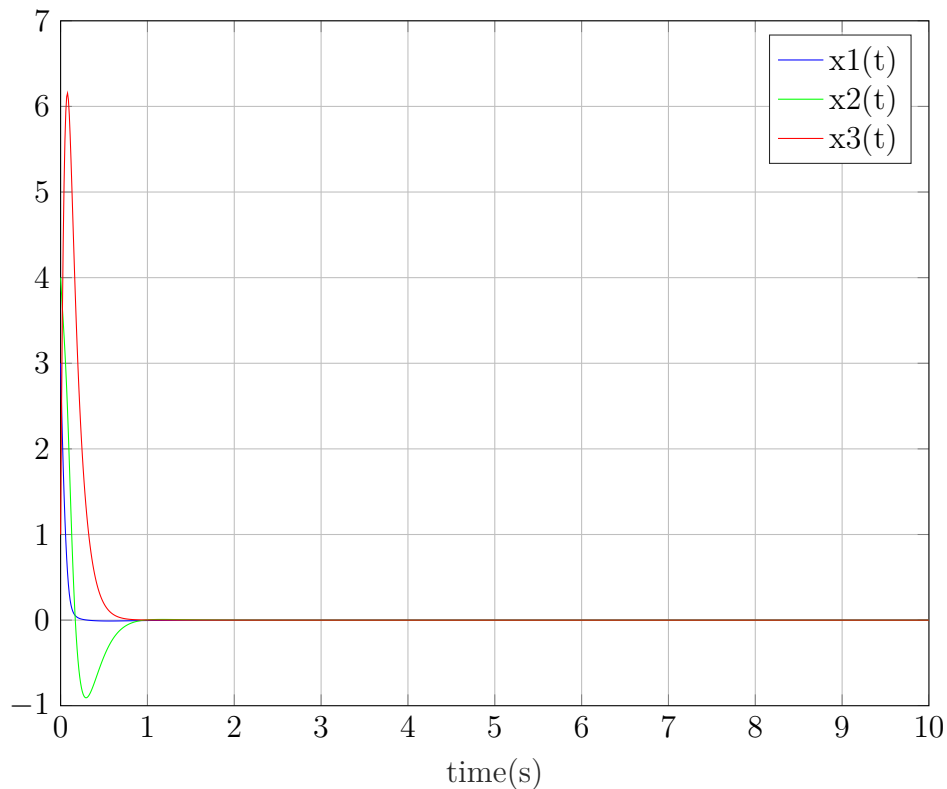


FIGURE 2.4 – Evolution dans le temps des états du système en boucle fermée avec commande PDC.



## 2.4 Poursuite de trajectoire

Le problème de suivi de trajectoire est fréquemment rencontré en automatique, il s'agit d'obliger le système à commander à suivre une trajectoire désirée d'un système de référence, dont le modèle peut être linéaire ou non. Dans cette partie nous désirons réaliser une poursuite d'une trajectoire donnée pour un système non linéaire représenté par un multimodèle flou T-S.

Considérons le modèle flou de type T-S suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.20)$$

On veut que ce système dynamique évolue dans le temps exactement comme le système de référence défini par son équation d'état. Il s'agit donc, de déterminer la loi de commande  $u(t)$  qui assure le suivi de cette trajectoire. L'idée est de ramener le problème de poursuite de trajectoire en un problème de stabilisation.

On définit l'erreur de poursuite par la différence entre le vecteur d'état du système et celui du modèle de référence, de la façon suivante :  $\tilde{x}(t) = x(t) - x_d(t)$

La dynamique de l'erreur de poursuite est donnée par :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_d(t) \quad (2.21)$$

En remplaçant 2.20, on trouve :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) - \dot{x}_d(t) \quad (2.22)$$

Or on a :  $x(t) = \tilde{x}(t) + x_d(t)$  alors, l'équation 2.22 devient :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) \left[ A_i \tilde{x}(t) + B_i u(t) + A_i x_d(t) \right] - \dot{x}_d(t) \quad (2.23)$$

On effectue le changement de variable suivant, on pose :

$$\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) B_i \tau(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) B_i u(t) + \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) A_i x_d(t) - \dot{x}_d(t)$$

Alors le système 2.22 est équivalent à :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))(A_i \tilde{x}(t) + B_i \tau(t)) \quad (2.24)$$

La nouvelle commande  $\tau(t)$  est de la forme :

$$\tau(t) = - \sum_{i=1}^r \mu_i(z(t)) K_i \tilde{x}(t) \quad (2.25)$$

On remplace dans 2.24 et on aura :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) G_{ij} \tilde{x}(t) \quad (2.26)$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad (2.27)$$

Le problème revient donc à un problème de stabilisation, il s'agit de calculer les gains  $K_i$  pour stabiliser  $\tilde{x}(t)$  à l'origine. Les LMI sont obtenus d'une façon similaire que celles de la section précédente concernant la stabilisation.

Si on arrive à stabiliser  $\tilde{x}(t) = x(t) - x_d(t)$  à l'origine, alors l'état  $x(t)$  a tendance à suivre la trajectoire du modèle de référence  $x_d(t)$

### 2.4.1 Exemple

Prenons par exemple le même système de l'exemple précédent 2.3.3, on souhaite que les états du système suivent les trajectoires désirées suivantes :

$$\begin{cases} x_{1d}(t) = -\sin(a\pi t) + a\pi t \\ x_{2d}(t) = \cos(a\pi t) \\ x_{3d}(t) = 2 \end{cases} \quad \text{avec } a = 0.03$$

Les résultats de la simulation sont donnés par la figure 2.5, qui montre bien que le système arrive à suivre la trajectoire désirée :

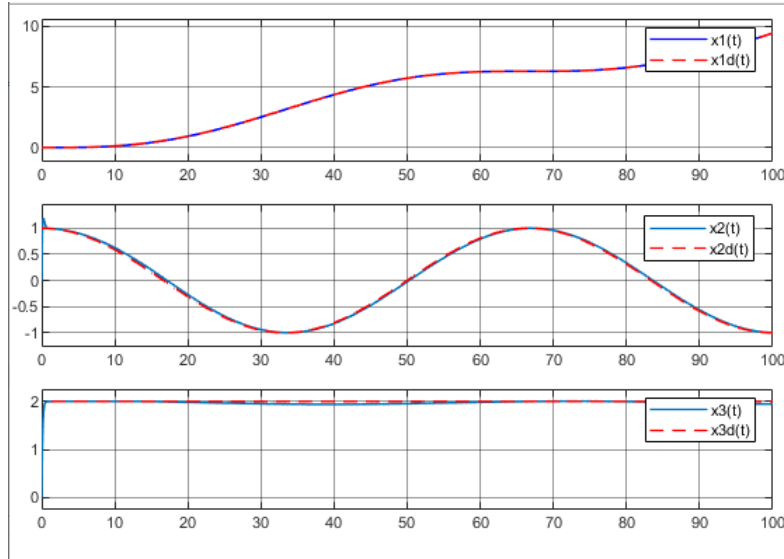


FIGURE 2.5 – suivi de trajectoire par la méthode PDC

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre a été consacré spécialement pour l'étude de la stabilité des systèmes d'une façon générale. On a commencé par introduire la notion de stabilité d'un système dynamique, ensuite les tentatives faites pour décrire formellement ce concept, notamment les travaux de Lyapunov et sa deuxième méthode sur laquelle on se basait pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires y compris les multimoèles. On s'est intéressé après à l'analyse de la stabilité et ces critères dans le cas des modèles flous T-S, les conditions suffisantes pour la garantir dans ce cas là étaient données sous forme des inégalités matricielles linéaires LMI. Dans un second temps, nous avons considéré le cas où les modèles flous de Takagi-Sugeno étaient instables, d'où la nécessité de la stabilisation sous contrainte de commandabilité. On a présenté certaines méthodes intéressantes comme les méthodes de stabilisation par retour d'état et retour de sortie avec la compensation parallèle distribuée PDC, qui permet de concevoir un régulateur flou avec les mêmes règles floues du système. On a également présenté une technique permettant de réaliser la poursuite de trajectoire. Afin de tester cette technique, un exemple de simulation est aussi présenté.

# Chapitre 3

## Commande tolérante aux défauts

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>43</b>
<b>3.2</b>	<b>Classification des techniques FTC</b>	<b>44</b>
3.2.1	Approche passive : PFTC	44
3.2.2	Approche active : AFTC	45
<b>3.3</b>	<b>Principe et structure de l'approche AFTC</b>	<b>46</b>
<b>3.4</b>	<b>Le bloc FDI</b>	<b>47</b>
3.4.1	Observateur d'état pour les multimodèles T-S	47
3.4.2	Observateur PI	50
3.4.3	Diagnostic par observateur PI	52
3.4.4	Exemple	52
<b>3.5</b>	<b>Le bloc FTC</b>	<b>56</b>
3.5.1	Méthodes pour les systèmes linéaires	56
3.5.2	Méthodes pour les systèmes non linéaires	57
3.5.3	Exemple	59
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>63</b>

---

## 3.1 Introduction

Les systèmes automatisés se basent sur des techniques de commande variées dans le but de réaliser des missions et des tâches spécifiques tout en atteignant des niveaux de performances et de sécurité plus ou moins élevés et qui sont qualifiés par satisfaisants dans le cas nominal. Dans un autre cas, lorsqu'un défaut ( voir section 1.3.1 ) apparaît il peut influencer sur ces performances et sur le système tout entier, en provoquant des situations non désirées caractérisées par une dégradation dans la qualité de fonctionnement du système ou causant dans un cas plus grave l'instabilité. Les méthodes de commande classiques s'avère limitées dans certains cas pareils, elles ne possèdent pas les options et les qualités nécessaires pour surmonter un tel problème, pour confronter ce type de problèmes et éviter ces conséquences, souvent on se base sur le principe de la redondance matérielle surtout dans le cas des systèmes critiques comme le domaine nucléaire, aéronautique et spatial, malgré l'efficacité apparente de cette tentative, elle présente principalement deux inconvénients : économique et technique, en effet, elle est onéreuse du point de vu coût et maintenance, ainsi que l'encombrement physique à cause de la duplication des composants matériels. une alternative qui peut être efficace et qui peut servir à éviter de tels inconvénients est basée sur le principe de la redondance analytique. Cette dernière propose de développer des stratégies plus sophistiquées qui permettent au système d'avoir la capacité et la possibilité de s'accommoder automatiquement aux défauts en question. Un tel système est appelé système tolérant aux défauts. Les techniques de diagnostic des défauts présentées dans 1.3 sont nécessaires et utilisées dans ce contexte, néanmoins, ces techniques sont considérées dans la plupart des cas comme un outil de surveillance juste en boucle ouverte seulement, d'où le besoin d'intégrer la partie commande et de développer des techniques pour la commande tolérante aux défauts.

L'idée principale derrière la commande tolérante aux défauts est d'essayer de combiner entre les techniques du diagnostic des défauts et les techniques de la commande, dans l'objectif de maintenir la stabilité des systèmes ainsi qu'un certain degré de performances nominales, malgré l'occurrence des défauts, et ceci par la limitation de leur effet sur le système voir même l'annulation de cet effet dans un cas plus idéal.

Ce chapitre est consacré pour présenter les différentes notions qui concernent la tolérance aux défauts, on va classer ses approches et expliquer le principe de chaque classe, par la suite, on s'intéresse à l'approche active et on présente quelques unes de ses méthodes, ensuite, un exemple est présenté montrant l'effet des défauts sur le système, leur estimation ainsi que leur compensation.

## 3.2 Classification des techniques FTC

Nombreuses méthodes sont développées dans le cadre de la commande tolérante aux défauts, elles se regroupent selon la nature du défaut et la manière avec laquelle il est traité en deux grandes catégories, on a l'approche passive (PFTC pour Passive Fault Tolerant Control) et la deuxième est l'approche active (AFTC signifiant Active Fault Tolerant Control). La première concerne surtout les défauts de faible gravité. C'est une commande performante face à certains défauts ou incertitudes prédéfinis, tandis que la deuxième est intéressante dans le cas des défauts dits critiques ayant un impact grave sur le système et qui ne peuvent pas être compensés par la commande PFTC.. La figure 3.1 résume cette classification qui sera détaillée juste après.

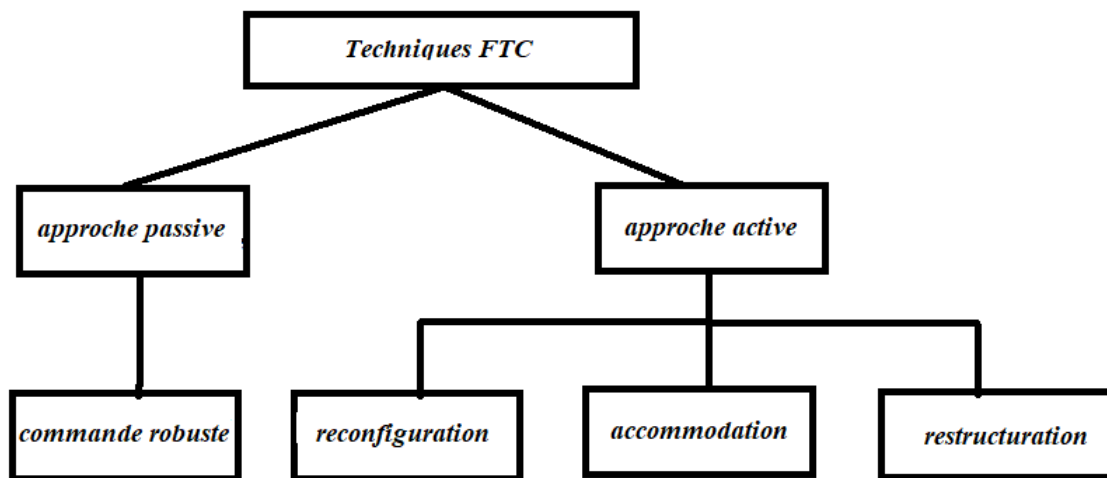


FIGURE 3.1 – classification des différentes méthodes FTC

### 3.2.1 Approche passive : PFTC

En présence d'un faible défaut en terme d'amplitude, cette approche peut suffire, il s'agit d'une commande robuste à un ensemble de défauts connus, cette robustesse rend le système insensible aux incertitudes de modélisation et aux défauts pris en compte à priori, ils seront systématiquement compensés sans aucune modification de la loi de commande ni intervention en ligne sur le système bouclé, d'où sa passivité. La prise en compte des défauts concernés est faite dès le début lors de la conception initiale du système, aucun module de détection, localisation et estimation de défauts n'est nécessaire, la structure globale ne comporte aucun bloc supplémentaire pour le diagnostic.

Il est clair que cette approche est limitée comparée à l'approche active, sa capacité de tolérance aux défauts qui ne sont pas pris en compte au préalable est très restreinte, l'utilisation de cette approche dans ce cas de figure peut s'avérer très risquée, et l'utilisation d'une approche plus active et plus performante est recommandée.

### 3.2.2 Approche active : AFTC

Contrairement à la première approche, celle ci réagit activement sur le système lorsque des défauts critiques ont lieu, c'est à dire, elle utilise des informations collectées en ligne et disponibles grâce à la redondance analytique et matérielle du système, cette approche active permet d'élargir le traitement des défauts au cas des imprévus, ce qui requiert l'utilisation d'un bloc FDI pour la détection et l'isolation de ces derniers, les informations fournies par ce bloc sont utilisées par la suite pour synthétiser la loi de commande.

En revanche, l'approche AFTC possède trois formes différentes comme mentionné dans la figure 3.1 :

- **Accommodation** : dans ce cas, les défauts sont relativement de faible amplitude caractérisé par une dégradation ou une perte partielle d'efficacité, en quelque sorte, c'est une adaptation des paramètres du régulateur, il s'agit de calculer les gains du système de commande ou de compenser le signal de commande par rapport à la variation due au défaut.
- **Reconfiguration** : on essaye de compenser le défaut par une modification de la structure du système de commande, ou de remplacer l'action de la partie défaillante du système par une action menée par les composants sains du système. On note qu'un élément sain ne présente aucun symptôme de défaillance.
- **Restructuration** : dans ce cas de figure, ni l'accommodation ni la reconfiguration ne peuvent avoir lieu, la synthèse d'une nouvelle loi de commande est faite par la modification de la structure et des paramètres du système de commande.

Il est important de remarquer que quelque soit la situation du système, les objectifs de la commande restent inchangés, d'ailleurs c'est ça la finalité d'une commande tolérante aux défauts, cependant, l'approche AFTC présente un inconvénient lorsque le temps de calcul de la nouvelle loi de commande est limité, en outre, il faut que les systèmes de diagnostic et de commande aient une dynamique plus rapide que celle du système ou des défauts pour pouvoir les anticiper, on exige alors d'assurer une certaine robustesse tout en gardant les performances, notamment la rapidité.

Une autre remarque aussi importante concerne la notion de reconfigurabilité du système, en effet, on s'intéresse à trouver la limite où le système reprend sa fonctionnalité et à mesurer sa capacité de tolérance aux défauts. L'étude de la reconfigurabilité consiste à savoir à quel point les propriétés basiques de commandabilité et d'observabilité du système restent valables en présence de défauts sous contrainte qu'ils ne soient pas destructifs. Dans le reste de ce manuscrit on s'intéresse à l'approche active.

### 3.3 Principe et structure de l'approche AFTC

Les méthodes FTC compensent les défauts affectant le système soit en sélectionnant des régulateurs pré-calculés avec une certaine logique de commutation, soit en générant de nouvelles lois de commande en temps réel. En effet, la démarche suivie comprend généralement deux étapes :

1. étape de diagnostic et évaluation des performances
2. étape de synthèse d'un mécanisme d'accommodation, de reconfiguration de la loi de commande ou de restructuration.

le traitement des défauts imprévus pour le diagnostic et la tolérance comme indiqué précédemment suivant ces deux étapes nécessite la conception de deux blocs : FDI et FTC. La figure 3.2 suivante montre l'architecture d'une commande FTC active et permet d'expliquer son principe de fonctionnement.

En effet, dans le cas nominal sans défaut, le bloc FDI ne détecte aucun défaut, par la suite aucune intervention n'est activée, la commande  $u(t)$  assure la stabilité et le bon fonctionnement du système. Lorsqu'un défaut quelconque est survenu, il est tout de suite détecté et identifié par le module FDI qui génère des résidus, les informations fournies par ce bloc sont transmises vers un autre qu'on appelle le bloc FTC, dont le rôle est l'élaboration de la nouvelle loi de commande permettant la tolérance au défaut apparu, en utilisant son signal estimé et en ajoutant des termes dans la loi de commande initiale, pour concevoir la nouvelle loi  $u_f(t)$  et assurer la compensation des défauts.

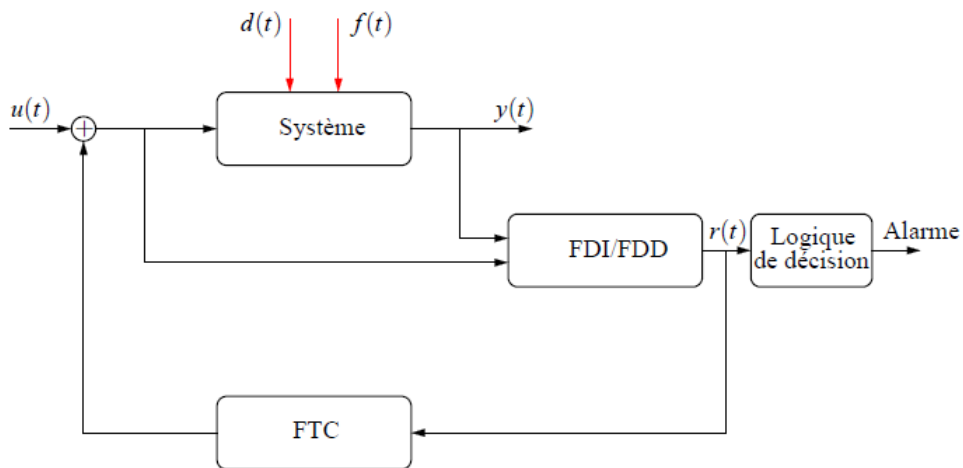


FIGURE 3.2 – structure AFTC



### 3.4 Le bloc FDI

Son rôle est la détection et l'estimation du défaut et les variables d'état du système ainsi que la génération des résidus, comme on a mentionné dans les parties 1.3.2 et 1.3.3, il existe plusieurs méthodes de diagnostic basées modèle, dans ce mémoire on s'intéresse au diagnostic à base d'observateur qu'on rappelle la structure avec la figure 3.3 suivante :

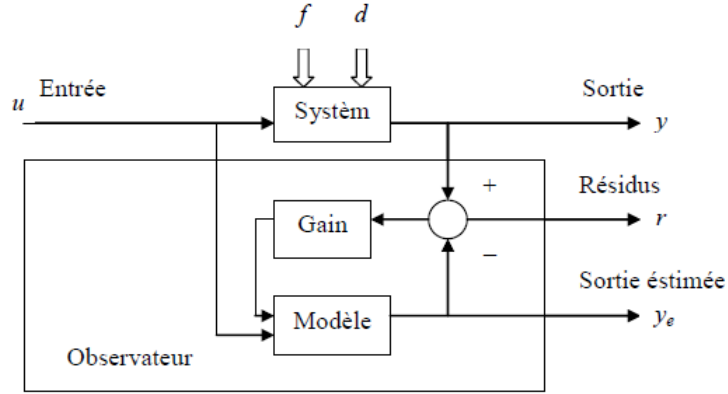


FIGURE 3.3 – diagnostic des défauts à l'aide d'observateur

#### 3.4.1 Observateur d'état pour les multimodèles T-S

Les observateurs les plus utilisés sont des extensions de l'observateur de Luenberger, qui sont dédiés pour les systèmes linéaires.

Soit le multimodèle T-S suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

L'observateur proposé a la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

On définit l'erreur d'estimation par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (3.3)$$

tels que :  $\hat{x}$  est le vecteur d'état estimé ,  $\hat{y}$  est la sortie estimée  
 $L_i$  sont les gains de l'observateur à déterminer,  $\xi(t)$  désigne les variables de décision, cependant, on distingue deux cas, tout dépend si elles sont mesurables ou non, en effet, lorsque les variables de décision ne sont pas mesurables, les fonctions d'activation  $\mu_i(t)$  sont en fonction de  $\hat{\xi}$  estimé. Afin de simplifier l'analyse, on peut poser : :

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^r (\mu_i(\xi(t)) - \mu_i(\hat{\xi}(t)))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (3.4)$$

Par ajout et soustraction de  $\omega(t)$  dans l'équation d'état dans 3.1 on peut écrire alors :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) + \omega(t) \quad (3.5)$$

L'équation d'état qui définit la structure de l'observateur est donnée par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \quad (3.6)$$

Dans l'équation 3.4, le terme  $\omega(t)$  est considéré comme une perturbation à prendre en considération et à rejeter, par atténuation de son effet sur l'erreur d'estimation d'état  $e(t)$  ou l'annuler carrément. Dans notre travail, on considère le cas où les variables de décision sont mesurables.

On choisit la fonction quadratique candidate de Lyapunov comme suit :

$$V(t) = e(t)^T P e(t) \quad (3.7)$$

Ainsi :

$$\dot{V}(t) = \dot{e}(t)^T P e(t) + e(t)^T P \dot{e}(t) \quad (3.8)$$

Or d'après les équations 3.1, 3.2 et 3.3 on a :

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$

ce qui fait que :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i - L_i C) e(t) \quad (3.9)$$

La condition suffisante de stabilité au sens de Lyapunov est :

$$\dot{V}(e(t)) < 0 \quad (3.10)$$

Ce qui conduit aux LMI données par le théorème suivant :

**Théorème 3** (Patton et al. 1998 ). [7] : L'erreur d'estimation d'état  $e(t)$  converge asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P = P^T > 0$  et des matrices  $K_i$  telles que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$A_i^T P + P A_i - K_i C - C^T K_i^T < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (3.11)$$

Les gains de l'observateur sont obtenus à partir de l'équation :

$$L_i = P^{-1} K_i \quad (3.12)$$

Le développement de ces observateurs a pour objectif de reconstruire l'état du système. En réalité, un système est piloté par des entrées connues (généralement la commande  $u(t)$ ), il est affecté également par des entrées inconnues comme les perturbations, les bruits et les défauts, d'où leur appellation. La négligence de ces entrées inconnues peut conduire à des estimations erronées, par la suite la qualité des tâches de commande ou diagnostic sera dégradée.

Cependant, dans le cas d'un système affecté par un défaut, des techniques ont été développées pour la reconstruction de l'état du système ainsi que l'estimation de ce défaut. Dans ce contexte, les observateurs à entrées inconnues sont utilisés.

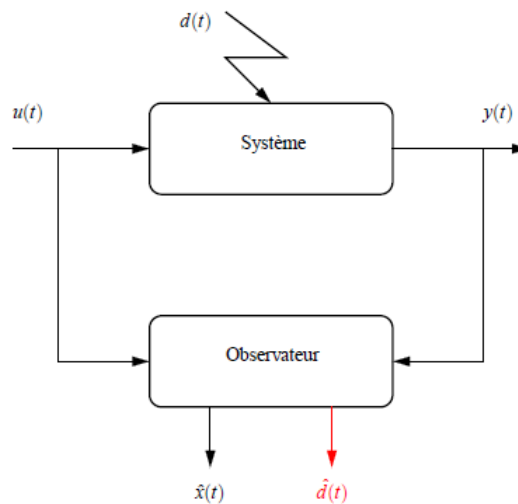


FIGURE 3.4 – Observateur à entrées inconnues

Il existe deux classes distinctes pour ce type d'observateurs, la première dite par découplage, exploitant le principe de séparation et visant à éliminer la sensibilité de l'estimation aux entrées inconnues, la seconde classe cherche à estimer simultanément l'état du système et l'entrée inconnue et ceci par l'introduction d'une action intégrale. Ces travaux ont été développés initialement pour les systèmes linéaires, ensuite des extensions vers les systèmes non linéaires sont faites, notamment les systèmes représentés par la structure multimodèle T-S. Dans le cadre de diagnostic des systèmes non linéaires, la deuxième classe semble plus intéressante parce qu'elle offre directement l'estimation de l'entrée inconnue. Dans ce travail on s'intéresse à la conception des observateurs PI (Proportionnel Intégral) dans le cas des multimodèles flou T-S.

### 3.4.2 Observateur PI

Cet observateur fournit une estimation de l'entrée inconnue simultanément avec l'état du système, après une augmentation de cet état, on étudiera le cas des variables de décision mesurables. Considérons le multimodèle T-S suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Gd(t) \end{cases} \quad (3.13)$$

tels que :  $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d \times 1}$  est l'entrée inconnue, dans le développement théorique on suppose que  $\dot{d}(t) = 0$ .

$E_i$  et  $G$  représentent les matrices de distribution de l'entrée inconnue sur l'entrée et la sortie respectivement ( défauts actionneur et défauts capteur). Par exemple, lorsque un défaut de type biais affecte le  $j^{\text{ème}}$  actionneur on pose :  $E_i = B_i^j$  telle que  $B_i^j$  est la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $B_i$ , ainsi,  $d(t) = \alpha \mathbb{1}(t - t_0)$  où  $\mathbb{1}(t)$  est un échelon unitaire, et ainsi de suite. D'une façon pareille on effectue la modélisation des défauts capteur.

L'observateur PI est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left( A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + E_i \hat{d}(t) + L_{Pi} (y(t) - \hat{y}(t)) \right) \\ \dot{\hat{d}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) L_{Ii} (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) + G \hat{d}(t) \end{cases} \quad (3.14)$$

Posons les matrices  $x_a, \bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}$  et  $\bar{L}_i$  comme suit :

$$x_a(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ d(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & E_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{pmatrix} B_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{C} = (C \quad G)$$

et :

$$\bar{L}_i = \begin{pmatrix} L_{Pi} \\ L_{Ii} \end{pmatrix}$$

En exploitant les relations 3.13 et 3.14 on obtient l'état augmenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (\bar{A}_i x_a(t) + \bar{B}_i u(t)) \\ y(t) = \bar{C} x_a(t) \end{cases} \quad (3.15)$$

Ainsi que l'état augmenté estimé par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (\bar{A}_i \hat{x}_a(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{L}_i (y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \bar{C} \hat{x}_a(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

Dans ce cas là, l'erreur d'estimation est définie par :

$$e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t) \quad (3.17)$$

En suivant une démarche semblable à celle du théorème 3 sous contrainte d'observabilité du modèle augmenté, on obtient le théorème suivant :

**Théorème 4.** *:[12] L'erreur d'estimation d'état et d'entrée inconnue  $e_a(t)$  converge asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice symétrique définie positive  $P = P^T > 0$ ,  $P \in \mathbb{R}^{(n+n_d) \times (n+n_d)}$  et des matrices  $\bar{K}_i \in \mathbb{R}^{(n+n_d) \times n_y}$  telles que les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$\bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C} - \bar{C}^T \bar{K}_i^T < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \quad (3.18)$$

Les gains de l'observateur sont obtenus à partir de l'équation :

$$\bar{L}_i = P^{-1} \bar{K}_i \quad (3.19)$$

La preuve est identique à celle du théorème 3, elle s'obtient en considérant la fonction quadratique de Lypunov :  $V(t) = e_a(t)^T P e_a(t)$ .

Parfois ces conditions sont conservatives, on fait alors appel à d'autres théorèmes pour relâcher les conditions, parmi les techniques utilisées pour la relaxation l'ajout des matrices  $Q_i$  ou bien un terme pour assurer la stabilité exponentielle avec un taux de convergence  $\alpha$  (appelé decay rate), les LMI s'écrivent ainsi :

$$\bar{A}_i^T P + P \bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C} - \bar{C}^T \bar{K}_i^T + 2\alpha P < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

On note que le développement précédent est fait sous l'hypothèse :  $\dot{d}(t) = 0$ , qui veut dire théoriquement que les entrées inconnues sont constantes, ce qui restreint l'ensemble des signaux que l'observateur PI arrive à les estimer, néanmoins, il est possible pratiquement d'estimer des signaux à basses fréquences ayant une lente dynamique, ceci implique une augmentation des gains, ce qui conduit à une augmentation de la sensibilité au bruit de mesure, il faut donc trouver un compromis entre la robustesse et les performances. Cependant, une approche intéressante est utilisée pour augmenter la bande passante de l'observateur et élargir l'ensemble des signaux à estimer à des signaux plus dynamiques, l'idée consiste à généraliser la conception des observateurs PI et à utiliser plusieurs actions intégrales pour construire l'observateur PMI (Proportionnel Multi-Intégral) qui estime simultanément les  $q$  premières dérivées de l'entrée inconnue supposée avoir la  $q^{\text{ème}}$  dérivée nulle  $d^q(t) = 0$ , alors que dans le cas d'un observateur PI, on a la première dérivée de  $d(t)$  qui est nulle..

Les applications que nous avons effectuées dans ce manuscrit sont limitées au cas de l'observateur PI avec des variables de décision mesurables.

### 3.4.3 Diagnostic par observateur PI

La possibilité d'estimation simultanée de l'état du système et des entrées inconnues est un grand avantage que possède ce type d'observateurs, un autre avantage est présenté par ce type est la possibilité d'effectuer la détection, la localisation et l'estimation des défauts avec un seul observateur, cependant il est possible d'améliorer la qualité de diagnostic et les résultats d'estimation des défauts capteur et actionneur en utilisant un banc de  $n_f$  observateurs suivants des architectures et des stratégies différentes (comme les structures GOS et DOS présentées dans 1.3.3), ceci permet aussi d'éviter les fausses alarmes, par exemple, dans le cas de diagnostic des défauts capteur, l'architecture DOS est préférée, certains utilisent toutes les combinaisons possibles des sorties mesurées pour piloter les observateurs (soit  $2^n - 1$  observateurs ou  $n$  est le nombre de sorties).

Les résidus peuvent être définis par :  $r(t) = \hat{f}(t)$  ou  $\hat{f}(t)$  est le défaut estimé, ou par la différence entre les sorties mesurées et les sorties estimées :  $r(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ . les résidus sont supposés nuls en absence de défauts, mais en pratique, et à cause des bruits de mesure (suite à l'environnement du système ou relatifs à l'instrumentation) ainsi que les effets des perturbations, ils n'ont pas exactement une valeur nulle en l'absence de défauts, un seuil de détection  $J_{th}$  est alors prédéfini en fonction de la borne de perturbation, les alarmes sont déclenchées lorsque ce seuil est franchi :

$$\begin{aligned} r(t) < J_{th}, f(t) &= 0 \quad \text{pas de défaut} \\ r(t) \geq J_{th}, f(t) &\neq 0 \quad \text{défaut détecté} \end{aligned}$$

Ainsi les alarmes sont définies comme suit :

$$a_j(t) = \begin{cases} 1, & |r(t)| \geq J_{jth} \\ 0, & |r(t)| < J_{jth} \end{cases}$$

### 3.4.4 Exemple

On considère le multimodèle flou de type T-S défini par les matrices :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On suppose que deux défauts  $d_1(t), d_2(t)$  affectent le système, le premier défaut affecte les capteurs et le deuxième affecte l'actionneur. les matrices de distribution sont données par :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Les théorèmes et les algorithmes de résolution des LMI ont permis d'obtenir les gains suivant :

$$K_1 = [4.7472 \quad 0.9055 \quad 1.0249], \quad K_2 = [5.7185 \quad 0.7939 \quad -0.0241]$$

$$\bar{L}_{P1} = \begin{bmatrix} 338.9506 & -320.4253 & -539.2826 \\ 67.7447 & -64.7852 & -112.4616 \\ 136.1494 & -133.1183 & -216.7539 \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_{P2} = \begin{bmatrix} -301.5 & 129.4 & 109.4 \\ -63.3 & 273.7 & 19.2 \\ -120.9 & 508.4 & 54.4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{L}_{I1} = \begin{bmatrix} -53.5257 & 52.0647 & 85.8656 \\ -131.3182 & 157.4654 & 191.8545 \end{bmatrix}, \quad \bar{L}_{I2} = \begin{bmatrix} 47.3 & -202.6 & -15.7 \\ 135.1 & -456.6 & -116 \end{bmatrix}$$

les résultats des simulations sont montrés sur les figures suivantes :

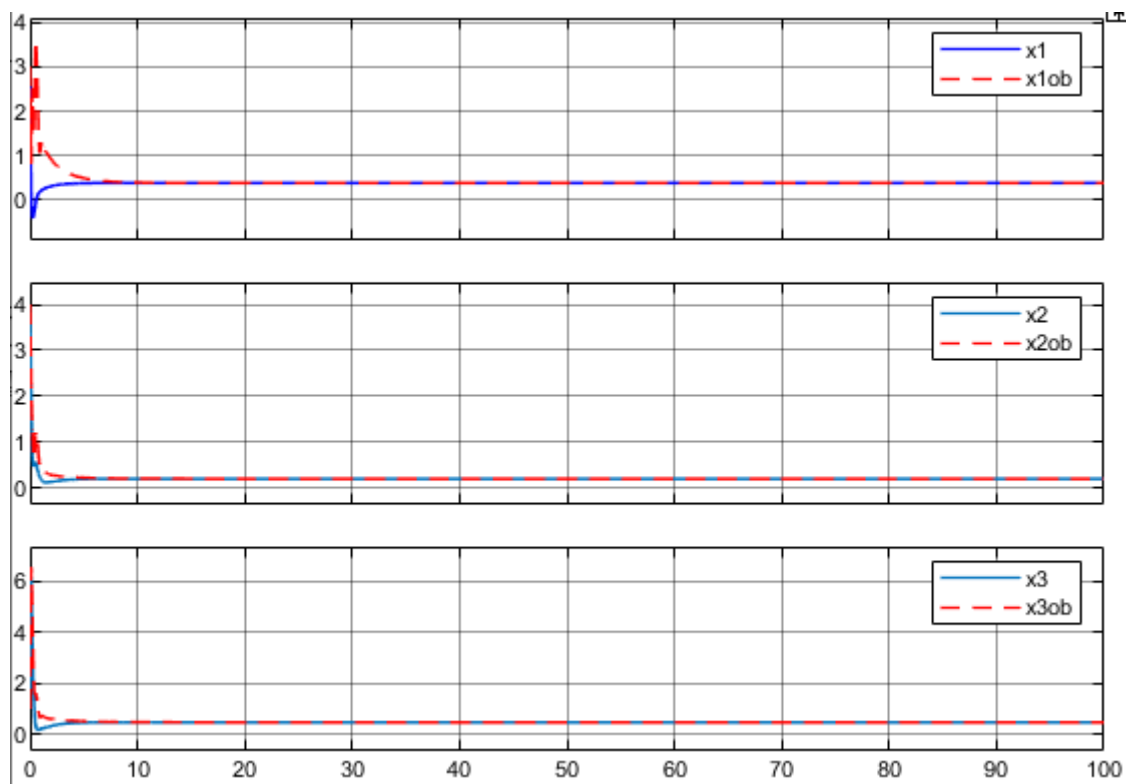


FIGURE 3.5 – Evolution dans le temps des états du système en boucle fermée avec leurs estimés

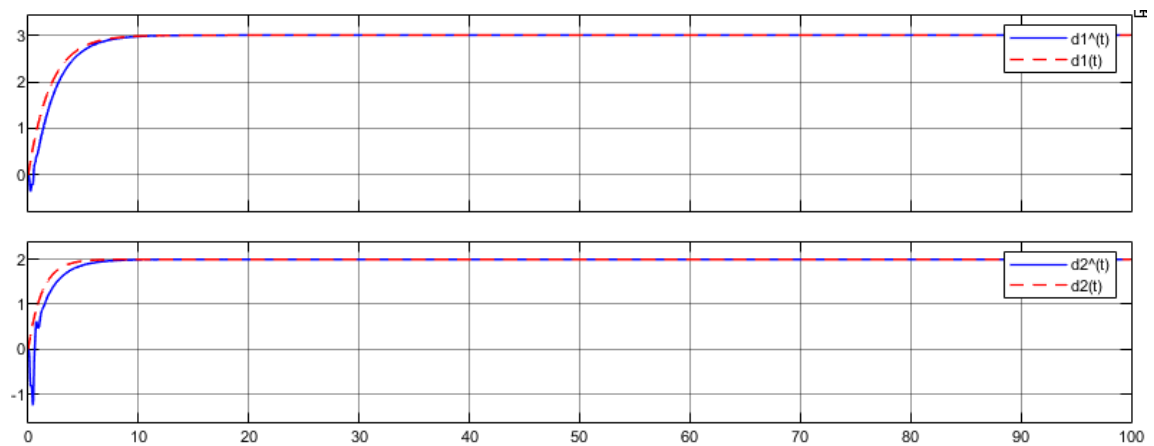


FIGURE 3.6 – Evolution dans le temps des entrées inconnues avec leurs estimées



Comme on a mentionné précédemment, l'observateur PI est dédié théoriquement pour la reconstruction des signaux constants, cependant, il peut dans certains cas pratiques estimer des signaux lentement variables, lorsque la fréquence de ces derniers augmente, la qualité d'estimation commence à dégrader, il faut faire appel alors à d'autres méthodes qui arrivent à estimer des signaux de hautes fréquences comme l'approche par observateur PMI. la figure suivante montre que cette approche peut être limitée dans certains cas.

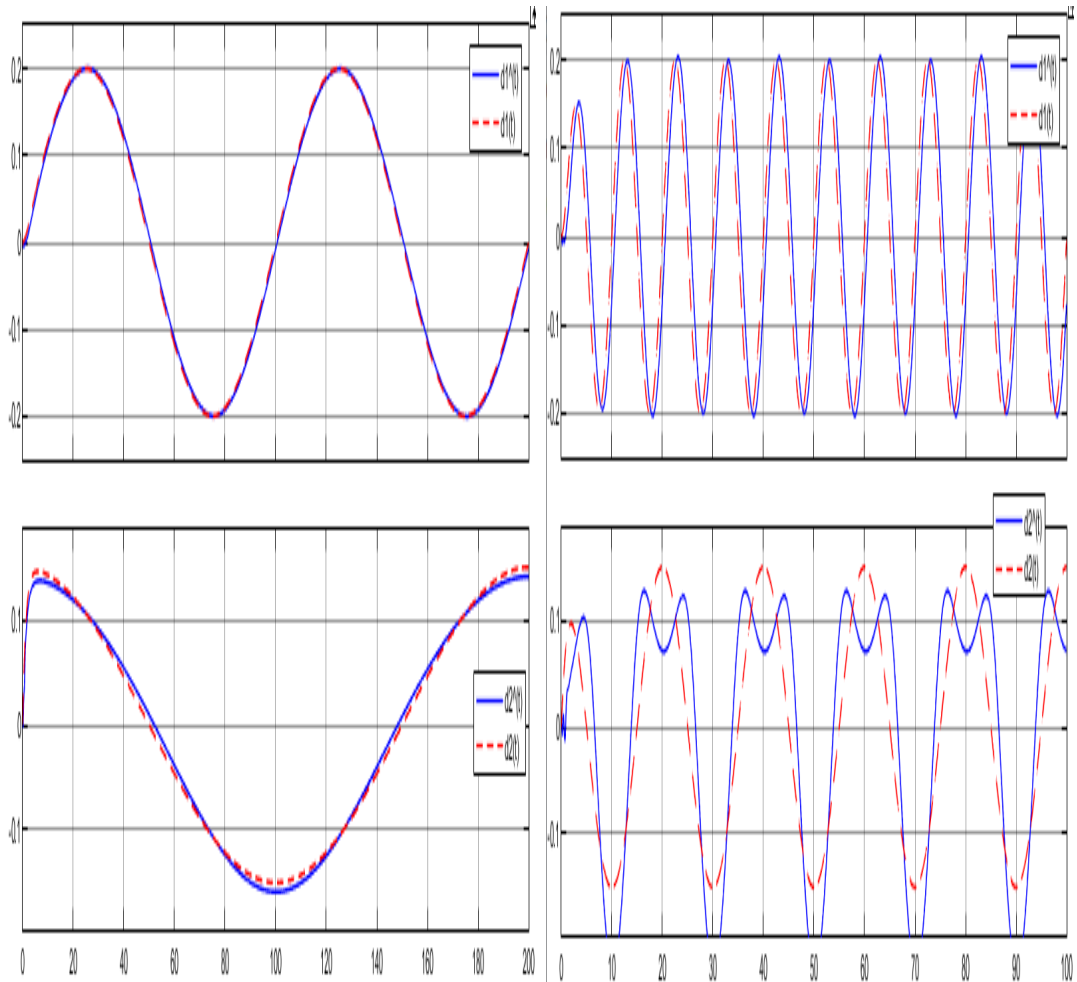


FIGURE 3.7 – influence de la fréquence sur l'estimation

## 3.5 Le bloc FTC

Le bloc FTC est chargé de déterminer ou reconfigurer la loi de commande de telle manière qu'elle soit tolérante aux défauts, il se base sur les résultats transmis par le bloc FDI afin de garder la stabilité et les performances initiales exigées par les objectifs de la commande dans les normes souhaitées. Le principe de fonctionnement a été expliqué dans la section 3.3 dont l'architecture est illustrée par la figure 3.2. Dans ce qui suit nous allons présenter à titre d'exemple quelques méthodes et stratégies de la commande tolérante aux défauts, on distingue les méthodes conçues pour les systèmes linéaires et celles dédiées aux systèmes non linéaires.

### 3.5.1 Méthodes pour les systèmes linéaires

1. **Méthode de la pseudo-inverse** : elle est utilisée pour les systèmes linéaires, l'idée sur laquelle elle se base repose sur la minimisation d'une norme de Frobenius  $\| \cdot \|_F$  entre le modèle en boucle fermée du système défectueux et celui de la référence, considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.20)$$

L'équation 3.20 décrit la dynamique du système dans le cas nominal, afin de le stabiliser ou d'obtenir des performances spécifiques on considère que le système est commandé par retour d'état  $u(t) = Kx(t)$  sous contrainte de commandabilité. En boucle fermée on a :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.21)$$

Maintenant, lorsqu'un défaut est survenu, la modification engendrée par le défaut conduit à la modélisation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f u_f(t) \\ y_f(t) = C_f x_f(t) \end{cases} \quad (3.22)$$

l'indice  $f$  indique une situation en défaut, la méthode de la pseudo-inverse consiste à déterminer la loi de commande  $u_f(t) = K_f x_f(t)$  pour le système défectueux, de telle façon que sa dynamique soit la plus proche possible du système sain 3.20, ce qui conduit à :

$$A + BK = A_f + B_f K_f \quad (3.23)$$

On veut alors minimiser le critère  $J$  donné par la norme de Frobenius suivante :

$$J = \|(A + BK) - (A_f + B_f K_f)\|_F$$

la minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés donne :

$$K_f = B_f^+(A + BK - A_f) \quad (3.24)$$

telle que  $B_f^+$  est la pseudo-inverse de la matrice  $B_f$ .

Le grand avantage de cette méthode est sa simplicité et la facilité de son implantation, cependant, elle présente l'inconvénient de ne pas garantir la stabilité en boucle fermée, des contraintes ont été imposées dans ce contexte mais ceci augmente considérablement le temps de calcul, un autre inconvénient réside dans le fait qu'elle exige une connaissance parfaite du modèle défectueux (les matrices  $A_f$ ,  $B_f$  et  $C_f$ ), ce qui risque de conduire à des incertitudes de modélisation, l'extension de cette méthode vers le cas non linéaire représente aussi une limitation.

2. **Méthode par placement de structure propre** : cette méthode vise à faire coïncider les valeurs propres des matrices du système sans défauts en boucle fermée (la matrice  $A + BK$ ) avec celles du système défaillant (la matrice  $A_f + B_f K_f$ ), et ceci en minimisant la norme  $2$   $\| \cdot \|_2$  entre les différents vecteurs propres correspondants, l'objectif étant de trouver le gain  $K_f$  qui arrive à vérifier ceci, en effet, la structure propre (valeurs et vecteurs propres) déterminent la réponse temporelle du système, le but est donc d'imposer une dynamique au système en défaut la plus proche possible de celle du système nominal, c'est une forme de placement de pôles de telle sorte qu'ils coïncident les uns avec les autres. Contrairement à la méthode de la pseudo-inverse, celle-ci ne pose pas beaucoup de problème en ce qui concerne la garantie de la stabilité en boucle fermée ou la charge de calcul, cependant elle présente également l'inconvénient de la difficulté de la prise en considération des incertitudes de modélisation, puisqu'elle suppose ainsi la possession et la connaissance des matrices  $A_f$ ,  $B_f$  et  $C_f$ .

### 3.5.2 Méthodes pour les systèmes non linéaires

Il existe plusieurs approches pour la commande FTC, dans ce qui suit nous citons quelques unes à titre d'exemple.

1. **Méthode basée sur banc de régulateurs** : elle repose sur l'existence d'un banc de régulateurs pré-calculés, chacun est dédié à un certain mode de fonctionnement, plusieurs scénarios sont envisagés, pour chacun un modèle est implanté et un régulateur est synthétisé, des algorithmes sont ainsi conçus pour la commutation entre les lois de commande suivant une certaine logique, l'idée principale consiste à déterminer le régulateur synthétisé auparavant qui correspond le mieux à la situation défectueuse, ceci est effectué par un superviseur constitué d'estimateurs qui utilisent les informations délivrées par ces derniers (bloc FDI figure 3.2) pour sélectionner le plus proche du système après comparaison entre les valeurs estimées et les valeurs mesurées, l'estimateur avec l'erreur minimale est choisi, le régulateur correspondant est appliqué pour élaborer la loi de commande, cependant, elle présente ainsi des limitations, lorsque des défauts non répertoriés apparaissent ou lorsque le nombre de modèle augmente avec l'augmentation des défauts considérés simultanés.
2. **Méthode basée sur la logique floue** : elle traite les systèmes non linéaires et inclut les multimodèles, la technique d'accommodation se base sur une commande floue adaptative permettant l'apprentissage en ligne de nouvelles dynamiques inconnues causées par l'apparition des défauts, cette approche active consiste à utiliser des modèles flous de types Takagi-Sugeno ainsi que des observateurs et des régulateurs flous.

Il existe une autre approche intéressante qui fait appel à un modèle de référence, elle est utilisée surtout pour la poursuite de trajectoire, les états et les défauts estimés par le bloc FDI sont utilisés par le bloc FTC pour ajouter un nouveau terme dans la loi de commande, en effet, si aucun défaut n'a été détecté le terme ajouté est quasiment nul, dans le cas contraire, l'estimation de l'amplitude de ce défaut et sa soustraction de la mesure ou la grandeur réelle conduit à ajouter un terme dans la loi de commande permettant ainsi la compensation du défaut. la figure 3.8 illustre le principe de cette approche.

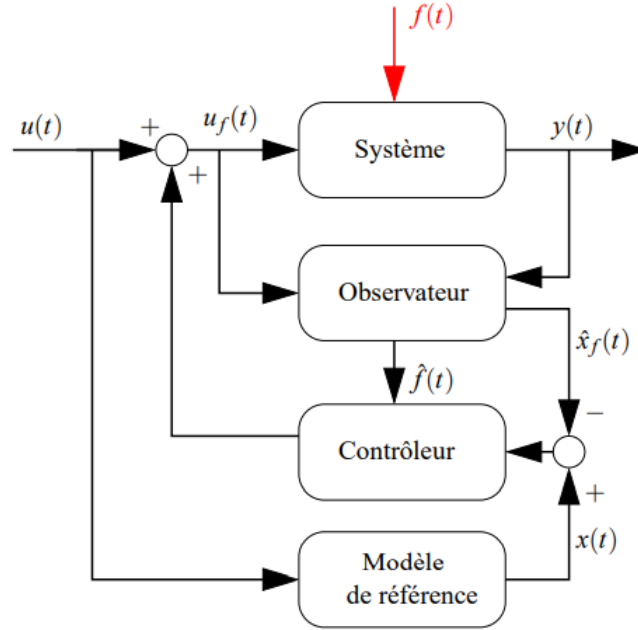


FIGURE 3.8 – FTC active à base de modèle de référence

La stratégie adoptée pour l'application sur les multimodèles repose sur l'utilisation d'un observateur PI (ou bien PMI), de manière à estimer les défauts, ensuite ils seront pris en compte pour la synthèse de la loi de commande comme expliquée précédemment. Si on considère que le multimodèle flou en présence de défauts est modélisé par la représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t))(A_i x_f(t) + B_i (u_f(t) + f(t))) \\ y_f(t) = C x_f(t) \end{cases} \quad (3.25)$$

la loi de commande est donnée par :

$$u_f(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) \left( u(t) - \hat{f}(t) + K_i (x(t) - \hat{x}_f(t)) \right) \quad (3.26)$$

### 3.5.3 Exemple

On propose de présenter les résultats avec le même exemple précédent, soit le système flou de type T-S tel que  $r = 2$  donné par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On considère dans un premier temps que deux défauts de type biais affectent le système l'un affecte l'actionneur et l'autre les capteurs, dans un second temps nous injectons des défauts variables et on va constater l'influence de la variation des signaux ainsi que leurs fréquences sur les résultats.

Les matrices de distribution sont données par :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

les résultats obtenus avec les différentes simulations sont illustrées par les figures suivantes :

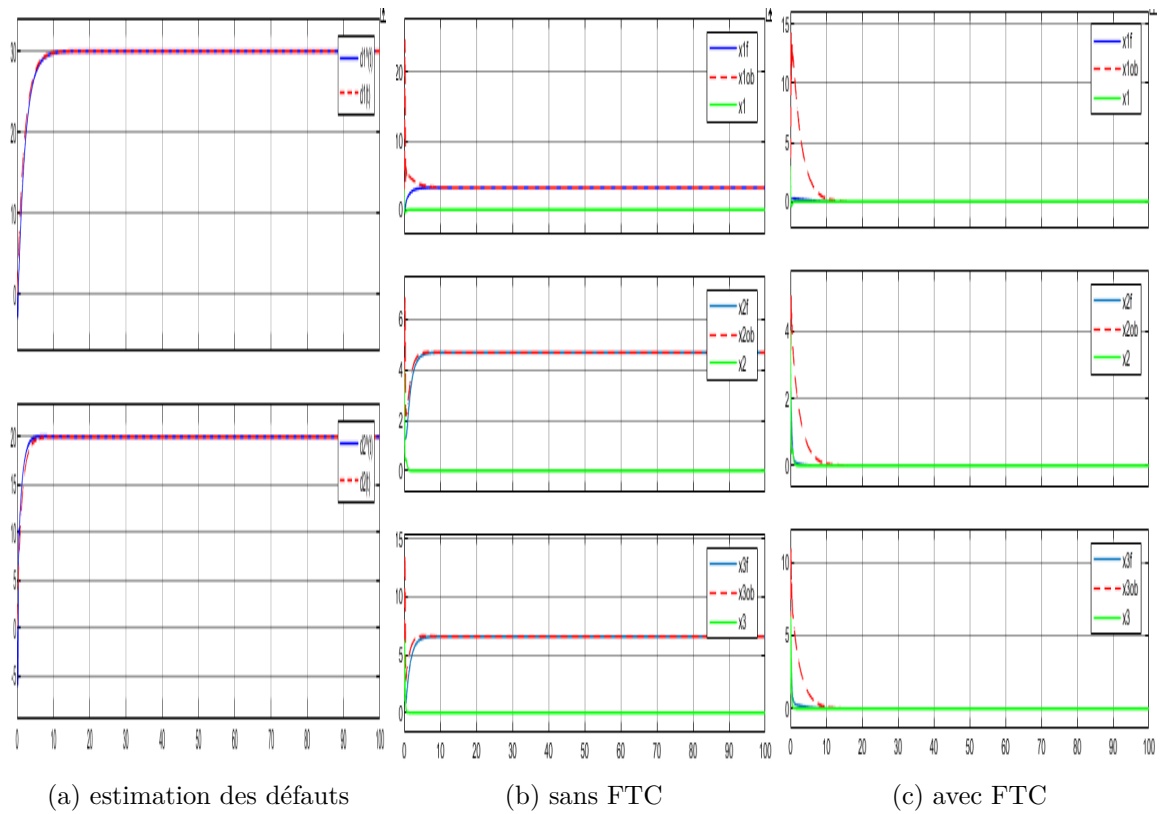


FIGURE 3.9 – illustration des résultats pour des défauts de type biais

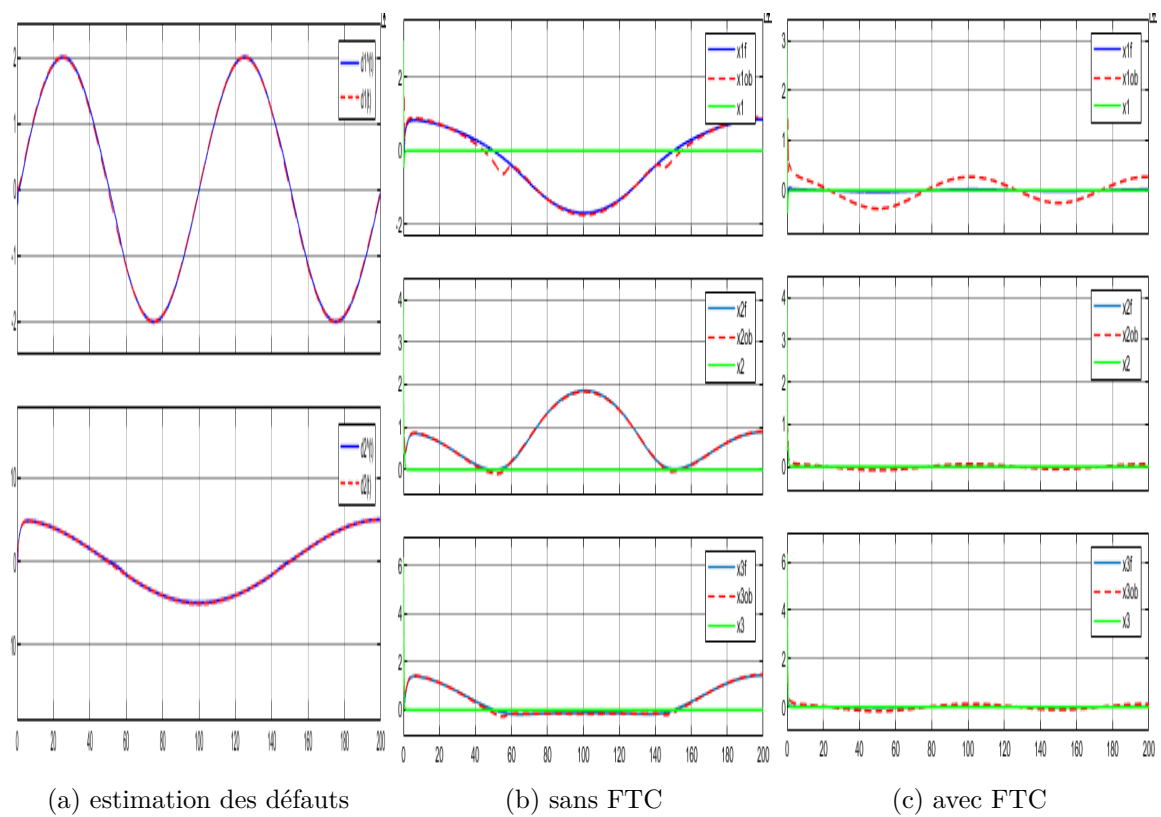


FIGURE 3.10 – illustration des résultats pour des défauts lentement variables

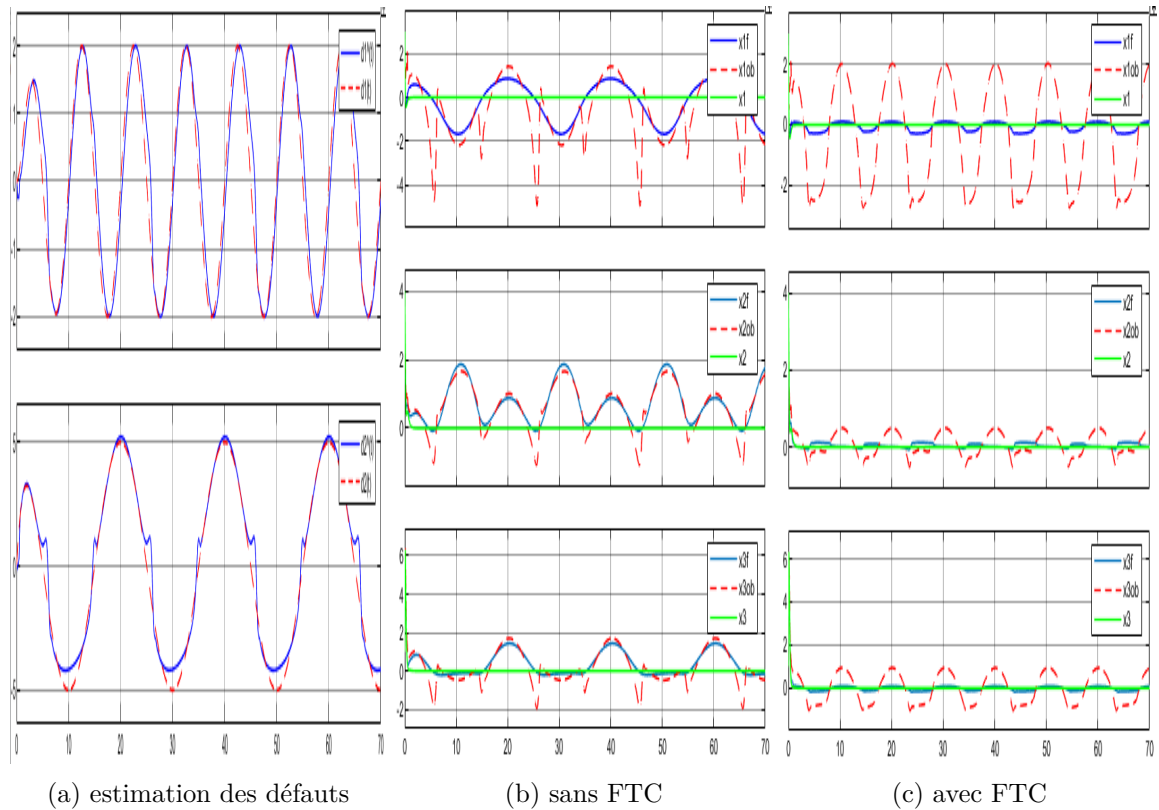


FIGURE 3.11 – illustration des résultats pour des défauts variants plus rapidement

On constate bien l'efficacité de la commande tolérante aux défauts, basée sur l'observateur PI et appliquée pour les multimodèles flous de type T-S, en effet, la figure 3.9 montre le cas des défauts de type biais, théoriquement, l'observateur PI est conçu pour l'estimation des signaux constants, les figures 3.10 et 3.11 illustrent le cas des défauts variants, plus ou moins rapidement, l'estimation peut être acceptable lorsqu'il s'agit d'un signal lentement variable, les résultats commencent à dégrader avec l'augmentation de la fréquence, l'approche utilisée s'avère un peu limitée en hautes fréquences, l'idée d'augmenter les gains peut servir à maintenir ou améliorer les performances, mais elle risque de provoquer l'instabilité, il est recommandé dans ce cas là de faire appel à des méthodes plus performantes et des observateurs plus robustes notamment l'observateur PMI développé pour un ensemble plus large des signaux. Cependant, le régulateur utilisé a pu garder une certaine robustesse, en outre, il s'agit d'une stabilisation, la consigne est toujours constante (stabilisation à l'origine), les états sont justes écartés ou déviés de leurs positions désirées lorsqu'un défaut est survenu, l'application de la commande FTC permet de remédier à ces défauts. l'application peut être étendue pour le cas de suivi de trajectoire comme le montrent les figures suivantes :

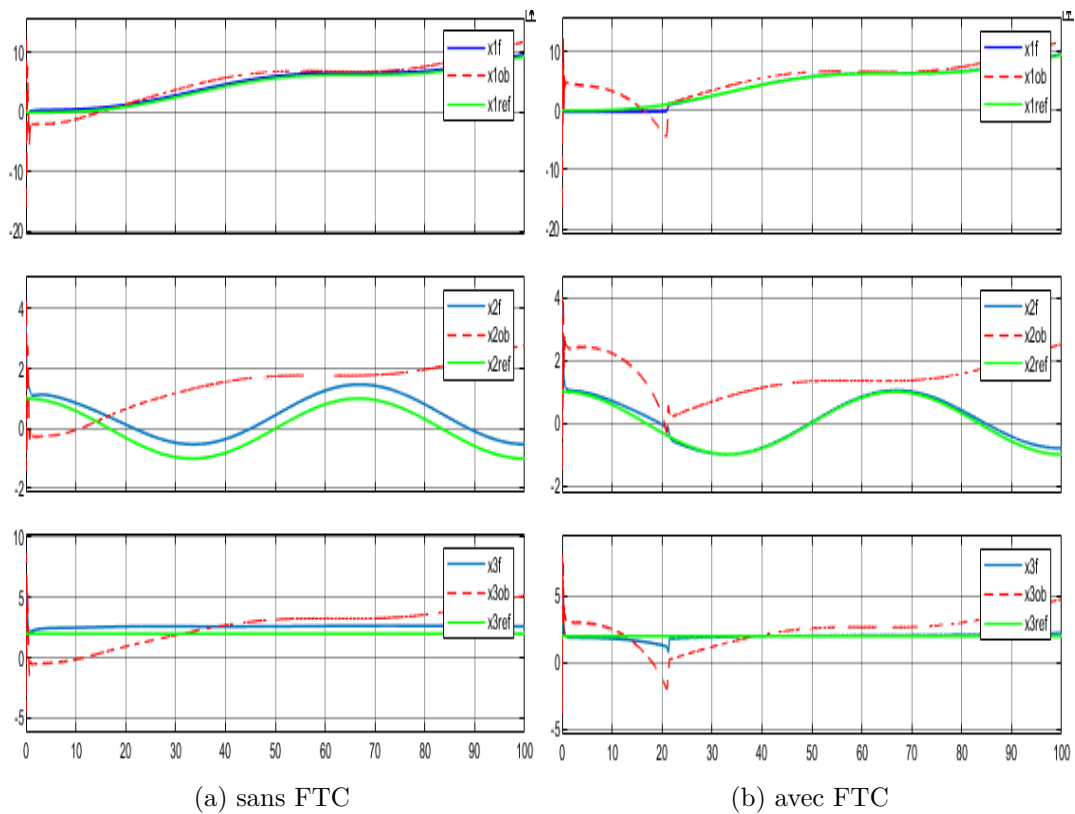


FIGURE 3.12 – suivi de trajectoire avec défaut lentement variable

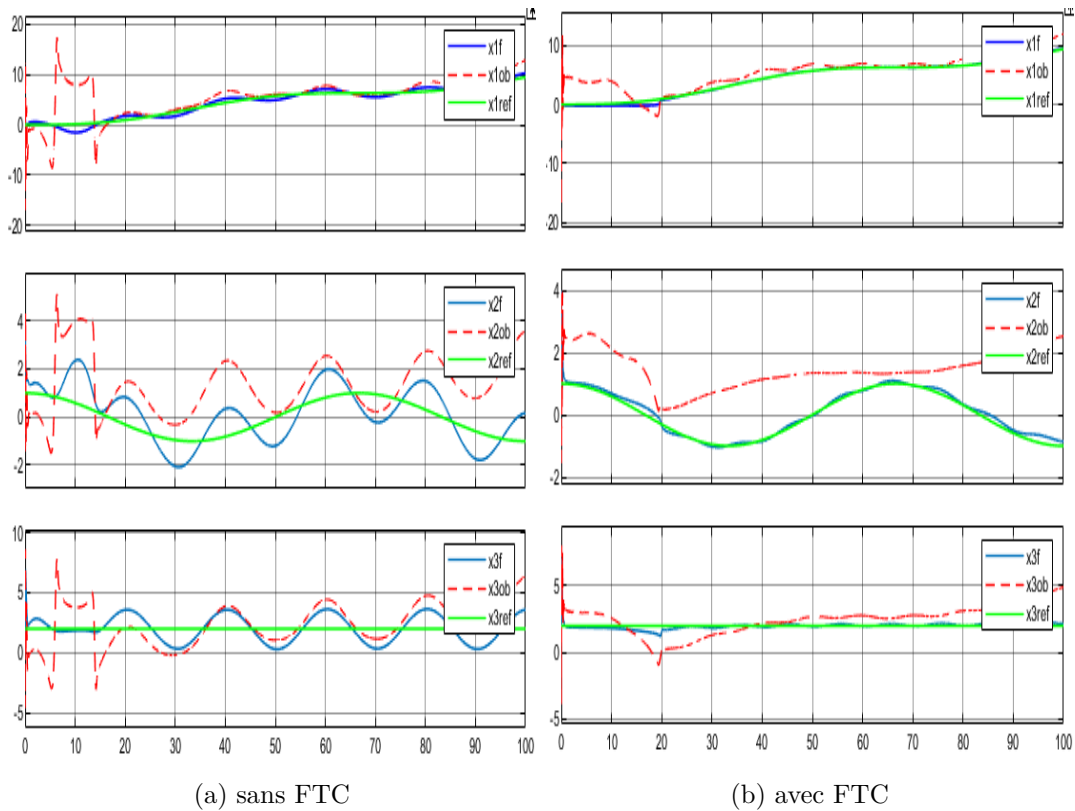


FIGURE 3.13 – suivi de trajectoire avec défauts variant plus rapidement



On remarque que la qualité des résultats de la stabilisation et de la poursuite de trajectoire est plus ou moins acceptable, l'estimation par observateur PI est clairement affectée par les différentes variations des signaux. Le régulateur quant à lui donne de bons résultats dans le cas de consigne constante ou faiblement variable, on rappelle toujours, que la variation rapide de la trajectoire de référence fait apparaître les limitations de la méthode utilisée, en outre, le régulateur conçu n'aura pas assez de temps pour suivre à tout moment ces variations, comme cité auparavant, l'augmentation des gains peut être utile pour l'accélération de la réponse et de la convergence mais elle est souvent à éviter car elle provoque des oscillations et peut influencer la robustesse ou causer l'instabilité, un compromis donc doit être assuré entre les performances et la robustesse.

## 3.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré pour présenter les différentes notions et outils nécessaires pour l'élaboration d'une commande tolérante aux défauts, dont les approches sont classées en approches passives et actives, l'intérêt majeur a été donné à la dernière approche, la première est juste une commande robuste sans aucune intervention en ligne. On a présenté le principe et la structure de l'approche active ainsi que quelques unes de ses méthodes. on a introduit également la notion d'observation des systèmes et son application pour les modèles flous T-S, en particulier, l'observateur PI qui a été utilisé pour l'estimation simultanée de l'état et des défauts, cette estimation était utilisée directement par le bloc FTC pour la compensation des défauts et l'élaboration de la nouvelle loi de commande, des exemples ont été présentés à la fin du chapitre afin de montrer les effets des différents facteurs affectant le système, la stratégie adoptée a donné de bons résultats pour des défauts lentement variables en particulier dans le cas de la stabilisation ou les consignes sont constantes. Les limitations de l'approche sont aussi présentées lorsque les dynamiques des références ou des défauts sont plus rapides. Dans tous les cas un compromis entre la rapidité et la stabilité doit être assuré (performances versus robustesse).

# Application à un quadrirotor

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>65</b>
<b>4.2</b>	<b>Modélisation du quadrirotor</b>	<b>65</b>
4.2.1	Modèle dynamique non linéaire du quadrirotor	65
4.2.2	Représentation T-S	69
4.2.3	Commande non linéaire par backstepping	73
<b>4.3</b>	<b>Commande à base des modèles flous T-S</b>	<b>76</b>
4.3.1	Stabilisation avec la loi de commande PDC	76
4.3.2	Poursuite de trajectoire	77
<b>4.4</b>	<b>Commande tolérante aux défauts</b>	<b>79</b>
4.4.1	Influence des défauts	79
4.4.2	FTC dans le cas de stabilisation	80
4.4.3	FTC dans le cas de suivi de trajectoire	83
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>83</b>

---

## 4.1 Introduction

On s'intéresse dans ce dernier chapitre à l'application des différentes notions présentées dans les chapitres précédents, en effet, elle sera effectuée sur un système non linéaire qui est le quadrirotor, dont la présentation et la description de ses mouvements est faite dans la section 1.5. Dans ce chapitre, on va utiliser le même modèle utilisé dans [22]. Ce dernier a été initialement présenté dans [20], le modèle non linéaire correspondant sera donné, par la suite, on le représente sous forme d'un multimodèle flou de type Takagi-Sugeno. Une validation du modèles T-S du quadrirotor est présentée, en premier lieu en boucle ouverte ensuite en boucle fermée avec une loi de commande non linéaire par Backstepping. Le système étant initialement instable en boucle ouverte, on a ainsi appliqué la loi de commande stabilisante PDC, avec aussi une application pour le suivi de trajectoire. Les techniques de diagnostic et de commande tolérante aux défauts présentées dans le chapitre 3 pour élaborer une loi de commande pour la stabilisation et la poursuite de trajectoire sont présentés avec détail à la fin du chapitre.

## 4.2 Modélisation du quadrirotor

### 4.2.1 Modèle dynamique non linéaire du quadrirotor

#### Equations du mouvement de translation et de rotation

Un quadrirotor est un robot mobile aérien sans pilote, une description rapide de sa structure et de ses mouvements a été faite dans le premier chapitre 1.5. On s'intéresse dans cette partie à analyser formellement ces mouvements et à faire les développements nécessaires afin d'aboutir à une modélisation mathématique sous forme d'une représentation d'état. Le modèle étudié est celui considéré dans les travaux de [20] et [22].

Comme mentionné dans la partie 1.5, l'analyse des mouvements présentés indiquent que le système est un système non linéaires avec un fort couplage, la tâche de modélisation est faite sous certaines hypothèses :

- La rigidité de la structure du véhicule.
- La symétrie parfaite de la structure, ce qui implique une matrice d'inertie diagonale.
- Les hélices sont rigides, l'effet de leur déformation lors de la rotation sera donc négligé.
- Le point d'origine du repère lié à la structure coïncide avec le centre de masse du solide.
- Une approximation du comportement aérodynamique est faite consiste à considérer que les forces de portance et de traînée sont proportionnelles aux carrés de la vitesse de rotation des rotors.

## 4.2. MODÉLISATION DU QUADRIROTOR

Le quadrirotor possède six degrés de liberté, il est représenté par six paramètres, trois grandeurs de position décrivant la position de son centre de masse, et trois angles de rotation qui sont appelés les angles d'Euler, le vecteur de position est  $[xyz]^T$ , la rotation autour de l'axe  $x$  est décrite par un angle de roulis ( $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ ), la rotation autour de l'axe  $y$  est donnée par un angle de tangage ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) et la rotation autour de l'axe  $z$  définit l'angle de lacet ( $-\pi < \psi < \pi$ ).

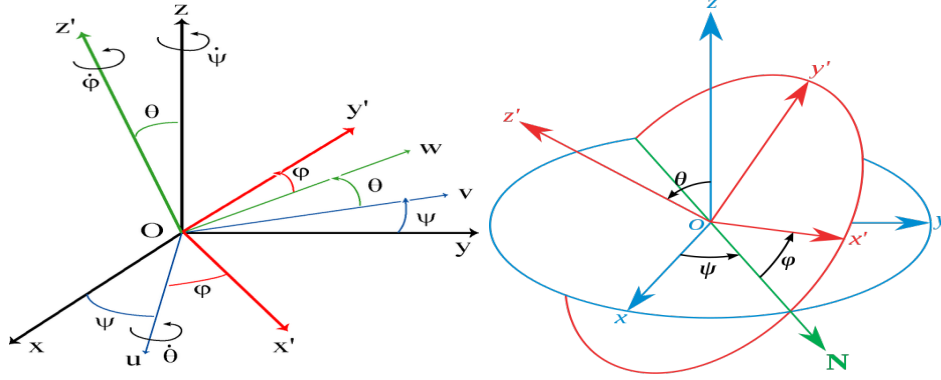


FIGURE 4.1 – Les angles d'Euler

L'analyse et le développement selon le formalisme de Newton-Euler conduisent aux équations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{K_{ftx}}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}u_x u_1 \\ \ddot{y} = -\frac{K_{fty}}{m}\dot{y} + \frac{1}{m}u_y u_1 \\ \ddot{z} = -\frac{K_{ftz}}{m}\dot{z} - g + \frac{\cos \phi \cos \theta}{m}u_1 \\ \ddot{\phi} = \frac{(I_y - I_z)}{I_x}\dot{\theta}\dot{\psi} - \frac{J_r}{I_x}\bar{\Omega}_r\dot{\theta} - \frac{K_{fax}}{I_x}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{I_x}u_2 \\ \ddot{\theta} = \frac{(I_z - I_x)}{I_y}\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{J_r}{I_y}\bar{\Omega}_r\dot{\phi} - \frac{K_{fay}}{I_y}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{I_y}u_3 \\ \ddot{\psi} = \frac{(I_x - I_y)}{I_z}\dot{\phi}\dot{\theta} - \frac{K_{faz}}{I_z}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{I_z}u_4 \end{cases} \quad (4.1)$$

avec :

$$\begin{cases} u_x = \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ u_y = \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ \bar{\Omega}_r = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \end{cases} \quad (4.2)$$

et :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -lb & 0 & lb \\ -lb & 0 & lb & 0 \\ d & -d & d & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

tels que  $\omega_i$  est la vitesse angulaire du moteur  $i$ ,  $i = \{1, \dots, 4\}$ ,  $l$  la longueur du bras, et  $b$  le coefficient de portance.

### La représentation d'état

Nous avons obtenu six équations différentielles non linéaires d'ordre 2, les équations précédentes montrent que le système est un système non linéaire fortement couplé. Plusieurs choix du vecteur d'état sont disponibles, nous gardons le même vecteur choisi dans [22] soit :

$$\begin{aligned} X &= [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T \\ &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12}]^T \end{aligned} \quad (4.4)$$

En adoptant cette représentation et en exploitant les équations 4.1 on obtient alors les équations d'états suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_7 \\ \dot{x}_2 = x_8 \\ \dot{x}_3 = x_9 \\ \dot{x}_4 = x_{10} \\ \dot{x}_5 = x_{11} \\ \dot{x}_6 = x_{12} \\ \dot{x}_7 = a_9 x_7 + \frac{b}{m} u_x (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4) \\ \dot{x}_8 = a_{10} x_8 + \frac{b}{m} u_y (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4) \\ \dot{x}_9 = a_{11} x_9 + \frac{b \cos(x_4) \cos(x_5)}{m} (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4) - g \\ \dot{x}_{10} = a_1 x_{11} x_{12} + a_2 x_{10}^2 + a_3 \bar{\Omega}_r x_{11} + b_1 l b (\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_2) \\ \dot{x}_{11} = a_4 x_{10} x_{12} + a_5 x_{11}^2 + a_6 \bar{\Omega}_r x_{10} + b_2 l b (\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1) \\ \dot{x}_{12} = a_7 x_{10} x_{11} + a_8 x_{12}^2 + b_3 d (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_4) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{(I_y - I_z)}{I_x}, \quad a_2 = \frac{-K_{fax}}{I_x}, \quad a_3 = \frac{-J_r}{I_x}, \quad a_4 = \frac{(I_z - I_x)}{I_y}, \quad a_5 = \frac{-K_{fay}}{I_y}, \quad a_6 = \frac{J_r}{I_y}, \\ a_7 = \frac{(I_x - I_y)}{I_z}, \quad a_8 = \frac{-K_{faz}}{I_z}, \quad a_9 = \frac{-K_{ftx}}{m}, \quad a_{10} = \frac{-K_{fty}}{m}, \quad a_{11} = \frac{-K_{ftz}}{m}, \quad b_1 = \frac{1}{I_x}, \\ b_2 = \frac{1}{I_y}, \quad b_3 = \frac{1}{I_z}, \quad \bar{\omega}_i = \omega_i^2 \end{array} \right.$$

Dans [22], la représentation des équations d'états 4.5 sous la forme 4.6 suivante a été proposée :

$$\begin{cases} \dot{X} = A(X)X + B(X)U + F_g \\ Y = CX \end{cases} \quad (4.6)$$

tel que :

$$A(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 x_{10} & 0 & a_1 x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 x_{11} & a_4 x_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 x_{10} & a_8 x_{12} & 0 \end{bmatrix}, \quad F_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 lb & 0 & b_1 lb & 0 & 0 & 0 & a_3 x_{11} & 0 \\ -b_2 lb & 0 & b_2 lb & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 x_{10} & 0 \\ b_3 d & -b_3 d & b_3 d & -b_3 d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$U = [\bar{\omega}_1 \quad \bar{\omega}_2 \quad \bar{\omega}_3 \quad \bar{\omega}_4 \quad \dot{\omega}_1 \quad \dot{\omega}_2 \quad \dot{\omega}_3 \quad \bar{\Omega}_r]^T$$

$$\text{où : } \begin{cases} \dot{\omega}_1 = bu_x (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4) \\ \dot{\omega}_2 = bu_y (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4) \\ \dot{\omega}_3 = b \cos(x_4) \cos(x_5) (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4) \end{cases}$$

### Les valeurs des paramètres du quadrirotor

Les différents paramètres présents dans les équations d'état sont obtenus à partir de [20] les valeurs numériques sont données dans le tableau suivant :

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$m$	$0,486kg$	$I_z$	$7,6566 \times 10^{-3}kg.m^2$
$g$	$9,806m/s^2$	$K_{fax}$	$5,5670 \times 10^{-4}N/rad/s$
$l$	$0,25m$	$K_{fay}$	$5,5670 \times 10^{-4}N/rad/s$
$b$	$2,9842 \times 10^{-5}N/rad/s$	$K_{faz}$	$6,3540 \times 10^{-4}N/rad/s$
$d$	$3,2320 \times 10^{-7}N.m/rad/s$	$K_{ftx}$	$5,5670 \times 10^{-4}N/m/s$
$J_r$	$2,8385 \times 10^{-5}kg.m^2$	$K_{fty}$	$5,5670 \times 10^{-4}N/m/s$
$I_x$	$3,8278 \times 10^{-3}kg.m^2$	$K_{ftz}$	$6,3540 \times 10^{-4}N/m/s$
$I_y$	$3,8288 \times 10^{-3}kg.m^2$		

TABLEAU 4.1 – Paramètres du modèle du quadrirotor utilisé [20]

### 4.2.2 Représentation T-S

On remarque dans la représentation 4.6 précédente que le modèle présente trois non linéarités qui sont :  $x_{10}$ ,  $x_{11}$  et  $x_{12}$ . On note :

$$\begin{cases} nl_1(x_{10}) = x_{10} \\ nl_2(x_{11}) = x_{11} \\ nl_3(x_{12}) = x_{12} \end{cases} \quad (4.7)$$

en outre, on définit les variables de prémisses comme suit :

$$\begin{cases} z_1 = x_{10} \\ z_2 = x_{11} \\ z_3 = x_{12} \end{cases} \quad (4.8)$$

On considère que ces termes sont bornés dans un compact tels que :  $(x_{10}, x_{11}, x_{12}) \in [-a, a]^3$  avec  $a > 0$ . En se basant sur le lemme 1, on peut écrire :

$$\begin{cases} nl_1(x_{10}) = a \cdot \omega_0^1(x_{10}) + (-a) \cdot \omega_1^1(x_{10}) \\ nl_2(x_{11}) = a \cdot \omega_0^2(x_{11}) + (-a) \cdot \omega_1^2(x_{11}) \\ nl_3(x_{12}) = a \cdot \omega_0^3(x_{12}) + (-a) \cdot \omega_1^3(x_{12}) \end{cases} \quad (4.9)$$

avec les fonctions d'appartenance données par :

$$\begin{cases} \omega_0^1(x_{10}) = \frac{x_{10} + a}{2a}, & \omega_1^1(x_{10}) = 1 - \omega_0^1(x_{10}) \\ \omega_0^2(x_{11}) = \frac{x_{11} + a}{2a}, & \omega_1^2(x_{11}) = 1 - \omega_0^2(x_{11}) \\ \omega_0^3(x_{12}) = \frac{x_{12} + a}{2a}, & \omega_1^3(x_{12}) = 1 - \omega_0^3(x_{12}) \end{cases} \quad (4.10)$$

On obtient alors un multimodèle flou de type Takag-Sugeno à huit règles ( $r = 2^3 = 8$ ) telles que :

**R1** : **Si**  $x_{10}$  est  $\omega_0^1(x_{10})$ ,  $x_{11}$  est  $\omega_0^2(x_{11})$  et  $x_{12}$  est  $\omega_0^3(x_{12})$  **Alors**  $\dot{X} = A_1X + B_1U + F_g$

**R2** : **Si**  $x_{10}$  est  $\omega_1^1(x_{10})$ ,  $x_{11}$  est  $\omega_0^2(x_{11})$  et  $x_{12}$  est  $\omega_0^3(x_{12})$  **Alors**  $\dot{X} = A_2X + B_2U + F_g$

**R3** : **Si**  $x_{10}$  est  $\omega_0^1(x_{10})$ ,  $x_{11}$  est  $\omega_1^2(x_{11})$  et  $x_{12}$  est  $\omega_0^3(x_{12})$  **Alors**  $\dot{X} = A_3X + B_3U + F_g$

**R4** : **Si**  $x_{10}$  est  $\omega_1^1(x_{10})$ ,  $x_{11}$  est  $\omega_1^2(x_{11})$  et  $x_{12}$  est  $\omega_0^3(x_{12})$  **Alors**  $\dot{X} = A_4X + B_4U + F_g$

**R5** : **Si**  $x_{10}$  est  $\omega_0^1(x_{10})$ ,  $x_{11}$  est  $\omega_0^2(x_{11})$  et  $x_{12}$  est  $\omega_1^3(x_{12})$  **Alors**  $\dot{X} = A_5X + B_5U + F_g$

**R6** : **Si**  $x_{10}$  est  $\omega_1^1(x_{10})$ ,  $x_{11}$  est  $\omega_0^2(x_{11})$  et  $x_{12}$  est  $\omega_1^3(x_{12})$  **Alors**  $\dot{X} = A_6X + B_6U + F_g$

**R7** : **Si**  $x_{10}$  est  $\omega_0^1(x_{10})$ ,  $x_{11}$  est  $\omega_1^2(x_{11})$  et  $x_{12}$  est  $\omega_1^3(x_{12})$  **Alors**  $\dot{X} = A_7X + B_7U + F_g$

**R8** : **Si**  $x_{10}$  est  $\omega_1^1(x_{10})$ ,  $x_{11}$  est  $\omega_1^2(x_{11})$  et  $x_{12}$  est  $\omega_1^3(x_{12})$  **Alors**  $\dot{X} = A_8X + B_8U + F_g$

Remarquons bien que c'est uniquement la dernière colonne de la matrice  $B(X)$  qui change, ainsi, seulement les éléments contenant les termes de linéarité de la matrice  $A(X)$  qui changent. On définit les matrices  $M_{A_i}$  et  $M_{B_i}$  qui contiennent les éléments qui diffèrent entre les matrice  $A_i$ ,  $B_i$  respectivement ; on a alors :

$$\begin{aligned}
 M_{A_1} &= \begin{bmatrix} a_2a & 0 & a_1a \\ 0 & a_5a & a_4a \\ 0 & a_7a & a_8a \end{bmatrix} & M_{A_2} &= \begin{bmatrix} -a_2a & 0 & a_1a \\ 0 & a_5a & -a_4a \\ 0 & -a_7a & a_8a \end{bmatrix} \\
 M_{A_3} &= \begin{bmatrix} a_2a & 0 & -a_1a \\ 0 & -a_5a & a_4a \\ 0 & a_7a & a_8a \end{bmatrix} & M_{A_4} &= \begin{bmatrix} -a_2a & 0 & -a_1a \\ 0 & -a_5a & -a_4a \\ 0 & -a_7a & a_8a \end{bmatrix} \\
 M_{A_5} &= \begin{bmatrix} a_2a & 0 & a_1a \\ 0 & a_5a & a_4a \\ 0 & a_7a & -a_8a \end{bmatrix} & M_{A_6} &= \begin{bmatrix} -a_2a & 0 & a_1a \\ 0 & a_5a & -a_4a \\ 0 & -a_7a & -a_8a \end{bmatrix} \\
 M_{A_7} &= \begin{bmatrix} a_2a & 0 & -a_1a \\ 0 & -a_5a & a_4a \\ 0 & a_7a & -a_8a \end{bmatrix} & M_{A_8} &= \begin{bmatrix} -a_2a & 0 & -a_1a \\ 0 & -a_5a & -a_4a \\ 0 & -a_7a & -a_8a \end{bmatrix} \\
 M_{B_1} &= \begin{bmatrix} a_3a \\ a_6a \end{bmatrix} & M_{B_2} &= \begin{bmatrix} a_3a \\ -a_6a \end{bmatrix} & M_{B_3} &= \begin{bmatrix} -a_3a \\ a_6a \end{bmatrix} & M_{B_4} &= \begin{bmatrix} -a_3a \\ -a_6a \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ainsi :

$$B_5 = B_1, B_6 = B_2, B_7 = B_3 \text{ et } B_8 = B_4$$

**Remarque 4.1.** *On vérifie bien la commandabilité et l'observabilité du système pour chaque sous-modèle flou, en effet tous les couples  $(A_i, B_i)$  (respectivement  $(A_i, C)$ ) sont localement commandables (respectivement observables), toutes les matrices de commandabilité (respectivement d'observabilité) correspondantes sont à rang plein égale à 12.*



les fonctions d'activation sont obtenues avec la formules :

$$\mu_{1+i_1+2\times i_2+4\times i_3}(z) = \prod_{j=1}^3 \omega_{i_j}^j(z_j)$$

avec  $(i_1, i_2, i_3) \in (0, 1)$ .

$i_1$	$i_2$	$i_3$	$i$	$\mu_i$
0	0	0	1	$\omega_0^1(x_{10}) \omega_0^2(x_{11}) \omega_0^3(x_{12})$
1	0	0	2	$\omega_1^1(x_{10}) \omega_0^2(x_{11}) \omega_0^3(x_{12})$
0	1	0	3	$\omega_0^1(x_{10}) \omega_1^2(x_{11}) \omega_0^3(x_{12})$
1	1	0	4	$\omega_1^1(x_{10}) \omega_1^2(x_{11}) \omega_0^3(x_{12})$
0	0	1	5	$\omega_0^1(x_{10}) \omega_0^2(x_{11}) \omega_1^3(x_{12})$
1	0	1	6	$\omega_1^1(x_{10}) \omega_0^2(x_{11}) \omega_1^3(x_{12})$
0	1	1	7	$\omega_0^1(x_{10}) \omega_1^2(x_{11}) \omega_1^3(x_{12})$
1	1	1	8	$\omega_1^1(x_{10}) \omega_1^2(x_{11}) \omega_1^3(x_{12})$

TABLEAU 4.2 – les fonctions d'activation

Les fonctions d'activations sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1(x_{10}, x_{11}, x_{12}) = \left(\frac{x_{10} + a}{2a}\right) \left(\frac{x_{11} + a}{2a}\right) \left(\frac{x_{12} + a}{2a}\right) \\ \mu_2(x_{10}, x_{11}, x_{12}) = \left(\frac{a - x_{10}}{2a}\right) \left(\frac{x_{11} + a}{2a}\right) \left(\frac{x_{12} + a}{2a}\right) \\ \mu_3(x_{10}, x_{11}, x_{12}) = \left(\frac{x_{10} + a}{2a}\right) \left(\frac{a - x_{11}}{2a}\right) \left(\frac{x_{12} + a}{2a}\right) \\ \mu_4(x_{10}, x_{11}, x_{12}) = \left(\frac{a - x_{10}}{2a}\right) \left(\frac{a - x_{11}}{2a}\right) \left(\frac{x_{12} + a}{2a}\right) \\ \mu_5(x_{10}, x_{11}, x_{12}) = \left(\frac{x_{10} + a}{2a}\right) \left(\frac{x_{11} + a}{2a}\right) \left(\frac{a - x_{12}}{2a}\right) \\ \mu_6(x_{10}, x_{11}, x_{12}) = \left(\frac{a - x_{10}}{2a}\right) \left(\frac{x_{11} + a}{2a}\right) \left(\frac{a - x_{12}}{2a}\right) \\ \mu_7(x_{10}, x_{11}, x_{12}) = \left(\frac{x_{10} + a}{2a}\right) \left(\frac{a - x_{11}}{2a}\right) \left(\frac{a - x_{12}}{2a}\right) \\ \mu_8(x_{10}, x_{11}, x_{12}) = \left(\frac{a - x_{10}}{2a}\right) \left(\frac{a - x_{11}}{2a}\right) \left(\frac{a - x_{12}}{2a}\right) \end{array} \right.$$

Enfin, le modèle non linéaire représenté par 4.5 et 4.6 est représenté avec un multimodèle flou de type Takagi-Sugeno dans le domaine  $(x_{10}, x_{11}, x_{12}) \in [-a, a]^3$  avec  $a > 0$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = \sum_{i=1}^8 \mu_i(x_{10}, x_{11}, x_{12})(A_i X + B_i U + F_g) \\ Y = CX \end{array} \right. \quad (4.11)$$

### La validation du modèle T-S en boucle ouverte

On simule les deux modèles : le modèle non linéaire et le modèle flou T-S en boucle ouverte, et on compare les différents résultats, pour le modèle T-S on choisit  $a = 1$ , la figure 4.2 présente les sorties des deux modèles :

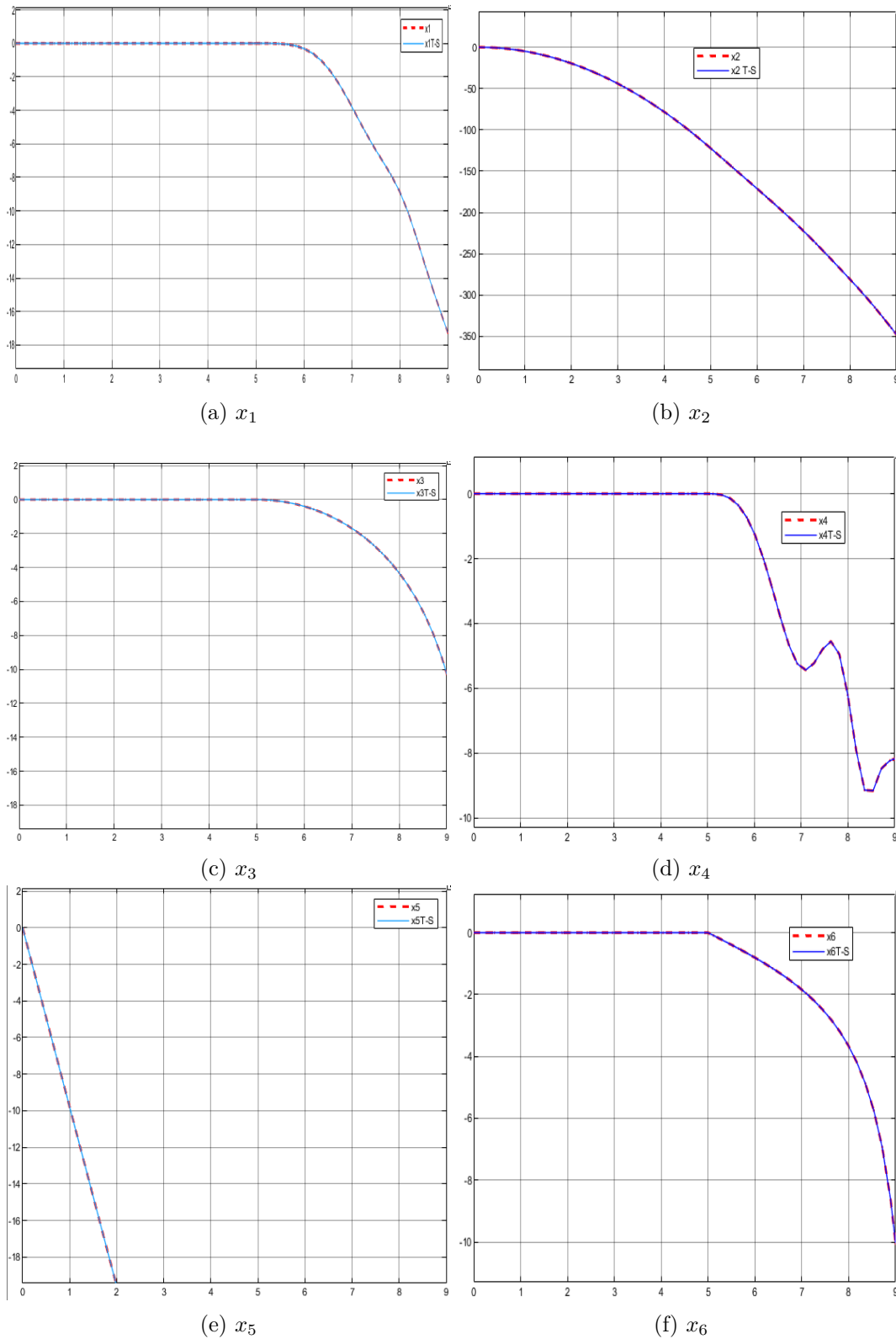


FIGURE 4.2 – les sorties des modèles non linéaires et T-S

On constate bien que le multimodèle flou de type T-S obtenu arrive à représenter fidèlement le modèle non linéaire du quadrirotor, les réponses temporelles sont quasi identiques, cependant, il est clair que le système est instable en boucle ouverte, afin de valider le modèle T-S en boucle fermée, on a besoin de le stabiliser.

### 4.2.3 Commande non linéaire par backstepping

Dans [22] une commande non linéaire par mode glissant a été conçue et appliquée sur le multimodèle flou T-S du quadrirotor, tandis que dans [20] une commande par Backstepping a été appliquée directement sur le modèle non linéaire. Dans cette section, on propose d'appliquer cette même commande avec d'autres trajectoires désirées sur le multimodèle 4.11 qu'on a obtenu. Le quadrirotor étant sous actionné, six grandeurs sont commandées par quatre actionneurs, le couplage entre les états permet d'avoir des relations donnant des contraintes non holonomes, l'architecture suivante présentée dans [22] est adoptée :

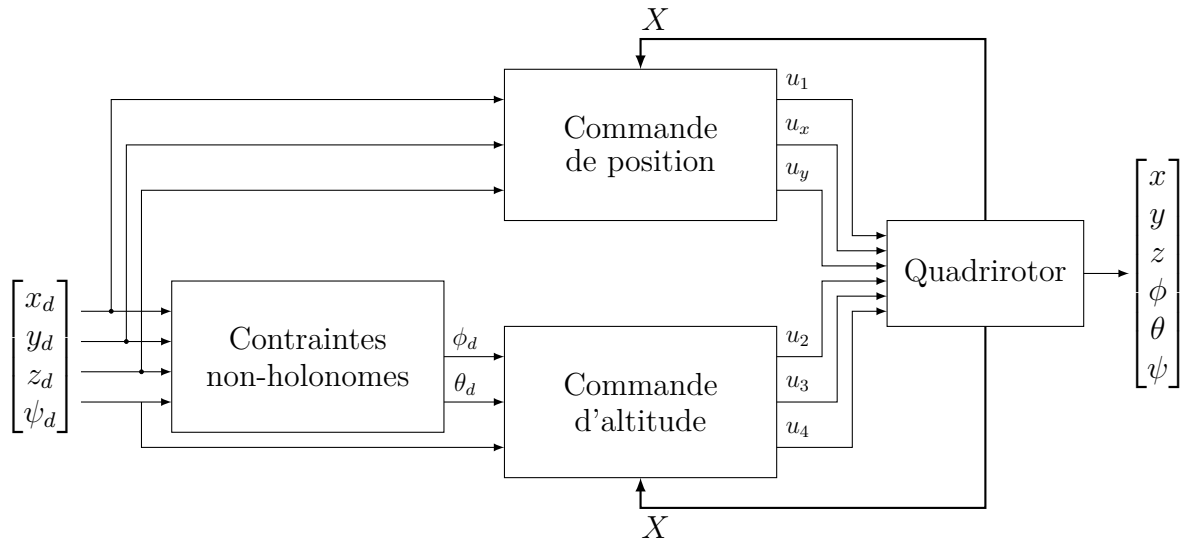


FIGURE 4.3 – architecture proposée pour la commande du quadrirotor. [22]

les expressions des contraintes non holonomes en fonction des grandeurs et paramètres du système sont données par :

$$\begin{cases} \phi_d = \arcsin \left( \frac{-(\ddot{x}_d + a_9 \dot{x}_d) \sin(\psi_d) + (\ddot{y}_d + a_{10} \dot{y}_d) \cos(\psi_d)}{\sqrt{(\ddot{x}_d + a_9 \dot{x}_d)^2 + (\ddot{y}_d + a_{10} \dot{y}_d)^2 + (\ddot{z}_d + g + a_{11} \dot{z}_d)^2}} \right) \\ \theta_d = \arctan \left( \frac{(\ddot{x}_d + a_9 \dot{x}_d) \cos(\psi_d) + (\ddot{y}_d + a_{10} \dot{y}_d) \sin(\psi_d)}{\ddot{z}_d + g + a_{11} \dot{z}_d} \right) \end{cases} \quad (4.12)$$

La loi de commande par Backstepping synthétisée dans [20] est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{m}{\cos(x_4) \cos(x_5)} (g - a_{11}x_9 + \ddot{z}_d + K_{11}(e_9 - K_{11}e_3) + K_{12}e_9 + e_3) \\ u_x = \frac{m}{u_1} (-a_9x_7 + \ddot{x}_d + K_7(e_7 - K_{11}e_1) + K_8e_7 + e_1) / u_1 \neq 0 \\ u_y = \frac{m}{u_1} (-a_{10}x_8 + \ddot{y}_d + K_9(e_8 - K_9e_2) + K_{10}e_8 + e_2) / u_1 \neq 0 \\ u_2 = \frac{1}{b_1} (-a_1x_{11}x_{12} - a_2x_{10}^2 - a_3\bar{\Omega}_r x_{11} + \ddot{\phi}_d + K_1(e_{10} - K_1e_4) + K_2e_{10} + e_4) \\ u_3 = \frac{1}{b_2} (-a_4x_{10}x_{12} - a_5x_{11}^2 - a_6\bar{\Omega}_r x_{10} + \ddot{\theta}_d + K_3(e_{11} - K_3e_5) + K_4e_{11} + e_5) \\ u_4 = \frac{1}{b_3} (-a_7x_{10}x_{11} - a_8x_{12}^2 + \ddot{\psi}_d + K_5(e_{12} - K_5e_6) + K_6e_{12} + e_6) \end{array} \right. \quad (4.13)$$

avec :  $K_i \in \mathbb{R}, i = \{1, \dots, 12\}$

Les erreurs  $e_j, j = \{1, \dots, 12\}$  sont définies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} e_1 = x_d - x_1, & e_7 = \dot{x}_d + k_7e_1 - x_7 \\ e_2 = y_d - x_2, & e_8 = \dot{y}_d + k_8e_2 - x_8 \\ e_3 = z_d - x_3, & e_9 = \dot{z}_d + k_{11}e_3 - x_9 \\ e_4 = \phi_d - x_4, & e_{10} = \dot{\phi}_d + k_1e_4 - x_{10} \\ e_5 = \theta_d - x_5, & e_{11} = \dot{\theta}_d + k_3e_5 - x_{11} \\ e_6 = \psi_d - x_6, & e_{12} = \dot{\psi}_d + k_5e_6 - x_{12} \end{array} \right.$$

dans les simulations on a pris :  $K_i = 2, i = \{1, \dots, 12\}$

Les trajectoires désirées sont choisies comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_d = -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{\pi}{2}t \\ y_d = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ z_d = 2 \\ \psi_d = \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$$

### La validation du modèle T-S en boucle fermée

La figure 4.4 illustre les résultats de la simulation des deux modèles en boucle fermée après l'application de la commande par Backstepping 4.13.

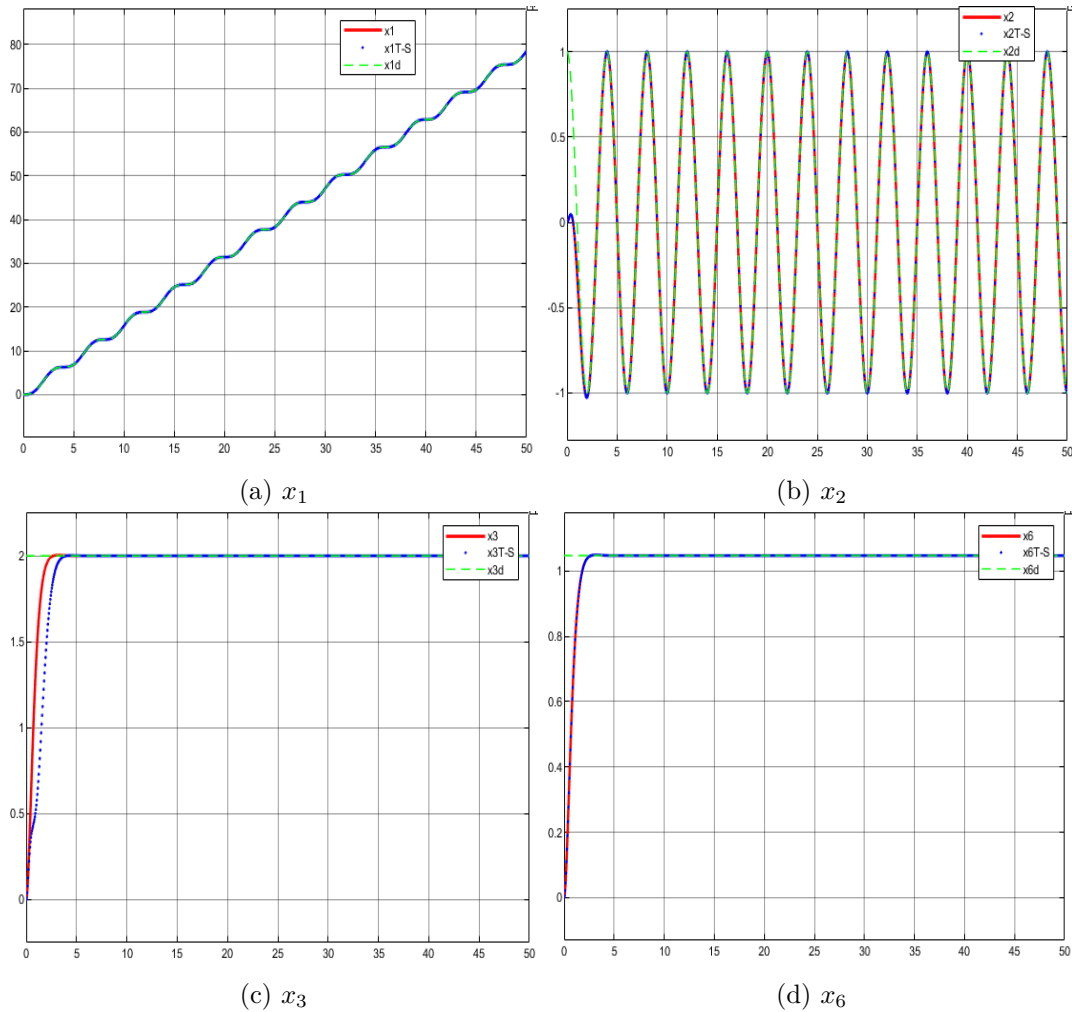


FIGURE 4.4 – les sorties des modèles non linéaire et T-S pour la poursuite de trajectoire désirée

les erreurs entre les états du modèle non linéaire et ceux du multimodèle flou T-S sont de l'ordre de  $10^{-16}$  comme le montre la figure 4.5.

La représentation du quadrirotor par l'approche multimodèle flou de type Takagi-Sugeno a donné de bons résultats et a permis de représenter sa dynamique et son modèle non linéaire avec une très bonne précision. Dans le reste de ce manuscrit on s'intéresse à cette représentation, les applications et les simulations seront effectuées désormais sur la base de cette modélisation.

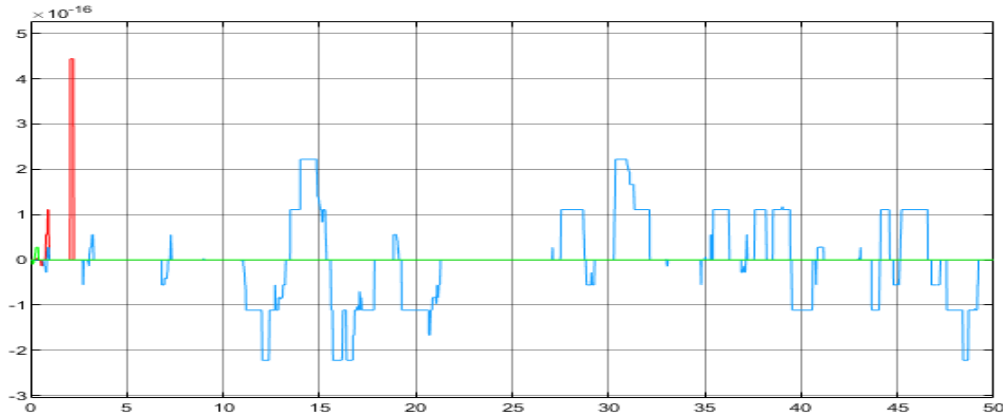


FIGURE 4.5 – les erreurs entre le modèle non linéaire et le multimodèle flou en boucle fermée

### 4.3 Commande à base des modèles flous T-S

On s'intéresse dans cette section à l'application des techniques et méthodes présentées dans le chapitre 2 pour la stabilisation du modèle flou T-S du quadricoptère.

#### 4.3.1 Stabilisation avec la loi de commande PDC

Soit le multimodèle T-S donné par 4.11. Le but est de trouver la commande  $U$  qui arrive à stabiliser le système en utilisant la commande PDC.

La loi de commande PDC est donnée par :

$$U(t) = - \sum_{i=1}^{r=8} \mu_i(z(t)) K_i X(t) \quad (4.14)$$

Avec cette loi de commande, le modèle flou T-S 4.11 devient :

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (A_i - B_i K_j) X(t) + F_g \quad (4.15)$$

La détermination des gains  $K_i, i = 1, \dots, 8$  revient à résoudre les LMI 2.16. On choisit le vecteur des conditions initiales comme suit :

$$x_0 = [3 \quad 5 \quad 4 \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01]^T$$

Les résultats de simulation sont représentés sur la figure 4.6, on constate bien que le régulateur flou conçu avec la commande PDC arrive à stabiliser le système autour de l'origine. Cependant il est possible d'améliorer les performances, limiter les dépassements et augmenter la rapidité de convergence, par manipulation des LMI, parfois ceci conduit à l'augmentation des gains ce qui peut risquer de provoquer des oscillations indésirables ou influencer négativement sur la robustesse, donc il faut toujours trouver un compromis qui garantit des performances satisfaisantes tout en gardant la robustesse.

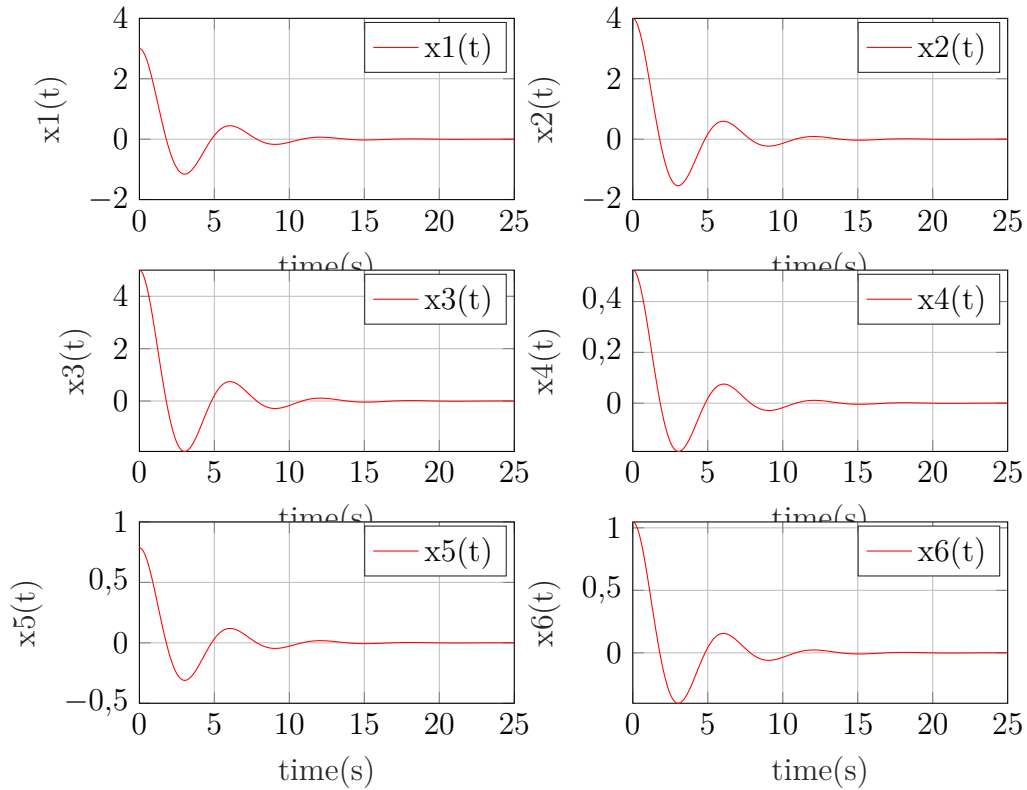


FIGURE 4.6 – Convergence des états vers l'origine

### 4.3.2 Poursuite de trajectoire

Dans cette section, on considère la loi de commande permettant de réaliser la poursuite de trajectoire d'un modèle de référence. La stratégie adoptée est expliquée dans la section 2.4, elle consiste à considérer un nouvel état  $\tilde{X}$  qui représente l'erreur de poursuite  $\tilde{X}(t) = X(t) - X_d(t)$  dont l'équation d'état est donnée par 2.24, l'objectif est d'assurer la convergence vers l'origine de cette erreur. En effet, lorsque  $\tilde{X}(t) \rightarrow 0$  alors  $X(t) \rightarrow X_d(t)$ , le régulateur flou correspondant est donné par la relation 2.25, et le multimodèle peut être représentée d'une façon équivalente par 2.26.

On choisit les références à poursuivre comme suit :

$$\begin{cases} x_d = -\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{\pi}{2}t \\ y_d = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ z_d = 2 \\ \psi_d = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

L'application sur le multimodèle 4.11 a permis d'avoir les résultats suivants :

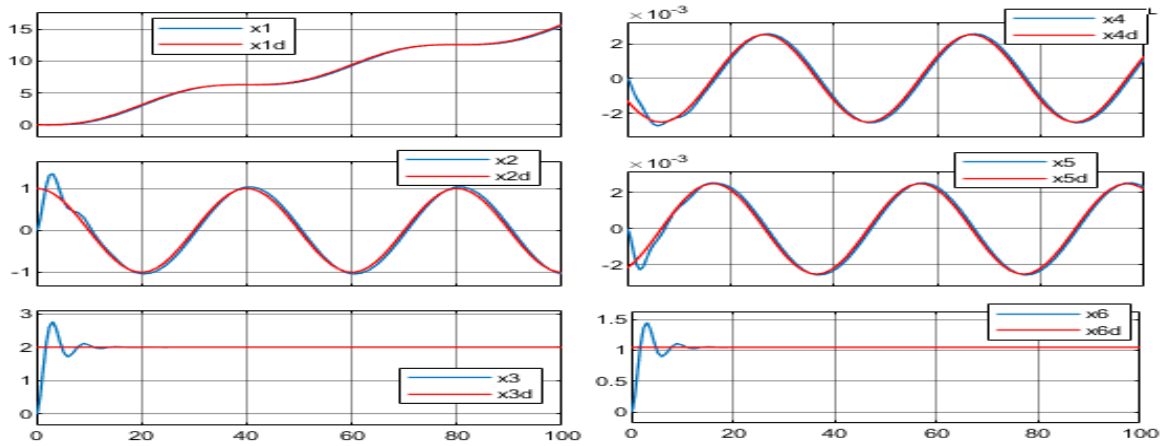


FIGURE 4.7 – suivi des trajectoires désirées

Les résultats précédents de la stabilisation et de la poursuite de trajectoire montrent bien l'avantage offert par l'approche multimodèle générant des modèles flous de type Takagi-Sugeno, en effet, elle offre la possibilité d'appliquer et d'étendre les méthodes conçues pour des systèmes linéaires au cas des systèmes non linéaires, ce qui est très intéressant pour la commande des systèmes complexes du fait qu'il permet de diminuer la complexité rencontrée lors du traitement des systèmes non linéaires. Ainsi, le régulateur flou développé avec la méthode PDC utilise le même ensemble flou que le système, ce qui présente un autre avantage. Cependant, l'augmentation des gains peut servir à améliorer les performances mais ça risque de provoquer des oscillations ou des comportements dynamiques indésirables, le choix des méthodes, des contraintes et des gains doit se faire d'une manière judicieuse.



## 4.4 Commande tolérante aux défauts

### 4.4.1 Influence des défauts

L'apparition d'un défaut quelconque à n'importe quel moment peut causer des performances dégradées ou provoquer même l'instabilité du système comme on va montrer dans cette partie.

On considère le multimodèle flou 4.1 représentant le modèle du quadrirotor, il est piloté par quatre actionneurs qui génèrent les commandes  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$  et  $u_4(t)$ , en pratique se sont des moteurs dont chacun a une vitesse de rotation  $\omega_i$ . On applique la commande 4.13 et on injecte des défauts actionneurs qui sont des biais sur  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  et  $\omega_4$  tels que :

$$f_1(t) = \begin{cases} -60 & 5 < t < 10 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} -6 & 24 < t < 29 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} -7 & 11 < t < 16 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad f_4(t) = \begin{cases} -11 & 17 < t < 22 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

les déviations et les instabilités provoquées sont illustrées par la figure suivante :

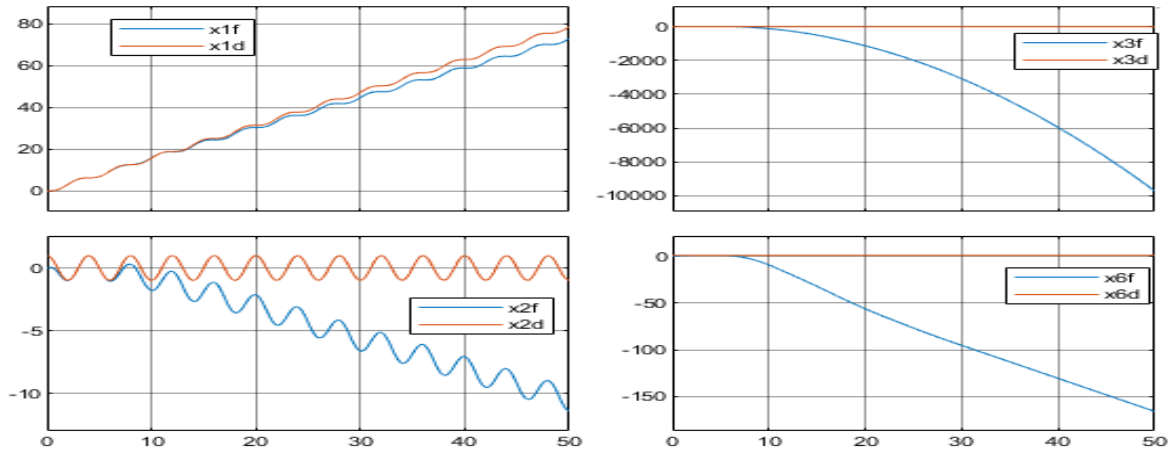


FIGURE 4.8 – suivi de trajectoire en présence de défauts actionneur

De même, les défauts capteur influencent sur la mesure, un capteur défaillant peut être bloqué ou affecté par un défaut de type biais ou dérive, il donne des valeurs erronées, ce qui influence négativement sur le système en boucle fermée et fausse la loi de commande puisque les mesures sont nécessairement utilisées dans la synthèse de la commande. On injecte quatre défauts de type biais affectant l'altitude  $z(t)$  et les trois angles de rotations, comme suit :

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.5 & 20 < t < 25 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} 0.5 & 26 < t < 35 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} 0.5 & 40 < t < 43 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad f_4(t) = \begin{cases} 0.5 & 42 < t < 47 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

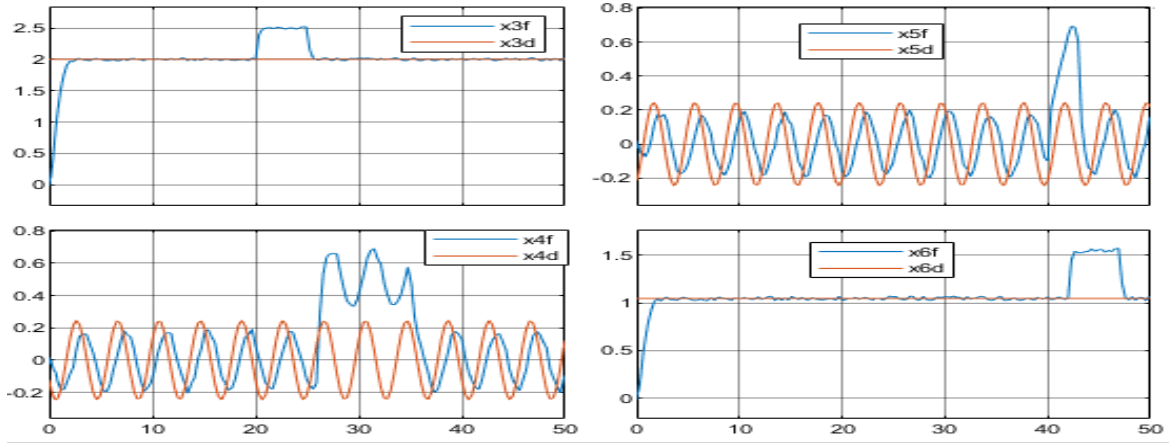


FIGURE 4.9 – suivi de trajectoire en présence de défauts capteur

La conception d'une stratégie de commande tolérante aux défauts est indispensable dans un cas pareil, le comportement face à une telle situation dépend des caractéristiques du système et de l'amplitude et de la nature du défaut, dans le cas d'un faible défaut, il suffit d'assurer une certaine robustesse pour remédier aux défauts, c'est ce qu'on appelle l'approche FTC passive, dans des cas plus graves, cette dernière risque de ne plus être efficace, on fait appel alors à l'approche active, c'est le sujet des parties suivantes.

#### 4.4.2 FTC dans le cas de stabilisation

On souhaite utiliser les concepts développés dans le chapitre 3 pour créer des commandes tolérantes aux défauts appliquées au quadrirotor représenté par le multimodèle flou T-S 4.1, en effet, la stratégie consiste à concevoir des observateurs PI 3.4.2 pour estimer les défauts, ensuite on va tenir compte de ces estimations pour élaborer la loi de commande, on a considéré des défauts actionneur pour le recalcul de la loi de commande et la correction des défauts, d'une façon analogue et intuitive, lorsqu'il s'agit d'un défaut capteur et sous contrainte que l'observateur soit robuste, la comparaison entre les valeurs mesurées et estimées indiquent la présence ou l'absence du défaut, la détection ensuite l'estimation de ce dernier et sa soustraction de la mesure réelle implique l'ajout d'un terme dans la loi de commande et permet la compensation du défaut.

On conçoit l'observateur PI ayant la forme 3.14 /3.15, la résolution des LMI 3.18 permet d'obtenir les gains  $L_i, i = 1, \dots, 8$  selon la formule 3.19.

On considère dans un premier temps deux défauts actionneur, leurs estimations sont données par la figure 4.10

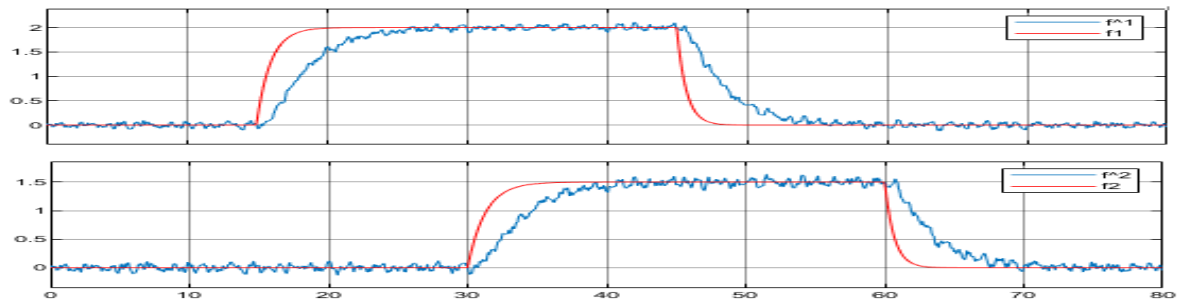


FIGURE 4.10 – estimation des deux défauts actionneur avec un observateur PI

On peut accélérer la réponse et augmenter la rapidité en augmentant les gains mais ceci peut faire apparaître des oscillations et créer des dépassements. On injecte maintenant quatre défauts actionneur, on suppose que les actionneurs ne peuvent pas être tous défaillants en même temps, on considère que les défauts sont des créneaux espacés dans le temps, l'estimation de ces défauts par un observateur PI n'a pas donné de bons résultats, en effet elle a donné le résultat suivant :

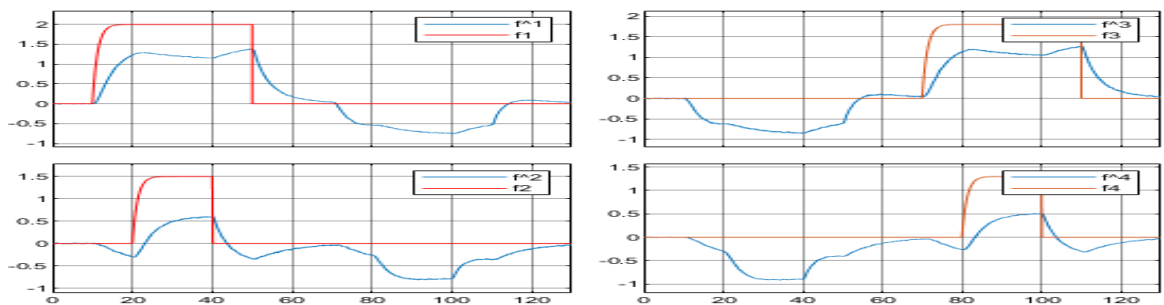


FIGURE 4.11 – estimation des quatre défauts actionneur avec un observateur PI

Il est clair que cette estimation est de mauvaise qualité, on propose alors de ne pas se limiter à un seul observateur PI, mais d'utiliser un banc d'observateur, afin d'améliorer les performances et la précision de l'estimation, l'utilisation de deux observateurs PI tels que chacun estime deux défauts a donné de meilleurs résultats :

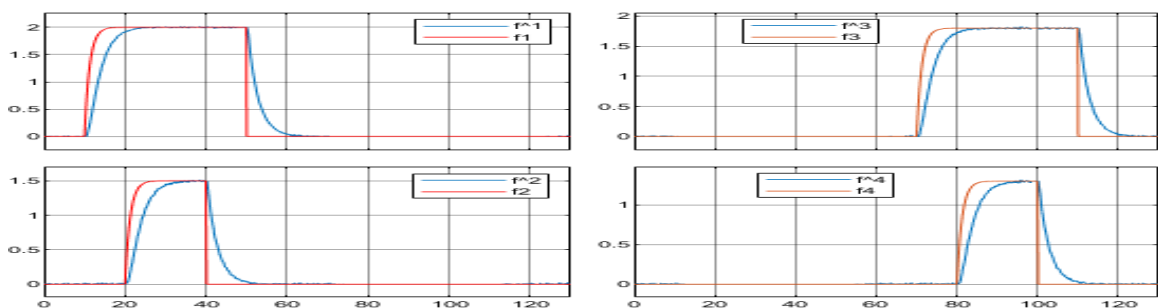


FIGURE 4.12 – estimation des quatre défauts actionneur avec deux observateurs PI

#### 4.4. COMMANDE TOLÉRANTE AUX DÉFAUTS

L'application de la commande FTC a permis de garder la stabilité avec de bonnes performances malgré l'occurrence des défauts, les réponses temporelles sont représentées par la figure 4.13 comme suit :

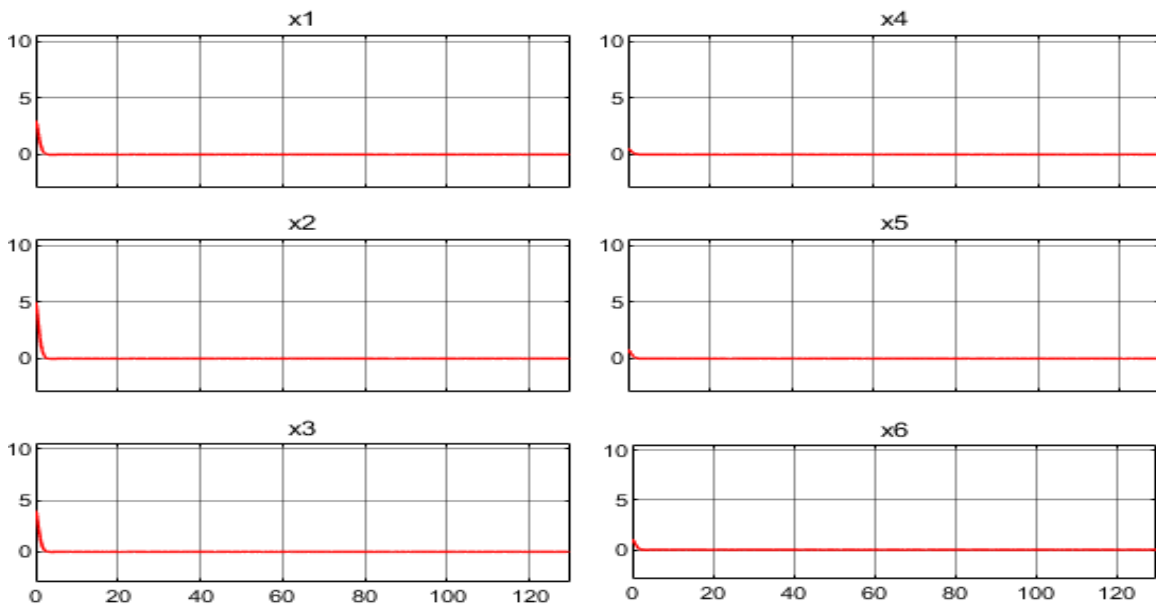


FIGURE 4.13 – stabilisation en présence des défauts

Dans le cas d'un biais il y a un décalage dans la valeur mesurée, la commande FTC active permet le réglage de cette déviation.

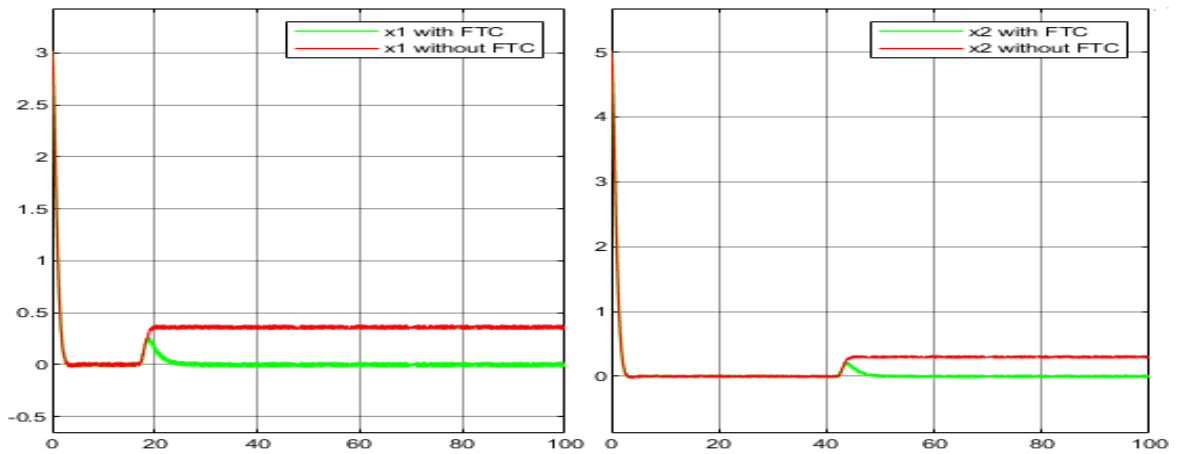


FIGURE 4.14 – stabilisation avec commande FTC

### 4.4.3 FTC dans le cas de suivi de trajectoire

On considère les mêmes étapes pour le cas de poursuite de trajectoire, on représente les trajectoires souhaitées et les états des systèmes en défauts et ceux du système soumis à la commande FTC sur la même figure :

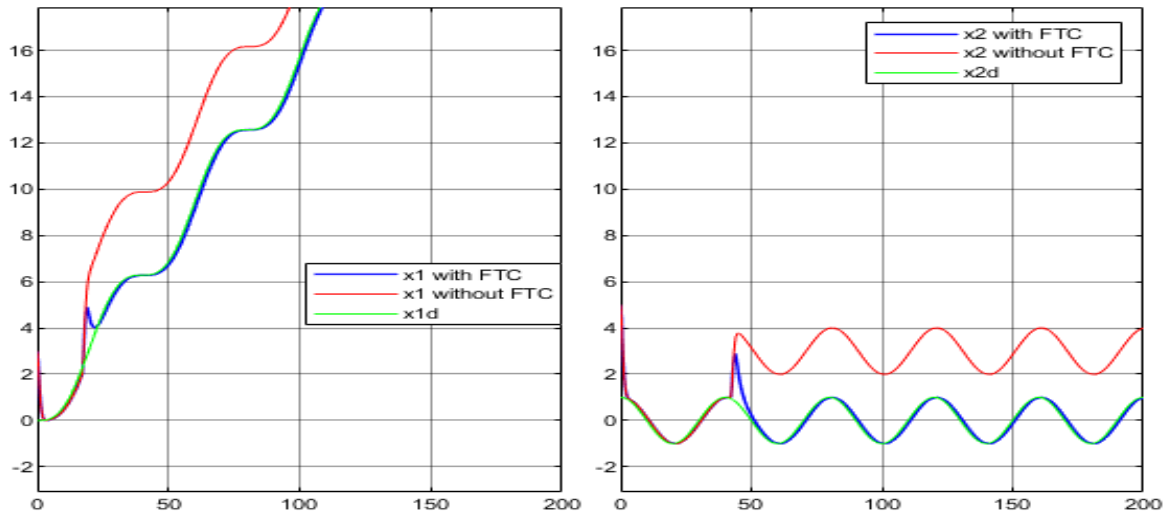


FIGURE 4.15 – suivi de trajectoire sans et avec la commande FTC

On constate bien l'effet de la commande FTC qui permet la compensation des défauts. Cela permet la poursuite parfaite des trajectoires désirées.

## 4.5 Conclusion

Ce dernier chapitre a été consacré à l'application des commandes développées précédemment à un modèle flou de type T-S d'un quadrirotor. La modélisation du quadrirotor a donné lieu à un modèle non linéaire fortement couplé. Ce modèle est utilisé par la suite pour obtenir la représentation multimodèle floue de type Takagi-Sugeno. La loi de commande PDC présentée dans le deuxième chapitre a été appliquée pour stabiliser le quadrirotor, ensuite on a étendu l'application pour réaliser une poursuite d'une trajectoire donnée.

Dans la dernière partie, on a fait appel aux techniques de diagnostic des défauts et de la commande tolérante aux défauts présentées dans le chapitre 3, afin d'élaborer des lois de commandes stabilisantes et aussi réaliser le suivi de trajectoire en présence de défauts. la combinaison des techniques de commande floue et des techniques de diagnostic de défauts a permis de synthétiser des commandes tolérantes aux défauts permettant la stabilisation et la poursuite parfaite des trajectoires désirées.

# Conclusion générale

Ce travail a pour objectif d'appliquer des techniques de commande tolérante aux défauts aux systèmes non linéaires décrits par des multimodèles flous de type Takagi-Sugeno, c'est une conséquence de la combinaison de plusieurs approches et méthodes, en effet, on a fait intervenir des techniques de modélisation, de commande et de diagnostic de défauts pour réaliser cet objectif. L'application a traité le cas d'un modèle non linéaire instable en boucle ouverte décrivant un quadrirotor.

Dans le cadre de la modélisation des systèmes non linéaires par l'approche multimodèle floue de type T-S, on a considéré uniquement le cas des variables de prémisse mesurables, cependant l'étude peut être élargie vers le cas des variables de prémisse non mesurables, un terme sera généré par la différence entre les fonctions d'activation en fonction des variables mesurées dans le cas mesurable et celles en fonction des valeurs estimées dans le cas contraire, ce terme sera considéré comme une perturbation à prendre impérativement en considération lors des développements nécessaires. Dans ce même contexte de modélisation par approche T-S, nous nous sommes intéressés à l'étude et l'analyse de la stabilité des multimodèles flous ainsi obtenus, des contraintes et des conditions suffisantes de stabilité ont été données dans le chapitre 2 sous formes de LMIs, en outre, on a considéré également le cas des systèmes instables, et on a utilisé la méthode PDC pour leur stabilisation par retour d'état, on a étendu le travail pour essayer de réaliser une poursuite de trajectoire, le régulateur flou conçu se base sur le même ensemble flou que le système représenté par l'approche multimodèle T-S, cette approche permet aussi d'appliquer et d'étendre des méthodes de l'automatique linéaire au cas non linéaire, ce qui est puissant et génial d'un point de vue pratique.

Dans le contexte de diagnostic des défauts, notamment l'estimation, l'approche adoptée s'appuie sur l'estimation simultanée de l'état du système et des défauts, par le biais d'un observateur PI, construit par la résolution des contraintes LMIs présentées dans le chapitre 3, cette estimation est le résultat du diagnostic fait par le bloc FDI, elle sera exploitée par la suite par un second bloc FTC pour compenser les défauts et élaborer la loi de commande dite tolérante aux défauts.

Le dernier chapitre était dédié à l'application des concepts présentés et des résultats obtenus dans les chapitres qui le précèdent à un système non linéaire couplé qui est le quadrirotor. Nous avons constaté bien l'efficacité des approches utilisées, les résultats obtenus étaient généralement acceptables, cependant on peut les améliorer. En effet, les contraintes de stabilité des multimodèles étaient conservatrices, on peut utiliser des théorèmes de relaxation pour permettre à l'algorithme de rechercher dans des do-

maines plus larges dans l'espoir de trouver des solutions meilleures, ainsi, dans le cas de poursuite, parfois le régulateur conçu présente des limitations notamment lorsque les références sont à haute fréquence, la même remarque était constatée pour les observateurs PI lorsque les entées inconnues à estimer varient plus rapidement puisque théoriquement ils sont conçus pour des signaux constants, la manipulation des LMI et des contraintes peut servir à confronter ceci, mais parfois conduit à l'augmentation des gains, ce qui améliore la rapidité et les performances mais risque de provoquer des oscillations, des dépassements ou voir même l'instabilité, on propose alors d'utiliser des approches plus performantes, par exemple les observateurs PMI qui permettent de couvrir une classe plus large de signaux qui peuvent être estimés simultanément, une autre stratégie intéressante qu'on a constatée, qui est l'utilisation d'un banc d'observateurs pour améliorer la qualité et la précision de l'estimation et permet aussi d'éviter les fausses alarmes. On propose également d'élargir le travail et l'étendre au cas des variables de décision non mesurables.

# Bibliographie

- [1] K. Tanaka et M. Sugeno, "Stability analysis and design of fuzzy control systems," *Fuzzy Sets and Systems*, 45(2) : 135-156,1992.
- [2] K. Tanaka et H.O. Wang, *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*, 2001
- [3] Y. Morère, "Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno, " Thèse de doctorat, LAMIH-SF, de l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2001.
- [4] *Systèmes non linéaires*, Tome 1,2 et 3, ouvrage collectif réalisé dans le cadre du Groupe Non Linéaire DRET/AFCEC coordonné par : A.J.FOSSARD et NORMAND-CYROT. Editions MASSON.
- [5] *Automatique des systèmes linéaires*, Tome 1, 2 et 3, P. de Larminat et Y.Thomas. Editions Flammarion Sciences.
- [6] Ron J Patton, *FAULT-TOLERANT CONTROL SYSTEMS*. The university of Hull, School of Engineering.
- [7] R. J. Patton, J. Chen, et C. J. Lopez-Toribio." Fuzzy observer for nonlinear dynamic systems fault diagnosis," *IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA. 1998.
- [8] M. S. LAZEREGUE, H. SALHI and M.TADJINE, Analytical and neuro-fuzzy modeling for fault detection and identification for nonlinear systems : application to robot manipulator, *Archives of Control Sciences* Volume 19(LV), 2009 No. 3, pages 325-350
- [9] Viorel Stoian, Mircea Ivanescu, *Robot Control by Fuzzy Logic*, University of Craiova, Romania
- [10] Claudio Bonivento, Luca Gentili and Andrea Paoli, Internal model based fault tolerant control of a robot manipulator, MIUR and EC-Project IFATIS, the IST programme 2001, University of Bologna
- [11] Mohammed Chadli *Stabilité et commande de systèmes décrits par des multimodèles : Approche LMI*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, Février 2004 <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004605>



- [12] Dalil Ichalal, Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, Novembre 2009 <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00454793>
- [13] Mohammed OUDGHIRI, Commande multi-modèles tolérante aux défauts : Application au contrôle de la dynamique du véhicule automobile. Thèse de doctorat, L'UNIVERSITE DE PICARDIE JULES VERNE, France, Février 2009 <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00357731>
- [14] Souad Bezzaoucha, Commande tolérante aux défauts de systèmes non linéaires représentés par des modèles de Takagi-Sugeno. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, France, Février 2014 <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00948345>
- [15] Djamel OUNNAS, Contribution au Diagnostique et à la Commande Passive Tolérante aux Défauts des Systèmes non Linéaires. Thèse de doctorat, Université FERHAT ABBAS Setif, Algérie, Février 2018 [http://dspace.univ-setif.dz:8888/jspui/bitstream/123456789/2011/1/Th%C3%A8se\\_DR\\_SC\\_AUT\\_OUNNAS\\_2018.pdf](http://dspace.univ-setif.dz:8888/jspui/bitstream/123456789/2011/1/Th%C3%A8se_DR_SC_AUT_OUNNAS_2018.pdf)
- [16] Samir Aberkane, Systèmes tolérant aux défauts : analyse et synthèse stochastiques. Thèse de doctorat, Université de Nancy, France, juin 2007 <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00151379>
- [17] Salowa Methnani, Diagnostic, reconstruction et identification des défauts capteurs et actionneurs : application aux station d'épurations des eaux usées. Thèse de doctorat, Université de Sfax, Tunisie, juillet 2013 <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00843868>
- [18] Boumedyen Boussaid, Contribution à la tolérance active aux défauts des systèmes dynamiques par gestion des références. Thèse de doctorat, Université de Nancy, France, Ecole nationale d'ingénieurs de Gabès, Tunisie, September 2011 <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00624964>
- [19] Hakim Achour, Application des techniques modernes de l'automatique à l'automobile : Aspects motorisation et confort. Thèse de magister, École Nationale Polytechnique, Alger, janvier 2010.
- [20] Hicham Khebbache, Tolérance aux défauts via la méthode backstepping des systèmes non linéaires Application : Système UAV de type Quadrirotor. Thèse de magister, Université Ferhat Abbas de setif, Algérie, juin 2012 <http://www.univ-setif.dz/MMAGISTER/images/facultes/TEC/2012/KHEBBACHEHICHAM.pdf>
- [21] Sabrina Aouaouda, Modélisation multimodèle et commande prédictive d'une station d'épuration. Thèse de magister, l'Université de Badji Mokhtar Annaba, Algérie, 2012 <http://biblio.univ-annaba.dz/wp-content/uploads/2015/01/AOUAOUA-Sabrina.pdf>
- [22] Nadjoui Mohammed Faouzi, Ziouani Islam, Diagnostic de systèmes non linéaires par l'approche multimodèle floue de T-S. Application au quadrirotor. Memoire de projet de fin d'étude, Ecole nationale polytechnique, Algérie, juin 2015.

- [23] Taous M. Laleg, Contribution aux Méthodes de Diagnostic à Base d'Observateurs et à la Commande Tolérante aux Défauts Application à la Machine Asynchrone et au Robot SCARA. Thèse d'ingénieur d'état, École Nationale Polytechnique, Algérie, juin 2004
- [24] BOULAREM Adel, DIAGNOSTIC DES SYSTEMES NON LINEAIRE REPRESENTES PAR MULTI-MODELE. Memoire de Master, universite de Msila, Algérie, 2013 <http://dspace.univ-msila.dz:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/10580/2013.5.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [25] Damien Koenig and Saïd Mammar, Design of Proportional-Integral Observer for Unknown Input Descriptor Systems. IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL. 47, NO. 12, DECEMBER 2002 <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.463.2023&rep=rep1&type=pdf>
- [26] Ahmed Hafafa, Ferhat Laaouad et Kouider Laroussi, Utilisation de la méthode FDI pour la localisation de défauts de fonctionnement d'un processus non linéaire. 4th International Conference on Computer Integrated Manufacturing CIP'2007, November 2007 [https://www.univ-setif.dz/cip2007/Theme\\_A/Articles\\_A/A33.pdf](https://www.univ-setif.dz/cip2007/Theme_A/Articles_A/A33.pdf)
- [27] Zsófia Lendek, Thierry Marie Guerra, Robert Babuška, and Bart De Schutter. Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi-Sugeno Fuzzy Models. 2010 <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02446398>
- [28] Nabil Farah, M. H. N. Talib, Z. Ibrahim, J. M. Lazi, Maaspaliza Azri, Self-tuning Fuzzy Logic Controller Based on Takagi-Sugeno Applied to Induction Motor Drives. International Journal of Power Electronics and Drive System (IJPEDS) Vol. 9, No. 4, December 2018 [https://www.academia.edu/42299897/Self\\_tuning\\_Fuzzy\\_Logic\\_Controller\\_Based\\_on\\_Takagi\\_Sugeno\\_Applied\\_to\\_Induction\\_Motor\\_Drives](https://www.academia.edu/42299897/Self_tuning_Fuzzy_Logic_Controller_Based_on_Takagi_Sugeno_Applied_to_Induction_Motor_Drives)
- [29] Zsófia Lendek, Thierry Marie Guerra, Robert Babuška, and Bart De Schutter. Stability Analysis and Nonlinear Observer Design Using Takagi-Sugeno Fuzzy Models. 2010 <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02446398>
- [30] Brian González-Contreras, Contribution à la Tolérance aux Défauts des Systèmes Linéaires : Synthèse de Méthodes d'Accommodation Fondée sur l'Information du Second Ordre. April 2009 <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00377104>,

# Annexes

## Stabilité des systèmes au sens de Lyapunov

Dans ce mémoire nous avons abordé la question de stabilité des systèmes dynamiques dans le chapitre 2, on a étudié également le cas des systèmes instables, et on a présenté une méthode pour la stabilisation des systèmes représentés par les multimodèles flous de type Takagi-Sugeno. Ces développements sont basés sur les travaux du mathématicien russe Alexandre Lyapunov qui ont apporté une grande contribution à l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques qu'ils soient linéaires ou non.

Considérons un système dynamique quelconque non commandé appelé système libre, il peut être défini par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{A.1}$$

Où  $x(t)$  est le vecteur d'état du système, la fonction  $f(x(t))$  est dite fonction d'état, elle décrit la dynamique du système, on définit un point d'équilibre  $x_0$  comme suit :

**Définition A.1.** *le point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  est un point d'équilibre du système A.1 si :*

$$f(x_0(t)) = 0, \forall t > 0 \tag{A.2}$$

Un système dynamique peut avoir un ou plusieurs points d'équilibre, dans la littérature souvent on considère le point d'équilibre  $x_0 = 0$  pour l'étude, cependant lorsque  $x_0 \neq 0$  ça ne change rien dans l'étude, puisque il suffit de considérer une simple translation, et  $x_0 \neq 0$  est un point d'équilibre du système  $\dot{z}(t) = f(z(t) + x_0)$ .

Un point d'équilibre peut être stable ou non, plusieurs tentatives et méthodes développées pour définir cette notion de stabilité intuitivement et explicitement, d'une façon intuitive on considère qu'un point d'équilibre est stable, si lorsqu'il est légèrement écarté, il reste proche de ce point ou il rejoint sa position initiale d'équilibre. On remarque que la notion de stabilité n'est pas nécessairement une propriété intrinsèque du système, par exemple, on peut dire qu'un moteur électrique est stable vis-à-vis de sa vitesse, (élévation finie de la tension correspond à une élévation finie de la vitesse), cette définition correspond à la stabilité BIBO ( entrée bornée, sortie bornée), dans ce qui suit, nous présentons quelques définitions formelles et méthodes explicites pour étudier la stabilité.

**Définition A.2.** Un espace vectoriel  $E$  est dit normé lorsqu'il existe une application :  $x \rightarrow \|x\|$  de  $E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- $\|x\| \geq 0 \forall x \in E; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

On donne quelques exemples de normes vectorielles :

- **La norme euclidienne :** notée  $\|x\|_2$  et définie par :  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2}$
- **La norme  $l_1$**  notée  $\|x\|_1$  et définie par :  $\|x\|_1 = \sum_{i=0}^n |x_i|$
- **La norme  $l_\infty$**  notée  $\|x\|_\infty$  et définie par :  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Ainsi, on peut définir les normes matricielles comme suit :

**Définition A.3.** Une norme matricielle est une application qui associe à chaque matrice  $A$  un réel noté  $\|A\|$  vérifiant :

- $\|A\| \geq 0 \forall A; \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A : \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

La norme de Frobenius est par exemple une norme matricielle notée  $\|A\|_F$  et définie par :  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$ , tels que  $a_{ij}$  sont les éléments de la matrice  $A$ .

**Définition A.4.** le point  $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$  est dit stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \|x(0)\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0, \|x(t)\| < \epsilon$$

## A.1 stabilité des systèmes linéaires

soit un système linéaire libre i.e :  $f(x(t)) = Ax(t)$  , si  $A$  est inversible alors le système linéaire possède un point d'équilibre  $x_0 = 0$  et il est unique, les critères de stabilité d'un système linéaire dépend de l'analyse spectrale de la matrice  $A$ , en effet :

- $\dot{x} = Ax$  est asymptotiquement stable  $\Leftrightarrow \Re(\lambda_i(A)) < 0 \forall i$
- $\dot{x} = Ax$  est stable  $\Leftrightarrow \Re(\lambda_i(A)) \leq 0$
- $\dot{x} = Ax$  est instable si il n'est pas stable c'est à dire  $\exists i, \Re(\lambda_i(A)) > 0$

avec :  $(\lambda_i(A))$  valeur propre de  $A$ ,  $\Re(\lambda_i(A))$  sa partie réelle. Sachant que les valeurs propres d'une matrice  $A$  sont les racines de son polynôme caractéristique, un critère a été développé pour étudier la stabilité par l'étude des signes des racines du polynôme, il est appelé le critère de Routh-Hurwitz.

## A.2 Première méthode de Lyapunov

Dite la méthode de la première approximation, elle repose sur l'étude de la stabilité locale d'un système non linéaire au voisinage d'un point de fonctionnement et se base sur une linéarisation des équations d'état autour de ce point.

Soit le système non linéaire donné par :  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ,  $f(0) = 0$  avec le point d'équilibre  $x_0 = 0$

Par un développement de Taylor on peut faire l'approximation de première ordre suivante :

$$f(x)|_{x_0} \simeq x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0}(x - x_0) \quad (\text{A.3})$$

Sachant que  $x_0 = 0$  et en posant  $\frac{\partial f}{\partial x}|_{x_0} = A_0$  on obtient l'approximation :

$$\dot{z}(t) = A_0 z(t) \quad (\text{A.4})$$

Le système A.4 est une approximation du système non linéaire A.3 au voisinage du point d'équilibre  $x_0$  (l'origine dans ce cas), il est appelé le linéarisé. la matrice  $A$  est la jacobienne de  $f$  en  $x_0$ .

La première méthode de Lyapunov utilise les résultats concernant les systèmes linéaires A.1 pour conclure sur la stabilité du système non linéaire A.3 au voisinage du point d'équilibre  $x_0$  considéré. En effet :

Si  $z = 0$  est asymptotiquement stable  $\Rightarrow x = 0$  est localement AS stable

Si  $z = 0$  est instable  $\Rightarrow x = 0$  est instable

Cependant, lorsque  $z = 0$  est juste stable sans l'être asymptotiquement, alors on ne peut rien conclure en ce qui concerne la stabilité ou non du système non linéaire au voisinage de  $x_0$ . Ce qui peut être considéré comme une limitation de cette méthode qui ne peut pas étudier le cas critique, ainsi l'aspect qualitatif de cette méthode est un autre inconvénient, en outre, il est nécessaire de pouvoir calculer de manière explicite chaque solution correspondant à chacune des conditions initiales. Lyapunov a continué d'étudier la stabilité des systèmes, et il a proposé sa deuxième méthode dite la méthode directe.

## A.3 Deuxième méthode de Lyapunov

Elle est dite la méthode directe de Lyapunov, elle permet de savoir si un point d'équilibre est stable ou non sans avoir à résoudre l'équation différentielle, en donnant des conditions de stabilité suffisantes et non nécessaires, l'idée est d'utiliser une distance de  $x(t)$  à l'équilibre  $x_0$  et ramener l'étude à une fonction scalaire plus simple à étudier. Elle s'inspire d'une réalité physique qui affirme que si l'énergie d'un système est dissipée continuellement dans le temps, alors il devra rejoindre un point d'équilibre. Cette méthode est valable pour les systèmes linéaires et non linéaires, elle présente l'avantage de ne pas exiger ni la solutions de l'équation d'état ni la connaissance des pôles du système.

On définit une fonction candidate de Lyapunov comme suit :

Soit  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$

**Définition A.5.** *La fonction  $V$  est une fonction de candidate de Lyapunov si elle est définie positive, c'est à dire : si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- $V(0) = 0$
- $V(x) > 0, x \neq 0$

On définit une fonction de Lyapunov comme suit :

**Définition A.6.** *La fonction  $V$  est une fonction de Lyapunov si les conditions suivantes sont vérifiées :*

- $V(x) > 0$  sauf en  $x = 0$  où  $V(0) = 0$
- $\dot{V}(x) \leq 0$

La stabilité au sens de Lyapunov avec la méthode directe est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 5.** *S'il existe une fonction de Lyapunov pour le système A.1 en  $x_0$  alors l'origine  $x_0 = 0$  est stable.*

*de plus, si  $x \neq 0 \Rightarrow \dot{V}(x) < 0$  alors  $x_0$  est asymptotiquement stable.*

Il est à noter qu'il n'existe pas une méthode générale ou systématique pour obtenir les fonctions de Lyapunov, cependant, la nature du système peut aider à choisir dans certains cas une fonction de Lyapunov adéquate. Une classe des fonctions largement utilisée : les fonctions de Lyapunov quadratiques qu'on a utilisées pour l'étude de la stabilité et la stabilisation des multimodèles flous T-S dans ce mémoire.

Une fonction quadratique de Lyapunov prend la forme suivante :  $V(x) = x^T(t)Px(t)$ .  $V(x)$  est définie positive si la matrice  $P$  est symétrique définie positive  $P^T = P > 0$ .

**A.3.1 Application aux systèmes linéaires LTI**

Soit le système linéaire :  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  avec  $A$  inversible. On choisit la fonction de Lyapunov comme étant la fonction quadratique suivante :  $V(x) = x^T(t)Px(t)$ , le théorème suivant donne une condition de la stabilité asymptotique de l'origine  $x_0$

**Théorème 6.**  $x_0 = 0$  de  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  est asymptotiquement stable si et seulement si  $\forall Q = Q^T > 0 \exists P > 0$  solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$A^T P + PA + Q = 0 \tag{A.5}$$



## Les inégalités linéaires matricielles LMIs

### B.1 Définition d'une LMI

Plusieurs problèmes d'optimisation peuvent être formulés avec des problèmes convexes et résolus en utilisant les LMIs (Linear Matrix Inequalities).

**Définition B.1.** Une LMI est une égalité matricielle de la forme :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (\text{B.1})$$

Où :  $x \in \mathbb{R}^m$  est une variable,  $F_i = F_i^T, i = 1, \dots, m$  sont des matrices symétriques données,  $F(x)$  est une fonction affine en les variables de décision  $x_i, i = 1, \dots, m$ .

L'ensemble des solutions  $S = \{x \in \mathbb{R}^m, F(x) < 0\}$  est convexe. La résolution peut se faire à l'aide des algorithmes performants, elle peut être obtenue avec des outils disponibles comme le : "LMI Control Toolbox " de MATLAB, il existe ainsi des interfaces et méthodes compatibles avec MATLAB comme YALMIP et SeDuMi.

### B.2 obtention des LMIs

Parfois, dans certains problèmes en automatique, on obtient des inégalités non linéaires (non convexes), on essaye de les transformer alors en des LMIs, pour utiliser leurs puissance et avantages, plusieurs méthodes existent pour le faire, on présente à titre d'exemple la méthode basée sur le lemme suivant dite le complément de Schur.

**Lemme 2** (Complément de Schur). Soient trois matrices  $Q(x) = Q(x)^T, R(x) = R(x)^T$  et  $S(x)$  affines par rapport à la variable  $x$  Les LMIs suivantes sont équivalentes :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.2})$$

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T \quad (\text{B.3})$$

En d'autres termes l'inégalité matricielle non linéaire (B.3) est transformée en LMI (B.2).

## B.3 Problèmes classiques LMI

Parmi les problèmes d'optimisation convexe les plus rencontrés sous forme de LMI on trouve :

- **Problème de réalisabilité (Faisabilité)** : il s'agit de trouver  $x$  tel que la contrainte convexe  $F(x) < 0$  est satisfaite. Ce problème peut être résolu en cherchant le vecteur  $x$  minimisant le scalaire  $t$  tel que :

$$F(x) < tI_n \quad (\text{B.4})$$

Si la valeur minimale de  $t$  est négative, le problème est réalisable (faisable).

- **Problème de valeurs propres (EVP, Eigenvalue Problems)** : il consiste à minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice  $A(x)$  sous une contrainte de type LMI, il s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{l} \text{minimiser } \lambda \\ \text{sous les contraintes } \end{array} \begin{cases} \lambda I - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Où les matrices  $A(x)$  et  $B(x)$  sont symétriques et linéaires par rapport à la variable  $x$ .

- **Problème de valeurs propres généralisées (GEVP, Generalized Eigenvalue Problems)** : il consiste à minimiser la plus grande valeur propre généralisée d'une paire de matrices, par rapport à une contrainte LMI :

$$\begin{array}{l} \text{minimiser } \lambda \\ \text{sous les contraintes } \end{array} \begin{cases} \lambda B(x) - A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Où les matrices  $A(x)$ ,  $B(x)$  et  $C(x)$  sont des matrices symétriques.

